



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DIEGO DE SOUSA RODRIGUES

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS EM AMBIENTES  
SUBESTÁTICOS E PSEUDO-HIPERBÓLICOS

FORTALEZA

2018

DIEGO DE SOUSA RODRIGUES

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS EM AMBIENTES  
SUBESTÁTICOS E PSEUDO-HIPERBÓLICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- R612d Rodrigues, Diego de Sousa.  
Desigualdades geométricas em ambientes subestáticos e pseudo-hiperbólicos / Diego de Sousa Rodrigues. – 2018.  
50 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.
1. Desigualdades integrais. 2. Fluxo pelo inverso da curvatura média. 3. Geometria spin das hipersuperfícies. 4. Teorema tipo Alexandrov. I. Título.

CDD 510

---

DIEGO DE SOUSA RODRIGUES

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS EM AMBIENTES  
SUBESTÁTICOS E PSEUDO-HIPERBÓLICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 31 / 08 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa  
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

---

Prof. Dr. Sérgio de Moura Almaraz  
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que  
contribuíram direta ou indiretamente com a  
sua realização.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, pelo conhecimento e força durante essa caminhada. Pela iluminação da minha mente durante a elaboração desse trabalho.

À minha noiva (e futura esposa) Jessica, que compreendeu e apoiou cada etapa do meu trabalho, que se mostrou, como sempre, fiel e presente em cada momento que precisei de uma palavra de ânimo e sugestões para lidar com determinadas escolhas. Obrigado pelo amor, diálogo e compreensão, te amo.

À minha família, que durante toda a minha carreira acadêmica me apoiou desde cedo, me incentivando a continuar estudando e me dedicando na área.

Ao meu orientador Frederico Vale Girão, pela orientação, conversas e discussões frutíferas que foram essenciais para a construção desse trabalho.

Aos professores Levi Lopes de Lima, Abdênago Alves de Barros, Ezequiel Rodrigues Barbosa, Sérgio de Moura Almaraz, Antônio Caminha Muniz Neto e Jonatan Floriano da Silva por terem aceitado participar da banca.

Aos meus colegas de pós-graduação que estiveram presentes em discussões matemáticas, debates, xícaras de café, aulas e seminários: Acácio, Amilcar, Davi Ribeiro, Diego Eloí, Diego Silva, Eddygledson, Emanuel, Fabrício, Léo Ivo, Ranieri, Renato, Renivaldo e Roger.

Ao corpo docente da pós-graduação em matemática da UFC pelos conhecimentos repassados e dedicação na pesquisa e no ensino da matemática.

À Andrea e a Jessyca pela competência e agilidade.

À Rocilda pela revisão deste trabalho e sugestões.

À Capes pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Esta tese está dividida em duas partes. Na primeira, usando o fluxo pelo inverso da curvatura média, provamos duas desigualdades integrais ponderadas que são válidas para hipersuperfícies estreladas e estritamente média convexas no espaço euclidiano. A primeira desigualdade envolve a área e a área ponderada da hipersuperfície e também o volume da região limitada pela hipersuperfície. A segunda desigualdade envolve a curvatura média ponderada total e a área da hipersuperfície. Além disso, versões da primeira desigualdade para a esfera e para o espaço *Reissner-Nordström-AdS* são provadas. Ao final da primeira parte da tese, exibimos um exemplo de uma superfície estritamente convexa para a qual a razão entre o momento polar de inércia e o quadrado da área é menor que a mesma razão na esfera. Na segunda parte da tese, usamos técnicas espinoriais para provar uma desigualdade do tipo Heintze-Karcher para uma classe de variedades pseudo-hiperbólicas. Em seguida, usamos essa desigualdade para mostrar um teorema do tipo Alexandrov em tais espaços.

**Palavras-chave:** Desigualdades integrais. Fluxo pelo inverso da curvatura média. Geometria spin das hipersuperfícies. Teorema tipo Alexandrov.

## ABSTRACT

This thesis is divided in two parts. In the first one, using the inverse mean curvature flow, we prove two weighted geometric inequalities that hold for strictly mean convex and star-shaped hypersurfaces in Euclidean space. The first one involves the weighted area and the area of the hypersurface and also the volume of the region enclosed by the hypersurface. The second one involves the total weighted mean curvature and the area of the hypersurface. Moreover, versions of the first inequality for the sphere and for the *Ressner-Nordström-AdS* manifold are proven. We end the first part with an example of a convex surface for which the ratio between the polar moment of inertia and the square of the area is less than that of the round sphere. In the second part, using spinorial techniques, we prove, for a class of pseudo-hyperbolic ambient manifolds, a Heintze-Karcher type inequality. We then use this inequality to show an Alexandrov type theorem in such spaces.

**Keywords:** Integral inequalities. Inverse mean curvature flow. Spin geometry of hypersurfaces. Alexandrov-type theorem.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Curva geratriz e superfície gerada . . . . .	29
---	----

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	DESIGUALDADES PONDERADAS . . . . .	19
2.1	Uma quantidade monótona ao longo do IMCF em variedades com produto warped . . . . .	19
2.2	Prova dos Teoremas . . . . .	22
2.2.1	O espaço euclidiano como o espaço ambiente . . . . .	22
2.2.2	A esfera como o espaço ambiente . . . . .	25
2.2.3	O espaço Reissner-Nordström-AdS como o espaço ambiente . . . . .	26
2.3	Uma superfície com momento polar de inércia pequeno . . . . .	28
2.4	Contraexemplo para a conjectura de Ge, Wang, Wu . . . . .	30
3	ABORDAGEM ESPINORIAL EM VARIEDADES PSEUDO- HIPERBÓLICAS . . . . .	33
3.1	Hipersuperfícies em variedades spin . . . . .	33
3.2	Prova do Teorema 1.5 . . . . .	38
3.3	Prova do Corolário 1.3 . . . . .	40
3.4	Prova do Corolário 1.4 . . . . .	40
4	CONCLUSÃO . . . . .	46
	REFERÊNCIAS . . . . .	47

## 1 INTRODUÇÃO

Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície orientada fechada e mergulhada em  $\mathbb{R}^n$  e assuma que  $\Sigma$  é estritamente média convexa, isto é, sua curvatura média  $H = (n-1)H_1$  é positiva. Sejam  $\Omega$  a região limitada por  $\Sigma$  e  $r$  a distância a um ponto  $O$  fixado, que referimos como sendo a origem de  $\mathbb{R}^n$ . É fato conhecido que

$$\int_{\Sigma} r \, d\Sigma \geq n \text{Vol}(\Omega) \quad (1)$$

e

$$\int_{\Sigma} r^2 H_1 \, d\Sigma \geq n \text{Vol}(\Omega). \quad (2)$$

Além disso, para qualquer uma das desigualdades anteriores, a igualdade vale se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem. As desigualdades (1) e (2) são obtidas a partir de um conjunto de desigualdades provadas por Kwong em (2016, Corolário 4.3).

Seja  $p \in \mathbb{R}^n$ . Uma hipersuperfície  $\Sigma$  em  $\mathbb{R}^n$  é dita *estrelada com respeito a  $p$*  se  $\Sigma$  é o gráfico de alguma função definida sobre alguma esfera geodésica centrada em  $p$ . Dizemos que  $\Sigma$  é *estrelada* se existe  $p \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\Sigma$  é estrelada com respeito a  $p$ . Quando o ambiente considerado for  $\mathbb{H}^n$ , os conceitos anteriores são definidos de modo similar.

Quando  $\Sigma$  é estrelada e estritamente média convexa, a desigualdade (2) foi provada também por Kwong e Miao em (2014), usando o fluxo pelo inverso da curvatura média (IMCF).

Relembraremos a desigualdade isoperimétrica, que afirma que

$$\omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \geq n \text{Vol}(\Omega),$$

onde  $|\Sigma|$  denota a área de  $\Sigma$  e  $\omega_{n-1}$  é a área da esfera unitária  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Assim, é natural indagarmos se (1) e (2) podem ser melhoradas, respectivamente, para

$$\int_{\Sigma} r \, d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (3)$$

e

$$\int_{\Sigma} r^2 H_1 \, d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (4)$$

Abordaremos inicialmente a desigualdade (3), e trataremos da desigualdade (4) posteriormente.

Observe que, pela desigualdade de Hölder, se (3) vale, então

$$\int_{\Sigma} r^2 \, d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \quad (5)$$

também é válida.

Entretanto, quando  $n = 3$ , construímos uma hipersuperfície  $\Sigma$  estritamente convexa de modo que (5) não vale (veja a seção 2.3). Obviamente, para tal superfície, (3) também não é válida. Tal superfície foi utilizada para fornecer um contraexemplo para uma desigualdade conjecturada por Ge, Wang e Wu em (2015) no ambiente hiperbólico (veja a seção 2.4 para mais detalhes).

Desse modo, o seguinte teorema melhora a estimativa (1):

**Teorema 1.1.** *Se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície estrelada e estritamente média convexa em  $\mathbb{R}^n$ , então*

$$\int_{\Sigma} r d\Sigma \geq \frac{n-1}{n} \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} + \text{Vol}(\Omega). \quad (6)$$

*Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem.*

A quantidade do lado esquerdo de (5) é conhecida como o *momento polar de inércia*. Ela é uma quantidade muito importante em Física Newtoniana. O contraexemplo construído nessa tese mostra que a esfera centrada na origem não é um minimizante da quantidade (invariante por reescalonamento)

$$\left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{-\frac{n+1}{n-1}} \int_{\Sigma} r^2 d\Sigma \quad (7)$$

dentre a família de hipersuperfícies estreladas e estritamente média convexas, pelo menos quando  $n = 3$ .

Um problema muito interessante consiste em encontrar o ínfimo de (7) sobre as fronteiras de corpos convexos. Para  $n = 2$ , esse problema foi resolvido por Sachs em (1958/1959; 1960), onde foi provado, usando métodos geométricos, que o ínfimo é atingido se, e somente se, a curva é um triângulo equilátero centrado na origem. Uma prova analítica do resultado de Sachs foi obtida por Hall em (1985). Quando  $n = 3$ , o problema foi abordado por Freitas, Laugesen e Liddell em (2007), onde foi mostrada a existência de um minimizante. Eles conjecturaram também que o ínfimo é atingido quando  $\Sigma$  é um certo tetraedro truncado.

Ainda seria interessante encontrar o ínfimo de (7) dentre alguma família de hipersuperfícies suaves. Como uma consequência do próximo resultado, que é um corolário do Teorema 1.1, temos que dentre a família de hipersuperfícies estreladas e estritamente média convexas, o ínfimo de (7) é pelo menos

$$\left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \omega_{n-1}.$$

**Corolário 1.1.** *Se  $\Sigma$  é estrelada e estritamente média convexa, então*

$$\int_{\Sigma} r^2 d\Sigma \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \omega_{n-1} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} + \frac{2(n-1)}{n} \text{Vol}(\Omega) \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{\text{Vol}(\Omega)^2}{|\Sigma|}. \quad (8)$$

*Com igualdade ocorrendo se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem.*

Também em (KWONG, 2016), análogos de (1) e (2) foram provados quando o espaço ambiente é outra forma espacial. Para formas espaciais diferentes do espaço euclidiano, não abordaremos versões de (4), somente versões de (3) (para saber mais sobre quantidades relacionadas à desigualdade (4), veja (DE LIMA e GIRÃO, 2016) para o caso do espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  e (GIRÃO e PINHEIRO, 2017) para o caso da esfera  $\mathbb{S}^n$ ). Iniciaremos com o caso quando o ambiente é a esfera  $\mathbb{S}^n$ .

Lembre que  $(0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1}$  munido com a métrica

$$dr^2 + \text{sen}^2(r)h,$$

onde  $h$  é a métrica da esfera unitária  $\mathbb{S}^{n-1}$ , fornece um modelo para a esfera redonda em  $\mathbb{S}^n$ . Aqui,  $r$  é a distância geodésica até uma origem  $O$  fixada.

Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície fechada, orientada e estritamente média convexa em  $\mathbb{S}^n$ . Foi provado por Kwong em (2016) (veja Corolário 4.5) que, se  $\Sigma$  está contida em um hemisfério aberto centrado em  $O$ , então

$$\int_{\Sigma} \text{sen } r d\Sigma \geq n \int_{\Omega} \cos r d\Omega, \quad (9)$$

onde  $\Omega$  é a região interna limitada por  $\Sigma$ .

Markowski e Scheuer provaram em (2016) que, se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície estritamente convexa mergulhada em  $\mathbb{S}^n$ , então o IMCF iniciando em  $\Sigma$  converge, em tempo finito, para um equador  $E_{\Sigma}$ . Este equador delimita dois hemisférios, com um deles contendo  $\Sigma$ . Associamos a cada hipersuperfície estritamente convexa  $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$  um ponto  $x(\Sigma) \in \mathbb{S}^n$  da seguinte forma: seja  $x(\Sigma)$  o centro de um hemisfério, determinado por  $E_{\Sigma}$ , que contém  $\Sigma$  (considerando o hemisfério como uma bola geodésica). Iremos nos referir ao ponto  $x(\Sigma)$  como *o ponto associado a  $\Sigma$  via o IMCF*.

O seguinte teorema é uma versão do Teorema 1.1 para hipersuperfícies em  $\mathbb{S}^n$ .

**Teorema 1.2.** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície estritamente convexa, fechada e orientada em  $\mathbb{S}^n$ . Então*

$$\int_{\Sigma} \text{sen } r_x \geq \int_{\Omega} \cos r_x + \frac{n-1}{n} \omega_{n-1} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (10)$$

*onde  $x$  é o ponto associado a  $\Sigma$  via o IMCF e  $r_x$  denota a distância geodésica até  $x$ . A*

igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera centrada em  $x$ .

