



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PATRÍCIA RENATA PEREIRA REGIS

TEORIA DE SCHAUDER VIA PRINCÍPIO DO MÁXIMO, PELO
MÉTODO DA COMPACIDADE E VIA POTENCIAL NEWTONIANO

FORTALEZA

2018

PATRÍCIA RENATA PEREIRA REGIS

TEORIA DE SCHAUDER VIA PRINCÍPIO DO MÁXIMO, PELO MÉTODO DA
COMPACIDADE E VIA POTENCIAL NEWTONIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Jose Ederson Melo Braga

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- R265t Regis, Patrícia Renata Pereira.
Teoria de Schauder via princípio do máximo, pelo método da compacidade e via potencial newtoniano / Patrícia Renata Pereira Regis. – 2018.
74 f.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.
1. Teoria de Schauder. 2. Equação de Poisson. 3. Continuidade Hölder. 4. Princípio do Máximo. 5. Potencial Newtoniano. I. Título.

CDD 510

PATRÍCIA RENATA PEREIRA REGIS

TEORIA DE SCHAUDER VIA PRINCÍPIO DO MÁXIMO, PELO MÉTODO DA
COMPACIDADE E VIA POTENCIAL NEWTONIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: -- / -- / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. JOSÉ EDERSON MELO BRAGA (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. DIEGO RIBEIRO MOREIRA
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. RENAN DANTAS MEDRADO
Universidade Federal do Ceará - Campus Sobral (UFC)

Dedico este trabalho aos meus pais, Ivoneide e Roberto; as minhas irmãs, Benedita e Bianca; às tias Silvia e Teresa; ao pequeno Arthur; e ao meu namorado, Denilson.

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo, à Deus.

À minha família e namorado, por tanto incentivo, amor recíproco e compreensão nos momentos de ausência.

Aos professores que tive ao longo da vida, em especial ao meu professor e orientador de graduação, Flávio Alexandre Falcão Nascimento, por me mostrar quão bela é a Matemática e ter me conduzido a este caminho que, hoje tanto me orgulha em ter traçado. Imensamente grata ao orientador de mestrado, Jose Ederson Melo Braga, pela disponibilidade, eficiência e paciência constante.

Grata às amigas conquistadas, e assim, aos momentos de alegrias e de dificuldades compartilhados. Agradeço ao amigo, companheiro de graduação, Alexandre Gomes Sousa, pela enorme ajuda com a digitação.

À secretária da Pós-Graduação, Andrea Costa Dantas, pelos inúmeros serviços prestados, bem como os outros servidores do Departamento de Matemática. E à todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho e conclusão desta jornada.

”Foi o tempo que dedicaste à tua rosa que a fez tão importante.”

(ANTOINE DE SAINTE-EXUPERY – O PEQUENO PRÍNCIPE)

RESUMO

A continuidade do operador Laplaciano aplicado em uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ não garante que a função seja de classe $C^2(\Omega)$. Todavia, a teoria de regularidade de Schauder nos garantirá que se Δu for α -Hölder contínuo, então u será localmente $C^{2,\alpha}(\Omega)$, isto é, cada derivada parcial de segunda ordem $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq n$, será $C_{loc}^{0,\alpha}$. Nesta dissertação estabeleceremos a Teoria $C^{2,\alpha}$ de Schauder por três métodos: via Princípio do Máximo, pelo Método da Compacidade e Potencial Newtoniano. Em cada método trabalhamos suas peculiaridades para obtermos as estimativas almejadas. Algumas técnicas que abordaremos aqui podem ser estendidas para operadores mais gerais. No entanto, todas as dificuldades centrais já aparecem quando consideramos o operador Laplaciano (Equação de Poisson). Por esta razão este é o operador que consideraremos em toda a extensão do trabalho.

Palavras-chave: Teoria de Schauder. Equação de Poisson. Continuidade α -Hölder. Princípio do Máximo. Potencial Newtoniano.

ABSTRACT

The continuity of the Laplacian operator of a function $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ does not guarantee that the function is of class $C^2(\Omega)$. However, Schauder's regularity theory will assure us that if Δu is α -Hölder continuous, then u will be locally $C^{2,\alpha}(\Omega)$, this is, each second-order partial derivative $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq n$, will be $C_{loc}^{0,\alpha}$. In this dissertation, we will establish Schauder's Theory $C^{2,\alpha}$ by three methods: by the Maximum Principle, by the Method of Newton's Compassion and by Potential. In each method, we work on its peculiarities to obtain the desired estimates. Some techniques that we will cover here can be extended to more general operators. On the other hand, all the central difficulties already appear when we consider the Laplacian operator (Poisson equation). For this reason, this is the operator we will consider throughout the work.

Keywords: Schauder's Theory. Poisson's equation. α -Hölder continuity. Maximum principle. Newtonian Potential.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	NOTAÇÃO	12
3	RESULTADOS PRELIMINARES	13
3.1	Funções Harmônicas	13
3.2	Solução Fundamental para a Equação de Laplace	21
3.3	Análise Real/ Análise Funcional	24
4	TEORIA DE SCHAUDER VIA PRINCÍPIO DO MÁXIMO .	26
4.1	Estimativas a priori	26
4.2	Teorema principal via Princípio do Máximo	30
5	TEORIA DE SCHAUDER VIA MÉTODO DA COMPACIDADE	42
5.1	Estimativas de aproximação e de Cacciopoli	42
5.2	Teorema principal via Método da Compacidade	46
6	TEORIA DE SCHAUDER VIA POTENCIAL NEWTONIANO	56
6.1	O Potencial Newtoniano	56
6.2	Teorema principal via Potencial Newtoniano	66
7	CONCLUSÃO	72
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

Dentre os interesses no estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDP), um dos mais importantes diz respeito à investigação da regularidade de soluções de uma EDP, homogênea ou não. O presente trabalho tem esse objetivo, lidando com o operador linear Laplaciano e tratando portanto, com Equações de Poisson $\Delta u = f$.

É sabido que a continuidade do Laplaciano de uma função Δu não implica $u \in C^2$, embora a recíproca seja imediata. Um exemplo disto pode ser construído tomando uma função $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave satisfazendo $\eta \equiv 1$ em B_1 e $\eta \equiv 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus B_2$, e definindo $f(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \cdot \Delta[\eta(x, y)xy](2^i xy)$. Verifica-se que f é contínua, mesmo não havendo solução $u \in C^2$ da equação $\Delta u = f$.

Em contrapartida, existe uma outra espécie de continuidade para o Laplaciano de u que implica regularidade de função u , a continuidade α -Hölder. Daí surge a Teoria da Regularidade de Schauder. Ela nos garante que se f for uma função α -Hölder contínua, então as soluções da equação $\Delta u = f$ são de classe $C_{loc}^{2,\alpha}$. Em outras palavras, basta que o traço da matriz Hessiana de uma função u seja α -Hölder contínua para que cada entrada dessa matriz seja uma função localmente α -Hölder contínua.

Veremos isto em três situações diferentes: via Princípio do Máximo, pelo Método da Compacidade e Potencial Newtoniano. Nos dois primeiros estimaremos apenas em vizinhanças da origem observando que o problema pode ser estendido à outros pontos por meio de mudanças de variáveis, e mostraremos ser suficiente considerar os casos especiais de problemas em que $f(0) = 0$, as semi-normas $[f]_{C^\alpha(0)}$, $[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)}$ e as normas $\|u\|_{L^\infty(B_1)}$, $\|u\|_{L^2(B_1)}$ são razoavelmente pequenas.

No método via Princípio do Máximo obteremos, por argumento de barreira para subsoluções e supersoluções da equação $\Delta u = f$, a seguinte aproximação da solução u por uma função harmônica h : $\|u - h\|_{L^\infty(B_1)} \leq \frac{1}{2^n} \sup_{B_1} |f|$, em que $\sup_{B_1} |f| \leq [f]_{C^\alpha(0)}$ quando $f(0) = 0$. O Polinômio de Taylor da função h , de ordem 2 e em torno da origem, estará próximo de u de tal modo que, recursivamente, construiremos uma sequência de Cauchy de polinômios quadráticos e harmônicos. O polinômio limite dessa sequência nos dará a regularidade $C^{2,\alpha}(0)$ de u .

O desenvolvimento do segundo método se dará análogo ao primeiro com suas devidas adaptações. Ao se tratar de soluções fracas e α -Hölder continuidade no sentido L^2 , observaremos a estimativa de Cacciopoli, também conhecida como estimativa da energia, com a finalidade de obtermos limitação de sequências no espaço reflexivo $H^1(B_1)$, e conseqüentemente, convergência (fraca). Isto aproximará (no sentido L^2) a solução u por polinômios quadráticos e harmônicos. Novamente de modo recursivo construiremos uma sequência de polinômios quadráticos e tomaremos o limite como o indicador para a obtenção do resultado desejado.

Por fim, mostraremos que para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e $f \in C_{loc}^\alpha(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

o Potencial Newtoniano de f relativo ao domínio Ω é solução da Equação de Poisson $\Delta u = f$. Isto será feito por meio de convoluções, aplicações do Teorema da Derivação Termo a Termo e estimativas para a Solução Fundamental da Equação de Laplace, a qual dedicaremos uma seção no capítulo de resultados preliminares. Como o Critério da Comparação nos fornece a unicidade de solução, fica provada a Teoria de Schauder mostrando que o Potencial Newtoniano de f é $C_{loc}^{2,\alpha}$.

Na verdade, esse mesmo resultado de regularidade ainda é válido para o operador $L(u) := \text{Tr}(A(x)D^2(x))$ quando A é contínua e uniformemente elíptica, cujo caso particular é o Laplaciano Δu , que é gerada fazendo $A = I$. Levando em consideração que todas as dificuldades centrais já aparecem quando consideramos esse operador, o consideraremos em toda a extensão do trabalho.

2 NOTAÇÃO

1. Ω : Subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^n . Quando houver necessidade de alguma propriedade adicional, ela será citada no enunciado do resultado;
2. $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}$
3. $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < r\}$
4. $|\Omega| = \int_{\Omega} dx$ é o volume de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$;
5. α : Usaremos sempre $0 < \alpha \leq 1$;
6. Laplaciano: $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;
7. Equação de Laplace: $\Delta u = 0$;
8. Equação de Poisson: $\Delta u = f$;
9. Gradiente: $Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$;
10. Matriz Hessiano de u no ponto x : $Hu(x) = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{n \times n}$. Quando não houver risco de confusão usaremos apenas H ao invés de $Hu(x)$;
11. Valor-médio: $\int_{\Omega} u(x) dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$;
12. Semi-norma α -Hölder de f em x_0 : $[f]_{C^{0,\alpha}(x_0)} := \sup_{\substack{x \neq x_0 \\ x \in \Omega}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha}$;
13. Semi-norma α -Hölder: $[f]_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty$;
14. Semi-norma α -Hölder de f em x_0 no sentido L^2 :
 $[f]_{C_{L^2}^\alpha(x_0)} := \sup_{0 \leq r \leq 1} \frac{1}{r^\alpha} \left(\int_{B_r} |f(x) - f(x_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$;
15. Norma do supremo: $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} |f|$;
16. $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$
17. Norma L^2 : $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$;
18. $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \|f\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}$
19. $C^{0,\alpha}(x) = \{f; [f]_{C^\alpha(x)} < \infty\}$;
20. $C^{2,\alpha}(x) = \{f; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C^{0,\alpha}(x), i, j = 1, \dots, n\}$;
21. $C^{0,\alpha}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; [f]_{C^\alpha(\Omega)} < \infty\}$;
22. $C^{2,\alpha}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C^{0,\alpha}(\Omega), i, j = 1, \dots, n\}$;
23. $C_0^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \in C^k, \text{supp } f \text{ é compacto}\}$;
24. $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\}$, onde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ é derivada no sentido fraco;
25. Convolução $f * g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: $f * g(x) = \int_{\Omega} f(x - y) \cdot g(y) dy$.

3 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo estabeleceremos tudo aquilo que entendemos como pré-requisito para os capítulos seguintes. Tais como funções harmônicas, inclusive estimativas para a Solução Fundamental da Equação de Laplace, o Método de Perron, etc.

3.1 Funções Harmônicas

Definição 3.1 *Uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$, é dita harmônica (respectivamente, subharmônica/ superharmônica) no sentido clássico quando $\Delta u = 0$ (respectivamente, $\Delta u \geq 0$ / $\Delta u \leq 0$) em Ω .*

Quando temos uma solução $u \in C^2(\Omega)$ para a equação $\Delta u = f$ diremos que u é uma solução clássica da Equação de Poisson.

Chamaremos u de subsolução (respectivamente, supersolução) da Equação de Poisson $\Delta u = f$ quando $\Delta u \geq 0$ (respectivamente, $\Delta u \leq 0$) em Ω .

Observação:(Sobre soluções fracas - sentido das distribuições) Observando que nem toda função possui derivada no sentido clássico, surge a ideia de derivada fraca, que é uma função que se comporta de modo semelhante à derivada clássica, caso ela existisse.

Definição 3.2 *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e β um multi-índice. Dizemos que v é derivada parcial fraca de u com multi-índice β , e escrevemos $D^\beta u = v$, quando*

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot D^\beta \phi(x) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} v(x) \cdot \phi(x) dx$$

para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Tal definição é motivada pelo Teorema da Divergência que diz, no caso de $u \in C^1(\Omega)$, que para qualquer função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x) \cdot \phi_{x_i}(x) dx &= - \int_{\Omega} u_{x_i}(x) \cdot \phi(x) dx + \int_{\partial\Omega} u\phi(x) \cdot v_i(x) dS(x) \\ &= - \int_{\Omega} u_{x_i}(x) \cdot \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Aplicando esse a técnica k vezes, teríamos para $u \in C^k(\Omega)$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot D^\beta \phi(x) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^\beta u(x) \cdot \phi(x) dx$$

sempre que $|\beta| \leq k$. Quando não existe $D^\beta u$ no sentido clássico mas existe função v

satisfazendo a igualdade

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot D^{\beta} \phi(x) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} v(x) \cdot \phi(x) dx$$

para toda função $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, observamos que ela se comporta do modo em que a derivada de u se comportaria, motivado pelo fato de se

$$\int v \cdot \phi = \int \omega \cdot \phi, \forall \phi \in C_0^{\infty} \implies v = \omega \text{ q.t.p.,}$$

definimos $D^{\beta} u := v$ e a chamamos de derivada fraca.

Deste modo, diremos que u é solução fraca da Equação de Poisson $\Delta u = f$ em Ω quando $u \in H^1(\Omega)$ e satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = - \int_{B_1} f(x) \cdot \phi(x) dx,$$

para toda $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Se a função f for minimamente regular, digamos $f \in L^2(\Omega)$ podemos usar a partir de densidade de C_0^{∞} em H_0^1 que as identidades acima são verdadeiras para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Por fim, diremos que h é harmônica em Ω quando

$$\int_{\Omega} \nabla h(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, ou ainda, $\phi \in H_0^1(\Omega)$

Teorema 3.1 (Propriedade do valor médio) *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$, uma função harmônica. Então u satisfaz a propriedade da média, isto é, dado $B_r(x) \subset \Omega$ temos,*

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS y = \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

Prova. Fixado $x \in \Omega$ defina $\phi : (0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\delta = \sup\{r > 0; B_r(x) \subset \Omega\}$, por $\phi(r) = \int_{B_r(x)} u(y) dy$ e perceba que ϕ é constante.

Temos por mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dy \\ &= \frac{1}{|\partial B_1| r^{n-1}} \cdot \int_{\partial B_1} u(x + r\omega) r^{n-1} dS \omega \\ &= \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} u(x + r\omega) dS \omega. \end{aligned}$$

Usando regra da cadeia, mudança de variáveis novamente, e teorema da di-

vergência para o campo Du , obtemos

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} \langle Du(x + r\omega), \omega \rangle dS\omega \\
&= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_1} \langle Du(y), \frac{y-x}{r} \rangle \frac{1}{r^{n-1}} dSy \\
&= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dSy \\
&= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\phi \equiv c$.

Por outro lado, $\phi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} u(y) = u(x)$. Logo,

$$u(x) = \phi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} u(y) dSy, \quad \forall r \in (0, \delta).$$

Além disso, com respeito à média sob o disco, note que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x)} u(y) dSy &= \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y) dy \\
&= \frac{1}{|B_r(x)|} \int_0^r \int_{\partial B_t(x)} u(y) dy dt \\
&= \frac{1}{|B_r(x)|} \int_0^r |\partial B_t| \int_{\partial B_t(x)} u(y) dy dt \\
&= \frac{1}{|B_1(0)| r^n} \int_0^r |\partial B_1(0)| t^{n-1} u(x) dt \\
&= \frac{u(x)}{\frac{1}{n} |\partial B_1(0)| r^n} \int_0^r |\partial B_1(0)| t^{n-1} dt \\
&= \frac{n \cdot u(x)}{r^n} \cdot \frac{t^n}{n} \Big|_0^r = \frac{u(x)}{r^n} r^n = u(x).
\end{aligned}$$

■

Corolário 3.1 (da demonstração) *Seja $u \in C^2(\Omega)$ função subharmônica, isto é, $\Delta u \geq 0$. Então para todo $\partial B_r(x) \subset \Omega$ vale*

$$u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u(y) dy.$$

Prova. Vimos que fixado $x \in \Omega$ e definido ϕ como na demonstração do teorema acima, vale $\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dSy \geq 0$. O que implica ϕ não-decrescente.

Daí, pelo Teorema da Diferenciação de Lesbeque,

$$u(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B_t(x)} u(y) dS_y = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \inf \phi \leq \phi(r) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) dy,$$

para qualquer $r > 0$. ■

Analogamente, se $u \in C^2(\Omega)$ é uma função superharmônica, ou seja, $\Delta u \leq 0$, então

$$u(x) \geq \int_{\partial B_r(x)} u(y) dy$$

sempre que $B_r(x) \subset \Omega$.

Teorema 3.2 (Princípio do Máximo Fraco/Forte) *Seja, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$, uma função harmônica. Então,*

1. $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$
2. *Se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$, então u é constante.*

Prova. É suficiente provar o segundo item.

Suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = M := \max_{\bar{\Omega}} u$.

Pelo Teorema 3.1 e por $B_r(x_0) \subset \Omega$ para algum $r > 0$,

$$M = u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u(y) dy \Rightarrow \int_{B_r(x_0)} [M - u(y)] dy = 0.$$

Mas para que isso ocorra é necessário que $u|_{B_r(x_0)} \equiv M$, pois $M - u \geq 0$ e contínua. Isto significa que $X = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$ é aberto, fechado em Ω .

Por conexidade, $X = \Omega$ ou $X = \emptyset$. ■

Observação:

- (a) Observe que vale o Princípio do Mínimo para funções harmônicas. Precisamente:
 (1') $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$; (2') Se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} u$, então u é constante.
 Isto é consequência imediata do Princípio do Máximo para a função harmônica $-u$.

- (b) Para funções subharmônicas também vale o Princípio do Máximo.

A conexidade de $X = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$ é mostrada da mesma forma. É fechado pela continuidade de u , e se $x_0 \in \Omega$ é tal que $M = u(x_0)$, então

$$M = u(x_0) \leq \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) dy \Rightarrow \int_{\partial B_r(x_0)} [M - u(y)] dy \leq 0.$$

Mas $M - u \geq 0$. Então $M - u \equiv 0$ em $\partial B_r(x_0)$. E como teremos isto para qualquer $0 < t < r$, vem $M - u \equiv 0$ em $B_r(x_0)$. Indicando que X é aberto em Ω .

(c) Analogamente, se u é superharmônica, vale o Princípio do Mínimo.

Uma forte consequência desses fatos é o Critério da Comparação:

Corolário 3.2 (Critério da Comparação) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado e $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tais que*

$$\begin{cases} \Delta u \geq \Delta v, & \text{em } \Omega \\ u \leq v, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Então, $u \leq v$, em Ω .

Prova. De fato, aplicamos o Princípio do Máximo a função subharmônica $\omega := u - v$ e obtemos $\omega \leq 0$, em Ω . ■

Observação: Em particular, o seguinte problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

Tem única solução em $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Teorema 3.3 *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz a propriedade do valor-médio para cada $B_r(x) \subset \Omega$, então $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Prova. Seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde $C = C(n) > 0$ é a constante tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$.

