

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE  
TRANSPORTES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
DE TRANSPORTES**

**ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE MATERIAIS  
ASFÁLTICOS CONSIDERANDO OS EFEITOS DA  
TEMPERATURA E DO DANO**

Enson de Lima Portela

ORIENTADORA: Áurea Silva Holanda, D.Sc

Fortaleza  
OUTUBRO/2011

**Enson de Lima Portela**

**ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE MATERIAIS  
ASFÁLTICOS CONSIDERANDO OS EFEITOS DA  
TEMPERATURA E DO DANO**

Dissertação submetida ao Programa de pós-graduação em Engenharia de Transportes da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Transportes.

Área de Concentração: Infraestrutura de Transportes.

Orientadora: Áurea Silva Holanda

Fortaleza  
OUTUBRO/2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca de Pós Graduação em Engenharia

---

- P877a Portela, Enson de Lima.  
Análise viscoelástica de materiais asfálticos considerando os efeitos da temperatura e do dano / Enson de Lima Portela. – 2011.  
100 f. : il. color., enc. ; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia de Transportes, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Transportes, Fortaleza, 2011.  
Área de concentração: Infraestrutura de Transportes  
Orientação: Profa. Dra. Áurea Silva Holanda.
1. Transportes. 2. Pavimentos de asfalto. 3. Método dos elementos finitos. I. Título.

CDD 388

---

# **ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE MATERIAIS ASFÁLTICOS CONSIDERANDO OS EFEITOS DA TEMPERATURA E DO DANO**

**Enson de Lima Portela**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE MESTRADO E DOUTORADO EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES.

Aprovada em 10/2011, por:

---

Profa. Áurea Silva de Holanda, D.Sc  
(Orientadora)

---

Profa. Verônica Teixeira F. Castelo Branco, Ph.D  
(Examinador Interno)

---

Prof. Evandro Parente Junior, D.Sc  
(Examinador Interno)

---

Prof. Leonardo José Nascimento Guimarães, Ph.D  
(Examinador Externo)

Fortaleza, CE – Brasil  
Outubro de 2011

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus pais, Tânia Maria Lima de Menezes e José Maria Calixto de Menezes, por todo o esforço que sempre dispuseram a fazer para me oferecer uma boa educação. Por me ensinarem que a vida é feita de escolhas e deixarem que eu escolhesse o caminho que eu quis seguir

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, por acreditarem em mim e sempre me apoiarem em tudo que faço.

A minha orientadora Áurea Silva Holanda, por ter sido tão paciente e mais ainda comprometida com meu trabalho, sempre se dispondo a ajudar e melhorar meu trabalho.

Ao professor Evandro Parente Júnior, por participar ativamente da minha formação desde minha graduação sempre me ajudando sem medir esforços.

Ao grupo do Laboratório de Mecânica dos Pavimentos (LMP), aos amigos que me ajudaram com discussões super produtivas.

A Fernanda Pessoa, minha namorada, amiga e cúmplice, por toda paciência e apoio.

Agradeço também a todos que fazem a Hepta Estrutural, pela compreensão, liberdade e flexibilidade que me deram fazendo possível a realização desse sonho.

Ao IFCE – Instituto Federal do Ceará, instituto do qual tenho orgulho de ser membro.

A todo que direta ou indiretamente colaboraram de alguma forma para que esse trabalho fosse possível.

Resumo da Dissertação submetida ao corpo docente do PETRAN/UFC como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia de Transportes.

## **ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE MATERIAIS BETUMINOSOS CONSIDERANDO OS EFEITOS DA TEMPERATURA E DO DANO**

Enson de Lima Portela

Outubro de 2011

Orientadora: Áurea Silva Holanda, D.Sc

O presente trabalho apresenta um algoritmo para o tratamento do dano e do efeito da temperatura em pavimentos flexíveis considerando o material como viscoelástico. A presença do ligante asfáltico na mistura faz com que o comportamento mecânico dependa do tempo e da taxa de carregamento e outros fatores. Verifica-se que este comportamento pode ser representado de maneira adequada através do uso de modelos constitutivos viscoelásticos. Existem outros fatores que devem ser considerados para uma análise mais próxima da realidade, entre eles, cita-se: o dano e a temperatura. Neste estudo, propõe-se modelar o comportamento dependente do tempo e taxa de carregamento, o efeito da temperatura, e trincamento dos materiais utilizados na execução do revestimento asfáltico. Na abordagem proposta, os efeitos dependentes do tempo são modelados através da teoria da viscoelasticidade linear e o trincamento através da mecânica do dano contínuo. Esta última busca modelar o processo de microtrincamento distribuído que ocorre antes do aparecimento de uma trinca discreta. Nesta abordagem o dano que ocorre no interior de um determinado material é representado através de variáveis internas de estado. A evolução do dano é descrita por um modelo fenomenológico que tipicamente é desenvolvido a partir de resultados de ensaios de laboratório. Quanto à modelagem do efeito da temperatura, este trabalho apresenta uma metodologia para análise termo-mecânica de pavimentos asfálticos utilizando um modelo viscoelástico para materiais termo-reologicamente simples. Também é feito uso do Princípio da Superposição Tempo-Temperatura (PSTT) para a caracterização do material. Este princípio diz que o comportamento tensão-deformação em uma dada temperatura para uma determinada taxa de deformação pode ser obtido a partir do comportamento em outra temperatura para uma taxa de deformação diferente. Esta nova taxa de deformação é obtida simplesmente escalando-se o tempo com uma função da temperatura que usualmente é conhecida como fator deslocamento tempo-temperatura.

Palavras-chaves: Pavimentos Asfálticos, Dano, Temperatura, Método dos Elementos Finitos.

Abstract of Thesis submitted to PETRAN/UFC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.) in Transportation Engineering

## **VISCOELASTIC ANALYSIS OF BITUMINOUS MATERIAL CONSIDERING THE TEMPERATURE AND DAMAGE EFFECTS**

Enson de Lima Portela

October, 2011

This work presents an algorithm to modeling the damage and temperature effects on flexible pavements. This formulation considers the material as viscoelastic. It is well-known not only that asphalt pavements present a mechanical behavior that depends on time, temperature and loading rate but also it can be represented by viscoelastic models. There are some important variables which should be considered for a better performance of the model. Two of them are: Damage and Temperature. This work will study both of them. The increase of the temperature increases the viscous part of the viscoelastic behavior, while the decrease of the temperature increases the elastic part, increasing the material stiffness. The stiffness variation affects the stresses, strains and displacements in asphalt pavements. It is generally accepted in pavement literature that asphalt mixtures can be considered as a thermorheologically simple material and that the Time-Temperature Superposition Principle (TTSP) is valid. Thus, this work presents an algorithm to the viscoelastic analysis of asphalt pavements including the temperature effects. A flexible pavement is analyzed in order to assess the importance of temperature effects on the stresses, strains and displacements in the structural behavior of asphalt pavements. For low stresses the behavior of asphaltic pavements can be accurately modeled using viscoelastic models. However, as the stress level increases distributed micro-cracking arises in the asphalt concrete, leading to permanent deformations. To address these issues, this paper presents a finite element formulation for nonlinear time-dependent analysis of asphalt concrete. The modeling strategy is based on the use of the elastic-viscoelastic correspondence principle and the consideration of micro-cracking through continuum damage mechanics. Considering that the relaxation modulus is given by a Prony series, a very efficient recursive algorithm is obtained where the variables at one time step depend only on the variables of the previous step. The nonlinear equations at both local (constitutive) and global levels are solved by the Newton-Raphson Method. The numerical results using this algorithm will be compared with available solutions



# SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 .....	1
INTRODUÇÃO .....	1
1.1 PROBLEMA DE PESQUISA .....	2
1.2 OBJETIVOS .....	3
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	4
CAPÍTULO 2 .....	6
2.1 HISTÓRICO DE DIMENSIONAMENTO DE PAVIMENTOS FLEXÍVEIS NO BRASIL.....	6
2.2 PROJETO NCHRP 1-37A E O MEPDG .....	9
2.3 ANÁLISE DE PAVIMENTOS ASFÁLTICOS .....	10
2.4 TEMPERATURA EM PAVIMENTOS FLEXÍVEIS.....	13
2.5 CURVA MESTRA.....	17
2.6 DANO EM PAVIMENTOS FLEXÍVEIS.....	19
2.7 VARIÁVEL DANO .....	24
2.8 TENSÃO EFETIVA.....	25
2.9 CRITÉRIO DE RUPTURA.....	26
2.10 TERMODINÂMICA DO DANO .....	28
2.10.1 MODELO ELÁSTICO LINEAR.....	30
2.10.2 MODELO VISCOELÁSTICO LINEAR .....	32
2.10.3 MODELO VISCOELÁSTICO CONSIDERANDO DANO .....	35
2.10.4 MODELOS VISCOPLÁSTICOS .....	37
2.11 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA PAVIMENTOS ASFÁLTICOS.....	30
CAPÍTULO 3 .....	39
EFEITO DA TEMPERATURA EM PAVIMENTOS ASFÁLTICOS .....	39
3.1 COMPORTAMENTO DE MATERIAIS BETUMINOSOS .....	41
3.1.1 EQUAÇÃO DE ARRHENIUS .....	42
3.1.2 EQUAÇÃO DE WILLIAMS-LANDE-FERRY (WLF).....	43
3.1.3 FATOR DE DESLOCAMENTO POR RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	44
3.2 ANÁLISE VISCOELÁSTICA LINEAR .....	45
3.3 ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS .....	49
CAPÍTULO 4 .....	52
MODELAGEM DO DANO EM MATERIAIS VISCOELÁSTICOS .....	52

CAPÍTULO 5 .....	68
RESULTADOS E ANÁLISES .....	68
CAPÍTULO 6 .....	89
COMENTÁRIOS FINAIS .....	89
6.1. SUGESTÕES DE TRABALHO FUTUROS.....	91
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	92
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	92

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação esquemática das deformações em pavimentos flexíveis. ....	6
Figura 2 – Fluxograma do FEPAVE2. (Fonte: Benevides. 2000).....	13
Figura 3 – Representação de trinca térmica. (Fonte: Bernucci <i>et al.</i> 2007).....	14
Figura 4 – Representação de deformação permanente. (Fonte: Bernucci <i>et al.</i> 2007) ...	14
Figura 5 – Curva mestra obtida a partir de ensaio de creep. (Fonte: Medeiros, 2005)...	18
Figura 6 – Relação de módulo de ângulo de fase em misturas. (Fonte: Medeiros, 2005). .....	18
Figura 7 – Modelagem pelo Modelo de Zona Coesivas (Fonte: Freitas, 2007, adaptado). .....	20
Figura 8 – Contorno arbitrário em torno da ponta da trinca.....	21
Figura 9 – Elemento de volume representativo (Fonte: Matsuda, 2008, adaptado). ....	24
Figura 10 – (a) Dispositivo de Ensaio de Fadiga. (b) Ruptura do Corpo de Prova. ....	27
Figura 11 – Esquema de pavimento para diversas camadas (Huang, 2004, adaptado). .	32
Figura 12 – Processo de dano através de tomografia computadorizada. (Fonte: Darabi, 2011) .....	35
Figura 13 – Especificação brasileira de ligantes asfálticos de 2005 (Fonte: Bernucci, 2006). .....	39
Figura 14 – Mapa do Brasil com respectivos ligantes indicados. ....	40
Figura 15 – Fator de deslocamento tempo-temperatura.....	42
Figura 16 – Shift factor $\alpha(T)$ para $T_{ref} = 24\text{ }^{\circ}\text{C}$ – Equação de Arrhenius. ....	43
Figura 17 – Módulo cisalhante dinâmico ( $G^*$ ) por frequência de oscilação ( $f$ ) - dados experimentais.....	44
Figura 18 – Curva mestra do módulo dinâmico $G^*$ a $24\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Método de Arrhenius.....	45
Figura 19 – Curva da pseudorigidez pelo parâmetro de dano (Fonte: Mun e Kim, 2005). .....	59
Figura 20 – Barra uniaxial.....	68
Figura 21 – Função deslocamento. ....	69
Figura 22 – Comparação das tensões analíticas com as numéricas. ....	69
Figura 23 - Geometria e condições de contorno.....	70
Figura 24 – Deslocamento vertical no topo da camada de revestimento.....	72
Figura 25 – Tensões horizontais ( $\sigma_{xx}$ ) no fundo da camada de revestimento. ....	73
Figura 26 – Comparação entre os resultados laboratoriais e numéricos.....	75

