



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

PAULO REGIS MENEZES SOUSA

**CONTRIBUIÇÕES EM TELEPORTAÇÃO DE PORTAS QUÂNTICAS,
ALGORITMOS DE BUSCA QUÂNTICA E PROCESSAMENTO QUÂNTICO DE
IMAGENS**

FORTALEZA

2018

PAULO REGIS MENEZES SOUSA

CONTRIBUIÇÕES EM TELEPORTAÇÃO DE PORTAS QUÂNTICAS, ALGORITMOS DE
BUSCA QUÂNTICA E PROCESSAMENTO QUÂNTICO DE IMAGENS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Orientador: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S698c Sousa, Paulo Regis Menezes.

Contribuições em Teleportação de Portas Quânticas, Algoritmos de Busca Quântica e Processamento Quântico de Imagens / Paulo Regis Menezes Sousa. – 2018.
92 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.

1. Teleportação de portas quânticas. 2. Algoritmo de busca quântica. 3. Processamento de imagens quânticas. I. Título.

CDD 621.38

PAULO REGIS MENEZES SOUSA

CONTRIBUIÇÕES EM TELEPORTAÇÃO DE PORTAS QUÂNTICAS, ALGORITMOS DE
BUSCA QUÂNTICA E PROCESSAMENTO QUÂNTICO DE IMAGENS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Aprovada em: 29 de Junho de 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rubens Viana Ramos (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Renato Portugal
Laboratório Nacional de Computação Científica
(LNCC)

Prof. Dr. Carlilie Campos Lavor
Universidade Estadual de Campinas
(UNICAMP)

Profa. Dra. Fátima Nelzieuma Sombra de
Medeiros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus. Aos meus pais, Geraldo e Dionéia e a
minha esposa Selma.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado forças para trilhar os caminhos para mais esta conquista e pelas inúmeras boas amizades que me ajudaram com paciência e compreensão.

Ao Prof. Dr. Rubens Viana Ramos, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora, pelo tempo e pelas valiosas colaborações e sugestões.

À minha esposa Selma, pelo incentivo e paciência nos momentos mais difíceis.

Aos colegas do Grupo de Informação Quântica (GIQ), Geovan, Sérgio, Fernando, Claudomir, George, Leonardo, Samy, Luiz Paulo, Franklin, Daniel, Glaucionor e Ranara, pelos momentos de descontração, reflexões e incentivos em especial ao Fernando Mendes, com quem dividi a autoria do trabalho do primeiro capítulo desta tese.

Finalmente à CAPES, por ter fornecido o apoio financeiro necessário, com a manutenção da bolsa de estudos.

“O sucesso normalmente vem para quem está ocupado demais para procurar por ele”.

(Henry David Thoreau)

RESUMO

Esta tese apresenta inicialmente, uma análise do protocolo de teleportação de portas quânticas de dois qubits, que utiliza um estado entrelaçado de quatro qubits como recurso. Será mostrado que o conjunto de estados puros de quatro qubits se divide em duas classes: Classe 1 e Classe 2, que determinam respectivamente, a realização de uma teleportação determinística da porta, ou de uma preparação remota probabilística. Ainda é mostrado, que quando há informações adicionais em problemas de busca, não aplicáveis a um algoritmo padrão de busca quântica, é possível obter um desempenho melhor usando um algoritmo quântico em conjunto com um algoritmo de busca clássico. Por fim, é proposto um novo modelo representação de imagens em estados quânticos, o novo modelo tem uma preparação e recuperação menos complexa comparado aos outros modelos atualmente propostos e permite o processamento de imagens tanto em escala de cinza como coloridas.

Palavras-chave: Teleportação de portas quânticas. Algoritmo de busca quântica. Processamento de imagens quânticas.

ABSTRACT

This thesis presents, initially, an analysis of the teleportation protocol of two qubits quantum gates, which uses an four qubits entangled state as a resource. It will be shown that the set of four qubits pure states is divided into two classes: Class 1 and Class 2, which determine, respectively, the realization of a deterministic gate teleportation, or a probabilistic remote preparation. It is still shown that when there is additional information on search problems that are not applicable to a standard quantum search algorithm, it is possible to obtain better performance using a quantum algorithm in conjunction with a classical search algorithm. Finally, a new model of image representation in quantum states is proposed, the new model has a less complex preparation and recovery compared to the other models currently proposed and allows the processing of images in both gray and colored scales.

Keywords: Quantum gate teleportation. Quantum search algorithm. Quantum image processing.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Circuito quântico para teleportação de uma porta quântica de dois <i>qubits</i> usando um estado geral de quatro <i>qubits</i>	19
Figura 2 – Exemplo de oráculo para busca quântica.	28
Figura 3 – Exemplo de imagem representada no modelo FRQI.	33
Figura 4 – Exemplo de imagem representada no modelo MCQI.	33
Figura 5 – Um exemplo de representação de uma imagem no modelo NEQR.	34
Figura 6 – Exemplo de imagem CQIR.	35
Figura 7 – (a) Imagem 3×3 em escala de cinza, (b) tabela de mapeamento entre cores e posições, (c) expressão representativa da imagem.	37
Figura 8 – Exemplo de circuito de geração da imagem em escala de cinza, na qual c representa o valor binário correspondente ao nível de cinza e p_i as posições da imagem descritas de forma linear.	38
Figura 9 – Sub-operações para a criação da representação quântica de uma imagem.	40
Figura 10 – Tipos de oráculos para busca em uma imagem quântica. (a) oráculo para seleção de uma cor, (b) oráculo para seleção de uma posição.	43
Figura 11 – Circuito quântico de busca em uma imagem quântica.	43
Figura 12 – Circuito quântico de busca dos elementos de uma cor uma imagem quântica.	44
Figura 13 – Circuito quântico para a obtenção do negativo de uma imagem.	46
Figura 14 – Circuito quântico que implementa uma iteração do cálculo do histograma de uma imagem quântica.	47
Figura 15 – Circuito quântico para a contagem da quantidade de posições da imagem para o k -ésimo nível de cinza, na qual $ n_k\rangle$ é o seu número de ocorrências e G_k é um operador de busca para o nível k	47
Figura 16 – Circuito quântico para a limiarização de uma imagem. Onde T é o limiar selecionado e U_{CMP} é a porta que realiza a comparação entre a cor, representada pelo estado $ C\rangle$, e o limiar. x e y são as saídas do comparador na qual é gravado o resultado da comparação.	49

Figura 17 – Circuitos de limiarização. Onde em (a): T é o limiar selecionado e U_{CMP} é a porta que realiza a comparação entre a cor, representada pelo estado $ C\rangle$, e o limiar. x e y são as saídas do comparador na qual é gravado o resultado da comparação. A porta G_k é um operador de Grover preparado para buscar o k -ésimo nível de cinza da imagem. O resultado da medição do primeiro qubit b_k indica se as posições encontradas pertencem ou não ao fundo da cena. Em (b): temos o circuito para criação da nova imagem binária.	50
Figura 18 – (a) Imagem 3×3 RGBA, (b) expressão representativa da imagem.	52
Figura 19 – Sub-operações para a criação da representação quântica de uma imagem no padrão RGBA.	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Classes de estados de quatro <i>qubits</i> de acordo com [26]: I) Estados canônicos; II) Tipo da matriz Υ do estado canônico (U se 2Υ é unitária; N se Υ é normal, mas 2Υ não é unitária; \tilde{N} se Υ não é normal; III) entrelaçamento em quatro vias π_4 ; IV) Determinante de Υ	19
Tabela 2	– Estados de saída (Equação (2.12)) de acordo com os resultados das medições usando a base de Bell.	23
Tabela 3	– Estados de saída (Equação (2.15)) de acordo com os resultados das medições usando a base de Bell.	24
Tabela 4	– Estados de saída (Equação (2.19)) de acordo com os resultados das medições usando a base de Bell.	26
Tabela 5	– G versus n e k	30
Tabela 6	– Comparação das características dos principais modelos de representação de imagens quântica, na qual L representa o número de níveis de cinza da codificação e é considerada uma imagem de tamanho $2^n \times 2^n$	42
Tabela 7	– Comparação das características dos modelos FRQI, NEQR e NMRIQ.	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	O PAPEL DO ESTADO DE QUATRO QUBITS NA TELEPORTAÇÃO DE PORTAS QUÂNTICAS DE DOIS QUBITS	17
2.1	Introdução	17
2.2	A matriz Υ	18
2.3	Teleportação de portas de dois qubits: 2Υ unitária	18
2.4	Preparação remota probabilística de uma porta de dois qubits: 2Υ não unitária	21
2.5	Exemplos	22
2.6	Conclusão	26
3	DISTÂNCIA DE HAMMING EM BUSCA QUÂNTICA	27
3.1	Introdução	27
<i>3.1.0.1</i>	<i>Inicialização</i>	<i>27</i>
<i>3.1.0.2</i>	<i>Marcação</i>	<i>27</i>
<i>3.1.0.3</i>	<i>Amplificação</i>	<i>28</i>
3.2	Busca quântica e clássica trabalhando em conjunto	29
3.3	Conclusão	31
4	PROCESSAMENTO DE IMAGENS QUÂNTICAS	32
4.1	Principais modelos de representação de imagens quânticas	32
<i>4.1.1</i>	<i>Modelos FRQI e MCQI</i>	<i>32</i>
<i>4.1.2</i>	<i>Modelos NEQR e CQIR</i>	<i>34</i>
4.2	Um novo modelo de representação de imagens quânticas	35
<i>4.2.1</i>	<i>Preparação da imagem quântica</i>	<i>37</i>
<i>4.2.2</i>	<i>Complexidade de preparação da imagem quântica</i>	<i>39</i>
<i>4.2.3</i>	<i>Recuperação da imagem</i>	<i>40</i>
4.3	Recuperação eficiente de uma imagem quântica usando busca quântica	41
<i>4.3.1</i>	<i>Busca em uma imagem quântica</i>	<i>42</i>
<i>4.3.2</i>	<i>Recuperação de uma imagem com $O(2^m)$ cópias</i>	<i>44</i>
4.4	Processamento quântico da imagem	45
<i>4.4.1</i>	<i>Obtendo o negativo de uma imagem</i>	<i>45</i>

4.4.2	<i>Calculando o histograma de uma imagem quântica</i>	46
4.5	Segmentação de imagens	48
4.5.1	<i>Limiarização de uma imagem</i>	48
4.5.2	<i>Segmentação por limiarização iterativa</i>	50
4.6	Representação de uma imagem no padrão RGBA	51
4.6.1	<i>Aumento de complexidade do modelo multicanal</i>	52
4.7	Conclusão	54
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	55
5.1	Conclusões	55
5.2	Trabalhos futuros	56
	REFERÊNCIAS	57
	APÊNDICES	62
	APÊNDICE A – Estimação quântica de média	62
	APÊNDICE B – Artigos decorrentes da tese	64
B.1	Artigos	64
B.1.1	<i>On the Role of the Four-Qubit State in Two-Qubit Gate Teleportation</i> . . .	64
B.1.2	<i>Improving the efficiency of quantum image processing by using a quantum state that maps all pixels having the same color</i>	76

1 INTRODUÇÃO

A ideia de criar máquinas, para nos ajudar a realizar cálculos e solucionar problemas, de maneira mais eficiente do que poderíamos manualmente, não é nova. No começo foram ábacos e calculadoras rudimentares, mas assim como o conhecimento do homem aumentou ao longo do tempo, também aumentou a complexidade das máquinas que têm sido criadas para auxiliá-lo.

Desde que o computador moderno começou a ganhar forma com Charles Babbage e sua máquina de cálculo analítico em 1837 (1), a ideia de uma máquina capaz de realizar mais do que simplesmente cálculos aritméticos mudou. Na década de 1930 já se conseguia construir circuitos eletrônicos para resolver problemas lógicos e matemáticos. Em 1936 (1) já existiam máquinas elétricas capazes de ler e gravar informações na forma de cartões perfurados. Nessa época também, surgiam os fundamentos matemáticos da ciência da computação junto com a descrição da Máquina de Turing (1), que se tornaria um modelo abstrato do computador digital que conhecemos hoje.

Com o incentivo fornecido pela segunda guerra mundial, surgiram os primeiros computadores a válvula, como o ENIAC, usados para cálculos de trajetórias balísticas, além do auxílio na quebra de códigos secretos. O próximo grande salto no desenvolvimento dos computadores veio com a formalização daquela que viria a ficar conhecida como “Arquitetura de von Neuman”, um projeto lógico de computador (1), usado ainda hoje.

Na década de 1970 veio a criação e popularização dos micro-computadores, máquinas que se tornaram indispensáveis para o nosso desenvolvimento tecnológico e científico. Em 1981 o físico Richard Feynman apresentou em uma conferência no MIT, pela primeira vez, a proposta de utilização de sistemas quânticos em computadores e em 1985 David Deutsch descreve a primeira máquina de Turing quântica (2).

Ainda que estivéssemos diante de um novo marco na história da computação, a ideia de computação quântica ainda não havia tido grande repercussão no meio científico. Apenas em 1994, quando o professor de matemática aplicada Peter Shor descreveu um algoritmo quântico capaz de fatorar números de maneira incrivelmente superior à dos computadores convencionais (3), é que o interesse por esse novo tipo de computação realmente parece aumentar.

Dois anos mais tarde, em 1996, o cientista da computação Lov Grover, desenvolve o primeiro algoritmo quântico de busca em base de dados (4). Em um computador clássico, pesquisar uma base de dados não ordenada requer $\Omega(N)$ passos. O algoritmo de Grover, que

realiza uma busca em $O(\sqrt{N})$ passos, é o algoritmo quântico mais rápido possível para realizar esse tipo de busca (5). Ele fornece “apenas” um aumento de velocidade quadrático, ao contrário do algoritmo de Shor, que pode fornecer aceleração exponencial sobre sua contraparte clássica (3). No entanto, mesmo uma aceleração quadrática é considerável quando N é um número muito grande.

Em maio de 1997, o supercomputador Deep Blue da IBM vence Garry Kasparov e se torna o primeiro computador a vencer um campeão mundial de xadrez (6). Para muitos foi um marco na história da computação e do desenvolvimento dos computadores. Contudo, ainda no mesmo ano, houve um outro grande acontecimento menos divulgado, mas não menos importante, acontecia a primeira demonstração experimental de uma teleportação quântica (7).

Em 1993 foi elaborada, de forma teórica, uma maneira de teleportar estados quânticos de um lugar para outro (8). Quatro anos mais tarde, a equipe do doutor Anton Zeilinger no Instituto de Física Experimental da Universidade de Innsbruck consegue pela primeira vez realizar experimentalmente a transmissão e reconstrução, a uma distância arbitrária, de um estado quântico (7). Esta descoberta teve enormes consequências para o desenvolvimento da comunicação quântica e computação.

No ano de 2011, a empresa canadense D-Wave lançou o primeiro computador quântico para comercialização. Em 2016, a equipe de computação quântica experimental da IBM divulgou a disponibilização de seu próprio computador quântico em um programa para facilitar a troca de informações e os experimentos da comunidade acadêmica. Além do que é desenvolvido por empresas privadas, novas pesquisas também vêm sendo realizadas para tornar os computadores quânticos viáveis (9, 10, 11, 12, 13).

No decorrer dos últimos anos o crescimento das pesquisas e o financiamento dado pelas grandes corporações, tem tornado a computação quântica em larga escala cada vez mais próxima. A computação quântica e a comunicação quântica, estão passando de ramos emergentes da ciência para campos de pesquisa maduros em ciência e engenharia. Além dos avanços nos fundamentos matemáticos e físicos da computação e da informação quântica, um número crescente de cientistas e engenheiros está dedicando seus esforços de pesquisa para identificar e desenvolver iniciativas em vários campos, como tecnologias militares (14), aprendizado de máquina (15), geometria computacional (16) e processamento de imagens (17).

Devido a uma crescente necessidade de extrair informações de imagens, o processamento de imagens é um campo difundido em muitos ramos da ciência e engenharia, para citar

alguns exemplos temos áreas como: visão computacional (18), astrofísica (19), reconhecimento de padrões (20) e medicina (21), que usam imagens e informações extraídas das mesmas. Devido às restrições dos computadores clássicos e à complexidade computacional dos algoritmos clássicos de ponta no processamento de imagens, é de grande relevância encontrar algoritmos mais eficientes para a manipulação da informação visual.

O intuito deste trabalho é compreender e utilizar os recursos da computação quântica para resolver problemas. No Capítulo 2 foi realizado um estudo sobre a teleportação de portas quânticas. Para entender como esse tipo de transmissão de informação pode ser realizada, buscamos caracterizar a influência do estado entrelaçado necessário para a teleportação. No Capítulo 3 a união dos paradigmas clássico e quântico foi usada para aumentar a performance de um algoritmo de busca e no Capítulo 4 foi mostrada a utilização de busca quântica no processamento quântico de imagens e apresentaremos um novo modelo de representação de imagens quânticas.

Esta tese está escrita de forma tecnicamente sucinta pois assume-se que o leitor possui conhecimento prévio dos princípios de informação quântica.

2 O PAPEL DO ESTADO DE QUATRO QUBITS NA TELEPORTAÇÃO DE PORTAS QUÂNTICAS DE DOIS QUBITS

Uma análise completa de protocolos quânticos, requer o conhecimento do papel dos estados quânticos, bases de medição e portas quânticas, envolvidas no processo. Neste capítulo, será analisado o papel do estado de quatro qubits, usado como recurso no protocolo de teleportação de portas quânticas de dois qubits. Será mostrado, que a teleportação de portas de dois qubits, divide em duas classes o conjunto de estados puros de quatro qubits. Para uma das classes, pode ser realizada uma teleportação determinística e probabilística, enquanto para outra classe, pode-se realizar uma preparação remota probabilística de uma porta de dois qubits.

2.1 Introdução

A teleportação de portas de dois qubits, é um importante protocolo proposto por Gottesman e Chuang (22), um exemplo de utilização deste protocolo foi apresentado em (23), na implementação de protocolos com portas não locais. Em seu trabalho, Gottesman e Chuang demonstraram, que qualquer porta que pertença ao grupo de Clifford, pode ser determinística-mente teleportada por um esquema de teleportação que utilize um par de estados de Bell como recurso e a base de Bell como base de medição, o que resulta em uma correção de erro baseada em portas de Pauli.

Mais recentemente o papel da base de medição na teleportação de portas de dois qubits foi investigada e as condições para uma teleportação determinística, incluindo portas fora do grupo de Clifford foi estabelecida (24). No entanto, os estados utilizados como recurso para a teleportação ainda eram um par de estados de Bell, como proposto em (22).

Neste capítulo, analisa-se o protocolo de teleportação de dois qubits usando como recurso um estado puro geral de quatro qubits. Será mostrado que o circuito quântico para teleportação de portas de dois qubits divide o conjunto de estados puros de quatro qubits em duas classes, aqui nomeadas de Classe 1 e Classe 2. Ainda serão apresentados alguns exemplos usando estados de quatro qubits com entrelaçamento em quatro vias encontrados na literatura.

Os estados de quatro qubits da Classe 1 permitem teleportação determinística e probabilística, enquanto os estados da Classe 2 permitem a realização de uma preparação remota probabilística de uma porta de dois qubits: o estado de saída do circuito nesse caso é a aplicação de uma porta de dois qubits (que depende do estado de quatro qubits utilizado) em um estado que também depende do estado de quatro qubits assim como da porta de dois qubits na entrada.

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na Seção 2.2 é introduzida a matriz Υ , que é responsável pela definição da porta a ser teleportada e o tipo de protocolo realizado (teleportação determinística ou probabilística, ou preparação remota probabilística). Na Seção 2.3, descrevemos a teleportação de portas de dois qubits usando estados de quatro qubits da Classe 2. Na Seção 2.4 apresentamos alguns exemplos e finalmente na Seção 2.6 as conclusões do capítulo.

2.2 A matriz Υ

Seja $|\sigma\rangle$ um estado geral de quatro qubits

$$|\sigma\rangle = \sum_{k,l,m,n=0}^1 \sigma_{klmn} |klmn\rangle = \sum_{i=0}^{15} \sigma_i |i\rangle. \quad (2.1)$$

Usando os coeficientes do estado $|\sigma\rangle$ pode-se obter a matriz Υ

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_8 & \sigma_9 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_{10} & \sigma_{11} \\ \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_6 & \sigma_7 & \sigma_{14} & \sigma_{15} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Considerando o uso do estado em (2.1) no circuito de teleportação de uma porta de dois qubits, obtém-se duas diferentes situações: I) $2\Upsilon = U_\sigma$, sendo U_σ uma matriz unitária. Neste caso, o estado $|\sigma\rangle$ é da Classe 1. II) Υ não é normal ($[\Upsilon, \Upsilon^\dagger] \neq 0$) ou Υ é normal, mas 2Υ não é unitária. Nesse caso dizemos que o estado $|\sigma\rangle$ pertence a Classe 2. Ao invés de uma teleportação, obtém-se uma preparação remota de uma porta de dois qubits.

O determinante de Υ é um invariante (25) que pode ser usado (junto com outros invariantes) para definir classes de estados de quatro qubits. Por exemplo, de acordo com a classificação dada em (26) existem 16 classes: 1, 2a, 2b, 2c, 2d, 3a, 3b, 3c, 3d, 3e, 3f, 4a, 4b, 4c, 4d e 5. A Tabela 1 mostra, para cada uma dessas classes, o estado canônico (com os rótulos do *kets* representados na forma decimal), o entrelaçamento em quatro vias medido por π_4 (27), o tipo de matriz Υ e o valor do determinante de Υ .

2.3 Teleportação de portas de dois qubits: 2Υ unitária

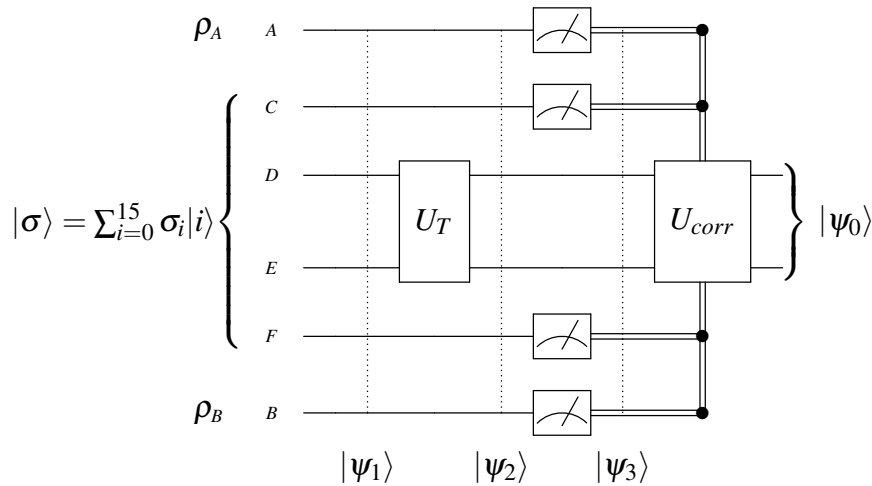
O esquema para teleportação de uma porta quântica de dois qubits, considerando um estado geral de quatro qubits é mostrado na Figura 1.

Tabela 1 – Classes de estados de quatro *qubits* de acordo com [26]: I) Estados canônicos; II) Tipo da matriz Υ do estado canônico (U se 2Υ é unitária; N se Υ é normal, mas 2Υ não é unitária; \tilde{N} se Υ não é normal; III) entrelaçamento em quatro vias π_4 ; IV) Determinante de Υ

Classe	Estado canônico	π_4	Tipo	$\det(\Upsilon)$
1	$ \psi_1\rangle = (0\rangle + 7\rangle)/2^{1/2}$	0	N	0
2a	$ \psi_{2a}\rangle = (0\rangle + 15\rangle)/2^{1/2}$	1	N	0
2b	$ \psi_{2b}\rangle = (0\rangle + 5\rangle + 10\rangle - 15\rangle)/2$	1	U	1/16
2c	$ \psi_{2c}\rangle = (0\rangle + 6\rangle + 9\rangle - 15\rangle)/2$	1	N	1/16
2d	$ \psi_{2d}\rangle = (1\rangle + 2\rangle + 4\rangle + 8\rangle + 2^{1/2} 15\rangle)/6^{1/2}$	1	N	0
3a	$ \psi_{3a}\rangle = (0\rangle + 5\rangle + 10\rangle + 15\rangle)/2$	0	U	-1/16
3b	$ \psi_{3b}\rangle = (0\rangle + 3\rangle + 12\rangle + 15\rangle)/2$	0	U	1/16
3c	$ \psi_{3c}\rangle = (0\rangle + 5\rangle + 6\rangle + 9\rangle + 10\rangle + 15\rangle)/6^{1/2}$	0,1975	N	0
3d	$ \psi_{3d}\rangle = (0\rangle - 3\rangle + 5\rangle + 6\rangle + 9\rangle - 10\rangle + 12\rangle + 15\rangle)/8^{1/2}$	1	\tilde{N}	0
3e	$ \psi_{3e}\rangle = (0\rangle + 5\rangle - 2 6\rangle + 9\rangle + 10\rangle + 15\rangle)/3$	0,6243	\tilde{N}	-1/27
3f	$ \psi_{3f}\rangle = (0\rangle + 3\rangle - 2 5\rangle + 10\rangle + 12\rangle + 15\rangle)/3$	0,6243	\tilde{N}	1/27
4a	$ \psi_{4a}\rangle = (0\rangle + 3\rangle + 3 5\rangle + 10\rangle - 2 12\rangle + 15\rangle)/17^{1/2}$	0,1217	\tilde{N}	-5/289
4b	$ \psi_{4b}\rangle = (0\rangle + 2 3\rangle + 5\rangle + 10\rangle + 2 12\rangle + 15\rangle)/12^{1/2}$	0,0625	N	1/48
4c	$ \psi_{4c}\rangle = (0\rangle + 3\rangle + 2 5\rangle + 2 10\rangle + 12\rangle + 15\rangle)/12^{1/2}$	0,0625	N	-1/48
4d	$ \psi_{4d}\rangle = (2 0\rangle - 3\rangle - 5\rangle + 10\rangle + 12\rangle + 15\rangle)/3$	0,6243	\tilde{N}	0
5	$ \psi_5\rangle = (0\rangle + 3\rangle + 5\rangle + 2 10\rangle + 2 12\rangle + 15\rangle)/12^{1/2}$	0,0560	\tilde{N}	0

Figura 1 – Circuito quântico para teleportação de uma porta quântica de dois *qubits* usando um estado geral de quatro *qubits*.

$$\rho_{A(B)} = \text{Tr}_{B(A)}(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|)$$



Fonte: Elaborada pelo autor.

