UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO ALBERTO CAVALCANTE DE CASTRO

O MÉTODO BIJETIVO E A FÓRMULA DE CAYLEY SOBRE ÁRVORES

FORTALEZA
2018

FRANCISCO ALBERTO CAVALCANTE DE CASTRO

O MÉTODO BIJETIVO E A FÓRMULA DE CAYLEY SOBRE ÁRVORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Ceará em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C351m Castro, Francisco Alberto Cavalcante de.
O método bijetivo e a fórmula de Cayley sobre árvores. / Francisco Alberto Cavalcante de Castro. – 2018.
39 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

1. Teorema de Cayley. 2. Árvores. 3. Grafos. 4. Princípio bijetivo. I. Título.
CDD 510

FRANCISCO ALBERTO CAVALCANTE DE CASTRO

O MÉTODO BIJETIVO E A FÓRMULA DE CAYLEY SOBRE ÁRVORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Ceará em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides.

Aprovada em: 25/10/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Elena e José Bento, pelo amor, apoio e ajuda incondicional durante toda a sua vida.

À minha filha Maitê e à minha esposa Cleciane pelo amor, incentivo e apoio incondicional. Amigas amorosas de todas as horas.

Aos meus irmãos Alex Márcio e Joselena, por sempre estarem ao meu lado.

À minha sogra e meu sogro, Conceição e Geraldo, por terem me abraçado como um filho.

Ao Sr. Edmilson Moreira, que por toda a minha vida, foi pai e amigo.

Ao Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides, pela compreensão e excelente orientação.

Aos meus amigos que sempre me proporcionaram, além de lazer, momentos de reflexão e união.

Aos professores, Dr. Juvêncio Nobre e Dr. Mauricio Mota, do departamento de Estatística da Universidade Federal do Ceará, que marcaram minha vida, sendo base para minha formação como graduado e certamente, contribuíram de forma intensiva para a minha formação como ser humano.

Aos meus colegas de trabalho da Escola Ageu Romero e do Centro Integrado de Ensino de Paraipaba. Em especial aos professores Josielson Melo e Wilker Moreira, que além de amigos, foram meus dois influenciadores e exemplos no colegiado.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

À CREDE 2, de Itapipoca, e a toda gestão da Escola Ageu Romero, na pessoa do então diretor Hildeberto Lima, por me cederem tempo para a conclusão deste trabalho.

À gestão do Centro Integrado de Ensino de Paraipaba, em especial ao Diretor Itamar Marques, pela compreensão durante todo o curso.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo e Prof. Dr. Ulisses Lima Parente pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas. Em especial, ao meu grande amigo Daniel Mitchel.

Aos meus professores do ensino fundamental e do ensino médio pelo ensino de qualidade que me proporcionaram.

“De que me irei ocupar no céu, durante toda a eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?” (AUGUSTIN LOUIS CAUCHY)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar o Princípio Bijetivo como método de contagem e usá-lo para demonstrar a fórmula da Cayley sobre a quantidade de árvores rotuladas com um dado conjunto de vértices. Esse é um método interessante de contagem que consiste em observar que a existência de uma bijeção entre dois conjuntos finitos implica que tais conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos. Para entende-lo melhor, faremos um breve revisão sobre funções e, sem seguida, apresentamos várias aplicações. E para entender a fórmula de Cayley precisamos apresentar alguns conceitos introdutórios sobre Teoria dos Grafos. A prova dessa fórmula é feita usando o chamado Código de Prüfer, que também será apresentado aqui.

Palavras-chave: Teorema de Cayley. Árvores. Grafos. Princípio bijetivo.

ABSTRACT

The goal of this thesis if to present the Bijective Principle as a method for counting and use it to prove Cayley's formula about the number of labeled trees on a given set of vertices. This method is an interesting counting technic that relies on the fact that whenever there is a bijection between two finite sets, they must have the same number of elements. To understand this in details, we will first briefly review the concept of function and we shall present various applications. And to understand Cayley's formula we will need to present some introductory concepts from Graph Theory. The proof that Cayley's formula hold uses the so called Prüfer's Code, that we will also present here.

Keywords: Cayley's theorem. Trees. Graphs. Bijective principle.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho visa apresentar uma prova do teorema de Cayley sobre a quantidade de árvores geradoras de um grafo rotulado, assim como a resolução de outros problemas que envolvem o método do principio bijeitvo. Para isso, revisamos os conceitos de função, com foco em definir o conceito de bijeção para depois, introduzirmos o principio bijetivo. Ao longo do estudo, abordaremos cada um destes temas em capítulos diferentes, para enfim, introduzirmos o chamado Código de Prüfer e utilizá-lo para provar o teorema de Cayley.

No segundo capítulo serão introduzimos conceitos essenciais relacionados a funções, com ênfase na apresentação do conceito de bijeção.

No terceiro capítulo escreveremos sobre o Princípio Bijetivo como método de contagem. Este método é apresentado por meio de aplicações, e também é utilizado na resolução de situações problema.

No quarto capítulo introduziremos as principais definições e propriedades sobre grafos, para que possamos entender o enunciado do Teorema de Cayley. Grafos são estruturas combinatórias que possuem inúmeras aplicações, por exemplo, na ciência da computação e no estudo de redes complexas, inclusive redes sociais. O objetivo aqui é apresentar apenas os conceitos básicos, como a definição de árvore geradora e grafo rotulado, haja vista que esse conhecimento é essencial para o estudo aqui apresentado.

No quinto capítulo, faremos uma apresentação do Código de Prüfer, que é usado para codificar a estrutura de uma árvore com n vértices em uma sequência de n-2 naturais de 1 até n. Mostramos como codificar e decodificar tais árvores para, enfim, utilizá-lo juntamente com todos os conhecimentos obtidos nos capítulos anteriores para provar a fórmula de Cayley. Apresentamos também algumas variações e generalizações do Teorema de Cayley.

2 FUNÇÃO BIJETIVA

Neste capítulo, admitiremos que o leitor possui conhecimento prévio de teoria dos conjuntos e suas operações elementares. Introduziremos a linguagem de função.

Uma função f é uma lei que para cada elemento x em um conjunto A chamado domínio, faz corresponder exatamente um elemento, chamado de imagem de x por f e denotado por $f(x)$, em(pertencente) um conjunto B, chamado contradomínio. A formalização matemática para a definição de função é dada da seguinte maneira.

Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função $f: A \to B$ (lê-se f de A em B) é uma lei que associa a cada elemento $x \in A$, um único elemento $y = f(x) \in B$.

Também podemos pensar em um função como o conjunto de pares ordenados (x, y) pertencentes a $A \times B$, tais que y é o elemento associado a x. Em símbolos, em toda função, as duas condições abaixo devem ser satisfeitas:

$$(i)\ (x, y_1) \in f \text{ e } (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2\ ;$$

$$(ii)\ \forall \mathrm{x} \in A;\ \exists \mathrm{y} \in B:\ (x, y) \in f.$$

Uma função f é denominada injetiva quando, para todos $x_1 \in A$ e $\mathrm{x}_2 \in A$, temos que se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$. Isso é equivalente a dizer que se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Uma função f é denominada de *sobrejetiva* quando, para qualquer $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Quando uma função f é sobrejetiva e injetiva ao mesmo tempo a chamamos de função bijetiva e também dizemos que há uma relação biunívoca entre o domínio e o contradomínio da função.

Em outras palavras, todo elemento pertencente ao domínio de uma função bijetiva está relacionado a um único elemento de seu contradomínio e vice-versa.

Um exemplo de função bijetiva é a função $f: A \to A,$ que tem como sua lei de formação $f(x) = x,$ onde A é um conjunto não vazio qualquer. Nesta função, a imagem de cada elemento é o próprio elemento. Ela é chamada de função identidade.

