



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL**

**FRANCISCO JOSÉ SANTOS UCHÔA**

**A GEOMETRIA ESFÉRICA E A DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO  
GLOBO NA PERSPECTIVA DO GEOGEBRA**

**FORTALEZA  
2018**

**FRANCISCO JOSÉ SANTOS UCHÔA**

**A GEOMETRIA ESFÉRICA E A DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO  
GLOBO NA PERSPECTIVA DO GEOGÉBRA**

Dissertação de Mestrado  
apresentação ao Programa de Pós-  
Graduação em Matemática em Rede  
Nacional, do Departamento de  
Matemática da universidade Federal  
do Ceará, como requisito parcial  
para obtenção do Título de Mestre  
em Matemática. Área de  
concentração: Ensino de  
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Valter  
Lopes Nunes

**FORTALEZA  
2018**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- U19g Uchôa, Francisco José Santos.  
A geometria esférica e a distância entre dois pontos do globo na perspectiva do  
geogebra / Francisco José Santos Uchôa. – 2018.  
47 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede  
Nacional, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes.
1. Geometria não euclidiana. 2. Geogebra. 3. Ensino médio. I. Título.

CDD 510

---

**FRANCISCO JOSÉ SANTOS UCHÔA**

**A GEOMETRIA ESFÉRICA E A DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO  
GLOBO NA PERSPECTIVA DO GEOGÉBRA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.  
Orientador: Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes

Aprovada em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto  
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

À minha querida e  
inesquecível mãe Maria Cornélia  
Santos Uchôa (in memoriam).

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por sua grandeza e que na sua plenitude, podemos acreditar que alcançamos nossos objetivos mesmo quando somos pequenos e finitos.

A minha família, aqui menciono Otília Martins Rodrigues minha esposa, aos meus queridos filhos Pedro José Sousa Uchôa e Maria Isadora Souza Uchôa, que sempre me motivaram nesse processo de constância e de busca incansável.

Aos meus amigos Francisco Ricardo Moreira Sampaio e Maria Neurismar Araujo de Souza que me nortearam na construção desse projeto com muito esforço e apreço.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela criação e coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), programa que em curto prazo promoverá o impacto positivo no ensino da Matemática em todos os níveis.

À todos os Mestres do PROFMAT da Universidade Federal do Ceará (UFC) por suas contribuições em favor da formação profissional de todos os alunos do referido curso.

Ao Professor Orientador Dr. José Valter Lopes Nunes que se prontificou e deteve seu tempo na orientação e, sobretudo delineando normas do meu projeto que hoje concluo.

Aos Professores membros da banca Dr. José Othon Dantas Lopes e Dr. Ângelo Papa Neto, pela significativa contribuição na finalização dessa pesquisa.

“Ninguém ignora tudo.  
Ninguém sabe tudo. Todos nós  
sabemos alguma coisa. Todos  
nós ignoramos alguma coisa.  
Por isso aprendemos sempre.”  
(PAULO FREIRE)

## RESUMO

O presente trabalho caracteriza-se por um estudo exploratório e descritivo de natureza qualitativa de delineamento transversal. O período da pesquisa aconteceu no ano 2017 tendo como participantes os alunos de ensino médio de uma escola particular do município de Fortaleza. Objetivou-se promover o ensino aprendizagem a partir de conceitos sobre a geometria esférica de forma dinâmica e contextual, abordando o cálculo da distância entre dois pontos em sua superfície, dadas suas coordenadas geográficas, latitude e longitude, sobre uma modelagem do software Geogebra. Utilizamos como fundamentação teórica diversos autores entre eles STWART 2012, HELLMEISTER 2004, BORBA 2010. Concluiu-se que a utilização do software Geogebra no ensino de Geometria esférica em particular no cálculo da distância entre dois pontos no Globo Terrestre foi satisfatório. Esperamos com esse estudo ter contribuído no processo de ensino e aprendizagem da matemática e especificamente da Geometria Esférica de forma atual e contextualizada.

**Palavras-chaves:** Geometria não-euclidiana. Geogebra. Ensino Médio.



## **ABSTRACT**

The present work is characterized by an exploratory and descriptive study of a qualitative nature of transversal sketch design. The research period was held in 2017 with the participation of high school students from a private school in the city of Fortaleza. The objective of this study was to promote teaching learning from concepts about spherical geometry in a dynamic and contextual way, approaching the calculation of the distance between two points on its surface, given its geographical coordinates latitude and longitude on a GeoGebra software modeling. We used as theoretical foundation several authors among them STWART 2012, HELLMEISTER 2004, BORBA 2010. It was concluded that the use of GeoGebra software in the teaching of spherical geometry, in particular, calculating the distance between two points in the Terrestrial Globe was satisfactory. We hope that this study has contributed in the teaching and learning process of mathematics and specifically of Spherical Geometry in a current and contextualized way.

**Keywords:** Non-Euclidean Geometry. GeoGebra. High school.

## Lista de Ilustrações

Figura 1- O pai da Geometria	13
Figura 2 - Folha de Rosto da primeira versão inglesa de Os Elementos	14
Figura 3 - O postulado das paralelas de Euclides	16
Figura 4 - V postulado formado por Playfair	18
Figura 5 - Curvatura de uma superfície. Esquerda: Curvatura zero. Centro: Curvatura positiva. Direita: Curvatura negativa.	18
Figura 6 - Superfície esférica de centro O e raio r	19
Figura 7 - Secção plana de uma superfície esférica	20
Figura 8 - Ângulo esférico	20
Figura 9 - Medida do ângulo esférico	21
Figura 10 - Delineando Rumo numa Superfície Esférica	21
Figura 11 - Triângulo esférico MNK	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Figura 12 - A'B'C' é o triângulo polar de ABC	24
Figura 13 - Brasília - Fortaleza	29
Figura 14 - Representação do Rumo Brasília - Fortaleza	30
Figura 15 - Eixo Polar	32
Figura 16 - Interface do GeoGebra- Folha de Trabalho	34
Figura 17 - Barra de Ferramentas da Janela 2D	35
Figura 18 - Barra de Ferramentas das Janelas 2D e 3D	35
Figura 19 - Brasília - Fortaleza	39

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	11
<b>2</b>	<b>A GEOMETRIA ESFÉRICA</b> .....	13
<b>2.1</b>	<b>Uma breve história sobre Euclides de Alexandria</b> .....	13
2.1.1	A Obra Os Elementos.....	14
2.1.2	Os Elementos e Seus Conteúdos.....	14
2.1.3	Geometrias Não Euclidianas .....	15
2.1.4	O V Postulado .....	16
2.1.5	Curvatura de uma superfície .....	18
2.1.6	Elementos fundamentais da Geometria esférica .....	18
2.1.7	<i>Teorema dos senos para triângulos esféricos</i> .....	23
2.1.8	Lei dos cossenos para triângulos esféricos .....	25
2.1.9	Geometria Esférica: Uma conexão com a Geografia .....	31
<b>3</b>	<b>O GEOGEBRA</b> .....	33
<b>3.1</b>	<b>Conhecendo o Geogebra</b> .....	33
3.1.1	Múltiplas abordagens do Geogebra.....	34
3.1.2	Aplicabilidades na distância entre pontos.....	35
<b>4</b>	<b>A GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO MÉDIO E O GEOGEBRA ...</b>	<b>42</b>
<b>4.1</b>	<b>Contextualizando a Geometria Esférica</b> .....	42
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	46
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	47

## 1 INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana é um conteúdo de base no ensino da matemática no currículo escolar. A sua relevância se concretiza na construção cognitiva do aluno perceber o universo e nele se situar. A Geometria tem sua compreensão por via de pontos, reta e plano. Esses conhecimentos favorecem ao aluno um olhar cotidiano mais significativo referente às dimensões, perspectivas e profundidades.

Até o início do século XIX a Geometria apresentada por Euclides, era a única e verdadeira. Na sua obra, Os Elementos, o referido matemático apresenta a sustentação de sua geometria que é construída com axiomas e postulados. Não havia dúvida da validade dessa geometria, porém um grupo de matemáticos dentre eles, Saccheri (1667 – 1733 ), Beltrami ( 1835 – 1900), Bolyai (1802 – 1860), Lobachevsky (1792 – 1856 ), Gauss ( 1777 – 1855 ), Riemann ( 1826 – 1866 ) questionaram a exequibilidade do Postulado V, também conhecido como Postulado das paralelas, para determinadas situações..

Contrapondo a Geometria Euclidiana, que é usada para o estudo de superfície plana, ou seja, de curvatura zero, surgem então as chamadas Geometrias não Euclidianas que buscam possibilitar estudos mais precisos em situações não planas.

Esse trabalho surge da inquietação como professor de matemática do ensino médio na perspectiva de aliar a teoria, ou seja, axiomas e teoremas, relativos à geometria esférica, com recursos virtuais. Na tentativa de tornar mais dinâmica a maneira de resolver determinados problemas que envolvem superfícies esféricas em particular, cálculo de distância entre dois pontos, medir ângulos em um triângulo esférico, apresentamos todos esses problemas num contexto envolvendo cidades com suas latitudes e longitudes, buscou-se a utilização de tecnologias.

A busca pela utilização de novas tecnologias no ensino da geometria esférica motivou-se pela perspectiva de proporcionar aos alunos uma melhor compreensão visual do conteúdo relativo ao cálculo de distância de dois pontos no Globo Terrestre, bem como o cálculo do rumo quando se desloca de uma cidade a outra.

Para essa mudança metodológica utilizamos o software Geogebra que é um aplicativo de matemática interativa que associa geometria, álgebra, aritmética e cálculo. Sua distribuição possui acesso livre, disponível em multiplataforma e em vários idiomas, dentre os quais o português. Desenvolvido por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg em 2001 e uma equipe internacional de programadores, tem como objetivo ser um instrumento facilitador do ensino e aprendizagem de matemática.

O presente trabalho caracteriza-se por um estudo exploratório e descritivo de natureza qualitativa de delineamento transversal. O período da pesquisa aconteceu no ano 2017 tendo como participantes os alunos de

ensino médio de uma escola particular do município de Fortaleza. Objetivou-se promover o ensino aprendizagem a partir de conceitos sobre a geometria esférica de forma dinâmica e contextual, abordando o cálculo da distância entre dois pontos em sua superfície, dados suas coordenadas geográficas (latitude e longitude) sobre uma modelagem do software Geogebra. Buscou-se também abordar os aspectos históricos que norteiam a geometria esférica e sua aplicação, citar aspectos teóricos sobre a Geometria Esférica e seus elementos; apresentar matematicamente os teoremas dos senos e cossenos na Geometria esférica; apresentar o uso do Geogebra como recurso do cálculo de distância entre dois pontos no Globo Terrestre. Com isso o estudo subdivide-se em três capítulos:

No capítulo 1, abordamos o processo histórico da Geometria Esférica bem como as definições, as principais propriedades e sua aplicabilidade no contexto matemático.

No Capítulo 2, apresentamos o software Geogebra, aqui fazendo um contexto histórico da criação e suas múltiplas funções, na qual abordaremos a aplicabilidade na distância de pontos no globo terrestre.