O estado de quatro *qubits* $|\sigma\rangle$ é um estado entrelaçado como requer o protocolo de teleportação. Seguindo o procedimento usado em (24), após algumas operações algébricas obtém-se o seguinte estado de saída antes da etapa de correção de erro

$$|\psi_0\rangle = \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{2} U_T \Upsilon \beta_{jk} |\psi_{AB}\rangle \quad (2.3)$$

$$\beta_{jk} = \beta_j \otimes \beta_k = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \langle \beta_j | 00 \rangle & \langle \beta_j | 10 \rangle \\ \langle \beta_j | 01 \rangle & \langle \beta_j | 11 \rangle \end{bmatrix} \otimes \sqrt{2} \begin{bmatrix} \langle \beta_k | 00 \rangle & \langle \beta_k | 10 \rangle \\ \langle \beta_k | 01 \rangle & \langle \beta_k | 11 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Em (2.3) e (2.4) a base de medição utilizada é $\{|\beta_0\rangle, |\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, |\beta_3\rangle\}$. A novidade neste trabalho, quando comparado com (24), é a presença da matriz Υ discutida na Seção 2.2. Nessa seção considera-se a situação em que $\Upsilon = 1/2U_\sigma$ (metade de uma matriz unitária). Nesse caso tem-se que

$$|\psi_0\rangle = \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{4} U_T U_\sigma \beta_{jk} |\psi_{AB}\rangle \quad (2.5)$$

e uma teleportação será realizada com sucesso se

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{4} U_T U_\sigma \beta_{jk} |\psi_{AB}\rangle \\ &= \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{4} \left(U_T U_\sigma \beta_{jk} U_\sigma^\dagger U_T^\dagger \right) U_T U_\sigma |\psi_{AB}\rangle \\ &= \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{4} (V_j \otimes V_k) U_T U_\sigma |\psi_{AB}\rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Em (2.6) V_j e V_k são portas de um qubit. Aplicando a correção de erro $U_{corr} = (V_j^\dagger \otimes V_k^\dagger)$ obtém-se como saída o estado $U_T U_\sigma |\psi_{AB}\rangle$. A Equação (2.3) deixa claro o papel do estado de quatro qubits no resultado final da teleportação: a porta teleportada é $U_T U_\sigma$ onde $U_\sigma = 2\Upsilon$ e depende do estado de quatro qubits. A Equação (2.3) também fornece um outro ponto de vista sobre a teleportação de portas de dois qubits. A probabilidade de sucesso na teleportação dependerá da base de medição usada, como exposto no Teorema 1 em (24). Assim, a seguir será considerado $U_T = I$.

Pode-se facilmente notar que o estado de quatro qubits necessário para a teleportação da porta U_σ é o estado

$$|\sigma\rangle_{1234} = (I \otimes U_\sigma \otimes I) \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.7)$$

De acordo com a decomposição KAK (28), tem-se que

$$U_\sigma = (U_A \otimes U_B) U_{NL} (U_C \otimes U_D) \quad (2.8)$$

sendo,

$$U_{NL} = e^{i(\theta_x \sigma_{xx} + \theta_y \sigma_{yy} + \theta_z \sigma_{zz})} \quad (2.9)$$

e as matrizes U_A, U_B, U_C e U_D são portas locais de um qubit, U_{NL} é a parte não local e $\sigma_{jj} = \sigma_j \otimes \sigma_j, j = X, Y, Z$ é o produto tensorial de suas matrizes de Pauli. Os apontamentos seguintes partem diretamente de (2.7-2.9):

1. O entrelaçamento em quatro vias de $|\sigma\rangle$, medido por π_4 , depende apenas da parte não local de U_σ . Em particular, se o estado de quatro qubits $|\sigma\rangle$ tiver entrelaçamento zero, então a porta U_σ tem $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$, e, portanto, é separável no produto tensorial de duas portas de um qubit.
2. De acordo com o teorema 1 em (24), a condição necessária para uma teleportação determinística é que U_σ tenha os ângulos θ_x, θ_y e θ_z iguais a 0 ou $(2k+1)\pi/4$ (k é um número inteiro). Entretanto, nessa situação (exceto nos casos onde $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ e a família *swap*: $\theta_x = \theta_y = \theta_z = k\pi/4$) $|\sigma\rangle$ é maximamente entrelaçado ($\pi = 1$), conseqüentemente, uma condição necessária (mas não suficiente) para uma teleportação determinística de U_σ , é que o estado entrelaçado seja maximamente entrelaçado em quatro vias. Observando a Tabela 1 pode-se notar que o estado $|\psi_{2b}\rangle$ permite uma teleportação determinística. Por outro lado, como veremos mais adiante, um estado maximamente entrelaçado em quatro vias nem sempre permite uma teleportação determinística de uma porta quântica U_σ . Além disso, pode-se também notar pela Equação (2.7) ou alternativamente por (2.2) que, se U_σ é unitária então $\rho_{14} = \text{Tr}_{23}(\sigma_{1234}) = \rho_{23} = \text{Tr}_{14}(\sigma_{1234}) = I/4$ (na qual I é a matriz identidade) que pode ser verdade ou não para um estado de quatro qubits maximamente entrelaçado.

O caso em que $\Upsilon = (1/2)U_\sigma$, caso clássico considerado em (22), onde o estado de quatro qubits é o produto tensorial de dois estados de Bell $|\sigma\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} \otimes (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$, que torna $U_\sigma = I$ (matriz identidade). Nesse caso, se $U_T = I$ na Figura 1, então há uma teleportação de dois qubits. De outra forma, a porta teleportada é U_T através do estado $(I \otimes U_T \otimes I)(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} \otimes (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$.

2.4 Preparação remota probabilística de uma porta de dois qubits: 2Υ não unitária

Quando 2Υ não é unitária, o circuito na Figura 1 não realiza a teleportação de uma porta de dois qubits uma vez que o estado de saída não é a aplicação de uma porta de dois qubits U no estado de entrada.

Afim de analisar que protocolo é realizado pelo circuito na Figura 1, pode-se primeiramente notar que existem duas diferentes situações para Υ . Na primeira situação 2Υ não

é unitária mas Υ é normal assim, $\Upsilon = WDW^\dagger$, sendo W uma matriz unitária e D é uma matriz diagonal cujos elementos não nulos são os autovalores de Υ .

Na segunda situação, Υ não é normal. Nesse caso, aplicando a decomposição polar, pode-se obter $\Upsilon = UH$, sendo U unitária e H Hermitiana. Uma matriz Hermitiana pode ser decomposta como $H = QDQ^\dagger$, Q é unitária e D é uma matriz diagonal com os autovalores de H . Assim, $\Upsilon = UQDQ^\dagger = W D Q^\dagger$. Como a primeira situação é um caso particular da segunda situação, nós podemos considerar apenas a última. Usando (2.3) novamente com $U_T = I$ nós tem-se

$$|\psi_0\rangle = \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{2} \frac{\Upsilon \beta_{jk} |\psi_{AB}\rangle}{\sqrt{\langle \psi_{AB} | \beta_{jk}^\dagger \Upsilon^\dagger \Upsilon \beta_{jk} | \psi_{AB} \rangle}} = W \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{2} |\psi_0^{jk}\rangle, \quad (2.10)$$

$$|\psi_0^{jk}\rangle = \frac{\lambda_0 \langle 00|V\rangle |00\rangle + \lambda_1 \langle 01|V\rangle |01\rangle + \lambda_2 \langle 10|V\rangle |10\rangle + \lambda_3 \langle 11|V\rangle |11\rangle}{\sqrt{|\lambda_0 \langle 00|V\rangle|^2 + |\lambda_1 \langle 01|V\rangle|^2 + |\lambda_2 \langle 10|V\rangle|^2 + |\lambda_3 \langle 11|V\rangle|^2}}, \quad (2.11)$$

$$|V\rangle = V_{jk} Q^\dagger |\psi_{AB}\rangle.$$

Na Equação (2.10), os valores λ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) são os autovalores de H e $V_{jk} = Q^\dagger \beta_{jk} Q$. Além disso, usando (2.2) tem-se que $\text{Tr}(\Upsilon \Upsilon^\dagger) = \text{Tr}(H H^\dagger) = 1$ e, conseqüentemente, $\sum_i |\lambda_i|^2 = 1$. Se Υ é normal então $W = Q$ em (2.10) e (2.11), pode-se notar que o estado de saída $W|\psi_0^{jk}\rangle$ é a aplicação da porta de dois qubits W , que depende do estado de quatro qubits utilizado, no estado $|\psi_0^{jk}\rangle$, da base de medição escolhida e no estado de entrada de dois qubits.

Assim, pode-se considerar que o circuito quântico da Figura 1, utilizando um estado de quatro qubits que pertence à Classe 2, realiza uma preparação remota probabilística de uma porta de dois qubits. Em outras palavras, mantendo-se a base de medição constante, o estado recurso e o estado de entrada, o estado na saída será, probabilisticamente, a aplicação de W em, no máximo, dezesseis estados quânticos diferentes, como será mostrado a seguir.

2.5 Exemplos

Inicialmente, sendo Υ normal, mas $\Upsilon \neq (1/2)U$ (U é uma matriz unitária), consideremos as seguintes simplificações: 1) A base de Bell é usada nas medições e, conseqüentemente, β_{jk} é o produto tensorial de duas matrizes de Pauli. 2) U pertence ao grupo de Clifford. 3) O estado de entrada $|\psi_{AB}\rangle$ é escolhido de tal maneira que $U^\dagger |\psi_{AB}\rangle = |00\rangle$. Obedecidas estas

condições, a Equação 2.11 se torna

$$|\psi_0^{jk}\rangle = U \left(\frac{\lambda_0 \langle 0 | \sigma_{jk} | 0 \rangle |0\rangle + \lambda_1 \langle 1 | \sigma_{jk} | 0 \rangle |1\rangle + \lambda_2 \langle 2 | \sigma_{jk} | 0 \rangle |2\rangle + \lambda_3 \langle 3 | \sigma_{jk} | 0 \rangle |3\rangle}{\sqrt{|\lambda_0 \langle 0 | \sigma_{jk} | 0 \rangle|^2 + |\lambda_1 \langle 1 | \sigma_{jk} | 0 \rangle|^2 + |\lambda_2 \langle 2 | \sigma_{jk} | 0 \rangle|^2 + |\lambda_3 \langle 3 | \sigma_{jk} | 0 \rangle|^2}} \right) \quad (2.12)$$

Afim de facilitar a visualização os rótulos dos *kets* na Equação (2.12) acima foram representados na sua forma decimal.

A Tabela 2 mostra os possíveis estados de saída quando $\lambda_i \neq 0$ ($i = 0, \dots, 3$), de acordo com os resultados das medições.

Tabela 2 – Estados de saída (Equação (2.12)) de acordo com os resultados das medições usando a base de Bell.

σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$
$I \otimes I$	$U 00\rangle$	$\sigma_Y \otimes I$	$iU 10\rangle$	$\sigma_X \otimes I$	$U 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes I$	$U 00\rangle$
$I \otimes \sigma_X$	$U 01\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_X$	$iU 11\rangle$	$\sigma_X \otimes \sigma_X$	$U 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_X$	$U 01\rangle$
$I \otimes \sigma_Y$	$iU 00\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Y$	$-U 11\rangle$	$\sigma_X \otimes \sigma_Y$	$iU 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Y$	$iU 01\rangle$
$I \otimes \sigma_Z$	$U 00\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Z$	$iU 10\rangle$	$\sigma_X \otimes \sigma_Z$	$U 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Z$	$U 00\rangle$

Como é possível perceber na Tabela 2, o estado de saída não é a teleportação de uma porta unitária aplicada ao estado de entrada $|\psi_{AB}\rangle$. O estado de saída é (ignorando a fase global), probabilisticamente, um dos estados: $U|00\rangle, U|01\rangle, U|10\rangle$ e $U|11\rangle$, sendo que U vem da decomposição de Υ . Assim, o protocolo quântico realizado é uma preparação remota probabilística de U na base canônica. Também se pode notar que a correção de erro nesse caso não é necessária, uma vez que não se pode escolher qual o estado a ser preparado, pois o resultado é probabilístico.

O segundo exemplo a ser considerado é o seguinte estado entrelaçado de quatro qubits

$$|\xi\rangle = \frac{|0000\rangle + |0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle}{\sqrt{8}}. \quad (2.13)$$

Para este estado tem-se,

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = WDW^\dagger = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\dagger \end{aligned} \quad (2.14)$$

e usando (2.11) pode-se reduzir a expressão acima para,

$$|\psi_0^{jk}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{(\langle 00| + \langle 11|)|B\rangle|10\rangle + (\langle 01| + \langle 10|)|B\rangle|11\rangle}{\sqrt{|\langle 00| + \langle 11|)|B\rangle|^2 + |\langle 01| + \langle 10|)|B\rangle|^2}} \right) \quad (2.15)$$

sendo, $|B\rangle = \beta_{jk}|\psi_{AB}\rangle$.

Escolhendo novamente a base de Bell e $|\psi_{jk}\rangle = |00\rangle$, obtém-se os resultados mostrados na Tabela 3.

Tabela 3 – Estados de saída (Equação (2.15)) de acordo com os resultados das medições usando a base de Bell.

σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$
$I \otimes I$	$W 10\rangle$	$\sigma_X \otimes I$	$W 11\rangle$	$\sigma_Y \otimes I$	$iW 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes I$	$W 10\rangle$
$I \otimes \sigma_X$	$W 11\rangle$	$\sigma_X \otimes \sigma_X$	$W 10\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_X$	$iW 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_X$	$W 11\rangle$
$I \otimes \sigma_Y$	$iW 11\rangle$	$\sigma_X \otimes \sigma_Y$	$iW 10\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Y$	$-W 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Y$	$iW 11\rangle$
$I \otimes \sigma_Z$	$W 10\rangle$	$\sigma_X \otimes \sigma_Z$	$W 11\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Z$	$iW 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Z$	$W 10\rangle$
$W 10\rangle = (00\rangle - 11\rangle)/\sqrt{2}$				$W 11\rangle = (01\rangle + 10\rangle)/\sqrt{2}$			

Como mostrado na Tabela 3, a ação remota de W é realizada apenas em dois estados da base canônica. Isto acontece por que Υ em (2.18) tem apenas dois autovalores não nulos. Em geral, estados do tipo $a|0000\rangle + b|0011\rangle + c|0101\rangle + d|1001\rangle + c|1010\rangle + b|1100\rangle + a|1111\rangle$ (29) produzem uma matriz Υ normal.

Agora, consideremos dois casos em que Υ não é normal. Inicialmente, nós consideramos mais uma vez que a base de Bell será usada como base de medição, a matriz unitária Q pertence ao grupo de Clifford e o estado de entrada $|\psi_{AB}\rangle$ é tal que $Q^\dagger|\psi_{AB}\rangle = |00\rangle$. Assumindo

estas restrições, (2.11) fica da forma

$$|\psi_0^{jk}\rangle = W \left(\frac{\lambda_0 \langle 0|\sigma_{jk}|0\rangle|0\rangle + \lambda_1 \langle 1|\sigma_{jk}|0\rangle|1\rangle + \lambda_2 \langle 2|\sigma_{jk}|0\rangle|2\rangle + \lambda_3 \langle 3|\sigma_{jk}|0\rangle|3\rangle}{\sqrt{|\lambda_0 \langle 0|\sigma_{jk}|0\rangle|^2 + |\lambda_1 \langle 1|\sigma_{jk}|0\rangle|^2 + |\lambda_2 \langle 2|\sigma_{jk}|0\rangle|^2 + |\lambda_3 \langle 3|\sigma_{jk}|0\rangle|^2}} \right). \quad (2.16)$$

Observando (2.16), pode-se ver a preparação remota probabilística da ação de W na base canônica se $\lambda_i \neq 0$ ($i = 0, \dots, 3$). Se algum λ_i é zero, então esta preparação da ação de W acontece apenas em parte da base canônica. Não existem restrições a respeito de W , conseqüentemente, ela pode pertencer ou não ao grupo de Clifford.

Por fim vamos considerar o estado de quatro qubits (30)

$$|\chi\rangle = \frac{|0000\rangle - |0011\rangle - |0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle}{\sqrt{8}}. \quad (2.17)$$

Este estado tem a seguinte decomposição $\Upsilon = W D Q^\dagger$,

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^\dagger \end{aligned} \quad (2.18)$$

Assim, (2.11) é reescrito como

$$|\psi_0^{jk}\rangle = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{\langle 10|V_{jk}Q^\dagger|\psi_{AB}\rangle|10\rangle + \langle 11|V_{jk}Q^\dagger|\psi_{AB}\rangle|11\rangle}{\sqrt{|\langle 10|V_{jk}Q^\dagger|\psi_{AB}\rangle|^2 + |\langle 11|V_{jk}Q^\dagger|\psi_{AB}\rangle|^2}} \right) \quad (2.19)$$

Novamente escolhendo a base de Bell como base de medição e $|\psi_{AB}\rangle = |00\rangle$, assim obtém-se os resultados mostrados na Tabela 4.

Como pode ser visto na Tabela 4, o estado de saída é uma preparação remota da ação de W apenas em dois estados ($|10\rangle$ e $|11\rangle$) da base canônica. Na saída obtém-se, probabilisticamente, um dos seguintes estados da base de Bell: $(|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$ ou $(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$.

Tabela 4 – Estados de saída (Equação (2.19)) de acordo com os resultados das medições usando a base de Bell.

σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$
$I \otimes I$	$W 10\rangle$	$\sigma_X \otimes I$	$W 11\rangle$	$\sigma_Y \otimes I$	$iW 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes I$	$-W 10\rangle$
$I \otimes \sigma_X$	$W 11\rangle$	$\sigma_X \otimes \sigma_X$	$W 10\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_X$	$iW 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_X$	$-W 11\rangle$
$I \otimes \sigma_Y$	$iW 11\rangle$	$\sigma_X \otimes \sigma_Y$	$-iW 10\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Y$	$W 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Y$	$-iW 11\rangle$
$I \otimes \sigma_Z$	$W 10\rangle$	$\sigma_X \otimes \sigma_Z$	$-W 11\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Z$	$-iW 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Z$	$-W 10\rangle$
$W 10\rangle = (00\rangle - 11\rangle)/\sqrt{2}$				$W 11\rangle = (01\rangle + 10\rangle)/\sqrt{2}$			

2.6 Conclusão

No que diz respeito ao papel do estado de quatro qubits no circuito quântico mostrado na Figura 1, pode-se definir duas classes de estados de quatro qubits. As definições e principais características destas classes são:

Classe 1 *O conjunto de estados de quatro qubits para os quais $\Upsilon = (1/2)U_\sigma$.*

1. O protocolo realizado pelo circuito da Figura 1 é a teleportação de uma porta de dois qubits. A base de medição é importante para definir a probabilidade de sucesso da teleportação e da correção de erro.
2. Uma teleportação determinística pode ser realizada apenas se o estado de quatro qubits utilizado é maximamente entrelaçado.
3. A porta quântica teleportada é $U = 2\Upsilon$ e o estado de saída é a sua aplicação no estado de entrada de dois qubits.

Classe 2 *O conjunto de estados de quatro qubits para os quais Υ é normal, mas 2Υ é não unitária ou Υ não é normal.*

1. O protocolo realizado na Figura 1 é uma preparação remota probabilística de uma porta de dois qubits. Sendo que esta porta quântica pode, ou não, pertencer ao grupo de Clifford, dependendo da decomposição de Υ .
2. A base de medição e o estado de entrada de dois qubits são usados para definir o conjunto de estados nos quais a porta de dois qubits preparada atuará.
3. Não há correção de erro.

3 APLICAÇÃO DA DISTÂNCIA DE HAMMING EM BUSCA QUÂNTICA

O uso de uma porta quântica capaz de fornecer informação adicional a respeito da solução de uma busca, permite aumentar o desempenho do algoritmo de busca, se utilizarmos uma busca quântica e alterarmos para uma busca clássica em um momento apropriado.

3.1 Introdução

Em 1996 o cientista da computação Lov Grover (4) fez uso de ideias da mecânica quântica para criar um algoritmo de busca capaz encontrar um elemento em uma base de dados desordenada de tamanho N , com apenas $O(\sqrt{N})$ passos. O algoritmo de Grover vem sendo extensivamente estudado (31, 32, 33, 34) desde então.

Comparado a um algoritmo de busca clássico, o algoritmo de busca quântica de Grover tem um ganho quadrático em relação ao número de operações.

Nas seções seguintes, serão descritas as três etapas necessárias para a realização de uma busca quântica. Sendo a primeira delas a etapa de *inicialização*, a segunda, que podemos chamar de *marcação* e uma terceira de *amplificação*. Logo após, será realizada uma comparação entre o uso da busca quântica seguida por busca clássica e o caso em que apenas a busca quântica é usada.

3.1.0.1 Inicialização

Esta etapa consiste na geração de uma superposição, que servirá como entrada para o algoritmo de busca. Abaixo na Equação (4.13) pode ser vista em detalhes, a criação do estado inicial padrão do algoritmo, uma superposição completa de n qubits,

$$|\psi_0\rangle = H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle \quad (3.1)$$

3.1.0.2 Marcação

A etapa aqui descrita como de marcação se refere a aplicação de um oráculo U_f capaz de marcar a solução desejada dentro da superposição inicial. Isto pode ser realizado através de uma inversão de fase, como na Equação (3.2):

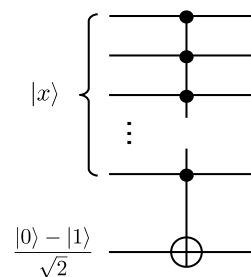
$$U_f : |x\rangle \longmapsto (-1)^{f(x)}|x\rangle. \quad (3.2)$$

Para que essa ação seja possível, o oráculo necessita de uma função $f(x)$ tal que $f(x) = 1$, se x é um elemento buscado, do contrário $f(x) = 0$. Dessa forma, utilizando uma inversão controlada em um registrador quântico no estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, o efeito do oráculo será:

$$|x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \xrightarrow{U_f} (-1)^{f(x)} |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.3)$$

ou seja, a operação de inversão de fase pode ser realizada utilizando uma porta controlada, que identifica um ou mais estados na superposição inicial e inverte um qubit alvo adequadamente preparado

Figura 2 – Exemplo de oráculo para busca quântica.



Fonte: elaborada pelo autor.

3.1.0.3 Amplificação

A terceira etapa, consiste da amplificação de amplitude do item buscado, em uma implementação padrão do algoritmo de Grover é utilizado um operador, como apresentado na Equação (3.4) (35), sendo n o número de qubits da superposição em que se realiza a busca:

$$H^{\otimes n} (2|0\rangle\langle 0| - I) H^{\otimes n}. \quad (3.4)$$

Estas são as três etapas necessárias para a realização do algoritmo de busca quântica. Para que ocorra a amplificação de amplitude da solução desejada, é necessária a sucessiva aplicação das etapas de marcação e amplificação um certo número t de vezes, valor dado pela expressão na Equação (3.5):

$$t = \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{M}} \right\rceil, \quad (3.5)$$

na qual N é o número de elementos na superposição e M representa a quantidade de possíveis soluções.

3.2 Busca quântica e clássica trabalhando em conjunto

Algoritmos que utilizam mais de um tipo de abordagem em conjunto, já são utilizados para resolução de problemas em diversas áreas (36, 37, 38, 39, 40), dessa forma, será realizada nesta seção uma análise da utilização de uma abordagem híbrida quântico-clássica, na construção de um algoritmo de busca.

Inicialmente, considere o seguinte problema: buscar uma *string* (sequência) de bits x_{sol} que satisfaça $f(x_{sol}) = y$. Para resolver este problema usando uma busca quântica, será assumido que a seguinte porta quântica, que depende da solução x_{sol} , existe:

$$U_1|a\rangle|0\rangle = |a\rangle|D_H(a, x_{sol})\rangle, \quad (3.6)$$

sendo $D_H(a, x_{sol})$ a distância de Hamming entre as strings de bits a e x_{sol} . A distância de Hamming foi escolhida neste caso por ser uma medida natural de similaridade em códigos binários, correspondendo ao número de posições em que os elementos de mesmo índice diferem entre si:

$$D_H(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i \neq b_i, \quad (3.7)$$

onde a e b são sequências binárias de tamanho n .

Obviamente, $U|a\rangle|0\rangle = |a\rangle|0\rangle$ implica que $a = x_{sol}$. Consequentemente, o algoritmo de Grover pode ser usado para encontrar a solução x_{sol} usando um oráculo que reconhece $|0\rangle$ no segundo registrador. Isto requer $t = (\pi/4) \sqrt{2^n}$ consultas do oráculo, sendo n o número de bits de x_{sol} .

Pode-se resolver o mesmo problema da seguinte forma: primeiramente, usa-se a busca quântica. Neste caso, os estados quânticos reconhecidos pelo oráculo como soluções, correspondem a sequências de bits contendo no máximo k bits diferentes da solução x_{sol} , isto é, $D_H(a, x_{sol}) \leq k$. Assim, o estado quântico de saída é uma superposição de todas as sequências de bits com distância de Hamming (relativas a x_{sol}) iguais, ou menores que k . Neste caso, o número de estados marcados é $M = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$ e o número de chamadas ao oráculo é $N_G = \pi/4 \sqrt{2^n/M}$. Além disso, o número de operações corresponde ao cálculo da distância de Hamming de uma string de n bits é $O(n)$. Para um estado de n qubits em superposição o cálculo da distância para os 2^n estados é realizado com $O(n)$ operações. Dessa forma, pode-se definir um número de operações total de $N_G = \frac{\pi n}{4} \sqrt{\frac{2^n}{M}}$.

Uma medição é realizada e uma sequência de n bits é obtida. Neste momento, sabemos que esta sequência de bits é diferente de x_{sol} em no máximo k bits e uma busca clássica pode ser usada para encontrar x nesta nova base de dados com M elementos.