Como exemplo de função não bijetiva temos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é conjunto dos números reais e $f(x) = x^2$ para todo x em $\mathbb{R}$. Em particular temos $f(-1) = (-1)^2 = 1$ e $f(1) = 1^2 = 1$. Ou seja, existem dois valores, tais que suas imagens são iguais, logo a função não é injetiva e, portanto, não é bijetiva. Note que usamos $f(-1)$ e $f(1)$ como exemplo particular e isso é suficiente para justificar o fato da função não ser injetiva. Porem, neste caso, existe uma infinidade de valores que evidenciam o fato da função não ser injetiva (e portanto, não ser bijetiva).

Vejamos a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ onde $f(x) = x$. Observe que esta função não é sobrejetiva, haja vista que não há valor em $\mathbb{N}$ associado a valor negativo em $\mathbb{Z}$. E, portanto, ela não é sobrejetiva. Apesar de sua lei de formação ser igual à da função identidade, aqui o contradomínio não é igual ao domínio.

Vamos mostrar, em seguida, que se $f: A \to B$ é bijetiva então existe $\mathrm{g}: B \to A$ bijetiva.

De fato, como f é bijetiva, em particular f é sobrejetiva. Logo, dado qualquer elemento b de B, existe algum a de A tal que $f(a) = b$. Como f é também injetiva, a é único; isto é, a é o único elemento de A com a propriedade de que $f(a) = b$. Ou seja, não existe ambiguidade. Esse elemento a será chamado $g(b)$, ou seja, definimos $g(b) = a$. Essa regra associa cada elemento de B a um único elemento de A, em outras palavras, define uma função $g: B \to A$. Esta função é chamada inversa de f e é comumente denotada por f^{-1}.

Sempre que uma função for bijetiva, existe uma função que faz exatamente o contrário da função original, levando os elementos do conjunto B aos elementos do conjunto A, e a esta função damos o nome de função inversa. Podemos dizer que se uma função f é bijetiva, se somente se, é invertível.

Para aprofundar-se um pouco nos estudos de funções, recomendamos a leitura do capitulo inicial do livro *Curso de análise vol. 1*, do brasileiro Elon Lages Lima (1919 – 2017).

3 PRINCÍPIO BIJETIVO

Neste trabalho, o conceito de bijeção será aplicado na contagem de elementos de um conjunto. A contagem teve seu inicio, praticamente quando surgiu a humanidade, pois desde então, se fez necessário uma contagem, embora primitiva, de algumas coisas. O exemplo das pedrinhas para contar carneiros, foi uma maneira encontrada de contar fazendo comparações. Havia ali uma bijeção entre o conjunto das pedrinhas e o conjunto dos carneiros. Eis o princípio bijetivo. Isso porque, usamos como postulado que a existência de uma função bijetiva entre dois conjuntos finitos implica que esses dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos. Em geral, a existência da bijeção entre dois conjuntos quaisquer implica que eles possuem a mesma cardinalidade. Vejamos a seguinte situação.

Em uma sala de aula, há um determinado número de assentos. Um grupo de estudantes entra na sala e o instrutor pede para todos sentarem. Depois de uma rápida olhada ao redor da sala, o instrutor declara que há uma bijeção entre o conjunto de alunos e o conjunto de assentos, onde cada aluno está emparelhado com o assento onde está sentado. O que o instrutor observou para chegar a essa conclusão foi o seguinte:

1. Cada aluno está em algum assento (não havia ninguém em pé);
2. Nenhum aluno está em mais de um assento;
3. Cada assento tem alguém sentado nele (não havia assentos vazios); e
4. Nenhum assento tem mais de um aluno.

O instrutor concluiu que a quantidade de assentos é igual à quantidade de alunos, sem ter que contar nenhum dos conjuntos.

Se houver uma bijeção entre dois conjuntos finitos então eles têm o mesmo número de elementos.

Muitos conjuntos, para os quais parece ser difícil contar a quantidade de seus elementos diretamente, podem ser facilmente analisados e terem seus elementos contados, mapeando-os de forma bijetiva para outro conjunto que pode ter seus elementos contados de forma mais simples. Esta é uma ideia muito usada e sugere que: “se parece difícil contar o número de elementos de um conjunto, tente encontrar uma representação dele que seja mais simples”.

Uma bijeção também pode ser referida como uma mudança de variável, pois uma mudança de variável é uma técnica básica usada para simplificar problemas nos quais as variáveis originais são substituídas por outras variáveis. A intenção é que, quando expresso em novas variáveis, o problema possa se tornar mais simples, ou equivalente a um problema já estudado anteriormente ou melhor compreendido.

Como um segundo exemplo, podemos imaginar que, em uma situação, temos um determinado número de chaves e também de cadeados. Se cada chave abre *exatamente* um cadeado do grupo e cada cadeado é aberto por *exatamente* uma dessas chaves, então há uma bijeção, pois a cada chave está associada a um e apenas um cadeado e vice-versa. Logo, pelo princípio bijeitvo, o número de cadeados é igual ao número de chaves.

Usando uma linguagem técnica, podemos enunciar o principio bijetivo da maneira descrita a seguir. Para um conjunto qualquer A, usaremos a notação $|A|$ para representar o número cardinal que expressa o tamanho do conjunto A.

Sejam A e B conjuntos não vazios. Temos que $|A| = |B|$ *se, e somente se, existe* $f: A \to B$, *tal que* f *é bijetiva.*

Lembramos também que um conjunto A é dito finito se A é vazio (conjunto que não possui elementos) ou existe uma função $f: I_n \to A$ que é bijetiva onde I_n é o conjunto dos números naturais de 1 até n, para algum natural n. Neste caso, teremos $|A| = |I_n| = n$.

Vejamos alguns exemplos de aplicação do princípio bijetivo para contagem.

Exemplo 1:

Quantas sequências de 5 algarismos podem ser feitas com os dígitos 1, 8, 9 em que o digito 1 aparece exatamente três vezes e os demais aparecem uma vez?

Para solucionar este problema, vamos estabelecer uma função que associe a cada sequência que satisfaz o enunciado a uma outra sequência de (apenas) dois dígitos distintos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, onde o primeiro digito indica a posição do 8 na sequência original e o segundo digito indica a posição do 9.

Vejamos a sequência $(1, 8, 1, 1, 9)$. Veja que o número 8 ocupa a posição 2, e o número 9 ocupa a posição 5. Portanto a sequência $(1, 8, 1, 1, 9)$ está associada à sequência $(2, 5)$. Assim definimos uma função $f: A \to B$ onde A é o conjunto formado por todas sequências que satisfazem o enunciado e $B = \{(a, b) : a \neq b,\ a, b \in \{1,2, \dots, 5\}\}$.

Para concluirmos que existe uma bijeção entre A e B, basta mostrarmos que a função $f: A \to B$ é invertível. Para isso basta perceber que, ao mesmo tempo em que cada sequência de 5 dígitos está associada a uma única sequência de 2 dígitos, cada sequência de 2 dígitos está associada a uma única sequência de 5 dígitos. Pois sabendo as posições dos dígitos 8 e 9, os demais dígitos da sequencia original são iguais a 1. Assim, uma sequência do enunciado não pode gerar duas ou mais sequências de 2 dígitos diferentes, assim como uma sequência de 2 dígitos não pode gerar duas ou mais sequências diferentes de 5 dígitos que satisfazem o enunciado. Portanto, a função é invertível, sendo assim, bijetiva.