Figura 27 – Comparação das tensões obtidas em laboratório e numericamente. ....	75
Figura 28 – Variação da pseudodeformação com a deformação real viscoelástica. ....	76
Figura 29 – Variação da pseudodeformação com a deformação real viscoelástica. ....	76
Figura 30 – Variação da tensão com a pseudodeformação. ....	77
Figura 31 – Variação da tensão viscoelástica linear com o tempo para várias amplitudes de deformação e $T = 10s$ . ....	79
Figura 32 – Variação da tensão com o tempo para várias amplitudes de deformação e $T = 1s$ . ....	80
Figura 33 – Variação da tensão com o tempo para várias amplitudes de deformação e $T= 10s$ .....	81
Figura 34 – Variação da tensão com o tempo para várias amplitudes de deformação e $T= 10s$ .....	81
Figura 35 – Variação da tensão com o tempo para várias amplitudes de deformação e $T= 20s$ .....	82
Figura 36 – Variação do dano com o tempo para diversas amplitudes de deformação e $T=10s$ . ....	83
Figura 37 – Comportamento viscoelástico com carregamento harmônico. (Souza, 2005) .....	84
Figura 38 – Comportamento viscoelástico com carregamento harmônico para amplitude de deformação de 0,001 e $T=1s$ .....	84
Figura 39 – Comportamento viscoelástico com carregamento harmônico para amplitude de deformação de 0,001 e $T=10s$ .....	85
Figura 40 – Variação da tensão com o tempo para vários incrementos de tempo. ....	86
Figura 41 – Variação do dano para vários incrementos de tempo.....	87
Figura 42 – Variação da pseudorigidez para diferentes incrementos de tempo.....	88
Figura 43 – Variação da pseudodeformação para diferentes incrementos de tempo.....	88

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Espessura mínima de revestimento (Fonte: DNIT, 2005).....	7
Tabela 2 – Processo iterativo para a solução da Equação (119) por Newton Raphson. .	61
Tabela 3 – Série de Prony ( $T_{ref} = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).....	71
Tabela 4 – Série de Prony (Mun e Geem, 2009). ....	74

## LISTA DE FIGURAS

$a$  – Constante obtidas a partir de ensaios laboratoriais

$A(\nu)$  – Matriz dos coeficientes de Poisson

$A_e$  – é a matriz de incidência

$b$  – Constante obtidas a partir de ensaios laboratoriais

$B$  – Matriz deformação-deslocamento

$C$  – Pseudorigidez

$C$  – Matriz constitutiva

$^{\circ}\text{C}$  – Graus Celsius

$D$  – Dano

$D_c$  – Dano crítico

$E$  – Módulo de elasticidade

$E_a$  – Energia de ativação

$E_l$  – Módulo do concreto asfáltico

$\bar{E}$  – Módulo tangente

$E_{\infty}$  – Coeficiente da Série de Prony

$E_R$  – Módulo de referência

$E_i$  – Coeficiente da Série de Prony

$\mathbf{f}$  – Forças externas

$F$  a energia livre de Helmholtz

$\mathbf{g}$  – Forças internas

$G^*$  – Módulo dinâmico ou módulo complexo

$J$  – Integral J

$\mathbf{K}$  – Matriz de rigidez

$n$  – Vetor unitário

$N$  – Número total de passagens equivalentes ao eixo padrão

$N$  – Mede a entropia

$q$  – Carga aplicada de forma circular

$r$  – circular de raio

$\mathbf{r}_{n+1}$  – Função resíduo

$s$  – Comprimento de arco

$S$  – Parâmetros de dano

$S^*$  – Parâmetro de dano

$\dot{S}_{n+q}$  – Taxa de variação do parâmetro de dano

$S_D$  – Área total danificada

$t$  – Tempo contado a partir de um determinado referencial

$t_n$  – Tempo final

$T_l$  – Temperatura a 25mm abaixo da superfície

$T_g$  – Temperatura vítrea

$T_{ref}$  – Temperatura de referência

$TN$  – Mede a energia dissipada

$u$  – Deslocamentos nodais

$u^R$  – Pseudodeslocamentos

$U$  – Mede o trabalho total realizado no material

$W$  – Energia disponível para ser transformada em trabalho

$W^R$  – Função densidade de energia de pseudodeformação

$W_s$  – Rrabalho dissipado por mudanças na microestrutura do material

$W_t$  – representa o trabalho total feito pelas tensões no material

$a_i(T)$  – fator de deslocamento tempo-temperatura

$\Delta\xi$  – Incremento de tempo reduzido

$\Delta\varepsilon^R$  – Incremento de pseudodeformação

$\Delta t$  – Incremento de tempo

$\xi$  – Tempo reduzido

$\varepsilon_i$  – Deformações no material

$\varepsilon^R$  – Pseudodeformação

$\varepsilon_{vp}$  – Deformação viscoplástica

$\dot{\varepsilon}$  – Taxa de deformação

$\delta$  – Ângulo de fase que evidencia a relação entre as parcelas viscosa e elásticas

$\delta U_{int}$  – Trabalho virtual interno

$\delta \mathbf{u}$  – Campo de deslocamentos virtuais

$\delta W_{ext}$  – Trabalho virtual externo

$\rho_i$  – Coeficiente da Série de Prony

$\sigma$  – Tensão

$\sigma^R$  – Pseudotensões

$\sigma_R$  – Tensão de ruptura

$\sigma_\infty$  – Tensão máxima

$\sigma_{ult}$  – Tensão última

$\nu$  – Poisson;



# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Pavimentos rodoviários são estruturas de múltiplas camadas de espessuras finitas. Essas camadas são construídas sobre a superfície final de terraplanagem. Tradicionalmente os pavimentos são classificados em dois tipos: rígido e flexível. Os pavimentos rígidos são aqueles em que o revestimento é composto de placas de concreto de cimento Portland. Nesses pavimentos a espessura é fixada em função da resistência à flexão das placas de concreto e da resistência das camadas subjacentes (Bernucci *et al.*, 2007).

Os pavimentos flexíveis, por sua vez, são aqueles em que o revestimento é composto por uma mistura constituída predominantemente por agregado e ligante asfáltico, sendo formadas, em geral, por três camadas: revestimento asfáltico, base e sub-base. O presente trabalho se propõe a estudar questões relativas somente aos pavimentos flexíveis, visto que 95% da malha rodoviária brasileira é composta por este tipo de pavimento.

O Brasil tem um sistema logístico, tanto de passageiros como de transporte de cargas, bastante dependente do modal rodoviário. A rodovia promove a integração econômica e traz grandes benefícios à sociedade. Desta forma, é importante que essa infraestrutura esteja em situação adequada de tráfego já que qualquer deficiência na via interfere diretamente nos custos operacionais dos veículos, elevando os preços dos produtos e serviços comercializados.

De acordo com a pesquisa CNT – Confederação Nacional dos Transportes – de Rodovias 2009 onde foram avaliados os 89.552 km que correspondem à soma da extensão de toda rede federal pavimentada com a das principais rodovias estaduais, a avaliação qualitativa do pavimento mostrou que, dos 75.337 km de rodovias sob gestão pública, praticamente metade da extensão pesquisada (45,8%) é considerada em estado regular, enquanto 16,4% são avaliados como ruim e péssimo o que significa 12.392 km de rodovias onde o tráfego de veículos é considerado perigoso.

Portanto, para se atingir níveis satisfatórios de condições nos pavimentos brasileiros os próximos anos exigirão grandes investimentos na recuperação da infraestrutura viária nacional, justificando pesquisas que visam o desenvolvimento de métodos para melhor

prever o número de solicitações de tráfego necessárias para causar níveis não aceitáveis de dano aos pavimentos asfálticos (CNT, 2009).

## 1.1 Problema de Pesquisa

Muitos esforços têm sido empregados, por diferentes pesquisadores, na tentativa de desenvolver métodos capazes de realizar análises de tensões dos pavimentos asfálticos de forma mais realista.

No Brasil, o dimensionamento de pavimentos asfálticos é realizado predominantemente a partir do Método do DNER (Motta e Medina, 2005). Este método determina a espessura das camadas baseado no número  $N$ , que é o número total de passagens do eixo padrão – 8,2tf, e no valor de CBR do subleito, no ensaio de CBR é medida a resistência à penetração de uma amostra saturada compactada segundo o método Protctor. O valor da resistência é computado em porcentagem, sendo que 100% é o valor correspondente à penetração em uma amostra de brita graduada de elevada qualidade que foi adotada como padrão de referência. Este método pertence à classe dos chamados métodos empíricos, que são métodos baseados apenas em dados obtidos em campo.

O uso de métodos empíricos no projeto de pavimentos ajudou, no passado, pesquisadores e engenheiros a entender melhor os fatores que influenciam o comportamento dos pavimentos. Porém, com o desenvolvimento constante da tecnologia, há uma tendência cada vez maior de se utilizar os chamados métodos mecanísticos nas diversas atividades envolvidas no projeto de pavimentos (Huang, 2004).

Descrever a relação tensão-deformação em pavimentos asfálticos não é uma tarefa simples, sendo a complexidade oriunda de diversos fatores como a geometria do pavimento, as condições de contorno envolvidas e as propriedades dos materiais que compõem a estrutura do mesmo (materiais granulares e misturas asfálticas) que apresentam comportamento não-linear e dependente do tempo e da temperatura. Devido a esta complexidade, deve-se ter em mente que a determinação analítica das tensões/deformações em pavimentos é difícil, ou mesmo impossível, em alguns casos, o que inibiu durante muito tempo a utilização prática dos métodos mecanísticos em grande escala.

Assim, torna-se necessário recorrer a métodos numéricos para o tratamento do problema levantado. Dentre os métodos computacionais existentes, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o mais utilizado na análise de pavimentos e é o método que será usado no presente trabalho.

No que diz respeito a modelos constitutivos para o revestimento asfáltico, pode-se verificar que, nas últimas décadas, vários modelos foram desenvolvidos como, por exemplo, os modelos viscoelásticos e viscoplásticos. Estes modelos têm sido adotados com o objetivo de representar o comportamento mecânico da camada de revestimento de maneira mais realista.

Desta forma, o problema a ser abordado neste trabalho está relacionado ao tratamento da relação tensão-deformação da camada de revestimento asfáltico, ou seja, busca-se apresentar e implementar um modelo que seja capaz de melhor representar o comportamento das misturas asfálticas. Nesse âmbito dois importantes fatores serão estudados: a temperatura e o dano.

## **1.2 Objetivos**

A partir da discussão apresentada até aqui, a presente dissertação tem como objetivo geral estudar e implementar modelos capazes de realizar análises mecânicas de materiais asfálticos considerando o material como viscoelástico linear e acrescentando a essa análise o efeito da temperatura e do dano. Dessa forma, o presente trabalho busca contribuir para a realização de uma análise tensão - deformação, em materiais asfálticos, mais próxima da realidade.

A aplicação mais comum de materiais asfálticos, é sem dúvida, em pavimentos flexíveis, mais especificamente no revestimento asfáltico. No caso da consideração da temperatura, o próprio pavimento asfáltico é analisado e não somente o material em si. Objetiva-se, portanto, a implementação de um algoritmo para o tratamento desse pavimento no sistema computacional CAP3D que vem sendo desenvolvido no LMP/UFC – Laboratório de Mecânica dos Pavimentos/ Universidade Federal do Ceará.