No Capítulo 3, discutimos o ensino e a importância da geometria esférica no ensino médio com o uso do Geogebra.

Finalmente apresentaremos o percurso metodológico da pesquisa bem como o resultado e as conclusões.

## 2 A GEOMETRIA ESFÉRICA

Neste capítulo, fazemos um breve histórico sobre a obra de Euclides, permeando seus axiomas e postulados, como também as Geometrias Euclidianas e Não Euclidiana, pontuando seus elementos fundamentais e também fazendo uma ampla escrita de suas aplicabilidades na Geometria Esférica.

### 2.1 Uma breve história sobre Euclides de Alexandria

Não se pode refutar o fato de que Euclides de Alexandria, um mestre escritor e matemático, criou e difundiu a Geometria, um campo da Matemática que até hoje se conhece e leva seu nome: Geometria Euclidiana.

Ao longo da história até os dias atuais, pouco se sabe a respeito desse matemático enigmático que construiu uma obra que perpassa o tempo, onde vem sofrendo mudanças conceituais e simbólicas. Os defensores e percussores de sua obra e também matemáticos Proclo Diadochus (410 – 485) e Pappus de Alexandria (290 – 350), foram os responsáveis e até hoje a única fonte do breve histórico de vida desse grande matemático Euclides. Um homem a frente do seu tempo, provavelmente de origem grega e criador da clássica obra Os Elementos.

Euclides o pai da geometria que viveu por volta do ano 300 a.C., no entanto a sua principal contribuição se encontra na famosa obra Os Elementos, que reúne quase todo o conhecimento matemático da época. Esta tamanha obra foi encontrada em fragmentos cerca de 100 anos depois de Cristo (Geraldo Ávila). Conhecido como o pai da geometria isso por que Euclides organizou a geometria em axiomas e postulados cujos pensamentos geométricos tinham como sustentação nesses axiomas. O aspecto mais importante de Os Elementos foi sem dúvida o encadeamento lógico - dedutivo de que um número reduzido de proposições e definições serviram como base para demonstrações dos vários teoremas.



Figura 1- O pai da Geometria

### 2.1.1 A Obra Os Elementos

Os Elementos de Euclides é praticamente tudo o que temos da matemática grega, que teve seu início e desenvolvimento com Tales de Mileto, que viveu no século VI a.C., até o tempo de Euclides um período de cerca de 250 anos. Não sabemos se Euclides escreveu Os Elementos para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Uma Obra que contém 465 proposições distribuídos em um conjunto de 13 volumes contemplando não somente geometria, mas também Aritmética e “Álgebra”. Os seis primeiros volumes abordam a geometria plana elementar; neste os quatro primeiros trazem conhecimento vindo certamente do período jônico, em especial da escola Pitagórica, Os três livros seguintes tratam da teoria dos números, e vieram provavelmente da escola Pitagórica, o livro X sobre incomensuráveis, finalmente, os três últimos livros tratam da geometria espacial ou tridimensional.

Afirma-se que depois da Bíblia, Os Elementos é o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental.

### 2.1.2 Os Elementos e Seus Conteúdos

- 1º Livro – Fundamentos da Geometria Plana;
- 2º Livro – Álgebra Geométrica;
- 3º Livro – Teoria da Circunferência;
- 4º Livro – Figuras Inscrita e Circunscrita;
- 5º Livro – Teoria das proposições de Eudoxo ( Abstrata);
- 6º Livro – Figuras Semelhança e Proporcionais ;
- 7º Livro – Teoria dos Números;
- 8º Livro – Continuação de proposições e Teoria dos Números.
- 9º Livro – Teoria dos Números;
- 10º Livro – Incomensurabilidade;
- 11º Livro – Geometria dos Sólidos;
- 12º Livro – Medição de Figuras;
- 13º Livro – Sólidos Regulares.



Figura 2 - Folha de Rosto da primeira versão inglesa de Os Elementos

### 2.1.3 Geometria Não Euclidiana

As Geometrias não Euclidianas apareceram no século XIX, no entanto, não se deve apenas aos matemáticos desse século. Por bem mais de mil anos, os matemáticos tentaram consertar aquilo que viram como falha. Queriam se livrar de um postulado desconfortável através de uma prova o que faria com que o Postulado passasse a ser um Teorema. Euclides muito sábio em suas deduções de seus teoremas a partir de argumentações básicas, no qual ele classificou como definições, postulados e noções comuns. Embora sua estrutura muito apurada, intuitiva e concisa, inesperadamente o V postulado veio com uma avalanche de questionamentos; que fez alguns matemáticos contestarem a partir da discussão desse postulado, surgindo então às geometrias não euclidianas: Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica ou Esférica. Ainda no aspecto histórico um dos matemáticos a tentar mostrar por redução ao absurdo o V postulado de Euclides foi Giovanni Girolano Saccheri (1667 – 1733). Saccheri foi um padre jejuíta e professor de matemática da universidade de Pavia, sua obra mais conhecida é *Euclides livre de Todos os Erros de 1733*, em que praticamente descobriu a primeira Geometria Não – Euclidiana, porém não tendo muito êxito em sua demonstração (quadrilátero de Saccheri), no entanto mais tarde Eugênio Beltrami ( 1835 – 190 ) descobriu o seu trabalho. Percebeu-se por volta do ano de 1830 que o postulado das paralelas não se demonstraria a partir dos outros quatro, e que daí se desenvolveria uma geometria dada a negação do postulado da paralelas. Com os questionamentos levantados sobre o V postulado novos objetos matemáticos ecoavam e a essa inquietação fez surgir novas geometrias. Um deles os matemático húngaro Janos Bolyai ( 1802 – 1860 ), o russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793 – 1856) trataram a questão sobre três aspectos: por um ponto não contido numa reta dada, passa mais de uma apenas uma ou nenhuma reta paralela a reta dada, já o alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), por se tratar o maior matemático da sua época diante de sua descoberta por volta da década de 1820 convenceu-se de que é possível haver geometria em que o quinto postulado deixa de ser válido, por conseguinte o alemão George Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), estabeleceu uma base de uma nova geometria, chamada Esférica, quando diz que “Não existe paralelas a uma reta dada”(COUTINHO, 1989, p.65).



#### 2.1.4 O V Postulado

O quinto postulado do 1º Livro da obra de Euclides, é o mais famoso dos postulados. Surgiu acompanhado de descrenças pelos matemáticos, mas muito por fruto de dúvidas quanto de veracidade, conhecido como axiomas das paralelas, que conduziu a criação de outros tipos de geometrias.

Transcreve-se abaixo como na época:

“Se uma linha reta cruzando duas linhas retas forma os ângulos internos do mesmo lado somando menos de dois ângulos retos, as linhas retas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se do lado em que estão os dois ângulos menores que dois ângulos retos” . Figura 3

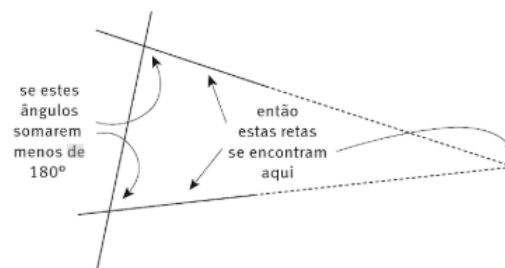


Figura 3 - O postulado das paralelas de Euclides

#### Axiomas do Livro I (Euclides, 2009)

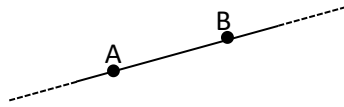
- Axioma I – As coisas iguais A mesma coisa são também iguais entre si.
- Axioma II – E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
- Axioma III – E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
- Axioma IV – E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
- Axioma V – E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
- Axioma VI – E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
- Axioma VII – E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
- Axioma VIII – E o todo [é] maior do que a parte.
- Axioma IX – E duas retas não contém uma área.

#### Postulados do Livro I (Euclides, 2009)

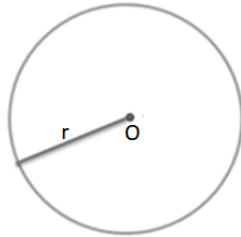
- Postulado I - Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.



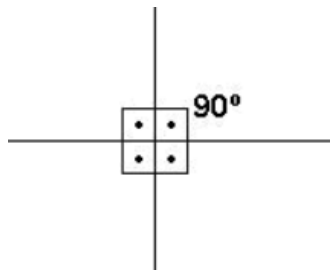
- Postulado II - Uma linha reta pode ser prolongada ( de uma única maneira ) indefinidamente.



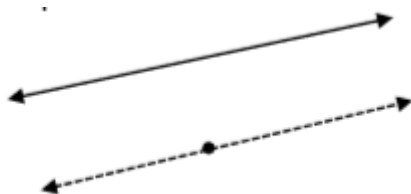
- Postulado III – Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.



- Postulado IV - Todos os ângulos retos são iguais.



- Postulado V - Num plano, por um ponto fora de uma reta existe uma é somente uma paralela à reta dada.



Por vários séculos, diversos matemáticos tentaram transformar o V Postulado em um teorema, tentando demonstrá-lo a partir dos axiomas e postulados anteriores. Mas essas tentativas foram frustradas, sempre sendo resistente em outras afirmativas semelhantes ao V Postulado, tendo um enunciado equivalente, que foi apresentado por John Playfair, em 1795. Por um ponto P exterior a uma reta r, passa uma única reta paralela à reta dada.

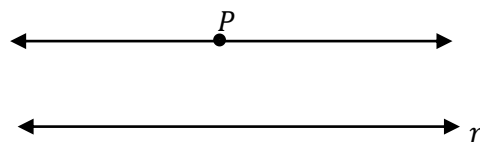


Figura 4 - V postulado formado por Playfair

Podemos definir retas paralelas como sendo retas que não se interceptam. Na esfera, dados dois círculos máximos, estes intersectam sempre em dois pontos antípodas (pontos diametralmente opostos). Por exemplo, os meridianos terrestres intersectam-se no Polo Norte e Polo Sul.

Este conjunto de axiomas e postulados foi o fundamento para o surgimento da Geometria Euclidiana.

#### 2.1.5 Curvatura de uma superfície

Todo o processo das geometrias tem sua distinção a partir das superfícies planas ou não planas de curvatura zero e de curvatura diferente de zero, Figura 5. Quando tem curvatura zero, esta é achatada e nos referimos ao plano euclidiano (Geometria Euclidiana). Uma esfera tem a mesma curvatura em todo lugar, e é positiva o que referimos a uma geometria não euclidiana, como também as de superfícies de curva negativa constante: em qualquer ponto ela parece uma sela, essa superfície é chamada de plano Hiperbólico, e pode ser representada em várias formas prosaicas. (IAN STEWART)

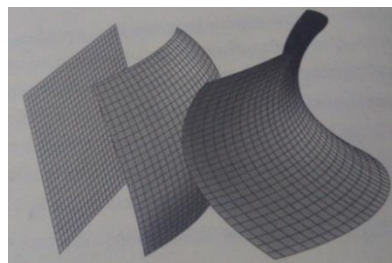


Figura 5 - Curvatura de uma superfície. Esquerda: Curvatura zero. Centro: Curvatura positiva. Direita: Curvatura negativa.