Como a quantidade de elementos do conjunto B é fácil de ser contada, tendo ele exatamente $5 \cdot 4 = 20$ elementos, pelo principio bijetivo, o conjunto A possui a mesma quantidade de elementos do conjunto B, totalizando 20 elementos.

Logo concluímos que existem 20 sequências que satisfazem o enunciado. □

Observação: uma maneira alternativa que resolver o problema acima é usando a fórmula de permutações com elementos repetidos. A vantagem da solução acima é que não requer este conhecimento, mas ela não funciona a todos os problemas de permutação com elementos repetidos.

Outro exemplo de aplicação direta do principio bijetivo é mostrado a seguir.

Exemplo 2:

Em um torneio de futebol, 1500 equipes competem entre si. Os organizadores informam às equipes que cada jogo deve ter um vencedor (ou seja, não há empates) e que a equipe que perde um jogo é imediatamente excluída do torneio. Quantos jogos serão jogados até o campeão ser conhecido?

Queremos concluir que o número de jogos neste campeonato não depende da ordem ou da maneira em que acontecem os confrontos. Vamos considerar dois conjuntos. Um conjunto A, cujos elementos são todos os jogos em uma determinada edição do campeonato (até o campeão ser conhecido) e um conjunto B, que contém todos os perdedores até fim do último jogo. Veja que a escolha do conjunto B não foi arbitrária, pois queremos mostrar que o número de elementos nos conjuntos A e B são iguais. Vejamos um exemplo com 4 times.

Se temos quatro times, X, Y, Z, W então teremos 3 times que perderão em algum dos jogos pois apenas um time é campeão. Digamos que X foi o campeão após a seguinte sequência de jogos. O time X ganha no jogo X contra Y. O time Z ganha no jogo Z contra W. O time X ganha no jogo X contra Z. Neste caso, aconteceram exatamente 3 jogos, logo $A = \{\{X, Y\}, \{Z, W\}, \{X, Z\}\}$ e há 3 times que perderam em algum jogo, logo $B = \{Y, Z, W\}$. E temos uma função bijetiva $f: A \to B$, que indica o perdedor de cada jogo.

Agora, argumentamos que temos uma bijeção entre A e B em qualquer campeonato. Dessa forma, o número de jogos será igual ao número de times perdedores. De fato, considere a função $f: A \to B$ que associa cada jogo ao perdedor daquele jogo. Temos que cada jogo apresenta um único perdedor, e jogos distintos apresentam perdedores distintos pois o perdedor de um jogo não participa de nenhum outro jogo do campeonato. Do mesmo modo, a cada perdedor está associado um único jogo (aquele em que o perdedor foi eliminado do campeonato), ou seja, um time não pode ser perdedor em dois jogos diferentes. Portanto, f é bijetiva.

Como temos 1500 times, e apenas 1 será o vencedores, teremos 1499 perdedores. Essa é quantidade de elementos do conjunto B. Como f é bijetiva, pelo principio bijetivo, o conjunto A também possui 1499 elementos. Logo, chegamos ao fim do problema, e concluímos que serão realizados 1499 jogos até o campeão ser conhecido. □

A seguir vejamos um problema da Olimpíada Brasileira de Matemática, como mais um exemplo de utilização do Principio bijetivo.

Exemplo 3:

Quantos números inteiros positivos entre 10 e 1000 possuem seus dígitos em ordem estritamente crescente? (Por exemplo, 47 e 126 são números desse tipo; 52 e 566 não).

Solução:

Como não precisamos nos preocupar com o número 1000, pois ele não satisfaz às condições do problema, vamos considerar 2 grupos, números de 10 a 99 e números de 100 a 999. Repare que os algarismos deverão ser distintos, e que ao escolher dois algarismos distintos existe somente um número com dígitos em ordem crescente que pode ser formado por algarismos distintos.

Vamos contar primeiro os número de 10 a 99 que satisfazem o enunciado. Para isso, observe que existe uma bijeção entre dois conjuntos: o conjunto formado pelos números em questão e o conjunto formado pelos conjuntos de dois algarismos distintos. A bijeção é a função que associa cada número ao seu conjunto de algarismos e o fato disso ser uma bijeção é consequência imediata da discussão do parágrafo anterior. Assim concluímos que existem tantos números de 10 a 99 satisfazendo o enunciado quanto às formas de escolher dois algarismos distintos.

Analogamente, existem tantos números de 100 a 1000 satisfazendo o enunciado quanto as formas de escolher 3 algarismos distintos. Portanto, pelo princípio bijetivo, a resposta é

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 36 + 84 = 120. \qquad \square$$

Exemplo 4:

Seja $P(n)$ o número de maneiras de expressar n como uma soma de inteiros positivos, e $P(n,m)$ o número de maneiras de expressar n como a soma de exatamente m inteiros positivos. Prove que $P(n) = P(2n,n)$. Observação: aqui a ordem em que as parcelas aparecem na soma deve ser ignorada.

Solução:

Vamos definir $P'(n,m)$ como o número de maneiras de expressar n como uma soma de exatamente m números que podem ser inteiros positivos ou zeros. Assim $P'(2,2) = 2$, já $q$ue $1 + 1 = 2$ e $0 + 2 = 2$ são as duas únicas maneiras possíveis.

Vamos provar primeiro que $P(n) = P'(n,n)$. Primeiro veja que se escrevermos $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$; $k \leq n$, então é só acrescentar $n - k$ zeros que ele se tornara uma das maneiras que são contadas em $P'(n,n)$. Assim existe uma função que tem como domínio o conjunto que contem todas as maneiras de expressar n como uma soma de inteiros positivos, e contradomínio o conjunto que contém todas as maneiras de expressar n como uma soma de exatamente n números que podem ser inteiros positivos ou zeros.

Observe que essa lei é invertível, pois nas $P'(n,n)$ maneiras de expressar n como uma soma de exatamente n números que podem ser inteiros positivos ou zeros é só retirar todos os zeros da soma para obter um correspondente entre as $P(n)$ maneiras, e portanto tal lei é bijetiva. Pelo principio bijetivo, os dois conjuntos tem a mesma quantidade de elementos, $P(n) = P'(n,n)$, como queríamos.

Assim basta mostrar $P'(n,n) = P(2n,n)$. Observe que $P(2n,n)$ é a quantidade de maneiras de expressar $2n$ como a soma de (exatamente) n inteiros positivos, ou seja, que são maiores ou iguais a 1. Considere uma de tais maneiras e subtraia 1 de cada um dos n números. Obtemos, então, n números maiores ou iguais a zero cuja soma é igual a n. E este processo também é invertível. Em outras palavras $P(2n,n) = P'(n,n)$. $\square$

Observe que na situação acima, foi usado bijeção duas vezes, não para contar diretamente, mas para garantir que $P'(n,n) = P(n)$ e, depois, que $P(2n,n) = P'(n,n)$. Contudo, não obtemos um fórmula direta para nenhum desses valores.

Continuamos com mais um exemplo.

Exemplo 5:

Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. Os N automóveis são numerados de acordo com sua ordem de chegada ao estacionamento, sendo que o primeiro carro é denominado de carro 1, o segundo de carro 2 e assim por diante, até o carro N. Os carros devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem em que chegam no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes vão se colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações finais distintas podem ser obtidas desta maneira, após terem sido estacionados todos os carros?

Solução:

Veja que quando estacionamos o carro 1, restringimos quantos carros estacionarão à frente e quantos atrás dele. Da mesma forma, se sabemos quantos carros pararam à frente do carro 1, sabemos também em qual vaga o carro 1 estacionou. Contudo, ignorando a posição do carro 1, vamos argumentar que a configuração dos carros é determinada de forma única após identificarmos, para cada carro diferente do carro 1 se ele estacionou a frente ou atrás do carro 1.