Agora, seja  $\mathbb{H}^n$  o espaço ambiente. Considere o seguinte modelo para  $\mathbb{H}^n$ : a variedade diferencial  $(0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$  munida com a métrica

$$dr^2 + \sinh^2(r)h, \quad (11)$$

onde, como anteriormente,  $h$  é a métrica da esfera unitária  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Kwong provou em (2016) que se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície fechada, orientada e estritamente média convexa mergulhada em  $\mathbb{H}^n$ , então

$$\int_{\Sigma} \sinh(r) d\Sigma \geq n \int_{\Omega} \cosh(r) d\Omega, \quad (12)$$

onde, como anteriormente,  $\Omega$  é a região delimitada por  $\Sigma$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera geodésica centrada na origem.

A seguir apresentamos a versão do Teorema 1.1 que irá funcionar não somente para  $\mathbb{H}^n$ , mas também para uma família mais geral de variedades na qual o espaço hiperbólico é um caso particular. Tais espaços são chamados de variedades **Reissner-Nordström-anti-deSitter**, ou simplesmente Reissner-Nordström-AdS.

Fixemos três números positivos  $m, q$  e  $\kappa$ , onde  $q < m, \kappa < \infty$  tais que a equação  $\epsilon + k^2 s^2 - 2ms^{2-n} + q^2 s^{4-2n} = 0$  possui soluções positivas e seja  $s_0$  a maior solução dessa equação. Seja  $(N_\epsilon^{n-1}, g_N)$  uma forma espacial fechada de curvatura seccional constante  $\epsilon = 0, \pm 1$ . O espaço Reissner-Nordström-AdS de massa  $m$  e carga  $q$  é definido por  $M = (s_0, \infty) \times N_\epsilon$  munido com a métrica

$$g := g_{m,q,\epsilon,\kappa} = \frac{1}{\epsilon + \kappa^2 s^2 - 2ms^{2-n} + q^2 s^{4-2n}} ds^2 + s^2 g_N. \quad (13)$$

A fronteira  $\partial M = \{s_0\} \times N_\epsilon$  é chamada de horizonte.

Uma hipersuperfície  $\Sigma$  em  $M$  é chamada estrelada se  $\Sigma$  é o gráfico de alguma função definida sobre o horizonte.

É conhecido que, após uma mudança de variáveis, a métrica (13) pode ser escrita como

$$dr^2 + \lambda^2(r)g_N, \quad (14)$$

onde  $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a EDO

$$\lambda'(r) = \sqrt{\epsilon + \kappa^2 \lambda^2 - 2m\lambda^{2-n} + q^2 \lambda^{4-2n}}. \quad (15)$$

(veja WANG, 2015, Lema 9)

Seja  $f(\lambda) = \lambda'(r)$ . A função  $f$  satisfaz

$$(\Delta_g f)g - \nabla_g^2 f + f \text{Ric}_g = (n-1)(n-2)q^2 \lambda(r)^{4-2n} f g_N,$$

onde  $\text{Ric}_g$ ,  $\Delta_g$  e  $\nabla_g^2$  são, respectivamente, o tensor de Ricci, o operador Laplaciano e o Hessiano com relação à métrica  $g$  da variedade Reissner-Nordström-AdS. Em geral, uma métrica riemanniana é chamada de *subestática* se  $(\Delta_g h)g - \nabla_g^2 h + h\text{Ric}_g \geq 0$  para alguma função positiva  $h$  (veja (1.2) em WANG, 2015). Em particular, quando  $(\Delta_g h)g - \nabla_g^2 h + h\text{Ric}_g = 0$ , a métrica é chamada de *estática*. O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  com a métrica canônica  $\delta$  é visto como uma variedade estática se considerarmos  $h \equiv 1$ . No caso da esfera, consideramos  $\mathbb{S}_+^n$  munida com a métrica canônica de curvatura constante 1 e a função  $h(r) = \cos(r)$ .

**Observação 1.1.** *Considerando  $\epsilon = 1$  com  $N_1 = \mathbb{S}^{n-1}$ , quando  $\kappa \rightarrow 0$  e  $q \rightarrow 0$  a métrica (13) se reduz à **métrica de Schwarzschild** e o espaço resultante  $(M, g)$  é chamado de **espaço de Schwarzschild de massa  $m$** . A métrica desse espaço é assintoticamente plana, no sentido de que sua curvatura seccional se aproxima de zero quando  $r \rightarrow \infty$ . Além disso, a métrica de Schwarzschild é estática quando consideramos  $f = \sqrt{1 - 2ms^{2-n}}$ .*

**Observação 1.2.** *Quando  $q \rightarrow 0$ , a variedade de Reissner-Nordström-AdS se reduz ao **espaço de Kottler**, que também é conhecido como **espaço de Kottler-Schwarzschild**. Tal espaço é um análogo do espaço de Schwarzschild no contexto das variedades assintoticamente localmente hiperbólicas. Além disso, supondo também  $\epsilon = 1$  e considerando  $N_1 = \mathbb{S}^{n-1}$ , a métrica (13) se reduz à **métrica anti-deSitter-Schwarzschild de massa  $m$** .*

Relacionado a (12) temos o seguinte análogo do Teorema 1.1:

**Teorema 1.3.** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície estrelada e estritamente média convexa em  $(M, g)$ , a variedade Reissner-Nordström-AdS, e denote por  $\Omega$  a região delimitada por  $\Sigma$  e o horizonte  $\partial M$ . Então*

$$\int_{\Sigma} \lambda d\Sigma \geq \int_{\Omega} \lambda' d\Omega + \frac{n-1}{n} \vartheta_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{s_0}{n} |\partial M|, \quad (16)$$

onde  $\vartheta_{n-1} = |N_{\epsilon}|$  e  $|\partial M|$  é a área do horizonte  $\{s_0\} \times N$ . Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma = \{s\} \times N$  para algum número  $s \in [s_0, \infty)$ .

Vale a pena ressaltar que o resultado do Teorema 1.3 vale para os espaços descritos nas observações 1.1 e 1.2.

Agora, tomando  $\epsilon = \kappa = 1$  e considerando  $N_1 = \mathbb{S}^{n-1}$ , quando  $m \rightarrow 0$  (observe que isso implica  $q \rightarrow 0$ , pois  $q < m$ ),  $\lambda(r)$  converge para  $\sinh(r)$  e a métrica (14) converge para a métrica hiperbólica (11). Assim, o espaço hiperbólico pode ser visto como o limite, quando  $m \rightarrow 0$ , das variedades Reissner-Nordström-AdS.

Desse modo, a versão hiperbólica do Teorema 1.1 pode ser enunciada através do seguinte corolário:

**Corolário 1.2.** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ . Se  $\Sigma$  é estrelada*

com respeito à origem e estritamente média convexa, então

$$\int_{\Sigma} \sinh(r) d\Sigma \geq \int_{\Omega} \cosh(r) d\Omega + \frac{n-1}{n} \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (17)$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera geodésica centrada na origem.

Podemos considerar (4) e (5) como desigualdades do tipo Alexandrov-Fenchel ponderadas. Iremos agora explorar esse ponto de vista.

Se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície convexa em  $\mathbb{R}^n$ , então as desigualdades de Alexandrov-Fenchel afirmam que

$$\int_{\Sigma} H_k d\Sigma \geq (\omega_{n-1})^{\frac{1}{n-k}} \left( \int_{\Sigma} H_{k-1} d\Sigma \right)^{\frac{n-k-1}{n-k}},$$

onde  $H_k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , é a  $k$ -ésima curvatura média (normalizada) de  $\Sigma$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera redonda.

Guan e Li (2009) mostraram que essas desigualdades (juntamente com a afirmação de rigidez) ainda valem se  $\Sigma$  é somente estrelada e  $k$ -convexa (isso significa que  $H_i(\lambda) \geq 0$  para  $i = 1, \dots, k$ ).

Seguem-se das desigualdades de Alexandrov-Fenchel que

$$\int_{\Sigma} \sigma_k(\lambda) d\Sigma \geq H_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}, \quad (18)$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera redonda. As desigualdades (18) foram usadas por Ge, Wang e Wu na prova da desigualdade de Penrose para gráficos euclidianos assintoticamente planos no contexto da gravidade de Lovelock (GE, WANG, e WU, 2014).

Kwong e Miao provaram em (2015) o seguinte resultado:

**Teorema.** *Seja  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ . Se  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  é tal que  $H_k > 0$  sobre  $\Sigma$ , então*

$$\int_{\Sigma} r^2 H_k d\Sigma \geq \int_{\Sigma} H_{k-2} d\Sigma.$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem.

Como um corolário, obtemos para  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ ,

$$\int_{\Sigma} r^2 H_k d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-k+1}{n-1}}, \quad (19)$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem.

As desigualdades (19) podem ser vistas como versões ponderadas das desigual-

dades (18). Podemos indagar se (19) continua válida para  $k \in \{0, 1\}$ . Observe que, os casos  $k = 1$  e  $k = 0$  de (19) são exatamente as desigualdades (4) e (5), respectivamente.

Usando (2) e o IMCF, podemos mostrar que (4) quando  $\Sigma$  é estrelada e estritamente média convexa.

**Teorema 1.4.** *Se  $\Sigma$  é estrelada e estritamente média convexa, então*

$$\int_{\Sigma} r^2 H_1 d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (20)$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem.

Falaremos agora do outro assunto desta tese. O problema de classificar hipersuperfícies compactas com curvatura escalar constante no espaço euclidiano foi proposto por Yau na seção de problemas de (2016. v. 102), onde é perguntado, por exemplo, se o teorema de Alexandrov (1958), que afirma que as esferas são as únicas hipersuperfícies compactas de curvatura média constante mergulhadas no espaço euclidiano, ainda vale quando a hipótese sobre a curvatura média é substituída pela curvatura escalar. Esta pergunta foi respondida positivamente por Ros em (1988), através de uma modificação da prova de Reilly do teorema de Alexandrov (veja REILLY, 1977). Depois disso, diferentes provas e generalizações do resultado de Ros surgiram; por exemplo, usando a fórmula de Minkowski (1903) e a desigualdade de Heintze-Karcher (1978), Ros estendeu seu resultado para qualquer  $r$ -curvatura em (1987). Esta abordagem também funciona no espaço hiperbólico, onde se obtém a mesma conclusão (Montiel e Ros, 1991).

Lembre que uma variedade da forma  $M^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\text{exp}} P^n$ , com  $P$  sendo uma variedade riemanniana completa, é chamada um *espaço pseudo-hiperbólico* (TASHIRO, 1965). Quando  $P^n$  é Ricci-flat,  $M^{n+1}$  é de Einstein com curvatura de Ricci negativa e quando  $P^n$  é plana (curvatura zero),  $M^{n+1}$  é uma forma espacial hiperbólica.

Em (1999), dentre outros resultados, Montiel prova o seguinte teorema do tipo Alexandrov: se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície de curvatura média constante ou curvatura escalar constante limitando um domínio no espaço pseudo-hiperbólico  $\mathbb{R} \times_{\text{exp}} P^n$ , com  $n \geq 2$  e  $P^n$  sendo uma variedade Ricci-flat, então  $\Sigma$  é uma esfera geodésica ou um fatia  $\{s\} \times P^n$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

Nessa tese iremos fornecer uma prova espinorial para um caso especial do resultado anterior. Para isso, iremos provar uma desigualdade do tipo Heintze-Karcher para variedades spin admitindo um espinor de Killing imaginário não trivial:

**Teorema 1.5 (Girão, Rodrigues 2018).** *Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana spin conexa de dimensão  $n+1$  admitindo um espinor de Killing imaginário  $\psi$  e seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície limitando um domínio compacto  $\Omega$  em  $M$ . Seja  $V = |\psi|^2$  e suponha que a*

curvatura média (normalizada)  $H$  da hipersuperfície  $\Sigma$  é positiva. Então

$$\int_{\Sigma} \frac{V}{H} d\Sigma + \int_{\Sigma} \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma \geq 0, \quad (21)$$

onde  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita de  $(M, g)$  e  $N$  é o campo vetorial unitário normal a  $\Sigma$  e apontando para dentro. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é totalmente umbílica.

Seja  $(M, g)$  como no Teorema 1.5, isto é,  $(M, g)$  é uma variedade riemanniana spin admitindo um espinor de Killing imaginário. Quando  $M$  é completa, Baum provou em (1989) que  $M$  é um produto torcido  $\mathbb{R} \times_{\text{exp}} P$ , com a variedade  $P$  de dimensão  $n$  sendo uma variedade riemanniana spin completa admitindo um espinor paralelo não trivial. Assim, pela classificação de Wang (veja WANG, 1989),  $P$  é **uma variedade plana, uma variedade de Calabi-Yau, uma variedade hiperkahleriana ou alguma variedade riemanniana de dimensão sete ou oito com holonomia especial**. Além disso, como veremos posteriormente, a função  $V$  satisfaz

$$\Delta V = (n + 1)V.$$

Portanto, o Teorema 1.5 pode ser reescrito como:

**Corolário 1.3.** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície conexa e compacta limitando um domínio compacto em um espaço pseudo-hiperbólico  $M = \mathbb{R} \times_{\text{exp}} P$ , onde  $P$  é uma variedade riemanniana spin completa admitindo um espinor paralelo não trivial. Suponha que a curvatura média (normalizada)  $H$  da hipersuperfície  $\Sigma$  seja positiva. Então*

$$\int_{\Sigma} \frac{V}{H} d\Sigma \geq (n + 1) \int_{\Omega} V d\text{vol}. \quad (22)$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é totalmente umbílica.