#### 2.1.6 Elementos fundamentais da Geometria esférica

Nesta secção será abordado os elementos de uma superfície esférica como também definições e suas propriedades, soma das medidas dos ângulos internos em um triângulo esférico, definição de triângulo esféricos polares volume de uma esfera, como também teoremas dos senos e cossenos.

Elementos importantes em uma superfície esférica.

- SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Definição: Chamaremos de superfície esférica de centro  $O$ , e raio  $r$  ao conjunto dos pontos do espaço, cuja distância ao ponto  $O$  é igual a  $r$  com  $r$  real e  $r > 0$ .

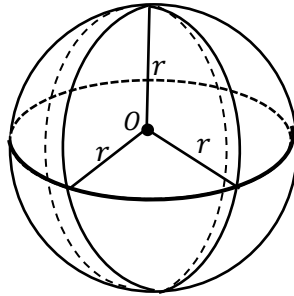


Figura 6 - Superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$

Os pontos do espaço cuja distância ao ponto  $O$  (origem) é menor do que  $r$  são interiores à superfície esférica. Desse modo, a reunião da superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  com seus pontos interiores são chamados de esfera de centro  $O$  e raio  $r$ .

**1º Teorema:** O Volume da esfera de centro  $O$  e raio  $r$  é.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Tomemos um sólido de revolução cuja região gerada tem um volume  $V$ , sob um gráfico de uma função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  em torno do eixo  $Ox$  é:

Ou seja  $V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx$ , daí temos que  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , com  $r > x$ , definida no intervalo  $[-r, r]$ , isto posto temos:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi \cdot [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r \\ &= \pi \left( r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

□

- CIRCUNFERÊNCIA MÁXIMA

Denomina-se circunferência máxima a secção plana determinada pela intersecção da superfície esférica com um plano que passa pelo seu centro.

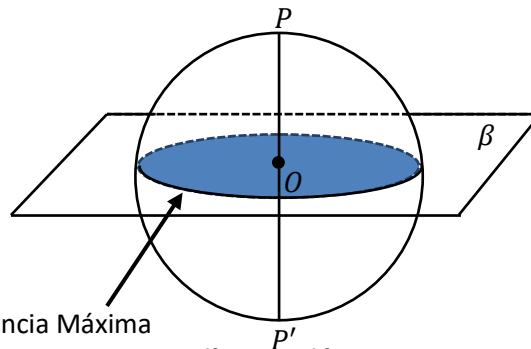


Figura 7 - Secção plana de uma superfície esférica  
 Ao intersectar a superfície esférica com um plano  $\beta$  que passe pelo seu centro é denominada circunferência máxima

- **ÂNGULO ESFÉRICO**

Denomina-se ângulo esférico o ângulo formado pela intersecção de dois arcos de circunferência máxima, em que os lados são os arcos e o seu ponto de intersecção, o vértice; além disso, a medida do ângulo esférico é por definição igual à medida do ângulo diedro formado pelos planos que contém as circunferências máximas.

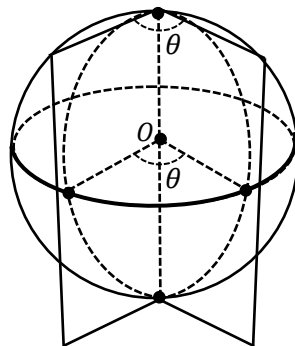


Figura 8 - Ângulo esférico

Na figura abaixo, temos que  $\widehat{MPN}$  é um ângulo esférico, na superfície esférica de centro  $O$  e raio  $\overline{OP}$ , daí podemos chegar a conclusão que a medida desse ângulo esférico ( $\theta$ ) é menor que ou igual a  $180^\circ$ .

Considere o plano  $OMN$  que determina a circunferência máxima de pontos  $KMN$ , cujo polo é  $P$ , que é vértice do referido ângulo esférico. Como o ângulo diedro formado pelos planos  $MPO$  e  $NPO$  é medido pelo plano  $\widehat{MON}$  o qual por sua vez, é medido pelo arco  $\widehat{MN}$ , segue-se que um ângulo esférico é medido pelo menor arco de circunferência máxima, cujo polo é o vértice do ângulo.

Desse modo, teremos que a medida de um ângulo esférico ( $\theta$ ) é menor que ou igual a  $180^\circ$ .

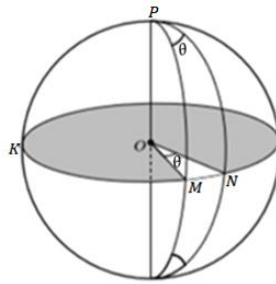


Figura 9 - Medida do ângulo esférico

- Definindo o Rumo em uma Superfície Esférica  
Consideremos a superfície terrestre, como uma superfície esférica.

Tomemos a seguinte observação:

O planeta terra não é uma esfera perfeita, e sim aproximadamente uma elipsoide, uma vez que é achatada nos polos. No entanto, o valor desse achatamento é extremamente pequeno, o que nos permite, para efeito de cálculo, desprezá-lo e considerar a Terra como se fosse uma esfera. (RPM,N.95,P.43,1º TRIMESTRE de 2018)

Assim, vamos definir que quando um móvel se desloca de um ponto  $M$  para um ponto  $N$  na superfície terrestre, o seu **rumo**, em cada instante é o ângulo esférico que o arco de circunferência máxima que contém os pontos  $MN$  forma com o meridiano do móvel no instante considerado, medido a partir do Norte no sentido horário, ou seja, é o diedro formado pelos dois planos que contém respectivamente esse meridiano e o círculo máximo que passa por  $MN$ .

Por exemplo: um móvel deve ir de  $M$  para  $N$ , o rumo inicial, em  $M$ , é o ângulo  $P\hat{M}N$  e o rumo de chegada é o ângulo  $P\hat{N}K$ , no ponto  $N$ .

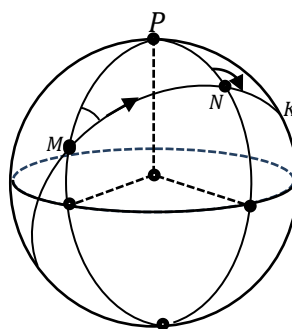


Figura 10 - Delineando Rumo numa Superfície Esférica

Triângulo esférico.

Chama-se triângulo esférico como a porção da superfície esférica limitada pelos arcos de três circunferências máximas, menores do que uma semicircunferência, que se intersectam dois a dois. Os arcos são chamados de lados, e os vértices dos três ângulos esféricos são também os vértices do triângulo esférico.

A Figura 11 ilustra um triângulo esférico  $MNK$ , em que seus lados são  $m, n$  e  $k$  e seus ângulos internos são os ângulos esféricos  $\widehat{M}, \widehat{N}$  e  $\widehat{K}$  destacados.

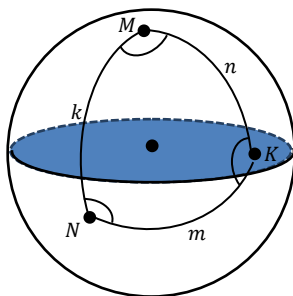


Figura 11 - Triângulo esférico MNK

### Triângulos esféricos polares

Seja  $ABC$  um triângulo esférico. Construamos três circunferências máximas tais que os vértices  $A, B$  e  $C$  seja seus respectivos polos. Agora, sejam  $A'$  a interseção das circunferências máximas que possuem  $B$  e  $C$  como polos e, que localiza-se no mesmo hemisfério do lado  $\widehat{BC}$ ; por  $B'$  a interseção das circunferências máximas que possuem  $A$  e  $C$  como polos e, que localiza-se no mesmo hemisfério do lado  $\widehat{AC}$ ; e por  $C'$  a interseção das circunferências máximas que possuem  $A$  e  $B$  como polos e, que localiza-se no mesmo hemisfério do lado  $\widehat{AB}$ . Desse modo, obtemos outro triângulo esférico  $A'B'C'$ . Daí segue a definição de triângulo polar.

Definição de triângulo Polar: O triângulo polar de um triângulo esférico  $ABC$  é outro triângulo esférico  $A'B'C'$  que se obtêm a partir de circunferências máximas cujos polos são os vértices do triângulo  $ABC$ .

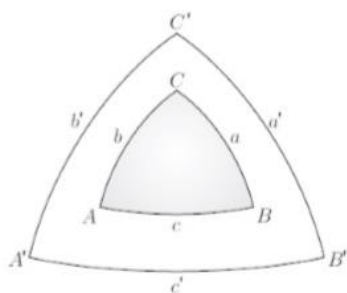


Figura 12:  $A'B'C'$  é o triângulo polar de  $ABC$

Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Dado um triângulo numa superfície esférica, cujos lados são arcos de circunferências máximas, percebe-se que a soma dos ângulos internos diferencia quando se trata de triângulo numa superfície plana.

**2º Teorema:** A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico está compreendida entre  $180^\circ$  e  $540^\circ$ .

Demonstração: Considere um triângulo esférico  $XYZ$ , de ângulos internos  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  e  $\hat{Z}$  e o seu triângulo polar  $\hat{X}'$ ,  $\hat{Y}'$  e  $\hat{Z}'$ . Desse modo temos:

$$\hat{X} = 180^\circ - x'$$

$$\hat{Y} = 180^\circ - y'$$

$$\hat{Z} = 180^\circ - z'$$

Podemos ainda ter que:

$\hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z} = 540^\circ - (x' + y' + z')$ , por outro lado, temos que:

$0 < x' + y' + z' < 360^\circ$ , substituindo temos:

$$180^\circ < \hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z} < 540^\circ$$

■

### 2.1.7 Teorema dos senos para triângulos esféricos

Nesta seção, antes de provarmos o teorema dos senos para triângulos esféricos serão dadas algumas definições prévias para um embasamento substancial a devida demonstração.

- Teorema dos senos

Seja  $ABC$  um triângulo esférico, com os lados (arcos)  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Então:

$$\frac{\text{sen}(\hat{A})}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\hat{B})}{\text{sen}(b)} = \frac{\text{sen}(\hat{C})}{\text{sen}(c)}$$

Demonstração do Teorema dos senos da geometria Esférica



Consideremos o triângulo esférico  $ABC$ , sobre a superfície esférica de centro  $O$ . Tomemos um ponto  $P$  sobre o raio  $\overline{OA}$ . Seja  $\overline{PD}$  a perpendicular ao plano  $OBC$ , traçada a partir de  $P$ , e  $E, F$  os pés das perpendiculares traçadas por  $D$  sobre os raios  $\overline{OB}$  e  $\overline{OC}$ , respectivamente.

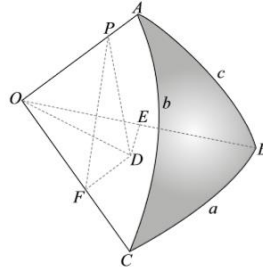


Figura 11 - A reta  $\overline{PD}$

Assim, como as retas  $\overline{PD}$  e  $\overline{DE}$  são ambas ortogonais ao raio  $\overline{OB}$ , o plano definido por essas retas é perpendicular a  $\overline{OB}$  e, portanto, a reta  $\overline{PE}$  desse plano é perpendicular a  $\overline{OB}$ . Da mesma forma, a reta  $\overline{PF}$  é perpendicular a  $\overline{OC}$ . Consequentemente, os ângulos  $\hat{P}ED$  e  $\hat{P}FD$  são congruentes aos ângulos internos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ .

Portanto, usando o triângulo  $\Delta OPE$ , temos que:

$$\text{sen}(c) = \frac{PE}{OP} \quad (1)$$

e, usando o triângulo  $\Delta PED$ , temos que:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{PD}{PE} \quad (2)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (1) e (2), obtemos que:

$$\text{sen}(c) \cdot \text{sen}(\hat{B}) = \frac{PD}{OP} \quad (3)$$

Analogamente, usando os triângulos  $\Delta OPE$  e  $\Delta PFD$ , chegaremos que:

$$\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\hat{C}) = \frac{PD}{OP} \quad (4)$$

Logo,

$$\text{sen}(c) \cdot \text{sen}(\hat{B}) = \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\hat{C})$$

Segue que:

$$\frac{\text{sen}(\hat{B})}{\text{sen}(b)} = \frac{\text{sen}(\hat{C})}{\text{sen}(c)}$$

Agora, considerando um ponto  $Q$  sobre o raio  $\overline{OB}$  e realizando uma construção inteiramente análoga, teremos:

$$\frac{\text{sen}(\hat{A})}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\hat{C})}{\text{sen}(c)}$$

O que conclui a demonstração do teorema.

### 2.1.8 Lei dos cossenos para triângulos esféricos

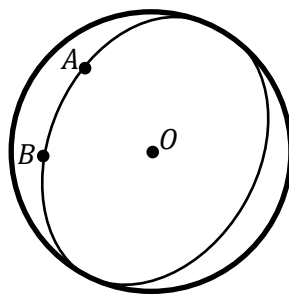
#### Teorema dos Cossenos

Seja  $ABC$  um triângulo esférico, com lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e ângulo interno  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Então:

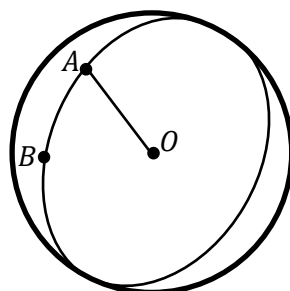
$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen } b \cdot \text{sen } c \cdot \cos \hat{A}$$

Tomemos aqui alguns elementos que servirão de base para a demonstração do teorema dos cossenos, como a construção de uma reta tangente a uma circunferência máxima de uma superfície esférica, por um ponto pertencente a essa superfície.

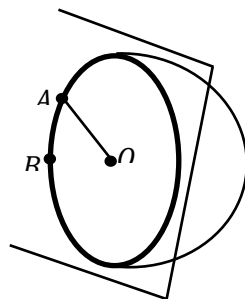
$\widehat{AB}$  é um arco de uma circunferência máxima de centro  $O$ . Construir pelo ponto  $A$ , uma reta tangente ao arco  $\widehat{AB}$ .



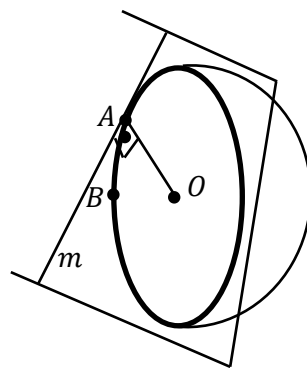
1. Ligar o centro  $O$  da esfera ao ponto  $A$ , obtendo o raio  $OA$  da esfera.



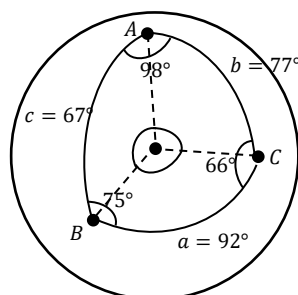
2. Criar o plano que passa por  $A$ ,  $O$  e  $B$ .



3. Nesse plano, pelo ponto  $A$ , construir a reta  $m$  perpendicular ao segmento  $AO$ . Essa reta  $m$  é a tangente procurada.



Lembrando que na geometria esférica as “linhas retas” são representadas por circunferências máximas. Considerando então um triângulo  $ABC$  construído numa superfície esférica, assim os lados do triângulo esférico  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  são arcos contidos em circunferências máximas. Por meio de um exemplo, vamos precisar o significado de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$ .



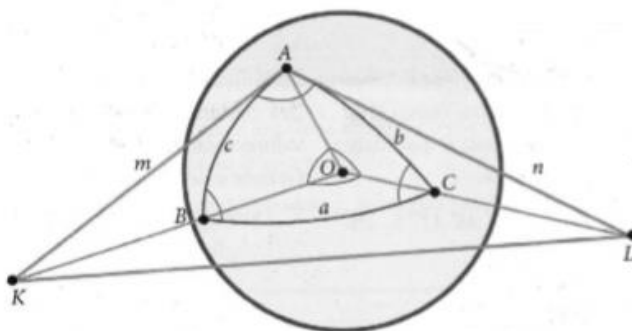
Percebemos que dados dois pontos  $A$  e  $B$  de uma circunferência máxima de centro  $O$ , que não são extremidades de um diâmetro, dividem a circunferência em dois arcos, cuja soma das medidas dos arcos é  $360^\circ$ . O ângulo  $A\hat{O}B$  associado ao arco menor recebe o nome de ângulo central. Tomando como  $\theta$  a medida desse ângulo central decorre que o arco menor

tem a mesma medida  $\theta$ , o que implica que o arco maior tem medida  $360^\circ - \theta$ . Na superfície esférica citada suponhamos que os ângulos centrais  $AOB$ ,  $AOC$  e  $BOC$  medem, respectivamente,  $67^\circ$ ,  $77^\circ$  e  $92^\circ$ . Portanto, os correspondentes arcos  $c = AB$ ,  $b = AC$  e  $a = BC$  medirão também  $67^\circ$ ,  $77^\circ$  e  $92^\circ$ . O ângulo entre as retas tangentes aos arcos  $AB$  e  $AC$  mede  $98^\circ$  e corresponde ao ângulo  $A$  do triângulo esférico  $ABC$ . De modo análogo, o ângulo entre as retas tangentes aos arcos  $BC$  e  $BA$  no ponto  $B$  mede  $75^\circ$  e será indicado por  $B$  e aquele entre as tangentes aos arcos  $CB$  e  $CA$  no ponto  $C$  mede  $66^\circ$  e será indicado por  $C$ .

Observando esse exemplo a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo esférico  $ABC$  é maior que  $180^\circ$ . Esse é um resultado da geometria esférica e mostra que as propriedades geométricas dos objetos situados numa superfície esférica diferem daquelas de objetos situados num plano euclidiano. Estamos tratando de uma geometria não euclidiana, a Geometria Esférica.

#### Demonstração do Teorema dos cossenos

Dado o triângulo esférico  $ABC$ . Pelo ponto  $A$  tracemos as retas tangentes aos arcos  $AB$  e  $AC$ . Vamos nomeá-las de  $m$  e  $n$ . O ângulo formado por essas retas é o ângulo  $A$ . Seja  $K$  a intersecção da tangente  $m$  com a reta  $OB$  e  $L$  a intersecção da reta tangente  $n$  com a reta  $OC$ . Observem que, com  $AK$  e  $AL$  são tangentes aos arcos  $AB$  e  $AC$ , então os ângulos  $KAO$  e  $LAO$  são retos.



Aplicamos o teorema dos cossenos da trigonometria plana aos triângulos  $AKL$  e  $OKL$ :

$$KL^2 = AK^2 + AL^2 - 2 \cdot AK \cdot AL \cdot \cos \hat{A}$$

$$KL^2 = OK^2 + OL^2 - 2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos a$$

Das duas igualdades:

$$AK^2 + AL^2 - 2 \cdot AK \cdot AL \cdot \cos \hat{A} = OK^2 + OL^2 - 2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos a \quad (1)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos KAO e LAO, teremos:

$$OK^2 = R^2 + AK^2 \quad (2)$$

$$\text{e } OL^2 = R^2 + AL^2 \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), teremos:

$$AK^2 + AL^2 - 2 \cdot AK \cdot AL \cdot \cos \hat{A} = R^2 + AK^2 + R^2 + AL^2 - 2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos a$$

Cancelando os termos semelhantes, resulta:

$$-2 \cdot AK \cdot AL \cdot \cos \hat{A} = 2R^2 - 2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos a \quad (4)$$

Aplicando relações trigonométricas aos triângulos retângulos KAO e LAO, teremos:

$AK = OK \cdot \sin c$ ;  $AL = OL \cdot \sin b$ ;  $R = OL \cdot \cos b$  e  $R = OK \cdot \cos c$ . Substituindo esses valores em (4):

$$-2 \cdot OK \cdot \sin c \cdot OL \cdot \sin b \cdot \cos \hat{A} = 2OL \cdot \cos b \cdot OK \cdot \cos c - 2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos a$$

Donde

$$-2 \cdot \sin c \cdot \sin b \cdot \cos \hat{A} = 2 \cdot \cos b \cdot \cos c - 2 \cdot \cos a$$

Portanto,

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A},$$

o que demonstra o teorema.

Cito como exemplo as seguintes aplicações, subdivididas em dois itens:

1. As cidades de Brasília e Fortaleza têm latitudes iguais a  $15^\circ 46' 47''$  S e  $3^\circ 43' 02''$  S, respectivamente, e longitudes iguais, respectivamente, a  $47^\circ 55' 47''$  W e  $38^\circ 32' 35''$  W.

1.1. Qual o rumo inicial de uma viagem aérea de Brasília a Fortaleza?

Consideremos o triângulo  $ABC$ , onde  $A$  é o polo Norte,  $B$  a cidade de Brasília e  $C$  a cidade de Fortaleza, como mostra a figura abaixo.

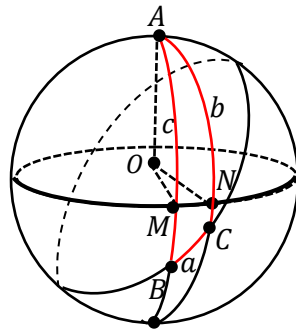


Figura 12 - Brasília - Fortaleza

O ângulo  $\hat{A}$  é o ângulo  $M\hat{O}N$  formado pelos planos  $BOA$  e  $COA$ , isto é, o ângulo  $\hat{A}$  é igual a diferença entre as longitudes de  $B$  e  $C$ :

$$\hat{A} = 47^{\circ}55'47'' - 38^{\circ}32'35'' = 9^{\circ}23'12''$$

Como as latitudes de Brasília e Fortaleza são  $15^{\circ}46'47''$  S e  $3^{\circ}43'02''$  S, respectivamente, temos que:

$$b = 90^{\circ} + 3^{\circ}43'02'' = 93^{\circ}43'02''$$

$$c = 90^{\circ} + 15^{\circ}46'47'' = 105^{\circ}46'47''$$

O lado  $BC = a$  pode ser obtido pelo teorema dos cossenos, como faremos a seguir:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos(93^{\circ}43'02'') \cdot \cos(105^{\circ}46'47'') \\ &+ \sin(93^{\circ}43'02'') \cdot \sin(105^{\circ}46'47'') \cdot \cos(9^{\circ}23'12'') \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } \cos a = 0,9651, \text{ daí } a = 15^{\circ}10'54''$$

Finalmente, aplicando o teorema dos senos no triângulo esférico  $ABC$ , determinaremos o ângulo  $\hat{B}$ , que corresponde ao rumo inicial da viagem de Brasília a Fortaleza:

$$\frac{\sin(\hat{B})}{\sin(93^{\circ}43'02'')} = \frac{\sin(9^{\circ}23'12'')}{\sin(15^{\circ}10'54'')}$$

$$\text{Portanto, } \sin(\hat{B}) = 0,6215, \text{ daí } \hat{B} = 38^{\circ}25'33''.$$

Logo, o rumo inicial da viagem de Brasília a Fortaleza é  $\hat{B}$ .