Mais precisamente, chamaremos de configuração uma sequência de n algarismos distintos representando os números dos carros na ordem em que aparecem na rua (satisfazendo o problema). Digamos que as vagas também sejam numeradas de 1 até n, do início (frente) ao fim (trás) da rua, temos. Daí, por exemplo, se há 3 carros estacionados de forma que o carro 1 ocupe a vaga 2, o carro 2 ocupe a vaga 3 e o carro 3 ocupe a vaga 1, então temos a configuração (3, 1, 2). Veja que, pelas restrições do problema, nem toda permutação dos números $1, 2, \dots, n$ é uma configuração válida.

Observe um exemplo com 4 carros. Se ao final do processo a fila de carros estiver com a configuração (2, 1, 3, 4), onde cada algarismo representa cada carro numerado, temos que o carro 1 parrou na segunda posição da rua, em seguida o carro 2 parou à sua frente (na primeira posição da fila), depois o carro 3 parou atrás do carro 1 (na terceira posição) e, por fim, o carro 4 parrou atrás de 3 (na última posição da fila). Podemos, então, transformar essa configuração na sequência (frente, atrás, atrás).

De modo geral, definiremos uma função entre o conjunto das configurações e o conjunto das sequências de palavras compostas pelas palavras “frente” e “atrás”, com $n-1$ termos. Em seguida mostraremos que essa função é uma bijeção.

Dada uma configuração, vamos começar ignorando a posição em que o carro 1 estacionou. E, depois, a escolha de cada carro com número de 2 até n determina cada palavra da sequência, dependendo se ele está à frente ou atrás do carro 1, sendo a primeira palavra associada á escolha do carro 2, a segunda palavra associada á escolha carro 3 e assim sucessivamente até o n-ésimo carro.

Para provar que a função definida acima é bijetiva, encontraremos sua inversa e para isso, basta perceber que dada uma sequencia de $n-1$ palavras “frente/atrás”, é possível encontrar uma única configuração dos carros que corresponde a tal sequência.

Para isso, basta observar que, existindo k palavras "frente”, então o carro de número 1 ocupa a $(k+1)$-ésima vaga. E depois de identificar a vaga ocupada pelo carro 1, preenchemos em ordem as posições dos outros carros.

Agora basta contar a quantidade das sequências acima, que claramente é igual a 2^{n-1}, onde 2 corresponde às possibilidade, "atrás" ou “frente”, para cada palavra e $n-1$ corresponde ao número de palavras na sequência. Concluímos assim a solução deste problema. Pelo Princípio Bijetivo, o número de configurações também é 2^{n-1}. □

Alternativamente, podemos resolver este problema sem utilizar o Principio Bijetivo, caso tenhamos estudado a noção de “combinação” e o triângulo de Pascal.

Consideramos para cada número m de 1 até n, o caso em que o primeiro carro estacionou na vaga de número m e iremos determinar o número de maneiras de estacionar os $m-1$ carros nas $n-1$ vagas anteriores. Usando combinação chegamos ao valor C_{n-1}^{m-1}, pois bais escolher quais carros irão estacionar à frente do carro 1. Somando isso sobre os possíveis valores de m teremos um total de $\sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1}$ configurações. Essa soma corresponde à soma dos elementos da linha $n-1$ do triangulo de Pascal, e é igual a 2^{n-1}. □

Outro problema interessante é o seguinte. Embora bastante simples, se utiliza com clareza do principio bijetivo.

Exemplo 6:

De quantas maneiras podemos ordenar n objetos?

Este problema poderia ter o seguinte enunciado: *existem quantas permutações de um conjunto com n objetos?*

Solução:

Imaginemos inicialmente dois conjuntos. Um conjunto P que contém todas as permutações possíveis dos n objetos e o conjunto

$$A = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n-1\} \times \{1, 2, \dots, n-2\} \times \dots \times \{1, 2\} \times \{1\}.$$

Vamos concluir que existe uma bijeção entre os conjuntos P e A e, portanto, pelo principio bijeivo, eles possuem a mesma quantidade de elementos. E como A possui

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!,$$

elementos. Segue que P também possui $n!$ elementos.

Perceba que cada elemento do conjunto A é formado n "coordenadas". Considere agora, um elemento de P, ou seja, uma enumeração dos objetos de 1 a n, e vamos associá-lo a um elemento de A. A primeira coordenada do elemento de A é a posição do objeto 1 na enumeração. Feito isso, exclua o objeto 1 da lista, e observar a posição do objeto 2 entre os que sobraram. Essa será a segunda coordenada do elemento de A. Depois exclua o objeto 2 e continue esse processo até restar apenas o objeto n na lista. Esta correspondência é bijetiva. Assim, chegamos à solução deste problema. □

Outro problema bastante recorrente em trabalhos nesta área é o problema das permutações circulares.

O Conceito de Permutação Circular consiste em permutar elementos que estão organizados sobre um círculo. Esse tipo de permutação é um pouco diferente, pois para algumas disposições dos elementos, mesmo trocando todos eles de lugar, as posições relativas entre eles no círculo não se alteram.

Exemplo 7:

Quantas permutações circulares de n objetos existem?

Solução:

Baseado no problema anterior, agora basta mostrarmos que cada permutação circular corresponde a exatamente n permutações, e para isso devemos escolher um elemento para ocupar a primeira posição da permutação.

Agora, iremos determinar dois conjuntos. Um que possui todas as permutações circulares que possui um elemento fixo na primeira posição e outro que possui as sequências possíveis geradores pelos valores que representam a posição de cada objeto em relação ao objeto fixo. Observe que há uma bijeção entre esses conjuntos, pois cada permutação circular está associada á uma única sequência de valores. E vice-versa. Assim, pelo principio bijetivo, esses conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos.

Como a sequência é gerada a partir de $n-1$ elementos, pois não precisamos permutar o elementos fixo, basta permutarmos os $n-1$ elementos que restaram. Portanto, $p=(n-1)!$ é a solução deste problema. □

Mostraremos a seguir, uma prova de um resultado que envolve números binomiais. Por isso, daremos agora a definição de um número binomial.

O número binomial, de um número natural n, na classe k, com k também natural, consiste no número de combinações de n termos, k a k. O número binomial de um número n, na classe k, pode ser escrito como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

A prova que iremos mostrar é sobre a simetria dos números binomiais.

Exemplo 8: Mostre que para todo natural n e todo k tal que $1 \leq k \leq n$ temos:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Prova:

De maneira geral, notamos que os dois valores contam o número de subconjuntos de tamanho k e $n - k$, respectivamente, de qualquer conjunto de elementos n.

Note que, em um processo de escolha de k objetos de um conjunto, ao escolhermos k elementos de um conjunto com n elementos, deixariamos de escolher $n - k$ elementos, de modo que cada quantidade de elementos escolhidos está associado a uma única quantidade de elementos que não foi escolhida, notabilinando assim, uma bijeção entre os dois conjuntos. Assim, pelo pricípio bijeitvo, esse conjuntos possuem as mesmas quantidades de elementos, e portanto provamos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$\square$

As aplicações do Principio Bijetivo citadas nos mostram que, por muitas vezes, tomamos decisões corretas em determinados problemas sem saber que, de maneira intuitiva, estamos nos aproveitando deste principio.

No nosso contexto, o Principio Bijetivo será ferramenta importante para entendermos a prova do Teorema de Cayley usando Código de Prüfer.

4 GRAFOS

Neste capítulo serão introduzidos alguns conceitos básicos de Teoria de Grafos, com uma introdução histórica e posteriormente com a exposição das principais definições que nos serão úteis para a compreensão da prova do Teorema de Cayley sobre árvores usando Código de Prüfer.