Dado $\varepsilon > 0$ definimos $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Veja que $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \text{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon).$$

Para $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ em $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ tem-se $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Mostremos que u é suave verificando que $u|_{\Omega_\varepsilon} = u^\varepsilon$. De fato,

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\Omega} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) u(y)dydr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{B_\varepsilon(x)} u(y)dy \right) dr = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \cdot u(x) |\partial B_r(x)| dr \\
&= \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \cdot |\partial B(0,r)| dr = u(x) \int_0^\varepsilon \eta_\varepsilon(r) \left(\int_{\partial B(0,r)} dy \right) dr \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(0,r)} \eta_\varepsilon(r) dy dr = u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dy = u(x).
\end{aligned}$$

E finalizamos fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Em particular, $u \in C^2(\Omega)$ é uma função harmônica, então $u \in C^\infty(\Omega)$. Assim, faz sentido considerarmos de $D^\alpha u(x_0)$ para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice.

Teorema 3.4 (Estimativa das derivadas) *Se u é harmônica em Ω então*

$$\begin{aligned}
|u(x_0)| &\leq \frac{1}{|B_r|} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}; \\
|D^\alpha u(x_0)| &\leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{|B_1|} \cdot \frac{1}{r^{n+k}} \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \\
&= \frac{(2^{n+1}nk)^k}{|B_r| \cdot r^k} \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}
\end{aligned}$$

para toda bola $B_r(x_0) \subset \Omega$ e cada multi-índice α de ordem $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$.

Prova. A desigualdade $|u(x_0)| \leq \frac{1}{|B_r|} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$ vem da propriedade do valor médio e desigualdade triangular para integrais.

Para as derivadas, perceba que u_{x_i} é harmônica para cada $i = 1, \dots, n$:

$$\Delta u_{x_i} = \sum_{j=1}^n (u_{x_i})_{x_j x_j} = \sum_{j=1}^n (u_{x_j x_j})_{x_i} = (\Delta u)_{x_i} = 0.$$

Assim, pelo Teorema 3.1,

$$|u_{x_i}(x)| = \left| \frac{1}{|B_1| \left(\frac{r}{2}\right)^n} \int_{B_{\frac{r}{2}}(x)} u_{x_i}(y) dy \right| = \frac{2^n}{|B_1| r^n} \cdot \left| \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x)} u v_i(y) dy \right|$$

$$\begin{aligned}
|u_{x_i}(x)| &\leq \frac{2^n}{|B_1|r^n} \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x)} |u(y)| dy \leq \frac{2^n}{|B_1|r^n} \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x)} dy \cdot \|u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{r}{2}}(x))} \\
&= \frac{2^n}{|B_1|r^n} \cdot n|B_1| \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \cdot \|u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{r}{2}}(x))} \\
&= \frac{2n}{r} \cdot \|u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{r}{2}}(x))},
\end{aligned}$$

mas para $y \in \partial B_{\frac{r}{2}}(x)$ tem-se $B_{\frac{r}{2}}(y) \subset B_r(x)$. Então,

$$\begin{aligned}
|u(y)| &= \frac{1}{|B_1| \left(\frac{r}{2}\right)^n} \left| \int_{B_{\frac{r}{2}}(y)} u(z) dz \right| \leq \frac{1}{|B_1| \left(\frac{r}{2}\right)^n} \int_{B_{\frac{r}{2}}(y)} |u(z)| dz \\
&\leq \frac{2^n}{|B_1|r^n} \int_{B_r(x)} |u(z)| dz = \frac{2^n}{|B_1|r^n} \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x))}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{2n}{r} \cdot \|u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{r}{2}}(x))} \leq \frac{2n}{r} \cdot \frac{2^n}{|B_1|r^n} \|u\|_{L^1(B_r(x))} = \frac{2^{n+1}n}{|B_1|r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x))}.$$

Segue daí, a estimativa de $|D^\alpha u(x)|$ para $|\alpha| = 1$. Suponha válido para $|D^\beta u|$ com $|\beta| = k - 1$.

Para algum $i = 1, \dots, n$, faça $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$ e tenha

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x)| &= \frac{1}{|B_{\frac{r}{k}}|} \left| \int_{B_{\frac{r}{k}}(x)} D^\beta(u)_{x_i}(y) dy \right| = \frac{1}{|B_{\frac{r}{k}}|} \left| \int_{\partial B_{\frac{r}{k}}(x)} D^\beta u v_i(y) dy \right| \\
&\leq \frac{1}{|B_{\frac{r}{k}}|} \int_{\partial B_{\frac{r}{k}}(x)} |D^\beta u(y)| dy \leq \frac{1}{|B_{\frac{r}{k}}|} |\partial B_{\frac{r}{k}}| \cdot \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{r}{k}}(x))} \\
&\leq \frac{n|B_{\frac{r}{2}}|k}{|B_{\frac{r}{2}}|} \frac{1}{r} \cdot \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{r}{k}}(x))}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $y \in \partial B_{\frac{r}{k}}(x)$ então $B_{\frac{k-1}{k}r}(y) \subset B_r(x_0)$ e pela hipótese de estimativa para $|D^\beta u|$ obtemos

$$|D^\beta u(y)| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{|B_1| \left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \cdot \|u\|_{L^1(B(y, \frac{k-1}{k}r))} \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{|B_1| \left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Logo,

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{r}{k}}(x))} \leq \frac{nk}{r} \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{|B_1| \left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x)| &= \frac{(2^{n+1})^{k-1} n^k (k-1)^{k-1} k \cdot k^{n+k-1}}{|B_1| (k-1)^{n+k-1} r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \\
&= \frac{(2^{n+1})^k n^k}{|B_1| r^{n+k}} \left(\frac{k^{n+k}}{(k-1)^n \cdot 2^{n+1}} \right) \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.
\end{aligned}$$

Nos resta mostrar que

$$\frac{k^{n+k}}{(k-1)^n 2^{n+1}} \leq k^k \Leftrightarrow \frac{k^n k^k}{(k-1)^n} \leq 2^{n+1} k^k \Leftrightarrow \left(\frac{k}{k-1} \right) \leq 2^{n+1}.$$

Observe que a sequência $a_k = \frac{k}{k-1}$ é decrescente $(a_k)_{k \geq 2}$, pois

$$\begin{aligned}
k(k-2) &= k^2 - 2k < k^2 - 2k + 1 = (k-1)(k-1) \\
\Leftrightarrow a_k &= \frac{k}{k-1} < \frac{k-1}{k-2} = a_{k-1}.
\end{aligned}$$

Como $a_2 = 2$, teremos $a_k \leq 2 \Rightarrow \left(\frac{k}{k-1} \right)^n = a_k^n < 2^n < 2^{n+1}$.

Daí, conclui-se o desejado:

$$|D^\alpha u(x)| = \frac{(2^{n+1} n k)^k}{|B_1| \cdot r^{n+k}} \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x))}.$$

■

Observação: Essa estimativa da derivada nos fornece analiticidade para funções harmônicas.

Definição 3.3 Diremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição da esfera exterior para todo os ponto da fronteira quando dado $x \in \partial\Omega$ existir uma esfera que tangencia $\partial\Omega$ em x .

Teorema 3.5 (Método de Perron) Seja Ω domínio limitado satisfazendo a condição da esfera exterior para todo ponto da fronteira. Então para cada função $g \in C(\bar{\Omega})$, o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = g \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

admite uma solução $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Prova. Demonstração pode ser consultada em: HAN, Qing. *A basic course in partial differential equations*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.pág.132

■

Para mais informações sobre funções harmônicas, vide:

1. EVANS, Lawrence. *Partial differential equations*. 2 ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.

2. HAN, Qing. *A basic course in partial differential equations*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
3. HAN, Qing; LIN, Fanghua. *Elliptic partial differential equations*. 2 ed. Providence, Rhode Island: Courant Institute of Mathematical Sciences, 2000.

3.2 Solução Fundamental para a Equação de Laplace

Recordamos que a Solução Fundamental para a Equação de Laplace $\Delta u = 0$ é definida por $\gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log|x|, & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{n(2-n)|B_1|} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

e que pela Representação de Green, se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ em Ω domínio limitado C^1 , então para cada $x \in \Omega$ tem-se

$$u(x) = \int_{\Omega} \gamma(x-y) \cdot \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left(\gamma(x-y) \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}(x-y) \cdot u(y) \right) dS(y).$$

Em particular, tomada uma função teste $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem-se

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y) \Delta u(y) dy,$$

e conseqüentemente,

$$u(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(-y) \Delta u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \Delta u(y) dy.$$

Denotando $\Delta \gamma = \delta_0$, onde δ_0 é a *distribuição delta de Dirac*, fica explicado a terminologia Solução Fundamental para o operador laplaciano, pois δ_0 será o funcional satisfazendo $\delta_0[u] = u(0)$ em C_0^∞ .

Para a finalidade deste trabalho com a necessidade de estimar o Potencial Newtoniano, iremos apresentar estimativas para a solução fundamental.

Para a técnica de remoção da singularidade 0 da Solução Fundamental, estimemos $\int_{B_\epsilon(0)} |\gamma(y)| dy$ e $\int_{B_\epsilon(0)} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(y) \right| dy$, para $\epsilon > 0$ dado.

$$\begin{aligned} \int_{B_\epsilon(0)} |\gamma(y)| dy &= \int_0^\epsilon \int_{\partial B_r(0)} |\gamma(y)| dy dr = \int_0^\epsilon \int_{\partial B_r(0)} |\gamma(r)| dy dr \\ &= \int_0^\epsilon |\gamma(r)| \cdot |\partial B_r(0)| dr = n|B_1| \int_0^\epsilon r^{n-1} |\gamma(r)| dr \end{aligned}$$

$$\int_{B_\varepsilon(0)} |\gamma(y)| dy = \begin{cases} 2\pi \int_0^\varepsilon r \cdot \frac{|\log r|}{2\pi} dr, & \text{se } n = 2 \\ n|B_1| \int_0^\varepsilon \frac{r^{n-1}}{n(n-2)|B_1|r^{n-2}} dr, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{2} \left(|\log \varepsilon| + \frac{1}{2} \right), & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{2(n-2)} \cdot \varepsilon^2, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Agora, para $\int_{B_\varepsilon(0)} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(y) \right| dy$ observemos primeiro as derivadas parciais. Quando $n = 2$ temos

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x| = \frac{1}{2\pi} \log(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot \frac{1}{|x|} = \frac{x_1}{2\pi|x|^2}.$$

Analogamente

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_2}(x) = \frac{x_2}{2\pi|x|^2}.$$

Isto é,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{2\pi|x|^2} = \frac{x_i}{2\pi} \cdot (x_1^2 + x_2^2)^{-1}.$$

Então,

$$\left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x) \right| = \frac{|x_i|}{2\pi|x|^2} \leq \frac{1}{2\pi|x|} = \frac{1}{n|B_1| \cdot |x|^{n-1}}.$$

Para o caso $n \geq 3$,

$$\gamma(x) = \frac{1}{n(2-n)|B_1|} \frac{1}{|x|^{n-2}} = \frac{1}{n(2-n)|B_1|} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{2-n}{2}};$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{n(2-n)|B_1|} \cdot \left(\frac{2-n}{2} \right) \cdot 2x_1 \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{-n}{2}} = \frac{x_1}{n|B_1|} \frac{1}{|x|^n}.$$

Deste modo, em qualquer caso com $n \geq 2$ temos

$$\left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(x) \right| \leq \frac{1}{n|B_1| \cdot |x|^{n-1}}.$$

Obtendo

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon(0)} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(y) \right| dy &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{1}{n|B_1| \cdot |y|^{n-1}} dy = \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{n|B_1| \cdot |y|^{n-1}} dy dr \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{1}{n|B_1|r^{n-1}} \cdot |\partial B_r(0)| dr = \int_0^\varepsilon dr = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nas expressões com derivadas parciais de segunda ordem do Potencial Newtoniano surgirão parciais de segunda e terceira ordem da Solução Fundamental. Sendo assim, também façamos estimativas para tais parciais.

Quando $n = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{2\pi|x|^2 - 2x_i \cdot \pi \cdot 2x_i}{2\pi^2|x|^4} = \frac{1}{\pi|x|^2} \left(1 - \frac{2x_i^2}{|x|^2} \right); \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{0 - x_i \cdot \pi \cdot 2x_j}{2\pi^2|x|^4} = \frac{-2x_i x_j}{\pi|x|^4}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2}(x) \right| &= \frac{1}{\pi|x|^2} \cdot \left| 1 - \frac{2x_i^2}{|x|^2} \right| \leq \frac{1}{\pi|x|^2}; \\ \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| &= \frac{1}{\pi|x|^2} \cdot \left| \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right| \leq \frac{1}{\pi|x|^2}. \end{aligned}$$

Para $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{1}{n|B_i|} \frac{1}{|x|^n} + \frac{x_i}{n|B_i|} \left(\frac{-n}{2} \right) 2x_i \frac{1}{|x|^{n+2}} \\ &= \frac{1}{n|B_i| \cdot |x|^n} \left(\frac{1}{n} - \frac{x_i^2}{|x|^2} \right), \end{aligned}$$

e com $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2}(x) = \frac{x_i}{n|B_i|} \cdot \left(\frac{-n}{2} \right) \cdot 2x_j \cdot \frac{1}{|x|^{n+2}} = \frac{-x_i \cdot x_j}{|B_1| \cdot |x|^{n+2}}.$$

Potanto,

$$\left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right| = \frac{1}{|B_i| \cdot |x|^n} \cdot \frac{|x_j x_i|}{|x|^2} \leq \frac{1}{|B_1| \cdot |x|^n}$$

e

$$\left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2}(x) \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{x_i^2}{|x|^2} \right| \leq \frac{1}{|B_1| \cdot |x|^n}.$$

De todo modo,

$$\left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2}(x) \right| \leq \frac{1}{|B_1| \cdot |x|^n}.$$

Analogamente temos

$$\left| \frac{\partial^3 \gamma}{\partial x_i \partial x_l \partial x_k}(x) \right| \leq (n+5) \frac{1}{|B_1| \cdot |x|^{n+1}}.$$

3.3 Análise Real/ Análise Funcional

Teorema 3.6 (Teorema da Derivação Termo a Termo) *Se a sequência de aplicações diferenciáveis $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ convergem em um ponto $c \in \Omega$ e a sequência das derivadas $u'_k : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ converge de modo localmente uniforme para uma aplicação $g : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, então u_k converge de modo localmente uniforme para uma aplicação $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, a qual é diferenciável, com $u' = g$.*

Prova. Demonstração pode ser consultada em: LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. vol 2. ■

Teorema 3.7 *Sejam H um Espaço de Hilbert e $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em H . Então existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge fracamente.*

Prova. Demonstração pode ser consultada em: BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos da análise funcional*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. ■

Definição 3.4 *Dados X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$, dizemos que X está compactamente contido em Y , e escrevemos $X \subset\subset Y$, quando:*

- (a) $\|u\|_Y \leq C \cdot \|u\|_X$, para todo $u \in X$ e algum $C > 0$.
- (b) cada sequência limitada de X é pré-compacta em Y , isto é, possui subsequência convergente em Y .

Teorema 3.8 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado onde $\partial\Omega$ é C^1 . Suponha $1 \leq p < n$. Então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

para cada $1 \leq q < p^* := \frac{np}{n-p}$.

Prova. Demonstração pode ser consultada em: EVANS, Lawrence. *Partial differential equations*. 2 ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. ■

Observação: Pelo teorema acima, para $n \geq 3$ tem-se $H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$.

Veja também, que se $u \in H^1(\Omega)$ então $u \in W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$.

De fato,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{3}{2}} dx = \int_{\Omega} 1 \cdot |u(x)|^{\frac{3}{2}} dx \leq \left(\int_{\Omega} dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{3}{2} \cdot p} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $|u(x)|^{\frac{3}{2} \cdot p} \in L^p(\Omega)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Como $u \in L^2(\Omega)$ fazemos $\frac{3}{2} \cdot p = 2 \iff p = \frac{4}{3}$, e assim, $\frac{1}{q} = \frac{1}{4}$. Logo,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{3}{2}} dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{3}{4}} < \infty.$$

Similarmente, $\nabla u \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ e conseqüentemente, $u \in W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$.

Pelo teorema de compacidade,

$$W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

quando $1 \leq \frac{3}{2} < n$ e $1 \leq q < \left(\frac{3}{2}\right)^*$. Em particular, em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ temos $\left(\frac{3}{2}\right)^* = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 6$ e

$$H^1(\Omega) \subset W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega).$$

Daí, para $n \geq 2$, se $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é seqüência limitada em $H^1(\Omega)$ então existem subsequência $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ e função $u \in L^2(\Omega)$ tal que $u_{k_j} \xrightarrow{j} u$ em norma $L^2(\Omega)$.

4 TEORIA DE SCHAUDER VIA PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Neste Capítulo desenvolvemos a Teoria de regularidade de Schauder começando por estabelecer estimativas do tipo $L^\infty(B_1)$ produzidas pelo Princípio da Comparação e pelo uso inteligente do parabolóide $|x|^2$. Desde que o Princípio da Comparação e o Princípio do Máximo são equivalentes para EDPs lineares, a técnica é conhecida como método via o Princípio do Máximo.

4.1 Estimativas a priori

Proposição 4.1 *Seja $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ tal que $\Delta u \geq f$ em B_1 . Então para todo $x \in B_1$ vale*

$$u(x) \leq \sup_{\partial B_1} u - \left(\frac{1}{2n} \cdot \inf_{B_1} f \right) (1 - \|x\|^2).$$

Prova. A primeira coisa que podemos observar é que se usarmos o Princípio da Comparação para funções u e v (um variante de $|x|^2$) encontramos uma estimativa superior para u em todo o domínio. Essa técnica é conhecida como argumento de barreira.

Construção da barreira v :

Deseja-se que $v \geq u$ em ∂B_1 e $\Delta v \leq f \leq \Delta u$ em B_1 .

Se tomarmos $v(x) = \sup_{\partial B_1} u + g(x)$, com $g \geq 0$ em ∂B_1 , ficará garantido que $u \leq v$ em ∂B_1 . Por outro lado $\Delta v = \Delta g \leq f$ é obtido se tivermos $\Delta g \equiv \inf f$.

É sabido que a função $|x|^2$ tem laplaciano constante igual a $2n$. Daí, para $\tilde{g}(x) = \frac{\inf f}{2n} \cdot \|x\|^2$, obtemos $\Delta \tilde{g} \equiv \frac{\inf f}{2n} \cdot 2n = \inf f$. Deste modo, $\tilde{v}(x) = \sup_{\partial B_1} u + \tilde{g}(x)$ satisfaz $\Delta v \leq f \leq \Delta u$ em B_1 . Resta verificar se satisfaz $v \geq u$ em ∂B_1 , que por sua vez, é garantido caso $\tilde{g} \geq 0$ em ∂B_1 .

Ora, o sinal de \tilde{g} depende do sinal da constante $\inf f$ em B_1 . Então para obtermos essa não-negatividade, podemos usar o fato de \tilde{g} ser radial e adicionarmos uma constante C (que não interfere no Laplaciano) de modo que a função \tilde{g} se anule em ∂B_1 .

Isto é, definimos $g(x) = \tilde{g}(x) + C$, tal que $g \equiv 0$ em ∂B_1 . O que equivale a, $C = -\tilde{g}(B_1) = \frac{\inf f}{2n}$.

$$\text{Logo, obtemos } v(x) = \sup_{\partial B_1} u + g(x) = \sup_{\partial B_1} u + \frac{\inf f}{2n} \cdot \|x\|^2 - \frac{\inf f}{2n}.$$

■

Observação: Com uma construção totalmente análoga à feita acima, estimamos inferiormente uma supersolução da equação Poisson $\Delta u = f$, $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$, encontrando uma função barreira v que seja subsolução, tal que $u \leq v$ em ∂B_1 . Isto porque $\Delta v \geq f \geq \Delta u$ em B_1 e $u \geq v$ em ∂B_1 implicará em $u \geq v$ em B_1 .