O CAP3D é um programa para análise de pavimentos asfálticos através do Método dos Elementos Finitos que está sendo desenvolvido na linguagem C++ utilizando a técnica de Programação Orientada a Objetos, de maneira a gerar um sistema computacional facilmente expansível através da definição de uma série de classes base,

que podem ser facilmente derivadas e especializadas através dos mecanismos de herança e polimorfismo (Holanda *et al.*, 2006).

Com relação ao efeito do dano, o presente trabalho tem como objetivo estudar uma formulação e realizar sua implementação para o caso unidimensional.

Dentre os objetivos específicos desse trabalho, podem-se citar:

- Contribuir para o melhor entendimento do comportamento mecânico dos pavimentos quando sua temperatura é alterada, principalmente para altas temperaturas que é o caso da região nordeste;

- Avaliar o efeito do dano nas respostas às solicitações ocorridas nas misturas asfálticas;

- Analisar o comportamento, considerando o efeito do dano, das misturas asfálticas quando submetidas a deformações cíclicas e não cíclicas.

- Verificar a influência da temperatura nas respostas de deslocamentos verticais no topo da camada do revestimento asfáltico e das tensões horizontais no fundo da camada de revestimento, visto que essas duas respostas estão entre os critérios de dimensionamento mecanístico usados no Brasil;

- Analisar as tensões nos materiais viscoelásticos considerando o dano quando se faz variar a amplitude e o período de deformação aplicados;

- Avaliar a influência da discretização no tempo do modelo apresentado;

- Verificar a defasagem entre as deformações e as tensões nos materiais viscoelásticos quando se considera o dano;

### **1.3 Estrutura da Dissertação**

O presente trabalho se encontra organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1 uma breve descrição do trabalho é realizada. Tornam-se explícitos ainda neste capítulo os objetivos que norteiam o trabalho.

No Capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica. Esta foi realizada com base nos principais periódicos da área bem como nas mais relevantes teses e dissertações. Uma grande quantidade de trabalhos foi estudada e analisada para que se tivesse uma idéia do estado da arte e se obtivesse conhecimento suficiente para a condução deste trabalho. Foram abordadas noções sobre pavimentos flexíveis, viscoelasticidade, efeito da temperatura e efeito do dano em materiais viscoelásticos.

O Capítulo 3 apresenta o efeito da temperatura no desempenho de pavimentos asfálticos. Nesse capítulo apresenta-se toda a formulação para materiais viscoelásticos lineares sob efeito da temperatura bem como sua modelagem através do MEF. O Princípio da Superposição Tempo-Temperatura em materiais viscoelásticos também é abordado ao longo deste capítulo.

No Capítulo 4, estuda-se o efeito do dano em materiais viscoelásticos. Apresentam-se todos os conceitos envolvidos nesse tipo de análise. Mostra-se toda a formulação considerando o efeito do dano e também a modelagem através do MEF. Como o comportamento do material passa a ser não-linear, apresenta-se também o Método de Newton-Raphson para a solução desse tipo de problema.

No Capítulo 5 uma extensa análise dos modelos apresentados nos capítulos anteriores é realizada. Vários problemas têm suas soluções apresentadas e estudadas. Os resultados obtidos são discutidos e, em alguns exemplos, comparados com os encontrados na literatura pesquisada.

Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as conclusões finais, bem como algumas sugestões de trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 Histórico de Dimensionamento de Pavimentos Flexíveis no Brasil

O pavimento é uma estrutura destinada a resistir e a distribuir ao subleito os esforços verticais originados da ação do tráfego (Figura 1) e do clima. O pavimento deve ainda resistir aos esforços horizontais proporcionando uma camada de rolamento segura e com condições aceitáveis de conforto ao usuário. Pode-se dizer que o dimensionamento de pavimentos tem por objetivo calcular e verificar as espessuras das camadas bem como compatibilizar os materiais para que estes possam oferecer uma estrutura onde níveis pré-determinados de segurança e conforto ao usuário da via sejam atendidos.

Independentemente do método que se usa para o dimensionamento do pavimento são três os fatores que se buscam: segurança, conforto e regularidade. O primeiro fator é relativo às condições de drenagem e aderência, o segundo é relativo ao nível de ruído e boas condições da superfície de rolamento enquanto o terceiro se relaciona à continuidade da oferta do serviço, ou seja, à diminuição do número de interrupções das rodovias devido à serviços de manutenção.

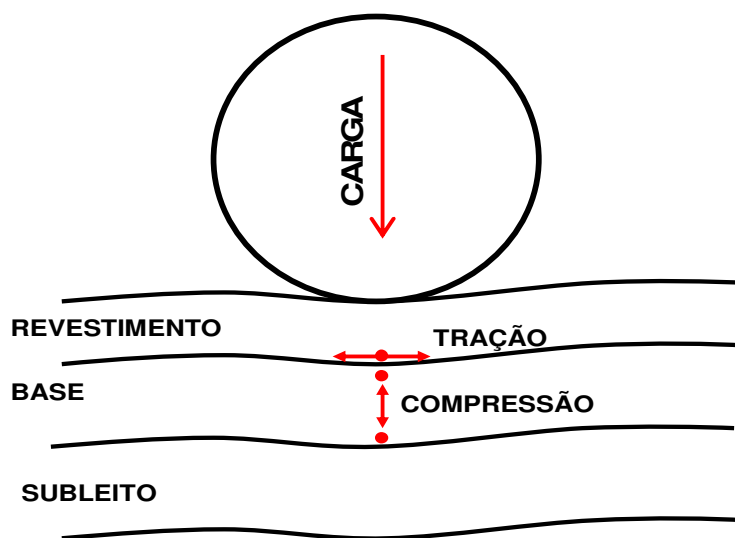


Figura 1 – Representação esquemática das deformações em pavimentos flexíveis.

(Fonte: Huang, 2004, adaptada).

No Brasil o Método do DNIT (antigo DNER) é predominantemente usado para o dimensionamento de pavimentos flexíveis. Este método, na verdade, é uma adaptação feita pelo engenheiro Murillo Lopes de Souza em 1966 do método desenvolvido pelo USACE (Corpo de Engenheiros do Exército dos Estados Unidos) entre 1958 e 1960. O método foi originalmente desenvolvido para pavimentos aeroportuários e utiliza o ensaio de CBR e o número  $N$  (número total de passagens equivalentes ao eixo padrão de 8,2tf) como parâmetros de entrada. Adaptado para as rodovias brasileiras, o método ainda continua usando o valor de CBR como principal parâmetro para obtenção das espessuras das camadas. Aceita-se que, para um determinado valor de CBR do subleito, existe uma espessura mínima de pavimento que é capaz de proteger este mesmo subleito de deformações excessivas ou mesmo de ruptura total (DNIT, 2005).

Benevides (2000) argumenta que não existe ruptura súbita em pavimentos, o que ocorre na verdade é uma ruptura gradual, ao longo dos anos, em função dos materiais, do clima e do tráfego. Esta ruptura deve ser prevista. Lembra-se que na metodologia de dimensionamento de pavimentos flexíveis adota pelo DNIT adota como limite de CBR de uma dada camada o valor de 20%. Isto significa que, mesmo que o CBR da camada apresente um resultado de 80%, por exemplo, o valor de entrada para o dimensionamento será de 20%.

Com relação à espessura do revestimento, o método simplesmente utiliza uma relação direta entre o valor de número  $N$  e a espessura necessária para este revestimento. Estas relações encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 – Espessura Mínima de Revestimento. (Fonte: DNIT, 2005)

<b>N</b>	<b>Espessura Mínima de Revestimento Betuminoso</b>
<b><math>N \leq 10^6</math></b>	<b>Tratamentos superficiais betuminosos</b>
<b><math>10^6 &lt; N \leq 5 \times 10^6</math></b>	<b>Revestimento betuminoso com 5,0cm de espessura</b>
<b><math>5 \times 10^6 &lt; N \leq 10^7</math></b>	<b>Concreto betuminoso com 7,5cm de espessura</b>
<b><math>10^7 &lt; N \leq 5 \times 10^7</math></b>	<b>Concreto betuminoso com 10,0 cm de espessura</b>
<b><math>N &gt; 5 \times 10^7</math></b>	<b>Concreto betuminoso com 12,5cm de espessura</b>

Observa-se que o Método do DNIT faz parte dos métodos empíricos, pois se baseia em experiências repetidas várias vezes no campo e se limita a prever espessuras adequadas baseadas somente no critério de ruptura por deformação permanente e

considerando esse efeito acontecendo somente devido às propriedades do subleito. Deve-se ressaltar ainda que este método apresenta como base experimental as condições climáticas e de solos nos Estados Unidos, ou seja, características bem diferentes da realidade brasileira, mesmo com todo esse teor de empirismo que existe no método até aqui apresentado, deve-se ter em mente que há muito tempo ele é usado no Brasil, gerando bastante dados para a pavimentação brasileira.

Na década de 1970, com a implantação do ensaio triaxial de carga repetida no Brasil, o conceito de resiliência passou a ser mais estudado (Motta e Medina, 2005). Este conceito se valorizou depois que a malha rodoviária passou a apresentar uma deterioração prematura, ou seja, os pavimentos apresentavam patologias antes de finalizada a vida útil deles. É importante mencionar que o método do DNIT, apesar de ser tratado como conservador, não estabelece as espessuras das camadas do pavimento com base nos materiais, ou mesmo no teor do asfalto, abrindo margem para patologias como, por exemplo, exsudação. Assim, passou-se a ter um teor mais mecanístico no estudo de pavimentos nos meios acadêmicos. Dentro dessa iniciativa, nasceu o Método da Resiliência da COPPE/UFRJ (Motta e Medina, 2005). Este trata o dimensionamento de pavimentos de forma mais racional utilizando ensaios dinâmicos para caracterização de materiais e realizando análise não-linear das camadas de base, sub-base e subleito. O método também calcula a relação tensão-deformação em diversos pontos das camadas e considera fatores ambientais.

Dentre os critérios que o Método da Resiliência faz uso podem ser citados: valores de deflexões que são calculados a partir do número  $N$  e comparados às deflexões admissíveis; tensão vertical no topo do subleito que também é comparada aos valores admissíveis (calculados a partir do Módulo de Resiliência -  $M_r$  e do número  $N$ ); diferença entre a tensão de tração e a de compressão no revestimento, ambas logo abaixo da carga aplicada. Esta diferença de tensão é comparada com valores encontrados em ensaios de fadiga.

Benevides (2000) fez uso do método da COPPE/UFRJ. Este trabalho teve como principal objetivo efetuar análises comparativas entre os métodos de dimensionamento dos pavimentos asfálticos, o empírico do DNIT e o da Resiliência da COPPE em rodovias do Ceará. Observou-se que houve uma redução significativa na espessura da camada final do pavimento dimensionado, ocorrendo casos em que a espessura final do pavimento calculada pelo método da COPPE/UFRJ é constituída por até duas camadas a menos que a espessura final calculada pelo método do DNIT, ou seja, ocorreram casos



em que no dimensionamento feito pelo método da COPPE/UFRJ o projeto final do pavimento não necessitava de base nem de sub-base.

Com o avanço da tecnologia, o que se percebe é que cada vez mais os métodos mecânicos ganham espaço. No entanto, inclusive a nível mundial, o uso desses métodos ainda é bastante restrito. Acredita-se que futuramente este uso será ampliado por representar de forma mais realista o que de fato ocorre nos pavimentos.

## **2.2 Projeto NCHRP 1-37A e o MEPDG**

Nos Estados Unidos a partir de 2004, fruto do projeto NCHRP 1-37A, o projeto de dimensionamento de pavimentos foi revisado. Em parte isso se deveu à evolução das configurações dos veículos e pressões aplicadas pelos pneus nos pavimentos. Outra razão para a criação de uma nova metodologia é que as versões anteriores eram aplicadas com certas limitações dado o seu elevado grau de empirismo.

Desenvolvido pelo NCHRP e patrocinado pela AASHTO, o projeto 1-37A desenvolveu uma pesquisa para um novo método mecânico-empírico de dimensionamento de pavimentos, denominado de MEPDG (Mechanistic-Empirical Pavement Design Guide).