4.1 História dos grafos

Os grafos foram usados pela primeira vez como uma maneira matemática de modelar e solucionar um problema curioso e divertido. Em uma cidade da antiga Prússia de nome Königsberg, situada na região onde hoje se localiza a cidade de Kaliningrado, na Rússia, há quatro ilhas. Havia interligando essas ilhas, sete pontes, como na imagem abaixo:

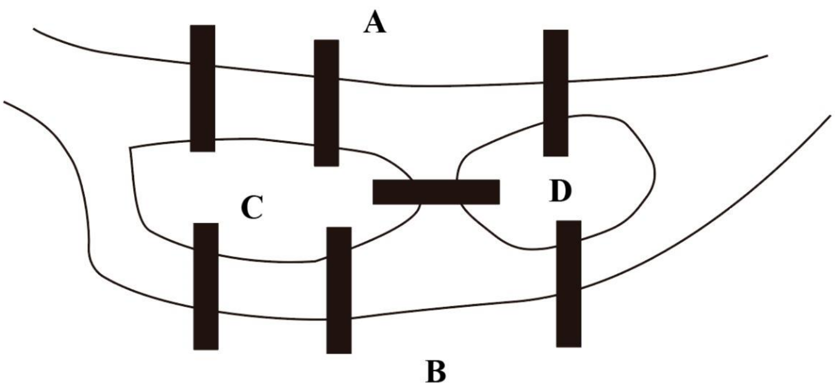

Figura 1: Esboço do problema de Königsberg

O problema consistia em saber se era possível ou não atravessar cada uma das sete pontes passando por cada ponte uma única vez.

Em 1735, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) solucionou o problema e estabeleceu seu nome como pioneiro no estudo de teoria dos grafos. Na solução apresentada, Euler percebeu inteligentemente que as particularidades e as características geométricas das ilhas eram irrelevantes, e assim, determinou que cada ilha, ficaria representada simplesmente por um ponto (cuja posição no espaço também é irrelevante). Estes pontos são chamados de vértices.

Figura 2: Leonhard Euler

Com essa percepção, Euler reduziu o problema a simplesmente seguir percursos entre vértices, que representavam as ilhas, e passando pelas arestas, que representam as pontes, exatamente uma vez. Veja a seguir, a representação gráfica do problema da ponte de Königsberg:

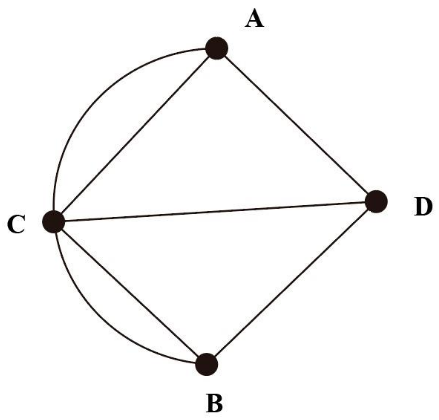

Figura 3: Grafo do problema de Königsberg

Embora simples, uma imagem estabelecida através de vértices e arestas, tornou-se uma maneira útil de resolver problemas que, a princípio, seriam potencialmente muito complicados.

Com essa estratégia Euller resolveu um problema-geral: para qualquer que seja o grafo decidir se existe uma trilha que saia de um vértice, passe por todas as arestas exatamente uma vez e retorne ao vértice inicial, e encontrar tal trilha caso ela exista.

Um grafo composto por dois conjuntos: um conjunto constituído por vértices e outro conjunto constituído de arestas; cada aresta está associada a um par não orientado de vértices. Os dois vértices representam as duas extremidades da aresta.

Ao analisar o problema da ponte de Königsberg, Euler observou que para haver um percurso que nos possibilitasse atravessar cada ponte uma única vez, todo vértice deveria ter um número par de arestas incidentes a ele, quantidade essa que posteriormente viria a ser denominado **grau** de um vértice. Detectado isso, Euler olhou para a representação do problema das pontes de Konigsberg em forma de grafo e notou que existem vértices de grau ímpar (de fato, a situação é mais grave ainda pois, neste caso, todos os vértices possuem grau ímpar). Assim, Euler concluiu o problema da ponte de Königsberg, e determinou que não existe caminho que satisfazia as condições iniciais.

O termo grafo foi introduzido pelo matemático inglês James Joseph Sylvester em um artigo publicado em 1878 na revista britânica Nature sobre diagramas moleculares.

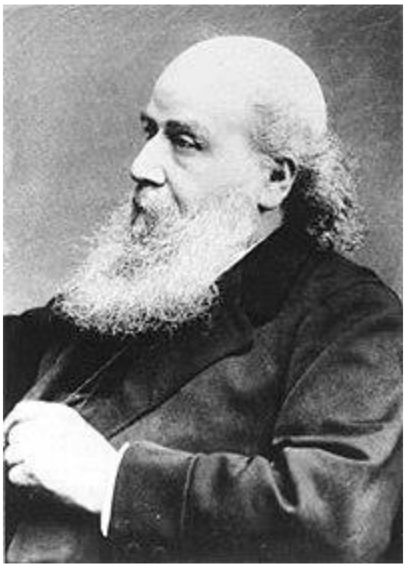

Figura 4: James Joseph Sylvester

O matemático húngaro judeu Dénes König escreveu o primeiro livro texto no campo de Teoria dos Grafos, em 1936.

Figura 5: Dénes König

Porém, em 1969, o americano formado no Brooklyn College, Frank Harary, publicou aquela que foi considerada a grande obra do assunto para a época, intitulada Teoria dos Grafos, a obra permitiu que matemáticos, químicos, engenheiros eletricistas e cientistas sociais se utilizassem de técnicas uteis às suas respectivas áreas. Um aspecto interessante sobre o livro é que Harary doou todos os royalties para financiar o Prêmio Pólya. Este prêmio é mantido pela Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), e tem como primeiro homenageado o matemático húngaro George Pólya. É atualmente concedido em anos pares.

Figura 6: Frank Harary

De 1735 ao século XXI, vários avanços ocorreram no campo da teoria dos grafos, e muitas ciências se desenvolveram com esse avanço.

Ao longo dos anos, os grafos se mostraram ser mais que uma ferramenta útil à resolução de problemas. As redes sociais, dentro de seus interesses veem nessa área, a grande aliada no desenvolvimento de suas estruturas, facilitando na capitação de clientes, baseando-se no interesse do indivíduo. Equipados com esse conhecimento, sabendo não apenas do que você gosta e do que não gosta, mas também do que seus amigos gostam e do que não gostam, as empresas podem personalizar os anúncios que apresentam para seus clientes por meio de seus “feeds”, Facebook, Twitter ou qualquer rede similar.

Na engenharia de trânsito e logística, o uso de teoria dos grafos é essencial. Uma rede de transporte permite fluxos de pessoas, cargas ou informações, que estão ocorrendo. A teoria de grafos oferece possibilidades de representar os deslocamentos de transportes como ligações, que podem ser consideradas em vários aspectos como conexões, caminhos e ciclos urbanos.

Certamente, a computação foi o campo da ciência que mais se utilizou e se utiliza da teoria dos grafos, porém, são inúmeras as áreas de aplicação dessa teoria. Ao longo dos anos, mais situações e acontecimentos nos remetem ao uso da teoria por oferecer a base de estruturas de representação, para diversos problemas como listas, árvores, pilhas, filas e outras.

4.2 Definição e conceitos básicos de grafos

De maneira formal, um **grafo**, $G = (V, E)$, consiste de um conjunto finito e não vazio, $V = V(G)$, de elementos chamados **vértices** e de um conjunto finito, $E = E(G)$, de pares não ordenados de elementos distintos de $V(G)$, chamados **arestas**.