Essa abordagem usa em média $N_C = M/2$ consultas. Consequentemente, o número total de consultas de um algoritmo quântico-clássico é $N_{GC} = N_G + N_C$ e seu ganho comparado com uma busca quântica, $G = N_{GC} / \left(\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2^n}{M}} \right)$, é, respectivamente

$$N_{GC} = \frac{\pi n \sqrt{2^n}}{4 \sqrt{\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}}} + \frac{\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}}{2} \quad (3.8)$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}}} + \frac{2 \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}}{\pi \sqrt{2^n}}. \quad (3.9)$$

Observando a Equação (3.9), pode-se ver que $k = 0$ corresponde a uma busca quântica pura, enquanto para $k = n$ tem-se uma busca clássica pura. Existe um valor ótimo para $k = k_{opt}$ que minimiza G . Além disso, quando n cresce, k_{opt} também cresce e G tende para zero, mostrando que o número de chamadas de um algoritmo “quântico + clássico” é muito menor que o número de chamadas necessário para uma busca quântica trabalhando sozinha. Alguns exemplos de valores para n , k e G são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5 – G versus n e k .

n	k	G
100	6	$1,586 \times 10^{-5}$
200	12	$1,536 \times 10^{-10}$
300	18	$1,531 \times 10^{-15}$
400	24	$1,576 \times 10^{-20}$
500	30	$1,670 \times 10^{-25}$
600	36	$1,817 \times 10^{-30}$
700	43	$1,646 \times 10^{-35}$
800	49	$1,348 \times 10^{-40}$
900	55	$1,175 \times 10^{-45}$
1000	61	$1,094 \times 10^{-50}$

O problema descrito anteriormente não é interessante na prática, por que existe um algoritmo clássico eficiente capaz resolvê-lo com complexidade $O(n)$: inverte-se o primeiro bit, se a distância de Hamming para a solução diminuir após a inversão, então o novo valor do bit é o valor correto e substituirá o valor original, do contrário o valor original é mantido. Repetem-se os mesmos passos para os bits seguintes até obter-se distância de Hamming igual a zero.

Uma situação mais difícil para o mesmo problema é assumir que, ao invés de U_1 calcular a distância de Hamming, tem-se apenas uma porta quântica, dependente da solução x_{sol} , que indica se uma sequência de bits está, ou não, a uma distância de no máximo k bits da solução:

$$U_2|a\rangle|0\rangle = |a\rangle|h_k(D_H(a, x_{sol}))\rangle, \quad (3.10)$$

$$h_k(D_H(a, x_{sol})) = \begin{cases} 0, & \text{se } D_H(a, x_{sol}) > k \\ 1, & \text{se } D_H(a, x_{sol}) \leq k \end{cases}. \quad (3.11)$$

Mais uma vez, os estados quânticos reconhecidos pelo oráculo como soluções do problema de busca (bit 1 no segundo registrador) são sequências de bits contendo no máximo k bits diferentes de x_{sol} e, conseqüentemente, as Equações (3.8) e (3.9) permanecem corretas. Por outro lado, o algoritmo clássico descrito (puro), não pode ser usado uma vez que não se conhece a distância de Hamming para a solução, mas apenas se esta é menor que k ou não.

3.3 Conclusão

O uso de uma porta quântica capaz de trazer informação extra sobre a solução de um problema de busca permite melhorar a performance de um algoritmo de busca pela substituição de um algoritmo de busca quântico por um clássico em um momento apropriado. Contudo cabe aqui ressaltar que o aumento de performance só é conseguido devido à necessidade inerente do problema de serem aplicadas restrições que inviabilizem a utilização de uma busca quântica padrão.

4 PROCESSAMENTO DE IMAGENS QUÂNTICAS

O processamento digital de imagens (41) é uma importante área de estudo e o núcleo de muitas aplicações como, sensoriamento remoto, navegação automática, visão computacional, diagnóstico médico, entre muitas outras.

Neste capítulo será apresentado um novo modelo de representação de imagens quânticas, que se propõe a ser mais eficiente e flexível na preparação e recuperação, além de técnicas de processamento como a segmentação de imagens.

4.1 Principais modelos de representação de imagens quânticas

Diversas abordagens de representações de imagens quânticas (QIR's, *quantum image representations*) tem sido propostas (42, 43, 44, 45), cada uma explorando diferentes propriedades da mecânica quântica não apenas para reprodução dos algoritmos clássicos, mas efetivamente criando formas mais eficientes de realizar o processamento de imagens.

Dentre os modelos de representação quântica de imagens mais explorados estão o modelo FRQI proposto por Le *et al* (2011), MCQI uma extensão do modelo FRQI proposta por Sun *et al* (2013), CQIR descrito por Caraiman e Manta (2012) e NEQR por Zhang *et al* (2013).

4.1.1 Modelos FRQI e MCQI

O modelo FRQI (*flexible representation for quantum images*) codifica a informação de cor em um único qubit, como mostrado em (46). Dessa forma para representar a imagem usa-se um registrador quântico preparado no estado descrito pela Equação (4.1):

$$|I(\theta)\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} (\cos \theta_i |0\rangle + \sin \theta_i |1\rangle) \otimes |i\rangle, \quad (4.1)$$

$$\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2^{2n}-1}), \theta_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], i = 0, 1, \dots, 2^{2n} - 1,$$

na qual θ é o vetor de ângulos no qual as informações de cor são codificadas, enquanto $|i\rangle$ são estados da base usados para indexar as posições da imagem. Na Figura 3 é possível ver um exemplo de imagem FRQI. A recuperação da imagem pode ser realizada pela estimação das amplitudes de probabilidade dos estados que codificam a cor, para isso são realizadas medições em cópias do estado da imagem.

A representação MCQI (*multi-channel representation for quantum images*) proposta em (48), é uma extensão do modelo FRQI para a representação de cores, ela define a utilização

Figura 3 – Exemplo de imagem representada no modelo FRQI.

θ_0 00	θ_1 01
θ_2 10	θ_3 11

$$|I\rangle = \frac{1}{2} [(\cos \theta_0 |0\rangle + \sin \theta_0 |1\rangle) \otimes |00\rangle + (\cos \theta_1 |0\rangle + \sin \theta_1 |1\rangle) \otimes |01\rangle + (\cos \theta_2 |0\rangle + \sin \theta_2 |1\rangle) \otimes |10\rangle + (\cos \theta_3 |0\rangle + \sin \theta_3 |1\rangle) \otimes |11\rangle]$$

Fonte: encontrado em (47).

de três canais de cores R, G e B (*red*, *green* e *blue*) através da utilização de três qubits para codificar a informação de cor simultaneamente:

$$|I\rangle = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} |C_{RGB\alpha}^i\rangle |i\rangle, \quad (4.2)$$

$$|C_{RGB\alpha}^i\rangle = \cos \theta_R^i |000\rangle + \cos \theta_G^i |001\rangle + \cos \theta_B^i |010\rangle + \cos \theta_\alpha |011\rangle + \sin \theta_R^i |100\rangle + \sin \theta_G^i |101\rangle + \sin \theta_B^i |110\rangle + \sin \theta_\alpha |111\rangle. \quad (4.3)$$

Em (4.3) $\{\theta_R^i, \theta_G^i, \theta_B^i\} \in [0, \pi/2]$ são os ângulos que guardam a cor do i -ésimo píxel e θ_α é configurado com o valor zero para que os coeficientes marcados com esse ângulo não carreguem informação. Pode-se ver na Figura 4 um exemplo de imagem MCQI.

Figura 4 – Exemplo de imagem representada no modelo MCQI.

$\theta_R^0 \theta_G^0 \theta_B^0$ 00	$\theta_R^1 \theta_G^1 \theta_B^1$ 01
$\theta_R^2 \theta_G^2 \theta_B^2$ 10	$\theta_R^3 \theta_G^3 \theta_B^3$ 11

$$|I\rangle = \frac{1}{4} [(\cos \theta_R^0 |000\rangle + \cos \theta_G^0 |001\rangle + \cos \theta_B^0 |010\rangle + \sin \theta_R^0 |100\rangle + \sin \theta_G^0 |101\rangle + \sin \theta_B^0 |110\rangle) \otimes |00\rangle + (\cos \theta_R^1 |000\rangle + \cos \theta_G^1 |001\rangle + \cos \theta_B^1 |010\rangle + \sin \theta_R^1 |100\rangle + \sin \theta_G^1 |101\rangle + \sin \theta_B^1 |110\rangle) \otimes |01\rangle + (\cos \theta_R^2 |000\rangle + \cos \theta_G^2 |001\rangle + \cos \theta_B^2 |010\rangle + \sin \theta_R^2 |100\rangle + \sin \theta_G^2 |101\rangle + \sin \theta_B^2 |110\rangle) \otimes |10\rangle + (\cos \theta_R^3 |000\rangle + \cos \theta_G^3 |001\rangle + \cos \theta_B^3 |010\rangle + \sin \theta_R^3 |100\rangle + \sin \theta_G^3 |101\rangle + \sin \theta_B^3 |110\rangle) \otimes |11\rangle]$$

Fonte: encontrado em (45).

Segundo (48), o processo de preparação de ambos os modelos FRQI e MCQI possuem a mesma complexidade computacional $O(2^{4n})$. O modelo FRQI tem significativa importância para a área de processamento digital de imagens apresentando uma forma de preparar um estado normalizado representando toda informação de cor e posição de todos os píxeis de uma imagem, o que permitiu a criação de diversas estratégias para o processamento de imagens por meio de um estado quântico.

O modelo MCQI segue o avanço iniciado com a representação FRQI e acrescenta uma forma de guardar a informação dos três canais de cores R, G e B, com menos recursos quando comparado a uma imagem RGB clássica de mesmo tamanho (47).

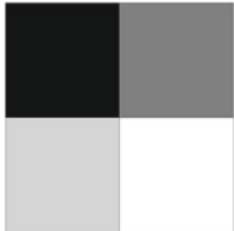
4.1.2 Modelos NEQR e CQIR

NEQR (*novel enhanced quantum representation*) é uma forma diferente de representação para imagens digitais proposta em (49). Esta representação usa duas sequências estados para representar, respectivamente, o nível de cinza e as coordenadas de cada píxel na imagem, como mostra a Equação (4.4) na qual pode-se ver a expressão representativa de uma imagem quântica $2^n \times 2^n$:

$$|I\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{y=0}^{2^n-1} \sum_{x=0}^{2^n-1} |f(y,x)\rangle |yx\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{y=0}^{2^n-1} \sum_{x=0}^{2^n-1} \bigotimes_{i=0}^{q-1} |c_{yx}^i\rangle |yx\rangle, \quad (4.4)$$

sendo, $|c_{yx}^i\rangle$ a codificação da sequência binária $c_{yx}^0 c_{yx}^1 \dots c_{yx}^{q-1}$ de um nível de cinza em uma escala de 0 a 2^q níveis e $|yx\rangle$ a codificação de posição de um píxel. A Figura 5 mostra um

Figura 5 – Um exemplo de representação de uma imagem no modelo NEQR.



$$\begin{aligned} |I\rangle &= \frac{1}{2} (|0\rangle \otimes |00\rangle + |100\rangle \otimes |01\rangle + |200\rangle \otimes |10\rangle + |255\rangle \otimes |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|00000000\rangle \otimes |00\rangle + |01100100\rangle \otimes |01\rangle \\ &\quad + |11001000\rangle \otimes |10\rangle + |11111111\rangle \otimes |11\rangle) \end{aligned}$$

Fonte: encontrado em (49).

exemplo de representação de imagem segundo o modelo NEQR. Diferentemente do modelo FRQI que utilizava apenas um qubit para representação da cor, neste exemplo são usados oito qubits para armazenar os tons de cinza no intervalo de 0 a 255. Dessa forma no modelo NEQR são necessários $q + 2n$ qubits para a representação de uma imagem $2^n \times 2^n$ em uma escala de cinza de 2^q tons.

A principal diferença do modelo NEQR em relação ao FRQI é a distinção entre os diferentes tons de cinza, uma vez que usa estados da base para representá-los, ao contrário do modelo FRQI que usa amplitudes de probabilidade. Esta é a base de todas as melhorias da representação NEQR em relação a FRQI. A complexidade de geração é $O(qn2^{2n})$ o que lhe confere um ganho quadrático em relação a complexidade de preparação $O(2^{4n})$ do modelo FRQI.

A abordagem para QIR proposta por Caraiman e Manta em (50) conhecida como CQIR, é muito similar ao modelo NEQR e foi criada para facilitar operações de binarização, negativo e histograma. Na Equação (4.5) é possível ver o estado que representa a imagem CQIR:

$$|I\rangle = |C\rangle_m |P\rangle_{2n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \alpha_{ij} |j\rangle |i\rangle, \quad (4.5)$$

são usados $m = \log_2 L$ qubits para representação de L níveis de cinza e $2n$ qubits para codificação das posições. Para cada píxel i , os coeficientes α_{ij} recebem valor 1 caso a cor do píxel seja j , ou 0 caso contrário. Na Figura 6 é possível ver o exemplo de uma imagem CQIR e sua codificação.

Figura 6 – Exemplo de imagem CQIR.

01	10
00	01
11	00
10	11

$$|I\rangle = \frac{1}{2} (|01\rangle \otimes |00\rangle + |10\rangle \otimes |01\rangle + |11\rangle \otimes |10\rangle + |00\rangle \otimes |11\rangle)$$

Fonte: encontrado em (47).

Segundo (50) a preparação da imagem CQIR é de complexidade $O(qn \cdot 2^{2n})$.

4.2 Um novo modelo de representação de imagens quânticas

As abordagens mostradas na Seção 4.1 buscam formas mais eficientes de processar imagens. O modelo FRQI utiliza o ângulo de fase para diminuir a quantidade de qubits necessária para guardar uma imagem, contudo isso torna a recuperação da imagem probabilística e aumenta a complexidade de algumas operações baseadas em cores mais complexas (49). Por outro lado a representação NEQR torna necessária a utilização de um número maior de qubits, no entanto tem uma menor complexidade de preparação e permite operações mais complexas.

Neste trabalho será proposto um *novo modelo de representação de imagens quânticas* (NMRIQ), para este modelo serão utilizados registradores quânticos preparados no seguinte estado:

$$|I\rangle = |C\rangle_m |P\rangle_{n^2}, \quad (4.6)$$

este estado quântico relaciona as informações de cor e posição da imagem. O estado $|C\rangle_m$ usa uma sequência de m qubits para guardar a cor e as posições dos píxeis são codificadas em $|P\rangle_{n^2}$ usando n^2 qubits, sendo n^2 o número total de píxeis da imagem. Dessa forma o estado usado para a representação da imagem é:

$$|I\rangle = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{2^m-1} |c_i\rangle |p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle. \quad (4.7)$$

O registrador $|c_i\rangle$ carrega a informação do i -ésimo nível de cinza e $|p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle$ recebe 1 em cada posição p_k que contém o nível i de cinza. Diferentemente dos modelos apresentados até o momento, esta representação não traz uma relação 1 para 1, relacionando cor e posição, mas sim 1 para muitos, na qual cada nível de cinza está diretamente relacionado a todas as posições de píxeis que o possuem.

Como exemplo é possível ver a Figura 7(a) que apresenta uma imagem 3×3 em escala de cinza, a Figura 7(b) mostra uma tabela na qual se relaciona cada nível de cinza a cada posição em que o mesmo ocorre e a Figura 7(c) o estado que representa a imagem. Neste caso usamos $m = 8$ para gerar $2^8 = 255$ níveis de cinza e $n^2 = 9$ qubits para representação das posições da imagem. Assim como o modelo NEQR, NMRIQ usa os estados da base, em uma sequência de qubits, para representar os níveis de cinza dos píxeis, ao invés da amplitude de probabilidade de um único qubit como no modelo FRQI.

A característica de usar estados ortogonais para representar os diferentes níveis cinza é a alteração mais significativa do modelo NEQR com relação ao FRQI. Contudo, diferentemente do modelo NEQR não associaremos os níveis de cinza aos estados que representam as posições. Pelo contrário, criaremos uma superposição de todos os níveis de cinza da escala selecionada e relacionaremos a estes, todas as posições na imagem que contém este nível sem redundâncias desnecessárias.

Na Figura 7(a) é utilizada uma escala de cinza com níveis entre 0 e 255, assim são necessários oito qubits para guardar a informação relativa aos níveis de cinza. Dessa forma são necessários $m + n^2$ qubits para representar uma imagem $n \times n$ com uma escala de 2^m níveis de cinza.

Figura 7 – (a) Imagem 3×3 em escala de cinza, (b) tabela de mapeamento entre cores e posições, (c) expressão representativa da imagem.

(a)

p_1 95	p_2 223	p_3 0
p_4 223	p_5 127	p_6 95
p_7 191	p_8 31	p_9 255

(b)

c_d	c_b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
0	00000000	0	0	1	0	0	0	0	0	0
31	00011111	0	0	0	0	0	0	0	1	0
95	01011111	1	0	0	0	0	1	0	0	0
127	01111111	0	0	0	0	1	0	0	0	0
191	10111111	0	0	0	0	0	0	1	0	0
223	11011111	0	1	0	1	0	0	0	0	0
255	11111111	0	0	0	0	0	0	0	0	1

(c)

$$\begin{aligned}
 |I\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^8}} \left(|0\rangle|001000000\rangle + |31\rangle|000000010\rangle + |95\rangle|100001000\rangle + \right. \\
 &\quad \left. |127\rangle|000010000\rangle + |191\rangle|000000100\rangle + |223\rangle|010100000\rangle + \right. \\
 &\quad \left. |255\rangle|000000001\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^8}} \left(|00000000\rangle|001000000\rangle + |00011111\rangle|000000010\rangle + |01011111\rangle|100001000\rangle + \right. \\
 &\quad \left. |01111111\rangle|000010000\rangle + |10111111\rangle|000000100\rangle + |11011111\rangle|010100000\rangle + \right. \\
 &\quad \left. |11111111\rangle|000000001\rangle \right)
 \end{aligned}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

4.2.1 Preparação da imagem quântica

Para preparar o estado quântico que representará a imagem são necessários $m + n^2$ qubits, dessa forma o estado inicial é mostrado na Equação (4.8):

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes m+n^2}. \quad (4.8)$$

A partir do estado inicial será criada uma superposição de m qubits para representar os 2^m níveis de cinza.

$$|\psi_1\rangle = (H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})|\psi_0\rangle = (H|0\rangle)^{\otimes m} \otimes (I|0\rangle)^{\otimes n^2} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c=0}^{2^m-1} |c\rangle \otimes |0\rangle^{\otimes n^2}. \quad (4.9)$$

A Equação (4.9) cria um estado intermediário contendo a informação necessária sobre a escala de cinza utilizada. Para essa transformação são usadas as portas de um qubit I e H :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

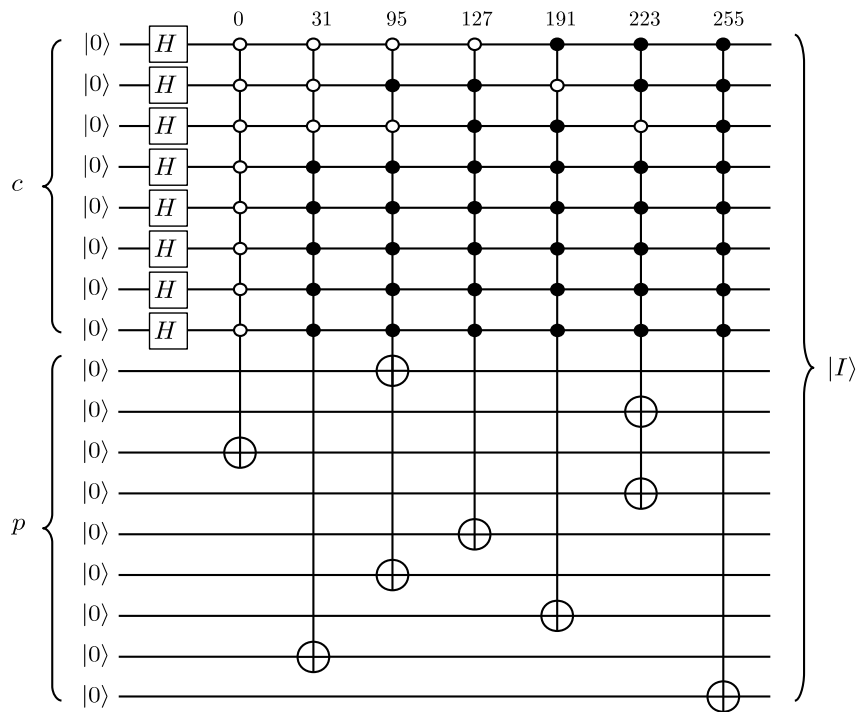
O próximo passo é associar o estado em (4.9) com a informação de posição dos píxeis. Para cada píxel é necessária uma sub-operação, um oráculo que irá marcar o qubit relacionado à posição.

Esta operação é mostrada em (4.11):

$$U_c = \left(\sum_{j=0, j \neq c}^{2^m-1} |j\rangle\langle j| \otimes I \right) + (|c\rangle\langle c| \otimes X), \quad (4.11)$$

na qual $c = \{c_1 c_2 \dots c_m\}$, $c_k \in (0, 1)$, é uma sequência binária representando o c -ésimo nível de cinza de uma escala com 2^m níveis. A operação U_c corresponde a uma função de mapeamento que, a partir de uma cor, retorna uma posição marcada. A Figura 8 mostra um circuito quântico capaz de criar a representação apresentada na Figura 7(a).

Figura 8 – Exemplo de circuito de geração da imagem em escala de cinza, na qual c representa o valor binário correspondente ao nível de cinza e p_i as posições da imagem descritas de forma linear.



Fonte: elaborada pelo autor.

Todas as posições precisam ser marcadas, por tanto para criar a representação da imagem serão necessárias n operações U_c como mostrado em (4.12):

$$U_I = \prod_{i=1}^n U_c^{(i)} |\psi_1\rangle. \quad (4.12)$$

Dessa forma, a aplicação de U_I no estado $|\psi_1\rangle$ realiza o mapeamento de todas as cores presentes na imagem com suas respectivas posições. O passo final resulta no estado apresentado na

Equação (4.13).

$$\begin{aligned}
|I\rangle &= U_I |\psi_1\rangle \\
&= \prod_{i=1}^{n^2} U_c^{(i)} |\psi_1\rangle \\
&= \prod_{i=1}^{n^2} U_c^{(i)} \left(\frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j\rangle |0\rangle^{\otimes n^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \prod_{i=1}^{n^2} \sum_{j=0}^{2^m-1} U_c^{(i)} |j\rangle |0\rangle^{\otimes n^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c=0}^{2^m-1} |c\rangle |p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.2.2 Complexidade de preparação da imagem quântica

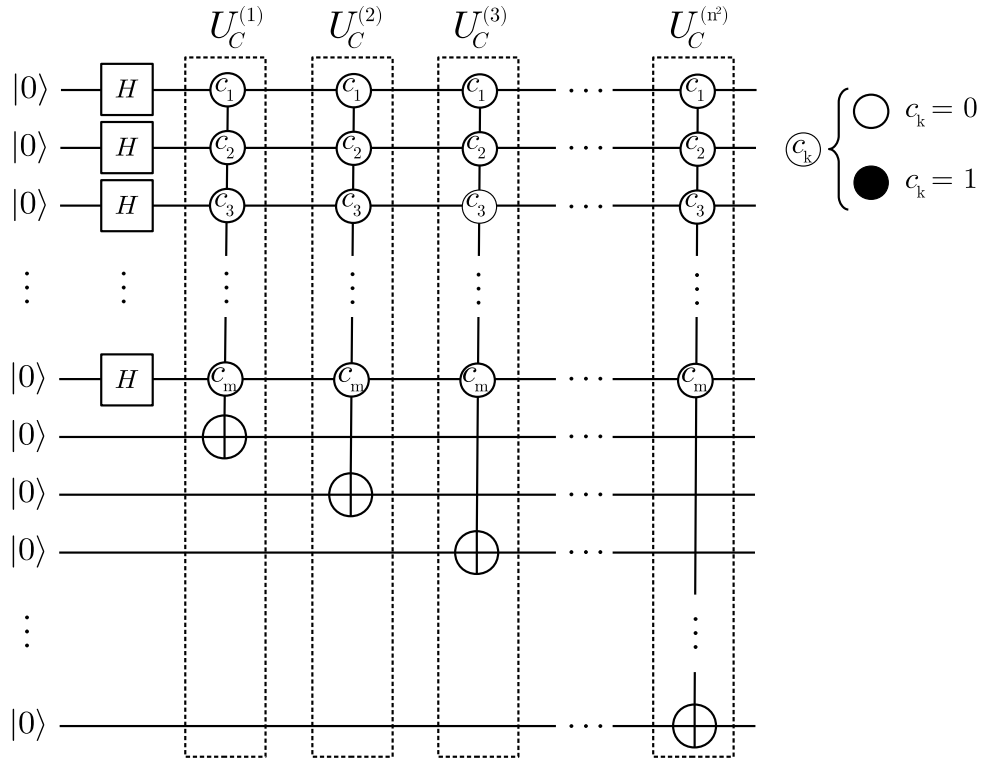
É facilmente percebido que a complexidade de preparação do estado $|\psi_1\rangle$ em (4.9) é $O(m + n^2)$. No entanto, a operação U_I contém a maior parte do trabalho na operação total de criação, então esta discussão terá como foco o número de passos da operação U_I apresentada na Equação (4.12).

Afim de descobrir a complexidade da operação U_I , é necessário discutir sobre a complexidade de uma única operação $U_c^{(i)}$. Cada operação $U_c^{(i)}$ corresponde à aplicação de uma porta CNOT m -controlada usada para inverter o i -ésimo qubit da sequência de qubits relativa às posições dos píxeis. Portanto tem-se que, para a operação U_I , não mais do que n^2 CNOT's m -controladas são necessárias como mostra a Figura 9.

Como mostrado em (51) toda porta CNOT k -controlada pode ser decomposta em $(4k - 8)$ CNOT's 2-controladas, mais conhecidas como portas Toffoli (52), com presença de $k - 2$ qubits auxiliares. Em outras palavras, uma porta CNOT k -controlada pode ser decomposta em não mais que $O(k)$ operações básicas. Dessa forma, a complexidade de cada sub-operação $U_c^{(i)}$ é de não mais que $O(m)$ passos acrescentando-se os $m - 2$ qubits necessários.

Assim sendo, a complexidade da operação U_I , afim de configurar níveis de cinza para todos os píxeis da imagem, é de não mais que $O(mn^2)$. Este é o custo de preparação da representação quântica para uma imagem $n \times n$ com um intervalo de níveis de 2^m , o que mostra uma ligeira redução na complexidade de preparação quando comparada com o modelo NEQR de complexidade $O(mqn^2)$, sendo $q = \log_2 n$.