Um interessante caso especial do Corolário 1.3 ocorre quando  $P$  é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , implicando que  $M$  é o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ . Observe que, nesse caso, a conclusão “ $\Sigma$  é totalmente umbílica” no caso da igualdade pode ser trocada por “ $\Sigma$  é uma esfera geodésica”. Este caso segue de um resultado mais geral provado por Brendle quando o ambiente é uma variedade com um produto torcido (BRENDLE, 2013) (veja também QIU e XIA, 2014; WANG e WANG, 2018). Uma prova espinorial para esse caso especial foi dada por Hijazi, Montiel e Raulot em (2018). Eles obtiveram o resultado considerando  $\mathbb{H}^{n+1}$  como uma hipersuperfície tipo-espaço no espaço de Minkowski  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  e usando técnicas espinoriais em tal ambiente. Nossa prova, por sua vez, é totalmente implícita e é válida para uma classe mais ampla de espaços ambiente; um dos principais ingredientes é o uso de um princípio holográfico para a existência de espinores de Killing, também devido a Hijazi, Montiel e Raulot (2015) (veja o Teorema 3.1). A hipótese de

curvatura média positiva é essencial no trabalho de Hijazi, Montiel e Raulot. Quando a dimensão é igual a 3, Barbosa, de Lima e Girão forneceram um resultado similar em (2017), onde é suficiente que a curvatura média seja limitada inferiormente por  $-1$ , tal resultado continua válido para  $n \geq 3$ .

Como mencionado anteriormente, em (1999), Montiel mostrou um teorema do tipo Alexandrov para hipersuperfícies com curvatura média constante ou curvatura escalar constante em alguns espaços pseudo-hiperbólicos. Usando técnicas espinoriais, Hijazi, Montiel e Roldan obtiveram outra prova para o caso da curvatura média constante para uma classe de variedades pseudo-hiperbólicas (HIJAZI, MONTIEL, e ROLDÁN, 2003). Aqui, fornecemos uma prova para o caso da curvatura escalar constante para essas mesmas classes de variedades pseudo-hiperbólicas, nossa prova é espinorial no sentido que usa a desigualdade (21), que foi provada usando técnicas espinoriais.

**Corolário 1.4.** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície conexa e compacta limitando um domínio em um espaço pseudo-hiperbólico  $\mathbb{R} \times_{\text{exp}} P$ , onde  $P$  é uma variedade riemanniana completa spin admitindo um espinor paralelo não trivial. Se a curvatura escalar de  $\Sigma$  for constante, então a hipersuperfície é uma hiperesfera geodésica redonda (e, nesse caso  $P$  deve ser plana) ou uma fatia  $\{s\} \times P$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .*

## 2 DESIGUALDADES PONDERADAS

### 2.1 Uma quantidade monótona ao longo do IMCF em variedades com produto warped

Seja  $(N^{n-1}, g_N)$  uma variedade riemanniana fechada, orientada e conexa. Sejam  $a < b$  números reais positivos. Considere a variedade produto  $M = N \times [a, b]$  munida com a métrica riemanniana

$$\bar{g} = dr^2 + \lambda^2(r)g_N, \quad (23)$$

onde  $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e positiva no intervalo  $(a, b)$ . Admitiremos o caso em que  $\{a\} \times N$  degenera à um ponto, desde que  $M$  seja uma variedade diferencial e que a restrição de  $\bar{g}$  a  $(a, b) \times N$  se estenda a uma métrica riemanniana sobre  $M$ . Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície fechada, orientada e conexa mergulhada em  $M$ . Como observado em (BRENDLE, 2013),  $M \setminus \Sigma$  possui exatamente duas componentes conexas, com uma delas contidas em  $N \times [a, b - \delta)$  para algum  $\delta > 0$ . Chamaremos esta componente de *região interior* e a denotaremos por  $\Omega$ . Também temos  $\partial\Omega = \Sigma$  ou  $\partial\Omega = \Sigma \cup (N \times \{a\})$ . Para simplificar a notação, no primeiro caso denotamos  $\Gamma = \emptyset$  e no segundo caso escrevemos  $\Gamma = \{a\} \times N$ . Deste modo, não importando o caso, temos  $\partial\Omega = \Sigma \cup \Gamma$ . Seja  $\nu$  o campo vetorial unitário normal a  $\Sigma$  apontando para fora. Além disso, sempre que  $\Gamma \neq \emptyset$ , consideramos  $\eta$  como o campo vetorial unitário normal a  $\Gamma$  apontando para fora. O seguinte lema é uma generalização de (1).

**Lema 2.1.** *Seja  $\Sigma$  como anteriormente, então*

$$\int_{\Sigma} \lambda d\Sigma \geq n \int_{\Omega} \lambda' d\Omega + \lambda(a)|\Gamma|, \quad (24)$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se,  $\Sigma$  é uma fatia  $\{r\} \times N$ , para algum  $r \in [a, b)$ .

*Demonstração.* Considere o campo vetorial  $Y = \lambda\partial_r$  em  $M$ . Denotando por  $\overline{\text{div}}$  o divergente com respeito a  $(M, \bar{g})$ , é fácil ver que

$$\overline{\text{div}}Y = n\lambda',$$

onde  $\lambda' = dr(\lambda)$ . Assim, pelo teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned}
n \int_{\Omega} \lambda' d\Omega &= \int_{\Omega} \overline{\operatorname{div}} Y d\Omega \\
&= \int_{\Sigma} \langle Y, \nu \rangle d\Sigma + \int_{\Gamma} \langle Y, \eta \rangle d\Gamma \\
&= \int_{\Sigma} \lambda \langle \partial_r, \nu \rangle d\Sigma + \int_{\Gamma} \lambda \langle \partial_r, \eta \rangle d\Gamma \\
&= \int_{\Sigma} \lambda \langle \partial_r, \nu \rangle d\Sigma - \lambda(a) |\Gamma| \\
&\leq \int_{\Sigma} \lambda d\Sigma - \lambda(a) |\Gamma|,
\end{aligned}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se,  $\langle \partial_r, \nu \rangle \equiv 1$  ao longo de  $\Sigma$ , o que ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma fatia  $\{r\} \times N$ .  $\square$

Seja  $\Sigma_0$  uma hipersuperfície estritamente média convexa em  $M$  que é dada por um mergulho

$$x_0 : \Sigma \rightarrow M.$$

Consideramos uma família de mergulhos com variação a um parâmetro

$$x : [0, T^*) \times \Sigma \rightarrow M,$$

que satisfazem a equação de fluxo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\nu}{H} \\
x(0, \cdot) &= x_0,
\end{aligned} \tag{25}$$

onde, como anteriormente,  $\nu$  é o campo vetorial unitário normal a hipersuperfície  $\Sigma_t = x(t, \cdot)$  apontando para fora e  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma_t$  com relação a essa escolha de normal unitária. Se não houver confusão, denotamos a hipersuperfície mencionada simplesmente por  $\Sigma$ . O fluxo (25) é o famoso fluxo pelo inverso da curvatura média (IMCF).

**Proposição 2.1.** *Ao longo do IMCF, as seguintes equações ocorrem:*

(i) *O elemento de área  $d\Sigma$  evolui de acordo com*

$$\frac{\partial}{\partial t} d\Sigma = d\Sigma; \tag{26}$$

*em particular, a área  $|\Sigma|$  evolui de acordo com*

$$\frac{d}{dt} |\Sigma| = |\Sigma|. \tag{27}$$

(ii) Para qualquer  $u \in C^\infty(M)$ , a quantidade

$$\int_{\Omega} u d\Omega$$

evolui de acordo com

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} u d\Omega \right) = \int_{\Sigma} \frac{u}{H} d\Sigma. \quad (28)$$

*Demonstração.* As equações (26) e (27) são bem conhecidas (veja, por exemplo, (HUISKEN, 1998)). A equação (28) segue da fórmula da coárea.  $\square$

**Proposição 2.2.** *Considere a evolução de  $\Sigma_0$  pelo IMCF. Se  $t \in [0, T^*)$  é tal que  $\lambda'(t) > 0$  e  $\Sigma_t$  é estritamente média convexa, então a quantidade*

$$Q(t) = |\Sigma_t|^{-\frac{n}{n-1}} \left( \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma - \int_{\Omega_t} \lambda' d\Omega - \frac{\lambda(a)}{n} |\partial M| \right) \quad (29)$$

satisfaz  $Q'(t) \leq 0$ . Além disso,  $Q'(t) = 0$  se, e somente se,  $\Sigma_t$  é uma fatia  $\{r\} \times N$ .

*Demonstração.* Denote por  $D$  a conexão de Levi-Civita de  $(M, \bar{g})$ . Por um lado,

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma \right)' &= \int_{\Sigma_t} \frac{\partial \lambda}{\partial t} d\Sigma + \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma_t} \lambda' \left\langle Dr, \frac{\partial x}{\partial t} \right\rangle d\Sigma + \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma_t} \frac{\lambda'}{H} \langle Dr, \nu \rangle d\Sigma + \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma \\ &\leq \int_{\Sigma_t} \frac{\lambda'}{H} d\Sigma + \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma \\ &= \left( \int_{\Omega_t} \lambda' d\Omega \right)' + \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma, \end{aligned} \quad (30)$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz na linha 4 e (28) com  $u = \lambda'$  na última linha. Por outro lado, segue de (24) e (30) que

$$\begin{aligned} &\left( \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma - \int_{\Omega_t} \lambda' d\Omega - \frac{\lambda(a)}{n} |\partial M| \right)' \\ &\leq \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma \\ &= \frac{n}{n-1} \left( \int_{\Sigma} \lambda d\Sigma - \frac{1}{n} \int_{\Sigma} \lambda d\Sigma \right) \\ &\leq \frac{n}{n-1} \left( \int_{\Sigma} \lambda d\Sigma - \int_{\Omega} \lambda' d\Omega - \frac{\lambda(a)}{n} |\partial M| \right). \end{aligned}$$

Assim, de (27) temos que  $|\Sigma_t|' = |\Sigma_t|$ . Portanto, concluímos que  $Q'(t) \leq 0$ . Se  $Q'(t) = 0$ , então a igualdade ocorre em (24), que implica que  $\Sigma_t$  é uma fatia  $\{r\} \times N$ . Além

disso, é fácil ver que se  $\Sigma_t$  é uma fatia  $\{r\} \times N$ , então  $Q'(t) = 0$ , visto que a igualdade ocorre em cada uma das desigualdades.  $\square$

## 2.2 Prova dos Teoremas

Ao longo desta seção, denotamos por  $\{\Sigma_t\}$  a família de hipersuperfície obtidas pelo IMCF iniciando em  $\Sigma$ .

### 2.2.1 O espaço euclidiano como o espaço ambiente

Iremos considerar o seguinte modelo para  $\mathbb{R}^n$ : a variedade diferenciável  $(0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$  munido da métrica

$$\bar{g} = dr^2 + r^2h.$$

O IMCF iniciando com uma hipersuperfície estrelada e estritamente média convexa em  $\mathbb{R}^n$  foi estudado por Gerhardt em (1990) e por Urbas em (1990).

**Teorema 2.1 (Gerhardt 1990 e Urbas 1990).** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície, fechada em  $\mathbb{R}^n$  com curvatura média positiva, dada por um mergulho suave  $X_0 : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\Sigma$  é estrelada com relação ao ponto  $P$ . Então, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{H}\nu \\ X(\cdot, 0) = X_0(\cdot) \end{cases} \quad (31)$$

*admite uma única solução  $X : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $\nu$  é o vetor unitário normal a  $\Sigma_t = X(\mathbb{S}^{n-1}, t)$  e  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma_t$ . Além disso,  $\Sigma_t$  é estrela em relação a  $P$  e a hipersuperfície reescalada  $\widetilde{\Sigma}_t$ , parametrizada por  $\widetilde{X}(\cdot, t) = e^{-\frac{t}{n-1}}X(\cdot, t)$ , converge para uma esfera centrada em  $P$  na topologia  $C^\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

*Prova do Teorema 1.1.* Considere  $\lambda = r$  em (29). Nesse caso, visto que  $\lambda(0) = 0$ , temos que a quantidade

$$Q(t) = |\Sigma_t|^{-\frac{n}{n-1}} \left( \int_{\Sigma_t} r d\Sigma - \text{Vol}(\Omega_t) \right)$$

é monótona não-crescente. O próximo passo é mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (32)$$

Visto que a desigualdade que queremos mostrar é invariante por reescalonamento e, pelo Teorema 2.1, o IMCF reescalado converge para uma esfera, a fim de mostrar (32) precisamos apenas mostrar que a desigualdade ocorre se  $\Sigma$  é uma esfera. Isto segue de (24) e o fato que a igualdade ocorre na desigualdade isoperimétrica. Assim,  $Q(0) \geq \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ , que é uma reescrita de (6).

Se  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem, um cálculo direto mostra que a igualdade ocorre em (6).

Se a igualdade ocorre em (6), então  $Q(0) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ . Aplicando (6) à  $\Sigma_t$  encontramos, por um lado, que  $Q(t) \geq \frac{n-1}{n} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$ , para todo  $t$ . Por outro lado, da monotonicidade de  $Q(t)$ , temos que  $Q(t) \leq Q(0) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ , para todo  $t$ . Assim, obtemos

$$Q(t) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \forall t.$$

Em particular,  $Q'(0) = 0$ , que, pela Proposição 2.2, ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma fatia, que nesse caso significa uma esfera centrada na origem.  $\square$

*Prova do Corolário 1.1.* Pela desigualdade de Hölder

$$\left( \int_{\Sigma} r \, d\Sigma \right)^2 \leq \left( \int_{\Sigma} r^2 \, d\Sigma \right) |\Sigma|, \quad (33)$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se,  $r$  é constante, isto é, se e somente se  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem. Combinando (33) e (6) obtemos

$$\int_{\Sigma} r^2 \, d\Sigma \geq \frac{1}{|\Sigma|} \left( \frac{n-1}{n} \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} + \text{Vol}(\Omega) \right)^2, \quad (34)$$

que é, a menos de escrita, (8).