Perceba que

$$v(x) := \inf_{\partial B_1} u - \left(\frac{1}{2n} \cdot \sup_{B_1} f \right) (1 - \|x\|^2)$$

satisfaz as condições desejadas. Daí surge a versão para supersoluções:

Proposição 4.2 *Seja $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ tal que $\Delta u \leq f$ em B_1 . Então*

$$u(x) \geq \inf_{\partial B_1} u - \left(\frac{1}{2n} \cdot \sup_{B_1} f \right) (1 - \|x\|^2).$$

Corolário 4.1 *Seja $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$, e $\Delta u = f$ em B_1 . Então*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Prova. Conhecendo as Proposições 4.1 e 4.2, dado $x \in B_1$ segue que

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \sup_{\partial B_1} u - \left(\frac{1}{2n} \cdot \inf_{B_1} f \right) (1 - \|x\|^2) \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} - \frac{1}{2n} \cdot \inf f \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \cdot \sup |f|. \end{aligned} \tag{3}$$

e

$$\begin{aligned} u(x) &\geq \inf_{\partial B_1} u - \left(\frac{1}{2n} \cdot \sup_{B_1} f \right) (1 - \|x\|^2) \\ &\geq -\sup_{\partial B_1} |u| - \frac{1}{2n} \cdot \sup_{B_1} f \\ &= -\|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} - \frac{1}{2n} \cdot \|f\|_{L^\infty(B_1)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Logo, $|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}$, para todo $x \in B_1$.

Tomando o supremo obtemos a desigualdade desejada. ■

Corolário 4.2 *Sejam $u, v \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ satisfazendo $\Delta u = f$ e $\Delta v = 0$ em B_1 , tais que $u = v$ em ∂B_1 . Então*

$$\|u - v\|_{L^\infty(B_1)} \leq \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Prova. Usando a linearidade do operador Laplaciano, fazendo $w = u - v$ tem-se $\Delta w = f$.

Aplicando o corolário 4.1 para a solução w da equação $\Delta w = f$ obtemos

$$\|u - v\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u - v\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} = \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

■

Agora apresentaremos os espaços de funções que são tratados no teorema principal.

Definição 4.1 Diremos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é α -Hölder (contínua) em $x_0 \in \Omega$, e escreveremos $f \in C^{0,\alpha}(x_0)$, se

$$[f]_{C^{0,\alpha}(x_0)} := \sup_{\substack{x \neq x_0 \\ x \in \Omega}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < +\infty.$$

Quando f é α -Hölder contínua em todo $x \in \Omega$ diremos simplesmente que f é α -Hölder, escreveremos $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e definiremos a semi-norma α -Hölder de f em Ω por

$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Com uma demonstração não-trivial, mostra-se que

$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

Definição 4.2 Diremos que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe $u \in C^{2,\alpha}$ em $x_0 \in \Omega$, quando $u \in C^2$ em alguma vizinhança de x_0 e $\frac{\partial u}{\partial x_i x_j} \in C^{0,\alpha}(x_0)$, $i, j = 1, \dots, n$.

Observação:

- 1) Uma definição alternativa para que a função $u \in C^2(B_1)$ seja $C^{2,\alpha}(0)$ é a existência de um polinômio quadrático P e uma constante $c > 0$ tais que

$$|u(x) - P(x)| \leq c|x|^{2+\alpha},$$

para alguma vizinhança da origem. Veja que nesse caso, o Polinômio de Taylor de ordem 2 da função u em torno do ponto 0 satisfaz essa condição em todo B_1 .

De fato, tomado $x \in B_1$, temos pelo Teorema do Valor Médio e o fato de que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \in C^{0,\alpha}(0)$ para cada $i, j = 1, \dots, n$, existe $t \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} |u(x) - P(x)| &= \left| u(x) - \left(u(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(0)}{\partial x_i} \cdot x_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot x_i \cdot x_j \right) \right| \\ &= \left| \left(u(x) - u(0) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(0)}{\partial x_i} \cdot x_i \right) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot x_i \cdot x_j \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u(x) - P(x)| &= \left| \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u(tx)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot x_i \cdot x_j - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_i \cdot x_j}{2} \right| \\
&= \left| \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u(tx)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \frac{x_i \cdot x_j}{2} \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u(tx)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \cdot \frac{|x_i \cdot x_j|}{2} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n C_{i,j} \|tx - 0\|^\alpha \cdot \frac{|x_i \cdot x_j|}{2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como consequência de $(a+b)^2 \geq 0$ para quaisquer a e b reais, temos $\frac{|x_i \cdot x_j|}{2} \leq x_i^2 + x_j^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 = \|x\|^2$. Então, tomando $C = n^2 \cdot \max\{C_{i,j} ; i, j \in I_n\}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
|u(x) - P(x)| &\leq \sum_{i,j=1}^n C_{i,j} \|x - 0\|^\alpha \cdot \frac{|x_i \cdot x_j|}{2} \\
&\leq n^2 \max C_{i,j} \cdot \|x\|^\alpha \cdot \|x\|^2 \\
&\leq C \cdot \|x\|^{\alpha+2}.
\end{aligned}$$

2) Veja que a estimativa

$$|u(x) - P(x)| \leq C \cdot \|x\|^{\alpha+2}, \quad \forall x \in B_1, \quad (5)$$

equivale à existirem polinômio quadrático P , $\lambda \in (0, 1)$ e $C_1 > 0$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|u(x) - P(x)| \leq C_1 \lambda^{k(2+\alpha)}, \quad \text{se } \|x\| \leq \lambda^k. \quad (6)$$

Que (5) \Rightarrow (6) é imediato, tomando $C_1 = C$ e $\lambda \in (0, 1)$ qualquer, pois para $\|x\| \leq \lambda^k$,

$$\begin{aligned}
|u(x) - P(x)| &\leq C_1 \cdot \|x\|^{2+\alpha} \\
&\leq C_1 \lambda^{k(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Para a recíproca, dado $x \in B_1$ tome $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\lambda^{k+1} \leq \|x\| \leq \lambda^k$ e tenha

$$\begin{aligned}
|u(x) - P(x)| &\leq C_1 \lambda^{k(2+\alpha)} = C_1 \frac{\lambda^{2+\alpha}}{\lambda^{2+\alpha}} \lambda^{k(2+\alpha)} \\
&= \frac{C_1}{\lambda^{2+\alpha}} \lambda^{(k+1)(2+\alpha)} \leq C \|x\|^{2+\alpha}.
\end{aligned}$$

Fazendo $C = \frac{C_1}{\lambda^{2+\alpha}}$ obtemos (5).

Mas percebe-se que tanto (5) quanto (6) são estimativas muito rígidas, e o processo de encontrar P para u pode ser não trivial. Na prática busca-se uma versão mais fraca de (6). A seguinte:

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um polinômio quadrático P_k tal que

$$|u(x) - P_k(x)| \leq C_1 \lambda^{k(2+\alpha)}, \quad \text{quando } \|x\| \leq \lambda^k, \quad (7)$$

onde a sequência $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge no sentido de

$$|P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq C_1 \lambda^{k(2+\alpha)}, \quad \text{quando } \|x\| \leq \lambda^k.$$

Que (6) \Rightarrow (7) é bastante claro, fixando $P_k = P$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

A recíproca se encontra nesse trabalho, na demonstração do Teorema 4.1.

4.2 Teorema principal via Princípio do Máximo

Lema 4.1 (Lema-chave) *Seja $\alpha \in (0, 1)$. Existem constantes $\bar{C}_0 = \bar{C}_0(n) > 0$, $\lambda = \lambda(n, \alpha) \in (0, 1)$ e $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, \alpha) \in (0, 1)$ tais que, se*

$$u \in C^2(B_1) \cap C(\bar{B}_1), \Delta u = f \text{ em } B_1, \|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1 \text{ e } \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0,$$

então existe polinômio quadrático e harmônico $P(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle B, x \rangle + C$ de modo que

$$|u(x) - P(x)| \leq \lambda^{2+\alpha} \text{ sempre que } \|x\| \leq \lambda$$

e

$$\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| \leq \bar{C}_0.$$

Prova. Seja $h : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ solução do Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B_1 \\ h = u & \text{em } \partial B_1, \end{cases}$$

cujas existência é garantida pelo método de Perron por se tratar de uma função $u \in C(\partial B_1)$ e o domínio B_1 satisfazer a condição da esfera exterior nos pontos de fronteira.

Pelo corolário 4.2,

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_1)} \leq \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Ora, o polinômio de Taylor no ponto 0 da função harmônica h é dado por

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2} \langle D^2 h(0)x, x \rangle + \langle \nabla h(0), x \rangle + h(0) \\ &:= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle B, x \rangle + C. \end{aligned}$$

Veja que P é harmônica

$$\Delta P(x) = \frac{1}{2} \Delta (\langle D^2 h(0)x, x \rangle) + \Delta (\langle \nabla h(0), x \rangle) + \Delta (h(0)),$$

onde:

- (i) $\langle D^2 h(0)x, x \rangle_{x_i} = \langle D^2 h(0)e_i, x \rangle + \langle D^2 h(0)x, e_i \rangle$
 $\Rightarrow \langle D^2 h(0)x, x \rangle_{x_i x_i} = \langle D^2 h(0)0, x \rangle + \langle D^2 h(0)e_i, e_i \rangle + \langle D^2 h(0)e_i, e_i \rangle + \langle D^2 h(0)x, 0 \rangle$
 $= 2 \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{D^2 h(0)}{\partial x \partial x_j}, e_1 \right\rangle = 2 \frac{\partial^2 h(0)}{\partial x_i^2},$
- (ii) $\langle \nabla h(0), x \rangle_{x_i} = \langle 0, x \rangle + \langle \nabla h(0), e_i \rangle = \frac{\partial h(0)}{\partial x_i} \Rightarrow \langle \nabla h(0), x \rangle_{x_i x_i} = 0$
- (iii) $(h(0))_{x_i x_i} = 0.$

Logo,

$$\Delta P(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n 2 \frac{\partial^2 h(0)}{\partial x_i^2} \right) = \Delta h(0) = 0.$$

Portanto, P é um candidato para o polinômio como no enunciado.

Agora perceba que pelo Princípio do Máximo, e do mínimo, para funções harmônicas temos

$$\sup_{B_1} h = \sup_{\partial B_1} h = \sup_{\partial B_1} u \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \inf_{\partial B_1} u = \inf_{\partial B_1} h = \inf_{B_1} h.$$

Logo, $\|h\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1.$

Por isso, usando as estimativas das derivadas obtemos para $\|x\| \leq \frac{1}{2},$

$$|D^\beta h(x)| \leq \frac{(2^{n+1} \cdot n \cdot |\beta|)^{|\beta|}}{|B_1| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+|\beta|}} \cdot \|h\|_{L^1(B_{\frac{1}{2}}(x))} \leq \frac{(2^{n+1} \cdot n \cdot |\beta|)^{|\beta|}}{|B_1| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+|\beta|}} \cdot 1 \cdot |B_{\frac{1}{2}}| = C(n, \beta)$$

para todo multi-índice $\beta.$

Então $\overline{C}_0 = C(n, 2) + C(n, 1) + 1$ nos dá

$$\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| \leq \overline{C}_0.$$

Além disso, pelo teorema do valor médio,

$$\begin{aligned}
|h(x) - P(x)| &= \left| h(x) - h(0) - \langle \nabla h(0), x \rangle - \frac{1}{2} \langle D^2 h(0)x, x \rangle \right| \\
&= \frac{1}{3!} \left| \sum_{|\beta|=3} D^\beta h(tx) x^\beta \right| \leq \frac{1}{3} \|x\|^3 \cdot \binom{n}{3} C(n, 3) = C(n) \cdot \|x\|^3.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|u(x) - P(x)| \leq |u(x) - h(x)| + |h(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} + C(n) \cdot \|x\|^3,$$

quando $\|x\| \leq \frac{1}{2}$.

Por outro lado, para $C(n)\|x\|^3 \leq \frac{1}{2}\lambda^{2+\alpha}$ quando $\|x\| \leq \lambda$, é suficiente tomarmos $\lambda \in (0, 1)$ de modo que

$$C(n)\lambda^3 \leq \frac{1}{2}\lambda^{2+\alpha} \Rightarrow \lambda^{1-\alpha} = \frac{\lambda^3}{\lambda^{2+\alpha}} \leq \frac{1}{2C(n)} \Leftrightarrow \lambda \leq \left(\frac{1}{2C(n)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Para $\lambda > 0$ assim e $0 < \varepsilon_0 \leq n\lambda^{2+\alpha}$ obtemos

$$\frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \frac{1}{2n} \varepsilon_0 \leq \frac{1}{2} \lambda^{2+\alpha}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|u(x) - P(x)| &\leq \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} + C(n) \cdot \|x\|^3, \quad \text{quando } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\
&\leq \frac{1}{2} \lambda^{2+\alpha} + \frac{1}{2} \lambda^{2+\alpha} = \lambda^{2+\alpha}, \quad \text{quando } \|x\| \leq \lambda
\end{aligned}$$

Assim, tomamos $\lambda \in (0, 1)$ escolhido por $\lambda = \min \left\{ \left(\frac{1}{2C(n)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{1}{2} \right\}$ e obtemos

$$|u(x) - P(x)| \leq \lambda^{2+\alpha}, \quad \text{se } \|x\| \leq \lambda.$$

■

Agora estamos prontos para demonstrar a estimativa de Shauder para equações de Poisson. Este Lema nos ajudará a construir, de forma recursiva, uma sequência de polinômios quadráticos que convergirá para o Polinômio procurado no teorema principal do capítulo.

Teorema 4.1 *Seja $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$, $\Delta u = f$ em B_1 e f α -Holder contínua na*

origem, isto é,

$$[f]_{C^\alpha(0)} = \sup_{\substack{x \in B_1 \\ x \neq 0}} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|^\alpha} < +\infty.$$

Existe então, polinômio quadrático $P(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle B, x \rangle + C$ com $\Delta P = f(0)$ tal que

$$|u(x) - P(x)| \leq D \cdot \|x\|^{2+\alpha}, \quad \text{quando} \quad \|x\| \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| + D \leq C_0([f]_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \|u\|_{L^\infty(B_1)}),$$

onde $C_0 = C_0(n, \alpha)$ é universal.

Prova. Provemos inicialmente o teorema quando as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $|f(0)| = 0$;
- (ii) $[f]_{C^\alpha(0)} \leq \varepsilon_0$, para $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ como no Lema 4.1;
- (iii) $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$.

Afirmção: Sob essas condições, existe uma seqüência de polinômios harmônicos

$$P_k(x) = \frac{1}{2} \langle A_k x, x \rangle + \langle B_k, x \rangle + C_k$$

tais que:

$$(a) \quad |u(x) - P_k(x)| \leq \lambda^{k(2+\alpha)}, \quad \text{quando} \|x\| \leq \lambda^k$$

$$(b) \quad \begin{cases} \|A_{k+1} - A_k\|_\infty \leq \bar{C}_0 \lambda^{k\alpha} \\ \|B_{k+1} - B_k\|_\infty \leq \bar{C}_0 \lambda^{k(1+\alpha)} \\ |C_{k+1} - C_k| \leq \bar{C}_0 \lambda^{k(2+\alpha)} \end{cases}$$

onde $\bar{C}_0 > 0$ é universal como no Lema 4.1.

Ora, com as condições do Lema 4.1, vem a existência de P_1 satisfazendo (a).

Para a construção de P_2 , tendo em vista que $|u(x) - P_1(x)| \leq \lambda^{2+\alpha}$ para $\|x\| \leq \lambda$, e a fim de utilizar o Lema 4.1, definiremos $\omega_1 : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ em função de $u - P_1$ que satisfaça $\|\omega_1\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ e $\|\Delta \omega_1\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0$.

Por outro lado, temos estimativa para $u - P_1$ apenas em B_λ . Daí usamos a renormalização $B_1 \rightarrow B_\lambda$ que age $x \mapsto \lambda x$.

Assim,

$$\omega_2(x) = \varphi(u - P_1)(\lambda x) = \varphi((u - P_1)(\lambda x))$$

onde

$$|\omega_2(x)| = |\varphi(u(\lambda x) - P_1(\lambda x))| \leq 1, \quad \forall x \in B_1.$$

Mas sabemos que

$$\begin{aligned} |u(\lambda x) - P_1(\lambda x)| &\leq \lambda^{2+\alpha}, \quad \forall x \in B_1. \\ \Rightarrow \frac{|u(\lambda x) - P_1(\lambda x)|}{\lambda^{2+\alpha}} &\leq 1, \quad \forall x \in B_1. \end{aligned}$$

Então, à priori, podemos definir $\varphi(y) = \frac{y}{\lambda^{2+\alpha}}$ para obtermos

$$\omega_2(x) = \frac{u(\lambda x) - P_1(\lambda x)}{\lambda^{2+\alpha}} \Rightarrow \|\omega_2\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1.$$

Agora, por P_1 ser harmônico, teremos

$$\Delta \omega_2 = \frac{\lambda^2 \Delta u(\lambda x)}{\lambda^{2+\alpha}} = \frac{f(\lambda x)}{\lambda^\alpha}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\omega_2\|_{L^\infty(B_1)} &= \sup_{B_1} \frac{|f(\lambda x)|}{\lambda^\alpha} = \sup_{B_\lambda} \frac{|f(x)|}{\lambda^\alpha} = \sup_{B_\lambda} \frac{|f(x) - f(0)|}{\lambda^\alpha} \\ &\leq \sup_{B_\lambda} \frac{|f(x) - f(0)|}{\|x\|^\alpha} \leq [f]_{C^\alpha(0)} \leq \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1 existe \bar{P}_2 polinômio quadrático e harmônico tal que

$$|\omega_2(x) - \bar{P}_2(x)| \leq \lambda^{2+\alpha}, \quad \|x\| \leq \lambda$$

e

$$\|\bar{A}_2\|_\infty + \|\bar{B}_2\|_\infty + |\bar{C}_2| \leq \bar{C}_0.$$

Escrevendo em termos de u ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(\lambda x) - P_1(\lambda x)}{\lambda^{2+\alpha}} - \bar{P}_2(x) \right| &\leq \lambda^{2+\alpha}, \quad \|x\| \leq \lambda \\ \Rightarrow |u(\lambda x) - P_1(\lambda x) - \lambda^{2+\alpha} \cdot \bar{P}_2(x)| &\leq \lambda^{2(2+\alpha)}, \quad \|x\| \leq \lambda \\ \Rightarrow \left| u(x) - P_1(x) - \lambda^{2+\alpha} \cdot \bar{P}_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right| &\leq \lambda^{2(2+\alpha)}, \quad \|x\| \leq \lambda^2 \end{aligned}$$

Definindo o polinômio quadrático $P_2(x) = P_1(x) + \lambda^{2+\alpha} \cdot \bar{P}_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ temos:

- (I) $|u(x) - P_2(x)| \leq \lambda^{2(2+\alpha)}$, caso $\|x\| \leq \lambda^2$;
- (II) P_2 harmônica: $\Delta P_2(x) = \Delta P_1(x) + \lambda^{2+\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \Delta \bar{P}_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 0$;

$$\text{III) } \begin{cases} \|A_2 - A_1\|_\infty \leq \bar{C}_0 \lambda^\alpha \\ \|B_2 - B_1\|_\infty \leq \bar{C}_0 \lambda^{1+\alpha} \\ \|C_2 - C_1\|_\infty \leq \bar{C}_0 \lambda^{2+\alpha}. \end{cases}$$

Usando as notações

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{1}{2} \langle A_1 x, x \rangle + \langle B_1, x \rangle + C_1 \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} \langle A_2 x, x \rangle + \langle B_2, x \rangle + C_2 \\ \bar{P}_2(x) &= \frac{1}{2} \langle \bar{A}_2 x, x \rangle + \langle \bar{B}_2, x \rangle + \bar{C}_2 \end{aligned}$$

temos

$$\begin{cases} A_2 = A_1 + \lambda^{2+\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} \bar{A}_2 \\ B_2 = B_1 + \lambda^{2+\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda} \bar{B}_2 \\ C_2 = C_1 + \lambda^{2+\alpha} \cdot \bar{C}_2. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|A_2 - A_1\|_\infty &= \|\lambda^\alpha \cdot \bar{A}_2\|_\infty = \|\bar{A}_2\|_\infty \cdot \lambda^\alpha \leq \bar{C}_0 \cdot \lambda^\alpha; \\ \|B_2 - B_1\|_\infty &= \|\lambda^{1+\alpha} \cdot \bar{B}_2\|_\infty = \|\bar{B}_2\|_\infty \cdot \lambda^{1+\alpha} \leq \bar{C}_0 \cdot \lambda^{1+\alpha}; \\ |C_2 - C_1| &= \lambda^{2+\alpha} \cdot |\bar{C}_2| \leq \bar{C}_0 \cdot \lambda^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

Prosseguindo por indução, assumiremos P_k como na afirmação, e encontraremos P_{k+1} .