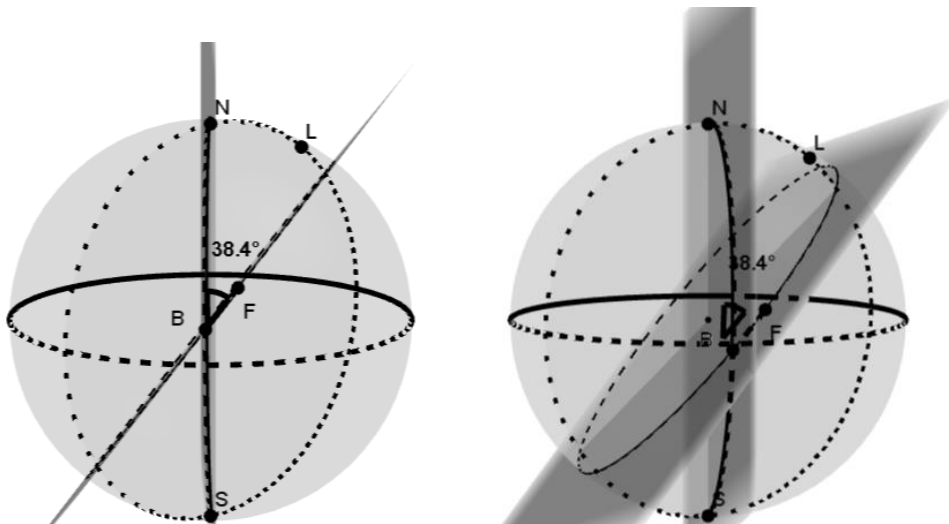


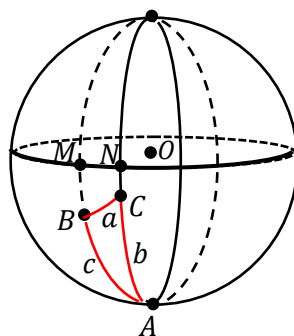
Figura 13 - Representação do Rumo Brasília - Fortaleza

1. 2. Qual a distância entre elas?

Para resolver esse problema, utilizaremos o teorema dos cossenos da Geometria Esférica.

Sejam  $B$  e  $C$  as cidades de Brasília e de Fortaleza. Para aplicar o teorema dos cossenos, vamos criar o triângulo esférico  $ABC$ , onde  $A$  é o polo sul,  $B$  é a cidade de Brasília e  $C$  a cidade de Fortaleza.

Como a latitude de Brasília é  $15^{\circ}46'47''$  S, então:  
 $c = 90^{\circ} - 15^{\circ}46'47'' = (74,22)^{\circ}$ .



Como a latitude de Fortaleza é  $3^{\circ}43'02''$  S,  
 $b = 90^{\circ} - 3^{\circ}43'02'' = (86,28)^{\circ}$

O ângulo  $A$  é tanto o ângulo formado pelas tangentes aos arcos  $AB$  e  $AC$  no ponto  $A$ , como é o ângulo formado pelos planos  $BOA$  e  $COA$ . Nesse caso, é o ângulo  $MON$ .

Portanto, o ângulo  $A$  é igual à diferença ( variação ) entre as longitudes de  $B$  e  $C$ .

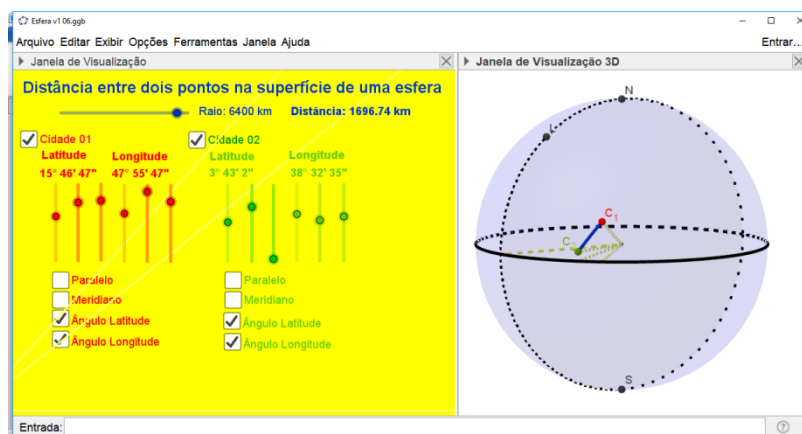
$$47^{\circ}55'47'' - 38^{\circ}32'35'' = 9^{\circ}23'12'' = \left(9 + \frac{23}{60} + \frac{12}{3600}\right)^{\circ} = (9,39)^{\circ}.$$

Aplicando o teorema dos cossenos, teremos:

$$\textit{cosa} = \cos(86,28)^{\circ} \cdot \cos(74,22)^{\circ} + \textit{sen}(86,28)^{\circ} \cdot \textit{sen}(74,22)^{\circ} \cdot \cos(9,39)^{\circ}$$

Portanto,  $\textit{cosa} = 0,9651$ .

Logo,  $a \cong 15,18^{\circ}$ . Como  $BC$  é um arco contido numa circunferência máxima, daí conclui-se que a distância (aproximada) em km, entre as cidades de Brasília e Fortaleza é a medida do ângulo entre elas em graus, multiplicada por 111,7 km ou seja o arco de circunferência máxima relativo ao ângulo de  $1^{\circ}$ , quando multiplicado  $15,18^{\circ}$  por 111,7 km tem-se o valor aproximado bde 1696 km.



### 2.1.9 Geometria Esférica: Uma conexão com a Geografia

Tomando como modelo a Geometria Esférica que tem importantes aplicações na navegação, astronomia e também na geografia. Suas associações com o Globo Terrestre permitem, de forma contextualizada, o estudo da esfera e seus elementos, abordando conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários, baseados em importantes ideias geométricas, que permitem ao aluno uma melhor compreensão e aprendizagem do tema, permitindo interdisciplinaridade com a Geografia.



## 2.1 O globo terrestre

O planeta Terra não é uma esfera perfeita, e sim aproximadamente uma elipsoide, uma vez que é achatada nos polos. No entanto, o valor desse achatamento é extremamente pequeno, o que nos permite, para efeitos de cálculos, desprezá-lo e considerar a Terra como se fosse uma esfera. Desse modo, a superfície da Terra passa a ser considerada daqui por diante como um globo: o globo terrestre.

O eixo de rotação do globo terrestre intersecta sua superfície nos pontos N e S, os quais representam o Polo Norte e Polo sul, respectivamente. A reta determinada por N e S é chamada o eixo polar.

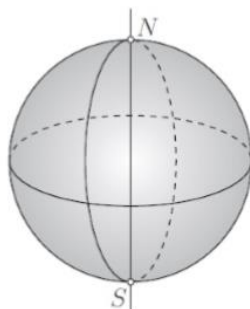


Figura 14 - Eixo Polar

O plano que passa pelo centro da superfície terrestre e é perpendicular ao eixo polar chama-se plano do Equador. O Equador é a circunferência máxima obtida pela intersecção do plano do Equador com a superfície terrestre.

O Plano do Equador divide a superfície terrestre em dois hemisférios: o Hemisfério Norte (que contém o Polo Norte) e o Hemisfério Sul (que contém o Polo Sul).

### 3 O GEOGEBRA

#### 3.1 Conhecendo o Geogebra

Geogebra é um aplicativo de matemática interativa que associa geometria, álgebra, aritmética e cálculo. Sua distribuição tem acesso livre nos termos da GNU, que pode ser obtido no site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Antes da sua instalação, deve-se ter instalados no computador o software JAVA ([www.java.com](http://www.java.com)), o que lhe permite estar disponível em multiplataforma, disponível em vários idiomas, dentre os quais o português. Desenvolvido por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg em 2001 e uma equipe internacional de programadores, tem como objetivo ser um instrumento facilitador do ensino e aprendizagem de matemática. (HOHENWARTER, 2009, P.6).

Há inúmeras vantagens que agrega o fato do aplicativo Geogebra enriquecer e dinamizar as aulas de geometria principalmente, dentre eles o seu formato bem didático e de aplicabilidade nas construções de estruturas gráficas, quando a partir de uma função reconhecer a sua forma gráfica, sólidos geométricos, polígonos, medir ângulos, segmentos de retas, enfim existe um acervo de recursos a seu favor que na necessidade de uma aula diferente nos moldes de uma metodologia virtual, dinâmica e que tem a capacidade de trazer o aluno para o campo visual e compreender a logística do que tá sendo proposto se é o estudo de uma função do 1º ou 2º grau, se é uma função trigonométrica, enfim, basta programar uma boa aula e o Geogebra é hoje um instrumento de uma riqueza incomensurável.

Não há dúvidas de que as novas tecnologias de comunicação e informação trouxeram mudanças consideráveis e positivas para a educação. Vídeos, programas educativos na televisão e no computador, sites educacionais, software diferenciados transformaram a realidade da aula tradicional, dinamizam o espaço de ensino e aprendizagem, onde anteriormente, predominava a lousa, o giz, o livro e a voz do professor. (KENSKI.2007.p.46)

O software Geogebra apresenta na parte superior da área de trabalho, a Barra de Menu, que apresenta os seguintes itens: Arquivo, Editar, Opções, Ferramentas, janelas e Ajuda. Destacamos, aqui, algumas destas ferramentas, utilizadas para execução das atividades.

A Barra de Ferramentas do Geogebra está dividida em 14 janelas que são subdivididas em outras várias ferramentas. Ao se clicar nos ícones, estes automaticamente são selecionados. Para selecionar outras ferramentas, clica-se na parte inferior da janela e o programa abre as demais opções. Dentre as ferramentas em questão, tem-se as janelas de visualizações de álgebra a de 2D e 3D, o que interagem simultaneamente e para o tema na qual escrevo, no cálculo da distância entre dois pontos numa superfície terrestre, é nessa forma

de utilização do Geogebra que a construção virtual faz enxergar uma situação real.