Figura 9 – Sub-operações para a criação da representação quântica de uma imagem.



Fonte: elaborada pelo autor.

4.2.3 Recuperação da imagem

O maior aprimoramento do modelo NEQR em relação ao FRQI é que a informação pode ser recuperada com precisão. O que acontece devido ao modelo FRQI precisar usar um método probabilístico de recuperação, enquanto o modelo NEQR usa medições na base computacional para recuperar os níveis de cinza codificados no estado quântico (49).

No modelo modelo NMRIQ pode-se utilizar uma forma de recuperação semelhante à usada no modelo NEQR para obter a informação guardada no estado quântico. Neste caso a informação de posição dos píxeis pode ser recuperada através de uma medição como mostrada em (4.14):

$$M_c = \sum_{c=0}^{2^m-1} |c\rangle\langle c| \otimes I^{\otimes n}. \quad (4.14)$$

Quando o operador de medição M_c é aplicado, a informação de cor gravada nos primeiros m qubits do estado da imagem é recuperada. Então, podem-se realizar medições projetivas para recuperar a informação sobre as posições dos píxeis.

As operações mostradas acima usam a mesma estratégia usada em (49). Contudo, neste caso não há apenas a recuperação da informação de um único píxel. Para cada medição

realizada todas as posições que compartilham o mesmo nível de cinza são recuperadas. Para tornar isto mais claro, pode-se observar a Equação (4.15), ela representa uma imagem quântica com $2^2 = 4$ níveis de cinza e $n^2 = 4$ posições:

$$|I\rangle = \frac{1}{2} \left(|00\rangle|0000\rangle + |01\rangle|0010\rangle + |10\rangle|0000\rangle + |11\rangle|1101\rangle \right). \quad (4.15)$$

O operador M_c relacionado com a Equação (4.15) é

$$M_c = \left(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| \right) \otimes I^{\otimes 4}, \quad (4.16)$$

se o resultado da medição da cor é por exemplo, a sequência binária $(11)_2$, então a superposição colapsa e como a cor recuperada está relacionada a três posições da imagem, não apenas a informação de um píxel foi recuperada, mas de todos os píxeis da imagem com a mesma informação de cor.

4.3 Recuperação eficiente de uma imagem quântica usando busca quântica

A recuperação de uma imagem quântica é um processo simples uma vez que tudo o que é necessário é a realização de medições do estado que representa a imagem.

Em modelos como FRQI (46) e MCQI (48) é necessário estimar a distribuição de probabilidade do estado para recuperar a imagem, uma vez que a informação de cor é guardada na amplitude dos estados da superposição, este tipo de recuperação será referido posteriormente como recuperação *probabilística*.

Outros modelos como NEQR (49), CQIR (50) e NMRIQ, codificam a informação de cor e posição da imagem diretamente na forma de estados da base, como estes estados são ortogonais entre si podem ser distinguidos e isto que permite uma recuperação precisa da informação, a recuperação deste tipo será referida como recuperação *determinística*. A Tabela 6 mostra uma comparação das principais características dos modelos.

Para todos os modelos temos cálculos de complexidade de criação dos estados que representam as imagens, contudo à recuperação de uma imagem tem sido dada pouca relevância. Realizando medições na imagem quântica pode-se de fato recuperar a informação nela codificada, porém estamos interessados em analisar formas precisas e mais eficientes de recuperar a informação de partes da imagem. Assim, utilizaremos um algoritmo de busca para aumentar a probabilidade de se recuperar a informação de um píxel ou cor específicos, ou ainda de um conjunto específico dos mesmos, nos modelos citados anteriormente.

Tabela 6 – Comparação das características dos principais modelos de representação de imagens quântica, na qual L representa o número de níveis de cinza da codificação e é considerada uma imagem de tamanho $2^n \times 2^n$.

QIR	Equação	Codificação de cor	Complexidade	Recuperação
FRQI	Eq. (4.1)	1 vetor de ângulos → escala de cinza	$O(2^{4n})$	Probabilística
MCQI	Eq. (4.2)	3 vetores de ângulos → RGB	$O(2^{4n})$	Probabilística
NEQR	Eq. (4.4)	sequência de qubits → escala de cinza	$O(\log_2 L \cdot n \cdot 2^{2n})$	Determinística
CQIR	Eq. (4.5)	sequência de qubits → escala de cinza	$O(\log_2 L \cdot n \cdot 2^{2n})$	Determinística
NMRIQ	Eq. (4.7)	sequência de qubits → escala de cinza	$O(\log_2 L \cdot 2^{2n})$	Determinística

Fonte: adaptado de (47).

4.3.1 Busca em uma imagem quântica

O algoritmo de Grover foi inicialmente proposto para ter como entrada uma superposição uniformemente distribuída, mas sua generalização eficiente para distribuições arbitrárias já foi demonstrada (53). Nesta seção mostraremos como utilizá-lo para realizar uma busca em uma imagem quântica.

Inicialmente preparamos o estado contendo a representação da imagem, assim como foi apresentado na seção 4.2.1, e a ação do operador U_I que aparece na equação abaixo pode ser vista em detalhes na Equação (4.13),

$$|I\rangle = U_I(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})|0\rangle^{\otimes m+n^2} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c=0}^{2^m-1} |c\rangle |p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle. \quad (4.17)$$

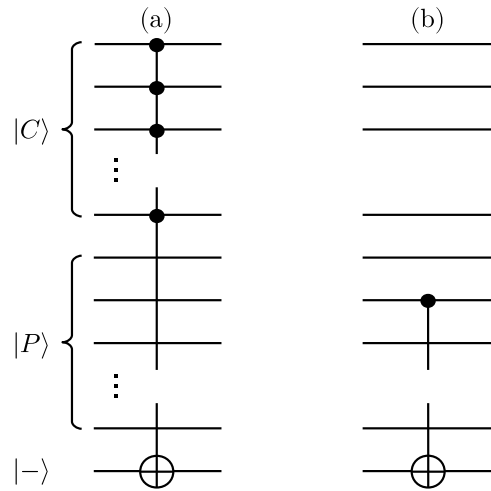
Em uma imagem quântica pode-se buscar elementos de posições ou cores específicas, para cada caso é possível criar um tipo adequado de oráculo como mostrado na Figura 10(a) um oráculo para marcação de uma cor e 10(b) um oráculo para marcação de uma posição.

Para a criação de um operador de amplificação específico para a imagem na qual se está realizando a busca será utilizada a operação $U_I(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})$. O operador adequado pode ser visto na Equação (4.18):

$$U_I(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})(2|0\rangle\langle 0| - I)(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})U_I. \quad (4.18)$$

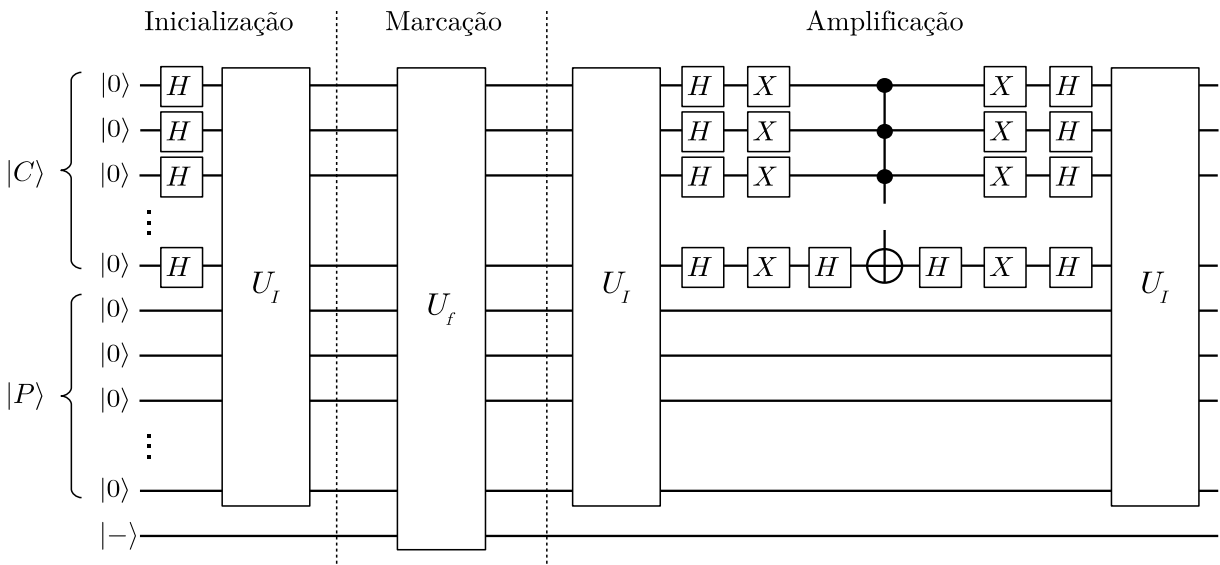
Na Figura 11 pode-se conferir a elaboração de um circuito quântico reunindo as três etapas anteriores.

Figura 10 – Tipos de oráculos para busca em uma imagem quântica. (a) oráculo para seleção de uma cor, (b) oráculo para seleção de uma posição.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 11 – Circuito quântico de busca em uma imagem quântica.



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma vez que tem-se todos os meios necessários para a realização da busca, pode-se então definir o operador G que a realizará

$$G = U_I(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})(2|0\rangle\langle 0| - I)(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})U_IU_f. \tag{4.19}$$

A quantidade de aplicações t do operador G varia em função do número de elementos na superposição, neste caso 2^m . Contudo o parâmetro m define o número de níveis em uma escala de cinza e possui valor 8 para a maioria das aplicações de processamento de imagem, isto torna o número t de aplicações do operador G praticamente invariável ou com uma variação pequena,

dependendo apenas da quantidade de níveis da escala de cinza utilizada e não da quantidade de píxeis da imagem.

Para citar um exemplo, em qualquer imagem em escala de cinza com $255 = 2^8$ níveis, serão sempre necessárias apenas $t = 12$ aplicações do operador G para a recuperação de todas as posições de uma cor específica.

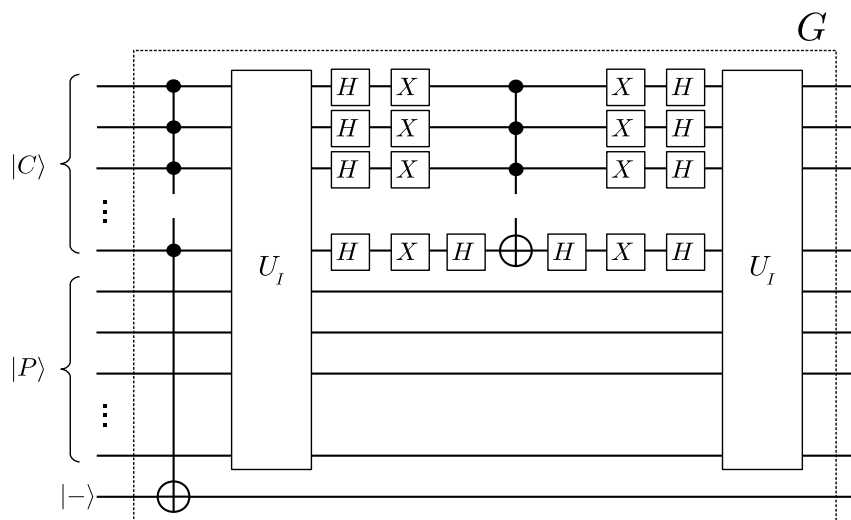
4.3.2 Recuperação de uma imagem com $O(2^m)$ cópias

Ao recuperar a informação de um estado quântico em superposição, esse estado invariavelmente irá colapsar para um dentre os possíveis estados que formam esta superposição. Assim, quando se fala em imagens quânticas surge naturalmente uma questão, a respeito de como é possível recuperar a imagem a partir do estado.

Em qualquer modelo de representação de imagens quânticas é necessário realizar medições, em um certo número de cópias do estado que as representam, para que se consiga reconstruir toda a imagem. Contudo, pode-se reduzir o número de estados necessários, alterando a probabilidade de efetuar a medição de um estado específico dentro da superposição.

Na Seção 4.2.3 foi discutido como preparar um operador de medição. Por exemplo, para a recuperação de uma cor pode-se utilizar um operador como mostrado na Equação (4.14). Contudo, para que se possa medir uma cor com probabilidade 1, ou muito próxima de 1, é necessário aplicar o algoritmo de Grover e buscar a cor desejada, a busca irá amplificar a amplitude do estado com a cor e a medição ocorrerá no estado selecionado.

Figura 12 – Circuito quântico de busca dos elementos de uma cor uma imagem quântica.



Uma vez que pode-se selecionar a cor que se deseja recuperar, pode-se recuperar a imagem com $O(2^m)$ cópias, uma vez que este é o número de níveis de cinza da imagem todas as posições para cada cor estão associadas ao mesmo estado da superposição que carrega a informação da cor.

Aplicar esse tipo de abordagem não é viável para os modelos de representação de imagens quânticas semelhantes ao modelo FRQI, uma vez que a informação de cor é armazenada nas amplitudes dos estados. Assim, amplificar a amplitude de um estado alteraria completamente a informações da imagem.

Modelos de representação como NEQR e CQIR, podem ser usados em conjunto com o algoritmo de Grover, contudo a quantidade de estados, e portanto o tamanho do espaço de busca para o algoritmo de Grover seria igual ao número de píxeis da imagem, dessa forma o número de cópias varia com o tamanho da imagem, assim como o número de execuções do algoritmo de busca, podemos dizer que para uma imagem $2^n \times 2^n$, são necessárias $O(2^{2n})$ cópias e um número de iterações $t = \lfloor \frac{\pi 2^n}{4} \rfloor$.

4.4 Processamento quântico da imagem

Nesta seção será discutido como se realizará o processamento de imagens, incluindo operações com cores, estatísticas e espaciais, usando a representação proposta, além de apresentadas os benefícios provenientes da sua utilização.

4.4.1 Obtendo o negativo de uma imagem

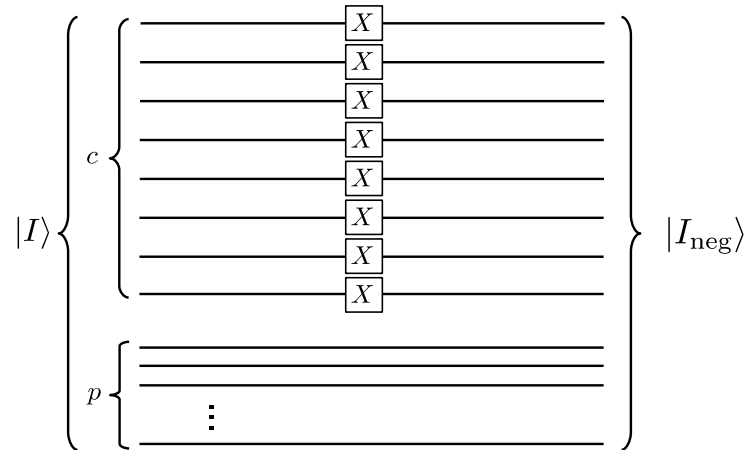
Uma das mais simples e básicas operações de processamento de imagens envolvendo os níveis de intensidade em uma imagem é o negativo ou complemento. A operação que representa esta transformação de intensidade para um intervalo de níveis de cinza $[0, L - 1]$ é mostrada na Equação (4.20):

$$s = T(r) = L - 1 - r \quad (4.20)$$

na qual r é o nível de intensidade de um píxel antes da transformação e s o valor após o processamento.

Para realizar essa operação usando um circuito quântico, é necessário manipular os qubits usados para guardar a informação de cor usando portas X como mostrado na Figura 13. As portas X no circuito equivalem a portas lógicas NOT, de forma que $X|0\rangle = |1\rangle$ e $X|1\rangle = |0\rangle$.

Figura 13 – Circuito quântico para a obtenção do negativo de uma imagem.



Fonte: elaborada pelo autor.

O resultado é que todas as cores são substituídas pelo seu complemento produzindo o equivalente a um negativo fotográfico. Este é um tipo de transformação de intensidade simples, porém usado com frequência para o realce de detalhes brancos ou cinzas em regiões escuras de imagens (41).

Este é apenas um exemplo de operação com cores que pode ser realizada no modelo, sem considerar o nível de cinza dos píxeis individualmente. De fato, podem ser realizadas quaisquer operações semelhantes com cores, seja na imagem inteira, ou apenas uma determinada área.

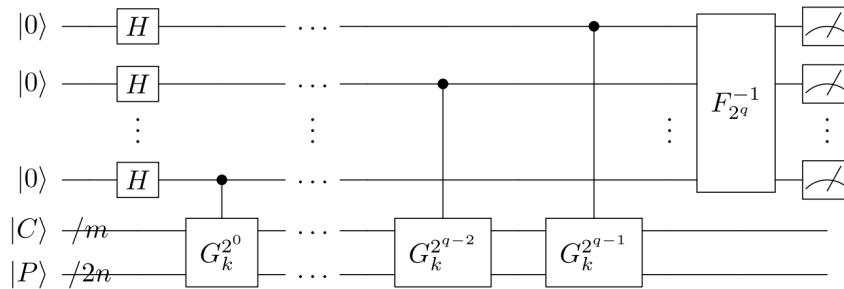
4.4.2 Calculando o histograma de uma imagem quântica

Histogramas são a base para muitas técnicas de processamento de imagens. O histograma de uma imagem é basicamente uma função discreta $h(r_k) = n_k$, na qual r_k é o k -ésimo nível de intensidade em uma escala de cinza em um intervalo $[0, L - 1]$ e n_k é o número de píxeis com intensidade r_k (41).

Histogramas são fáceis de serem calculados e provêm estatísticas úteis sobre as imagens, por isso são muito usados em aplicações como compressão e segmentação de imagens. Alguns algoritmos baseados em QIR's para cálculo de histogramas podem ser encontrados em (50) e (54), estes algoritmos utilizam um algoritmo de contagem quântica (55), como mostrado na Figura 14.

Uma importante característica do modelo apresentado em 4.7 é que ele torna muito simples o cálculo do histograma de uma imagem quântica. Para cada cor o operador de Grover é aplicado 12 vezes ($m = 8$), portanto, o histograma da imagem inteira é obtido após $t = 256 \times 12$

Figura 14 – Circuito quântico que implementa uma iteração do cálculo do histograma de uma imagem quântica.

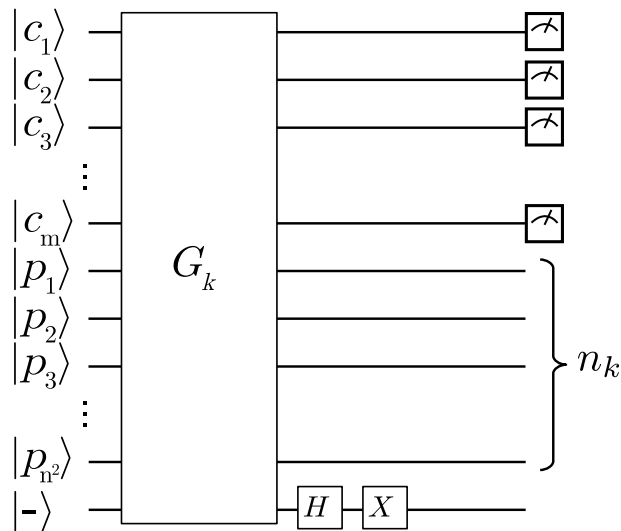


Fonte: encontrado em (54).

aplicações do operador.

A Figura 15, mostra uma operação quântica de busca para encontrar o k -ésimo nível de cinza. Dessa forma, a informação para criar o histograma da imagem é obtida usando uma busca simples para selecionar um nível de cinza por vez seguida de uma contagem do número de posições da cor selecionada. Assim, obtém-se o histograma da imagem com $O(n^2\sqrt{2^m})$ operações, onde n^2 é o número de pixels da imagem e 2^m o número de níveis de cinza.

Figura 15 – Circuito quântico para a contagem da quantidade de posições da imagem para o k -ésimo nível de cinza, na qual $|n_k\rangle$ é o seu número de ocorrências e G_k é um operador de busca para o nível k .



$$n_k(|p_1 p_2 p_3 \dots p_{n^2}\rangle) = \sum_{i=1}^{n^2} p_i$$

Fonte: elaborada pelo autor.

4.5 Segmentação de imagens

A segmentação de imagens tem por finalidade subdividir uma imagem em regiões ou objetos que a compõem, por esse motivo é uma abordagem bastante utilizada em aplicações como: inspeção automatizada de componentes eletrônicos, ou em busca autônoma de alvos (41).

As técnicas mais básicas de segmentação se baseiam principalmente em propriedades simples dos valores de intensidade, como sua similaridade e suas descontinuidades. Algumas aplicações quânticas já foram propostas para realizar segmentação (56, 54, 57, 58) e nesta seção será apresentada de que forma o modelo NMRIQ pode ser usado em um algoritmo de segmentação de forma eficiente.

4.5.1 Limiarização de uma imagem

A limiarização de uma imagem em escala de cinza é a sua conversão para uma imagem apenas com níveis de cinza em um intervalo definido por um limiar. Quando é usado apenas um limiar, teremos a divisão da escala de cinza em duas partes e dessa forma a imagem é denominada binária, com a representação contendo apenas dois níveis de intensidade.

Este método de transformação de intensidades em imagens é uma forma extremamente simples e eficiente de realizar a segmentação de uma imagem, devido a sua simplicidade e baixo custo computacional.

Selecionando um limiar T uma imagem segmentada $g(x,y)$ pode ser representada como mostra a Equação (4.21):

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x,y) > T \\ 0 & \text{if } f(x,y) \leq T \end{cases}, \quad (4.21)$$

na qual, $f(x,y)$ é a imagem original e $g(x,y)$ é a imagem binária resultante.

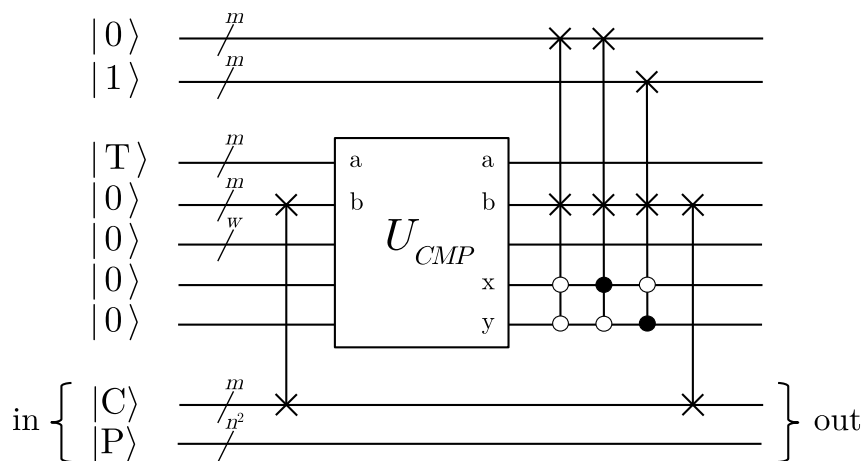
Um exemplo de circuito quântico para realizar a segmentação por limiarização de uma imagem quântica é apresentado em (58) e é possível ver um exemplo de sua utilização na Figura 16.

Onde, a porta U_{CMP} que realiza a comparação de sequências de qubits (*quantum bit string comparator*) é definido em (59) e tem o funcionamento dado como mostra a Equação (4.22),

$$U_{CMP}|a\rangle|b\rangle|0\rangle^{\otimes w}|0\rangle|0\rangle = |a\rangle|b\rangle|\psi\rangle|x\rangle|y\rangle, \quad (4.22)$$

como saída a porta U_{CMP} possui a, b que são as sequências de estados de entrada que estão sendo comparadas, w qubits parte de seu espaço de trabalho, mais os qubits x e y que carregam a informação sobre o resultado da comparação. Por exemplo, caso $a = b$ então $x = y = 0$, se $a > b$ então $x = 1$ e $y = 0$ e se $a < b$ então $x = 0$ e $y = 1$ (59).

Figura 16 – Circuito quântico para a limiarização de uma imagem. Onde T é o limiar selecionado e U_{CMP} é a porta que realiza a comparação entre a cor, representada pelo estado $|C\rangle$, e o limiar. x e y são as saídas do comparador na qual é gravado o resultado da comparação.



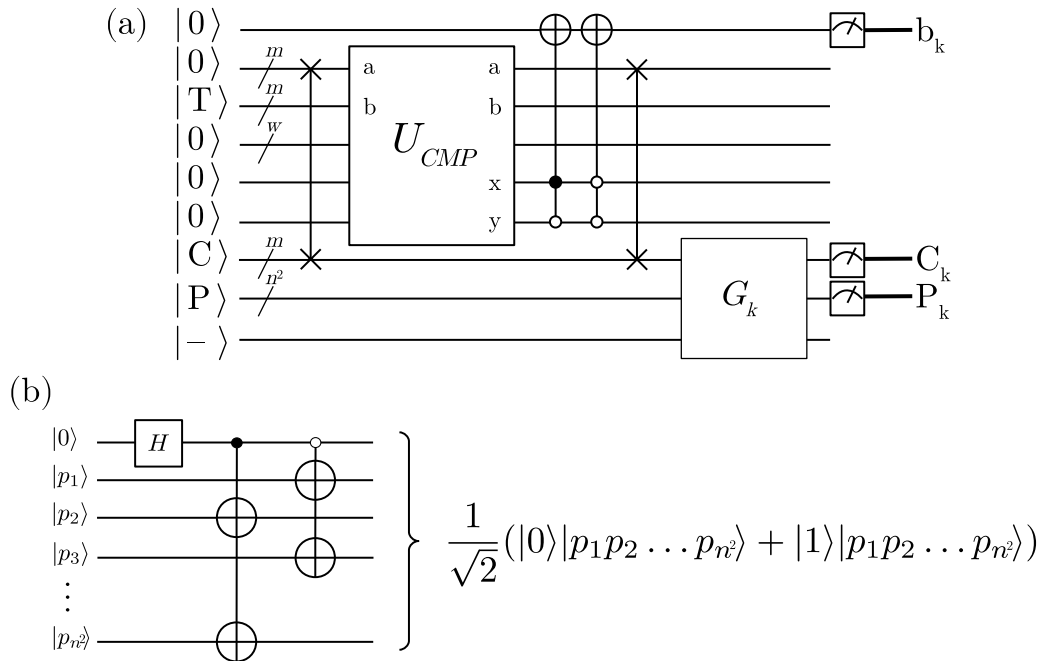
Fonte: adaptado de (58).