Para tanto defina, analogamente ao que foi feito para P_2 , a função $\omega_{k+1} : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ em função de $u - P_k$ que renormaliza B_{λ^k} para B_1 e que esteja nas condições do Lema-chave.

$$\omega_{k+1}(x) = \frac{(u - P_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} \leq 1, \quad x \in B_1.$$

Então,

$$\Delta\omega(x) = \frac{\lambda^{2k} \Delta u(\lambda^k x) - \lambda^{2k} \Delta P_k(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} = \frac{f(\lambda^k x)}{\lambda^{k\alpha}}$$

Pela construção de ω e a validade de (a) para P_k , temos $\|\omega\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$.

Ademais,

$$\|\Delta\omega_{k+1}\|_{L^\infty(B_1)} = \sup_{B_1} \frac{|f(\lambda^k x)|}{\lambda^{k\alpha}} \leq \sup_{B_1 \setminus \{0\}} \frac{|f(\lambda^k x)|}{|\lambda^k x|^\alpha} = \sup_{B_{\lambda^k}} \frac{|f(x) - f(0)|}{\|x\|^\alpha} \leq [f]_{C^\alpha(0)} \leq \varepsilon_0$$

Logo, novamente pelo Lema 4.1 obtemos um polinômio harmônico

$$\bar{P}_{k+1}(x) = \frac{1}{2} \langle \bar{A}_{k+1}x, x \rangle + \langle \bar{B}_{k+1}, x \rangle + \bar{C}_{k+1}$$

tal que

$$(c) \quad |\omega_{k+1}(x) - \bar{P}_{k+1}(x)| \leq \lambda^{2+\alpha}, \quad \text{quando } \|x\| \leq \lambda$$

$$(d) \quad \|\bar{A}_{k+1}\|_\infty + \|\bar{B}_{k+1}\|_\infty + |\bar{C}_{k+1}| \leq \bar{C}_0.$$

Reescrevendo (c) em termos de u e, em seguida, fazendo $y = \lambda^k x$ obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{u(\lambda^k x) - P_k(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} - \bar{P}_{k+1}(x) \right| \leq \lambda^{2+\alpha}, \quad \|x\| \leq \lambda \\ \Rightarrow & |u(\lambda^k x) - P_k(\lambda^k x) - \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \bar{P}_{k+1}(x)| \leq \lambda^{(k+1)(2+\alpha)}, \quad \|x\| \leq \lambda \\ \Rightarrow & \left| u(y) - P_k(y) - \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \bar{P}_{k+1}\left(\frac{y}{\lambda^k}\right) \right| \leq \lambda, \quad \|y\| \leq \lambda^k \|x\| \leq \lambda^{k+1}. \end{aligned}$$

Definindo $P_{k+1}(x) = P_k(x) + \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \bar{P}_{k+1}\left(\frac{x}{\lambda^k}\right)$ teremos

$$\Delta P_{k+1}(x) = \Delta P_k(x) + \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{\lambda^{2k}}\right) \cdot \Delta \bar{P}_{k+1}\left(\frac{x}{\lambda^k}\right) = 0$$

e

$$|u(x) - P_{k+1}| \leq \lambda^{(k+1)(2+\alpha)}, \quad \|x\| \leq \lambda^{k+1}.$$

Então, $P_{k+1}(x) = \frac{1}{2} \langle A_{k+1}x, x \rangle + \langle B_{k+1}, x \rangle + C_{k+1}$, é tal que

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k + \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{\lambda^k}\right)^2 \bar{A}_{k+1} = A_k + \lambda^{k\alpha} \bar{A}_{k+1} \\ B_{k+1} = B_k + \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{\lambda^k}\right) \bar{B}_{k+1} = B_k + \lambda^{k(1+\alpha)} \bar{B}_{k+1} \\ C_{k+1} = C_k + \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \bar{C}_{k+1}. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \|A_{k+1} - A_k\|_\infty = \lambda^{k\alpha} \cdot \|\bar{A}_{k+1}\|_\infty \leq \lambda^{k\alpha} \cdot \bar{C}_0 \\ \|B_{k+1} - B_k\|_\infty = \lambda^{k(1+\alpha)} \cdot \|\bar{B}_{k+1}\|_\infty \leq \lambda^{k(1+\alpha)} \cdot \bar{C}_0 \\ |C_{k+1} - C_k| = \lambda^{k+1} \cdot |\bar{C}_{k+1}| \leq \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \bar{C}_0, \end{cases}$$

o que prova a afirmação de existência da tal sequência de polinômios harmônicos.

Com a finalidade de obtermos convergência da sequência $\{P_k\}_k$ observemos que $\{A_k\}$, $\{B_k\}$ e $\{C_k\}$ são sequências de Cauchy.

$$\begin{aligned} \|A_{k+m} - A_k\|_\infty & \leq \|A_{k+m} - A_{k+m-1}\|_\infty + \|A_{k+m-1} - A_{k+m-2}\|_\infty + \dots + \|A_{k+1} - A_k\|_\infty \\ & = \bar{C}_0(\lambda^{\alpha(k+m-1)} + \dots + \lambda^{\alpha k}) = \bar{C}_0(S_{k+m-1} - S_{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{C}_0 \frac{\lambda^\alpha (\lambda^\alpha)^{k-1}}{1 - \lambda^\alpha} (1 - \lambda^{\alpha m}) &\leq \overline{C}_0 \frac{\lambda^{\alpha k}}{1 - \lambda^\alpha} \\ &= \frac{\overline{C}_0}{1 - \lambda^\alpha} (\lambda^\alpha)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\|B_{k+m} - B_k\|_\infty \leq \frac{\overline{C}_0}{1 - \lambda^{1+\alpha}} (\lambda^{1+\alpha})^k \quad \text{e} \quad |C_{k+m} - C_k| \leq \frac{\overline{C}_0}{1 - \lambda^{2+\alpha}} (\lambda^{2+\alpha})^k. \quad (8)$$

Por serem de Cauchy em \mathbb{R} , \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^{n^2} , tais sequências convergem. Defina

$$P(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle B, x \rangle + C$$

onde $A = \lim_k A_k$, $B = \lim_k B_k$ e $C = \lim_k C_k$. Obviamente, $P = \lim_k P_k$. Daí, por ser limite de harmônicos, o polinômio quadrático P satisfaz $\Delta P = 0 = f(0)$.

Assim, para que seja como no teorema falta apenas mostrarmos

$$\begin{aligned} |u(x) - P(x)| &\leq D \cdot \|x\|^{2+\alpha}, \quad \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ \|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| + D &\leq C_0 \left([f]_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \|u\|_{L^\infty(B_1)} \right). \end{aligned}$$

para $D = D(n, \alpha)$ e $C_0 = C_0(n, \alpha)$.

Primeiramente, já sabemos estimar $u - P_k$ em B_{λ^k} . Procuremos estimativas para $P - P_k$ a fim de utilizarmos a desigualdade triangular em $|u - P|$.

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (8), considerando k constante, teremos para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |P(x) - P_k(x)| &\leq \frac{1}{2} |\langle (A - A_k)x, x \rangle| + |\langle B - B_k, x \rangle| + |C - C_k| \\ &\leq \|A - A_k\|_\infty \|x\|^2 + \|B - B_k\|_\infty \|x\| + |C - C_k| \\ &\leq \frac{\overline{C}_0 \lambda^{\alpha k}}{1 - \lambda^\alpha} \|x\|^2 + \frac{\overline{C}_0 \lambda^{k(1+\alpha)}}{1 - \lambda^{1+\alpha}} \|x\| + \frac{\overline{C}_0 \lambda^{k(2+\alpha)}}{1 - \lambda^{2+\alpha}}. \end{aligned}$$

Assim, dado $x \in B_\lambda$ tome $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\lambda^{k+1} \leq |x| \leq \lambda^k$ e obtenha

$$\begin{aligned} |u(x) - P(x)| &\leq |u(x) - P_k(x)| + |P(x) - P_k(x)| \\ &\leq \lambda^{k(2+\alpha)} \frac{\overline{C}_0}{1 - \lambda^\alpha} (\lambda^{\alpha k} \|x\|^2 + \lambda^{k+\alpha k} \|x\| + \lambda^{k(2+\alpha)}) \\ &\leq \lambda^{k(2+\alpha)} \frac{\overline{C}_0}{1 - \lambda^\alpha} (\lambda^{\alpha k} \lambda^{k2} + \lambda^{k+\alpha k} \lambda + \lambda^{k(2+\alpha)}) \\ &= \lambda^{k(2+\alpha)} \left(1 + \frac{3\overline{C}_0}{1 - \lambda^\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u(x) - P(x)| &\leq \left(1 + \frac{3\bar{C}_0}{1 - \lambda^\alpha}\right) \frac{\lambda^{k(2+\alpha)}}{\|x\|^{2+\alpha}} \|x\|^{2+\alpha} \\
&= \left(1 + \frac{3\bar{C}_0}{1 - \lambda^\alpha}\right) \frac{\lambda^{k(2+\alpha)}}{(\lambda^{k+1})^{(2+\alpha)}} \|x\|^{2+\alpha} \\
&= \left(1 + \frac{3\bar{C}_0}{1 - \lambda^\alpha}\right) \frac{1}{\lambda^{(2+\alpha)}} \|x\|^{2+\alpha} \\
&= D \|x\|^{2+\alpha},
\end{aligned}$$

para $D := \left(1 + \frac{3\bar{C}_0}{1 - \lambda^\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\lambda^{2+\alpha}}$.

Para o caso de $\lambda \leq |x| \leq \frac{1}{2}$ teremos

$$\begin{aligned}
|u(x) - P(x)| &\leq \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + \|P\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \\
&\leq 1 + \|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| \\
&\leq 1 + 3\bar{C}_0 \\
&= (1 + 3\bar{C}_0) \frac{\|x\|^{2+\alpha}}{\|x\|^{2+\alpha}} \\
&\leq (1 + 3\bar{C}_0) \frac{1}{\lambda^{2+\alpha}} \|x\|^{2+\alpha} \\
&\leq D \|x\|^{2+\alpha}.
\end{aligned}$$

Por fim, definindo $C_0 = 2 \cdot \max\{\bar{C}_0, D\}$ temos

$$\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| + D \leq C_0 \leq C_0(1 + \varepsilon_0).$$

Agora, para problemas em que alguma das condições

- (i) $|f(0)| = 0$
- (ii) $[f]_{C^\alpha(0)} \leq \varepsilon_0$, para $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ como no lema anterior
- (iii) $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$.

não seja satisfeita, na tentativa de voltarmos ao caso particular acima, defina a função auxiliar

$$\bar{u} = \frac{\varepsilon_0 \left(u(x) - \frac{1}{2n} f(0) \|x\|^2\right)}{[f]_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \|u\|_{L^\infty(B_1)}} = \frac{\varepsilon_0}{M} \left(u(x) - \frac{1}{2n} f(0) \|x\|^2\right)$$

onde, $M := \frac{1}{[f]_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \|u\|_{L^\infty(B_1)}}$ e $\Delta \bar{u}(x) = \frac{\varepsilon_0}{M} (\Delta u(x) + f(0)) = \frac{\varepsilon_0}{M} (f(x) - f(0)) := g(x)$.

Como desejado teremos:

- (1) $g(0) = 0$;
- (2) $[g]_{C^\alpha(0)} = \frac{\varepsilon_0}{M} \sup_{B_1} \frac{|f(x) - f(0) - (f(0) - f(0))|}{\|x\|^2} = \frac{\varepsilon_0}{M} [f]_{C^\alpha(0)} \leq \varepsilon_0$;

$$(3) \quad \|\bar{u}\|_{L^\infty(B_1)} = \sup_{B_1} |\bar{u}| \leq \varepsilon_0 \sup_{B_1} \frac{|u(x)| + \frac{1}{2n}|f(0)|}{[f]_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \|u\|_{L^\infty(B_1)}} \leq 1.$$

Perceba também, que

$$[g]_{L^\infty(B_1)} = \sup_{B_1} |g(x)| = \sup_{B_1} |g(x) - g(0)| \leq \sup_{B_1} \frac{|g(x) - g(0)|}{\|x\|^2} = [g]_{C^\alpha(0)} \leq \varepsilon_0.$$

Então, como o teorema foi provado para esse caso particular, existirá um polinômio quadrático $\bar{P}(x) = \frac{1}{2} \langle \bar{A}x, x \rangle + \langle \bar{B}x, x \rangle + \bar{C}$ com $\Delta \bar{P} \equiv g(0) = 0$, tal que

$$|\bar{u}(x) - \bar{P}(x)| \leq \bar{D}|x|^{2+\alpha}, \quad \text{quando } \|x\| \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\|_\infty + \|\bar{B}\|_\infty + |\bar{C}| + D &\leq C_0 ([g]_{C^\alpha(0)} + |g(0)| + \|\bar{u}\|_{L^\infty(B_1)}) \\ &\leq C_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{M} [f]_{C^\alpha(0)} + 0 + \frac{\varepsilon_0}{M} \|u\|_{L^\infty} + \frac{\varepsilon_0}{2nM} |f(0)| \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\bar{u}(x) - \bar{P}(x)| &= \left| \frac{\varepsilon_0}{M} \left(u(x) - \frac{1}{2n} \cdot f(0) \cdot \|x\|^2 \right) - \bar{P}(x) \right| \\ &= \frac{\varepsilon_0}{M} \cdot \left| u(x) - \frac{f(0) \cdot \|x\|^2}{2n} - \frac{M}{\varepsilon_0} \bar{P}(x) \right|. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \left| u(x) - \frac{f(0) \cdot \|x\|^2}{2n} - \frac{M}{\varepsilon_0} \bar{P}(x) \right| &= \frac{M}{\varepsilon_0} \cdot |\bar{u}(x) - \bar{P}(x)| \\ &\leq \frac{M}{\varepsilon_0} \cdot \bar{D}|x|^{2+\alpha} \end{aligned}$$

quando $\|x\| \leq \frac{1}{2}$. Então definindo

$$\begin{aligned} P(x) &:= \frac{f(0) \cdot \|x\|^2}{2n} + \frac{M}{\varepsilon_0} \cdot \bar{P}(x) \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{1}{n} f(0) I_{n \times n} + \frac{M}{\varepsilon_0} \cdot \bar{A} \right) x, x \right\rangle + \left\langle \frac{M}{\varepsilon_0} \cdot \bar{B}, x \right\rangle + \frac{M}{\varepsilon_0} \cdot \bar{C} \\ &:= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle Bx, x \rangle + C \end{aligned}$$

e $D := \frac{M \cdot \bar{D}}{\varepsilon_0}$ veremos que,

$$\|u(x) - P(x)\| \leq D \|x\|^{2+\alpha}, \quad \|x\| \leq \frac{1}{2},$$

além de,

$$\Delta P(x) = f(0) + \frac{M}{\varepsilon_0} \Delta \bar{P}(x) = f(0).$$

Estimativas dos coeficientes:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| + D &\leq \frac{1}{n} |f(0)| + \frac{M}{\varepsilon_0} (\|\bar{A}\|_\infty + \|\bar{B}\|_\infty + |\bar{C}| + \bar{D}) \\ &\leq \frac{1}{n} |f(0)| + \frac{M}{\varepsilon_0} C_0 (|g|_{C^\alpha(0)} + |g(0)| + \|\bar{u}\|_{L^\infty(B_1)}) \\ &\leq \frac{1}{n} |f(0)| + C_0 \left([f]_{C^\alpha(0)} + \|u\|_{L^\infty} + \frac{1}{2n} |f(0)| \right) \\ &= C_0 \left([f]_{C^\alpha(0)} + \|u\|_{L^\infty} + \frac{1}{2n} |f(0)| + \frac{1}{nC_0} |f(0)| \right) \\ &\leq C_0 \left([f]_{C^\alpha(0)} + \|u\|_{L^\infty} + |f(0)| \right). \end{aligned}$$

pedindo que $C_0 \geq 2$. ■

Observação: (Considerações sobre a renormalização)

Sejam $u \in C^2(B_r(x_0)) \cup C^0(\bar{B}_r(x_0))$, $f \in C^\alpha(x_0)$ e $\Delta u = f$ em B_r .

Por meio de mudança de variável, tentaremos trazer o problema de $B_r(x_0)$ para B_1 e assim, expor um resultado análogo para $\Delta u = f$ em $B_r(x_0)$ com $f \in C^\alpha(x_0)$.

Considerando $v(x) = u(rx + x_0)$, $x \in B_1$, teremos

$$\Delta v(x) = r^2 \Delta u(rx + x_0) = r^2 f(rx + x_0).$$

Veja que $\Delta v \in C^\alpha(0)$:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_1 \setminus \{0\}} \frac{|\Delta v(x) - \Delta v(0)|}{\|x\|^\alpha} &= \sup_{x \in B_1 \setminus \{0\}} \frac{|r^2 f(rx + x_0) - r^2 f(x_0)|}{\|x\|^\alpha} \\ &= \sup_{y \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}} r^2 \frac{|f(y) - f(x_0)|}{\left\| \frac{y-x_0}{r} \right\|^\alpha} \\ &= \sup_{y \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}} r^{2+\alpha} \frac{|f(y) - f(x_0)|}{\|y - x_0\|^\alpha} \\ &= r^{2+\alpha} [f]_{C^\alpha(0)} < \infty. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema de Schauder, existe polinômio quadrático $P^0(x) = \frac{1}{2} \langle A^0 x, x \rangle +$

$\langle B^0, x \rangle + C^0$, com:

$$\Delta P^0 = \Delta v(0) = r^2 f(x),$$

$$|v(x) - P^0(x)| \leq D \cdot \|x\|^{2+\alpha}, \quad \|x\| \leq \frac{1}{2},$$

e

$$\|A^0\|_\infty + \|B^0\|_\infty + |C^0| \leq C_0([v]_{L^\infty(B_1)} + |\Delta v(0)| + \|\Delta v(0)\|_{L^\infty(B_1)}).$$

Em termos de u obtemos

$$\begin{aligned} |u(rx + x_0) - P^0(x)| &\leq D \cdot \|x\|^{2+\alpha}, \quad \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow |u(y) - P^0\left(\frac{y - x_0}{r}\right)| &\leq \frac{D}{r^{2+\alpha}} \cdot \|y - x_0\|^{2+\alpha}, \quad \frac{\|y - x_0\|}{r} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} P(y) = P^0\left(\frac{y - x_0}{r}\right) &= \frac{1}{2} \left\langle A^0\left(\frac{y - x_0}{r}\right), \left(\frac{y - x_0}{r}\right) \right\rangle + \left\langle B^0, \left(\frac{y - x_0}{r}\right) \right\rangle + C^0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} (\langle A^0 y, y \rangle - \langle A^0 x_0, y \rangle - \langle A^0 x_0, y \rangle + \langle A^0 x_0, x_0 \rangle) \\ &\quad + \frac{1}{r} \langle B^0, y \rangle - \frac{1}{r} \langle B^0, x_0 \rangle + C^0 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \langle A^0 y, y \rangle \right) + \left(\frac{1}{r} \langle B^0, y \rangle - \frac{1}{r^2} \langle A^0 x_0, y \rangle - \frac{1}{r^2} \langle A^0 y, x_0 \rangle \right) \\ &\quad + \left(C^0 + \frac{1}{r^2} \langle A^0 x_0, x_0 \rangle - \frac{1}{r} \langle B^0 x_0, x_0 \rangle \right) \end{aligned}$$

e tenha

$$|u(y) - P(y)| \leq \frac{D}{r^{2+\alpha}} \cdot \|y - x_0\|^{2+\alpha}, \quad \text{quando} \quad \|y - x_0\| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \in B_{\frac{1}{2}}(x_0).$$

5 TEORIA DE SCHAUDER VIA MÉTODO DA COMPACIDADE

5.1 Estimativas de aproximação e de Cacciopoli

Neste capítulo, para conseguirmos a estimativa de Schauder no sentido L^2 , iniciaremos com aproximações (no sentido L^2) por funções harmônicas para soluções de $\Delta u = f$, $u \in H^1$, tais que a norma $\|f\|_{L^2}$ seja razoavelmente pequena. Isto será possível utilizando a estimativa de Cacciopoli, também conhecida como estimativa de energia associada a equação de Poisson $\Delta u = f$, com a intenção de obtermos limitação de seqüências no espaço reflexivo $H^1(B_1)$.