Se  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem, então é imediato verificar que a igualdade ocorre em (8).

Se a igualdade ocorre em (8), então também ocorre em (33), que implica que  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem.  $\square$

*Prova do Teorema 1.4.* Em (KWONG e MIAO, 2014), usando o IMCF, Kwong e Miao obtiveram a seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma_t} r^2 H \, d\Sigma \right) \leq 2n \text{Vol}(\Omega_t) + \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} r^2 H \, d\Sigma. \quad (35)$$

Esta desigualdade é crucial na prova de (2). Considere a quantidade

$$\mathcal{E}(\Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{n}{n-1}} \int_{\Sigma} r^2 H \, d\Sigma \quad (36)$$

A função  $E$  definida por

$$E(t) = \mathcal{E}(\Sigma_t)$$

satisfaz

$$E'(t) \leq 0, \quad \forall t.$$

De fato,

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{2n}{n-1}}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma_t} r^2 H d\Sigma \right) |\Sigma|^{\frac{n}{n-1}} - \left( \int_{\Sigma_t} r^2 H d\Sigma \right) \frac{n}{n-1} |\Sigma|^{\frac{n}{n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{n}{n-1}}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma_t} r^2 H d\Sigma \right) - \frac{n}{n-1} \int_{\Sigma_t} r^2 H d\Sigma \right] \\ &\leq \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{n}{n-1}}} \left( 2n \text{Vol}(\Omega_t) + \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} r^2 H d\Sigma - \frac{n}{n-1} \int_{\Sigma_t} r^2 H d\Sigma \right) \\ &= \frac{2}{|\Sigma|^{\frac{n}{n-1}}} \left( n \text{Vol}(\Omega_t) - \frac{1}{n-1} \int_{\Sigma_t} r^2 H d\Sigma \right) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

onde usamos (35) na linha 3 e (2) na linha 5. Além disso,  $E(t)$  é constante se, e somente se, a igualdade ocorre em (35) e (2) para todo  $t$ , que ocorre se, e somente se,  $\Sigma_t$  é uma esfera geodésica centrada na origem para todo  $t$ .

Observe que, em uma esfera redonda, o valor de  $\mathcal{E}$  é pelo menos

$$\frac{n-1}{(\omega_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Isto segue de (2) e do fato que, em uma esfera redonda, a igualdade acontece na desigualdade isoperimétrica.

Agora, usando a invariância por reescalonamento de (36) e que o IMCF normalizado converge para uma esfera redonda, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) \geq \frac{n-1}{(\omega_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Visto que  $E(t)$  é monótona não-crescente, obtemos  $E(0) \geq E(t)$  para todo  $t$ . Portanto,

$$E(0) \geq \frac{n-1}{(\omega_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}},$$

que é, a menos de escrita, (20).

Se  $\Sigma$  é uma esfera centrada na origem, é simples verificar que a igualdade ocorre em (20).

Suponha que a igualdade ocorre em (20), isto é, suponha que  $E(0) = 0$ . Por um lado, aplicando (20) à  $\Sigma_t$ , encontramos

$$E(t) \geq \frac{n-1}{(\omega_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}},$$

para todo  $t$ . Por outro lado, usando a monotonicidade de  $E$ , encontramos

$$E(t) \leq E(0) = \frac{n-1}{(\omega_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}},$$

para todo  $t$ . Portanto,

$$E(t) = \frac{n-1}{(\omega_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}},$$

para todo  $t$ . Assim,  $E(t)$  é constante e, como explicado anteriormente, isto implica que cada  $\Sigma_t$  é uma esfera centrada na origem, para cada  $t$ . Em particular,  $\Sigma = \Sigma_0$  é uma esfera centrada na origem.  $\square$

## 2.2.2 A esfera como o espaço ambiente

Considere a esfera  $\mathbb{S}^n$  de dimensão  $n$ , com  $n \geq 3$ . Fixemos uma origem  $O \in \mathbb{S}^n$ . Iremos considerar o modelo para  $\mathbb{S}^n$  dado por  $(0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1}$  munido da métrica

$$dr^2 + \text{sen}^2(r)h,$$

onde  $h$  é a métrica da esfera unitária  $\mathbb{S}^{n-1}$  e  $r$  é a distância geodésica para a origem.

*Prova do Teorema 1.2.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $x(\Sigma)$  é a origem, visto que isso pode sempre ser feito apenas aplicando em  $\Sigma$  uma isometria de  $\mathbb{S}^n$ . Nesse caso, a desigualdade (10) assume o seguinte formato:

$$\int_{\Sigma} \text{sen } r \geq \int_{\Omega} \cos r + \frac{n-1}{n} \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (37)$$

Considere  $\lambda = \text{sen } r$  em (29). Assim como no caso euclidiano,  $\lambda(0) = 0$ . Portanto, temos que

$$Q(t) = |\Sigma_t|^{-\frac{n}{n-1}} \left( \int_{\Sigma_t} \text{sen } r \, d\Sigma - \int_{\Omega_t} \cos r \, d\Omega \right)$$

é monótona não-crescente.

Foi provado em (MAKOWSKI e SCHEUER, 2016) que o IMCF é suave em um intervalo  $[0, T^*)$ , com  $\Sigma_t$  convergindo para um equador  $E_{\Sigma}$ , quando  $t \rightarrow T^*$ . O próximo passo é mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow T^*} Q(t) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

De fato, visto que  $\Sigma_t$  converge para um equador, temos

$$\lim_{t \rightarrow T^*} |\Sigma_t| = \omega_{n-1}, \quad \lim_{t \rightarrow T^*} \int_{\Sigma_t} \text{sen } r \, d\Sigma = \omega_{n-1}, \quad \lim_{t \rightarrow T^*} \int_{\Omega_t} \cos r \, d\Omega = \frac{\omega_{n-1}}{n}.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow T^*} Q(t) = (\omega_{n-1})^{-\frac{n}{n-1}} \left( \omega_{n-1} - \frac{\omega_{n-1}}{n} \right) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Da monotonicidade de  $Q(t)$ , temos

$$Q(0) \geq Q(t),$$

para todo  $t \in [0, T^*)$ . Aplicando o limite quando  $t \rightarrow T^*$  obtemos

$$Q(0) \geq \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

que, a menos de escrita, é (37).

Se  $\Sigma$  é uma esfera geodésica centrada na origem, é simples verificar a igualdade em (37).

Se a igualdade ocorre em (37), então  $Q(0) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ . Aplicando (37) à  $\Sigma_t$  encontramos, por um lado, que  $Q(t) \geq \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ , para todo  $t \in [0, T^*)$ . Por outro lado, da monotonicidade de  $Q(t)$ , temos que  $Q(t) \leq Q(0) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ , para todo  $t \in [0, T^*)$ . Assim, obtemos

$$Q(t) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \forall t \in [0, T^*).$$

Em particular,  $Q'(0) = 0$ , que, pela Proposição 2.2, ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma fatia, que nesse caso implica em uma esfera geodésica centrada na origem.  $\square$

### 2.2.3 O espaço Reissner-Nordström-AdS como o espaço ambiente

Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície estrelada e estritamente média convexa em  $M$ . Foi provado em (WANG, 2015) e mais recentemente em (CHEN, LI, e ZHOU, 2017) que a solução do fluxo pelo inverso da curvatura média é suave e definido em  $[0, \infty)$ .

O seguinte lema descreve o comportamento assintótico de várias quantidades geométricas.

**Lema 2.2.** *Seja  $g$  a métrica induzida em  $\Sigma$ . O seguinte comportamento assintótico ocorre:*

$$\lambda = O(e^{\frac{1}{n-1}t}), \quad (38)$$

$$\sqrt{\det g} = \lambda^{n-1} \sqrt{\det g_N} \left(1 + O(e^{-\frac{2}{n-1}t})\right), \quad (39)$$

$$|\Sigma| = \left(\int_N \lambda^{n-1} dN\right) \left(1 + O\left(e^{-\frac{2}{n-1}t}\right)\right), \quad (40)$$

$$\int_\Sigma \lambda d\Sigma = \left(\int_N \lambda^n dN\right) \left(1 + O\left(e^{-\frac{2}{n-1}t}\right)\right) e \quad (41)$$

$$|\Sigma|^{\frac{n}{n-1}} = \left(\int_N \lambda^{n-1} dN\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(1 + O\left(e^{-\frac{2}{n-1}t}\right)\right). \quad (42)$$

*Demonstração.* As identidades (38) e (39) estão provadas em (CHEN, LI, e ZHOU, 2017, veja o Lema 3.1 e o Lema 4.1, respectivamente). Para obter (40), basta integrar (39). Para obter (41), multiplique (39) por  $\lambda$ , depois integre. Resta mostrar (42). Denote por  $A$  a quantidade

$$\frac{|\Sigma|}{\int_N \lambda^{n-1} dN}.$$

De (40) temos  $A = 1 + \alpha$ , com  $\alpha = O(e^{-\frac{2}{n-1}t})$ .

Agora, considere a função  $f(x) = x^{\frac{n}{n-1}}$ . Visto que  $f$  é diferenciável, temos

$$f(1 + \alpha) - f(1) - f'(1) \cdot \alpha = o(\alpha).$$

Portanto,

$$A^{\frac{n}{n-1}} = 1 + O(e^{-\frac{2}{n-1}t}).$$

Assim, obtemos (42). □

*Prova do Teorema 1.3.* Considere  $\lambda$  definido por (15). Temos que  $\lambda(r(s_0)) = s_0$  e  $\lambda'(r(s_0)) = 0$ . Assim, (29) dada por

$$Q(t) = |\Sigma_t|^{-\frac{n}{n-1}} \left( \int_{\Sigma_t} \lambda d\Sigma - \int_{\Omega_t} \lambda' d\Omega - \frac{s_0}{n} |\partial M| \right)$$

é monótona crescente. Iremos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (43)$$

Por (24) temos

$$\int_\Sigma \lambda d\Sigma - \int_\Omega \lambda' d\Omega - \frac{s_0}{n} |\partial M| \geq \frac{n-1}{n} \int_\Sigma \lambda d\Sigma.$$

Assim, para mostrar (43), é suficiente mostrar que

$$\liminf \frac{\int_{\Sigma} \lambda d\Sigma}{|\Sigma_t|^{\frac{n}{n-1}}} \geq \left( \frac{1}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (44)$$

De (41) e (42) temos

$$\liminf \frac{\int_{\Sigma} \lambda d\Sigma}{|\Sigma_t|^{\frac{n}{n-1}}} = \liminf \frac{\int_N \lambda^n dN}{\left( \int_N \lambda^{n-1} dN \right)^{\frac{n}{n-1}}}. \quad (45)$$

Mas a desigualdade de Hölder nos fornece

$$(\vartheta_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \int_N \lambda^n dN \geq \left( \int_N \lambda^{n-1} dN \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (46)$$

que implica (44). Isso prova a desigualdade (16).

Se  $\Sigma = \{s\} \times N$ , para algum  $s \in [s_0, \infty)$ , uma conta direta mostra que a igualdade corre em (16).

Se a igualdade ocorre em (16), então  $Q(0) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ . Aplicando (16) à  $\Sigma_t$ , obtemos, por um lado, que  $Q(t) \geq \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ , para todo  $t$ . Por outro lado, da monotonicidade de  $Q(t)$ , temos que  $Q(t) \leq Q(0) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ , para todo  $t$ . Assim, obtemos

$$Q(t) = \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \forall t.$$

Em particular,  $Q'(0) = 0$ , que, pela Proposição 2.2, ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma fatia.

□

### 2.3 Uma superfície com momento polar de inércia pequeno

O objetivo desta seção é construir uma superfície estrelada e estritamente média convexa  $\Gamma$  in  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$|\Gamma|^{-2} \int_{\Gamma} r^2 d\Gamma < \frac{1}{\omega_2},$$

fornecendo um contraexemplo para (3) quando  $n = 3$ .

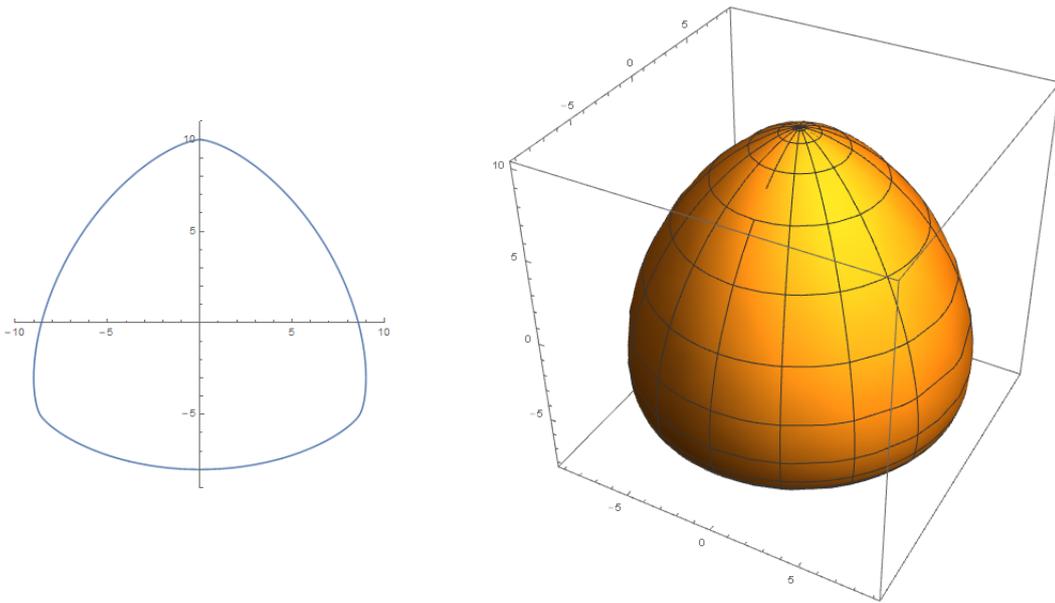
Nossa construção é inspirada em exemplos de curvas com largura constante

devido a Fillmore (1969). Nosso exemplo é obtido através da rotação da curva

$$\begin{cases} x = (\cos 3t + 9)\operatorname{sen} t - 3\operatorname{sen} 3t \cos t \\ y = (\cos 3t + 9)\cos t + 3\operatorname{sen} 3t\operatorname{sen} t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

ao redor do eixo  $y$ .