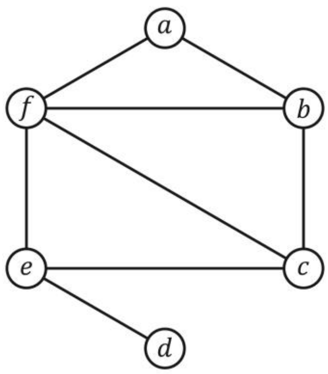

Figura 7: Imagem de um grafo simples

A Figura 7 mostra um grafo cujo conjunto de vértices é formado pelos elementos a, b, c, d, e, f. Alguns desses vértices estão ligados, formando arestas. Deste modo, temos que este grafo é constituído dos conjuntos:

$V = \{a, b, c, d, e, f\}$; e

$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{e, d\}, \{e, f\}, \{f, a\}\}$.

Por simplicidade, vamos representar uma aresta $\{x, y\}$ simplesmente por xy. O grafo da Figura 7 é um exemplo de grafo **simples**, pois não possui mais de uma aresta ligando dois vértices e também não possui um laço, ou seja, uma aresta que liga o vértice a ele mesmo.

Um **multigrafo** pode possuir mais de uma aresta ligando dois vértices, pois o conjunto de arestas é substituído por um multiconjunto. Na Figura 8 a seguir, além, de possuir essa característica, a representação possui um laço no vértice A e no vértice D, ou seja, uma aresta ligando esses vértices a ele mesmo.

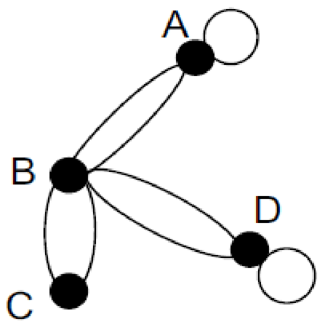

Figura 8: Imagem de um grafo laço

Dados dois grafos G e T, um **isomorfismo** será uma bijeção f de $G(V)$ em $T(V)$, tal que dois vértices quaisquer v e u são adjacentes em G se, e somente se, $f(v)$ e $f(u)$ são adjacentes em T. Assim, podemos dizer que dois grafos serão isomorfos se for possível alterar os nomes de um deles de modo que os dois grafos fiquem iguais. Para verificar se dois grafos G e T são isomorfos, basta analisar todas as bijeções de $G(V)$ em $T(V)$.

Um grafo simples no qual para todos os pares de vértices existe uma aresta os ligando é denominado de grafo **completo**. Veja na Figura 8 que o vértice B apresenta seis arestas o ligando a outros vértices, enquanto o vértice C possui apenas duas arestas. Dizemos que o grau de B é 6 e o grau de C é 2.

Um **passeio** é uma sequência de vértices que apresenta a seguinte propriedade: se u e v são vértices consecutivos desta sequência, então uv é uma aresta do grafo. Uma aresta de um passeio é qualquer aresta uv do grafo, onde u é o sucessor de v no passeio.

Uma **trilha** é um passeio sem arestas repetidas, ou seja, um passeio que apresenta todas as arestas diferentes entre si. Um **caminho** é uma trilha que, adicionalmente, não apresenta em sua estrutura, vértices repetidos.

Um **ciclo** é a união de um caminho com uma aresta unindo o último vértice ao primeiro do caminho, e que tenha pelo menos duas arestas. Entende-se por **comprimento** ao número de aresta do caminho ou ciclo. Dizemos que um arco vw pertence a um dado ciclo se o vértice v é o sucessor de u no ciclo, ou vice-versa.

Uma **floresta** é um grafo que não contém ciclos.

Observemos agora o gráfico da Figura 9.

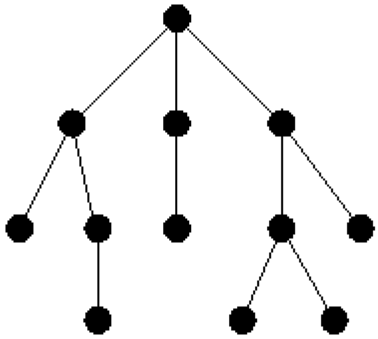

Figura 9: Imagem de uma árvore

O grafo acima é **conexo**, o que significa que há pelo menos um caminho ligando cada par de vértices deste grafo. Um grafo conexo sem ciclos é chamado de **árvore**. Cada vértice de grau 1 de uma árvore é chamado de **folha**.

Dado um grafo, podemos selecionar alguns vértices e formar uma árvore. Uma árvore que possui todos os vértices de um grafo é dita árvore geradora. Essa definição será muito importante para o próximo capítulo.

5 TEOREMA DE CAYLEY

Arthur Cayley (1821–1895), foi um matemático professor na Universidade de Cambridge, Inglaterra. Considerado um dos grandes matemáticos do século XIX, contribuiu em diversas áreas para o desenvolvimento da matemática. Obteve destacados trabalhos no ramo da teoria das funções elípticas, geometria analítica e álgebra. Seu trabalho sobre as árvores apareceu em 1889.

Figura 10: Imagem de Arthur Cayley

Em seu teorema sobre arvores e grafos, Cayley afirma que se apresentado um grafo completo rotulado de n vértices, ele possui n^{n-2} árvores geradoras distintas. Quando dizemos que um grafo é **rotulado**, nos referimos ao fato que cada vértice possui um **rótulo** único associado a ele. Em problemas de contagem, o termo rotulado enfatiza que estamos distinguindo grafos isomórficos na contagem.

Abaixo temos um exemlo de gráfico rotulado.

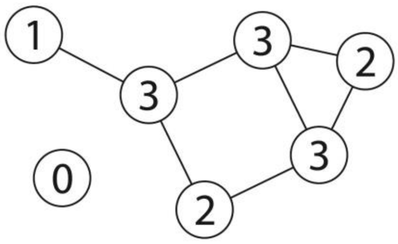

Figura 11: Imagem de um grafo rotulado

O termo rotulado enfatiza que não estamos identificando gráficos isomórficos. Nós fixamos o conjunto de vértices, e duas árvores são contadas como iguais, se somente se, os mesmos pares de vértices forem adjacentes. Uma árvore geradora de um grafo conectado G é um subgráfico de abrangência de G que é uma árvore. O teorema poderia ter sido enunciado da seguinte maneira: um grafo completo K_n tem n^{n-2} árvores de abrangência.

Aqui estão as 16 árvores rotuladas em quatro vértices.

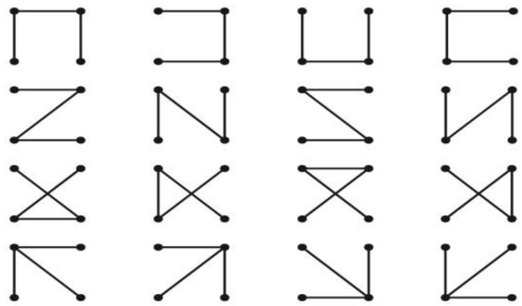

Figura 12: Imagem das 16 árvores rotuladas em quatro vértices.

Iremos provar esse teorema usando o Código de Prüfer, que consiste em associar um código, ou seja, um nome único, para cada uma dessas árvores.

5.1 O Código de Prüfer

A prova que iremos apresentar não é a prova original de Cayley, mas uma que se utiliza do código de Prüfer. O código recebe esse nome em homenagem a Heinz Prüfer (1918). O código de Prüfer é uma sequência gerada a partir de uma árvore cujos vértices são numerados com valores distintos, removendo todas as folhas da árvore uma a uma, numa ordem pré-determinada, até restarem apenas dois vértices. Especificamente, considere, sem perda da generalidade, uma árvore rotulada T em que os rótulos dos vértices formam o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vamos à codificação, ou seja, como obter a sequência à partir dessa árvore. A codificação mapeia a árvore T em uma sequência de $n - 2$ números inteiros onde cada número varia de 1 a n.