Teorema 5.1 *Dado $\varepsilon < 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer solução fraca $u \in H^1(B_1)$ da Equação de Poisson $\Delta u = f$ tal que*

$$\int_{B_1} u^2(x) dx \leq 1 \quad \text{e} \quad \int_{B_1} f^2(x) dx \leq \delta^2$$

existe uma função $h : B_{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica tal que $\int_{B_{\frac{1}{2}}} |u(x) - h(x)|^2 dx \leq \varepsilon$.

Para provarmos este resultado precisamos da estimativa de Cacciopoli.

Proposição 5.1 (Estimativa de Cacciopoli:) *Seja $u \in H^1(B_1)$ solução fraca de $\Delta u = f$ em B_1 . Então para qualquer $\eta \in H_0^1(B_1)$ temos*

$$\int_{B_1} \eta^2(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq \int_{B_1} \eta^2(x) \cdot f^2(x) dx + \int_{B_1} (\eta^2(x) + C|\nabla \eta(x)|^2) \cdot u^2(x) dx,$$

onde $C > 0$ é universal.

Prova. Tome $\varphi \in H_0^1$ e considere $\varphi = \eta^2 \cdot u$ como função teste. Neste caso, como

$$\begin{aligned} \nabla(\eta^2 \cdot u) &= 2\eta \cdot u \cdot (\eta_{x_1}, \dots, \eta_{x_n}) + \eta^2(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \\ &= 2\eta \cdot u \nabla \eta + \eta^2 \nabla u \end{aligned}$$

e

$$\nabla u \cdot \eta^2 \nabla u = \eta^2 \cdot \langle \nabla u, \nabla u \rangle = \eta^2 \cdot |\nabla u|^2$$

obtemos por definição de solução fraca,

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \nabla u \cdot \nabla(\eta^2 \cdot u) dx &= \int_{B_1} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{B_1} f \cdot \varphi dx = - \int_{B_1} f(\eta^2 u) dx \\ &\Rightarrow \int_{B_1} \nabla u (2\eta \nabla \eta u + \eta^2 \cdot \nabla u) dx = - \int_{B_1} (f \cdot \eta) \cdot (\eta \cdot u) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{B_1} 2\eta u \nabla u \cdot \nabla \eta dx + \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 dx = \int_{B_1} (-f \cdot \eta) \cdot (\eta \cdot u) dx.$$

Pela monotonicidade da integral tem-se

$$\int_{B_1} (-f \cdot \eta) \cdot (\eta \cdot u) dx \leq \int_{B_1} \frac{(-f \cdot \eta)^2 + (\eta \cdot u)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{B_1} \eta^2 f^2 dx + \int_{B_1} \eta^2 u^2 dx \right).$$

Então,

$$2 \int_{B_1} (\eta \nabla u)(u \nabla \eta) dx + \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_{B_1} \eta^2 \cdot f^2 dx + \int_{B_1} \eta^2 \cdot u^2 dx \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{B_1} \eta^2 \cdot f^2 dx + \int_{B_1} \eta^2 \cdot u^2 dx \right) \\ &\quad + 2 \int_{B_1} |\eta| \cdot |\nabla u| \cdot |u| \cdot |\nabla \eta| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B_1} \eta^2 \cdot f^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_1} \eta^2 \cdot u^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{B_1} u^2 |\nabla u|^2 dx \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int_{B_1} \eta^2 \cdot f^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_1} \eta^2 \cdot u^2 dx + 2 \int_{B_1} u^2 |\nabla u|^2 dx \\ \Rightarrow \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 dx &\leq \int_{B_1} \eta^2 \cdot f^2 dx + \int_{B_1} \eta^2 \cdot u^2 dx + 4 \int_{B_1} u^2 |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{B_1} \eta^2 \cdot f^2 dx + \int_{B_1} (\eta^2 + 4|\nabla u|^2) \cdot u^2 dx. \end{aligned}$$

Isto prova a estimativa com $C = 4$. ■

Prova do Teorema 5.1.:

Primeiramente, vale ressaltar a equivalência das notações usadas durante o texto:

$$\begin{array}{ccc} \int_{B_1} u^2(x) dx \leq 1 & \text{e} & \int_{B_1} f^2(x) dx \leq \delta^2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \|u\|_{L^2(B_1)} \leq |B_1|^{\frac{1}{2}} & & \|f\|_{L^2(B_1)} \leq \delta |B_1|^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

Agora, suponhamos, por absurdo, que o teorema não seja válido. Então existiria ε_0 tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$ existem $u_k, f_k : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que,

$$u_k \in H^1(B_1), \quad \Delta u_k = f_k, \quad \int_{B_1} u_k^2(x) dx \leq 1 \quad \text{e} \quad \int_{B_1} f_k^2(x) dx \leq \left(\frac{1}{k}\right)^2,$$

mas para qualquer função harmônica $h : B_{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ obtemos

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} |u_k(x) - h(x)|^2 dx > \varepsilon_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para obtermos convergência de alguma subsequência de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, é suficiente exibirmos limitação no espaço $H^1(B_r)$, $0 < r \leq 1$, que equivale a possuímos limitações de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\nabla u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $L^2(B_r)$.

A limitação da sequência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $L^2(B_r)$ é imediata, pois

$$\|u_k\|_{L^2(B_r)} \leq \|u_k\|_{L^2(B_1)} \leq |B_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Pela Proposição 5.1 obteremos uma limitação para $\{\nabla u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ no espaço $L^2(B_{\frac{1}{2}})$.

De fato, dado uma função $\eta \in H_0^1(B_1)$ teremos pela estimativa da energia que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta^2 |\nabla u_k|^2 \leq \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u_k|^2 \leq \int_{B_1} \eta^2 f_k^2 + \int_{B_1} \eta^2 u_k^2 + 4 \int_{B_1} |\nabla \eta|^2 u_k^2.$$

$$\text{Podemos pedir } \eta \in H_0^1(B_1) \text{ da forma } \eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_{\frac{1}{2}} \\ 0, & \text{se } x \in B_1 \setminus B_{\frac{3}{4}} \\ \text{linear em } B_{\frac{3}{4}} \setminus B_{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Para este η teremos $\eta^2 \leq 1$ em B_1 , $\nabla \eta \equiv 0$ em $B_{\frac{1}{2}} \cup (B_1 \setminus \overline{B_{\frac{3}{4}}})$, e $\nabla \eta \equiv C_n$ em $B_{\frac{3}{4}} \setminus \overline{B_{\frac{1}{2}}}$.

Usando a continuidade de η e $\nabla \eta$ em cada compacto, $\overline{B_{\frac{1}{2}}}$ e $\overline{B_{\frac{3}{4}} \setminus B_{\frac{1}{2}}}$ teremos

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla u_k|^2 &\leq \int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta^2 |\nabla u_k|^2 \leq \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u_k|^2 \\ &\leq \int_{B_1} \eta^2 \cdot f_k^2 + \int_{B_1} \eta^2 \cdot u_k^2 + 4 \int_{B_1} |\nabla \eta|^2 \cdot u_k^2 \\ &\leq \int_{B_1} 1 \cdot f_k^2 + \int_{B_1} 1 \cdot u_k^2 + 4 \int_{B_1} C_n^2 \cdot u_k^2 \\ &\leq \frac{1}{k^2} |B_1| + |B_1| + 4C_n^2 |B_1| \\ &\leq |B_1| (2 + 4C_n^2) \\ &= C_1 \\ \Rightarrow \|\nabla u_k\|_{L^2(B_1)} &\leq (C_1)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Deste modo, sendo $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ espaço de Hilbert com produto interno $\langle u, \varphi \rangle =$

$\int_{B_{\frac{1}{2}}}(u\varphi + \nabla u \nabla \varphi)$ e, portanto, com norma $\|\varphi\|_1 = (\langle \varphi, \varphi \rangle_1)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{B_{\frac{1}{2}}} \varphi^2 + \int_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, teremos $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ limitada na norma de $H^1(B_{\frac{1}{2}})$, já que

$$\|u_k\|_1 = \left(\int_{B_{\frac{1}{2}}} u_k^2(x) dx + \int_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla u_k(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq (|B_1| + C_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Sabendo que sequência limitada em espaço de Hilbert converge fracamente a menos de subsequências, existirá $h \in H^1(B_{\frac{1}{2}})$ tal que

$$u_{k_j} \rightharpoonup h \text{ em } H^1(B_{\frac{1}{2}}) \text{ fracamente.}$$

Por outro lado, como $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ e $H^1(B_{\frac{1}{2}}) \subset\subset L^2(B_{\frac{1}{2}})$ obtemos outra subsequência $\{u_{k_{j_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{k_{j_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \omega \in L^2(B_{\frac{1}{2}})$ em norma $\|\cdot\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})}$.

Por maior razão $u_{k_{j_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \omega$ fracamente. Mas como $u_{k_{j_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} h$ fracamente, da unicidade do limite vem $\omega = h \in H^1(B_{\frac{1}{2}})$. Isto é, existe uma função $h \in H^1(B_{\frac{1}{2}})$ e uma subsequência $\{u_{k_{j_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tais que $u_{k_{j_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} h$ fracamente em $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ e $u_{k_{j_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} h$ em $L^2(B_{\frac{1}{2}})$.

Afirmamos que h é harmônica em $B_{\frac{1}{2}}$.

De fato, dada uma função teste $\varphi \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{2}})$ temos pela Desigualdade de Hölder para integrais,

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla u_k(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx &= \int_{B_{\frac{1}{2}}} -f_k \cdot \varphi(x) dx \leq \int_{B_{\frac{1}{2}}} |f_k \cdot \varphi|(x) dx \leq \|f_k\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} \cdot \|\varphi\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} \\ &\leq \frac{|B_1|^{\frac{1}{2}}}{k} \cdot \|\varphi\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

E ainda, por convergência fraca,

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla u_{k_{j_l}}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla h(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

Isto pode ser visto definindo $\psi : H^1(B_{\frac{1}{2}}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) := \int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

Primeiro, ψ é linear: Vem da linearidade do gradiente, do produto interno e da integral.

Segundo, ψ é contínua: Dada $u \in B_1(H^1(B_{\frac{1}{2}}))$ temos pelas desigualdades de

Hölder e Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |\psi(u)| &= \left| \int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \leq \int_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla u \nabla \varphi|(x) dx \leq \int_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla u(x)| \cdot |\nabla \varphi(x)| dx \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} \cdot \|\nabla \varphi\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} \leq 1 \cdot \|\nabla \varphi\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} = C_\varphi. \end{aligned}$$

Deste modo, tendo $u_{k_{j_l}} \rightarrow k$ fracamente em $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ e $\psi \in \mathcal{L}(H^1, \mathbb{R})$, obtemos

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla u_{k_{j_l}}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \psi(u_{k_{j_l}}) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \psi(h) = \int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla h(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

Por outro lado,

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla u_k(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla u_{k_{j_l}}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{2}}).$$

Portanto,

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \nabla h(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{2}}).$$

Pela arbitrariedade de φ , a função h é harmônica em $B_{\frac{1}{2}}$.

E como $u_{k_{j_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} h$ em $L^2(B_{\frac{1}{2}})$, para algum $l \gg 1$ obtém-se

$$\|u_{k_{j_l}} - h\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} \leq (\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \int_{B_{\frac{1}{2}}} |u_{k_{j_l}}(x) - h(x)|^2 dx \leq \varepsilon_0.$$

O que contradiz a suposta inexistência de função harmônica como no teorema. ■

5.2 Teorema principal via Método da Compacidade

Definição 5.1 Uma função $f : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita α -Hölder contínua na origem no sentido L^2 se

$$[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} = \sup_{0 < r \leq 1} \frac{1}{r^\alpha} \left(\int_{B_r} |f(x) - f(0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Lema 5.1 (Lema-chave) Dado $\alpha \in (0, 1)$ existem $\bar{C}_0 > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ e $\delta_0 > 0$ tais que quaisquer que sejam u e f satisfazem $\Delta u = f$ em B_1 e

$$\int_{B_1} u^2 dx \leq 1 \quad e \quad \int_{B_1} f^2 dx \leq \delta_0^2,$$

existe um polinômio quadrático harmônico

$$P(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle B, x \rangle + C$$

tal que

$$\int_{B_\lambda} |u(x) - P(x)|^2 dx \leq \lambda^{2(2+\alpha)}$$

e $\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| \leq \bar{C}_0$, com \bar{C}_0 universal.

Prova. Para $0 < \varepsilon < 1$ a ser determinado, tome $\delta > 0$ e $h : B_{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica como no teorema 5.1. Isto é, $\int_{B_{\frac{1}{2}}} |u - h|^2 dx \leq \varepsilon$ e $\int_{B_{\frac{1}{2}}} f^2 \leq \delta^2$.

$$\text{Seja } P(x) = \frac{1}{2} \langle D^2 h(0)x, x \rangle + \langle \nabla h(0), x \rangle + h(0) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle B, x \rangle + C.$$

Por estimativa da derivada temos

$$\|A\|_\infty \leq C_2(n) \cdot \|h\|_{L^1(B_{\frac{1}{2}})}$$

$$\|B\|_\infty \leq C_1(n) \cdot \|h\|_{L^1(B_{\frac{1}{2}})}$$

$$|C| \leq C(n) \cdot \|h\|_{L^1(B_{\frac{1}{2}})}.$$

Então a desigualdade de Holder para h e $\varphi \equiv 1$ nos dá,

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| &\leq (C_2(n) + C_1(n) + C(n)) \cdot \|h\|_{L^1(B_{\frac{1}{2}})} \\ &\leq (C_2(n) + C_1(n) + C(n)) |B_1|^{\frac{1}{2}} \cdot \|h\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})}. \end{aligned}$$

Estimemos a norma $L^2(B_{\frac{1}{2}})$ de h :

Veja que, pontualmente

$$\begin{aligned} |h| &\leq |h - u| + |u| \\ \Rightarrow h^2 = |h|^2 &\leq (|h - u| + |u|)^2 \\ &= |h - u|^2 + |u|^2 + 2|h||h - u| \\ &\leq 2|h - u|^2 + 2|u|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{1}{2}}} h^2 &\leq 2 \int_{B_{\frac{1}{2}}} |h - u|^2 + 2 \int_{B_{\frac{1}{2}}} u^2 \leq 2\varepsilon + 2 \int_{B_1} u^2 \leq 2 + 2|B_1| \\ \Rightarrow \|h\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} &\leq [2(1 + |B_1|)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

O que nos dá independência de h na estimativa dos coeficientes

$$\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| \leq (\overline{C}_0 + \overline{C}_1 + \overline{C}_2) \cdot |B_1|^{\frac{1}{2}} \cdot [2(1 + |B_1|)]^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, para $\|x\| \leq \frac{1}{2}$, usando o teorema do valor médio e a estimativa da derivada,

$$\begin{aligned} |h(x) - P(x)| &= \frac{1}{3!} \sum_{|\alpha|=3} D^\alpha h(0x) x^\alpha \\ &\leq \frac{1}{3!} \sup_{z \in B_{\frac{1}{2}}} |D^3 h(z)| \cdot |x|^3 \\ &\leq \frac{1}{3!} \overline{C}_3(n) \cdot \|h\|_{L^1(B_{\frac{1}{2}})} \cdot |x|^3 \\ &\leq \frac{1}{3!} |B_1|^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{C}_3(n) \cdot \|h\|_{L^1(B_{\frac{1}{2}})} \cdot |x|^3 \\ &\leq \frac{\overline{C}_3(n)}{3!} |B_1|^{\frac{1}{2}} [2(1 + |B_1|)]^{\frac{1}{2}} \cdot |x|^3 \\ &:= C_3(n) \cdot |B_1|^{\frac{1}{2}} [2(1 + |B_1|)]^{\frac{1}{2}} \cdot |x|^3. \end{aligned}$$

Fazendo $\overline{C}_0 = (C(n) + C_1(n) + C_2(n) + C_3(n)) \cdot |B_1|^{\frac{1}{2}} \cdot [2(1 + |B_1|)]^{\frac{1}{2}}$ ganhamos

$$\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| \leq \overline{C}_0 \quad \text{e} \quad |h(x) - P(x)| \leq \overline{C}_0 \|x\|^3.$$

Assim, se $\lambda \leq \frac{1}{2}$ temos pela desigualdade pontual $|u - P|^2 \leq 2|u - h|^2 + 2|h - P|^2$,
que

$$\begin{aligned} \int_{B_\lambda} |u(x) - P(x)|^2 dx &\leq 2 \int_{B_\lambda} |u(x) - h(x)|^2 dx + 2 \int_{B_\lambda} |h(x) - P(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{2}{|B_\lambda|} \cdot \varepsilon + \frac{2\overline{C}_0^2}{|B_\lambda|} \int_{B_\lambda} \|x\|^6 dx \\ &= \frac{2\varepsilon}{|B_\lambda|} + \frac{2\overline{C}_0^2}{|B_\lambda|} \int_{B_\lambda} \lambda^6 dx \\ &= \frac{2\varepsilon}{|B_\lambda|} + \frac{2\overline{C}_0^2}{|B_\lambda|} \lambda^6 |B_\lambda| \\ &= \frac{2\varepsilon}{|B_1| \lambda^n} + 2\overline{C}_0^2 \cdot \lambda^6. \end{aligned}$$

Sendo assim, para obtermos $\int_{B_\lambda} |u(x) - P(x)|^2 dx \leq \lambda^{2(2+\alpha)}$ é suficiente que

$$\frac{2\varepsilon}{|B_1| \lambda^n} \leq \frac{1}{2} \cdot \lambda^{2(2+\alpha)} \quad \text{e} \quad 2\overline{C}_0^2 \leq \frac{1}{2} \lambda^{2(2+\alpha)}.$$

Portanto pedimos

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \text{ e } \lambda^{6-2(2+\alpha)} \leq \frac{1}{4C_0^2} \Rightarrow \lambda = \min \left\{ \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{4C_0^2} \right)^{\frac{1}{2-2\alpha}} \right\}$$

$$\varepsilon \leq \frac{B_1}{4} \cdot \lambda^{n+4+2\alpha} \leq \frac{B_1}{4} \left(\frac{1}{4C_0^2} \right)^{\frac{n+4+2\alpha}{2+\alpha}}.$$

■

Teorema 5.2 *Seja $\Delta u = f$ uma função α -Hölder na origem no sentido L^2 em B_1 . Então existem um polinômio quadrático*

$$P(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle B, x \rangle + C,$$

com $\Delta P(x) = f(0)$, e $D = D(n, \alpha, r) > 0$ para cada $r \in (0, 1)$ dado, tais que

$$\int_{B_r} |u(x) - P(x)|^2 dx \leq Dr^{2(2+\alpha)}$$

e

$$\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| + D \leq C_0 \left([f]_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \|u\|_{L^2(B_1)} \right),$$

onde $C_0 = C_0(n, \alpha, r) > 0$ é uma constante universal.

Prova. Podemos assumir, sem perda de generalidade que

$$f(0) = 0, \quad \int_{B_1} u^2 dx \leq 1 \quad \text{e} \quad [f]_{C^\alpha(0)} \leq \delta.$$

para δ como no Lema-chave.