Figura 1 – Curva geratriz e superfície gerada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tal superfície é analítica e descrita por

$$\begin{cases} x = [(\cos 3t + 9)\operatorname{sen} t - 3\operatorname{sen} 3t \cos t] \cos s \\ y = [(\cos 3t + 9)\operatorname{sen} t - 3\operatorname{sen} 3t \cos t] \operatorname{sen} s \\ z = (\cos 3t + 9)\cos t + 3\operatorname{sen} 3t\operatorname{sen} t. \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi \text{ and } 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Após algumas contas obtemos

$$|\Gamma|^2 = \frac{122855056\pi^2}{1225}$$

e

$$\int_{\Gamma} r^2 d\Sigma = \frac{124744936\pi}{5005}.$$

Assim,

$$|\Gamma|^{-2} \int_{\Gamma} r^2 d\Gamma = \frac{545759095}{2196034126\pi} < \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{\omega_2}.$$

Denotando por  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  as curvaturas principais da superfície  $\Gamma$ , temos

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{(9 - 8 \cos(3t))^2}} \quad \text{e} \quad \kappa_2 = \frac{8 \cos(3t) - 9}{(8 \cos^3(t) - 9) \sqrt{(9 - 8 \cos(3t))^2}}.$$

Não é difícil ver que

$$\frac{1}{17} \leq \kappa_1, \kappa_2 \leq 1.$$

Assim,  $\Gamma$  é estritamente convexa.

## 2.4 Contraexemplo para a conjectura de Ge, Wang, Wu

Usando o fluxo pelo inverso da curvatura média, de Lima e Girão provaram em (2016) a seguinte desigualdade do tipo Alexandrov-Fenchel para hipersuperfícies  $\Sigma$  compactas estreladas e estritamente média convexas do espaço hiperbólico:

$$\int_{\Sigma} V H d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1} \left[ \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right], \quad (47)$$

onde  $V : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função dada por  $V(r) = \cosh(r)$ ,  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma$ ,  $\omega_{n-1}$  é a área de  $\mathbb{S}^{n-1}$  e  $|\Sigma|$  é a área de  $\Sigma$ . Ademais, a igualdade em (47) ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera geodésica centrada na origem. Quando  $\Sigma$  é horoesférica convexa, em (GE, WANG, e WU, 2015) os autores estenderam a desigualdade (47) para:

$$\int_{\Sigma} V H_{2k+1} d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[ \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{(k+1)(n-1)}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2k-2}{(k+1)(n-1)}} \right]^{k+1}, \quad (48)$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera geodésica centrada na origem. A prova da desigualdade é feita por indução, onde o caso inicial é a desigualdade (47). Ao final do artigo os autores conjecturaram a desigualdade (48) é válida não somente para o caso ímpar, mas que o caso par também é válido para todo  $H_k$ , dessa forma:

$$\int_{\Sigma} V H_k d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[ \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(k+1)(n-1)}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-k-1)}{(k+1)(n-1)}} \right]^{\frac{k+1}{2}},$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é uma esfera geodésica centrada na origem. Para provar o caso par, basta utilizar o passo indutivo iniciando do caso  $k = 0$ . Assim, é suficiente provar a seguinte desigualdade:

**Conjectura 2.1 (Ge, Wang, Wu 2015).** *Seja  $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$  uma hipersuperfície horoesférica convexa. Então*

$$\int_{\Sigma} V d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[ \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (49)$$

*Se a igualdade ocorre, então  $\Sigma$  é uma esfera geodésica centrada na origem.*

Usando a superfície construída na seção 2.3, mostraremos que existe uma hipersuperfície horoesférica convexa de modo que o fator do lado esquerdo de (49) é esti-

tamente menor que o fator do lado direito, mostrando que a conjectura é falsa, ao menos quando  $n = 3$ . Acreditamos que construções similares podem ser realizadas quando  $n \geq 4$ .

Consideraremos nessa seção o modelo de Poincaré para o espaço hiperbólico: a variedade diferenciável  $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n\}$  munido da métrica  $\hat{g} = \phi^2 \delta$ , onde  $\phi = 2/(1 - |x|^2)$  e  $\delta$  é a métrica do espaço euclidiano. Nesse modelo, a função  $V$  é dada por

$$V = \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}.$$

A partir de (49), definimos a quantidade  $\mathcal{P}(\Sigma)$  por

$$\mathcal{P}(\Sigma) := \left( \omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right)^{-2} [\mathcal{O}^2 - |\Sigma|^2],$$

onde  $|\Sigma|$  é a área de  $\Sigma \subset \mathbb{B}^n$  e  $\mathcal{O}(\Sigma) = \int_{\Sigma} V d\Sigma$ . Note que a conjectura seria verdadeira se  $\mathcal{P}(\Sigma) \geq 1$ .

Por outro lado, para uma hipersuperfície  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , definimos a quantidade  $\mathcal{Q}(\Sigma)$  por

$$\mathcal{Q}(\Sigma) := \frac{\int_{\Sigma} |x|^2 d\Sigma_{\delta}}{\omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|_{\delta}}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n+1}{n-1}}},$$

onde  $d\Sigma_{\delta}$  denota a medida de  $\Sigma$  na métrica plana canônica de  $(\mathbb{R}^n, \delta)$ .

Usando o fluxo pela função suporte (veja PINHEIRO, 2018 para mais detalhes sobre a definição e comportamento desse fluxo), é mostrado que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\Sigma_t) = \mathcal{Q}(\Sigma_0),$$

onde  $\Sigma_0$  é estrelada e estritamente média convexa. Além disso, quando  $n = 3$  a superfície  $\Gamma$  construída na seção anterior satisfaz  $\mathcal{Q}(\Gamma) < 1$ .

Considere  $\Gamma_0 \subset \mathbb{B}^3$  tal que  $\Gamma_0$ , vista como uma superfície mergulhada no espaço euclidiano, é estritamente convexa e satisfaz  $\mathcal{Q}(\Gamma_0) < 1$ , para construir tal superfície basta realizar um reescalonamento da superfície  $\Gamma$  obtida na seção 2.3 e observar que a quantidade  $\mathcal{Q}$  é invariante por reescalonamento. Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\Gamma_t) = \mathcal{Q}(\Gamma_0) < 1,$$

existe  $t_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{P}(\Gamma_t) < 1, \quad \forall t \geq t_0.$$

**Afirmção 1.** *Para todo  $t$  suficientemente grande, a superfície  $\Gamma_t$  é horoesférica convexa.*

Sejam  $\hat{B}$  a segunda forma fundamental de  $\Gamma \subset (\mathbb{B}^3, \hat{g})$  e  $B$  a segunda forma fundamental de  $\Gamma \subset (\mathbb{B}^3, \delta)$ . Desse modo, visto que  $\hat{g}$  é conforme a  $\delta$ , as formas fundamentais satisfazem a relação

$$\hat{B} = \phi(B + \phi^{-1}\xi(\phi)\delta),$$

onde  $\xi$  é o vetor normal unitário de  $\Gamma$  apontando para fora. É direto verificar que  $\xi(\phi) = \phi^2\delta(\xi, X)$ , onde  $X$  é o vetor posição da imersão. Assim,

$$\hat{B} = \phi B + \phi\delta(\xi, X)\delta.$$

Aplicando a igualdade anterior em um campo  $V$  não nulo e observando que em particular  $\Gamma$  é estrelada, obtemos

$$\hat{B}(V, V) = \phi B(V, V) + \phi\delta(\xi, X)\delta(V, V) > \phi B(V, V).$$

Logo,

$$\frac{\hat{B}(V, V)}{\hat{g}(V, V)} > \frac{\phi B(V, V)}{\phi^2\delta(V, V)} = \phi^{-1}\frac{B(V, V)}{\delta(V, V)}.$$

Agora, denotando por  $\hat{B}_t$ ,  $B_t$  e  $\phi_t$ , respectivamente, a versão da segunda forma fundamental de  $\Gamma_t \subset (\mathbb{B}^3, \hat{g})$ , da segunda forma fundamental de  $\Gamma_t \subset (\mathbb{B}^3, \delta)$  e do fator conforme da métrica euclidiana ao longo do fluxo pela função suporte, temos que

$$\frac{\hat{B}_t(V, V)}{\hat{g}_t(V, V)} > \phi_t^{-1}\frac{B_t(V, V)}{\delta_t(V, V)},$$

onde  $\phi_t(x) = \frac{2}{1 - |e^{-t}x|^2}$ ,  $B_t(V, V) = e^{-t}B(V, V)$  e  $\delta_t = e^{-2t}\delta$ . Por outro lado, visto que  $\Gamma_0$  é estritamente convexo, existe  $C > 0$  tal que  $B(V, V) \geq C\delta(V, V)$ , logo:

$$\frac{\hat{B}_t(V, V)}{\hat{g}_t(V, V)} > C\frac{e^t - e^{-t}|x|^2}{2}.$$

Portanto, para  $t$  suficientemente grande obtemos

$$\hat{B}_t(V, V) \geq \hat{g}_t(V, V).$$

Logo,  $\Gamma_t$  é horoesférica convexa.

### 3 ABORDAGEM ESPINORIAL EM VARIEDADES PSEUDO-HIPERBÓLICAS

#### 3.1 Hipersuperfícies em variedades spin

Nesta seção, relembremos algumas definições e propriedades da geometria spin para hipersuperfícies mergulhadas em uma variedade spin, assim como é feito em (HIJAZI, MONTIEL, e RAULOT, 2015).

Seja  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma variedade riemanniana spin de dimensão  $n + 1$ . Fixamos uma estrutura spin e denotamos por  $\mathbb{S}M$  o respectivo fibrado espinorial. Usaremos a notação  $\bar{\nabla}$  para denotar simultaneamente a conexão de Levi-Civita de  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  e seu levantamento para  $\mathbb{S}M$ , além disso, denotaremos por  $\bar{\gamma} : \mathbb{C}\ell(M) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}M)$  a multiplicação de Clifford. Sobre o fibrado espinorial  $\mathbb{S}M$  existe uma estrutura natural de produto hermitiano (veja LAWSON e MICHELSON, 1989) denotada, assim como a métrica riemanniana em  $M$ , por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . A conexão de Levi-Civita espinorial e o produto hermitiano são compatíveis com a multiplicação de Clifford e compatíveis entre si, isto é, para todo  $X, Y \in \Gamma(TM)$  e quaisquer  $\psi, \varphi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$  as seguintes identidades são válidas:

$$X\langle \psi, \varphi \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \bar{\nabla}_X \varphi \rangle; \quad (50)$$

$$\langle \bar{\gamma}(X)\psi, \varphi \rangle = -\langle \psi, \bar{\gamma}(X)\varphi \rangle; \quad (51)$$

$$\bar{\nabla}_X (\bar{\gamma}(Y)\psi) = \bar{\gamma}(\bar{\nabla}_X Y)\psi + \bar{\gamma}(Y)\bar{\nabla}_X \psi. \quad (52)$$

Além disso, o operador de Dirac  $\bar{D}$  sobre  $\mathbb{S}M$  é localmente dado por

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\gamma}(e_i)\bar{\nabla}_{e_i}, \quad (53)$$

onde  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  é um referencial local ortonormal de  $TM$ .