O relatório do NCHRP (2004) afirma que o guia oferece ferramentas para o dimensionamento de pavimentos flexíveis e rígidos tanto novos como rehabilitados. Um importante aspecto do MEPDG é que fornece uma estrutura para que contínuos melhoramentos sejam feitos. Como por exemplo, mudanças nos veículos, materiais, técnicas de construção etc.

O projeto gerou um software que funciona, basicamente, testando uma dada estrutura de pavimento e a partir de critérios pré-estabelecidos avalia se a estrutura suporta ou não os esforços solicitantes. Caso a estrutura seja reprovada em algum critério deve ser refeita e reavaliada. Em sequência o processo de dimensionamento através do programa é:

- Definir uma estrutura de pavimento com dados de tráfego, clima e materiais;
- Seleção de critérios de desempenho com previsão para um nível desejado de confiança, no caso da rigidez o parâmetro adotado é o Módulo Dinâmico;
- Processamento dos dados de entrada para geração dos esforços oriundos do tráfego, clima e materiais.

- Resposta do pavimento a partir de modelos das camadas elásticas ou pelo Método dos Elementos Finitos;
- Cálculo do dano acumulado;
- Previsão do conforto ao rolamento;
- Avaliação da estrutura pré-estabelecida e verificação do atendimento aos critérios anteriormente definidos;

Um importante avanço do método é a consideração da rigidez da camada pelo Módulo Dinâmico. Já o afundamento nas trilhas de rodas considera o somatório das deformações permanentes ao longo de todas as camadas do pavimento.

No modelo AASHTO 1993 o dimensionamento de pavimentos flexíveis levava em consideração um único critério de desempenho: o *Present Serviceability Index* (PSI), correspondente no Brasil ao Índice de Serventia. O novo guia considera, no entanto, os critérios de desempenho de trincas por fadiga, de afundamento nas trilhas de roda e de irregularidade. O MEPDG foi concluído em 2004 e liberado ao público para revisão e avaliação. Uma revisão formal do NCHRP 1-37A ocorreu no Projeto NCHRP 1-40A. O desenvolvimento deste guia mostra uma tendência que é cada vez mais forte aos modelos com caráter mais mecânicos.

### **2.3 Análise de Pavimentos Asfálticos**

Devido à geometria da estrutura dos pavimentos, às possibilidades de ocorrência de diferentes carregamentos, entre eles carregamentos estáticos e dinâmicos e ainda às grandes diferenças entre os materiais que compõem o pavimento asfáltico, a solução analítica dessas estruturas só é possível quando se fazem várias simplificações. Ainda assim podem ocorrer casos em que a solução analítica se torna bastante complexa ou mesmo inviável. Dentre estas hipóteses simplificadoras, podem-se citar: consideração dos materiais como homogêneos, isotrópicos e elástico lineares, carregamento estático e ainda algumas condições de continuidade entre as camadas.

As duas grandes teorias de placas aceitas até hoje são as de Burmister e Boussinesq (Medina e Mota, 2005), conhecidas como Teoria das Camadas Elásticas. De acordo com essas duas vertentes, para a análise constitutiva de pavimentos asfálticos considerando as hipóteses já apresentadas no parágrafo anterior, os parâmetros de entrada da análise se resumem a: módulo de elasticidade ( $E$ ) e coeficiente de Poisson

(v). Usualmente o módulo de elasticidade das camadas é tomado como o módulo de resiliência  $MR$  para mais detalhes recomenda-se Medina e Mota, 2005.

Essas soluções elásticas foram então implementadas em programas que se tornaram bastante conhecidos como, por exemplo: ELSYM5 (Benevides, 2000), KENPAVE (Huang, 2004), ILLIPAVE (Raad e Figueroa, 1980), MICHPAVE (Harichandran *et al.*, 1980) e o ABAQUS (Simulia, 2007). Esses programas consideraram algumas outras hipóteses tais como carregamentos dinâmicos, ações climáticas, materiais viscoelásticos, etc.

O programa ELSYM5 – *Elastic Layered Symmetrical* desenvolvido na Universidade de Berkeley, Califórnia, EUA, em FORTRAN, aplica-se a problemas de elasticidade linear de meios estratificados, com a solução de Burmister. As expressões são calculadas através do Método das Diferenças Finitas, que consiste basicamente em resolver equações diferenciais de forma numérica, em geral usando as diferenças entre os passos em que o problema está sendo analisado.

Este programa (ELSYM5) considera as camadas como isotrópicas, homogêneas e horizontalmente infinitas, sendo o subleito um meio infinito. Admite até cinco camadas superpostas e permite o cálculo das tensões, deslocamentos e deformações para um sistema tridimensional de camadas elásticas. Uma grande vantagem desse programa é que ele permite considerar mais de uma área de carregamento utilizando a superposição de soluções para cargas isoladas.

O ELSYM5 fornece as tensões horizontais, verticais e de cisalhamento máximo, assim como as tensões principais em qualquer ponto do sistema. Ele apresenta menus, com dados de entrada e de saída, permitindo navegação de forma simples até a conclusão final, isto é, verificação das tensões e deformações. Basicamente tem como parâmetros de entrada: pressão dos pneus, número de cargas, valor da carga, coordenadas por carga, quantidade de camadas, espessuras, módulos de elasticidade das camadas, coeficientes de Poisson e, posição na superfície ( $x$ ,  $y$ ) dos pontos de análise e a profundidade  $z$  destes pontos.

O programa KENPAVE foi desenvolvido pela Universidade de Kentucky, EUA. Este programa permite a realização de análises não-lineares, bem como a consideração dos efeitos viscoelásticos, e do tempo de carregamento. Este programa ainda conta com a possibilidade de analisar até 19 camadas, 10 diferentes coordenadas radiais e 9 coordenadas verticais, 15 tempos de carga na análise viscoelástica e subdivisão do ano em 24 intervalos. Vale ressaltar aqui que o KENPAVE (Huang, 2004) é o nome da

versão *Windows* que abrange o KENLAYER e o KENSLABS, este para pavimento rígido e aquele para pavimentos flexíveis.

Outro programa bastante utilizado no Brasil é o FEPAVE 2. Este foi desenvolvido em Berkeley, Califórnia, em 1965 e modificado por Duncan *et al.*, (1968) para tornar possível a análise das estruturas axissimétricas de pavimentos flexíveis e, através da análise não linear, adaptar os tipos de módulos dependentes da temperatura e do estado de tensões.

Desde 1973, quando foi doado a COPPE, o programa tem sido difundido no Brasil. O programa já foi utilizado em várias teses e dissertações, como, por exemplo: Preussler (1978, 1983), Svenson (1980), Silva (1995), Rodrigues (1987), Motta (1991), Pinto (1991), Ceratti (1991) e Benevides (2000).

Este programa considera tanto camadas elásticas lineares, como camadas não-lineares e permite até doze camadas na modelagem de pavimentos. Valores de deflexões comparados com os medidos de forma direta, como em deflectômetros (viga Benkelman), são bem parecidos em muitos casos analisados, o que fez com que se criasse confiança nos valores calculados pelo programa. Um fluxo do programa pode ser observado na Figura 2 (Benevides, 2000).

No FEPAVE2 entre os valores de saída tem-se: deformação específica de tração, deflexão, tensão vertical no subleito e resistência à tração no revestimento. Entre as vantagens deste sistema podem-se citar: analisar axialmente e radialmente materiais de características variáveis, podendo, em função da temperatura, variar o módulo dos materiais asfálticos e também analisar o comportamento elástico não linear das camadas granulares e coesivas. A principal desvantagem é admitir a aplicação de apenas uma carga.

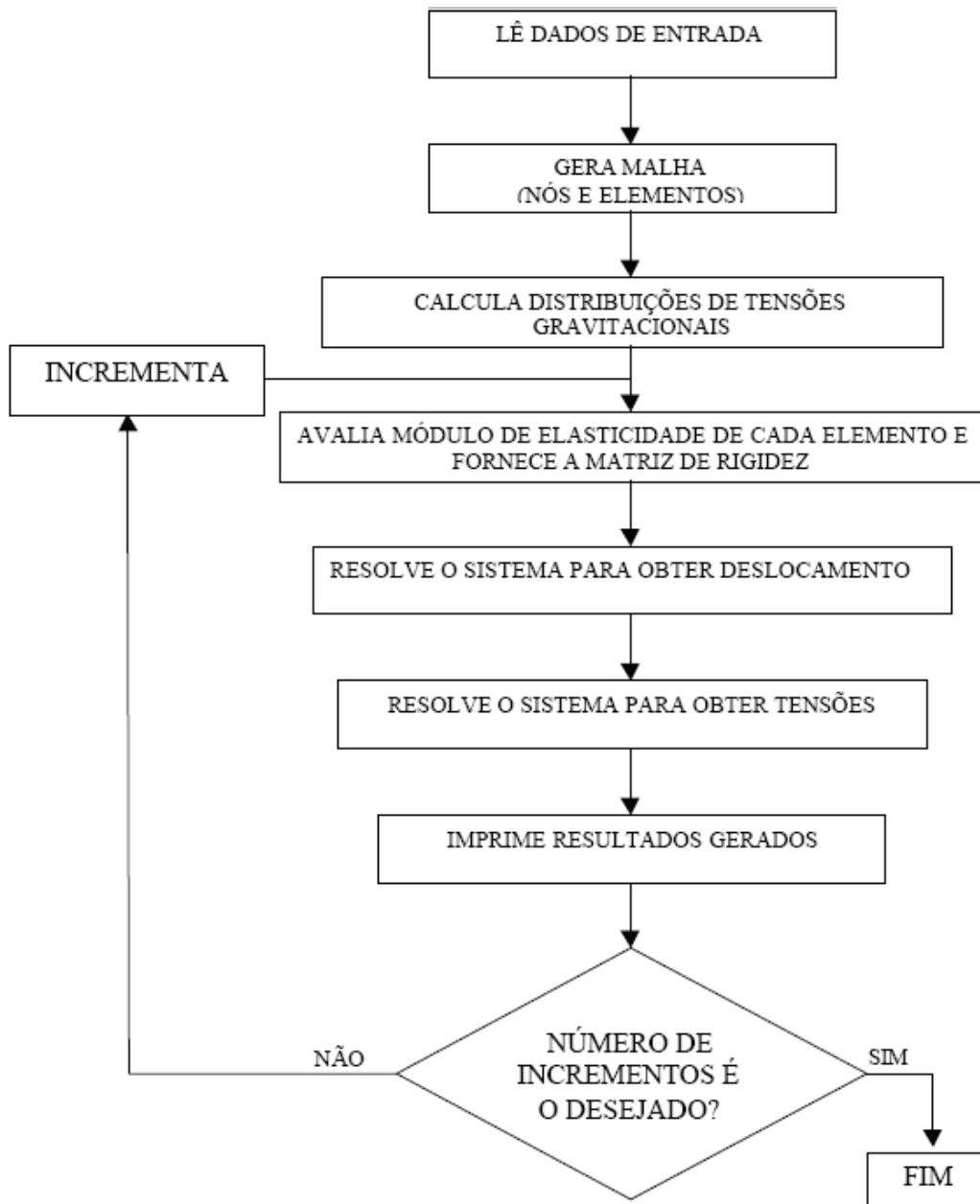


Figura 2 – Fluxograma do FEPAVE2. (Benevides, 2000).

## 2.4 Temperatura em Pavimentos Flexíveis

Não há dúvidas de que o desempenho do pavimento flexível e sua conseqüente serventia são controlados pela ocorrência de defeitos que surgem com o tempo de exposição ao tráfego e as intempéries. Há vários defeitos que são catalogados em norma, como por exemplo: fenda, ondulação, deterioração, afundamentos, panelas, exsudação. Alguns desses defeitos têm relação direta com a variação da temperatura como é o caso das trincas e afundamentos.

A literatura mostra que há três tipos de defeitos que são bastante recorrentes em pavimentos asfálticos: trincamento térmico (Figura 3), trincamento por fadiga e deformação permanente (Figura 4) (Bernucci *et al.*, 2007).