Caso contrário, se adapte a essas condições definindo, assim como no capítulo anterior,

$$v(x) = \delta \cdot \frac{\left(u(x) - \frac{f(0)}{2n} |x|^2 \right)}{[f]_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \int_{B_1} u^2(x) dx}.$$

Neste caso, $\Delta v = g$ em B_1 , onde

$$g(x) = \delta \cdot \frac{f(x) - f(0)}{[f]_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \int_{B_1} u^2(x) dx}.$$

Afirmção: Sob essas condições, existe uma sequência de polinômios

$$P_k(x) = \frac{1}{2} \langle A_k x, x \rangle + \langle B_k, x \rangle + C_k$$

tais que

$$\int_{B_\lambda^k} |u(x) - P_k(x)|^2 dx \leq \lambda^{2k(2+\alpha)} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \|A_{k+1} - A_k\|_\infty \leq \bar{C}_0 \lambda^{k\alpha} \\ \|B_{k+1} - B_k\|_\infty \leq \bar{C}_0 \lambda^{k(1+\alpha)} \\ \|C_{k+1} - C_k\|_\infty \leq \bar{C}_0 \lambda^{k(2+\alpha)}. \end{cases}$$

para \bar{C}_0 como no Lema-chave.

Veja que sendo $\int_{B_1} u^2(x) dx \leq 1$, e

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_1} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{1^\alpha} \left(\int_{B_1} |f(x) - f(0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{0 < r \leq 1} \frac{1}{r^\alpha} \left(\int_{B_r} |f(x) - f(0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= [f]_{C^\alpha(0)} \leq \delta \\ \Rightarrow \int_{B_1} f^2 &\leq \delta^2, \end{aligned}$$

então pelo Lema existe P_1 polinômio quadrático harmônico,

$$P_1(x) = \frac{1}{2} \langle A_1 x, x \rangle + \langle B_1, x \rangle + C_1$$

tal que $\int_{B_\lambda} |u(x) - P_1(x)|^2 dx \leq \lambda^{2(2+\alpha)}$.

Para a construção de P_2 iremos exibir uma função ω_1 de $u - P_1$ nas condições do Lema-chave. Como temos $\omega_1 : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$, e sabemos estimar $u - P_1$ em B_λ , faremos mudança de escala.

Deseja-se que $\omega_1(x) = \varphi((u - P_1)(\lambda x))$, $x \in B_1$, seja tal que

$$\int_{B_1} \omega_1(x) dx \leq |B_1| \quad \text{e} \quad \int_{B_1} (\Delta \omega_1)^2(x) dx \leq \delta^2 \cdot |B_1|.$$

Ora, mas

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |u(\lambda x) - P_1(\lambda x)|^2 \lambda^n dx &= \int_{B_\lambda} |u(x) - P_1(x)|^2 dx \leq \lambda^{2(2+\alpha)} \cdot |B_\lambda| \\ &= 2^{2(2+\alpha)} \cdot |B_1| \lambda^n \\ \Rightarrow \int_{B_1} |u(\lambda x) - P_1(\lambda x)|^2 dx &\leq \lambda^{2(2+\alpha)} \cdot |B_1| \\ \Rightarrow \int_{B_1} \left| \frac{u(\lambda x) - P_1(\lambda x)^2}{\lambda^{2(2+\alpha)}} \right| dx &\leq |B_1|. \end{aligned}$$

Então, a priori, podemos definir $\varphi(y) = \frac{y}{\lambda^{2+\alpha}}$ e, conseqüentemente

$$\omega_1(x) = \frac{u(\lambda x) - P_1(\lambda x)}{\lambda^{2+\alpha}},$$

e obtermos

$$\int_{B_1} \omega_1^2(x) dx \leq |B_1|.$$

Mas sendo

$$\Delta\omega_1(x) = \frac{1}{\lambda^{2+\alpha}} \lambda^2 f(\lambda x) = \frac{f(\lambda x)}{\lambda^\alpha},$$

teremos também

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_1} (\Delta\omega_1)^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{B_1} \frac{f^2(\lambda x)}{\lambda^{2\alpha}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda^\alpha} \left(\int_{B_1} f^2(\lambda x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\lambda^\alpha} \left(\frac{1}{\lambda^n} \int_{B_\lambda} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} (\Delta\omega_1)^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\lambda^\alpha} \left(\frac{1}{\lambda^n \cdot |B_\lambda|} \cdot \int_{B_\lambda} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq [f]_{C_{L^2}(0)}^\alpha < \delta_0 \\ &\Rightarrow \int_{B_1} (\Delta\omega_1)^2(x) dx \leq \delta^2. \end{aligned}$$

Assim ω_1 está nas condições do Lema. Logo existe polinômio quadrático harmônico \bar{P}_2 tal que

$$\int_{B_\lambda} |\omega_1(x) - \bar{P}_2(x)| dx \leq \lambda^{2(2+\alpha)}$$

e a soma dos coeficientes limitadores por \bar{C}_0 .

Nessas condições,

$$\begin{aligned} \int_{B_\lambda} |\omega_1(x) - \bar{P}_2(x)|^2 dx &= \frac{1}{|B_\lambda|} \int_{B_\lambda} \left| \frac{u(\lambda x) - P_1(\lambda x)}{\lambda^{2+\alpha}} - \bar{P}_2(x) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{|B_1| \lambda^n} \int_{B_\lambda} \left| \frac{u(\lambda x) - P_1(\lambda x) - \lambda^{2+\alpha} \bar{P}_2(x)}{\lambda^{2+\alpha}} \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{|B_1| \lambda^n} \frac{1}{\lambda^{2(2+\alpha)}} \int_{B_\lambda} |u(\lambda x) - P_1(\lambda x) - \lambda^{2+\alpha} \bar{P}_2(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{|B_1| \lambda^n} \frac{1}{\lambda^{2(2+\alpha)}} \int_{B_{\lambda^2}} \left| u(x) - P_1(x) - \lambda^{2+\alpha} \bar{P}_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right|^2 \frac{1}{\lambda^n} dx \\ &= \frac{1}{\lambda^{2(2+\alpha)}} \frac{1}{|B_1|} \frac{1}{(\lambda^2)^n} \int_{B_{\lambda^2}} \left| u(x) - P_1(x) - \lambda^{2+\alpha} \bar{P}_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $\int_{B_\lambda} |\omega_1(x) - \bar{P}_2(x)|^2 dx \leq \lambda^{2(2+\alpha)}$. Daí,

$$\int_{B_\lambda} \left| u(x) - P_1(x) - \lambda^{2+\alpha} \bar{P}_2 \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right|^2 dx \leq [\lambda^{2(2+\alpha)}]^2 = \lambda^{2-2(2+\alpha)}.$$

Então basta definirmos $P_2(x) = P_1(x) + \lambda^{2+\alpha} \cdot \bar{P}_2 \left(\frac{x}{\lambda} \right)$.

Construimos a sequência $\{P_k\}$ por indução em k . Como foi feito, para obtemos P_{k+1} definiremos, supondo a existência de P_k ,

$$\omega_k(x) = \frac{u(\lambda^k x) - P_k(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}},$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \omega_k^2(x) dx &= \frac{1}{\lambda^{2k(2+\alpha)}} \int_{B_1} |u(\lambda^k x) - P_k(\lambda^k x)|^2 dx = \frac{1}{\lambda^{2k(2+\alpha)}} \int_{B_{\lambda^k}} |u(x) - P_k(x)|^2 \frac{1}{\lambda^{kn}} dx \\ &= \frac{1}{\lambda^{2k(2+\alpha)}} \frac{1}{\lambda^{kn}} \int_{B_{\lambda^k}} |u(x) - P_k(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda^{2k(2+\alpha)}} \frac{1}{\lambda^{kn}} \lambda^{2k(2+\alpha)} |B_{\lambda^k}| = |B_1|. \end{aligned}$$

Como $\Delta\omega_k(x) = \frac{\lambda^{2k} f(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} = \frac{f(\lambda^k x)}{\lambda^\alpha}$, temos também

$$\begin{aligned} \int_{B_1} (\Delta\omega_k)^2(x) dx &= \frac{1}{(\lambda^\alpha)^2 |B_1|} \int_{B_1} f^2(\lambda^k x) dx = \frac{1}{\lambda^{\alpha^2} |B_1|} \int_{B_{\lambda^k}} f(x) \frac{1}{\lambda^{kn}} dx \\ &= \frac{1}{\lambda^{\alpha^2} |B_{\lambda^k}|} \int_{B_{\lambda^k}} f^2(x) dx \leq [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)}^2 \leq \delta_0^2. \end{aligned}$$

Novamente pelo Lema-chave, existirá \bar{P}_{k+1} polinômio quadrático harmônico tal que

$$\int_{B_\lambda} |\omega_k(x) - \bar{P}_{k+1}(x)|^2 dx \leq \lambda^{2(2+\alpha)}.$$

Escrevendo em termos que u e P_k ,

$$\begin{aligned} &\int_{B_\lambda} |(\omega_k - \bar{P}_{k+1})(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{|B_1| \lambda^n} \cdot \frac{1}{\lambda^{k(2+\alpha)}} \int_{B_\lambda} |u(\lambda^k x) - P_k(\lambda^k x) - \lambda^{k(2+\alpha)} \bar{P}_{k+1}(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{|B_1| \lambda^n} \cdot \frac{1}{\lambda^{2k(2+\alpha)}} \int_{B_{\lambda^{(k+1)}}} \left| u(x) - P_k(x) - \lambda^{k(2+\alpha)} \bar{P}_{k+1} \left(\frac{x}{\lambda^k} \right) \right|^2 \frac{1}{\lambda^{kn}} dx \\ &= \frac{1}{|B_1| \lambda^{n(k+1)}} \cdot \frac{1}{\lambda^{2k(2+\alpha)}} \int_{B_{\lambda^{(k+1)}}} \left| u(x) - P_k(x) - \lambda^{k(2+\alpha)} \bar{P}_{k+1} \left(\frac{x}{\lambda^k} \right) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{\lambda^{2k(2+\alpha)}} \int_{B_{\lambda^{(k+1)}}} \left| u(x) - P_k(x) - \lambda^{k(2+\alpha)} \bar{P}_{k+1} \left(\frac{x}{\lambda^k} \right) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Definindo o polinômio $P_{k+1}(x) = P_k(x) + \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \bar{P}_{k+1}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, e usando o fato de que $\int_{B_\lambda} |\omega_k(x) - \bar{P}_{k+1}(x)|^2 dx \leq \lambda^{2(2+\alpha)}$, obtemos

$$\int_{B_{\lambda^{k+1}}} |u(x) - P_{k+1}(x)|^2 dx \leq \lambda^{2(2+\alpha)} \cdot \lambda^{2k(2+\alpha)} = \lambda^{2(k+1)(2+\alpha)}.$$

Ficando provada a existência da sequência, faltando apenas as estimativas de seus coeficientes. Uma vez que

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k + \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{\lambda^{2k}}\right) \bar{A}_{k+1} = A_k + \lambda^{k\alpha} \cdot \bar{A}_{k+1} \\ B_{k+1} = B_k + \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{\lambda^k}\right) \bar{B}_{k+1} = B_k + \lambda^{k(1+\alpha)} \cdot \bar{B}_{k+1} \\ C_{k+1} = C_k + \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \bar{C}_{k+1}, \end{cases}$$

chegamos à

$$\begin{cases} \|A_{k+1} - A_k\|_\infty \leq \lambda^{k\alpha} \cdot \|\bar{A}_{k+1}\|_\infty \leq \bar{C}_0 \cdot \lambda^{k\alpha} \\ \|B_{k+1} - B_k\|_\infty \leq \lambda^{k(1+\alpha)} \cdot \|\bar{B}_{k+1}\|_\infty \leq \bar{C}_0 \cdot \lambda^{k(1+\alpha)} \\ \|C_{k+1} - C_k\|_\infty \leq \lambda^{k(2+\alpha)} \cdot \|\bar{C}_{k+1}\|_\infty \leq \bar{C}_0 \cdot \lambda^{k(2+\alpha)}. \end{cases}$$

Notando que essas estimativas são idênticas às feitas para o teorema via princípio do máximo, segue $\{A_k\}$, $\{B_k\}$ e $\{C_k\}$ são de Cauchy.

Sejam $\lim_k A_k = A$, $\lim_k B_k = B$ e $\lim_k C_k = C$.

Definindo $P(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle B, x \rangle + C$, tem-se $\lim_k P_k = P$. Logo, P é polinômio harmônico. Isto é $\Delta P = 0 = f(0)$.

Veja que existe D tal que $\int_{B_r} |u(x) - P(x)|^2 dx \leq D \cdot r^{2(2+\alpha)}$ para $0 < r \leq R$.

Dado $r \in (0, \lambda]$ tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^{k+1} \leq r \leq \lambda^k$ e tenha

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |u(x) - P(x)|^2 dx &\leq 2 \int_{B_r} |u(x) - P_k(x)|^2 + 2 \int_{B_r} |P_k(x) - P(x)|^2 dx & (9) \\ &\leq \frac{2}{|B_r|} \int_{B_{\lambda^k}} |u(x) - P_k(x)|^2 dx + \frac{2}{|B_r|} \int_{B_{\lambda^k}} |P_k(x) - P(x)|^2 dx \\ &= \frac{2|B_{\lambda^k}|}{|B_r|} \int_{B_{\lambda^k}} |u(x) - P_k(x)|^2 dx + \frac{2|B_{\lambda^k}|}{|B_r|} \int_{B_{\lambda^k}} |P_k(x) - P(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{2\lambda^{kn}}{r^n} \lambda^{2k(2+\alpha)} + \frac{2\lambda^{kn}}{r^n} \int_{B_{\lambda^k}} |P_k(x) - P(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Ainda pelas estimativas feitas no capítulo anterior, para $k, m \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
|A_{k+m} - A_k| &\leq \frac{\bar{C}_0}{1 - \lambda^\alpha} \lambda^{\alpha k} \\
|B_{k+m} - B_k| &\leq \frac{\bar{C}_0}{1 - \lambda^{1+\alpha}} \lambda^{k(1+\alpha)} \\
|C_{k+m} - C_k| &\leq \frac{\bar{C}_0}{1 - \lambda^{2+\alpha}} \lambda^{k(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ obtemos para $x \in B_{\lambda^k}$,

$$\begin{aligned}
|P_k(x) - P(x)| &\leq \frac{\bar{C}_0}{1 - \lambda^\alpha} \lambda^{\alpha k} \|x\|^2 + \frac{\bar{C}_0}{1 - \lambda^{1+\alpha}} \lambda^{k(1+\alpha)} \|x\| + \frac{\bar{C}_0}{1 - \lambda^{2+\alpha}} \lambda^{k(2+\alpha)} \\
&\leq \frac{\bar{C}_0}{1 - \lambda^\alpha} (\lambda^{\alpha k} \lambda^{2k} + \frac{\bar{C}_0}{1 - \lambda^{1+\alpha}} \lambda^{k(1+\alpha)} \lambda^k + \frac{\bar{C}_0}{1 - \lambda^{2+\alpha}} \lambda^{k(2+\alpha)}) \\
&= \bar{C}_0 \lambda^{k(2+\alpha)} \left(\frac{1}{1 - \lambda^\alpha} + \frac{1}{1 - \lambda^{1+\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda^{2+\alpha}} \right) \\
\Rightarrow |P_k(x) - P(x)|^2 &\leq \left[\bar{C}_0 \left(\frac{1}{1 - \lambda^\alpha} + \frac{1}{1 - \lambda^{1+\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda^{2+\alpha}} \right) \right]^2 \cdot \lambda^{2k(2+\alpha)} \\
&:= \bar{C} \cdot \lambda^{2k(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Portanto, voltando à (9),

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u(x) - P(x)|^2 dx &\leq 2 \left(\frac{\lambda^k}{r} \right)^n \lambda^{2k(2+\alpha)} + 2 \left(\frac{\lambda^k}{r} \right)^n \bar{C} \cdot \lambda^{2k(2+\alpha)} \int_{B_{\lambda^k}} dx \\
&= 2 \frac{1}{\lambda^n} \left(\frac{\lambda^{k+1}}{r} \right)^n \lambda^{2k(2+\alpha)} + 2 \frac{1}{\lambda^n} \left(\frac{\lambda^{k+1}}{r} \right)^n \bar{C} \cdot \lambda^{2k(2+\alpha)} \\
&= \frac{2}{\lambda^n} (1 + \bar{C}) \lambda^{2k(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Mas como $\lambda^{k+1} \leq r$, temos $\lambda^{(k+1)2(2+\alpha)} \leq r^{2(2+\alpha)} \Rightarrow \lambda^{2k(2+\alpha)} \leq \frac{r^{2(2+\alpha)}}{\lambda^{2(2+\alpha)}}$.

Assim,

$$\int_{B_r} |u(x) - P(x)|^2 dx = \frac{2}{\lambda^n} (1 + \bar{C}) \cdot \frac{r^{2(2+\alpha)}}{\lambda^{2(2+\alpha)}} = \left(\frac{2(1 + \bar{C})}{\lambda^n \cdot \lambda^{2(2+\alpha)}} \right) \cdot r^{2(2+\alpha)}.$$

E quando $\lambda \leq r \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u(x) - P(x)|^2 dx &\leq 2 \int_{B_r} |u(x)|^2 dx + 2 \int_{B_r} |P(x)|^2 dx \\
&\leq \frac{2}{|B_r|} \int_{B_1} u(x)^2 dx + \frac{2}{|B_r|} \int_{B_1} P(x)^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u(x) - P(x)|^2 dx &< \frac{2}{r^n |B_1|} |B_1| + \frac{2}{r^n |B_1|} (\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C|)^2 \int_{B_1} dx \\
&\leq \frac{2}{r^n} + \frac{2}{r^n} \cdot \bar{C}_0^2 \\
&\leq \frac{2}{\lambda^n} (1 + \bar{C}_0^2) \cdot \frac{r^{2(2+\alpha)}}{r^{2(2+\alpha)}} \\
&\leq \frac{2(1 + \bar{C}_0^2)}{\lambda^n \cdot \lambda^{2(2+\alpha)}} \cdot r^{2(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Para concluir, tomamos $D = \max \left\{ \frac{2(1 + \bar{C})}{\lambda^n \cdot \lambda^{2(2+\alpha)}}, \frac{2(1 + C_0^2)}{\lambda^n \cdot \lambda^{2(2+\alpha)}} \right\}$ e observamos que

$$\int_{B_r} |u(x) - P(x)|^2 dx \leq D \cdot r^{2(2+\alpha)}.$$

Por fim, fazendo $C_0 = \bar{C}_0 + D$ temos $\|A\|_\infty + \|B\|_\infty + |C| \leq C_0(1 + \delta_0)$. ■

6 TEORIA DE SCHAUDER VIA POTENCIAL NEWTONIANO

6.1 O Potencial Newtoniano

Definição 6.1 Dada uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a função Potencial Newtoniano de f relativo ao domínio Ω , $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(x) := \int_{\Omega} \gamma(x-y) \cdot f(y) dy,$$

onde γ é a Solução Fundamental da Equação de Laplace $\Delta u = 0$.

Iremos mostrar que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 com suporte compacto, seu Potencial Newtoniano é solução da equação de Poisson $\Delta u = f$. Isto é motivado pela Representação de Green para funções $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ definidas em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Sendo $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, para cada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado tal que $\text{supp } f \subset \Omega$ tem-se $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado contendo $\text{supp } f$, com $x \in \Omega$, e tenha pela Representação de Green

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\Omega} \gamma(x-y) \cdot \Delta f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left(\gamma(x-y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) - f(y) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}(x-y) \right) dS_y \\ &= \int_{\Omega} \gamma(x-y) \cdot \Delta f(y) dy - \int_{\partial\Omega} (\gamma(x-y) \cdot \Delta f(y) - f(y) \cdot \Delta \gamma(x-y)) dS_y. \end{aligned}$$

Pelo fato de que $\text{supp } f \subset \subset \Omega$ e a Solução Fundamental γ ser harmônica,

$$f(x) = \int_{\Omega} \gamma(x-y) \cdot \Delta f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y) \cdot \Delta f(y) dy.$$

Assim, se pudermos comutar o operador laplaciano com o sinal da integral do Potencial Newtoniano $v(x) := \int_{\Omega} \gamma(x-y) \cdot f(y) dy$, e além disso, tal operador estiver atuando apenas na função f teremos

$$\Delta v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y) \cdot \Delta f(y) dy = f(x).$$

Mostraremos, no próximo teorema, que isso irá ocorrer.