Considere uma hipersuperfície orientada  $\Sigma$  imersa em  $M$ . A métrica riemanniana de  $M$  induz uma métrica riemanniana sobre  $\Sigma$ , também denotada por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , cuja conexão de Levi-Civita  $\nabla^\Sigma$  satisfaz a fórmula de Gauss

$$\nabla_X^\Sigma Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle A(X), Y \rangle N, \quad (54)$$

onde  $X, Y$  são campos vetoriais tangentes à hipersuperfície  $\Sigma$ , o campo vetorial  $N$  é o campo vetorial unitário normal à  $\Sigma$  que aponta para dentro, e  $A$  é o operador forma com respeito a  $N$ , isto é,

$$\bar{\nabla}_X N = -AX, \quad \forall X \in \Gamma(T\Sigma).$$

Visto que o fibrado normal de  $\Sigma$  é trivial, a hipersuperfície  $\Sigma$  herda uma estrutura espinorial da estrutura espinorial da variedade ambiente  $M$ . Assim,  $\Sigma$  possui

um fibrado espinorial hermitiano  $\mathbb{S}\Sigma$  no mesmo sentido de (LAWSON e MICHELSON, 1989), isto é, um *fibrado de Dirac*. Denotaremos por  $\gamma^\Sigma$  e  $D^\Sigma$ , respectivamente, a multiplicação de Clifford e o operador de Dirac sobre  $\Sigma$ . Chamaremos tal fibrado espinorial de fibrado espinorial *intrínseco*. Iremos comparar o fibrado espinorial intrínseco  $\mathbb{S}\Sigma$  com a restrição  $\mathbb{S}\Sigma = \mathbb{S}M|_\Sigma$ . Este fibrado é isomorfo à  $\mathbb{S}\Sigma$  ou  $\mathbb{S}\Sigma \oplus \mathbb{S}\Sigma$  conforme a dimensão  $n$  de  $\Sigma$  seja par ou ímpar (BÄR, 1998; MOREL, 2001). Visto que a álgebra de Clifford de dimensão  $n$  é a parte par da álgebra de Clifford de dimensão  $n + 1$ , a multiplicação de Clifford  $\not\!/: \mathbb{C}\ell(\Sigma) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}\Sigma)$  é dada por

$$\not\!/(X)\psi = \bar{\gamma}(X)\bar{\gamma}(N)\psi, \quad (55)$$

para todo  $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Sigma)$  e qualquer  $X \in \Gamma(T\Sigma)$ . Considere sobre  $\mathbb{S}\Sigma$  a métrica Hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzida da métrica Hermitiana de  $\mathbb{S}M$ . Tal métrica satisfaz a condição de compatibilidade (51) se considerarmos em  $\Sigma$  a métrica riemanniana induzida de  $M$  e a multiplicação de Clifford  $\not\!/$  definida por (55). A fórmula de Gauss (54) implica que a conexão spin  $\nabla$  sobre  $\mathbb{S}\Sigma$  é dada pela seguinte fórmula de Gauss espinorial

$$\nabla_X \psi = \bar{\nabla}_X \psi - \frac{1}{2} \not\!/(AX)\psi \quad (56)$$

para todo  $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Sigma)$  e todo  $X \in \Gamma(T\Sigma)$ . Observe que as condições de compatibilidade (50), (51) e (52) são satisfeitas por  $(\mathbb{S}\Sigma, \not\!/, \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ .

O operador de Dirac *extrínseco*  $\mathcal{D} = \not\!/ \circ \nabla$  sobre  $\Sigma$  define um operador elíptico de primeira ordem agindo sobre seções de  $\mathbb{S}\Sigma$ . Por (56), para qualquer campo espinorial  $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Sigma)$  temos

$$\mathcal{D}\psi = \sum_{i=1}^n \not\!/(e_i) \nabla_{e_i} \psi = \frac{n}{2} H \psi - \bar{\gamma}(N) \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}(e_i) \bar{\nabla}_{e_i} \psi, \quad (57)$$

e

$$\mathcal{D}(\bar{\gamma}(N)\psi) = -\bar{\gamma}(N)\mathcal{D}\psi, \quad (58)$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um referencial local ortonormal de  $T\Sigma$  e  $H = \frac{1}{n} \text{trace} A$  é a curvatura média de  $\Sigma$  em  $M$ . Assim, obtemos em  $\Sigma$  uma estrutura espinorial intrínseca  $(\mathbb{S}\Sigma, \nabla^\Sigma, \gamma^\Sigma, D^\Sigma)$  e uma estrutura extrínseca  $(\mathbb{S}\Sigma, \nabla, \not\!/, \mathcal{D})$ . A dimensão de  $\Sigma$  exerce um papel importante no isomorfismo de tais estruturas. De fato, se  $n$  é par, então

$$(\mathbb{S}\Sigma, \nabla, \not\!/, \mathcal{D}) \equiv (\mathbb{S}\Sigma, \nabla^\Sigma, \gamma^\Sigma, D^\Sigma) \quad (59)$$

e, se  $n$  é ímpar, então

$$(\mathbb{S}\Sigma, \nabla, \not\!/, \mathcal{D}) \equiv (\mathbb{S}\Sigma \oplus \mathbb{S}\Sigma, \nabla^\Sigma \oplus \nabla^\Sigma, \gamma^\Sigma \oplus -\gamma^\Sigma, D^\Sigma \oplus -D^\Sigma). \quad (60)$$

Agora, relembremos a definição de *operador de quiralidade*. Um operador de quiralidade  $\omega$  sobre um fibrado de Dirac  $(\mathcal{E}M, \gamma, \nabla, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um endomorfismo  $\omega : \Gamma(\mathcal{E}M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}M)$  tal que

$$\omega^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}M}, \quad \langle \omega\psi, \omega\varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle, \quad (61)$$

$$\omega(\gamma(X)\psi) = -\gamma(X)\omega\psi, \quad \nabla_X(\omega\psi) = \omega(\nabla_X\psi), \quad (62)$$

para todo  $X \in \Gamma(TM)$  e todo  $\psi, \varphi \in \Gamma(\mathcal{E}M)$ .

Iremos agora construir um novo fibrado de Dirac com um operador de quiralidade. Considere o fibrado vetorial

$$\mathcal{E}M := \begin{cases} \mathbb{S}M & \text{se } n+1 \text{ é par,} \\ \mathbb{S}M \oplus \mathbb{S}M & \text{se } n+1 \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

munido com uma multiplicação de Clifford  $\gamma$  definido por

$$\gamma = \begin{cases} \bar{\gamma} & \text{se } n+1 \text{ é par,} \\ \bar{\gamma} \oplus -\bar{\gamma} & \text{se } n+1 \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

e uma conexão de Levi-Civita

$$\nabla = \begin{cases} \bar{\nabla} & \text{se } n+1 \text{ é par,} \\ \bar{\nabla} \oplus \bar{\nabla} & \text{se } n+1 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Além disso,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar hermitiano dado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  para  $n$  ímpar e por

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle_M + \langle \psi_2, \varphi_2 \rangle_M$$

para  $n$  par, para todo  $\Psi = (\psi_1, \psi_2), \Phi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \Gamma(\mathcal{E}M)$ .

Uma verificação simples nos mostra que  $(\mathcal{E}M, \nabla, \gamma)$  é um fibrado de Dirac no sentido de (LAWSON e MICHELSON, 1989). O operador do tipo Dirac agindo em seções de  $\mathcal{E}M$  e definido por  $D := \gamma \circ \nabla$  é explicitamente dado por

$$D = \begin{cases} \bar{D} & \text{se } n+1 \text{ é par,} \\ \bar{D} \oplus -\bar{D} & \text{se } n+1 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim como foi feito em (HIJAZI, MONTIEL, e RAULOT, 2015), iremos examinar este fibrado e sua restrição  $(\mathcal{E}, \bar{\nabla}, \bar{\gamma})$  a  $\Sigma$ .

Se  $n+1$  é par, o operador  $\omega := \gamma(\omega_{n+1}^{\mathbb{C}})$  define um operador de quiralidade em  $\mathbb{S}M$ , onde  $\omega_{n+1}^{\mathbb{C}} = i^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} e_1 \cdots e_{n+1}$  é o elemento de volume complexo. Além disso, o

fibrado espinorial admite a decomposição

$$\mathcal{E}M = \mathbb{S}M = \mathbb{S}^+M \oplus \mathbb{S}^-M,$$

onde  $\mathbb{S}^\pm M$  são os autoespaços de autovalores  $\pm 1$  do endomorfismo  $\omega$ . Por outro lado, o fibrado espinorial restrito

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}M|_\Sigma = \mathbb{S}M|_\Sigma = \mathbb{S}\Sigma$$

pode ser identificado com os dados intrínsecos de  $\Sigma$  assim como em (60).

Se  $(n + 1)$  é ímpar,  $\mathcal{E}M = \mathbb{S}M \oplus \mathbb{S}M$  e a aplicação

$$\begin{aligned} \omega : \Gamma(\mathcal{E}M) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}M) \\ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

satisfaz as propriedades (61) e (62), de modo que ele define um operador de quiralidade sobre  $\mathcal{E}M$ . A restrição de  $\mathcal{E}M$  a  $\Sigma$  é dada por

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}M|_\Sigma = \mathbb{S}\Sigma \oplus \mathbb{S}\Sigma$$

e pode ser identificada com as cópias do fibrado espinorial intrínseco de  $\Sigma$  assim com em (59).

O operador de Dirac extrínseco agindo sobre as seções de  $\mathcal{E}$  é definido por  $\mathcal{D} := \gamma \circ \nabla$ . Definimos os operadores do tipo Dirac modificados sobre  $\mathcal{E}M$  e  $\mathcal{E}$ , respectivamente, por

$$D^\pm := D \mp \frac{n+1}{2}i \operatorname{Id}_{\mathcal{E}M} \quad (63)$$

e

$$\mathcal{D}^\pm := \mathcal{D} \pm \frac{n}{2}i\gamma(N) \operatorname{Id}_{\mathcal{E}}. \quad (64)$$

Se  $M$  admite um campo espinorial de Killing imaginário  $\psi_\pm \in \Gamma(\mathcal{E}M)$  com número de Killing  $\pm \frac{i}{2}$ , isto é,

$$\nabla_X \psi_\pm = \pm \frac{i}{2} \gamma(X) \psi_\pm,$$

para todo  $X \in \Gamma(TM)$ , podemos mostrar que

$$D^\mp \psi_\pm = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{D}^\mp \psi_\pm = \frac{nH}{2} \psi_\pm. \quad (65)$$

A discussão anterior pode ser sintetizada na seguinte proposição (veja HIJAZI, MONTIEL, e RAULOT, 2015):

**Proposição 3.1 (Hijazi, Montiel e Raulot 2015).** *O fibrado  $(\mathcal{E}M, \gamma, \nabla)$  é um fibrado de Dirac munido com um operador de quiralidade  $\omega$  cujo operador do tipo Dirac associado*

$D := \gamma \circ \nabla$  é um operador elíptico de primeira ordem. A tripla restrição  $(\mathcal{E}, \not\partial, \nabla)$  também é um fibrado de Dirac no qual a fórmula de Gauss espinorial

$$\nabla_X \psi = \nabla_X \psi - \frac{1}{2} \not\partial (AX) \psi \quad (66)$$

vale para todo  $\psi \in \Gamma(\mathcal{E})$  e  $X \in \Gamma(T\Sigma)$ , e tal que

$$\not\mathcal{D}\psi = \frac{n}{2} H\psi - \gamma(N)D\psi - \nabla_N \psi \quad (67)$$

e

$$\not\mathcal{D}(\gamma(N)\psi) = -\gamma(N)\not\mathcal{D}\psi, \quad (68)$$

onde  $\not\mathcal{D} := \not\partial \circ \nabla$  é o operador do tipo Dirac extrínseco sobre  $\mathcal{E}$ . Ademais, os operadores do tipo Dirac

$$\not\mathcal{D}^\pm := \not\mathcal{D} \pm \frac{n}{2} i\gamma(N) \text{Id}_{\mathcal{E}}$$

são operadores diferenciais de primeira ordem que dependem somente das estruturas riemannianas e espinoriais de  $\Sigma$ .

Agora, considere o operador

$$G := \gamma(N)\omega : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}).$$

Este endomorfismo é uma involução autoadjunta em relação ao produto hermitiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definido pontualmente, onde  $\omega$  é o operador de quiralidade sobre  $\mathcal{E}M$ . Tal endomorfismo induz uma decomposição ortogonal de  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-, \quad (69)$$

onde  $\mathcal{V}^\pm$  são os autosubfibrados sobre  $\Sigma$  correspondendo aos autovalores  $\pm 1$  de  $G$ . Portanto, definimos as projeções associadas sobre  $\mathcal{V}^\pm$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\pm : L^2(\mathcal{E}M) &\longrightarrow L^2(\mathcal{V}^\pm) \\ \psi &\longmapsto \mathcal{P}_\pm \psi := \frac{1}{2} (\text{Id}_{\mathcal{E}M} \pm \gamma(N)\omega) \psi, \end{aligned} \quad (70)$$

onde  $L^2(\mathcal{E}M)$  e  $L^2(\mathcal{V}^\pm)$  denotam, respectivamente, os espaços das seções  $L^2$ -integráveis de  $\mathcal{E}M$  e  $\mathcal{V}^\pm$ . As projeções  $\mathcal{P}_\pm$  são ortogonais entre si e são autoadjuntas com relação ao produto hermitiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definido pontualmente. Além disso, podemos verificar que

$$\not\mathcal{D}^+ \mathcal{P}_\pm = \mathcal{P}_\mp \not\mathcal{D}^+. \quad (71)$$

Encerramos esta seção enunciando o seguinte resultado, devido a Hijazi, Montiel e Raulot, que será o principal ingrediente na prova do Teorema 1.5.

**Teorema 3.1.** *Seja  $\Omega$  uma variedade riemanniana spin compacta e conexa com bordo suave  $\Sigma$ . Admita que a curvatura escalar de  $\Omega$  satisfaz  $R \geq -n(n+1)k^2$  para algum  $k > 0$  e a curvatura média  $H$  de  $\Sigma$  seja positiva. Então, para todo  $\Phi \in \Gamma(\mathcal{E})$ , temos*

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{1}{H} |\mathcal{D}^+ \Phi|^2 - \frac{n^2}{4} H |\Phi|^2 \right) d\Sigma \geq 0. \quad (72)$$

Além disso, a igualdade ocorre para  $\Phi \in \Gamma(\mathcal{E})$  se, e somente se, existem dois campos espinoriais de Killing imaginários  $\Psi^+, \Psi^- \in \Gamma(\mathcal{E})$  com número de Killing  $-(i/2)$  tais que  $\mathcal{P}_+ \Psi^+ = \mathcal{P}_+ \Phi$  e  $\mathcal{P}_- \Psi^- = \mathcal{P}_- \Phi$ .

Veja também a Proposição 2.3 de (BARBOSA, DE LIMA, e GIRÃO, 2017)

### 3.2 Prova do Teorema 1.5

Nesta seção iremos apresentar a prova do Teorema 1.5.