Como elemento facilitador dos processos de ensino da matemática temos diversos software (Winplot, Winmat, ...) dentre eles o Geogebra que é um aplicativo de matemática dinâmica, que associa geometria, álgebra, aritmética e cálculo. O programa em si cuja plataforma de atuação funciona como uma prancheta de desenho geométrico aliada a uma janela de visualização possibilitando seu manuseio na construção de figuras geométricas a partir de pontos, retas, segmentos de retas, circunferências, polígonos, cônicas, como cálculo de áreas, medidas angulares e lineares, mas também com funções e diversos outros tópicos relacionados com o ensino proposto de forma bastante simples. O seu uso se dar nos meios tecnológicos mais acessíveis dentre eles o notebook, tablete e celulares com androides. O propósito de nosso estudo é a utilização do Geogebra no celular android como forma de simplificar o aprendizado de distancia de pontos do globo terrestre de forma visual.

### 3.1.1 Múltiplas abordagens do Geogebra

Este software tem inúmeros recursos que permitem construções de estruturas geométricas, algébricas, aritméticas, estatísticas e outras, disponibilizadas através de suas janelas de álgebra, visualização, visualização 3D

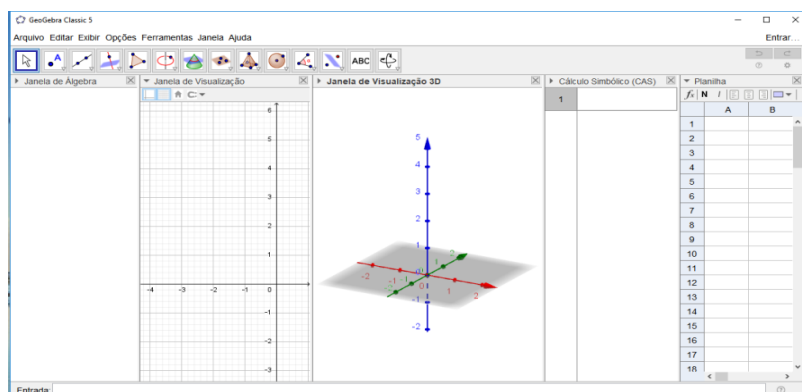


Figura 15 - Interface do GeoGebra- Folha de Trabalho

Para se trabalhar com as janelas de visualização 2D e 3D, usam-se os comandos que estão na barra de ferramentas das respectivas janelas. Cada barra de ferramenta apresenta uma quantidade de “caixas” onde clicando-se no canto inferior direito de cada uma delas, abre-se um conjunto de ferramentas com propriedades comuns, por exemplo: tem-se o conjunto de transformações geométricas, o conjunto das retas e suas partes, do círculo e suas partes entre outras, conforme figura seguinte.

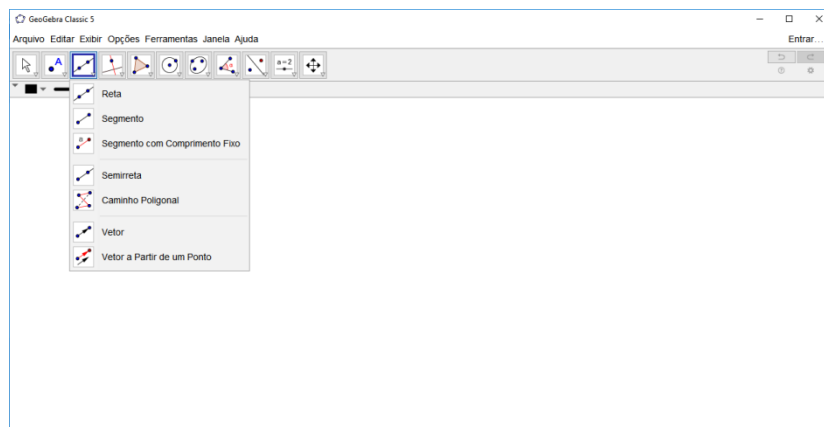


Figura 16 - Barra de Ferramentas da Janela 2D

Nesta construção é possível ver uma interação entre as janelas de álgebra, Visualização 2D e 3D.

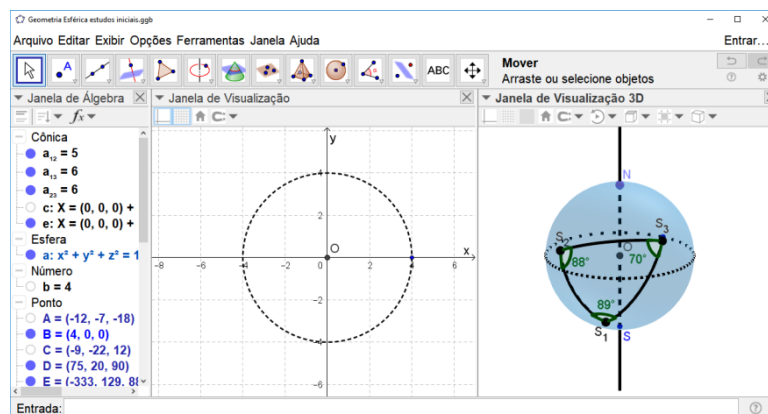


Figura 17 - Barra de Ferramentas das Janelas 2D e 3D

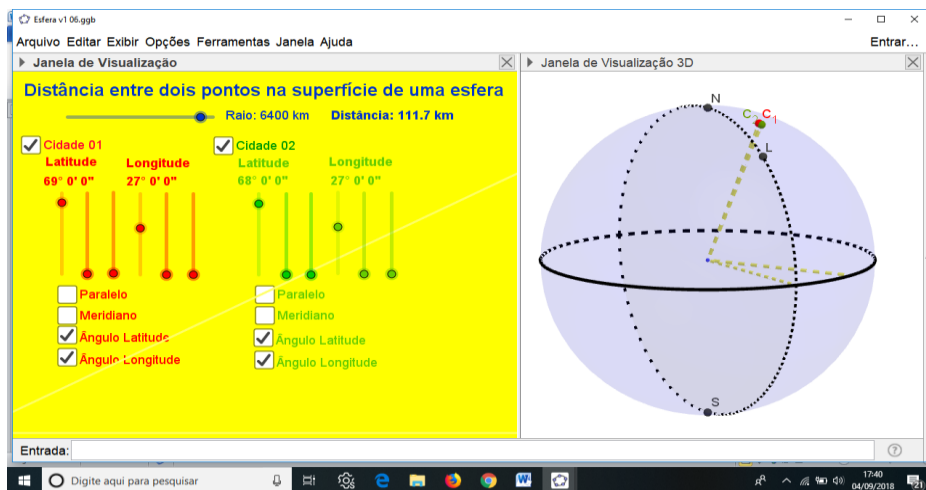
### 3.1.2 Aplicabilidades na distância entre pontos

Ainda nesta seção, evidenciaremos algumas aplicações inerentes ao cálculo de distância entre duas cidades no globo terrestre, assim utilizaremos os teoremas propostos acima como o teorema dos senos e o teorema dos cossenos.

1. (Extraído e adaptado de [2]) A forma física do Planeta Terra não é uma esfera, pois apresenta um achatamento nos polos Norte e Sul e outras irregularidades que chamamos de relevo (superfície topográfica). Na verdade sua forma física se denomina geoide. Desprezando este fato e considerando a Terra como uma esfera, cujo raio é igual a 6400 km, responda: em alto mar, quantos quilômetros um navio percorre quando se move em  $1^\circ$  de circunferência máxima.

Queremos determinar o comprimento de um arco de circunferência máxima sobre a superfície da Terra que está associado a um ângulo central cuja medida é igual a  $1^\circ$ . Logo, o comprimento do arco está para o comprimento da circunferência máxima assim como o ângulo central ( $1^\circ$ ) que determina o arco está para o ângulo de uma volta de ( $360^\circ$ ).

$$\frac{l}{2\pi r} = \frac{1^\circ}{360^\circ} \rightarrow l = \frac{2\pi r}{360} \rightarrow l = \pi \frac{2 \cdot 6400}{360} \rightarrow l \approx 111,7 \text{ km}$$

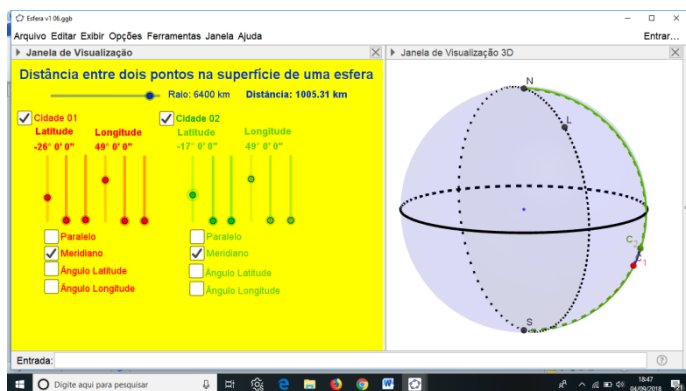


2. (Extraído de [4]) As cidades de Curitiba e Goiânia estão localizadas sobre o mesmo meridiano ( $49^\circ\text{W}$ ) e suas latitudes são respectivamente  $26^\circ\text{S}$  e  $17^\circ\text{S}$ . Assim, determine a distância entre elas.

Resolução:

A latitude de Goiânia é  $17^\circ\text{S}$ , ou seja,  $\varphi = -17^\circ$ . A latitude de Curitiba é  $26^\circ\text{S}$ , ou seja,  $\varphi = -26^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 9^\circ$ . Logo, a distância entre Curitiba e Goiânia é:

$$9 \cdot (111,7) \text{ km} = 1005,3 \text{ km} \approx 1000 \text{ km}.$$

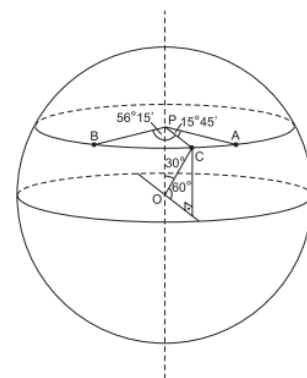


3. Os pontos A e B estão ambos, localizados na superfície terrestre a  $60^\circ$  de latitude norte, o ponto A está a  $15^\circ 45'$  de longitude leste e o ponto B a  $56^\circ 15'$  de longitude oeste.

a) Dado que o raio da terra, considerada perfeitamente esférica, mede 6400 km, qual é o raio do paralelo de  $60^\circ$ ?

Resolução:

$$\cos \alpha = \frac{r}{R} \rightarrow \cos 60^\circ = \frac{r}{6400} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{6400} \rightarrow r = 3200 \text{ km}$$



b) Qual é a menor distância entre os pontos A e B, medida ao longo do paralelo de  $60^\circ$ ? ( use  $\frac{22}{7}$  como aproximação para  $\pi$ ).