Teorema 6.1 Para $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ defina

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y) f(y) dy.$$

Teremos $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e solução da Equação de Poisson $\Delta u = f$ em \mathbb{R}^n .

Prova. Por meio de mudança de variáveis obtemos

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y) \cdot f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \cdot f(x-y) dy.$$

Para o cálculo de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ veja que

$$\frac{u(x+te_i) - u(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \cdot \frac{f(x+te_i-y) - f(x-y)}{t} dy,$$

onde $\frac{f(x+te_i-y) - f(x-y)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$ uniformemente em \mathbb{R}^n , pela continuidade de f e compacidade do seu suporte.

Como cada parcial de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é contínua com suporte compacto e $\gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \cdot \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+te_i-y) - f(x-y)}{t} \right) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \cdot \frac{f(x+te_i-y) - f(x-y)}{t} dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+te_i) - u(x)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Isto é, $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) dy$. Assim, $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Similarmente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) dy.$$

Portanto, $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, com $u, Du, D^2u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois são contínuas com suporte compacto. Ademais,

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \cdot \Delta f(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \gamma(y) \cdot \Delta f(x-y) dy + \int_{B_\varepsilon} \gamma(y) \cdot \Delta f(x-y) dy, \quad (10)$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. A fim de removermos a singularidade $y = 0$, estimaremos cada uma das parcelas.

Em primeiro lugar, se $C_2 = \sup_{\mathbb{R}^n} |D^2 f|$, temos

$$\left| \int_{B_\varepsilon} \gamma(y) \cdot \Delta f(x-y) dy \right| \leq C_2 \cdot n^2 \left| \int_{B_\varepsilon(0)} \gamma(y) dy \right|.$$

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon} \gamma(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{B_\varepsilon} \log |y| = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r} \log |y| dS_y dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \log r \cdot |\partial B_r| dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \log r \cdot 2|B_1| dr = \int_0^\varepsilon \log r dr = \varepsilon^2 |\log \varepsilon|.\end{aligned}$$

Para $n = 3$,

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon} \gamma(y) dy &= \frac{1}{n(2-n)|B_1|} \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{|y|^{n-2}} dy = \frac{1}{n(2-n)|B_1|} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r} \frac{1}{|y|^{n-2}} dS_y dr \\ &= \frac{1}{n(2-n)|B_1|} \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{n-2}} \cdot |\partial B_r| dr = \frac{1}{n(2-n)|B_1|} \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{n-2}} n r^{n-1} |B_1| dr \\ &= \frac{1}{2-n} \int_0^\varepsilon r dr = \frac{\varepsilon^2}{2(2-n)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \int_{B_\varepsilon} \gamma(y) \cdot \Delta f(x-y) dy \right| \leq C_2 \cdot n^2 \cdot \begin{cases} \varepsilon^2 |\log \varepsilon|, & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{2(2-n)} \cdot \varepsilon^2, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Donde concluimos que

$$\int_{B_\varepsilon} \gamma(y) \cdot \Delta f(x-y) dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (11)$$

Para a segunda parte observamos que $\gamma, f \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n \setminus B_r})$ e usamos uma Identidade de Green obtendo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \gamma(y) \cdot \Delta f(x-y) dy = \int_{\partial B_\varepsilon} \gamma(y) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS(y) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla f(x-y) dy. \quad (12)$$

Fazendo $C_1 = \sup |\nabla f|$, supondo $0 < \varepsilon < 1$, e por $\|v\| < 1$ e $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x, y) = \langle \nabla f(x-y), v \rangle \leq C_1$ obtemos a desigualdade

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon} \gamma(y) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS_y \right| \leq n C_1 \int_{\partial B_\varepsilon} |\gamma(y)| dy = \begin{cases} n C_1 |\log \varepsilon|, & \text{se } n = 2 \\ n C_1 \frac{\varepsilon}{n-2}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Logo,

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \gamma(y) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS(y) \longrightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (13)$$

Por outro lado, usando novamente a Identidade de Green temos que,

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla f(x-y) dy &= -\int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon)} f(x-y) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}(y) dS y \\
&+ \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon)} f(x-y) \cdot \Delta \gamma(y) dS y \\
&= -\int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon)} f(x-y) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}(y) dS y,
\end{aligned}$$

onde $v = \frac{-y}{\varepsilon}$ e $\nabla \gamma(y) = \frac{1}{n|B_1|} \cdot \frac{-y}{|y|^n}$. Daí, $\frac{\partial \gamma(y)}{\partial \nu} = \langle \frac{y}{n|B_1|\varepsilon^n}, \frac{-y}{\varepsilon} \rangle = \frac{-1}{n|B_1|\varepsilon^{n+1}}$ quando $y \in B_\varepsilon$.

Então

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla f(x-y) dy &= -\int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon)} f(x-y) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}(y) dS y \\
&= \frac{1}{n|B_1|\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon)} f(x-y) dS y \\
&= \frac{1}{|\partial B_\varepsilon|} \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon)} f(x-y) dS y \\
&= \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(y) dS y. \tag{14}
\end{aligned}$$

Segue pelo Teorema do Valor Médio para integrais que este valor tende para $f(x)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Logo por (10), (11), (12), (13), (14), tem-se

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y) \Delta f(x-y) dy = f(x).$$

■

Observação: Por se tratar de uma função $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, o resultado continuará válido para $f \in C_0^2(U)$ onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, pois neste caso, consideramos a extensão $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{f} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin U \\ f & \text{se } x \in U. \end{cases}$$

Daí obtemos

$$u(x) = \int_U \gamma(x-y) f(y) dy$$

solução de $\Delta u = f$ quando $f \in C_0^2(U)$.

Nesta seção, queremos provar que isto também ocorrerá se f for um tipo de função com menos regularidade e sem suporte compacto.

Antes dos Lemas-chave que nos conduzirão ao teorema principal, a Estimativa

de Schauder, examinaremos a existência de uma família de funções que irão, por meio de convoluções, servir como auxiliares para as provas desses Lemas.

Proposição 6.1 *Para cada $\varepsilon > 0$ existe uma função $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1, \quad \eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \|x\| \leq \varepsilon \\ 1, & \text{se } \|x\| \geq 2\varepsilon \end{cases} \quad e \quad \left| \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

Prova. Basta tomarmos uma função corte $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 1 \\ 1, & \text{se } t \geq 2 \end{cases} \quad e \quad 0 \leq \eta' \leq C.$$

De fato, definindo $\eta_\varepsilon(x) := \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$ temos

- (i) $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- (ii) $0 \leq \eta_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \leq 1$
- (iii) $\begin{cases} \eta_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) = 0 & \text{se } \frac{|x|}{\varepsilon} \leq 1 \\ \eta_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) = 1 & \text{se } \frac{|x|}{\varepsilon} \geq 2 \end{cases}$
- (iv) $\left| \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x) \right| = \left| \eta'\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{\partial\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)}{\partial x_i} \right| = \left| \eta'\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \right| \cdot \left| \frac{2x_i}{2\varepsilon|x_i|} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon}.$

Para construir a função η comece com $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}}, & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Em seguida, defina $\beta(t) = \alpha(t-1) \cdot \alpha(2-t)$. Isto é,

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 1 \text{ e } 2 \leq t \\ e^{\frac{1}{(t-1)(t-2)}}, & \text{se } 1 < t < 2. \end{cases}$$

Tem-se $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo $\beta = 0$ se $t \leq 1$ e $2 \leq t$. O gráfico de β nada mais é que um "pulso" positivo suave no intervalo $[1, 2]$. Defina então

$$\eta(t) = \frac{1}{\int_{-\infty}^2 \beta(s) ds} \cdot \int_{-\infty}^1 \beta(s) ds.$$

■

Observação: As funções η_ϵ usadas nos próximos resultados serão desse tipo, e nos ajudarão a exibirmos as parciais do Potencial Newtoniano e concluímos que ele é solução da Equação de Poisson com a mesma função f associada.

Lema 6.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $f \in L^\infty(\Omega)$. Se v é o Potencial Newtoniano de f com respeito ao domínio Ω , então $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$, assim como para cada $x \in \Omega$ e cada $i = 1, \dots, n$ vale*

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot f(y) dy.$$

Prova. Note inicialmente que a função $\omega_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\omega_i(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot f(y) dy$$

está bem definida.

De fato, sendo Ω limitado e $f \in L^\infty(\Omega)$, para $x \in \Omega$ dado podemos escolher $R > 0$ de modo que $\Omega \subset B_R(x)$ e obtenha

$$\begin{aligned} |\omega_i(x)| &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \right| \cdot |f(y)| dy \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \right| dy \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{B_R(x)} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \right| dy = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{B_R} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(y) \right| dy \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot R < \infty. \end{aligned}$$

A fim de obtermos $\omega_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ como consequência do Teorema da Derivação Termo a Termo, mostraremos que a família $\{v_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ definida por $v_\epsilon = (\gamma \cdot \eta_\epsilon) * f$ é tal que $v_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} v$, e que $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \omega_i$ de modo localmente uniforme. Daí teremos v diferenciável, e ainda, $\frac{\partial v}{\partial x_i} = \omega_i \in C^0(\Omega)$, como desejado.

Para a primeira convergência veja que dado $x \in \mathbb{R}^n$,

$$v(x) - v_\epsilon(x) = \int_{\Omega} \gamma(x-y) \cdot [1 - \eta_\epsilon(x-y)] \cdot f(y) dy = \int_{|x-y| \geq 2\epsilon} \gamma(x-y) \cdot [1 - \eta_\epsilon(x-y)] \cdot f(y) dy,$$

de modo que,

$$\begin{aligned} |v(x) - v_\epsilon(x)| &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{|x-y| \geq 2\epsilon} |\gamma(x-y)| dy \\ &= \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{B_{2\epsilon}} |\gamma(y)| dy, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \int_{B_{2\epsilon}} |\gamma(y)| dy \leq \begin{cases} (1 + 2|\log 2\epsilon|) \cdot \epsilon^2, & \text{para } n = 2 \\ \frac{2}{n-2} \cdot \epsilon^2, & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

O que mostra que $v_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} v$ em \mathbb{R}^n .

Para a segunda convergência, a qual nos interessa que seja localmente uniforme, observamos que

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial[\gamma \cdot \eta_\epsilon]}{\partial x_i}(x-y) \cdot f(y) dy.$$

Então dado $\epsilon_0 > 0$ tome $0 < \epsilon = \epsilon(x) \leq \epsilon_0$ de modo que $2\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, obtemos

$$\begin{aligned} \omega_i(x) - \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) &= \int_{\Omega} \frac{\partial[\gamma \cdot (1 - \eta_\epsilon)]}{\partial x_i}(x-y) \cdot f(y) dy \\ &= \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} \frac{\partial[\gamma \cdot (1 - \eta_\epsilon)]}{\partial x_i}(x-y) \cdot f(y) dy \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left| \omega_i(x) - \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) \right| &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \left(\int_{B_{2\epsilon}} \left| \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(y) \right| \cdot |1 + \eta_\epsilon(y)| dy + \int_{B_{2\epsilon}} |\gamma(y)| \cdot \left| \frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial x_i}(y) \right| dy \right) \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \left(2 \int_{B_{2\epsilon}} \left| \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(y) \right| dy + \frac{c}{\epsilon} \int_{B_{2\epsilon}} |\gamma(y)| dy \right), \end{aligned}$$

$$\text{onde } \left(2 \int_{B_{2\epsilon}} \left| \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(y) \right| dy + \frac{c}{\epsilon} \int_{B_{2\epsilon}} |\gamma(y)| dy \right) \leq \begin{cases} 2 \cdot 2\epsilon + \frac{c}{\epsilon} (1 + 2|\log 2\epsilon|) 4\epsilon^2, & \text{se } n = 2, \\ 2 \cdot 2\epsilon + \frac{c}{\epsilon} \frac{1}{2(n-2)} 4\epsilon^2, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se $\left| \omega_i(x) - \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) \right| \leq c(\epsilon) \leq c(\epsilon_0) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$, e assim, $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \omega_i$ uniforme em \mathbb{R}^n .

Logo, $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$, já que $\frac{\partial v}{\partial x_i} = \omega_i \in C^0(\mathbb{R}^n)$. ■

Lema 6.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $f \in C_{loc}^\alpha \cap L^\infty(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$. Se v é o Potencial Newtoniano de f com respeito ao domínio Ω , então $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, é solução da Equação de Poisson $\Delta v = f$ em Ω , e além disso, para cada $x \in \Omega$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ vale*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \cdot [f(y) - f(x)] dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot V_j(y) dS(y),$$

onde Ω_0 é qualquer domínio limitado contendo Ω no qual vale o Teorema da Divergência com $\Omega \subset\subset \Omega_0$. Nas integrais acima, é considerada a extensão de f que se nula no complemento de Ω .

Prova. Na demonstração desse Lema serão usadas as mesmas estratégias utilizadas para o Lema anterior. Na busca de aplicarmos novamente o Teorema da Derivação Termo a Termo definiremos $\omega_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\omega_{ij}(x) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \cdot [f(y) - f(x)] dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot V_j(y) dS(y),$$

observaremos que está bem definida, e em seguida tomaremos a família de funções $\{z_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ dada por $z_\epsilon := \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x_i} \cdot \eta_\epsilon\right) * f$. Veremos que $z_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial v}{\partial x_i}$, e que $\frac{\partial z_\epsilon}{\partial x_j} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \omega_{ij}$ uniformemente (não mais de modo local) em \mathbb{R}^n . E assim, obteremos $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ diferenciável, com $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \omega_{ij} \in C^0(\Omega)$.

Para $\Delta v = f$ em Ω , dado $x \in \Omega$ consideraremos $\Omega_0 = B_R(x) = B_{R_x}(x)$ em busca de simetria, já que a Solução Fundamental γ é radial. Obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^n \omega_{ii}(x) \\
&= \int_{B_R(x)} \Delta \gamma(x-y) \cdot [f(y) - f(x)] dy - f(x) \cdot \sum_{i=1}^n \int_{B_R(x)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot V_i(y) dS(y) \\
&= -f(x) \cdot \sum_{i=1}^n \int_{B_R(x)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot V_i(y) dS(y) \\
&= -f(x) \cdot \int_{\partial B_R(x)} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - y_i)}{n|B_1| \cdot |x-y|^n} \cdot \frac{-(x_i - y_i)}{|x-y|} dS(y) \\
&= -f(x) \cdot \int_{\partial B_R(x)} \sum_{i=1}^n \frac{-(x_i - y_i^2)}{n|B_1| \cdot R^n} dS(y) \\
&= f(x) \cdot \int_{\partial B_R(x)} \frac{1}{n|B_1| \cdot R^{n-1}} dS(y) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Agora, para verificarmos que

$$\omega_{ij}(x) := \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \cdot [f(y) - f(x)] dy - f(x) \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot V_j(y) dS(y)$$

está bem definida, perceba inicialmente que a segunda integral está, visto que $x \notin \partial \Omega_0$. Para a primeira, tomaremos $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ e $R = R(x) > 0$ a fim de removermos a singularidade $x \in \Omega \subset \Omega_0$, de modo que $B_\epsilon(x) \subset \Omega$ e $\Omega_0 \subset B_R(x)$. Então

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \cdot [f(y) - f(x)] dy \right| &\leq \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| \cdot |f(y) - f(x)| dy \\
&\leq \int_{\Omega_0 - B_\epsilon(x)} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| \cdot |f(y) - f(x)| dy \\
&\quad + \int_{B_\epsilon(x)} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| \cdot |f(y) - f(x)| dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} (x-y) \cdot [f(y) - f(x)] dy \right| &\leq 2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{B_R(x) - B_\epsilon(x)} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} (x-y) \right| dy \\
&+ \frac{[f]_{C^\alpha(B_\epsilon(x))}}{|B_1|} \int_{B_\epsilon(x)} \frac{1}{|x-y|^n} \cdot |x-y|^\alpha dy \\
&= 2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{B_R - B_\epsilon} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} (y) \right| dy \\
&+ \frac{[f]_{C^\alpha(B_\epsilon(x))}}{|B_1|} \int_{B_\epsilon} \frac{1}{|y|^n} \cdot |y|^\alpha dy \\
&\leq \frac{2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{|B_1|} \int_\epsilon^R \frac{r^{n-1} n |B_1|}{r^n} dy \\
&+ \frac{[f]_{C^\alpha(B_\epsilon(x))}}{|B_1|} \int_0^\epsilon \int_{\partial B_r} \frac{1}{r^{n-\alpha}} dS(y) dr \\
&= 2n \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot (\log R - \log \epsilon) \\
&+ \frac{[f]_{C^\alpha(B_\epsilon(x))}}{|B_1|} \int_0^\epsilon \frac{r^{n-1} n |B_1|}{r^{n-\alpha}} dy \\
&= 2n \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot (\log R - \log \epsilon) \\
&+ [f]_{C^\alpha(B_\epsilon(x))} \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \epsilon^\alpha < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $|\omega_{ij}(x)| < \infty$ para todo $x \in \Omega$.

Deste modo, falta-nos tratar apenas das convergências de $z_\epsilon := \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \cdot \eta_\epsilon \right) * f$ e $\frac{\partial z_\epsilon}{\partial x_j}$ para as funções $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ e ω_{ij} , respectivamente, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Para vermos $z_\epsilon(x) := \int_\Omega \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} (x-y) \cdot \eta_\epsilon(x-y) \cdot f(y) dy$ se aproximar ao valor $\frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} (x-y) \cdot f(y) dy$ iniciaremos com $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ de modo que $2\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Sob essas condições temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} (x) - z_\epsilon(x) \right| &= \left| \int_\Omega \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} (x-y) \cdot [1 - \eta_\epsilon(x-y)] \cdot f(y) dy \right| \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_\Omega \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} (x-y) \cdot [1 - \eta_\epsilon(x-y)] \right| dy \\
&= \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} (x-y) \cdot [1 - \eta_\epsilon(x-y)] \right| dy \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{|y| \leq 2\epsilon} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} (y) \right| dy \\
&\leq 2\epsilon \cdot \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Para o que falta, em busca de uniformidade na convergência, dado $\epsilon_0 > 0$ consideraremos $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ tal que $0 < 2\epsilon < \text{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_0)$ e mostraremos que $\left| \frac{\partial z_\epsilon}{\partial x_i} (x) - \omega_{ij}(x) \right| \leq c\epsilon_0$ para qualquer $x \in \Omega$.

Primeiro perceba que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_\epsilon}{\partial x_j}(x) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta_\epsilon(x-y) \right] \cdot f(y) dy \\
&= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta_\epsilon(x-y) \right] \cdot f(y) dy \\
&= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta_\epsilon(x-y) \right] \cdot [f(y) - f(x)] dy \\
&\quad + f(x) \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta_\epsilon(x-y) \right] dy \\
&= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta_\epsilon(x-y) \right] \cdot [f(y) - f(x)] dy \\
&\quad - f(x) \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta_\epsilon(x-y) \cdot v_j(y) dS(y).
\end{aligned}$$

Lembrando que $\eta_\epsilon(x-y) = 1$ quando $|x-y| \geq 2\epsilon$, em particular $\eta_\epsilon(x-y) = 1$ quando $x \in \Omega$ e $y \in \partial \Omega_0$, tomando $x \in \Omega$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \omega_{ij}(x) - \frac{\partial z_\epsilon}{\partial x_j}(x) \right| &\leq \left| \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot (1 - \eta_\epsilon(x-y)) \right] \cdot [f(y) - f(x)] dy \right| \\
&\quad + |f(x)| \cdot \left| \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot (1 - \eta_\epsilon(x-y)) \cdot v_j(y) dS(y) \right| \\
&= \left| \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot (1 - \eta_\epsilon(x-y)) \right] \cdot [f(y) - f(x)] dy \right| \\
&\leq [f]_{C^\alpha(B_{2\epsilon}(x))} \cdot \left(\int_{B_{2\epsilon}} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(y) \right| |y|^\alpha dy + \int_{B_{2\epsilon}} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(y) \right| \left| \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i}(y) \right| |y|^\alpha dy \right) \\
&\leq [f]_{C^\alpha(B_{2\epsilon}(x))} \cdot \left(\int_{B_{2\epsilon}} \frac{|y|^{\alpha-n}}{|B_1|} dy + \frac{c}{\epsilon} \int_{B_{2\epsilon}} \frac{|y|^{\alpha-n+1}}{n|B_1|} dy \right) \\
&= [f]_{C^\alpha(B_{2\epsilon}(x))} \cdot (2\epsilon)^2 \left(\frac{n}{\alpha} + 2c \right) := c(\epsilon) \leq c(\epsilon_0).
\end{aligned}$$

■

Veremos que, como uma consequência deste Lema, que o Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = g, & \text{em } \partial \Omega \end{cases}$$

admite solução (única, pelo Critério da Comparação) sempre que f e Ω possuírem as propriedades do Lema acima e g for contínua. Na verdade, haverá solução sempre que g for tal que o Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

apresentar solução, e assim, a continuidade deixa de ser uma condição necessária e passa a ser uma suficiente para que haja solução para o primeiro problema, por meio do Método de Perron.