*Demonstração.* Suponha que  $H > 0$  em  $\Sigma$ . Seja  $\psi$  um campo espinorial de Killing imaginário com número de Killing  $i/2$  em  $\Omega$ , tal que  $V = |\psi|^2$  (veja BAUM, 1989). Considere o campo espinorial  $\varphi = \psi|_{\Sigma}$  em  $\Sigma$ ; tal que  $\varphi$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\varphi &= \frac{nH}{2}\psi - \gamma(N) \sum_{i=1}^n \gamma(e_i) \nabla_{e_i} \psi \\ &= \frac{nH}{2}\varphi + \frac{in}{2}\gamma(N)\psi, \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{D}^+ \varphi = \frac{nH}{2}\varphi + in\gamma(N)\psi.$$

Portanto,

$$|\mathcal{D}^+ \varphi|^2 = \frac{n^2 H^2}{4} |\varphi|^2 + n^2 |\psi|^2 + n^2 H \Re \langle i\gamma(N)\psi, \psi \rangle.$$

Logo, obtemos

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{H} |\mathcal{D}^+ \varphi|^2 d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{n^2 H}{4} |\varphi|^2 d\Sigma + n^2 \left( \int_{\Sigma} \frac{|\psi|^2}{H} d\Sigma + \int_{\Sigma} \Re \langle i\gamma(N)\psi, \psi \rangle d\Sigma \right).$$

Agora, aplicando (72) obtemos

$$\int_{\Sigma} \frac{|\psi|^2}{H} d\Sigma + \int_{\Sigma} \Re \langle i\gamma(N)\psi, \psi \rangle d\Sigma \geq 0. \quad (73)$$

Por outro lado, temos

$$\langle \nabla V, N \rangle = \Re \langle i\gamma(N)\psi, \psi \rangle. \quad (74)$$

De fato, sabendo que  $\nabla_X \psi = \frac{i}{2} \gamma(X) \psi$ , para todo  $X \in \Gamma(TM)$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla V, N \rangle &= N |\psi|^2 \\ &= \langle \nabla_N \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \nabla_N \psi \rangle \\ &= 2\Re \langle \nabla_N \psi, \psi \rangle \\ &= \Re \langle i\gamma(N) \psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Assim, substituindo (74) em (73) e lembrando que  $V = |\psi|^2$ , obtemos

$$\int_{\Sigma} \frac{V}{H} d\Sigma + \int_{\Sigma} \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma \geq 0.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, temos a igualdade em (72). Nesse caso, existem dois campos espinoriais de Killing imaginários  $\Psi^+, \Psi^- \in \Gamma(\mathcal{E})$  com número de Killing  $-(i/2)$  tais que  $\mathcal{P}_+ \Psi^+ = \mathcal{P}_+ \varphi$  e  $\mathcal{P}_- \Psi^- = \mathcal{P}_- \varphi$  sobre  $\Sigma$ . Então,  $\varphi = \mathcal{P}_+ \Psi^+ + \mathcal{P}_- \Psi^-$ , assim

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+ \varphi &= \mathcal{D}^+ (\mathcal{P}_+ \Psi^+) + \mathcal{D}^+ (\mathcal{P}_- \Psi^-) \\ &= \mathcal{P}_- (\mathcal{D}^+ \Psi^+) + \mathcal{P}_+ (\mathcal{D}^+ \Psi^-) \\ &= \frac{nH}{2} (\mathcal{P}_- \Psi^+ + \mathcal{P}_+ \Psi^-). \end{aligned}$$

Deduzimos que

$$\frac{2}{nH} \mathcal{D}^+ \varphi + \varphi = \Psi^+ + \Psi^- = \tilde{\Psi},$$

isto é

$$\frac{2}{nH} \left( \frac{nH}{2} \psi + in\gamma(N)\psi \right) + \psi = \tilde{\Psi},$$

logo

$$\psi + \frac{i\gamma(N)}{H} \psi = \frac{1}{2} \tilde{\Psi}.$$

O campo espinorial  $\tilde{\Psi}$  é de Killing imaginário visto que  $\Psi^+$  e  $\Psi^-$  são Killing imaginários, além disso  $\tilde{\Psi}$  tem número de Killing  $-i/2$ , assim o campo espinorial

$$\psi + \frac{i\gamma(N)}{H} \psi$$

é uma restrição de um campo espinorial de Killing imaginário com número de Killing  $-i/2$ , portanto, para todo  $X \in \Gamma(T\Sigma)$ :

$$H\gamma(X)\psi - \gamma(AX)\psi - \frac{1}{H} X(H)\gamma(N)\psi = 0.$$

Agora, escolha  $X = X_i \in \Gamma(\Sigma)$ , onde  $X_i$  são as direções principais de curvaturas de

$\Sigma$ , cujas curvaturas principais associadas são  $\lambda_i$ . Aplicando o produto escalar na última igualdade com  $\gamma(X_i)\psi$ , obtemos

$$H|X_i|^2|\psi|^2 - \lambda_i|X_i|^2|\psi|^2 = 0.$$

Visto que  $|\psi|^2 = V \geq 1$  e em cada ponto  $p \in \Sigma$  podemos escolher uma base  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $T_p\Sigma$  tal que  $X_i$  é uma direção principal de curvatura, temos que  $\lambda_i = H$  sobre  $\Sigma$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , assim

$$A = H \text{ Id.}$$

Portanto,  $\Sigma$  é totalmente umbílica. □

### 3.3 Prova do Corolário 1.3

Agora, iremos exibir a demonstração do Corolário 1.3.

*Demonstração.* Seja  $\psi$  um espinor de Killing imaginário com número de Killing  $i/2$  ( após um reescalonamento da métrica). Assim, para cada  $X \in \Gamma(TM)$  temos

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} \gamma(X) \psi. \quad (75)$$

Considerando  $V = |\psi|^2$ , podemos verificar a partir de (75) que  $V$  satisfaz

$$\text{Hess } V = V \langle \cdot, \cdot \rangle. \quad (76)$$

Portanto, tomando o traço em (76), obtemos

$$\Delta V = (n + 1)V.$$

Integrando essa equação no domínio compacto  $\Omega$  e aplicando o teorema da divergência, de (21) obtemos (22).

Agora, se a igualdade ocorre em (22), pelo Teorema 1.5,  $\Sigma$  deve ser totalmente umbílica.

Em particular, quando  $P = \mathbb{R}^n$ , a variedade  $M$  é isométrica ao espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Portanto,  $\Sigma$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , logo é uma esfera geodésica. □

### 3.4 Prova do Corolário 1.4

Começamos esta seção lembrando ao leitor alguns fatos sobre a geometria de hipersuperfícies em variedades riemannianas. Em uma hipersuperfície  $\Sigma$  em  $M$ , definimos

a  $k$ -ésima função de curvatura

$$H_k = H_k(\Lambda) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sigma_k(\Lambda),$$

onde  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  são as funções de curvaturas principais de  $\Sigma$  e o polinômio homogêneo  $\sigma_k$  de grau  $k$  é a  $k$ -ésima função simétrica elementar

$$\sigma_k(\Lambda) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}.$$

A próxima proposição fornece uma relação entres essas curvaturas:

**Proposição 3.2.** (veja GÅRDING, 1959; Montiel e Ros, 1991) *Seja  $x : \Sigma \rightarrow M$  uma imersão isométrica entre duas variedades riemannianas de dimensão  $n$  e  $n + 1$ , respectivamente e admita que  $\Sigma$  seja conexa. Suponha que exista um ponto de  $\Sigma$  onde todas as curvaturas principais são positivas. Então, se existir  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $H_k > 0$  em  $\Sigma$ , então*

$$H \geq H_2^{1/2} \geq \dots \geq H_r^{1/r} \quad \text{on } \Sigma. \quad (77)$$

Se  $k \geq 2$ , a igualdade ocorre somente em pontos umbílicos.

Agora, se  $\nabla$  denota a conexão de Levi-Civita sobre  $M$  e  $N$  é o campo vetorial unitário normal ao longo de  $\Sigma$  que aponta na direção da região interna, definiremos o operador forma  $A$  por  $A(X) = -\nabla_X N$ . Assim, as transformações de Newton  $T_k : \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma)$  são definidas indutivamente a partir de  $A$  por:

$$T_0 = I, \quad \text{e} \quad T_k = \sigma_k I - AT_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

onde  $I$  denota a identidade em  $\Gamma(T\Sigma)$ .

Associado a cada transformação de Newton  $T_k$  existe um operador diferencial linear de segunda ordem  $L_k : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , dado por

$$L_k(u) = \text{tr}(T_k \circ \text{Hess } u),$$

onde  $\text{Hess } u : \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma)$  denota o operador simétrico definido por

$$\text{Hess } u(X) = \nabla_X^\Sigma \nabla_X^\Sigma u, \quad \forall X \in \Gamma(T\Sigma).$$

Em particular,  $L_0 = \Delta$  é o operador de Laplace-Beltrami, enquanto  $L_1$  é o operador  $\square$ , introduzido por Cheng e Yau em (1977) a fim de estudar hipersuperfícies de curvatura escalar constante.

Por um lado, o divergente de  $T_k$  é definido por

$$\operatorname{div}_\Sigma T_k = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}^\Sigma T_k)(e_i),$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um referencial local ortonormal sobre  $\Sigma$ . Portanto, temos

$$L_k(u) = \operatorname{div}_\Sigma(T_k(\nabla^\Sigma u)) - \langle \operatorname{div}_\Sigma T_k, \nabla^\Sigma u \rangle. \quad (78)$$

De (78), concluímos que o operador  $L_k$  é elíptico se, e somente se,  $T_k$  é positivo definido. Obviamente,  $L_0 = \Delta$  é sempre elíptico. A elipticidade de  $L_1$  é garantida pelo Lema 3.10 de (ELBERT, 2002) quando  $H_2 > 0$ .

Se o espaço ambiente  $M$  possui um campo vetorial conforme  $Y \in \mathcal{X}(M)$ , com a função  $f$  sendo o fator conforme, então é mostrado em (ALÍAS, DE LIRA, e MALACARNE, 2006) que

$$\operatorname{div}_\Sigma(T_k Y^\top) = \langle \operatorname{div}_\Sigma T_k, Y \rangle + c_k (f H_k + \langle Y, N \rangle H_{k+1}), \quad (79)$$

onde

$$c_k = (k+1) \binom{n}{k+1}.$$

Integrando (79) sobre  $\Sigma$  e usando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{div}_\Sigma T_k, Y \rangle d\Sigma + c_k \int_\Sigma (f H_k + \langle Y, N \rangle H_{k+1}) d\Sigma = 0. \quad (80)$$

Uma fórmula bastante útil foi obtida por Alías, de Lira e Malacarne em (2006) para todo campo vetorial tangente  $X \in \Gamma(T\Sigma)$ :

$$\langle \operatorname{div}_\Sigma T_k, X \rangle = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \langle R(N, T_{k-j} e_i) e_i, A^{j-1} X \rangle. \quad (81)$$

Em particular, quando o espaço ambiente possui curvatura constante, então  $\langle R(N, V)W, Z \rangle = 0$  para todo campo vetorial tangente  $V, W, Z \in \Gamma(T\Sigma)$ , de (81) e (79) obtemos identidade integral de Minkowski clássica para espaços de curvatura constante:

$$\int_\Sigma (f H_k + \langle Y, N \rangle H_{k+1}) d\Sigma = 0.$$

Por outro lado, quando o espaço ambiente é uma variedade de Einstein, tomando (81) com  $k = 1$  obtemos

$$\langle \operatorname{div}_\Sigma T_1, X \rangle = \operatorname{Ric}(N, X) = 0.$$

Assim, para hipersuperfícies compactas em espaços de Einstein o seguinte é válido:

$$\int_{\Sigma} f H_1 d\Sigma + \int_{\Sigma} \langle Y, N \rangle H_2 d\Sigma = 0. \quad (82)$$

Visto que toda variedade riemanniana spin admitindo um espinor de Killing imaginário é uma variedade de Einstein com curvatura de Ricci  $-n$ , e considerando  $Y = \nabla V$ , onde  $V = |\psi|^2$ , temos de (82):

$$\int_{\Sigma} V H_1 d\Sigma + \int_{\Sigma} \langle \nabla V, N \rangle H_2 d\Sigma = 0. \quad (83)$$

*Prova do Corolário 1.4.* A curvatura escalar  $S^{\Sigma}$  de uma hipersuperfície pode ser relacionada com a curvatura escalar  $S$  do espaço ambiente a partir da seguinte fórmula:

$$S^{\Sigma} = S - 2Ric(N, N) + n(n-1)H_2.$$

Em nosso caso, temos

$$S^{\Sigma} = n(n-1)(H_2 - 1).$$

Assim, a hipótese de curvatura escalar constante é equivalente à  $H_2$  constante.

Agora, é fácil verificar que, com respeito a normal  $-\frac{\partial}{\partial t}$ , as fatias  $\Sigma_s = \{s\} \times P$  são hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvaturas principais constantes iguais a 1.

Visto que  $\Sigma$  é compacta, existe um ponto  $p \in \Sigma$  tal que todas curvaturas principais de  $\Sigma$  são limitadas inferiormente por 1 (isso pode ser verificado escolhendo um ponto  $p$  onde a projeção sobre a reta real é máxima), assim a constante  $H_2$  é limitada inferiormente por 1, e portanto, por (77),  $H$  possui a mesma limitação inferior.