Figura 3 – Representação de trinca térmica. (Fonte: Bernucci *et al.*, 2007).



Figura 4 – Representação de deformação permanente. (Fonte: Bernucci *et al.*, 2007)

Em geral, o trincamento térmico ocorre para baixas temperaturas, pois esta favorece o aumento da rigidez deixando o material mais suscetível ao trincamento. O trincamento

por fadiga se relaciona com a repetição da carga e a deformação permanente está diretamente ligada a altas temperaturas e ao projeto de dosagem utilizado. Para altas temperaturas o ligante envelhece mais rapidamente, o que faz com que a viscosidade do mesmo diminua podendo chegar à ruptura. Essas patologias têm origens que podem ser bastante complexas. Dentre elas podem-se citar: ciclos de variação da temperatura ambiente, rigidez do concreto asfáltico, teor de ligante na mistura, compactação das camadas subjacentes.

Como mencionado anteriormente, o dimensionamento de pavimentos flexíveis no Brasil tem um caráter predominantemente empírico. O método mais utilizado para definir as espessuras das camadas do pavimento flexível não faz menção ao efeito que a temperatura pode causar na resposta mecânica do mesmo.

No meio acadêmico, no entanto, o desenvolvimento de metodologias para o estudo da importância da temperatura no comportamento viscoelástico é antigo. Como exemplo, pode-se citar o trabalho de Taylor *et al.* (1970) que apresenta um algoritmo para a análise de sólidos com comportamento viscoelástico linear submetido a cargas mecânicas e térmicas. Zocher *et al.* (1997) apresentaram uma formulação para análise termoviscoelástica 3D de meios ortotrópicos a partir do MEF.

É cada vez mais comum a preocupação com o efeito que a temperatura pode vir a ter no pavimento asfáltico. Um exemplo é o trabalho de Ali *et al.* (1998) onde é apresentado um fator de correção  $C$  do módulo da camada asfáltica do pavimento por retroanálise de levantamentos deflectométricos realizados com o FWD. Na metodologia apresentada por estes autores é necessário calcular o módulo do concreto asfáltico  $E_I$  dado por:

$$E_I = e^{(9.37196 - 0.360814 T_1)} \quad (1)$$

onde  $T_1$  é a temperatura a 25mm abaixo da superfície. O fator de correção  $C$  é então definido como:

$$C = \frac{e^{(9.37196 - 0.360814 \times 21)}}{e^{(9.37196 - 0.360814 T_1)}} = e^{(0.3608145 T - 7.57709)} \quad (2)$$

Na equação acima, o numerador corresponde a  $E_I$  na temperatura de referência (21 °C) e o denominador é  $E_I$  na temperatura medida dado em °C. Assim como Ali (1998), o presente trabalho também usa a temperatura com uma função exponencial para a variação do módulo. No entanto, o presente trabalho faz uso da equação de Arrhenius que será explicada no capítulo 3.

Motta (1991) desenvolveu equações que estabelecem uma relação entre a temperatura do ar e a temperatura do pavimento para as regiões do Brasil. Ainda

segundo Motta (1991) a temperatura é um aspecto que deve ser considerado no projeto de pavimentos asfálticos, pois além de ter uma atuação direta no revestimento ela afeta a deformabilidade e conseqüentemente o desempenho da estrutura.

Huang (2004) afirma que o efeito da temperatura em pavimentos flexíveis é diferente do efeito sobre pavimentos rígidos. Neste a temperatura induz “*curling*”, ou seja, alternâncias entre tensão de tração e compressão nos extremos verticais das placas e *vice-versa*. Já em pavimentos flexíveis a temperatura afeta o módulo de resiliência das camadas.

Huang (2004) também faz menção ao fato de que as propriedades elásticas e viscoelásticas são significativamente afetadas pela variação da temperatura. Também conclui que qualquer método mecânico de dimensionamento de pavimentos flexíveis deve considerar os efeitos da temperatura.

As misturas asfálticas e outros materiais classificados como termo-reologicamente simples podem ter a relação tempo-temperatura descrita por modelos simples (Roylance, 2001). Este fato torna mais simples tanto a caracterização experimental do material como a análise numérica por meio de métodos como o MEF. O estudo de materiais classificados como termo-reologicamente complexos (Sawant e Muliana, 2008; Muliana e Khan, 2008) está além do escopo deste trabalho.

Tradicionalmente, a influência da temperatura nos pavimentos é considerada em análises elásticas com a dependência do módulo de Young da variação de temperatura. Contudo, recentemente este assunto ganhou uma atenção especial.

Zhong e Geng (2009) apresentaram um estudo analítico das tensões térmicas dos pavimentos flexíveis estudando a dependência das características do material da temperatura de referência. Neste estudo, o pavimento é considerado uma estrutura axissimétrica e composta por multi-camadas elásticas. A formulação é utilizada para calcular as tensões térmicas na situação de trincamento térmico para baixas temperaturas do pavimento e os resultados são comparados com a situação sem efeitos da temperatura. Os resultados deste estudo mostraram que há um considerável impacto do efeito da temperatura nos valores das tensões.

Chabot *et al* (2006) apresentaram um modelo para uma estrutura semi-infinita em camadas considerando a relação entre deformação e tensão de forma termo-viscoelástica. De acordo com esses autores, o modelo apresenta bons resultados para a modelagem do comportamento de pavimentos asfálticos, especialmente considerando efeitos térmicos. Os autores compararam seus resultados com soluções analíticas e com



resultados disponíveis de modelagem por MEF. Eles ainda apresentam um *software* chamado ViscoRoute, baseado na modelagem apresentada em seus trabalhos.

Wong e Zhong (2000) desenvolveram um tratamento analítico das tensões térmicas nos pavimentos flexíveis com temperatura variável no tempo. Os resultados encontrados confirmam a necessidade da consideração desses efeitos na análise e dimensionamento de pavimentos asfálticos.

Dubois *et al* (1999) apresentaram um modelo termoviscoelástico que exibe um comportamento termo-reologicamente simples. Uma abordagem baseada no MEF foi proposta para permitir a consideração dos efeitos de longo prazo tanto da temperatura como das características viscoelásticas dos materiais betuminosos de pavimentos de concreto asfáltico.

## 2.5 Curva Mestre

Estas curvas estabelecem entendimentos sobre as propriedades viscoelásticas de um determinado material. Sua grande vantagem é permitir uma estimativa de propriedades do material em um amplo intervalo de temperatura e frequências que podem ser encontradas em campo, mas que não são práticas com relação à simulação em laboratório.

Utilizando os fatores de deslocamento horizontais que são obtidos através de ensaios dinâmicos, como é o caso do ensaio de módulo complexo e *creep* na geração das curvas mestras, é possível deslocar a curva gerada para uma determinada temperatura de referência e obter uma nova curva como pode visto na Figura 5, onde J representa o logaritmo do módulo complexo. Esta nova curva é capaz de descrever o comportamento reológico do material ao longo do mesmo intervalo de frequências ou tempos de carregamento, na temperatura desejada. (Bechara, 2008).

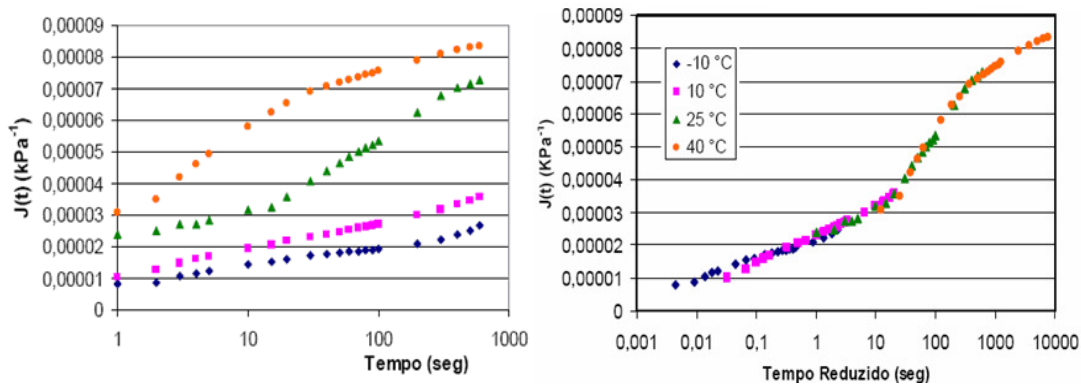


Figura 5 – Curva mestra obtida a partir de ensaio de creep. (Fonte: Medeiros, 2006).

Pode-se dizer que a construção da curva mestra é um artifício matemático para obter as propriedades viscoelásticas  $G^*$  e  $\delta$  em um intervalo de frequência mais amplo, onde  $G^*$  é o módulo dinâmico ou módulo complexo e  $\delta$  é o ângulo de fase que evidencia a relação entre as parcelas viscosa e elástica. A Figura 6 apresenta dois materiais diferentes sendo que o ligante 2 apresenta maior componente elástico, o que o fará apresentar menor percentual de deformação permanente se comparado ao ligante 1.

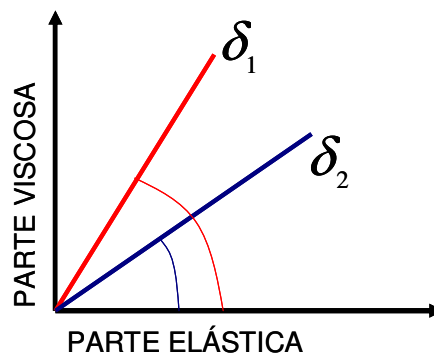


Figura 6 – Relação de módulo de ângulo de fase em misturas. (Fonte: Medeiros Junior, 2006).

Na construção da curva mestra, segundo Goodrich (1988), é utilizado o Princípio da Superposição Tempo-Temperatura. Este princípio estabelece que os dados obtidos para cada temperatura podem ser transladados em relação ao eixo do tempo (ou frequência). A translação pode ser mensurada por um fator  $a_i(T)$  denominado *shift-factor*. Este princípio, que tem sido aplicado tanto em ligantes quanto em misturas asfálticas, estabelece que os parâmetros viscoelásticos obtidos em uma temperatura maior/menor que uma determinada temperatura de referência e frequência de carregamento estabelecida seriam igualmente obtidos caso o ensaio fosse realizado na temperatura de referência, porém com uma frequência de carregamento menor/maior.

## 2.6 Dano em Pavimentos Flexíveis

O conceito de dano foi primeiramente inserido na análise e na descrição do comportamento de metais submetidos a carregamentos monotônicos ou cíclicos no regime de ruptura (Driemeier, 1995). Nestes materiais, quando em regime de trincamento, microtrincas aparecem após o desenvolvimento de considerável plastificação do material. De forma geral, o conceito de dano pode ser aplicado a qualquer material que apresente descontinuidade na superfície em forma de microtrincas e descontinuidade de volume em forma cavidades e que se relacionam à redução de rigidez do material e consequente ruptura.

Basicamente, duas abordagens têm sido utilizadas para consideração do efeito do dano em materiais viscoelásticos: (1) Mecânica do Dano Contínuo, (2) Mecânica da Fratura.

Na abordagem da Mecânica da Fratura, um modelo bastante utilizado é o de Zonas Coesivas (MZC) ilustrado na Figura 7. Uma vantagem desse modelo é que o crescimento da trinca pode ser analisado a partir de uma trinca pré-existente bem como de uma superfície plana teoricamente sem um processo de trincamento iniciado. O modelo de Zonas Coesivas tem sido objeto de vários estudos por diversos autores (Kim e Little, 1990; Jenq e Perng, 1991; Yoon e Allen, 1999; Allen e Searcy, 2000; Allen, 2001; Kim e Little 2003; Freitas *et. al.* 2005; Souza, 2005). Uma vantagem dessa metodologia é que os detalhes físicos que ocorrem em pequenas escalas não são perdidos assim como ocorre no modelo fenomenológico, isto é, modelos que representam o comportamento do material através de um elemento de volume representativo, para esta natureza de modelo só interessa o fenômeno e não o que ocorre a nível microestrutural. Além disso, este modelo, por levar em conta vários modos de dano, pode considerar cada elemento que constitui a mistura asfáltica, ou seja, o dano pode ser modelado somente nos agregados ou somente no ligante asfáltico.