Defina $T_1 = T$ e para cada i, com $1 \leq i \leq n - 1$, no passo i defina v_i como a folha de menor rótulo de T_i, defina s_i como o rótulo do vizinho de v_i e $T_{i+1} = T_i - \{v_i\}$ como a árvore obtida removendo-se o vértices v_i e (consequentemente) a aresta $\{v_i, s_i\}$ de T_i. A sequência $S = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-2})$ é o código de Prüfer. Veja que, em cada passo, o valor que adicionamos na sequência S é s_i que é vizinho de v_i e nunca o próprio valor de v_i. Veja também que, apesar de termos definido s_{n-1}, este valor não faz parte do código de Prüfer. Fazemos isso porque s_{n-1} sempre será igual a n, logo essa informação é redundante. Isso ocorre porque toda árvore (com pelo menos dois vértices) tem pelo menos dois vértices de grau 1, como já enfatizamos nesse trabalho, de modo que o vértice n nunca será o menor vértice de grau 1, e portanto, nunca será eliminado.

Por exemplo, considere a seguinte árvore:

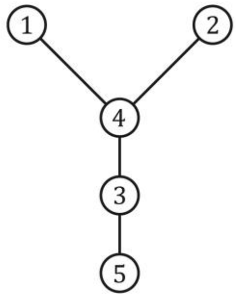

Figura 13: Imagem da árvore geradora de um código de Prüfer.

Primeiro removemos a folha 1, por ser o menor valor (dentre as folhas e, coincidentemente, neste caso, dentre todos os vértices), e adicionamos 4 à sequência, por ser vizinha da folha retirada. Depois removemos a folha 2 e adicionamos 4 (novamente). Então nós removemos a folha 4 e adicionamos 3. Agora que estamos apenas com as folhas 3 e 5. Se removermos 3 ficamos com apenas 5 mas este 5 não será adicionado ao código, então paramos com a sequência $(4, 4, 3)$.

Esse método nos dá uma função f que associa cada árvore com vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$ a uma sequência de $n - 2$ termos onde cada termo pertence ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Veja que os valores da sequência não precisam ser distintos, como no exemplo acima. O fato de que a partir de uma árvore como acima o código de Prüfer está bem definido é consequência do fato mencionado no capítulo anterior de que toda árvore tem pelo menos duas folhas. Veja que, como os rótulo são distintos, em cada passo da codificação, o vértice vizinho à folha de menor rótulo está unicamente determinado.

Para mostrar que tal função é bijetiva nos resta provar que existe uma função inversa que associa cada sequência com $n - 2$ valores no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ a uma única árvore de vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$ (cujo código de Prüfer é tal sequência). Ao processo de obter a árvore a partir da sequência, chamamos de decodificação.

Considere uma sequência $S = (s_1, \ldots, s_{n-2})$ onde $1 \leq s_i \leq n$, para todo i. Defina $s_{n-1} = n$ e considere a sequência $S_1 = (s_1, \ldots, s_{n-2}, s_{n-1})$. Vamos construir a árvore com vértices $1, 2, \ldots, n$, adicionando uma arestas de cada vez (de modo que nos passos intermediários teremos florestas $F_1, \ldots, F_{n-1}$. No primeiro passo, definimos V_1 como o subconjunto dos números $\{1, 2, \ldots, n\}$ que não é usado na sequência S e x_1 como o menor elemento de V_1. Incluímos em F_1 apenas a aresta $\{s_1, x_1\}$. Em cada passo seguinte, para $2 \leq i \leq n-1$, defina $S_i = (s_i, \ldots, s_{n-1})$, defina V_i como o subconjunto dos números $\{1, 2, \ldots, n\}$ que não são usados em S_i e nem estão no conjunto $\{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$, defina x_i como o menor elemento de V_i e seja F_i a floresta obtida adicionando-se a aresta $\{s_i, x_i\}$ a F_{i-1}. Veja que, em cada passo, também podemos obter o conjunto V_i à partir de V_{i-1}: basta remover x_{i-1} (sempre) e acrescentar s_{i-1} no caso em que este não aparece novamente entre $s_i, \ldots, s_n$. Finalmente, seja $T = F_{n-1}$. Afirmamos que o código de Prüfrer da árvore T é S.

Como exemplo, vamos encontrar a árvore associada ao código Prüfer $(7, 4, 4, 1, 7, 1)$. (Exemplo extraído de um trabalho do professor Edson Prestes, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul).

Inicialmente temos $S = (7, 4, 4, 1, 7, 1)$. Como S tem 6 termos, temos que $n - 2 = 6$, logo $n = 8$. Logo, $S\_1 = (7, 4, 4, 1, 7, 1, 8)$ e $V_1 = \{2, 3, 5, 6, 8\}$. Temos que o primeiro elemento de S é 7, e o menor elemento de V é 2, esse valores formarão a aresta $\{s_1, x_1\} = \{7,2\}$. No segundo passo, procuramos o menor rótulo diferente de x_1 e que não pertence na subsequência $S\_2 = (4, 4, 1, 7, 1, 8)$. Temos então que $V_2 = \{3, 5, 6, 8\}$ e $x_2 = 3$, a aresta adicionada será $\{4, 3\}$. Continuando da mesma forma, teremos a tabela abaixo.

i	S_i	V_i	x_i	Nova arestas de F_i
1	(7, 4, 4, 1, 7, 1,8)	{2, 3, 5, 6, 8}	2	{7, 2}
2	(4, 4, 1, 7, 1,8)	{3, 5, 6, 8}	3	{4, 3}
3	(4, 1, 7, 1,8)	{5, 6, 8}	5	{4, 5}
4	(1, 7, 1,8)	{4, 6, 8}	4	{1, 4}
5	(7, 1,8)	{6, 8}	6	{7, 6}
6	(1,8)	{7, 8}	7	{1,7}
7	(8)	{1}		{8,1}

Logo, de acordo com as arestas obtidas, temos a seguinte árvore.

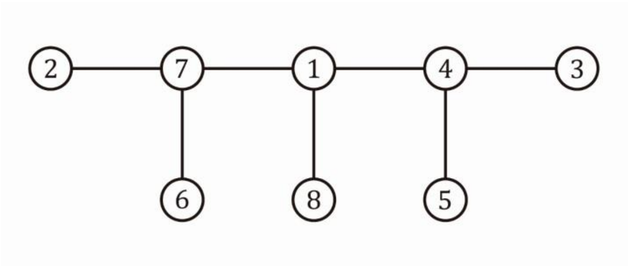

Figura 14: Imagem de um grafo obtido de uma decodificação de uma sequencia de Prüfer.

Como exercícios, sugerimos que o leitor aplique o método de codificação na árvore acima e verifique que a sequência obtida é a sequência S acima.

Nos resta justificar, de modo geral, porque o processo de decodificação nos dá a função inversa da função de codificação. Para isso, usando a notação definida acima, vamos primeiro verificar alguns fatos sobre v_i, s_i e T_i. Veja que $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}$ e n são os vértices da árvore T_k. E que o conjunto formado pelos pares $\{v_i, s_i\}$, $k \leq i \leq n-1$, é o conjunto das arestas de T_k.