Corolário 6.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira satisfaça o postulado da barreira, $f \in C_{loc}^\alpha \cap L^\infty(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$, e $g \in C^0(\partial\Omega)$. Então o Problema de Dirichlet para a Equação de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Prova. Vimos que v Potencial Newtoniano de f satisfaz $\Delta v = f$.

Podemos definir $u = v + \omega$ onde ω é uma função harmônica satisfazendo $v + \omega = g$ em $\partial\Omega$. Noutras palavras, tomamos uma solução para o problema

$$\begin{cases} \Delta \omega = 0, & \text{em } \Omega \\ \omega = g - v, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

a qual existe e é $C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ pelo Método de Perron, visto que $g - v$ é contínua em $\partial\Omega$ e Ω satisfaz a condição da esfera exterior nos pontos de fronteira.

Sendo $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, temos $u := v + \omega \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Além disso,

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v + \Delta \omega = f, & \text{em } \Omega \\ u = v + \omega = v + (g - v) = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

A unicidade da solução vem do Princípio do Máximo. ■

6.2 Teorema principal via Potencial Newtoniano

Nos capítulos anteriores mostramos que a regularidade $C^{0,\alpha}$ para a função f implicava na propriedade de ser localmente $C^{2,\alpha}$ qualquer solução da Equação de Poisson $\Delta u = f$ definida em B_1 . Neste, trataremos de uma solução específica, o Potencial Newtoniano. No entanto, o Critério da Comparação mostra que tal solução é a única para a equação.

Teorema 6.2 *Sejam $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in C^{0,\alpha}(\overline{B_{2R}}(x_0))$, $0 < \alpha \leq 1$. Se v é o Potencial*

Newtoniano de f relativo à $\overline{B_{2R}(x_0)}$, então $v \in C^{2,\alpha}(\overline{B_{2R}(x_0)})$, e

$$\|D^2v\|_{L^\infty B_R(x_0)} + R^\alpha [D^2v]_{C^\alpha B_R(x_0)} \leq C (\|f\|_{L^\infty B_R(x_0)} + R^\alpha [f]_{C^\alpha B_{2R}(x_0)}),$$

onde $c = c(n, \alpha)$.

Prova. Que $v \in C^2(\overline{B_{2R}(x_0)})$ é garantido pelo Lema 6.2 . Para o que falta, basta mostrarmos a existência de $c' = c'(n, \alpha)$ e $c'' = c''(n, \alpha)$ tais que

$$\|D^2v\|_{L^\infty B_R(x_0)} \leq c' (\|f\|_{L^\infty B_R(x_0)} + R^\alpha [f]_{C^\alpha B_{2R}(x_0)})$$

e

$$R^\alpha [D^2v]_{C^\alpha B_R(x_0)} \leq c'' (\|f\|_{L^\infty B_R(x_0)} + R^\alpha [f]_{C^\alpha B_{2R}(x_0)}),$$

pois as limitações da norma e semi-norma de f nos dará limitações para as de v , e além disso, poderemos definir $C = c' + c''$.

Exibiremos estimativas pontuais que nos levarão às estimativas desejadas.

Para a primeira, lembramos que se $x \in B_R(x_0)$ pelo Lema 6.1 temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{B_{2R}(x_0)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \cdot [f(y) - f(x)] dy - f(x) \int_{B_{2R}(x_0)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot V_j(y) dS(y).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| &\leq \int_{B_{2R}(x_0)} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| \cdot |f(x) - f(y)| dy \\ &\quad + |f(x)| \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \right| dS(y) \\ &\leq \int_{B_{3R}(x_0)} \frac{1}{|B_1|} \cdot \frac{1}{|x-y|^n} \cdot [f]_{C^\alpha(x)} \cdot |x-y|^\alpha dy \\ &\quad + |f(x)| \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{1}{n|B_1| \cdot |x-y|^{n-1}} dS(y) \\ &\leq \frac{[f]_{C^\alpha(x)}}{|B_1|} \int_0^{3R} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dS(y) dr \\ &\quad + \frac{|f(x)|}{n|B_1|} \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{1}{R^{n-1}} dS(y) \\ &= \frac{[f]_{C^\alpha(x)}}{|B_1|} \int_0^{3R} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \cdot r^{n-1} n|B_1| dr \\ &\quad + \frac{|f(x)|}{n|B_1|} \cdot \frac{1}{R^{n-1}} \cdot (2R)^{n-1} \cdot n \cdot |B_1| \\ &= [f]_{C^\alpha(x)} \cdot n \frac{(3R)^\alpha}{\alpha} + |f(x)| \cdot 2^{n-1} \\ &\leq c' \cdot (R^\alpha [f]_{C^\alpha(x)} + |f(x)|), \end{aligned}$$

para algum $c' = c'(\alpha, n)$, como por exemplo, $c' = \frac{3^{\alpha \cdot n}}{\alpha} + 2^{n-1}$.

Tomando o supremo obtemos

$$\|D^2v\|_{L^\infty B_R(x_0)} \leq c' \left(R^\alpha [f]_{C^\alpha B_{2R}(x_0)} + \|f\|_{L^\infty B_R(x_0)} \right).$$

Para a segunda estimativa consideraremos $x, \bar{x} \in B_R(x_0)$, claramente ficando subentendido que $x \neq \bar{x}$, que é o único caso interessante. Para utilizarmos estratégias de remoção de singularidade iremos escrever o ponto $z := \frac{x+\bar{x}}{2}$ e o raio $\delta := |x - \bar{x}|$.

Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= f(x) \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot V_j(y) dS(y) \\ &\quad - f(\bar{x}) \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y) \cdot V_j(y) dS(y) \\ &\quad + f(x) \int_{B_{2R}(x_0)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) dy - \int_{B_{2R}(x_0)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \cdot f(y) dy \\ &\quad - f(\bar{x}) \int_{B_{2R}(x_0)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y) dy + \int_{B_{2R}(x_0)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y) \cdot f(y) dy \end{aligned}$$

Fazendo as combinações convenientes escrevemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ &= \left[f(x) \left(\int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot V_j(y) dS(y) - \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y) \cdot V_j(y) dS(y) \right) \right] \\ &\quad + \left[(f(x) - f(\bar{x})) \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y) \cdot V_j(y) dS(y) \right] \\ &\quad + \left[f(x) \int_{B_\delta(z)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) dy - \int_{B_\delta(z)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \cdot f(y) dy \right] \\ &\quad + \left[-f(\bar{x}) \int_{B_\delta(z)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y) dy + \int_{B_\delta(z)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y) \cdot f(y) dy \right] \\ &\quad + \left[(f(x) - f(\bar{x})) \int_{B_{2R}(x_0) \setminus B_\delta(z)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) dy \right] \\ &\quad + \left[\int_{B_{2R}(x_0) \setminus B_\delta(z)} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y) \right) \cdot (f(\bar{x}) - f(y)) dy \right] \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6, \text{ respectivamente.} \end{aligned}$$

Estimaremos cada parcela $I_k, k = 1, \dots, 6$ separadamente usando os seguintes argumentos:

Teorema do Valor Médio; estimativa para a derivada de segunda ordem da

solução γ :

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq |f(x)| \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) - \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y) \right| dS(y) \\
&= |f(x)| \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \left| \nabla \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y) \right| |x-\bar{x}| dS(y) \\
&\leq |f(x)| \cdot |x-\bar{x}| \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{n}{|B_1|} \cdot \frac{1}{|\bar{x}-y|^n} dS(y) \\
&\leq \frac{n|f(x)|}{|B_1|} \cdot |x-\bar{x}| \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{1}{R^n} dS(y) \\
&= \frac{n|f(x)|}{|B_1|} \cdot |x-\bar{x}| \cdot \frac{1}{R^n} \cdot (2R)^{n-1} \cdot n \cdot |B_1| \\
&= |f(x)| \cdot n^2 \cdot 2^n \cdot \frac{|x-\bar{x}|}{2R} \\
&\leq |f(x)| \cdot n^2 \cdot 2^n \cdot \left(\frac{|x-\bar{x}|}{2R} \right)^\alpha \\
&= n^2 \cdot 2^{n-\alpha} \cdot |f(x)| \cdot \frac{|x-\bar{x}|^\alpha}{(2R)^\alpha} \\
&:= c_1(n, \alpha) \cdot |f(x)| \cdot \frac{|x-\bar{x}|^\alpha}{R^\alpha}.
\end{aligned}$$

Estimativa para o gradiente da Solução Fundamental γ :

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq |f(x) - f(\bar{x})| \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y) \right| dS(y) \\
&\leq |f(x) - f(\bar{x})| \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{1}{n|B_1| \cdot |\bar{x}-y|^{n-1}} dS(y) \\
&\leq \frac{|f(x) - f(\bar{x})|}{n|B_1|} \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{1}{R^{n-1}} dS(y) \\
&= \frac{|f(x) - f(\bar{x})|}{|B_1|} \cdot \frac{1}{R^{n-1}} \cdot (2R)^{n-1} n |B_1| \\
&= |f(x) - f(\bar{x})| \cdot 2^{n-1} \\
&= c_2(n) \cdot |f(x) - f(\bar{x})|.
\end{aligned}$$

Estimativa para a derivada de segunda ordem da solução γ ; continuidade Hölder de f no ponto x :

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_{B_\delta(z)} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| \cdot |f(x) - f(y)| dy \\
&\leq [f]_{C^\alpha(x)} \int_{B_\delta(z)} \frac{1}{|B_1| \cdot |x-y|^n} \cdot |x-y|^\alpha dy \\
&\leq \frac{[f]_{C^\alpha(x)}}{|B_1|} \int_{B_{\frac{3\delta}{2}}(x)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \frac{[f]_{C^\alpha(x)}}{|B_1|} \int_0^{\frac{3\delta}{2}} \int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dS(y) dr \\
&= \frac{[f]_{C^\alpha(x)}}{|B_1|} \int_0^{\frac{3\delta}{2}} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \cdot r^{n-1} n |B_1| dr \\
&= n [f]_{C^\alpha(x)} \cdot \frac{\left(\frac{3\delta}{2}\right)^\alpha}{\alpha} \\
&= \frac{n}{\alpha} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \cdot [f]_{C^\alpha(x)} \cdot |x - \bar{x}|^\alpha \\
&:= c_3(n, \alpha) \cdot [f]_{C^\alpha(x)} \cdot |x - \bar{x}|^\alpha.
\end{aligned}$$

Mesma situação de I_3 , com \bar{x} ao invés de x :

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq \frac{n}{\alpha} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \cdot [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \cdot |x - \bar{x}|^\alpha \\
&:= c_4(n, \alpha) \cdot [f]_{C^\alpha(x)} \cdot |x - \bar{x}|^\alpha.
\end{aligned}$$

Teorema de divergência; estimativa do gradiente para γ :

$$\begin{aligned}
|I_5| &= |f(x) - f(\bar{x})| \cdot \left| \int_{B_{2R}(x_0) \setminus B_\delta(z)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) dy \right| \\
&\leq |f(x) - f(\bar{x})| \cdot \left| - \int_{\partial B_{2R}(x_0) \setminus B_\delta(z)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x-y) \cdot v_j(y) dS(y) \right| \\
&\leq |f(x) - f(\bar{x})| \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{1}{n |B_1| \cdot |x-y|^{n-1}} dS(y) \\
&\quad + |f(x) - f(\bar{x})| \int_{\partial B_\delta(z)} \frac{1}{n |B_1| \cdot |x-y|^{n-1}} dS(y) \\
&\leq \frac{|f(x) - f(\bar{x})|}{n |B_1|} \int_{\partial B_{2R}(x_0)} \frac{1}{R^{n-1}} dS(y) \\
&\quad + \frac{|f(x) - f(\bar{x})|}{n |B_1|} \int_{\partial B_\delta(z)} \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}} dS(y) \\
&= \frac{|f(x) - f(\bar{x})|}{n |B_1|} \cdot \left(\frac{1}{R^{n-1}} \cdot (2R)^{n-1} \cdot n |B_1| + \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}} \cdot \delta^{n-1} \cdot n |B_1| \right) \\
&= |f(x) - f(\bar{x})| \cdot 2^n \\
&= c_5(n) \cdot |f(x) - f(\bar{x})|.
\end{aligned}$$

Teorema do Valor Médio; continuidade Hölder de f no ponto \bar{x} ; estimativa para a derivada de segunda ordem da solução γ ; $\frac{1}{|x|^{n+\epsilon}} \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_1)$, para todo $\epsilon > 0$:

$$|I_6| \leq \int_{B_{2R}(x_0) \setminus B_\delta(z)} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y) \right| \cdot |f(\bar{x}) - f(y)| dy$$

$$\begin{aligned}
|I_6| &\leq [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \int_{B_{2R}(x_0) \setminus B_\delta(z)} \left| \nabla \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x} - y) \right| \cdot |x - \bar{x}| \cdot |\bar{x} - y|^\alpha dy \\
&\leq [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \cdot |x - \bar{x}| \int_{B_{2R}(x_0) \setminus B_\delta(z)} n(n+5) \frac{1}{|B_1| \cdot |\bar{x} - y|^{n+1}} \cdot |\bar{x} - y|^\alpha dy \\
&\leq [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \cdot |x - \bar{x}| \cdot \frac{n(n+5)}{|B_1|} \int_{B_\delta(z)^c} \frac{|\bar{x} - y|^\alpha}{|\bar{x} - y|^{n+1}} dy \\
&= [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \cdot |x - \bar{x}| \cdot \frac{n(n+5)}{|B_1|} \int_{B_\delta(z)^c} \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \cdot |z - y|^\alpha \cdot \frac{2^{n+1}}{|z - y|^{n+1}} dy \\
&= [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \cdot |x - \bar{x}| \cdot \frac{n(n+5)}{|B_1|} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \cdot 2^{n+1} \int_{B_\delta(z)^c} \frac{1}{|z - y|^{n+(1-\alpha)}} dy \\
&= [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \cdot |x - \bar{x}| \cdot \frac{n(n+5)}{|B_1|} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \cdot 2^{n+1} \cdot \frac{1}{\delta^{1-\alpha}} \cdot \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x|^{n+(1-\alpha)}} dy \\
&= [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \cdot |x - \bar{x}| \cdot \frac{n(n+5)}{|B_1|} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \cdot 2^{n+1} \cdot \frac{1}{|x - \bar{x}|^{1-\alpha}} \cdot \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x|^{n+(1-\alpha)}} dy \\
&\leq c_6(n, \alpha) \cdot [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \cdot |x - \bar{x}|^\alpha,
\end{aligned}$$

onde $c_6(n, \alpha) = \frac{n(n+5)}{|B_1|} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \cdot 2^{n+1} \cdot \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x|^{n+(1-\alpha)}} dy$.

Combinando essas estimativas obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| &\leq c_1(n, \alpha) |f(x)| \cdot \frac{|x - \bar{x}|^\alpha}{R^\alpha} + [c_2(n) + c_5(n)] \cdot |f(x) - f(\bar{x})| \\
&\quad + c_3(n, \alpha) [f]_{C^\alpha(x)} \cdot |x - \bar{x}|^\alpha + [c_4(n, \alpha) + c_6(n, \alpha)] \cdot [f]_{C^\alpha(\bar{x})} \cdot |x - \bar{x}|^\alpha.
\end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade por $\frac{R^\alpha}{|x - \bar{x}|^\alpha}$ obtemos

$$\begin{aligned}
R^\alpha \cdot \frac{\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|}{|x - \bar{x}|^\alpha} &\leq c_1(n, \alpha) |f(x)| + [c_2(n) + c_5(n)] R^\alpha \cdot \frac{|f(x) - f(\bar{x})|}{|x - \bar{x}|^\alpha} \\
&\quad + c_3(n, \alpha) R^\alpha \cdot [f]_{C^\alpha(x)} + [c_4(n, \alpha) + c_6(n, \alpha)] R^\alpha \cdot [f]_{C^\alpha(\bar{x})}.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo em $B_R(x_0)$ e $(i, j) \in I_n \times I_n$ vem

$$\begin{aligned}
R^\alpha [D^2 v]_{C^\alpha(B_R(x_0))} &\leq c_1(n, \alpha) \cdot \|f\|_{L^\infty(B_R(x_0))} \\
&\quad + [c_2(n) + c_3(n, \alpha) + c_4(n, \alpha) + c_5(n) + c_6(n, \alpha)] R^\alpha \cdot [f]_{C^\alpha(B_{2R}(x_0))} \\
&\leq c'' (\|f\|_{L^\infty(B_R(x_0))} + R^\alpha [f]_{C^\alpha(B_{2R}(x_0))}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|D^2 v\|_{L^\infty B_R(x_0)} + R^\alpha [D^2 v]_{C^\alpha B_R(x_0)} \leq (c' + c'') (\|f\|_{L^\infty B_R(x_0)} + R^\alpha [f]_{C^\alpha B_{2R}(x_0)}).$$

■

7 CONCLUSÃO

Analisamos, via teoria de Schauder, que a regularidade $C^{0,\alpha}$ local das derivadas parciais de segunda ordem de uma certa função é garantida se tivermos para apenas o traço da matriz Hessiana dessa função. Em outras palavras, temos $u \in C_{loc}^{2,\alpha}(B1)$ sempre que $\Delta u \in C^{0,\alpha}(B1)$, tanto no sentido clássico como no sentido das distribuições. Fenômeno transferido do Laplaciano para todas as suas derivadas parciais de segunda ordem. Fato interessante é que se o Laplaciano de u for apenas contínuo tal regularidade pode falhar.

Os resultados descritos acima foram obtidos de três formas distintas. Em todos os casos obtivemos o resultado por meio de aproximações por funções bem regulares. Nos dois primeiros métodos aproximamos soluções da equação de Poisson por funções analíticas, que por sua vez, se aproximam de seus respectivos polinômios de Taylor de segunda ordem. No primeiro método, usamos como principal ingrediente para tais aproximações o Princípio do Máximo para funções harmônicas. No segundo nos apropriamos de resultados de compacidade gozados pelos Espaços de Sobolev para conseguir aproximações adequadas. No último método consideramos uma família de funções C^∞ de tal modo que elas contribuíssem a partir do processo de convolução. Vimos aqui que o Potencial Newtoniano ser solução da Equação de Poisson é motivado pela representação de Green para funções $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

REFERÊNCIAS

- BIEZUNER, Rodney Josué. **Notas de aula equações diferenciais parciais I/II**. Departamento de Matemática - Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2010.
- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos da análise funcional**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- EVANS, Lawrence. **Partial differential equations**. 2 ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
- HAN, Qing. **A basic course in partial differential equations**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
- HAN, Qing; LIN, Fanghua. **Elliptic partial differential equations**. 2 ed. Providence, Rhode Island: Courant Institute of Mathematical Sciences, 2000.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. vol 2.
- TRUDINGER, N; GILBARG, D. **Elliptic partial differential equations of second order**. Berlin: Springer, 1998.