De acordo com a saída do comparador a cor na imagem é substituída pelo estado $|0\rangle^{\otimes m}$ ou $|1\rangle^{\otimes m}$, tornando a imagem uma imagem binária. Um problema desta abordagem é que a imagem não poderia mais ser recuperada pelo método descrito na Seção 4.3, uma vez que a seleção de uma das cores resultaria em uma superposição de estados contendo suas posições. Para recuperar a imagem segmentada neste caso é necessária a preparação de múltiplas cópias do estado. Aplicando um operador de medição apropriado em cada cópia pode-se recuperar a informação de cor e posição de cada píxel.

Uma outra abordagem para a criação de uma imagem binária pode ser vista na Figura 17, na qual usamos o mesmo princípio do algoritmo descrito em (58), porém apenas para a marcação dos estados de acordo com o limiar T . Ao circuito de comparação em 17(a) é acrescentado uma porta G_k que representa a aplicação de um algoritmo de busca que selecionará o k -ésimo nível de cinza da imagem antes de se realizar uma medição nos registradores que guardam a informação da imagem, bem como no que recebe a marcação indicando se as cores e posições lidas pertencem, por exemplo, a um objeto, ou o fundo de uma cena.

Na Figura 17(b) vemos um circuito de criação de imagem com apenas dois níveis

Figura 17 – Circuitos de limiarização. Onde em (a): T é o limiar selecionado e U_{CMP} é a porta que realiza a comparação entre a cor, representada pelo estado $|C\rangle$, e o limiar. x e y são as saídas do comparador na qual é gravado o resultado da comparação. A porta G_k é um operador de Grover preparado para buscar o k -ésimo nível de cinza da imagem. O resultado da medição do primeiro qubit b_k indica se as posições encontradas pertencem ou não ao fundo da cena. Em (b): temos o circuito para criação da nova imagem binária.



Fonte: elaborada pelo autor.

de cinza. Uma vez que todas as posições P_k foram recuperadas usando o circuito em 17(a) as posições são somadas de acordo com b_k , isso agrupará todas as posições pertencentes ao fundo e ao objeto destacado. Esta informação é usada então para a criação da imagem novamente como a imagem segmentada mostrada na saída do circuito em 17(b).

4.5.2 Segmentação por limiarização iterativa

Quando temos uma distinção clara entre as distribuições de intensidade do fundo e dos objetos presentes em uma imagem podemos usar um tipo de limiarização muito simples para segmentar a imagem e separar os objetos do fundo. Este é um tipo de limiarização denominada de *global* e a seleção do limiar a ser utilizado pode ser obtida de forma iterativa até que seja encontrado um limiar adequado. Assim para realizar um algoritmo de segmentação precisa-se basicamente da capacidade de cálculo de um histograma e da média das suas intensidades.

Como já discutido em (54) pode-se estimar a mediana e a média através dos algoritmos descritos por Grover (60) e os circuitos adequados para sua realização segundo esta

implementação podem ser vistos em detalhes no Apêndice A.

Algoritmo 1 *Algoritmo de segmentação*

Entrada: *imagem*

Saída: *imagem segmentada*

1. Calcular o histograma da imagem usando o circuito apresentado na Seção 4.4.2.
 2. Selecionar o limiar inicial T como a mediana do histograma da imagem, calculada usando o algoritmo descrito por Grover (61).
 3. Limiarizar a imagem com o circuito descrito na Seção 4.5.1 usando o limiar T e gerando assim uma nova imagem com duas regiões R_1 e R_2 .
 4. Calcular os valores de intensidades médias m_1 e m_2 para as duas regiões respectivamente usando o algoritmo descrito por Grover (60).
 5. Calcular um novo limiar: $T = \frac{m_1+m_2}{2}$.
 6. Repetir as etapas 2 a 4 até que a diferença entre os valores de T em iterações sucessivas seja menor que o parâmetro predefinido ΔT .
-

4.6 Representação de uma imagem no padrão RGBA

O modelo NMRIQ, foi apresentado inicialmente para a representação de imagens em escala de cinza, mas a extensão do modelo para a representação de imagens coloridas pode ser realizada de forma bastante simples.

Será usada como referência para a codificação de cor o padrão RGBA (*red green blue alpha*), este padrão permite exibir todas as cores do sistema RGB (*red green blue*), porém permite ainda a utilização de um canal de transparência, um artifício usado em softwares de edição de imagem com camadas. A ordem dos bytes no esquema “RGBA” é entendida da seguinte forma: um byte R para a cor vermelha, seguido por um byte G para a cor verde, um byte B para a cor azul e um byte A referente à transparência do píxel.

Partindo do mesmo princípio apresentado na Seção 4.2.1 para a criação da imagem em escala de cinza, o estado quântico que representará a imagem conterá $m + 2 + n^2$ qubits. A partir do estado inicial será criada uma superposição para representar os 2^{m+2} níveis de intensidade como mostra a Equação (4.23).

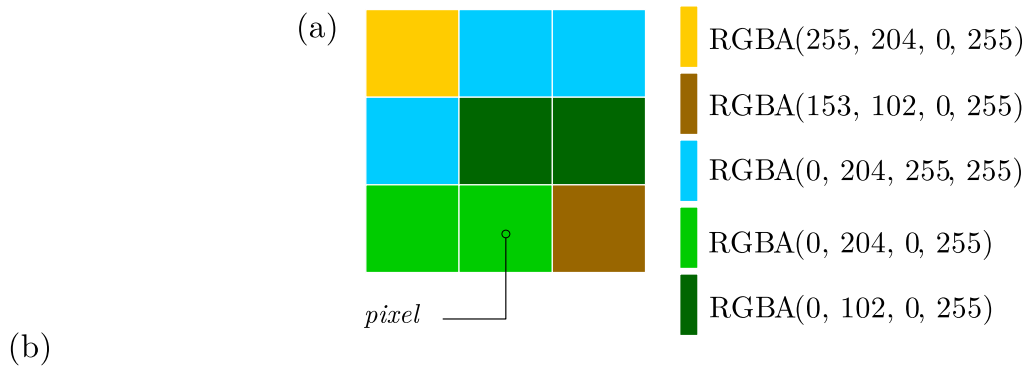
$$|\psi_1\rangle = (H^{\otimes m+2} \otimes I^{\otimes n^2})|0\rangle^{\otimes m+2+n^2}. \quad (4.23)$$

O incremento de 2 qubits será responsável por um aumento de quatro vezes a quantidade de estados na superposição, se comparado à Equação (4.9), este aumento será necessário para realizar o endereçamento das novas componentes de cor apresentadas na Equação (4.24) como l , na qual $\{R, G, B, A\}$ é referenciado respectivamente como $\{0, 1, 2, 3\}$.

$$|I\rangle = U_I |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{l=0}^3 \sum_{c=0}^{2^m-1} |l\rangle |c\rangle |p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle. \quad (4.24)$$

A Figura 18 apresenta como exemplo uma imagem 3×3 representada no padrão RGBA com a componente de transparência inalterada.

Figura 18 – (a) Imagem 3×3 RGBA, (b) expressão representativa da imagem.



$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{10}}} \left(|0\rangle |255\rangle |100000000\rangle + |1\rangle |255\rangle |100000000\rangle + |2\rangle |0\rangle |100000000\rangle + |3\rangle |255\rangle |100000000\rangle \right. \\
|0\rangle |0\rangle |011100000\rangle + |1\rangle |204\rangle |011100000\rangle + |2\rangle |255\rangle |011100000\rangle + |3\rangle |255\rangle |011100000\rangle \\
|0\rangle |0\rangle |000011000\rangle + |1\rangle |102\rangle |000011000\rangle + |2\rangle |0\rangle |000011000\rangle + |3\rangle |255\rangle |000011000\rangle \\
|0\rangle |0\rangle |000000110\rangle + |1\rangle |204\rangle |000000110\rangle + |2\rangle |0\rangle |000000110\rangle + |3\rangle |255\rangle |000000110\rangle \\
\left. |0\rangle |153\rangle |000000001\rangle + |1\rangle |102\rangle |000000001\rangle + |2\rangle |0\rangle |000000001\rangle + |3\rangle |255\rangle |000000001\rangle \right)$$

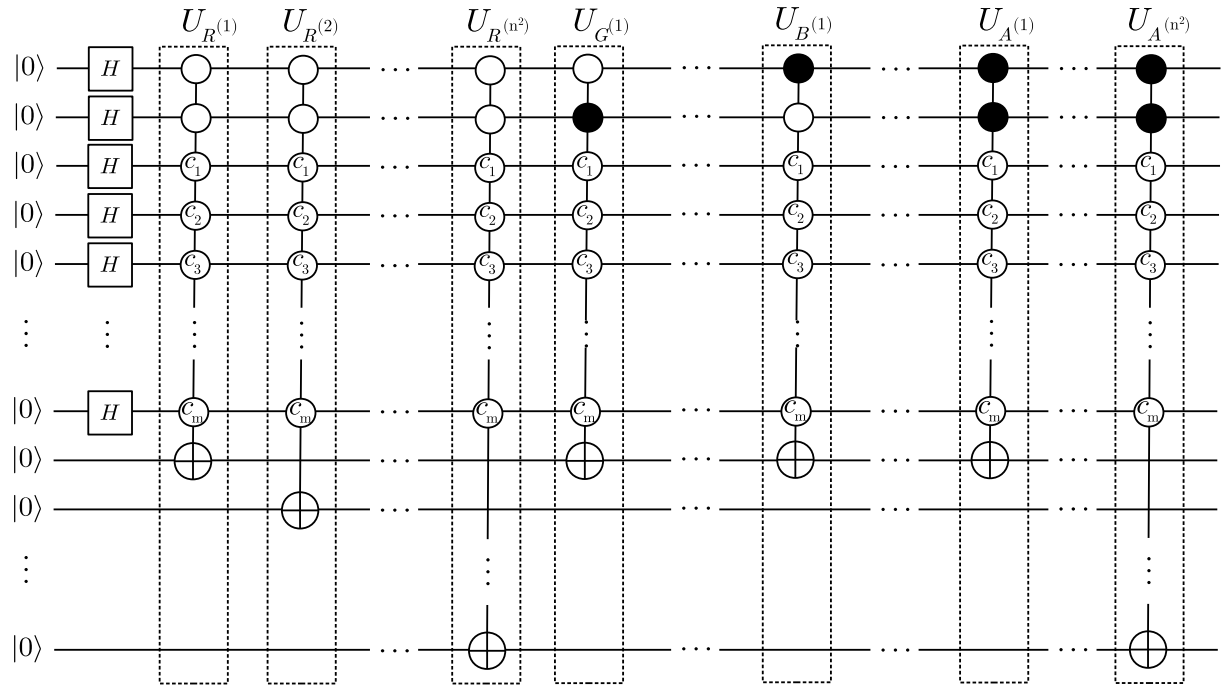
Fonte: elaborada pelo autor.

4.6.1 Aumento de complexidade do modelo multicanal

A alteração do número de canais modifica a preparação apresentada anteriormente devido à necessidade de especificar o nível de intensidade para cada uma das componentes de cor, a complexidade é então modificada por uma constante relativa ao número de canais. Isto pode ser visto na Figura 19, na qual o mesmo modelo de preparação antes usado apenas para um nível de intensidade e apresentado na Seção 4.2.1 é agora replicado para as quatro componentes.

O mesmo princípio se aplica à recuperação da imagem, bastando alterar o oráculo da busca introduzindo a componente de cor que se deseja recuperar. A utilização do algoritmo de

Figura 19 – Sub-operações para a criação da representação quântica de uma imagem no padrão RGBA.



Fonte: elaborada pelo autor.

Grover ainda é independente do tamanho da imagem e o acréscimo no número de aplicações do oráculo necessárias para encontrar um elemento na superposição é de $t = \left\lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{2^{10}} \right\rfloor = 25$, um acréscimo ainda pequeno no esforço computacional tendo em vista o aumento de quatro vezes do número de componentes do espaço de busca.

4.7 Conclusão

Neste trabalho, um novo modelo de representação de imagens quânticas foi apresentado. Quando comparado com outros modelos encontrados na literatura, a representação de imagem quântica proposta tem menor complexidade de preparação ($O(m2^{2n})$ portas enquanto o modelo NEQR tem $O(mn2^{2n})$ portas) e recuperação da imagem ($O(2^m)$ cópias do estado são necessárias, enquanto o NEQR requer $O(2^{2n})$). Como referência são usadas uma escala de cinza com 2^m níveis e uma imagem $2^n \times 2^n$. Além disso, é particularmente adequado para o cálculo do histograma da imagem. Neste caso, ao contrário dos outros modelos, não requer contagem quântica, apenas a busca quântica é necessária. Obter o histograma de maneira mais fácil faz com que outras tarefas de processamento de imagens quânticas, como a segmentação de imagens, sejam mais facilmente implementadas em um computador quântico.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Os temas abordados nesta tese foram a teleportação de portas quânticas de dois qubits, o uso em conjunto de algoritmos de busca quântica e clássica e a apresentação de um novo modelo de representação imagens quânticas.

5.1 Conclusões

- Foi determinada a matriz Υ , cujo determinante é um invariante, usado para definir duas classes de estados entrelaçados de quatro qubits. À Classe 1, pertencem os estados para os quais $\Upsilon = (1/2)U_\sigma$, o que permite a teleportação de uma porta de dois qubits deterministicamente, se estado tiver entrelaçamento máximo. Já a Classe 2 é composta pelos estados para os quais Υ é normal, mas 2Υ não é unitária, ou ainda, para aqueles em que Υ não é normal. Nestes casos, não é possível realizar teleportação, mas sim uma preparação remota probabilística.
- Mostrou-se um exemplo de utilização em de um algoritmo de busca quântica e clássica, em que é mais vantajoso do que usar apenas uma busca clássica, ou apenas uma busca quântica. Isto é possível, quando há uma porta quântica capaz de fornecer informação adicional sobre a solução do problema.
- Foi mostrado que a preparação e recuperação do modelo NMRIQ são menos complexas que as dos modelos atualmente propostos, mostrou-se ainda, que este modelo pode substituir outros modelos em aplicações específicas e ser facilmente ajustável para permitir o processamento de imagens coloridas. A Tabela 7 apresenta uma comparação das principais características dos principais modelos mencionados.

Tabela 7 – Comparação das características dos modelos FRQI, NEQR e NMRIQ.

QIR	Preparação	Recuperação	Informação recuperada por medição
FRQI	$O(2^{4n})$	Probabilística	não há
NEQR	$O(mn2^{2n})$	Determinística	posição e cor de um píxel
NMRIQ	$O(m2^{2n})$	Determinística	todas as posições de píxeis de uma cor

Fonte: elaborada pelo autor.

5.2 Trabalhos futuros

- Realização de um estudo sobre a utilização do protocolo de teleportação de portas quânticas para o processamento de imagens.
- Buscar uma aplicação prática da utilização de um algoritmo de busca quântico-clássico.
- Realizar a otimização dos algoritmos apresentados nesta tese e definir formalmente os melhores cenários para a aplicação do modelo NMRIQ.

REFERÊNCIAS

- 1 GOLDSTINE, H. H. **The Computer from Pascal to von Neumann**. [S.l.]: Princeton University Press, 1993. ISBN 9780691023670.
- 2 QUANTUM theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 400, n. 1818, p. 97–117, 1985. ISSN 0080-4630.
- 3 SHOR, P. W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: **Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science**. [S.l.: s.n.], 1994. p. 124–134.
- 4 GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In: **Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing**. New York, NY, USA: ACM, 1996. (STOC '96), p. 212–219. ISBN 0-89791-785-5.
- 5 ZALKA, C. Grover’s quantum searching algorithm is optimal. **Physical Review A**, APS, v. 60, n. 4, p. 2746, 1999.
- 6 VERLE, L. Deep Blue x Kasparov: a revanche. **Revista FAMECOS**, v. 5, n. 9, p. 63–67, 1997.
- 7 BOUWMEESTER, D. *et al.* Experimental quantum teleportation. **Nature**, Macmillan Magazines Ltd., v. 390, p. 575, dez. 1997.
- 8 BENNETT, C. H. *et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 70, p. 1895–1899, Mar 1993.
- 9 TOSI, G. *et al.* Silicon quantum processor with robust long-distance qubit couplings. **Nature Communications**, v. 8, n. 1, p. 450, set. 2017. ISSN 2041-1723.
- 10 WANG, H. *et al.* High-efficiency multiphoton boson sampling. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group, v. 11, p. 361, 2017.
- 11 MARING, N. *et al.* Photonic quantum state transfer between a cold atomic gas and a crystal. **Nature**, Macmillan Publishers Limited, part of Springer Nature. All rights reserved., v. 551, p. 485, nov. 2017.
- 12 MAHONEY, A. C. *et al.* Zero-field edge plasmons in a magnetic topological insulator. **Nature Communications**, v. 8, n. 1, p. 1836, nov. 2017. ISSN 2041-1723.
- 13 MOISEEV, S. A. *et al.* Broadband multiresonator quantum memory-interface. **Scientific Reports**, v. 8, n. 1, p. 3982, 2018. ISSN 2045-2322.
- 14 LANZAGORTA, M. Quantum radar. **Synthesis Lectures on Quantum Computing**, Morgan & Claypool Publishers, v. 3, n. 1, p. 1–139, 2011.
- 15 SCHULD, M.; SINAYSKIY, I.; PETRUCCIONE, F. An introduction to quantum machine learning. **Contemporary Physics**, Taylor & Francis, v. 56, n. 2, p. 172–185, 2015.

- 16 LANZAGORTA, M.; UHLMANN, J. Quantum algorithmic methods for computational geometry. **Mathematical Structures in Computer Science**, Cambridge University Press, v. 20, n. 6, p. 1117–1125, 2010.
- 17 VENEGAS-ANDRACA, S. **Quantum walks and quantum image processing**. Tese (Doutorado) — DPhil thesis, The University of Oxford, 2006.
- 18 SZELISKI, R. **Computer vision: algorithms and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- 19 YOUNG, J. I. C. **Solar Image Analysis and Visualization**. [S.l.]: Springer, 2009.
- 20 SHIH, F. Y. **Image processing and pattern recognition: fundamentals and techniques**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.
- 21 DOUGHERTY, G. **Digital image processing for medical applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- 22 GOTTESMAN, D.; CHUANG, I. L. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit. **Nature**, v. 402, n. 6760, p. 390–393, 1999. ISSN 0028-0836.
- 23 SAHA, D.; NANDAN, S.; PANIGRAHI, P. K. Local implementations of non-local quantum gates in linear entangled channel. **Journal of Quantum Information Science**, Scientific Research Publishing, v. 4, n. 02, p. 97, 2014.
- 24 MENDES, F.; RAMOS, R. On the role of the basis of measurement in quantum gate teleportation. **Quantum Information Processing**, Springer US, v. 14, n. 7, p. 2323–2343, 2015. ISSN 1570-0755.
- 25 LUQUE, J.-G.; THIBON, J.-Y. Polynomial invariants of four qubits. **Physical Review A**, APS, v. 67, n. 4, p. 042303, 2003.
- 26 XIN-WEI, Z.; GANG-LONG, M. Classification of four-qubit states by means of a stochastic local operation and the classical communication invariant. **Chinese Physics Letters**, IOP Publishing, v. 28, n. 2, p. 020301, 2011.
- 27 OLIVEIRA, D. S.; RAMOS, R. V. Residual entanglement with negativity for pure four-qubit quantum states. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 9, n. 4, p. 497–508, 2010.
- 28 TUCCI, R. R. An introduction to cartan’s KAK decomposition for QC programmers. **arXiv preprint quant-ph/0507171**, 2005.
- 29 VERSTRAETE, F. *et al.* Four qubits can be entangled in nine different ways. **Physical Review A**, APS, v. 65, n. 5, p. 052112, 2002.
- 30 YEO, Y.; CHUA, W. K. Teleportation and dense coding with genuine multipartite entanglement. **Physical review letters**, APS, v. 96, n. 6, p. 060502, 2006.
- 31 KOREPIN, V. E.; GROVER, L. K. Simple algorithm for partial quantum search. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 5, n. 1, p. 5–10, 2006.

- 32 CHOI, B.-S.; WALKER, T. A.; BRAUNSTEIN, S. L. Sure success partial search. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 6, n. 1, p. 1–8, 2007.
- 33 JIN, W. Geometric analysis of Grover's search algorithm in the presence of perturbation. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, v. 44, n. 2-3, p. 233–239, 2014.
- 34 GALINDO, A.; MARTIN-DELGADO, M. A. Family of grover's quantum-searching algorithms. **Physical Review A**, APS, v. 62, n. 6, p. 062303, 2000.
- 35 NIELSEN, M.; CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.
- 36 DUANE, S. *et al.* Hybrid Monte Carlo. **Physics Letters B**, v. 195, n. 2, p. 216 – 222, 1987. ISSN 0370-2693.
- 37 SHI, X. *et al.* An improved GA and a novel PSO-GA-based hybrid algorithm. **Information Processing Letters**, v. 93, n. 5, p. 255 – 261, 2005. ISSN 0020-0190.
- 38 WANG, Q.; HAMMES-SCHIFFER, S. Hybrid quantum/classical path integral approach for simulation of hydrogen transfer reactions in enzymes. **The Journal of chemical physics**, AIP, v. 125, n. 18, p. 184102, 2006.
- 39 KNOWLES, J. ParEGO: a hybrid algorithm with on-line landscape approximation for expensive multiobjective optimization problems. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 10, n. 1, p. 50–66, Feb 2006. ISSN 1089-778X.
- 40 BESKOS, A. *et al.* Hybrid Monte Carlo on Hilbert spaces. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 121, n. 10, p. 2201 – 2230, 2011. ISSN 0304-4149.
- 41 GONZÁLEZ, R.; WOODS, R. **Digital image processing**. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. ISBN 9780201180756.
- 42 LE, P.; DONG, F.; HIROTA, K. A flexible representation of quantum images for polynomial preparation, image compression, and processing operations. **Quantum Information Processing**, Springer US, v. 10, n. 1, p. 63–84, 2011. ISSN 1570-0755.
- 43 ZHANG, Y. *et al.* A novel quantum representation for log-polar images. **Quantum Information Processing**, v. 12, n. 9, p. 3103–3126, 2013. ISSN 1573-1332.
- 44 SANG, J.; WANG, S.; LI, Q. A novel quantum representation of color digital images. **Quantum Information Processing**, v. 16, n. 2, p. 42, 2016. ISSN 1573-1332.
- 45 ABDOLMALEKY, M. *et al.* Red-Green-Blue multi-channel quantum representation of digital images. **Optik - International Journal for Light and Electron Optics**, v. 128, n. Supplement C, p. 121 – 132, 2017. ISSN 0030-4026.
- 46 LE, P. Q. *et al.* A flexible representation and invertible transformations for images on quantum computers. In: _____. **New Advances in Intelligent Signal Processing**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. p. 179–202. ISBN 978-3-642-11739-8.
- 47 YAN, F.; ILIYASU, A. M.; VENEGAS-ANDRACA, S. E. A survey of quantum image representations. **Quantum Information Processing**, v. 15, n. 1, p. 1–35, 2016. ISSN 1573-1332.

- 48 SUN, B. *et al.* An RGB multi-channel representation for images on quantum computers. **Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics**, v. 17, n. 3, p. 404–417, 2013. ISSN 1343-0130/1883-8014.
- 49 ZHANG, Y. *et al.* NEQR: a novel enhanced quantum representation of digital images. **Quantum Information Processing**, Springer US, v. 12, n. 8, p. 2833–2860, 2013. ISSN 1570-0755.
- 50 CARAIMAN, S.; MANTA, V. Image processing using quantum computing. In: **2012 16th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–6.
- 51 KAYE, P. Reversible addition circuit using one ancillary bit with application to quantum computing. **arXiv preprint quant-ph/0408173**, aug 2004.
- 52 LLOYD, S. Almost any quantum logic gate is universal. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 75, p. 346–349, Jul 1995.
- 53 BIHAM, E. *et al.* Grover’s quantum search algorithm for an arbitrary initial amplitude distribution. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 60, p. 2742–2745, 1999.
- 54 CARAIMAN, S.; MANTA, V. I. Histogram-based segmentation of quantum images. **Theoretical Computer Science**, v. 529, n. 0, p. 46 – 60, 2014. ISSN 0304-3975.
- 55 BRASSARD, G.; HØYER, P.; TAPP, A. Quantum counting. In: LARSEN, K. G.; SKYUM, S.; WINSKEL, G. (Ed.). **Automata, Languages and Programming**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998. p. 820–831. ISBN 978-3-540-68681-1.
- 56 LI, H.-S. *et al.* Image storage, retrieval, compression and segmentation in a quantum system. **Quantum information processing**, Springer, v. 12, n. 6, p. 2269–2290, 2013.
- 57 YOUSSEFY, A.; EL-RAFEI, A.; ELRAMLY, S. A quantum mechanics-based framework for image processing and its application to image segmentation. **Quantum Information Processing**, Springer US, v. 14, n. 10, p. 3613–3638, 2015. ISSN 1570-0755.
- 58 CARAIMAN, S.; MANTA, V. Image segmentation on a quantum computer. **Quantum Information Processing**, Springer US, v. 14, n. 5, p. 1693–1715, 2015. ISSN 1570-0755.
- 59 OLIVEIRA, D. S.; RAMOS, R. V. Quantum bit string comparator: circuits and applications. **Quantum Computers and Computing**, v. 7, n. 1, p. 17–26, 2007.
- 60 GROVER, L. K. A framework for fast quantum mechanical algorithms. In: **Proceedings of the Thirtieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing**. New York, NY, USA: ACM, 1998. (STOC ’98), p. 53–62. ISBN 0-89791-962-9.
- 61 GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for estimating the median. **arXiv preprint quant-ph/9607024**, 1996.
- 62 GROVER, L. K. Quantum telecomputation. **arXiv preprint quant-ph/9704012**, 1997.
- 63 ABRAMS, D. S.; WILLIAMS, C. P. Fast quantum algorithms for numerical integrals and stochastic processes. **arXiv preprint quant-ph/9908083**, 1999.