Considere inicialmente o caso onde  $\Sigma$  delimita um domínio compacto. Para este caso, o seguinte lema será necessário:

**Lema 3.1.** *Se  $H_2$  é constante, temos*

$$\int_{\Sigma} (\sqrt{H_2} - H) \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma \leq 0.$$

*A igualdade ocorre se, e somente se,  $\Sigma$  é totalmente umbílica.*

*Demonstração.* De (77) temos

$$\int_{\Sigma} V H d\Sigma \geq \int_{\Sigma} V \sqrt{H_2} d\Sigma = \sqrt{H_2} \int_{\Sigma} V d\Sigma.$$

Por (83), obtemos

$$- \int_{\Sigma} H_2 \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma \geq \sqrt{H_2} \int_{\Sigma} V d\Sigma.$$

Assim,

$$- \int_{\Sigma} H_2 \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma \geq \sqrt{H_2} \int_{\Sigma} \langle \nabla V, N \rangle H d\Sigma.$$

Finalmente, temos

$$\int_{\Sigma} \left( \sqrt{H_2} - H \right) \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma \leq 0,$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se,  $H = \sqrt{H_2}$  sobre  $\Sigma$ . Isso é equivalente a  $\Sigma$  ser totalmente umbílica.  $\square$

Agora, seja  $\psi$  um campo espinorial de Killing imaginário com número de Killing  $i/2$  e defina  $\varphi := (\sqrt{H_2} + i\gamma(N))\psi$  sobre  $\Sigma$ . Primeiramente, de (21) e (74), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle i\gamma(N)\psi, \varphi \rangle d\Sigma &= \sqrt{H_2} \int_{\Sigma} \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma + \int_{\Sigma} V d\Sigma \\ &\geq - \int_{\Sigma} \frac{\sqrt{H_2}}{H} V d\Sigma + \int_{\Sigma} V d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} \left( 1 - \frac{\sqrt{H_2}}{H} \right) V d\Sigma \geq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.1, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle i\gamma(N)\psi, \varphi \rangle d\Sigma &= \sqrt{H_2} \int_{\Sigma} \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma + \int_{\Sigma} V d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} \sqrt{H_2} \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma - \int_{\Sigma} \langle \nabla V, N \rangle H d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} \left( \sqrt{H_2} - H \right) \langle \nabla V, N \rangle d\Sigma \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Sigma} \langle i\gamma(N)\psi, \varphi \rangle d\Sigma = 0.$$

Logo, devemos ter a igualdade no Lema 3.1, assim  $\Sigma$  é totalmente umbílica. Agora resta pensar no caso onde  $\Sigma$  é compacta, porém não é a fronteira de nenhum domínio compacto. defina a função altura  $h \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  por  $h = \pi_{\mathbb{R}} \circ f$ , onde  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \times_{\text{exp}} P$  é a imersão isométrica ( $h$  é a projeção na reta real). Visto que  $\Sigma$  é compacto, existem  $p, q \in \Sigma$  tais que  $h$  atinge seus valores de máximo e mínimo, respectivamente. Se  $h(q) = s_1$  e  $h(p) = s_2$ , então  $\Sigma$  está contida na região  $\Omega_{s_1, s_2}$  limitada pelas fatias  $\{s_1\} \times P$  e  $\{s_2\} \times P$ . Como mencionado anteriormente, as fatias possuem curvaturas principais constantes iguais a 1, assim a segunda curvatura média de  $\Sigma$  satisfaz  $H_2(p) \geq 1$  e  $H_2(q) \leq 1$ , portanto  $H_2 \equiv 1$ .

Agora, escolhendo  $u = e^h$  em (78) e lembrando que  $\mathbb{R} \times_{\text{exp}} P$  é de Einstein, de (81) podemos obter

$$L_1(e^h) = n(n-1)e^h(H + \langle N, \partial_t \rangle H_2).$$

Mas  $H_2 \equiv 1$ ,  $H \geq \sqrt{H_2} = 1$  e a desigualdade de Cauchy-Schwarz implicam que  $H + \langle N, \partial_t \rangle H_2 \geq 0$ .

Portanto,  $L_1(e^h) \geq 0$  sobre a variedade compacta  $\Sigma$ . Assim, visto que nesse caso  $L_1$  é elíptico, pelo princípio do máximo aplicado a  $L_1$  concluímos que  $e^h$  é constante, e portanto  $h$  é constante. Logo,  $\Sigma$  é uma fatia.

Desse modo, em ambos os casos,  $\Sigma$  é totalmente umbílica com curvatura  $H_2$  constante, implicando curvatura média constante. Agora, aplicando o lema 4 de (MONTIEL, 1999), onde hipersuperfícies umbílicas com curvatura média constante são classificadas. Assim, o resultado segue. □

## 4 CONCLUSÃO

Na primeira parte dessa tese obtivemos desigualdades geométricas para uma certa classe variedades subestáticas. Como foi apresentado, o elemento fundamental para a obtenção de tais desigualdades foi a determinação de uma quantidade integral que é monotonamente decrescente ao longo do fluxo. Assim, a análise do comportamento assintótico dessa quantidade dependeu diretamente da maneira como o fluxo pelo inverso da curvatura média age sobre a hipersuperfície em cada ambiente estudado. Desse modo, o próximo passo seria obter desigualdades similares em outros espaços, bastando estudar o fluxo pelo inverso da curvatura média nesses novos ambientes.

Obtivemos uma desigualdade em variedades spin que admitem a existência de um campo de Killing imaginário. Uma das principais partes foi a escolha de um campo espinorial que nos conduziu, juntamente com um determinado princípio holográfico, aos resultados ali obtidos. Podemos destacar que a escolha de outros campos espinoriais pode resultar em resultados diferentes ou generalizações para outros tipos de curvaturas. A busca de resultados similares aos princípios holográficos que foram utilizados também podem gerar novas possibilidades de resultados nesse sentido.

## REFERÊNCIAS

- ALEKSANDROV, A. D. Uniqueness theorems for surfaces in the large. V. **Vestnik Leningrad. Univ.**, v. 13, n. 19, p. 5–8, 1958.
- ALÍAS, Luis J.; DE LIRA, Jorge H. S.; MALACARNE, J. Miguel. Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces. **J. Inst. Math. Jussieu**, v. 5, n. 4, p. 527–562, 2006.
- BÄR, Christian. Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 16, n. 6, p. 573–596, 1998.
- BARBOSA, Ezequiel; DE LIMA, Levi Lopes; GIRÃO, Frederico. On the limiting behavior of the Brown-York quasi-local mass in asymptotically hyperbolic manifolds. **Differential Geom. Appl.**, v. 53, p. 56–75, 2017.
- BAUM, Helga. Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 7, n. 3, p. 205–226, 1989.
- BRENDLE, Simon. Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds. **Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.**, v. 117, p. 247–269, 2013.
- CHEN, D.; LI, H.; ZHOU, T. **A Penrose type inequality for graphs over Reissner-Nordström-anti-deSitter manifold**. pre-print arXiv, 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1710.02340.pdf>>. Acesso em: 16 jul. 2018.
- CHENG, Shiu Yuen; YAU, Shing Tung. Hypersurfaces with constant scalar curvature. **Math. Ann.**, v. 225, n. 3, p. 195–204, 1977.
- DE LIMA, Levi Lopes; GIRÃO, Frederico. An Alexandrov-Fenchel-type inequality in hyperbolic space with an application to a Penrose inequality. **Ann. Henri Poincaré**, v. 17, n. 4, p. 979–1002, 2016.
- ELBERT, Maria Fernanda. Constant positive 2-mean curvature hypersurfaces. **Illinois J. Math.**, v. 46, n. 1, p. 247–267, 2002.
- FILLMORE, Jay P. Symmetries of surfaces of constant width. **J. Differential Geometry**, v. 3, p. 103–110, 1969.
- FREITAS, P.; LAUGESEN, R. S.; LIDDELL, G. F. On convex surfaces with minimal

moment of inertia. **J. Math. Phys.**, v. 48, n. 12, p. 122902, 21, 2007.

GÅRDING, Lars. An inequality for hyperbolic polynomials. **J. Math. Mech.**, v. 8, p. 957–965, 1959.

GE, Yuxin; WANG, Guofang; WU, Jie. A new mass for asymptotically flat manifolds. **Adv. Math.**, v. 266, p. 84–119, 2014.

GE, Yuxin; WANG, Guofang; WU, Jie. The GBC mass for asymptotically hyperbolic manifolds. **Math. Z.**, v. 281, n. 1-2, p. 257–297, 2015.

GERHARDT, Claus. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. **J. Differential Geom.**, v. 32, n. 1, p. 299–314, 1990.

GIRÃO, Frederico; PINHEIRO, Neilha M. An Alexandrov-Fenchel-type inequality for hypersurfaces in the sphere. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 52, n. 4, p. 413–424, 2017.

GIRÃO, Frederico.; RODRIGUES, Diego. **A spinorial approach to constant scalar curvature hypersurfaces in pseudo-hyperbolic manifolds**. pre-print arXiv, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1806.01120.pdf>>. Acesso em 6 jun. 2018.

GUAN, Pengfei; LI, Junfang. The quermassintegral inequalities for  $k$ -convex starshaped domains. **Adv. Math.**, v. 221, n. 5, p. 1725–1732, 2009.

HALL, R. R. A class of isoperimetric inequalities. **J. Analyse Math.**, v. 45, p. 169–180, 1985.

HEINTZE, Ernst; KARCHER, Hermann. A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds. **Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)**, v. 11, n. 4, p. 451–470, 1978.

HIJAZI, Oussama; MONTIEL, Sebastián; RAULOT, Simon. A holographic principle for the existence of imaginary Killing spinors. **J. Geom. Phys.**, v. 91, p. 12–28, 2015.

HIJAZI, Oussama; MONTIEL, Sebastián; RAULOT, Simon. On an inequality of Brendle in the hyperbolic space. **C. R. Math. Acad. Sci. Paris**, v. 356, n. 3, p. 322–326, 2018.

HIJAZI, Oussama; MONTIEL, Sebastián; ROLDÁN, Antonio. Dirac operators on hypersurfaces of manifolds with negative scalar curvature. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 23, n. 3, p. 247–264, 2003.

HUISKEN, Gerhard. Evolution of hypersurfaces by their curvature in Riemannian manifolds. **Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math.**, v. 2, p. 349–360, 1998.

- KWONG, Kwok-Kun. An extension of Hsiung-Minkowski formulas and some applications. **J. Geom. Anal.**, v. 26, n. 1, p. 1–23, 2016.
- KWONG, Kwok-Kun; MIAO, Pengzi. A new monotone quantity along the inverse mean curvature flow in  $\mathbb{R}^n$ . **Pacific J. Math.**, v. 267, n. 2, p. 417–422, 2014.
- KWONG, Kwok-Kun; MIAO, Pengzi. Monotone quantities involving a weighted  $\sigma_k$  integral along inverse curvature flows. **Commun. Contemp. Math.**, v. 17, n. 5, p. 1550014, 10, 2015.
- LAWSON, H. Blaine, Jr.; MICHELSON, Louise, MARIE. **Spin geometry**. Nova Jersey: Princeton University Press, Princeton series, v. 38. 1989.
- MAKOWSKI, Matthias; SCHEUER, Julian. Rigidity results, inverse curvature flows and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the sphere. **Asian J. Math.**, v. 20, n. 5, p. 869–892, 2016.
- MINKOWSKI, Hermann. Volumen und Oberfläche. **Math. Ann.**, v. 57, n. 4, p. 447–495, 1903.
- MONTIEL, Sebastián. Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 48, n. 2, p. 711–748, 1999.
- Montiel, Sebastián; Ros, Antonio. Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. **Differential geometry**, v. 52, p. 279–296, 1991.
- MOREL, Bertrand. Eigenvalue estimates for the Dirac-Schrödinger operators. **J. Geom. Phys.**, v. 38, n. 1, p. 1–18, 2001.
- PINHEIRO, Neilha Marcia. **Desigualdades tipo Alexandrov-Fenchel para hipersuperfícies da esfera e do espaço hiperbólico**. 2018. 42 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.
- QIU, Guohuan; XIA, Chao. A Generalization of Reilly's Formula and its Applications to a New Heintze-Karcher Type Inequality. **International Mathematics Research Notices**, v. 2015, n. 17, p. 7608–7619, 2014.
- REILLY, Robert C. Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 26, n. 3, p. 459–472, 1977.
- ROS, Antonio. Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures. **Rev. Mat. Iberoamericana**, v. 3, n. 3-4, p. 447–453, 1987.
- ROS, Antonio. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. **J. Differential Geom.**, v. 27, n. 2, p. 215–223, 1988. With an appendix by

Nicholas J. Korevaar.

SACHS, Horst. Über eine Klasse isoperimetrischer Probleme. I, II. **Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe**, v. 8, p. 121–126, 127–134, 1958/1959.

SACHS, Horst. Ungleichungen für Umfang, Flächeninhalt und Trägheitsmoment konvexer Kurven. **Acta Math. Acad. Sci. Hungar.**, v. 11, p. 103–115, 1960.

TASHIRO, Yoshihiro. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 117, p. 251–275, 1965.

URBAS, John I. E. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. **Math. Z.**, v. 205, n. 3, p. 355–372, 1990.

WANG, McKenzie Y. Parallel spinors and parallel forms. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 7, n. 1, p. 59–68, 1989.

WANG, Xiaodong; WANG, Ye-Kai. Brendle's inequality on static manifolds. **J. Geom. Anal.**, v. 28, n. 1, p. 152–169, 2018.

WANG, Zhuhai. **A Minkowski-type inequality for hypersurfaces in the Reissner-Nordstrom-anti-deSitter manifold**. 2015, 39 p. Thesis (Ph.D.)—Columbia University. Nova York, 2015.

Yau, Shing-Tung. **Seminar on Differential Geometry**. Nova Jersey: Princeton University Press. 2016. v. 102.