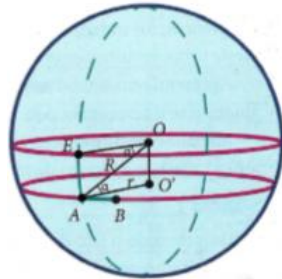
Resolução:

Temos que  $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{CB}) = 15^\circ 45' + 56^\circ 15' = 72^\circ$

Assim a menor distância entre os pontos A e B, medidas ao longo do paralelo de  $60^\circ$  é igual ao comprimento do arco  $\widehat{ACB}$ , dado por:

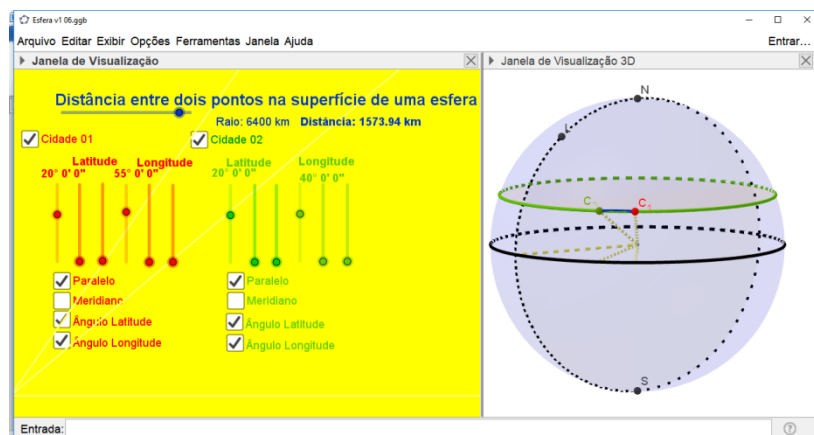
$$l = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3200 = \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3200 = \frac{28160}{7} \cong 4022,9 \text{ km}$$

4. As cidades brasileiras de Campo Grande e Vitória estão localizadas aproximadamente no mesmo paralelo. Sabendo que suas latitudes são aproximadamente  $20^{\circ}\text{S}$  e suas longitudes são respectivamente  $55^{\circ}\text{W}$  e  $40^{\circ}\text{W}$ , qual a distância entre elas, medidas ao longo do paralelo?



Lembramos aqui que os paralelos correspondem às circunferências que são secções da superfície terrestre por planos paralelos ao plano do equador. .

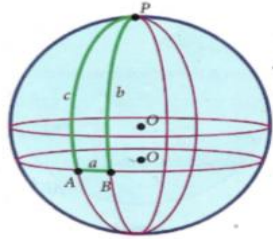
As cidades  $A$  e  $B$  estão no mesmo paralelo  $20^{\circ}\text{S}$ . O ângulo  $EOA$  mede  $20^{\circ}$  ( latitude de Campo Grande e de Vitória). Logo, o ângulo  $OA O'$  medirá  $20^{\circ}$ . No triângulo retângulo  $A O O'$ , teremos  $\cos 20^{\circ} = \frac{r}{R}$ , onde  $r$  é o raio da circunferência de centro  $O'$  e  $R$  é o raio da Terra. Adotando  $R = 6400\text{km}$ , teremos:  $r = 6400 \cdot \cos 20^{\circ} \cong 6014\text{ km}$ . A distância entre  $A$  até  $B$  medida ao longo do paralelo será então  $\frac{2\pi r \cdot 15^{\circ}}{360^{\circ}}\text{ km} \cong 1574\text{ km}$ .



Devemos observar que a distância entre  $A$  e  $B$  medida ao longo do paralelo não é a menor distância entre  $A$  e  $B$ . Para isso, usaremos o teorema dos cossenos da Geometria Esférica e também os valores reais das latitudes e longitudes de Campo Grande e de Vitória, respectivamente, a saber:

Latitudes:  $20^{\circ}26'34''\text{ S}$  e  $20^{\circ}19'10''\text{ S}$

Longitudes:  $54^{\circ}38'47''\text{ W}$  e  $40^{\circ}20'16''\text{ W}$



Embora não pareça no desenho anterior, em virtude de a variação das longitudes ser pequena, o arco menor AB contido na circunferência máxima não coincide com o arco menor contido no paralelo:

$$20^{\circ}26'34'' = \left(20 + \frac{26}{60} + \frac{34}{3600}\right)^{\circ} = (20,4428)^{\circ}$$

$$20^{\circ}19'10'' = \left(20 + \frac{19}{60} + \frac{10}{3600}\right)^{\circ} = (20,3194)^{\circ}$$

Vamos criar o triângulo APB onde P é o polo. Temos:

$$b = 90^{\circ} + (20,4428) = (110,4428)^{\circ}$$

$$c = 90^{\circ} + (20,3194)^{\circ} = (110,3194)^{\circ}$$

$$A = 54^{\circ}38'47'' - 40^{\circ}20'16'' = 14^{\circ}18'31'' = \left(14 + \frac{18}{60} + \frac{31}{3600}\right)^{\circ} = 14,3086^{\circ}$$

Aplicando o teorema dos cossenos, teremos:

$$\cos a = \cos(110,4428)^{\circ} \cdot \cos(110,3194)^{\circ} +$$

$$\sin(110,4428)^{\circ} \cdot \sin(110,3194)^{\circ} \cdot \cos(14,3086)^{\circ} = 0,9727$$

$$\text{Donde, } a \cong (13,4092)^{\circ}.$$

A menor distância entre A e B será  $(13,4092) \cdot 111,7 \text{ km} = 1498 \text{ km}$

Lembrando que a distância obtida ao longo do paralelo foi de 1594 km.

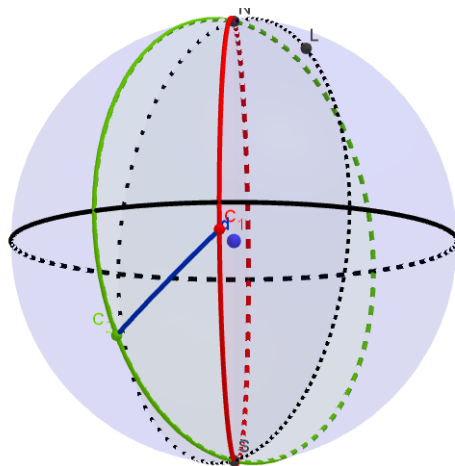
5. "As cidades de João Pessoa e Santiago do Chile tem latitudes iguais a  $7^{\circ}06'54''\text{S}$  e  $33^{\circ}27'24''\text{S}$ , respectivamente, e longitudes iguais, respectivamente, a  $34^{\circ}51'47''\text{W}$  e  $70^{\circ}38'53''\text{W}$ ". Qual a distância entre elas?

Para resolver esse problema, utilizaremos o teorema dos cossenos da Geometria Esférica.



Sejam  $C_1$  e  $C_2$  as cidades de João pessoa e de Santiago do Chile. Para aplicar o teorema dos cossenos, vamos criar o triângulo esférico  $SC_1C_2$ , onde  $S$  é o polo sul,  $C_1$  é a cidade de João pessoa e  $C_2$  a cidade de Santiago do Chile.

Como a latitude de João pessoa é  $7^\circ 06' 54''$ S, então:  
 $c = 90^\circ - 7^\circ 06' 54'' = \left(82 + \frac{53}{60} + \frac{6}{3600}\right)^\circ = (82,882)^\circ$ .



Como a latitude de Santiago do Chile é  $33^\circ 27' 24''$ S,  
 $b = 90^\circ - 33^\circ 27' 24'' = \left(56 + \frac{33}{60} + \frac{35}{3600}\right)^\circ = (56,56)^\circ$

O ângulo  $S$  é tanto o ângulo formado pelas tangentes aos arcos  $SC_2$  e  $SC_1$  no ponto  $S$ , como é o ângulo formado pelos planos  $C_2OS$  e  $C_1OS$ . Nesse caso, é o ângulo  $BOC$ .

Portanto, o ângulo  $S$  é igual à diferença ( variação ) entre as longitudes de  $B$  e  $C$ .

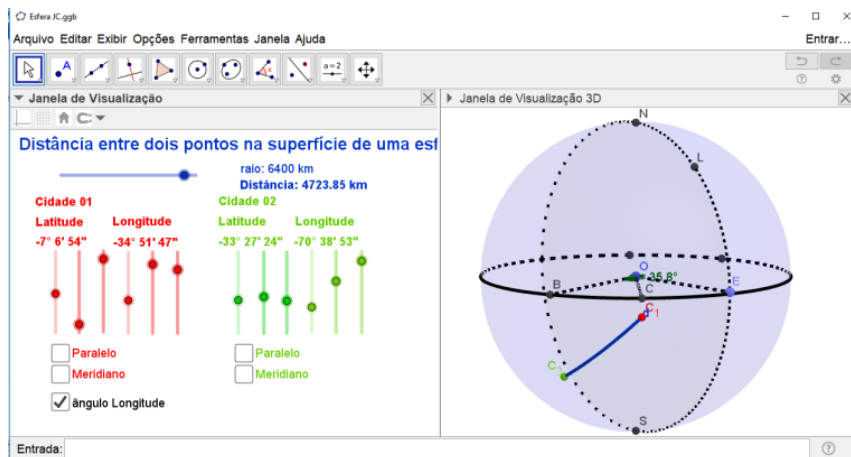
$$\begin{aligned}\hat{S} &= 70^\circ 38' 53'' - 34^\circ 51' 47'' = 35^\circ 47' 06'' = \left(35 + \frac{47}{60} + \frac{6}{3600}\right)^\circ \\ &= (35,785)^\circ\end{aligned}$$

Aplicando o teorema dos cossenos, teremos:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos(82,882)^\circ \cdot \cos(56,56)^\circ \\ &+ \sin(82,882)^\circ \cdot \sin(56,56)^\circ \cdot \cos(35,785)^\circ\end{aligned}$$

Portanto,  $\cos a = 0,7398$ .

Logo,  $\alpha \cong 42,3^\circ$ . Como  $BC$  é um arco contido numa circunferência máxima, daí conclui-se que a distância (aproximada) em km, entre as cidades de Brasília e Fortaleza é a medida do ângulo entre elas em graus, multiplicada por 111,7 km, ou seja, 4723,85 km.



Com essas atividades percebemos uma interação do aluno com conceitos de Geometria Esférica nos cálculos de senos e cossenos de medidas angulares diluindo os submúltiplos do grau, minutos e segundos, visualizando nas construções no que concerne cada situação problema, dentre elas o cálculo da distância entre duas cidades na superfície terrestre o que pouco se aplica no ensino da Educação Básica, contrastando o cálculo de distância na geometria euclidiana que já se aplica com mais visibilidade. O estudo da Geometria Esférica amplia relações entre disciplinas que abordam um mesmo objeto de estudo, o globo terrestre que aqui cito no caso a Geografia, Astronomia e a Matemática fazendo uma ilustração do objeto estudado, que fomenta uma interdisciplinaridade e contribuindo para uma compreensão conteudista, porém cada uma com sua especificidade delineando a mesma forma com conceitos próprios, possibilitando resposta a cada situação problema.

## 4 A GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO MÉDIO E O GEOGEBRA

### 4.1 Contextualizando a Geometria Esférica

A Geometria Esférica no Ensino Médio se configura como parte do conteúdo da Geometria Analítica, com objetivo de proporcionar ao aluno o conhecimento de cálculos de distância entre dois pontos, bem como calcular o ângulo entre arcos de circunferências máximas, planos secantes no globo terrestre, áreas de triângulos esféricos.

A Geometria é um conteúdo relevante a ser trabalhado pelos professores por possuir uma riqueza de ilustrações e dessa forma favorecer ao aluno uma interação dinâmica com conhecimento de formas diversas e criativas. Uma das justificativas para inclusão da Geometria Esférica nos currículos escolares do Ensino Médio fundamentam-se nos PCN's (Parâmetros curriculares nacionais de Matemática, Brasil 1998).