64 BRASSARD, G. *et al.* An optimal quantum algorithm to approximate the mean and its application for approximating the median of a set of points over an arbitrary distance. **arXiv preprint quant-ph/1106.4267**, 2011.

65 WILLIAMS, C. **Explorations in Quantum Computing**. Springer London, 2010.

APÊNDICE A – ESTIMAÇÃO QUÂNTICA DE MÉDIA

O Algoritmo 1 utiliza uma seleção de limiar iterativa, onde são necessárias sub-rotinas para os cálculos da mediana e da média do histograma de uma imagem. O cálculo destas duas medidas estatísticas vêm sendo estudado a partir de sua perspectiva computacional e existem trabalhos abordando formas de realizar suas estimativas por meio de algoritmos quânticos de forma eficiente (61, 62, 60, 63, 64).

A ideia básica apresentada por Grover (60) consiste na construção de um operador de rotação $U_{\langle f \rangle}$. Este operador depende dos valores da função $f : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow [0, 1]$ de modo que:

$$|\psi_{\langle f \rangle}\rangle = U_{\langle f \rangle}|00\dots 0\rangle = \langle f \rangle|00\dots 0\rangle + \dots, \quad (\text{A.1})$$

sendo que a média da função f , é dada por $\langle f \rangle$ e a ação da operação $U_{\langle f \rangle}$ consiste em transferir o valor médio de f para a componente $|00\dots 0\rangle$ da superposição $|\psi_{\langle f \rangle}\rangle$.

Uma vez calculado o histograma da imagem considera-se sua versão normalizada

$$h(g_k) = \frac{n_k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (\text{A.2})$$

Em que, n_k representa a fração do número de píxeis N da cor g_k . Para encontrar o valor médio de $0 \leq h(j) \leq 1$ para $k = 0, 1, \dots, L-1$ pode-se definir, como mostrado em (65), a operação de um qubit mostrada na Equação (A.3) que depende do valor de $h(g_k)$.

$$R_{h_k} = \begin{pmatrix} h(g_k) & \sqrt{1-h(g_k)^2} \\ \sqrt{1-h(g_k)^2} & -h(g_k) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Usando R_{h_k} é possível construir o operador $U_{\langle h \rangle}$ como segue (65):

$$U_{\langle h \rangle} = (H^{\otimes q} \otimes I)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{2^q-1} |k\rangle\langle k| \otimes R_{h_k} \right) \cdot (H^{\otimes q} \otimes I), \quad (\text{A.4})$$

sendo,

$$\sum_{k=0}^{2^q-1} |k\rangle\langle k| \otimes R_{h_k} = \begin{pmatrix} R_{h_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{h_{2^q-1}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Dessa forma, pode-se usar o operador de amplificação de amplitude $U_{\langle h \rangle}$ para aumentar a acurácia do algoritmo aumentando, uma quantidade previamente conhecida, a probabilidade de se medir o estado $|00\dots 0\rangle$.

Realizando $O(M)$ operações pode-se estimar $\langle h \rangle$ com precisão $\frac{1}{\sqrt{M}}$. Com a escolha de $M = \varepsilon^2$, pode-se realizar a estimativa da média com $O(\frac{1}{\varepsilon})$ repetições e precisão ε o que é um ganho quadrático em relação a um método clássico de amostragem. Usando um processo semelhante ao de estimação da média Grover (61) também propôs um algoritmo para a estimar da mediana com o mesmo número $O(\frac{1}{\varepsilon})$ repetições e mesma precisão ε .

APÊNDICE B – ARTIGOS DECORRENTES DA TESE

B.1 Artigos

Nesta seção são apresentados os artigos decorrentes deste trabalho.

B.1.1 On the Role of the Four-Qubit State in Two-Qubit Gate Teleportation

- Autores: Paulo Regis M. Sousa, Fernando V. Mendes e Rubens V. Ramos.
- Periódico: Quantum Information Processing
- Estado atual: publicado
- Data de publicação: 02/02/2016
- Volume: 15
- Edição: 5
- Páginas: 2125 – 2135.

On the role of the four-qubit state in two-qubit gate teleportation

P. R. M. Sousa¹ · F. V. Mendes¹ · R. V. Ramos¹

Received: 28 March 2014 / Accepted: 24 August 2015
© Springer Science+Business Media New York 2016

Abstract The full analysis of quantum protocols requires the knowledge of the role of quantum states, bases of measurement and quantum gates involved. In what concerns the famous two-qubit quantum gate teleportation protocol, the role of the basis of measurement was considered in a recent work by Mendes and Ramos. In this work, we analyze the role of the four-qubit state used as resource. We show that the quantum two-qubit gate teleportation divides the set of pure four-qubit states in two classes. For one class, deterministic and probabilistic teleportation can be achieved, while for the other class, probabilistic remote two-qubit gate preparation is achieved.

Keywords Two-qubit gate teleportation · Entanglement · Four-qubit states

1 Introduction

Two-qubit quantum gate teleportation is an important quantum protocol proposed by Gottesmann and Chuang [1]. It can be used, for example, in protocols for non-local gate implementation [2]. In their work, Gottesmann and Chuang proved that any Clifford gate is deterministically teleported by a quantum teleportation scheme employing a pair of Bell states as resource and Bell basis at the measurements, what results in error correction based on Pauli gates. More recently, the role of the basis of measurement

✉ R. V. Ramos
rubens.viana@pq.cnpq.br

P. R. M. Sousa
pauloregisms@gmail.com

F. V. Mendes
fernandovm@gmail.com

¹ Laboratory of Quantum Information Technology, Department of Teleinformatic Engineering - Federal University of Ceara - DETI/UFC, C.P. 6007, Campus do Pici, Fortaleza, CE 60455-970, Brazil

in two-qubit quantum gate teleportation was investigated, and the conditions for a deterministic teleportation, including gates out of Clifford group, were established [3]. In this work, however, the quantum state used as resource was still a pair of Bell states, like proposed in [1]. In the present work, we analyze the two-qubit quantum teleportation protocol using as resource a general pure four-qubit state. We show that the quantum circuit used for two-qubit gate teleportation divides the set of pure four-qubit states in two classes, named Class 1 and Class 2. Four-qubit states from Class 1 permit deterministic and probabilistic teleportation, while four-qubit states from Class 2 permit the realization of a probabilistic remote two-qubit gate preparation: The output state is the action of a two-qubit gate (that depends on the four-qubit state used) in a quantum state that also depends on the four-qubit state used as well on the two-qubit state at the input. Some examples using four-way entangled four-qubit states found in the literature are presented.

The present work is outlined as follows: In Sect. 2, the Υ matrix, that is responsible for the definition of the gate to be teleported and which type of quantum protocol is achieved (deterministic or probabilistic teleportation, or probabilistic remote state preparation), is introduced; in Sect. 3, the two-qubit gate teleportation using four-qubit states from Class 1 is described. In Sect. 4, the remote two-qubit gate preparation using four-qubit states from Class 2 is described. In Sect. 5, some examples are presented; at last, the conclusions are drawn in Sect. 6.

2 The matrix Υ

Let $|\sigma\rangle$ be a general four-qubit state,

$$|\sigma\rangle = \sum_{k,l,m,n=0}^1 \sigma_{klmn} |klmn\rangle = \sum_{i=0}^{15} \sigma_i |i\rangle. \tag{1}$$

Using the coefficients of $|\sigma\rangle$, one can get the Υ matrix

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_8 & \sigma_9 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_{10} & \sigma_{11} \\ \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_6 & \sigma_7 & \sigma_{14} & \sigma_{15} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Considering the usage of (1) in the quantum circuit for two-qubit gate teleportation, one obtains two different situations: (1) $2\Upsilon = U_\sigma$, where U_σ is a unitary matrix. In this case, the state $|\sigma\rangle$ is said to belong to Class 1. (2) Υ is not normal ($[\Upsilon, \Upsilon^\dagger] \neq 0$) or Υ is normal but 2Υ is not unitary. In this case, the state $|\sigma\rangle$ is said to belong to Class 2. For the last, instead of a teleportation, a remote two-qubit gate preparation is achieved. The determinant of Υ is an invariant [4] that can be used (together with other invariants) to define classes of four-qubit states. For example, according to the classification given in [5], there are 16 classes: 1, 2a, 2b, 2c, 2d, 3a, 3b, 3c, 3d, 3e, 3f, 4a, 4b, 4c, 4d and 5. Table 1 shows, for each one of these classes, the canonical state, the four-way entanglement of the canonical state measured by π_4 [6], the type of Υ matrix and the value of $\det(\Upsilon)$.

Table 1 Classes of four-qubit states according to [5]: (1) Canonical states; (2) Type of Υ matrix of the canonical state ($U-2\Upsilon$ is unitary, $N-\Upsilon$ is normal but 2Υ is not unitary, $\tilde{N}-\Upsilon$ is not normal), (3) four-way entanglement π_4 , (4) determinant of Υ

Class	State	π_4	Type	$\det(\Upsilon)$
1	$ \psi_1\rangle = (0000\rangle + 0111\rangle)/2^{1/2}$	0	\tilde{N}	0
2a	$ \psi_{2a}\rangle = (0000\rangle + 1111\rangle)/2^{1/2}$	1	N	0
2b	$ \psi_{2b}\rangle = (0000\rangle + 0101\rangle + 1010\rangle - 1111\rangle)/2$	1	U	1/16
2c	$ \psi_{2c}\rangle = (0000\rangle + 0110\rangle + 1001\rangle - 1111\rangle)/2$	1	N	1/16
2d	$ \psi_{2d}\rangle = (0001\rangle + 0010\rangle + 0100\rangle + 1000\rangle + 2^{1/2} 1111\rangle)/6^{1/2}$	1	N	0
3a	$ \psi_{3a}\rangle = (0000\rangle + 0101\rangle + 1010\rangle + 1111\rangle)/2$	0	U	-1/16
3b	$ \psi_{3b}\rangle = (0000\rangle + 0011\rangle + 1100\rangle + 1111\rangle)/2$	0	U	1/16
3c	$ \psi_{3c}\rangle = (0000\rangle + 0101\rangle + 0110\rangle + 1001\rangle + 1010\rangle + 1111\rangle)/6^{1/2}$	0.1975	N	0
3d	$ \psi_{3d}\rangle = (0000\rangle - 0011\rangle + 0101\rangle + 0110\rangle + 1001\rangle - 1010\rangle + 1100\rangle + 1111\rangle)/8^{1/2}$	1	\tilde{N}	0
3e	$ \psi_{3e}\rangle = (0000\rangle + 0101\rangle - 2 0110\rangle + 1001\rangle + 1010\rangle + 1111\rangle)/3$	0.6243	\tilde{N}	-1/27
3f	$ \psi_{3f}\rangle = (0000\rangle + 0011\rangle - 2 0101\rangle + 0101\rangle + 1100\rangle + 1111\rangle)/3$	0.6243	\tilde{N}	1/27
4a	$ \psi_{4a}\rangle = (0000\rangle + 0011\rangle + 3 0101\rangle + 0101\rangle - 2 1100\rangle + 1111\rangle)/17^{1/2}$	0.1217	\tilde{N}	-5/289
4b	$ \psi_{4b}\rangle = (0000\rangle + 2 0011\rangle + 0101\rangle + 1010\rangle + 2 1100\rangle + 1111\rangle)/12^{1/2}$	0.0625	N	1/48
4c	$ \psi_{4c}\rangle = (0000\rangle + 0011\rangle + 2 0101\rangle + 1100\rangle + 1111\rangle)/12^{1/2}$	0.0625	N	-1/48
4d	$ \psi_{4d}\rangle = (2 0000\rangle - 0011\rangle - 0101\rangle + 1010\rangle + 1100\rangle + 1111\rangle)/3$	0.6243	\tilde{N}	0
5	$ \psi_5\rangle = (0000\rangle + 0011\rangle + 0101\rangle + 0101\rangle + 2 1100\rangle + 1111\rangle)/12^{1/2}$	0.0560	\tilde{N}	0

3 Teleportation of two-qubit quantum gates: 2Υ is unitary

The scheme for teleportation of two-qubit quantum gates considering a general four-qubit state is shown in Fig. 1.

The four-qubit state $|\sigma\rangle$ carries the entanglement required for the teleportation protocol. Following the procedure used in [3], after some algebra one can get the following output state before error correction

$$|\psi_o\rangle = \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{2} U_T \Upsilon \beta_{jk} |\psi_{AB}\rangle \tag{3}$$

$$\beta_{jk} = \beta_j \otimes \beta_k = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \langle \beta_j | 00 \rangle & \langle \beta_j | 10 \rangle \\ \langle \beta_j | 01 \rangle & \langle \beta_j | 11 \rangle \end{bmatrix} \otimes \sqrt{2} \begin{bmatrix} \langle \beta_k | 00 \rangle & \langle \beta_k | 10 \rangle \\ \langle \beta_k | 01 \rangle & \langle \beta_k | 11 \rangle \end{bmatrix}. \tag{4}$$

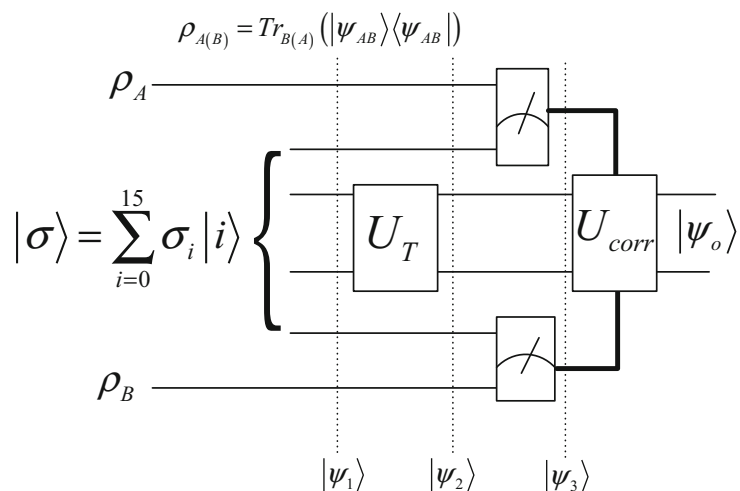
In (3)–(4), $\{|\beta_0\rangle, |\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, |\beta_3\rangle\}$ is the basis of measurement used. The newness in the present work when compared to [3] is the presence of the matrix Υ discussed in Sect. 2. In this section, we consider the situation where $\Upsilon = 1/2U_\sigma$ (half of a unitary matrix). In this case, one has

$$|\psi_o\rangle = \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{4} U_T U_\sigma \beta_{jk} |\psi_{AB}\rangle, \tag{5}$$

and a successful teleportation is carried out if

$$\begin{aligned} |\psi_o\rangle &= \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{4} U_T U_\sigma \beta_{jk} |\psi_{AB}\rangle = \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{4} \left(U_T U_\sigma \beta_{jk} U_\sigma^\dagger U_T^\dagger \right) U_T U_\sigma |\psi_{AB}\rangle \\ &= \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{4} (V_j \otimes V_k) U_T U_\sigma |\psi_{AB}\rangle, \end{aligned} \tag{6}$$

Fig. 1 Quantum circuit for teleportation of a two-qubit quantum gate using a general four-qubit state



where V_j and V_k are single-qubit gates. Applying the error correction $U_{\text{corr}} = (V_j^\dagger \otimes V_k^\dagger)$, one gets as output state $U_T U_\sigma |\psi_{AB}\rangle$. Equation (13) makes clear the role of the four-qubit state in the final result of the teleportation: *The teleported gate is $U_T U_\sigma$ where $U_\sigma = 2\Upsilon$ depends on the four-qubit state.* Equation (13) also gives us another point of view about the two-qubit gate teleportation: One can make $U_T = I$ (identity) and get a desired quantum gate teleportation by choosing the appropriate four-qubit state. The probability of success of the teleportation will depend on the basis of measurement used, as explained by Theorem 1 of [3]. Hence, hereafter we will consider $U_T = I$.

One can easily note that the four-qubit state required for teleportation of the gate U_σ is the state

$$|\sigma\rangle_{1234} = (I \otimes U_\sigma \otimes I) \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right). \tag{7}$$

According to KAK decomposition [7], one has that

$$U_\sigma = (U_A \otimes U_B) U_{NL} (U_C \otimes U_D) \tag{8}$$

$$U_{NL} = e^{i(\theta_x \sigma_{XX} + \theta_y \sigma_{YY} + \theta_z \sigma_{ZZ})}, \tag{9}$$

where U_A, U_B, U_C and U_D are local single-qubit gates, U_{NL} is the non-local part, and $\sigma_{jj} = \sigma_j \otimes \sigma_j$ ($j = X, Y, Z$) is the tensor product of two Pauli matrices. The following statements follow directly from (7)–(9):

1. The four-way entanglement of $|\sigma\rangle$, measured by π_4 , depends only on the non-local part of U_σ . In particular, if the four-qubit state $|\sigma\rangle$ has zero four-way entanglement, then the gate U_σ has $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$, and, hence, it is separable in the tensor product of two single-qubit gates.
2. According to Theorem 1 in [3], a required condition for deterministic teleportation is U_σ to have the angles θ_x, θ_y and θ_z equal to 0 or $(2k + 1)\pi/4$ (k is an integer number). However, in this situation (except in the cases where $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ and the swap family: $\theta_x = \theta_y = \theta_z = k\pi/4$), $|\sigma\rangle$ is maximally entangled ($\pi_4 = 1$); hence, a necessary (but not sufficient) condition for deterministic teleportation of U_σ is that it comes from a maximally four-way entangled state. Observing Table 1, one can note that the state $|\psi_{2b}\rangle$ permits a deterministic teleportation. On the other hand, as it will be seen later, a maximally four-way entangled state does not always provide a deterministically teleportable quantum gate U_σ . Furthermore, one can also note from (7) or alternatively from (2) that, if U_σ is unitary then $\rho_{14} = \text{Tr}_{23}(\sigma_{1234}) = \rho_{23} = \text{Tr}_{14}(\sigma_{1234}) = I/4$ (I is the identity matrix) that can be true or not for a maximally four-way entangled four-qubit state.

The case $\Upsilon = 1/2 U_\sigma$ is the classical case considered in [1], where the four-qubit state is the tensor product of two Bell states $|\sigma\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/2^{1/2} \otimes (|00\rangle + |11\rangle)/2^{1/2}$, what makes $U_\sigma = I$ (identity gate). In this case, if $U_T = I$ in Fig. 1, then one has the two-qubit teleportation. Otherwise, the gate teleported is U_T via the state $(I \otimes U_T \otimes I) (|00\rangle + |11\rangle)/2^{1/2} \otimes (|00\rangle + |11\rangle)/2^{1/2}$.

4 Probabilistic remote two-qubit quantum gate preparation: 2Υ is not unitary

When 2Υ is not unitary, the quantum circuit in Fig. 1 does not realize a two-qubit quantum gate teleportation since the output state is not the application of a two-qubit quantum gate U in the input state. In order to analyze which protocol is realized by the quantum circuit in Fig. 1, one should first note that there are two different situations for Υ . In the first situation, 2Υ is not unitary but Υ is normal; hence, $\Upsilon = WDW^\dagger$, where W is a unitary matrix, and D is a diagonal matrix whose entries are the eigenvalues of Υ . In the second situation, Υ is not normal. In this case, applying the polar decomposition, one gets $\Upsilon = UH$, where U is unitary, and H is Hermitean. Now, the Hermitean matrix is decomposed as $H = QDQ^\dagger$, where Q is unitary, and D is a diagonal matrix whose entries are the eigenvalues of H . Thus, $\Upsilon = UQDQ^\dagger = W D Q^\dagger$. Since the first situation is a particular case of the second situation, we will consider only the last. Using (3) again with $U_T = I$, one has

$$|\psi_o\rangle = \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{2} \frac{\Upsilon\beta_{jk} |\psi_{AB}\rangle}{\sqrt{\langle\psi_{AB}|\beta_{jk}^\dagger \Upsilon^\dagger \Upsilon \beta_{jk} |\psi_{AB}\rangle}} = W \sum_{j,k=0}^3 \frac{1}{4} |\psi_o^{jk}\rangle \tag{10}$$

$$|\psi_o^{jk}\rangle = \left(\frac{\lambda_0 \langle 00| V_{jk} Q^\dagger |\psi_{ab}\rangle |00\rangle + \lambda_1 \langle 01| V_{jk} Q^\dagger |\psi_{ab}\rangle |01\rangle + \lambda_2 \langle 10| V_{jk} Q^\dagger |\psi_{ab}\rangle |10\rangle + \lambda_3 \langle 11| V_{jk} Q^\dagger |\psi_{ab}\rangle |11\rangle}{\sqrt{|\lambda_0 \langle 00| V_{jk} Q^\dagger |\psi_{ab}\rangle|^2 + |\lambda_1 \langle 01| V_{jk} Q^\dagger |\psi_{ab}\rangle|^2 + |\lambda_2 \langle 10| V_{jk} Q^\dagger |\psi_{ab}\rangle|^2 + |\lambda_3 \langle 11| V_{jk} Q^\dagger |\psi_{ab}\rangle|^2}} \right) \tag{11}$$

In (10), λ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) are the eigenvalues of H and $V_{jk} = Q^\dagger \beta_{jk} Q$. Moreover, using (2), one has that $\text{Tr}(\Upsilon \Upsilon^\dagger) = \text{Tr}(HH^\dagger) = 1$ and, hence, $\sum_i |\lambda_i|^2 = 1$. If Υ is normal, then $W = Q$ in (10)–(11) and λ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) are the eigenvalues of Υ .

Observing (10) and (11), one may note that the output state $W |\psi_o^{jk}\rangle$ is the application of the two-qubit quantum gate W , that depends on the four-qubit state used, in the quantum state $|\psi_o^{jk}\rangle$ that depends on the four-qubit state used, on the basis of measurement chosen and on the two-qubit input state. Hence, one may consider that the quantum circuit in Fig. 1 employing a four-qubit state that belongs to Class 2, realizes a probabilistic remote two-qubit gate preparation. In other words, keeping constant the basis of measurement, the four-qubit state used as resource and the two-qubit input state at the input, the output state will be, probabilistically, the application of W in at most sixteen different quantum states.

5 Examples

Initially, taking Υ normal but not (half of a) unitary, let us consider the following simplifications: (1) The Bell basis is used in the measurements and, hence, β_{jk} is the tensor product of two Pauli matrices. (2) U belongs to Clifford group. (3) The input state $|\psi_{ab}\rangle$ is chosen such that $U^\dagger |\psi_{ab}\rangle = |00\rangle$. Under those conditions, Eq. (11) becomes

Table 2 Output states (Eq. 12) according to the results of the measurements using the Bell basis

σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$
$I \otimes I$	$U 00\rangle$	$\sigma_Y \otimes I$	$iU 10\rangle$
$I \otimes \sigma_X$	$U 01\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_X$	$iU 11\rangle$
$I \otimes \sigma_Y$	$iU 00\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Y$	$-U 11\rangle$
$I \otimes \sigma_Z$	$U 00\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Z$	$iU 10\rangle$
$\sigma_X \otimes I$	$U 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes I$	$U 00\rangle$
$\sigma_X \otimes \sigma_X$	$U 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_X$	$U 01\rangle$
$\sigma_X \otimes \sigma_Y$	$iU 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Y$	$iU 01\rangle$
$\sigma_X \otimes \sigma_Z$	$U 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Z$	$U 00\rangle$

$$|\psi_0^{jk}\rangle = U \left(\frac{\lambda_0 \langle 00 | \sigma_{jk} | 00 \rangle |00\rangle + \lambda_1 \langle 01 | \sigma_{jk} | 00 \rangle |01\rangle + \lambda_2 \langle 10 | \sigma_{jk} | 00 \rangle |10\rangle + \lambda_3 \langle 11 | \sigma_{jk} | 00 \rangle |11\rangle}{\sqrt{|\lambda_0 \langle 00 | \sigma_{jk} | 00 \rangle|^2 + |\lambda_1 \langle 01 | \sigma_{jk} | 00 \rangle|^2 + |\lambda_2 \langle 10 | \sigma_{jk} | 00 \rangle|^2 + |\lambda_3 \langle 11 | \sigma_{jk} | 00 \rangle|^2}} \right). \tag{12}$$

Table 2 shows the possible output states when $\lambda_i \neq 0$ ($i = 0, \dots, 3$), according to the results of the measurements.

As can be noted in Table 2, the output state is not the teleportation of a unitary operation applied to the input state $|\psi_{ab}\rangle$. The output state is (ignoring the global phase), probabilistically, one of the states: $U|00\rangle$, $U|01\rangle$, $U|10\rangle$ and $U|11\rangle$, where U comes from the decomposition of Υ . Thus, the quantum protocol realized is the probabilistic remote action of U in the canonical basis. One may also note that error correction is not necessary. This happens because one cannot choose the state to be remote prepared; the result is probabilistic.

The second example to be considered is the following maximally entangled four-qubit state

$$|\xi\rangle = (|0000\rangle + |0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle) / \sqrt{8}. \tag{13}$$

For such state, one has

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow W D W^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\dagger \end{aligned} \tag{14}$$

Table 3 Output states (Eq. 15) according to the results of the measurements using the Bell basis

σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$
$I \otimes I$	$W 10\rangle$	$\sigma_Y \otimes I$	$iW 11\rangle$
$I \otimes \sigma_X$	$W 11\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_X$	$iW 10\rangle$
$I \otimes \sigma_Y$	$iW 11\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Y$	$-W 10\rangle$
$I \otimes \sigma_Z$	$W 10\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Z$	$iW 11\rangle$
$\sigma_X \otimes I$	$W 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes I$	$W 10\rangle$
$\sigma_X \otimes \sigma_X$	$W 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_X$	$W 11\rangle$
$\sigma_X \otimes \sigma_Y$	$iW 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Y$	$iW 11\rangle$
$\sigma_X \otimes \sigma_Z$	$W 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Z$	$W 10\rangle$

$$W|10\rangle = (|00\rangle - |11\rangle)/2^{1/2}; \quad W|11\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/2^{1/2}$$

Hence, (11) is reduced to

$$\begin{aligned}
 |\psi_0^{jk}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\times \left(\frac{(\langle 00|\beta_{jk}|\psi_{ab}\rangle + \langle 11|\beta_{jk}|\psi_{ab}\rangle)|10\rangle + (\langle 01|\beta_{jk}|\psi_{ab}\rangle + \langle 10|\beta_{jk}|\psi_{ab}\rangle)|11\rangle}{\sqrt{(|\langle 00|\beta_{jk}|\psi_{ab}\rangle + \langle 11|\beta_{jk}|\psi_{ab}\rangle|^2 + |\langle 01|\beta_{jk}|\psi_{ab}\rangle + \langle 10|\beta_{jk}|\psi_{ab}\rangle|^2)}} \right). \tag{15}
 \end{aligned}$$

Choosing again the Bell basis for measurements and $|\psi_{ab}\rangle = |00\rangle$, one gets the results as shown in Table 3.