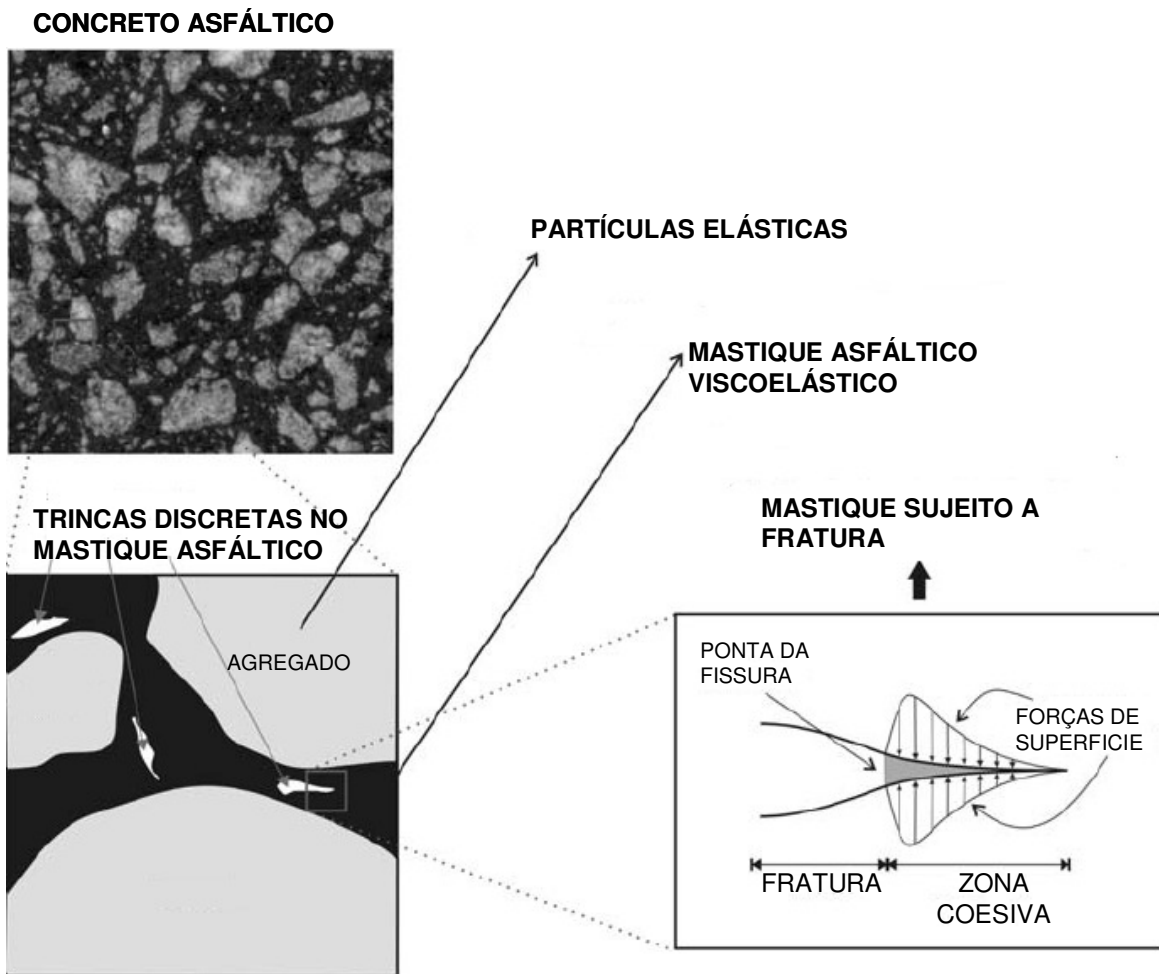


Figura 7 – Modelagem pelo Modelo de Zona Coesivas (Fonte: Freitas, 2007, adaptado).

A preocupação básica da Mecânica da Fratura é a determinação do comportamento mecânico de uma estrutura quando há trincas. Além disso, ela ainda se dispõe a prever a propagação da trinca até que a estrutura se rompa. Deve-se ressaltar que este é o caso em que se trabalha com trincas discretas, ou seja, trincas podem ser introduzidas arbitrariamente pelo usuário, em qualquer posição no modelo e o caminho dessa trinca será estudado. Como em alguns casos a peça mesmo trincada não entra em colapso, a Mecânica da Fratura estuda ainda a mudança na resistência da estrutura por conta da evolução da trinca.

A determinação do comportamento constitutivo na região onde ocorrem trincas apresenta grande complexidade, de forma que certas aproximações são corriqueiramente inseridas nos modelos que se propõem a fazer esse tipo de análise. Um dos modelos mais conhecidos é o uso da integral  $J$ . Esta integral foi inicialmente proposta para

problemas de elasticidade (Schapery, 1984). Em geral o significado físico deste parâmetro pode variar dependendo do tipo de análise que se faz.

Quando foi primeiramente desenvolvida para meios elásticos, a integral  $J$  era igual à taxa de liberação de energia por unidade de área de trinca. Existem vários trabalhos acadêmicos (Hutchinson, 1968; Hutchinson e Paris, 1979; Rice e Rosengren, 1968) que mostraram que, submetidas a determinadas condições, as tensões e as deformações nas proximidades da trinca são controladas pelo parâmetro  $J$ . Vale lembrar que esta integral é de contorno e independe do caminho utilizado para sua integração (Schapery, 1984).

Para se chegar à integral  $J$  considera-se inicialmente pela Mecânica do Contínuo a seguinte equação de equilíbrio em uma dimensão:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Nesta equação as forças de corpo são desprezadas e as tensões são representadas pelo tensor de *Piola Kirchhoff II*, ou seja, o estado de referência é o indeformado. Define-se então um potencial ( $W$ ) para análise 1D como tendo a seguinte propriedade:

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \quad (4)$$

Schapery (1984) mostra que depois de alguns ajustes a integral  $J$  pode ser escrita como:

$$J \equiv \int_c \left( W n_1 - \sigma \frac{\partial u}{\partial x} n \right) ds \quad (5)$$

Onde  $c$  é qualquer caminho que começa na face inferior da trinca, envolve a ponta da trinca e termina na face superior,  $n$  é o vetor unitário normal a  $c$ ,  $s$  é o comprimento de arco ao longo do contorno da integração e  $u$  o deslocamento (Figura 8).

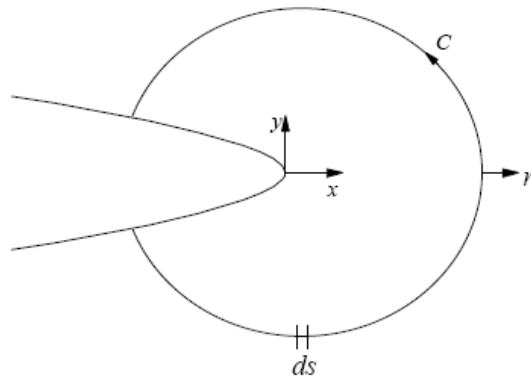


Figura 8 - Contorno arbitrário em torno da ponta da trinca.

Em um meio elastoplástico a intensidade de deformação na ponta da trinca ainda é caracterizada pelo parâmetro  $J$ , porém não tem o significado de taxa de liberação de energia, como no caso de meios elásticos. Já em meios plásticos com deformações finitas,  $J$  não tem qualquer significado físico. Ela simplesmente caracteriza as tensões e deformações na ponta da trinca.

Schapery (1984) propôs bases para o uso da integral  $J$  em problemas viscoelásticos não-lineares. Neste trabalho ele relaciona o início da fratura e a velocidade de propagação da trinca com a integral  $J$  e as propriedades viscoelásticas do material trincado. A teoria de Schapery é baseada na idéia de um problema elástico de referência, que será discutido mais adiante, onde ele usa o princípio da correspondência elástica-viscoelástica para chegar a uma solução viscoelástica.

A Mecânica do Dano Contínuo é baseada nas chamadas Variáveis Internas de Estado. Estas quantificam o dano que ocorre dentro de um determinado material. Esta metodologia lida com as condições de propagação de trincas microscópicas. A evolução do dano é então descrita por um modelo fenomenológico que tipicamente é desenvolvido a partir de ensaios de laboratório.

Em sua essência essas variáveis têm a função de produzir alterações nas propriedades mecânicas a serem atribuídas ao meio contínuo de forma a tornar possível as análises estruturais dos materiais no nível macroscópico. Deve-se ter em mente que uma abordagem do dano por meios contínuos requer que as propriedades a serem atribuídas ao meio possam ser retiradas de ensaios de Elementos de Volume Representativos (EVR).

Vale ressaltar que um modelo fenomenológico não se preocupa com eventos em uma escala micro, ele simplesmente se guia na ideia de volume representativo, ou seja, adota o comportamento do EVR como sendo o comportamento de toda a estrutura. Assim o que ocorre em escala micro no material como, por exemplo, o caminho que a própria propagação da trinca segue não pode ser predita por este modelo. No entanto a variável interna é capaz de mensurar, dependendo da abordagem, a energia dissipada devido ao dano, o que, em geral, se traduz em uma redução de rigidez do material.

Uma das vantagens da abordagem por meio da Mecânica do Dano Contínuo é o esforço computacional reduzido quando comparado a Mecânica da Fratura. No entanto, tem a desvantagem de exigir ensaios laboratoriais que não são tão simples de realizar. Outra desvantagem desse modelo é a relação com o nível microestrutural, pois o modelo é incapaz de mostrar o que ocorre em um nível de micro escala.

Dentro da literatura sobre modelagem de materiais asfálticos usando modelos fenomenológicos não se observam muitos estudos de diferentes autores com essa abordagem. Isso se deve, em parte, à dificuldade de realizar ensaios em escala reduzida (Freitas, 2007).

Schapery apresentou trabalhos pioneiros nessa área junto com outros autores (Park *et al.*, 1996; Schapery, 1989, 1990; Park e Schapery, 1997; Ha e Schapery, 1998). Alguns outros trabalhos também são encontrados, onde os principais aspectos da modelagem de materiais viscoelásticos com dano são mostrados (Lee *et al.*, 2000, 2003; Christensen, 2002; Daniel e Kim, 2002; Chehab *et al.*, 2003; Gibson *et al.*, 2003; Tashman *et al.*, 2004; Masad *et al.*, 2005).

Nasce então uma interrogação “Se a Mecânica do Dano Contínuo se ocupa da análise dos efeitos que as microtrincas apresentam na resistência dos materiais, então o que devemos determinar como estado inicial e final de dano nos materiais?” Alguns consideram que o estado inicial é aquele em que o dano ainda não ocorreu, ou seja, o material está íntegro, sem trincas significativas e, portanto, sem redução na sua rigidez. No entanto, como esse estado não é facilmente determinado, normalmente considera-se o estado inicial como o momento em que o histórico de esforços passa a ser conhecido. Por sua vez o estado final de dano está associado ao surgimento de trincas no elemento de volume representativo que possam ser consideradas macroscópicas. Desta forma, tem-se então a ruptura do elemento.

Mesmo definindo estado de início e término do dano, diferenciar um material virgem de um material altamente danificado pode não ser uma tarefa simples. Isso ocorre porque não há qualquer característica que de fato faça distinguir um material sem dano de outro que esteja em uma região altamente danificada. Sendo assim, torna-se necessário o uso de Variáveis Internas - VI que consigam de fato representar o grau de deterioração do elemento. A escolha da VI está associada à metodologia que se usa para quantificar o dano. Entre essas metodologias podem ser citadas:

- Medidas físicas globais, como por exemplo, a densidade. Essas medidas exigem algumas definições de um modelo global para que seja possível convertê-las em propriedades que caracterizem resistência mecânica;
- Medidas de dano que se relacionam com a vida restante do material. A desvantagem dessa metodologia é que ela não gera diretamente uma lei constitutiva;

- Medidas mecânicas globais, como por exemplo, alteração no módulo de elasticidade. Essas medidas são mais fáceis de interpretar em termos da variável dano usando o conceito de tensão efetiva;

No presente trabalho como o material é tratado de forma viscoelástica não-linear usa-se a alteração do módulo do material para se avaliar o processo de dano.