O texto do documento ressalta que a Geometria Esférica possibilita o desenvolvimento do pensamento Geométrico, favorecendo aos alunos a possibilidade de exploração, de resolver situações relacionadas a problemas de localização e deslocamento de pontos no espaço, leituras de mapas, presumir e comparar distâncias, bem como identificar propriedades de formas geométricas tendo a capacidade também de estabelecer diferentes pontos de vistas relacionados a objetos e suas representações. (Brasil 1998).

Neste capítulo é possível fazer uma abordagem onde citamos exemplos da geometria esférica com intuito de explicar os motivos ou características do projeto com o uso do Geogebra, como foram citados alguns exemplos de caráter prático no capítulo 3. Apresentaremos exemplos com e sem o uso do GeoGebra como forma de reflexão prática dos objetivos do projeto:

Problema 1. Dois aviões vão de Brasília a Moscou. O primeiro voa diretamente para o norte, até atingir o paralelo de Moscou, quando então muda o rumo para o leste, seguindo para o seu destino final. O segundo voa para o leste até atingir o meridiano de Moscou tomando então o rumo norte até chegar a essa cidade.

a) Desprezando as variações de altitude, qual avião terá percorrido a maior distância em relação ao solo? Justifique sua resposta.

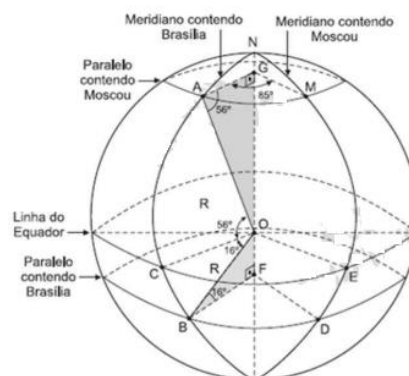
b) Calcule a diferença entre as distâncias percorridas, supondo que a Terra seja esférica.

Tabela 1 - Fonte - FUVEST ( 2016 - 2ª fase, 2º dia, Questão 10 )

Note e adote
$\cos 56^\circ = 0,56$ ; $\text{sen } 56^\circ = 0,83$ ; $\cos 16^\circ = 0,96$ ; $\text{sen } 16^\circ = 0,28$ ;
Latitude e longitude de Brasília: $16^\circ\text{S}$ e $48^\circ\text{W}$
Latitude e longitude de Moscou: $56^\circ\text{N}$ e $37^\circ\text{E}$
Raio da Terra: 6400 km

Resolução:

- a) De acordo com a figura, as trajetórias que o avião pode seguir são:  $B \rightarrow A \rightarrow M$  e  $B \rightarrow D \rightarrow M$ . Os deslocamentos para o norte  $B \rightarrow A$  e  $D \rightarrow M$  são iguais, porém os deslocamentos para o leste  $A \rightarrow M$  e  $B \rightarrow D$  não. O segmento de circunferência percorrido no paralelo de Moscou é menor que o de Brasília, já que sua latitude é maior. Desta maneira, o menor percurso corresponde ao  $B \rightarrow A \rightarrow M$ .



a) Resolução:

O comprimento total do paralelo que passa por Moscou ( $S_M$ ) pode ser calculado pela equação abaixo, na qual  $R$  corresponde ao raio da Terra e ( $lat_M$ ) o módulo da latitude de Moscou.

$$S_M = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos(lat_M)$$

O comprimento do paralelo que passa por Brasília é calculado de forma semelhante:

$$S_B = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos(lat_B)$$

A diferença de longitude entre Brasília e Moscou é calculada pela soma dos módulos das longitudes de cada cidade, já que cada uma está em um lado do Meridiano de Greenwich:

$$\Delta long = 48^\circ + 37^\circ = 85^\circ$$

O percurso efetivo percorrido pelos aviões nos meridianos de Moscou e Brasília é, portanto, calculados como.

$$\Delta S_M = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos(lat_M) \cdot \frac{\Delta long}{360^\circ} \quad \text{e} \quad \Delta S_B = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos(lat_B) \cdot \frac{\Delta long}{360^\circ}$$

A diferença entre os percursos será, portanto,  $\Delta S_B - \Delta S_M$ , que, com os termos em comum evidenciados, torna-se:

$$\Delta S_B - \Delta S_M = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos(lat_B) \cdot \frac{\Delta long}{360^\circ} - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos(lat_M) \cdot \frac{\Delta long}{360^\circ}$$

$$\Delta S_B - \Delta S_M = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{\Delta long}{360^\circ} \cdot [\cos(lat_B) - \cos(lat_M)]$$

$$\Delta S_B - \Delta S_M = 2 \cdot \pi \cdot 6400 \cdot \frac{85^\circ}{360^\circ} \cdot [\cos(16^\circ) - \cos(56^\circ)]$$

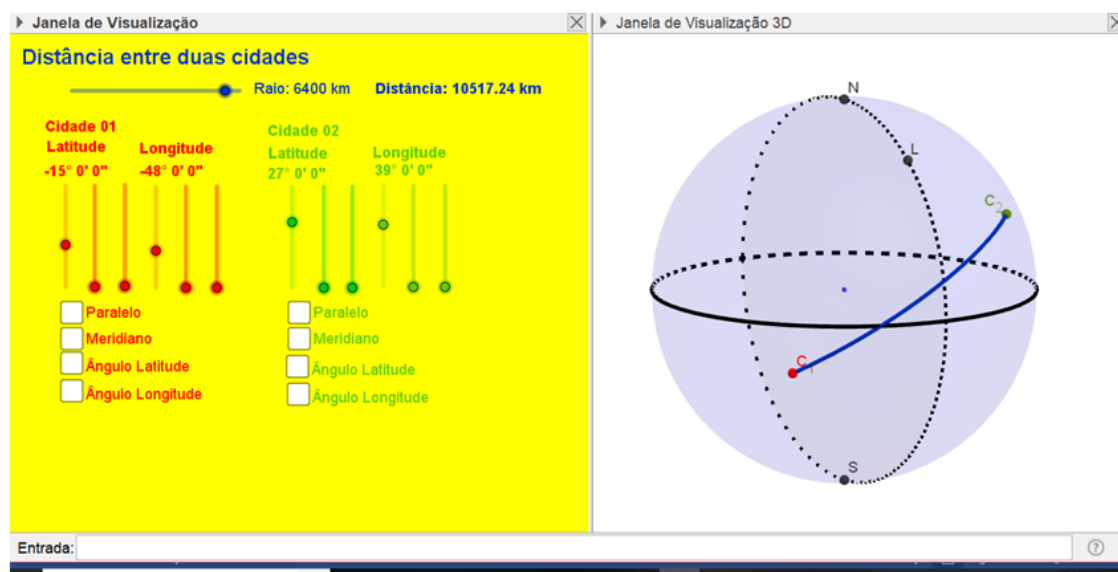
$$\Delta S_B - \Delta S_M = 2 \cdot \pi \cdot 6400 \cdot \frac{85^\circ}{360^\circ} \cdot [0,96 - 0,56]$$

$$\Delta S_B - \Delta S_M = \left( 2 \cdot 0,4 \cdot 6400 \cdot \frac{85^\circ}{360^\circ} \right) \cdot \pi$$

$$\Delta S_B - \Delta S_M = 1209 \cdot \pi \text{ Km}$$

Conceitos abordados: Geometria Esférica, coordenadas esféricas, comprimento de arco.

Ferramentas utilizadas: Controle Deslizante, Caixa para exibir/esconder objetos, Girar, Transladar Polígono.



i. Abra as *Janelas de Álgebra, Visualização e Visualização 3D*. (Sem eixos e sem malhas). Na aba *Opções*, clique em *Rotular* e escolha *Menos para os Objetos Novos*. Clique novamente em *Rotular* e escolha *Tamanho da Fonte 18*.

ii. Construa um *controle deslizante*. Dê nome de  $r$ , variável que indicará o raio da esfera, defina como número, com valor mínimo 0; valor máximo 7000, incremento 1.

iii. No campo *Entrada*, digite  $\text{Esfera}((0,0,0), r)$ .

iv. Construa um *controle deslizante*. Dê nome de  $c1latg$ , variável que indicará a parte em graus da latitude da cidade 1, defina como ângulo, com valor mínimo  $-90^\circ$ ; valor máximo  $90^\circ$ , incremento 1, vertical, largura 120 px.

v. Construa um *controle deslizante*. Dê nome de  $c1latm$ , variável que indicará a parte em minutos da latitude da cidade 1, defina como número, com valor mínimo 0; valor máximo 60, incremento 1, vertical, largura 120 px.

vi. Construa um *controle deslizante*. Dê nome de  $c1lats$ , variável que indicará a parte em segundos da latitude da cidade 1, defina como número, com valor mínimo 0; valor máximo 60, incremento 1, vertical, largura 120 px.

vii. No campo *Entrada*, digite  $c1lat = \text{Se}(c1latg < 0, c1latg - (c1latm / 60)^\circ - (c1lats / 3600)^\circ, c1latg + (c1latm / 60)^\circ + (c1lats / 3600)^\circ)$

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ressaltando a importância da Geometria Esférica no ensino médio com o uso do software Geogebra pôde-se perceber a melhor compreensão dos alunos sobre os conteúdos, na medida em que os mesmos interagem de forma prática, lúdica e visual destacando as suas habilidades juvenis na utilização das tecnologias. O uso do aplicativo no celular redimensionou a utilização do aparelho em sala de aula de forma significativa propiciando uma aprendizagem prazerosa e efetiva.

É importante que os professores de matemática aliem as suas práticas pedagógicas o uso de novas tecnologias como forma de dinamizar suas aulas e de reaproximar o aluno à matemática, superando a dicotomia teoria e prática bem como o preconceito de que a “matemática é difícil” e não é aplicável no cotidiano.

Portanto consideramos que a utilização do software Geogebra no ensino de Geometria esférica em particular no cálculo da distância entre dois pontos no Globo Terrestre foi satisfatório. Esperamos com esse estudo ter contribuído no processo de ensino e aprendizagem da matemática e especificamente da Geometria Esférica de forma atual e contextualizada.

## REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho (Org). **Tendências internacionais em formação de professor de matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

Brasil, Ministério da Educação, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

HELLMEISTER, Ana Catarina P....[et al.] **Explorando o ensino da Matemática: artigos**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. v.1

INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. **Trigonometria plana y esférica e introducción al cálculo**. 2. ed. Lima – Perú: Lumbreras Editores, 2012

JAHN, Ana Paula; BONGIOVANNI, Vincenzo. Distância entre dois pontos na geometria esférica. **Revista do Professor de Matemática**, n. 91, p. 45-51, 2016.

STEWART, Ian. **Dessete Equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

SILVA FILHO, Antônio Edson Pereira da; MARQUES, Dayvid Geverson Lopes; MELO, Francisco Derilson de. **A Trigonometria esférica e o globo terrestre**. 1. ed. Fortaleza: Din.CE, 2015