O número de vezes que um vértice m ocorre entre v_1, v_2,. . . , v_{n-2} é $grau(m)\ -1$. Isso acontece porque m ocorre $grau(v) - 1$ vezes entre as arestas $\{v_i, s_i\}, 1 \leq i \leq n - 1$ e exatamente uma vez em v_1, v_2,. . . , v_{n-1}, s_{n-1}. Similarmente, o número de vezes que um vértice m ocorre entre s_k, s_{k+1}, ..., s_{n-2} é o seu grau subtraído de uma unidade. Em particular, os vértices de grau 1 são aqueles elementos de V que não estão em

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \cup \{s_k, s_{k+1}, \ldots, s_{n-1}\},$$

e isso significa que v_k, o vértice de menor grau, é o menor elemento de $\{1, 2, \ldots, n\}$ não contido no conjunto acima. Em particular, v_1 é o menor elemento de V que não pertence a S, e podemos determinar exclusivamente v_k de S e $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$.

Assim, provamos que existe bijeção entre o conjunto de todas as árvores com vértices cujos rótulos estão no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ e o conjunto de todas as $(n-2)$-uplas formadas por esses inteiros.

A prova do terorema de Cayley a seguir, se utilizara dessa bijeção.

5.2 Prova do Teorema de Cauley usando Código de Prüfer

Teorema de Cayley: *Dado um grafo completo rotulado de n vértices, ele possui* n^{n-2} *árvores geradoras distintas.*

Prova: Como demonstrado anteriormente, o código de Prüfer nos fornece uma bijeção entre o conjunto de todas as árvores com vértices cujos rótulos estão no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ e o conjunto de todas as $(n-2)$-uplas formadas por esses inteiros. Como há n possibilidades de escolha para ocupar cada posição na $(n-2)$-upla, onde n é o rótulo de grau $n-1$, e há $(n-2)$ posições no Código, então, há n^{n-2} distintas n-uplas e, portanto, árvores. □

5.3 Outros resultados

Também podemos adaptar a fórmula de Cayley para contar florestas enraizadas.

A diferença entre árvore e floresta é que a primeira é conexa e a segunda não precisa ser conexa (mas poderia). Observe que toda floresta é uma união disjunta de árvores, o que justifica a nomenclatura.

Uma árvore é denominada enraizada se um vértice é escolhido como especial. Esse vértice é chamado raiz. Uma árvore que não é enraizada é denominada livre.

Se quisermos contar árvores enraizadas rotuladas com n vértices, podemos apenas multiplicar por n o total de árvores rotuladas, para as possíveis escolhas da raiz. Assim, o número de árvores enraizadas rotuladas em n vértices é $n \cdot n^{n-2} = n^{n-1}$.

O número de florestas rotuladas em n vértices com exatamente k componentes onde cada componente é enraizada é dado por $\binom{n-1}{k-1} \cdot n^{n-k}$. Note que, se $k = 1$ temos

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot n^{n-k} = \binom{n-1}{1-1} \cdot n^{n-1} = \binom{n-1}{0} \cdot n^{n-1} = 1 \cdot n^{n-1} = n^{n-1}.$$

Além disso, temos outro resultado interessante. O número total de florestas rotuladas em n vértices é dado por $(n+1)^{n-1}$, pois cada floresta enraizada rotulada pode ser transformada em uma árvore rotulada com um vértice extra, adicionando um vértice com o rótulo $n + 1$ e conectando-o a todas as raízes das árvores na floresta.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, observamos uma interessante maneira de provar o teorema de Cayley, um teorema simples matematicamente falando, mas que seria muito difícil de ser provado sem o uso do princípio bijetivo, ou seja, através de outros métodos de contagem usualmente apresentados no Ensino Médio. Apresentamos alguns dos conceitos fundamentais sobre a teoria dos grafos. Foi feito um estudo sobre a fórmula de Cayley para a contagem de árvores geradoras de um grafo completo. Para um grafo completo com n vértices, constatou-se que o número de árvores geradoras rotuladas é dado pela fórmula n^{n-2}. A demonstração proposta por Prüfer em 1918, para essa contagem, é dada por um algoritmo que se baseia na construção de sequências numéricas de acordo com uma numeração dos vértices do grafo dado, estabelecendo uma bijeção entre o conjunto de sequências e o número de árvores geradoras do grafo completo.

A utilização de função, princípio bijetivo, grafos e código de Prüfer nos mostra como a matemática é coesa e interligada entre seus ramos. Essa ligação nos faz ter a certeza de que a matemática nos oferece ainda, muitos caminhos a serem desvendados.

Estudar funções é sempre um caminho de novas aprendizagens, já que praticamente toda a matemática fala em linguagens de conjuntos, que nos levam às funções. Revisar conceitos e nos apropriar formalmente de conceitos já definidos, anteriormente de maneiras não sólidas, nos enriquece.

O presente trabalho também nos fez inteirar-se sobre o princípio bijetivo, de entendimento simples, mas muito útil na contagem de elementos de conjuntos de uma forma interessante e inteligente, haja vista que se utiliza de outro conjunto.

Em teoria dos grafos, que iniciamos no problema tradicional sobre as pontes de Konigsberg, com o matemático suíço Leonard Euler, o trabalho mostrou a importância de uma teoria relativamente recente. Foi abordada a relação desta ferramenta com a realidade atual e um pouco do seu desenvolvimento histórico, assim como definições básicas e suas aplicações. Vimos, no estudo de grafos, conceitos que partiram desde a sua definição, passando por ciclos, nós, por exemplo, até chegarmos ao conceito o qual utilizaríamos para o objetivo final deste trabalho, a prova do teorema de Cayley. Lembrando que isso é apenas a ponta do icebergue, uma vez que há livros inteiros sobre Teoria dos Grafos.

O código de Prúfer, que se utiliza de uma técnica acessível, sistemática e de fácil compreensão, se apresentou neste trabalho como algo muito interessante, curioso e útil.

Apresentados algo pouco estudado no Ensino Médio e desconhecido por muitos.

Diante do apresentado, este trabalho, além de mostrar definições básicas de função e grafos, mostrou também a utilização dessas áreas para uma maneira elegante e interessante de provarmos o teorema de Cayley.

REFERÊNCIA

BONDY, J. A., MURTY, U. R. S.. **Graph theory with applications**. 5° edn. New York: North Holland, 1982

C.L. Lucchesi. **Introdução à Teoria dos Grafos**. 12º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1979.

Elon Lages Lima. **Curso de Anál*ise***. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. Volume 1. (Projeto Euclides)

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática elementar 1: conjuntos e funções**. 8º Ed, São Paulo: Editora Atual, 2004.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**. Rio de janeiro: LTC, 2001. 4.v.

HARARY, F.. **Graph Theory**, 1° edn. Menlo Park: Addison Wesley Pub. Co. Inc. 1969

LEITHOLD, L.: **O Cálculo com Geometria Analítica**. Harbra, 1994. 2, v.

MIRANDA PINHEIRO, C. A. **O ensino de análise combinatória a partir de situações-problema**. 2008. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, 2008.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: combinatória/ Caminha Muniz Neto.** 2ºed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

SHINE, Carlos. **Programa Olímpico de Treinamento: curso de combinatória** – Nível 3. Aula 1. Disponível em: <https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/combinatoria3/Aula01-Contagem.pdf > . Acesso em: 01 de julho de 2018.

SHINE, Carlos. **Programa Olímpico de Treinamento: curso de combinatória** – Nível 3. Aula 2. Disponível em: <https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/combinatoria3/Aula02-Bijecoes_e_Contagem.pdf> . Acesso em: 01 de julho de 2018.

SILVA COSTA, E. R. **Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do Ensino Médio.** 2013. 107f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Lavras. Minas Gerais, 2013.

STEWART, J. **Cálculo. 3° Ed.**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. V.1.

VAN LINT, J.H; WILSON, R.M. **A Course in Combinatorics**. Cambridge University Press, 2001.