As shown in Table 3, the remote action of W in only two states of the canonical basis is realized. This happens because Υ in (14) has only two nonzero eigenvalues. In general, states of the type $a|0000\rangle + b|0011\rangle + c|0101\rangle + d|0110\rangle + d|1001\rangle + c|1010\rangle + b|1100\rangle + a|1111\rangle$ [8] produce a normal Υ matrix.

Now, let us consider two cases where Υ is not normal. Initially, we consider once more the Bell basis is used at the measurements, the unitary matrix Q belongs to Clifford group and the input state $|\psi_{ab}\rangle$ is such that $Q^\dagger|\psi_{ab}\rangle = |00\rangle$. Under these conditions, (11) is of the form

$$|\psi_0^{jk}\rangle = W \left(\frac{\lambda_0 \langle 00|\sigma_{jk}|00\rangle |00\rangle + \lambda_1 \langle 01|\sigma_{jk}|00\rangle |01\rangle + \lambda_2 \langle 10|\sigma_{jk}|00\rangle |10\rangle + \lambda_3 \langle 11|\sigma_{jk}|00\rangle |11\rangle}{\sqrt{|\lambda_0 \langle 00|\sigma_{jk}|00\rangle|^2 + |\lambda_1 \langle 01|\sigma_{jk}|00\rangle|^2 + |\lambda_2 \langle 10|\sigma_{jk}|00\rangle|^2 + |\lambda_3 \langle 11|\sigma_{jk}|00\rangle|^2}} \right). \tag{16}$$

Observing (16), one can see the probabilistic remote preparation of the action of W in the canonical basis if $\lambda_i \neq 0$ ($i = 0, \dots, 3$). If some λ_i is zero, then the action of W in only part of the canonical basis is probabilistically remote prepared. There are not restrictions about W ; hence, it may belong or not to Clifford group.

At last, let us consider the four-qubit state [9]

Table 4 Output states (Eq. 19) according to the results of the measurements using the Bell basis

σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$	σ_{jk}	$ \psi_0^{jk}\rangle$
$I \otimes I$	$W 10\rangle$	$\sigma_Y \otimes I$	$iW 11\rangle$
$I \otimes \sigma_X$	$W 11\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_X$	$iW 10\rangle$
$I \otimes \sigma_Y$	$iW 11\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Y$	$W 10\rangle$
$I \otimes \sigma_Z$	$W 10\rangle$	$\sigma_Y \otimes \sigma_Z$	$-iW 11\rangle$
$\sigma_X \otimes I$	$W 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes I$	$-W 10\rangle$
$\sigma_X \otimes \sigma_X$	$W 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_X$	$-W 11\rangle$
$\sigma_X \otimes \sigma_Y$	$-iW 10\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Y$	$-iW 11\rangle$
$\sigma_X \otimes \sigma_Z$	$-W 11\rangle$	$\sigma_Z \otimes \sigma_Z$	$-W 10\rangle$

$$W|10\rangle = \frac{(|00\rangle - |11\rangle)}{2^{1/2}}; W|11\rangle = \frac{(|01\rangle + |10\rangle)}{2^{1/2}}$$

$$|\chi\rangle = (|0000\rangle - |0011\rangle - |0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle) / \sqrt{8}. \tag{17}$$

Such state has the following decomposition $\Upsilon = W D Q^\dagger$,

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^\dagger. \tag{18} \end{aligned}$$

Thus, (11) is rewritten as

$$\begin{aligned} |\psi_0^{jk}\rangle &= \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &\times \left(\frac{\langle 10 | V_{jk} Q^\dagger | \psi_{ab} \rangle |10\rangle + \langle 11 | V_{jk} Q^\dagger | \psi_{ab} \rangle |11\rangle}{\sqrt{|\langle 10 | V_{jk} Q^\dagger | \psi_{ab} \rangle|^2 + |\langle 11 | V_{jk} Q^\dagger | \psi_{ab} \rangle|^2}} \right) \tag{19} \end{aligned}$$

Choosing again the Bell basis for measurement and $|\psi_{ab}\rangle = |00\rangle$, one gets the results as shown in Table 4.

As can be seen in Table 4, the output state is the remote action of W in only two states ($|10\rangle$ and $|11\rangle$) of the canonical basis. At the output, one gets, with the same probability, one of the bell state $(|00\rangle - |11\rangle)/2^{1/2}$ or $(|01\rangle + |10\rangle)/2^{1/2}$.

6 Conclusions

In what concerns the role of the four-qubit state in the quantum circuit given in Fig. 1, one may define two classes of four-qubit states: Class 1: The set of four-qubit states for which $\Upsilon = 1/2U_\sigma$; Class 2: The set of four-qubit states for which Υ is normal but 2Υ is not unitary or Υ is not normal. The main characteristics of both classes are:

- Class 1:
1. The protocol realized by the quantum circuit in Fig. 1 is two-qubit gate teleportation. The basis of measurement is important to define the probability of success of the teleportation and the error correction.
 2. A deterministic teleportation can be achieved only if the four-qubit state used is maximally entangled.
 3. The quantum gate teleported is $U = 2\Upsilon$, and the output state is its application in the input two-qubit state.

Class 2:

1. The protocol realized by the quantum circuit in Fig. 1 is probabilistic remote two-qubit gate preparation. Such quantum gate, that can belong to Clifford group or not, depends on the decomposition of Υ .
2. The basis of measurement and the input two-qubit state are used to define the set of states that will be acted by the two-qubit gate prepared.
3. There is no error correction.

The two-qubit teleportation is a particular case of the two-qubit quantum gate teleportation. When one teleports the identity gate, one is realizing a two-qubit teleportation. This deterministic teleportation is only possible with a four-qubit state that belongs to class I (2Υ is unitary), more specifically, the tensor product of two Bell states. If one uses, for example, the four-qubit W state, $|W\rangle = |0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle$, the Υ matrix is normal but not unitary; hence, a probabilistic remote gate preparation is achieved.

Acknowledgments This work was supported by the Brazilian agencies CAPES and CNPq via Grant No. 303514/2008-6. Also, this work was performed as part of the Brazilian National Institute of Science and Technology for Quantum Information.

References

1. Gottesman, D., Chuang, I.L.: Quantum teleportation is a universal computational primitive. *Nature* **402**, 390 (1999)
2. Saha, D., Nandan, S., Panigrahi, P.K.: Local implementations of non-local quantum gates in linear entangled channel. *J. Quantum Inf. Sci.* **4**, 97 (2014)
3. Mendes, F.V., Ramos, R.V.: On the role of the basis of measurement in quantum gate teleportation. *Quantum Inf. Process.* (2015). doi:[10.1007/s11128-014-0898-4](https://doi.org/10.1007/s11128-014-0898-4)
4. Luque, J.-G., Thibon, J.-Y.: Polynomial invariants of four qubits. *Phys. Rev. A* **67**, 042303 (2003)
5. Zha, X.-W., Ma, G.-L.: Classification of four-qubit states by means of a stochastic local operation and the classical communication invariant. *Chin. Phys. Lett.* **28**(2), 020301 (2011)
6. Oliveira, D.S., Ramos, R.V.: Residual entanglement with negativity for pure four-qubit quantum states. *Quantum Inf. Process.* **9**, 497 (2010)

7. Tucci, R.R.: An introduction to Cartan's KAK decomposition for QC programmers (2005). [arXiv:quant-ph/0507171](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0507171)
8. Verstraete, F., Dehaene, J., De Moor, B., Verschelde, H.: Four qubits can be entangled in nine different ways. *Phys. Rev. A* **65**, 052112 (2002)
9. Yeo, Y., Chua, W.K.: Teleportation and dense coding with genuine multipartite entanglement. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 060502/1-4 (2006)

B.1.2 Improving the efficiency of quantum image processing by using a quantum state that maps all pixels having the same color

- Autores: Paulo Regis M. Sousa e Rubens V. Ramos.
- Periódico: Quantum Information Processing
- Estado atual: submetido.

Improving the efficiency of quantum image processing by using a quantum state that maps all pixels having the same color

Sousa, Paulo Regis Menezes · Ramos, Rubens
Viana

Received: date / Accepted: date

Abstract This work presents a new model of quantum image representation based on a quantum state that maps all pixels with the same color. This new model yields an improvement in the process of preparation and recovering of the quantum image, as well in some processing techniques like segmentation.

Keywords Quantum image processing · image representation · quantum search

1 Introduction

Different quantum image representations (QIR's) have been proposed in the literature [1–4], aiming not only the replication of classical algorithms, but also effectively creating new and more efficient ways to realize image processing.

Among the most famous quantum image representation models one can find the flexible representation for quantum images (FRQI) [1], multi-channel representation for quantum images (MCQI) [5], novel enhanced quantum representation (NEQR) [6], and color quantum image representation (CQIR) [7]. Each one of them has its own advantages when compared to the others. The FRQI model encodes the color information in a single qubit. Image recovery can be performed by estimating the amplitudes of probability of that qubits [8]. The MCQI representation, proposed in [5], is an extension of the FRQI model for color representation. It codes the three color channels, R, G and B, by using three qubits. The image retrieval in the FRQI and MCQI models is done by performed by estimating the amplitudes of probability of the qubits that code the color. In order to achieve this measurements in many copies of the image state are necessary. According to [5] the preparation process of both models have the same computational complexity $O(2^{4n})$.

Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, sn., Pici, bloco 725, Fortaleza, Ceará
Tel.: +55-85-3366-9467
Fax: +55-85-3366-9468
E-mail: pauloregisms@gmail.com
E-mail: rubens.viana@pq.cnpq.br

The FRQI model has significant importance for the area of quantum image processing because it presents a way to prepare a normalized state representing all information of color and position of all the pixels of an image, allowing the development of several strategies for image processing by quantum operations. The MCQI model follows the advancement started with the FRQI representation and adds a way to store the information of the three color channels R, G, and B with significantly fewer features when compared to a classic RGB image of the same size [9].

NEQR is a different form of representation for digital images proposed in 2013 by Zhang et al. [6]. This representation uses two state sequences to represent, respectively, the gray level and the coordinates of each pixel in the image. Unlike the FRQI model that used only one qubit for color representation, in this example eight qubits are used to store the gray levels in the range of 0 to 255. Thus in the NEQR model $q + 2n$ qubits are required for the representation of an $2^n \times 2^n$ image with a gray scale of 2^q levels.

The main difference of the NEQR model with respect to the FRQI is the distinction between the different shades of gray, since it uses states of the base to represent them, unlike the FRQI model that uses amplitudes of probability. This is the basis for all improvements in NEQR representation over FRQI. The complexity of its generation is $O(qn2^{2n})$ which gives it a quadratic gain over the complexity of the $O(2^{4n})$ model of the FRQI model.

2 New model for quantum image representation using a state that maps all pixels having the same color

The approaches discussed in the previous sections look for more efficient ways of processing images. The FRQI model uses the phase to decrease the amount of qubits required to store an image, however this makes the image retrieval probabilistic and it increases the complexity of some color-based operations [6]. On the other hand, the NEQR representation makes necessary the use of a larger number of qubits, however it has a lower complexity of preparation and it allows more complex operations.

In this work we propose a new quantum image representation model using a state that maps all pixels having the same color, hereafter named SCPM:

$$|I\rangle = |C\rangle_m |P\rangle_{n^2}. \quad (1)$$

The state $|C\rangle_m$ uses a m qubits sequence to code the color while the pixel positions are encoded in $|P\rangle_{n^2}$ using n^2 qubits, where n^2 is the total number of pixels in the image. Thus, the state used for image representation is:

$$|I\rangle = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{2^m-1} |c_i\rangle |p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle. \quad (2)$$

In (2) the register $|c_i\rangle$ carries the information of the i^{th} gray level and $|p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle$ receives 1 at each position p_k that contains the gray level i . Unlike the models presented before, this representation does not have a relation 1 to 1 between color and position, but rather 1 to many, in which each level of gray is directly related to all pixels having the same color.

An example can be seen in Fig. 1 (a) that presents a 3×3 grayscale image, Fig. 1 (b) shows a table in which each level of gray is related to each position in which it occurs and Fig. 1 (c) shows the state representing the image. In this case we used $m = 8$ to generate $2^8 = 255$ gray levels and $n^2 = 9$ qubits to represent the positions of the image.

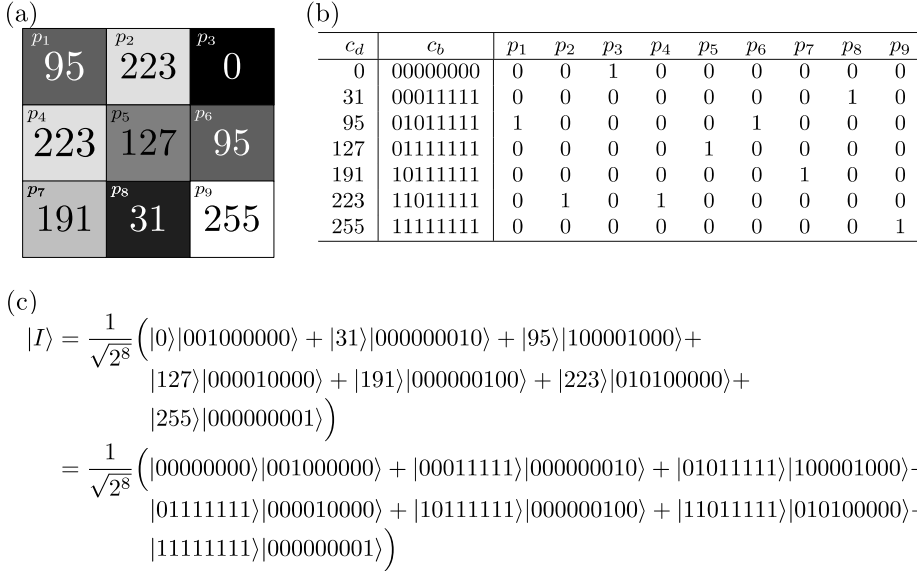


Fig. 1 (a) Image 3×3 in gray scale, (b) mapping table between colors and positions, (c) quantum state that represents the image.

Like the NEQR model, the SCPM uses the base states in a sequence of qubits to represent the pixel gray levels, rather than the single-qubit probability amplitude as in the FRQI model.

The use of orthogonal states to represent the different gray levels is the most significant alteration of the NEQR model with respect to the FRQI. However, unlike the NEQR model we will not associate the gray levels with the states representing the positions. Instead, we create a superposition of all gray levels of the selected scale and relate to them all positions in the image that contains this level without unnecessary redundancies.

In Fig. 1 (a) a gray scale with levels between 0 and 255 is used, so eight qubits are required to store gray level information. Thus, $m + n^2$ qubits is required to represent an image $n \times n$ with a scale of 2^m gray levels.

2.1 Quantum image preparation

In order to prepare the quantum state that represents the image, $m + n^2$ qubits are required, so the initial state is:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes m+n^2}. \quad (3)$$

From the initial state a superposition of m qubits that represents the 2^m levels of gray is created with Hadamard gates

$$|\psi_1\rangle = (H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})|\psi_0\rangle = (H|0\rangle)^{\otimes m} \otimes (I|0\rangle)^{\otimes n^2} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c=0}^{2^m-1} |c\rangle \otimes |0\rangle^{\otimes n^2}. \quad (4)$$

Equation (4) creates an intermediate state containing the necessary information on the grayscale used.

The next step is to associate the state in (4) with the position information of the pixels. For each pixel it is necessary a sub-operation, an oracle that will mark the qubit related to the position. This operation is shown in (5):

$$U_c = \left(\sum_{j=0, j \neq c}^{2^m-1} |j\rangle\langle j| \otimes I \right) + \left(|c\rangle\langle c| \otimes X \right) \quad (5)$$

in which $c = \{c_1 c_2 \dots c_m\}$, $c_k \in \{0, 1\}$, is a binary sequence representing the c^{th} gray level of a scale with 2^m levels. The operation U_c corresponds to a mapping function that, from a color, returns a marked position. Fig. 2 shows a quantum circuit capable of creating the representation shown in Fig. 1(a).

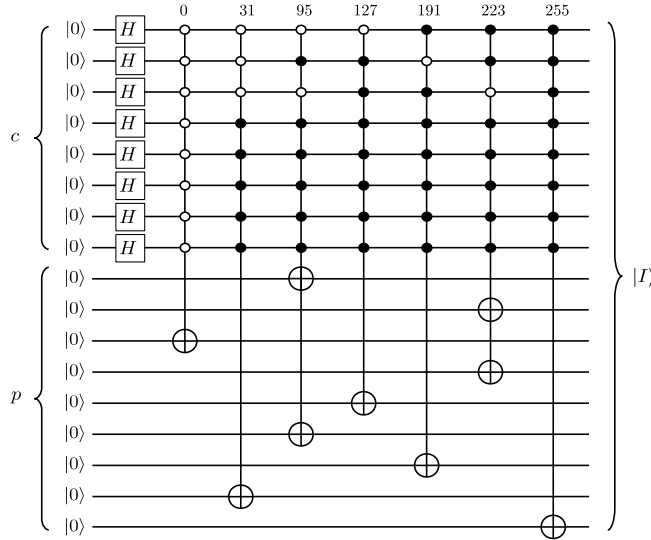


Fig. 2 Example of a grayscale image generation circuit, where c represents the binary value corresponding to the gray level and p_i the image positions described in a linear fashion.

All positions need to be marked, so to create the image representation n^2 operations U_c as shown in (6) is required:

$$U_I = \prod_{i=1}^{n^2} U_c^{(i)} |\psi_1\rangle. \quad (6)$$

Thus, the application of U_I in $|\psi_1\rangle$ makes the mapping of all the colors presented in the image with their respective positions. The final step results in the state presented in Equation (7).

$$\begin{aligned}
|I\rangle &= U_I |\psi_1\rangle \\
&= \prod_{i=1}^{n^2} U_c^{(i)} |\psi_1\rangle \\
&= \prod_{i=1}^{n^2} U_c^{(i)} \left(\frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} |j\rangle |0\rangle^{\otimes n^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \prod_{i=1}^{n^2} \sum_{j=0}^{2^m-1} U_c^{(i)} |j\rangle |0\rangle^{\otimes n^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c=0}^{2^m-1} |c\rangle |p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle
\end{aligned} \tag{7}$$

2.2 Complexity of preparation of the quantum image

It is easy to see that the complexity of preparation of $|\psi_1\rangle$ in (4) is $O(m + n^2)$. However, the U_I operation contains most of the work in the total creation operation, so this discussion will focus on the number of steps of the U_I operation presented in Equation (6).

In order to discover the complexity of the operation U_I , it is necessary to discuss the complexity of a single operation $U_c^{(i)}$. Each operation $U_c^{(i)}$ corresponds to the application of a m -controlled $U_c^{(i)}$ gate used to invert the i^{th} qubit of the sequence relative to the pixel positions. Thus, for the operation U_I , no more than n^2 m -controlled CNOT's are required as shown in Fig. 3.

As shown in [10] every k -controlled CNOT gate can be decomposed into $(4k-8)$ 2-controlled CNOT's, with presence of $k-2$ ancillary qubits. In other words, a CNOT k -controlled gate can be decomposed into no more than $O(k)$ basic operations. Thus, the complexity of each sub-operation $U_c^{(i)}$ is no more than $O(m)$ steps by adding the required $m-2$ qubits.

Thus, the complexity of the U_I operation, in order to set gray levels for all pixels in the image, is no more than $O(mn^2)$. This is the cost of preparing the quantum representation for a $n \times n$ image with a range of levels of 2^m , which shows a slight reduction in the complexity of preparation when compared to the NEQR model of complexity $O(mqn^2)$, where $q = \log_2 n$.

2.3 Image recovering

The main advantage of the NEQR model over FRQI is that the information can be retrieved accurately. This happens because the FRQI model needs to use a probabilistic recovery method, while the NEQR model uses measurements on the computational basis to recover the gray levels encoded in the quantum state [6].

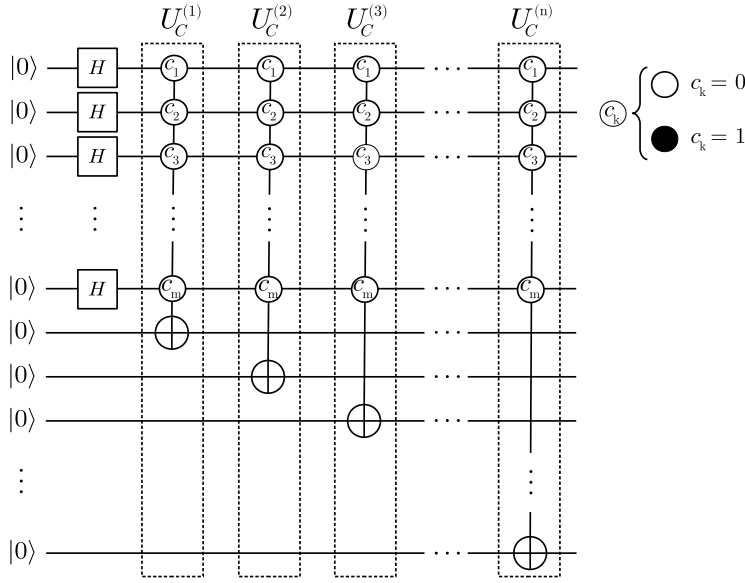


Fig. 3 Sub-operations for creating the quantum representation of an image.

For the SCPM model the information stored in the quantum state is retrieved through a measurement with the operator M_c

$$M_c = \sum_{c=0}^{2^m-1} |c\rangle\langle c| \otimes I^{\otimes n^2}. \quad (8)$$

When the measurement operator M_c is applied, the color information recorded in the first m qubits of the image state is retrieved. Then, projective measurements in the canonical basis is used to retrieve the information about of the pixels positions.

The operations shown above use the same strategy used in [6]. However, in this case there is not only retrieval of information from a single pixel. For each measurement performed all positions that share the same gray level are recovered. To make this clearer, one can observe Equation (9), it represents a quantum image with $2^2 = 4$ gray levels and $n^2 = 4$ positions:

$$|I\rangle = \frac{1}{2} \left(|00\rangle|0000\rangle + |01\rangle|0010\rangle + |10\rangle|0000\rangle + |11\rangle|1101\rangle \right) \quad (9)$$

The operator M_c related to Equation (9) is

$$M_c = \left(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| \right) \otimes I^{\otimes 4} \quad (10)$$

if the result of the color measurement is, for example, the binary sequence $(11)_2$, then the superposition collapses resulting in $|P\rangle = |1101\rangle$, indicating that pixels 1, 2 and 4 have the same color.

3 Efficient recovery of a quantum image using quantum search

The recovery of a quantum image is a simple process, since all that is necessary is the realization of measurements of the state that represents the image.

In models such as FRQI [11] and MCQI [5] it is necessary to estimate the amplitude probabilities of the state in order to retrieve the image, since the color information is stored in the amplitude of the superposition states, this type of recovery is referred as “probabilistic” recovery.

Other models such as NEQR [6], CQIR [7] and SCPM, encode the color information and position of the image directly in canonical states. Since these states are orthogonal to each other they can be perfectly distinguished allowing a precise retrieval of information. The recovery of this type will be referred to as “deterministic” recovering. Table 1 shows a comparison of the main characteristics of the models.

QIR	Color encoding	Complexity	Recovering
FRQI	1 angle vector \rightarrow grayscale	$O(2^{4n})$	Probabilistic
MCQI	3 angle vectors \rightarrow RGB	$O(2^{4n})$	Probabilistic
NEQR	qubits sequence \rightarrow grayscale	$O(\log_2 L \cdot n \cdot 2^{2n})$	Deterministic
CQIR	qubits sequence \rightarrow grayscale	$O(\log_2 L \cdot n \cdot 2^{2n})$	Deterministic
SCPM	qubits sequence \rightarrow grayscale	$O(\log_2 L \cdot 2^{2n})$	Deterministic

Table 1 Comparison of the characteristics of the main models of quantum image representation in which L represents the number of gray levels of the coding and it is considered an image of size $2^n \times 2^n$ (adapted from [9]).

For all models that are calculations of complexity of creation of the image states. However the complexity of the recovery of an image has not received much attention. By making measurements in the image state, one can actually retrieve the information coded, nevertheless we are interested in analyzing the accuracy and more efficient ways of retrieving information from parts of the image. Thus, we will use a quantum search algorithm to increase the probability of retrieving the information of a given pixel, color, or a given set of them, in the models mentioned in Table 1.

3.1 Searching in a quantum image

The Grover algorithm was initially proposed having as input an uniformly distributed superposition, however its efficient generalization for arbitrary distributions has already been demonstrated [12]. In this section it is shown how to use quantum search in image processing.

We first prepare the state containing the image representation, as it was presented in the Section 2.1, and the operator action U_I that appears in the equation

below can be seen in detail in Equation (7),

$$|I\rangle = U_I(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})|0\rangle^{\otimes m+n^2} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{c=0}^{2^m-1} |c\rangle|p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle \quad (11)$$

In a quantum image one can look for specific position or color elements. For each case it is possible to create a suitable oracle as shown in Fig. 4(a) (oracle that marks a color) and in Fig. 4(b) (oracle that marks a pixel position).

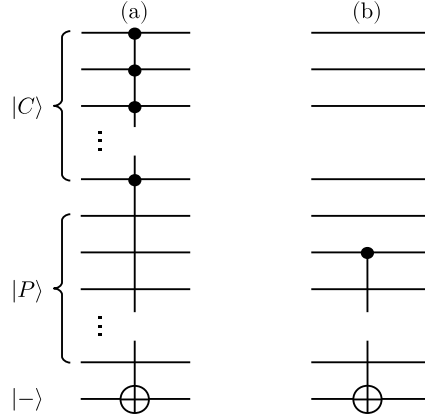


Fig. 4 Types of oracles for searching in a quantum image. (a) oracle for selection of a color, (b) oracle for selection of a position.