## 2.7 Variável Dano

Dentre os trabalhos que estudam o efeito do dano nos materiais, pode-se citar o de Lemaitre *et al.* (1990) que apresenta algumas metodologias para consideração do efeito do dano nos materiais. Entre essas metodologias destaca-se a chamada formulação clássica. Para tanto, considere um sólido danificado em que um elemento de volume finito foi isolado e imagine que esse elemento teve seu tamanho real aumentado consideravelmente como na Figura 9. Este elemento deve ser grande o suficiente para que seja considerado homogêneo.

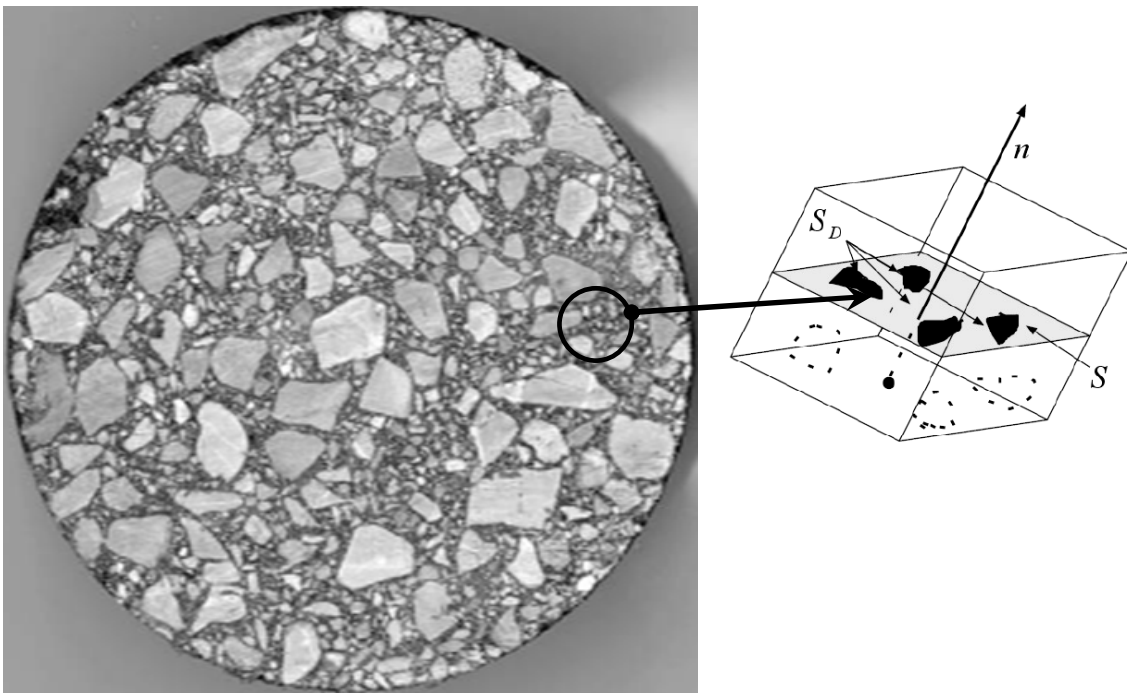


Figura 9 – Elemento de volume representativo (Fonte: Matsuda, 2008, adaptado).

Considere agora que  $S$  representa a área da seção do elemento e que esta seção é identificada pelo vetor normal  $\vec{n}$ . Considera-se ainda que nesta seção existam trincas que caracterizam a existência de dano. Tomando  $\bar{S}$  como a área efetiva de resistência,



ou seja, a área que não contém trincas ou cavidades, tem-se que a área total danificada  $S_D$  é dada por:

$$S_D = S - \bar{S} \quad (6)$$

Salienta-se aqui que a obtenção de  $S_D$  de forma experimental é um processo bastante complexo, pois a geometria das trincas é totalmente desconhecida.

Por definição consideraremos que:

$$D = S_D / S \quad (7)$$

Nota-se que a variável dano  $D$  assume valores contidos no intervalo  $0 \leq D \leq 1$ , onde  $D = 0$  corresponde a um material virgem e  $D = 1$  corresponde a um material em um estado de total deterioração. Assim, a variável dano é a relação entre a área das trincas e cavidades que cortam o plano cuja normal é  $\vec{n}$  e a área total de material neste plano.

Considerando o material com dano isotrópico, as trincas e cavidades são consideradas orientadas uniformemente em todas as direções. Neste caso, a variável já não depende mais da normal e o dano passa a ser totalmente caracterizado por um escalar  $D$ .

## 2.8 Tensão Efetiva

Um conceito bastante importante quando se trata o dano isotrópico é o de tensão efetiva. Chama-se tensão efetiva a tensão calculada sobre a seção do elemento que efetivamente resiste às forças que estão sendo aplicadas sobre o material em questão.

Para o caso unidimensional a tensão é dada por:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (8)$$

onde  $F$  é força aplicada sobre a área  $S$ .

Considerando agora que o dano isotrópico ocorreu, a área efetiva em que a força está sendo aplicada passa a ser dada por:

$$\bar{S} = S - S_D = S(1 - D) \quad (9)$$

Assim a tensão efetiva passa ser dada por:

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{S}} = \frac{F}{S(1 - D)} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (10)$$

Por definição:

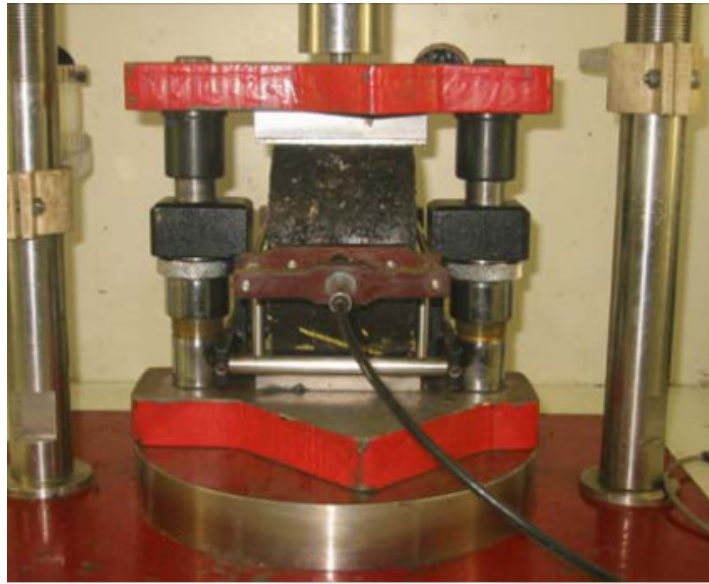
$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &\geq \sigma \\ \bar{\sigma} = \sigma &\Rightarrow \text{Material virgem} \\ \bar{\sigma} \rightarrow \infty &\Rightarrow \text{No momento da fratura} \end{aligned} \quad (11)$$

Em relação à deformação, assume-se que o material somente é afetado pelo dano na forma de tensão efetiva. Qualquer comportamento da deformação de um material danificado será representado pela equação constitutiva do material virgem na qual a tensão usual será substituída pela tensão efetiva, seja o modelo uniaxial ou multiaxial. Desta forma a equação para um modelo uniaxial elástico é dada por:

$$\varepsilon_e = \frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (12)$$

## 2.9 Critério de Ruptura

Define-se o instante em que a ruptura ocorre como sendo o momento em que o trincamento se propagou de tal forma que toda a superfície do EVR foi ocupada por trincas como mostra a Figura 10, ou seja, quando  $D = 1$ . Em geral, isto tem relação direta com os esforços a que a estrutura está sendo submetida. Existem alguns materiais em que esta ruptura está associada a um processo de instabilidade que subitamente induz à cisão dos átomos na área restante (Matsuda, 2008). Na prática se está interessado pelo valor limite de dano, ou seja, um valor crítico de dano  $D_c$ , inferior ao dano unitário.



(a) Dispositivo de Ensaio de Fadiga



(b) Ruptura do Corpo de Prova

Figura 10 – Ensaio de Fadiga.

A ruptura final dos átomos é caracterizada por um valor crítico da tensão efetiva que atua na área resistente. Considerando a tensão máxima  $\sigma_{\infty}$  que o material suporta antes da ruptura, tem-se que no caso limite para falha:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)} = \sigma_{\infty} \quad (13)$$

Frequentemente, aproxima-se para o limite superior da tensão máxima  $\sigma_{\infty}$  a tensão última do material  $\sigma_{ult}$  que é relativamente fácil de ser obtida experimentalmente.

Com esta relação pode-se definir o dano crítico  $D_c$ , considerado como uma característica material, que ocorre quando  $\sigma = \sigma_R$ . Portanto,

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_R}{(1 - D_c)} = \sigma_{ult} \quad (14)$$

onde  $\sigma_R$  é a tensão de ruptura.

## 2.10 Termodinâmica do Dano

Outra formulação do dano foi apresentada por Schapery (1987a, 1990a). Nestes trabalhos foi desenvolvida uma teoria para tratar a relação tensão-deformação em materiais elásticos em processo de dano. Esta teoria foi então estendida para materiais viscoelásticos.

A teoria de Schapery (1987a) é baseada na termodinâmica dos processos irreversíveis com VI descrevendo as mudanças estruturais. Esta teoria foi utilizada para descrever o comportamento de alguns materiais com dano crescente (Schapery 1987a, 1987b, 1989).

De acordo com Schapery (1990a), o comportamento mecânico é inicialmente representado pelas relações entre as forças ou tensões e deslocamentos ou deformações, respectivamente, para material hiperelástico na forma seguinte:

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} \Rightarrow W = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i \quad (15)$$

Na Equação (15),  $W$  representa a densidade de energia de deformação,  $\sigma_i$  representa as tensões e  $\varepsilon_i$  representa as deformações no material. Em termodinâmica  $W$  também pode ser classificada como energia livre de Helmholtz. Esta mede a quantidade de energia livre disponível e que pode ser extraída de um sistema fechado. Pode ser representada pela seguinte equação:

$$F = U - TN \quad (16)$$

Sendo  $F$  a energia livre de Helmholtz,  $U$  mede o trabalho total realizado no material e  $TN$  mede a energia dissipada,  $T$  representa a temperatura absoluta e  $N$  mede a entropia. Com  $N$  tenta-se mensurar a parcela de energia que não pode mais ser transformada em trabalho. Lembra-se aqui que de acordo com a segunda lei da termodinâmica a taxa de variação da entropia nunca pode ser negativa de forma que a dissipação da energia nunca diminui em um processo físico.  $W$  também é função das variáveis internas de estado (VI)  $S_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, J$ ) que servem principalmente para considerar o efeito do dano e outras mudanças micro-estruturais.

Como  $W$  é função tanto da deformação como das variáveis internas de estado, pode-se considerar que em qualquer processo infinitesimal como mudanças da deformação nas (VI), tem-se:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_i + \frac{\partial W}{\partial S_j} dS_j = \sigma_i d\varepsilon_i - f_j dS_j \quad (17)$$

onde

$$f_j = -\partial W / \partial S_j \quad (18)$$

é chamada força termodinâmica. Fazendo analogia entre as Equações (16) e (17) pode-se concluir que:

$$dU = \sigma_i d\varepsilon_i \quad (19)$$

e

$$d(TN) = f_j dS_j \quad (20)$$

Fazendo uso da energia livre de Helmholtz, pode-se escrever que:

$$W_t = W + W_s \quad (21)$$

onde  $W_t$  representa o trabalho total feito pelas tensões no material,  $W$  representa a energia disponível para ser transformada em trabalho e  $W_s$  é o trabalho dissipado por mudanças na microestrutura do material, ou seja, quantifica o dano. Esse valor, em função da segunda lei da termodinâmica, não pode diminuir. Assim, pode-se escrever que:

$$f_j = \frac{\partial W_s}{\partial S_j} \quad \text{quando } \dot{S} \neq 0 \quad (22)$$

onde  $\dot{S}$  representa a variação do dano no tempo. A Equação (22) representa então a lei de evolução do dano. Um modelo de dano contínuo, em geral, consiste, entre outras coisas, na definição de três componentes importantes:

- 1) Seleção da variável de dano;
- 2) Definição da densidade de energia de deformação;
- 3) Determinação da lei de evolução do dano;

A seleção da variável de dano passa pela análise do problema. O importante é que seja escolhida uma variável que consiga descrever o estado do material para as diversas situações que serão analisadas. As VI's que serão escolhidas devem ter identificação com a forma de dissipação dominante, ou seja, devem ser capazes de mensurar a energia dissipada devido ao dano, o que, em geral, se traduz em uma redução da rigidez do material.