For the creation of a specific amplification operator for the image in which the search is being performed, the operation $U_I(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})$ is used. The proper operator can be seen in Equation (12):

$$U_I(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})(2|0\rangle\langle 0| - I)(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n^2})U_I. \quad (12)$$

In Fig. 5 one can check the elaboration of a quantum circuit by gathering the three previous steps. The Grover's operator G is given by

$$G = U_I(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n})(2|0\rangle\langle 0| - I)(H^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n})U_IU_f. \quad (13)$$

The amount of applications t of the G operator depends on the number of elements in the superposition, in this case 2^m . However, the parameter m defines the number of levels in a grayscale and it is equal to 8 for most common image processing applications, this makes the number of applications of the G operator practically invariable or with a variation depending on the amount of gray scale levels used and not the amount of pixels in the image.

To cite an example, in any grayscale image with $255 = 2^8$ levels, only $t = 12$ operator G applications will be required for the retrieval of all positions of a specific color.

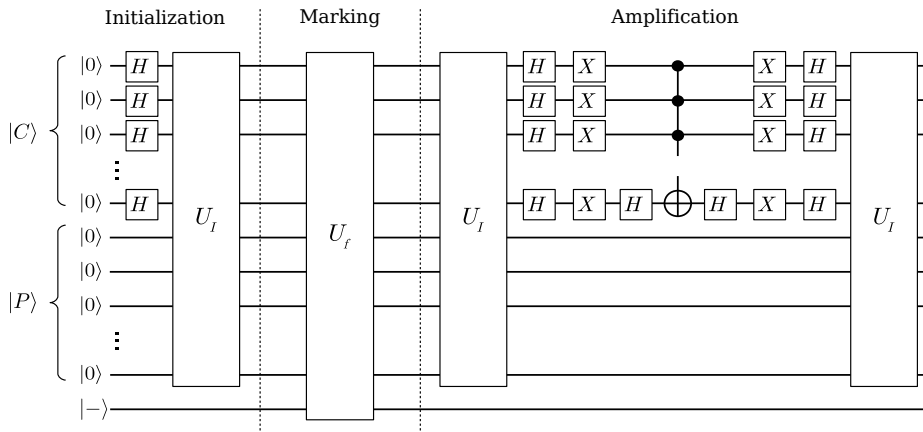


Fig. 5 Quantum search circuit for searching in a quantum image.

3.2 Recovering an image with $O(2^m)$ copies

In any model of quantum image representation it is necessary to make measurements in several copies of the image state, until the entire image can be reconstructed. Using the SCPM model and the Grover's search only 2^m copies of the image states are required. For example, one desires to know which pixels of the image has the color number 127. In order to solve this problem the Grover algorithm to find in the image state the element in the superposition for which the first eight qubits are $|01111111\rangle$. Hence only one image state is necessary for each color.

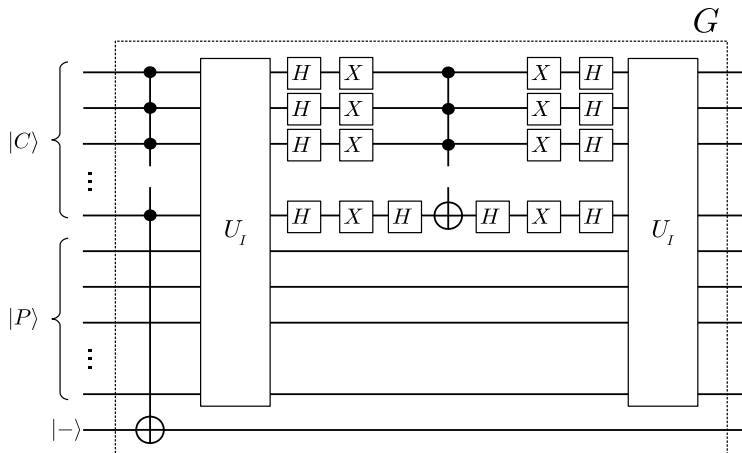


Fig. 6 Quantum quantum circuit search of the elements of a color a quantum image.

Since one can select the color to be retrieved, one can recover the image with $O(2^m)$ copies, since this is the number of gray levels of the image all positions for

each color are associated with the same state of the superposition that carries the color information.

This type of approach is not feasible for quantum image representation models similar to the FRQI, since the color information is stored in the amplitudes. Representation models such as NEQR and CQIR can also be used in conjunction with the Grover algorithm. However for these cases the number of elements in the search space is equal to the number of pixels in the image, hence it changes with the size of the image, for a $2^n \times 2^n$ image the search space has $O(2^{2n})$ and the number of iterations $t = \lfloor \frac{\pi 2^n}{4} \rfloor$.

4 Quantum imaging processing using the SCPM model

In this section discussed how image processing, including color, statistics and spatial operations, can be processing using the proposed representation, as well the benefits derived from its use.

4.1 Getting the negative of an image

One of the simplest and most basic operations of image processing involving intensity levels is the negative or complement. The operation representing this intensity transformation for a range of gray levels $[0, L - 1]$ is

$$s = T(r) = L - 1 - r \quad (14)$$

where r is the intensity level of a pixel before the transformation and s the value after processing.

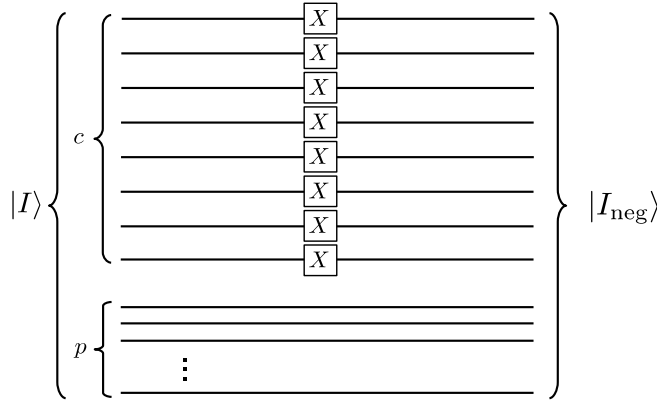


Fig. 7 Quantum circuit for obtaining the negative of an image.

To perform this operation using a quantum circuit, it is necessary to manipulate the qubits used to store the color information using X gate as shown in Fig. 7.

The X gates in the circuit are equivalent to NOT logical gate, so that $X|0\rangle = |1\rangle$ and $X|1\rangle = |0\rangle$. The result is that all colors are replaced by their complement

producing the equivalent of a photographic negative. This is a type of simple intensity transformation, but oftenly used for the enhancement of white or gray details in dark regions of images [13].

This is just one example of color operation that can be performed on the model, regardless of the pixel gray level individually. In fact, any similar color operations can be performed, either on the entire image, or only in a certain area.

4.2 Calculating the histogram of a quantum image

Histograms are the basis for many imaging techniques. The histogram of an image is basically a discrete function $h(r_k) = n_k$, where r_k is the k^{th} intensity level on a grayscale in an interval $[0, L - 1]$ e n_k is the number of pixels with intensity r_k [13].

Histograms are easy to calculate and provide useful statistics about images, so they are often used in applications such as image compression and segmentation. Some algorithms based on QIR's for calculating histograms can be found in [7] and [14], these algorithms use a quantum count algorithm [15], as shown in Fig. 8.

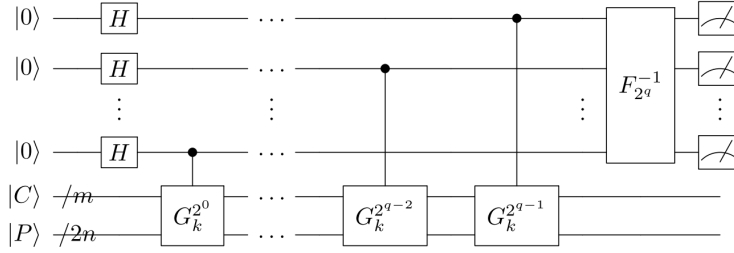


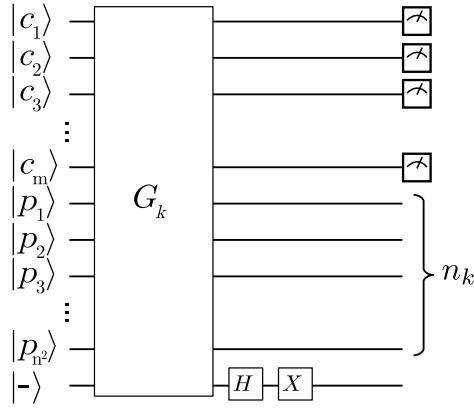
Fig. 8 Quantum circuit that implements an iteration of the histogram calculation of a quantum image [7].

An advantage of the SCPM model is that instead of using quantum counting only quantum search is necessary to calculate the histogram of a quantum image. For each color the Grover's gate is applied 12 times ($m = 8$), hence, the whole histogram is obtained after $t = 256 \times 12$ Grover's gate application.

Fig. 9 shows a quantum search operation to find the k^{th} gray level. Thus, the information for creating the histogram of the image can be obtained using a simple search to select one level of gray at a time followed by counting the number of positions in the selected color. Thus we obtain the histogram of the image with $O(n^2\sqrt{2^m})$ operations, in which n^2 is the number of pixels in the image and 2^m the number of levels of gray.

5 Image segmentation

The segmentation of images has the purpose of subdividing an image into regions or objects that compose it, so it is a widely used approach in applications such



$$n_k(|p_1 p_2 p_3 \dots p_{n^2}\rangle) = \sum_{i=0}^{n^2} p_i$$

Fig. 9 Quantum circuit for counting the number of positions of the image for the k^{th} gray level, where $|n_k\rangle$ is its number of occurrences and G_k is a search operator for level k .

as: automated inspection of electronic components, or in autonomous search of targets [13].

The most basic techniques of segmentation are based mainly on simple properties of intensity values, such as their similarity and their discontinuities. Some quantum applications have already been proposed for segmentation [16, 14, 17, 18] and in this section it will be presented how the SCPM model can be used in a segmentation algorithm in an efficient way.

5.1 Thresholding an image

The thresholding of a grayscale image is its conversion to an image only with gray levels within a range defined by a threshold. When only one threshold is used, the gray scale is divided in two parts and the image is called binary, with the representation containing only two levels of intensity.

This method of transforming intensities into images is an extremely simple and efficient way of segmenting an image due to its simplicity and low computational cost.

Selecting a threshold T a segmented image $g(x, y)$ can be represented as

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x, y) > T \\ 0 & \text{if } f(x, y) \leq T \end{cases} \quad (15)$$

in which $f(x, y)$ is the original image and $g(x, y)$ is the resulting binary image.

An example of a quantum circuit for thresholding a quantum image is given in [18] and an example of its use can be seen in Fig. 10. Here, the gate U_{CMP} is a quantum bit string comparator [19] operation is

$$U_{CMP}|a\rangle|b\rangle|0\rangle^{\otimes w}|0\rangle|0\rangle = |a\rangle|b\rangle|\psi\rangle|x\rangle|y\rangle. \quad (16)$$

As output the gate U_{CMP} has a, b which are the input state sequences being compared, w qubits part of its workspace, and the qubits x and y bearing information about the result of the comparison. For example, if $a = b$ then $x = y = 0$, if $a > b$ then $x = 1$ and $y = 0$ and if $a < b$ then $x = 0$ e $y = 1$ [19].

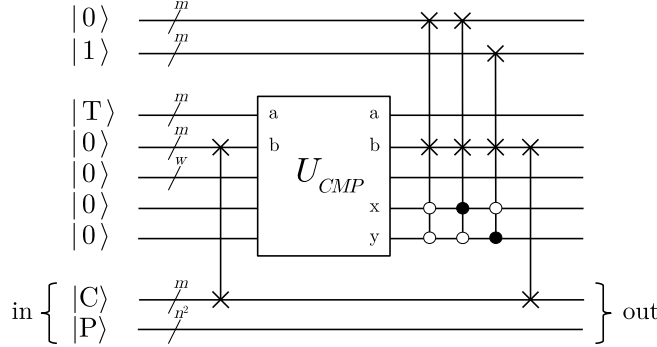


Fig. 10 Quantum circuit for the thresholding of an image. Here T is the selected threshold and U_{CMP} is the gate that compares the colors, represented by the state $|C\rangle$ and the threshold. x and y are the comparator outputs in which the comparison result is recorded [18].

According to the output of the comparator, the color in the image is replaced by the state $|0\rangle^{\otimes m}$ or $|1\rangle^{\otimes m}$, making the image a binary image. One problem with this approach is that the image could no longer be retrieved by the method described in Section 3, since selecting one of the colors would result in a superposition of states containing their positions. To retrieve the segmented image in this case it is necessary to prepare multiple copies of the state. By applying an appropriate measurement operator on each copy one can retrieve the color and position information of each pixel.

Another approach to create a binary image can be seen in Fig. 11, on which we use the same principle of the algorithm described in [18], but only for marking the states according to the threshold T . To the comparison circuit in Fig. 11(a) it is added a gate G_k that represents the application of a search algorithm that will select the k^{th} gray level of the image before a measurement is made in the registers that holds the image information, as well as in the one that receives the mark indicating whether the colors and read positions belong, for example, to an object, or the background of a scene.

In Fig. 11(b) we see an imaging circuit with only two levels. Once all positions P_k have been retrieved using the circuit in 11(a) the positions are summed according to b_k , this will group all the positions belonging to the background and the highlighted object. This information is then used to create the image again as the segmented image shown in the circuit output in Fig. 11(b).

5.2 Iterative threshold segmentation

When there is a clear distinction between the intensity distributions of the background and the objects present in an image one can use a very simple thresholding

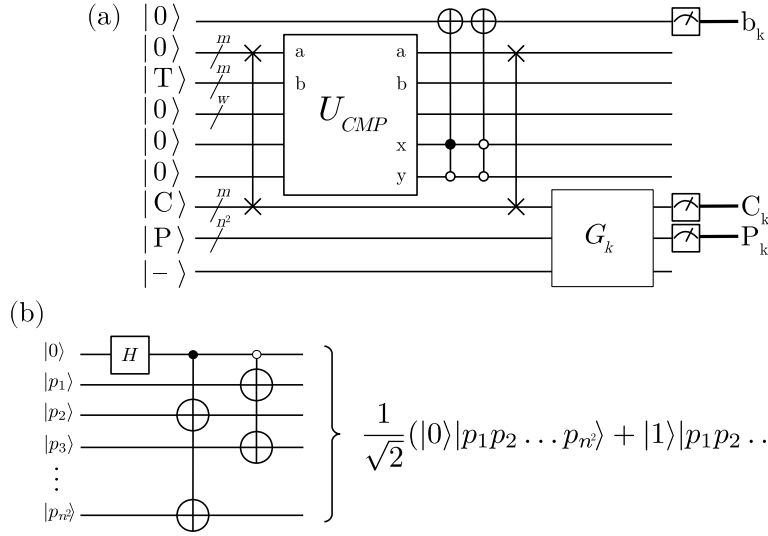


Fig. 11 Threshold circuits. Where in (a): T is the selected threshold and U_{CMP} is the gate that compares the color, represented by the state $|C\rangle$, and the threshold. x and y are the comparator outputs on which the comparison result is recorded. The G_k gate is a Grover operator prepared to search the k^{th} gray level. The result of the measurement of the first qubit b_k indicates whether or not the positions found belong to the bottom of the scene. In (b): Circuit for creating the new binary image.

technique to segment the image and separate the objects from the background. This is a type of threshold called “global” and the selection of the threshold to be used can be obtained iteratively until a suitable threshold is found. Thus, in order to perform a segmentation algorithm, one needs basically the calculation of the capacity of a histogram and the average of its intensities.

Algorithm 1 *Segmentation algorithm*

Input: *image*

Output: *segmented image*

1. Calculate the histogram of the image using the circuit presented in Section 4.2.
 2. Select the initial threshold T as the median of the histogram of the image, calculated using the algorithm described by Grover [20].
 3. Limit the image with the circuit described in Section 5.1 using the threshold T and thus generating a new image with two regions R_1 e R_2 .
 4. Calculate the mean intensities values m_1 and m_2 for the two regions respectively using the algorithm described by Grover[21].
 5. Calculate a new threshold: $T = \frac{m_1 + m_2}{2}$.
 6. Repeat steps 2 through 4 until the difference between the values of T in successive iterations is less than the default parameter ΔT .
-

6 Representation of an image in the standard RGBA

The SCPM was initially presented for the representation of grayscale images, but the extension of the model to the representation of colored images can be easily done.

It will be used as a reference for color coding the RGBA (red green blue alpha), this standard allows to display all the colors of the RGB (red green blue) system, but also allows the use of a transparency channel, an artifice used in image editing software with layers. The byte order in the “RGBA” scheme is understood as follows: a byte R for the red color, followed by a byte G for the green color, a byte B for the blue color, and a byte A for the transparency of the pixel.

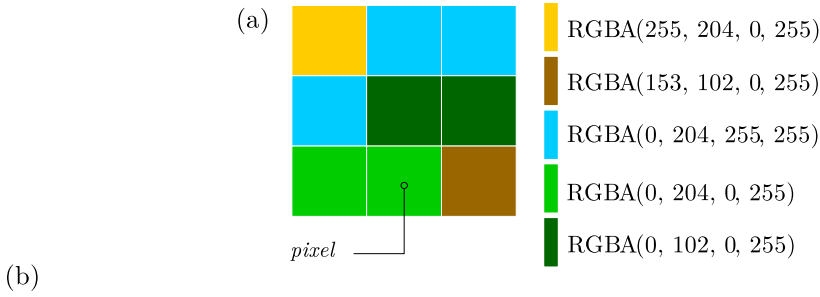
Starting from the same principle presented in Section 2.1 for creating the grayscale image, the quantum state that will represent the image will contain $m + 2 + n^2$ qubits. From the initial state a superposition will be created to represent the 2^{m+2} intensity levels as shown in Equation (17)

$$|\psi_1\rangle = (H^{\otimes m+2} \otimes I^{\otimes n^2})|0\rangle^{\otimes m+2+n^2}. \quad (17)$$

The increase of 2 qubits will be responsible for a four-fold increase in the number of states in the superposition if compared to Equation (4), this increase will be necessary to address the new color components presented in Equation (18) as l , where $\{R, G, B, A\}$ are referenced respectively as $\{0, 1, 2, 3\}$.

$$|I\rangle = U_I|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{l=0}^3 \sum_{c=0}^{2^m-1} |l\rangle|c\rangle|p_1 p_2 \dots p_{n^2}\rangle \quad (18)$$

Fig. 12 presents as an example a 3×3 image represented in the RGBA pattern with the transparency component unchanged.



$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{10}}} \left(|0\rangle|255\rangle|100000000\rangle + |1\rangle|255\rangle|100000000\rangle + |2\rangle|0\rangle|100000000\rangle + |3\rangle|255\rangle|100000000\rangle \right. \\ \left. |0\rangle|0\rangle|011100000\rangle + |1\rangle|204\rangle|011100000\rangle + |2\rangle|255\rangle|011100000\rangle + |3\rangle|255\rangle|011100000\rangle \right. \\ \left. |0\rangle|0\rangle|000011000\rangle + |1\rangle|102\rangle|000011000\rangle + |2\rangle|0\rangle|000011000\rangle + |3\rangle|255\rangle|000011000\rangle \right. \\ \left. |0\rangle|0\rangle|000000110\rangle + |1\rangle|204\rangle|000000110\rangle + |2\rangle|0\rangle|000000110\rangle + |3\rangle|255\rangle|000000110\rangle \right. \\ \left. |0\rangle|153\rangle|000000001\rangle + |1\rangle|102\rangle|000000001\rangle + |2\rangle|0\rangle|000000001\rangle + |3\rangle|255\rangle|000000001\rangle \right)$$

Fig. 12 (a) Image 3×3 RGBA, (b) image state.

6.1 Increased complexity of multichannel model

The change in the number of color channels changes the preparation presented previously because of the need to specify the intensity level for each color component, the complexity is then modified by a constant relative to the number of channels. This can be seen in Fig. 13, in which the same model of preparation previously used only for one level of intensity and presented in Section 2.1 is now replicated to the four components.

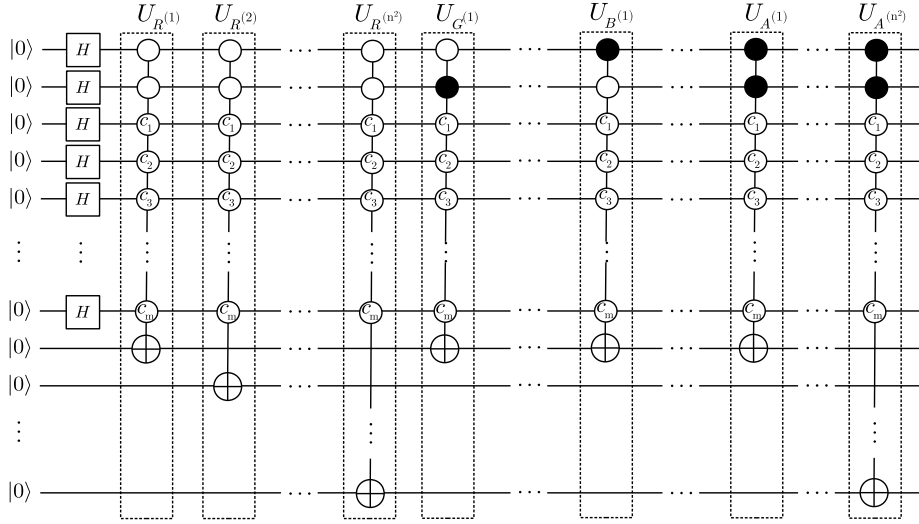


Fig. 13 Sub-operations for creating the quantum representation of an image in the RGBA standard.

The same idea applies to image retrieval by simply changing the search oracle by entering the color component to be retrieved. The use of the Grover algorithm is still independent of the size of the image, and the increase in the number of oracle applications required to find an element in the superposition is $t = \left\lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{2^{10}} \right\rfloor = 25$, an small increase in computational effort in view of the four-fold increase in the number of search space components.

7 Conclusion

In this work, a new quantum image representation model was presented. When compared with other models found in the literature, the proposed quantum image representation has lower complexity of preparation ($O(m2^{2n})$ gates while NEQR has $O(mn2^{2n})$ gates) and image recovery $O(2^m)$ copies of the state are necessary while NEQR requires $O(2^{2n})$. As reference, a grayscale is used with 2^m levels and an $2^n \times 2^n$ image. Furthermore, it is particularly suitable for calculation of the histogram of the image. In this case, conversely to other models it does not require quantum counting, only quantum search is necessary. The easier way to

obtain the histogram makes other quantum image processing tasks, like image segmentation, easier to be implemented in a quantum computer.

References

1. P. Le, F. Dong, K. Hirota, *Quantum Information Processing* **10**(1), 63 (2011). DOI 10.1007/s11128-010-0177-y. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-010-0177-y>
2. Y. Zhang, K. Lu, Y. Gao, K. Xu, *Quantum Information Processing* **12**(9), 3103 (2013). DOI 10.1007/s11128-013-0587-8. URL <https://doi.org/10.1007/s11128-013-0587-8>
3. J. Sang, S. Wang, Q. Li, *Quantum Information Processing* **16**(2), 42 (2016). DOI 10.1007/s11128-016-1463-0. URL <https://doi.org/10.1007/s11128-016-1463-0>
4. M. Abdolmaleky, M. Naseri, J. Batle, A. Farouk, L.H. Gong, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics* **128**(Supplement C), 121 (2017). DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2016.09.123>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402616311500>
5. B. Sun, A.M. Iliyasa, F. Yan, F. Dong, K. Hirota, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics* **17**(3), 404 (2013). DOI 10.20965/jaciii.2013.p0404. URL <https://www.fujipress.jp/jaciii/jc/jaciii001700030404/>
6. Y. Zhang, K. Lu, Y. Gao, M. Wang, *Quantum Information Processing* **12**(8), 2833 (2013). DOI 10.1007/s11128-013-0567-z. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-013-0567-z>
7. S. Caraiman, V. Manta, in *2012 16th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)* (2012), pp. 1–6
8. S.E. Venegas-Andraca, S. Bose, (2003), vol. 5105, pp. 137–147. DOI 10.1117/12.485960. URL <http://dx.doi.org/10.1117/12.485960>
9. F. Yan, A.M. Iliyasa, S.E. Venegas-Andraca, *Quantum Information Processing* **15**(1), 1 (2016). DOI 10.1007/s11128-015-1195-6. URL <https://doi.org/10.1007/s11128-015-1195-6>
10. P. Kaye, arXiv preprint quant-ph/0408173 (2004). URL <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0408173>
11. P.Q. Le, A.M. Iliyasa, F. Dong, K. Hirota, *A Flexible Representation and Invertible Transformations on Images on Quantum Computers* (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011), pp. 179–202. DOI 10.1007/978-3-642-11739-8_9. URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-11739-8_9
12. E. Biham, O. Biham, D. Biron, M. Grassl, D.A. Lidar, *Phys. Rev. A* **60**, 2742 (1999). DOI 10.1103/PhysRevA.60.2742. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.2742>
13. R. González, R. Woods, *Digital image processing* (Prentice Hall, 2002). URL <http://books.google.com.br/books?id=738oAQAAMAAJ>
14. S. Caraiman, V.I. Manta, *Theoretical Computer Science* **529**(0), 46 (2014). DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2013.08.005>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397513005835>
15. G. Brassard, P. Høyer, A. Tapp, in *Automata, Languages and Programming*, ed. by K.G. Larsen, S. Skyum, G. Winskel (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1998), pp. 820–831
16. H.S. Li, Z. Qingxin, S. Lan, C.Y. Shen, R. Zhou, J. Mo, *Quantum information processing* **12**(6), 2269 (2013)
17. A. Youssry, A. El-Rafei, S. Elramly, *Quantum Information Processing* **14**(10), 3613 (2015). DOI 10.1007/s11128-015-1072-3. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-015-1072-3>
18. S. Caraiman, V. Manta, *Quantum Information Processing* **14**(5), 1693 (2015). DOI 10.1007/s11128-015-0932-1. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-015-0932-1>
19. D.S. Oliveira, R.V. Ramos, *Quantum Computers and Computing* **7**(1), 17 (2007)
20. L.K. Grover, arXiv preprint quant-ph/9607024 (1996)
21. L.K. Grover, in *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (ACM, New York, NY, USA, 1998), STOC '98, pp. 53–62. DOI 10.1145/276698.276712. URL <http://doi.acm.org/10.1145/276698.276712>