Matematicamente as VI's podem ter ordens variadas, podendo ser escalares, vetores ou tensores. No entanto, qualquer que seja a ordem, as VI's devem se identificar com as mudanças microestruturais que representam.

Com base nessa consideração é que se espera um modelo constitutivo capaz de representar a resposta observada do material. A definição da função que descreve a densidade de energia de deformação está diretamente ligada à escolha da variável de dano. Por sua vez a lei de dano é apontada como a maior dificuldade no tratamento do efeito do dano em materiais.

## **2.11 Modelos Constitutivos para Pavimentos Asfálticos**

Vários modelos têm sido propostos para tratar de forma coerente a relação tensão-deformação em pavimentos asfálticos. Vale ressaltar que se entende por pavimento a estrutura multicamada formada, em geral, por revestimento, base e sub-base. As questões as quais esse trabalho se relaciona, em um primeiro momento, dizem respeito somente à modelagem do revestimento asfáltico. Entre estes modelos podem-se citar: elástico linear, viscoelástico linear, viscoelástico não linear, viscoplástico e viscoelastoplástico.

Algumas características importantes que influenciam o comportamento do pavimento podem ser inseridas nesses modelos como: efeito da temperatura, do dano e de cargas dinâmicas. Deve-se ressaltar que a consideração destes fatores aumenta a qualidade das respostas do modelo adotado, mas por outro lado, aumenta também a complexidade do problema. Apresentam-se a seguir alguns desses modelos.

### **2.10.1 Modelo Elástico Linear**

Este modelo ainda é um dos mais usados para tratar a relação tensão-deformação em revestimentos asfálticos. Isso se deve basicamente a sua simplicidade e fácil aplicação. Este modelo baseia-se na ideia de que o material se deforma imediatamente com a aplicação do carregamento e retorna ao seu estado original quando este carregamento é removido. Este modelo é governado, na forma unidimensional, pela Lei de Hooke dada pela Equação (23):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (23)$$

onde  $\sigma$  representa a tensão elástica,  $E$  o módulo de elasticidade e  $\varepsilon$  a deformação elástica. ). O uso do modelo elástico se justifica porque, para pequenas deformações, grande parte dos materiais segue a Lei de Hooke. Contudo, sabe-se que praticamente todos os materiais apresentam comportamento dependente do tempo e da taxa de carregamento. Para alguns materiais essa dependência no tempo manifesta-se numa escala de tempo muito longa, como o concreto e a madeira, enquanto que em outros a manifestação desse comportamento é mais rápida, como é o caso dos polímeros à temperatura ambiente.

A análise elástica não é abrangente o suficiente para caracterizar o efeito do tempo no comportamento do material o que configura uma desvantagem do modelo, pois pode resultar em uma resposta muito diferente do que na realidade ocorre no revestimento asfáltico. Além do mais, a análise elástica não permite a percepção de deformação permanente uma vez que se fundamenta na ideia de que cessado o carregamento o material volta ao seu estado inicial, ou seja, estado indeformado.

Um dos primeiros trabalhos nesse modelo foi proposto por Boussinesq (1885). Este tenta caracterizar o comportamento de pavimentos flexíveis considerando o pavimento como uma estrutura homogênea semi-infinita. Esta estrutura, teoricamente, tem uma profundidade infinita, mas com o topo conhecido e recebendo as cargas do tráfego.

A teoria de Boussinesq foi baseada em uma carga concentrada aplicada em um espaço semi-infinito elástico. Esta teoria pode ser usada para determinar as tensões e deformações no subleito se o módulo do mesmo for muito próximo do módulo do revestimento.

Sabe-se que na verdade, o pavimento asfáltico é um sistema de camadas. De forma que a teoria de Boussinesq nem sempre pode ser aplicada, visto que esta trata de um semi-espaço infinito elástico e não apresenta seu desenvolvimento com base em várias camadas.

Assim, Burmister (1943) desenvolveu uma solução derivada da solução de Boussinesq para um sistema de duas camadas e depois generalizou para um sistema de três camadas (Burmister, 1945) como mostrado na Figura 11. As considerações básicas a serem satisfeitas nessa teoria são:

- 1- Cada camada é dada como homogênea, isotrópica e elástica linear com módulo de elasticidade  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ ;
- 2- O peso próprio do material é desprezado;

3- Cada camada tem uma espessura finita  $h$ , exceto a camada mais abaixo que representa o subleito;

4- Uma carga  $q$  é aplicada de forma circular com área de raio  $a$ ;

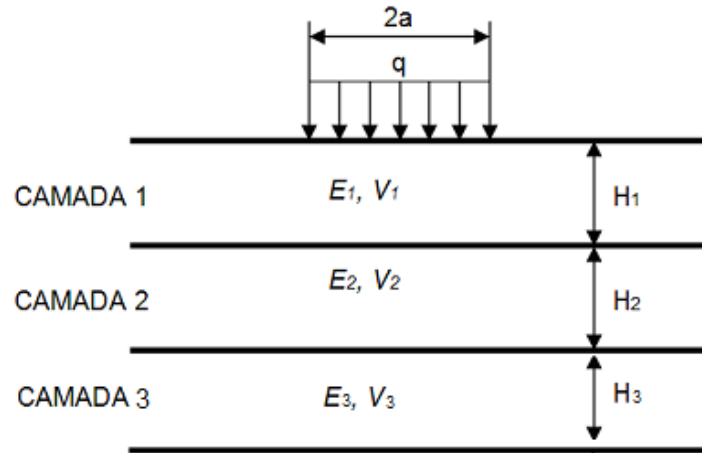


Figura 11 – Esquema de pavimento para diversas camadas (Huang, 2004, adaptado)

Huang (2004) apresenta vários ábacos que seguem tanto a teoria de Boussinesq como a de Burmister para o cálculo de tensões verticais e deflexão. Os programas apresentados no item 2.2 são baseados na teoria das camadas elásticas, que é uma extensão da teoria de Burmister.

### 2.10.2 Modelo viscoelástico linear

O ligante asfáltico é um material que apresenta comportamento mecânico conhecido como dependente do tempo e o estudo de sua presença na camada de revestimento asfáltico é fundamental no entendimento dos fenômenos que uma mesma solicitação provoca ao ser aplicada em diferentes momentos da vida útil do pavimento (Soares e Souza, 2002). Com o intuito de caracterizar corretamente as misturas asfálticas, é necessária a obtenção de parâmetros compatíveis com os efeitos viscoelásticos, permitindo o estudo e a análise de tensões ( $\sigma$ ) e deformações ( $\epsilon$ ) (Huang, 2004; Evangelista Jr. *et al.*, 2006).

Praticamente todos os materiais, considerando uma escala de tempo suficientemente longa, têm um comportamento caracterizado pela dependência no tempo do módulo de Young. Em alguns materiais essa dependência no tempo do módulo manifesta-se numa



escala de tempo muito longa (séculos) enquanto que em outros materiais a manifestação desse comportamento é muito mais rápida (segundos).

É muito comum na engenharia, principalmente nos procedimentos de dimensionamento de estruturas, considerar-se apenas o comportamento elástico linear dos materiais. Contudo, materiais asfálticos estão no grupo dos materiais que o comportamento dependente do tempo pode ser facilmente observado, pois estes materiais fluem com uma maior facilidade, especialmente a altas temperaturas, tendo como uma das principais consequências deformações permanentes que podem ser observadas na camada de superfície de pavimentos.

A ideia de que materiais viscoelásticos podem ser interpretados como uma combinação do comportamento de materiais elásticos e viscosos é muito difundida, até porque quando submetidos a carregamentos rápidos, os materiais viscoelásticos exibem comportamento semelhante aos sólidos elásticos e quando submetidos a carregamentos a uma taxa lenta, apresentam deformações com o passar do tempo, assemelhando-se ao comportamento dos fluidos. Sólidos elásticos e fluidos viscosos, no entanto, diferem amplamente em seus respectivos comportamentos mecânicos. Os materiais elásticos deformados retornam ao seu estado original quando removido o carregamento. Por outro lado, fluidos viscosos, não tendem no curto prazo, a voltar para o estado indeformado quando retirado o carregamento.

Visto que os materiais viscoelásticos apresentam comportamento não só dependente do tempo, mas também da taxa de carregamento, suas respostas não dependem somente do carregamento aplicado em um instante específico, mas sim de todo o histórico de carregamento (Christensen, 1982).

O modelo viscoelástico linear tem sido bastante utilizado na caracterização de misturas asfálticas (Huang, 2004) devido à boa correlação obtida entre a teoria e os ensaios de laboratório (Soares e Souza, 2002).

No caso de carregamento uniaxial, para um modelo integral, a relação constitutiva tensão ( $\sigma$ ) – deformação ( $\epsilon$ ) para um material viscoelástico linear é fornecida pela seguinte integral de convolução:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (24)$$

onde  $t$  é o tempo contado a partir de um determinado referencial,  $E$  é o módulo de relaxação e  $\tau$  é o tempo contado a partir do início da aplicação da carga. Normalmente o módulo de relaxação é representado por uma série de Prony, dada por:

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^p E_i e^{-t/\rho_i} \quad (25)$$

onde  $E_\infty$ ,  $E_i$ ,  $\rho_i$  são os coeficientes e  $p$  é o número de termos da série de Prony. A representação do módulo de elasticidade por uma série de Prony é motivada principalmente por permitir a solução tanto do modelo de Maxwell como do modelo de Kelvin – Voigt analiticamente, e ainda devido a uma propriedade chamada na literatura de semi-grupo (Simo e Hughes, 1998), que nada mais é do que a propriedade da soma de expoente de produto de mesma base. Matematicamente, temos:

$$f(a+b) = f(a)f(b) \quad (26)$$

Esta propriedade permite implementar a integral de convolução de forma incremental na qual a resposta em um dado instante de tempo depende apenas do instante anterior e não mais de toda a história do carregamento. Este fator diminui o esforço computacional, reduz a quantidade de memória necessária e facilita a implementação do algoritmo de integração no tempo.

De acordo com Schapery (1982), para que o comportamento de um material, elástico ou viscoso, seja considerado como linear, duas condições devem ser satisfeitas, ou dois princípios: homogeneidade dada pela Equação (27) e superposição representada pela Equação (28), sendo este último conhecido como Princípio da Superposição de Boltzmann. Caso estas condições não sejam satisfeitas o material é chamado não linear.

$$\varepsilon[c\sigma(t)] = c\varepsilon[\sigma(t)] \quad (27)$$

$$\varepsilon[\sigma_1(t-t_1) + \sigma_2(t-t_2)] = \varepsilon[\sigma_1(t-t_1)] + \varepsilon[\sigma_2(t-t_2)] \quad (28)$$

onde  $c$  é uma constante qualquer,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são tensões aplicadas ao material e  $t_1$  e  $t_2$  representam os instantes em que estas tensões foram aplicadas.

Uma grande vantagem desse modelo é a consideração do tempo de carregamento, pois ele responde tanto à aplicação de cargas com altas frequências quanto à aplicação de cargas com baixas frequências. Deve-se lembrar que a aplicação de uma mesma carga em intervalos de tempos desiguais, ou seja, com duração diferente, origina valores

distintos de tensões e deformações. Por outro lado esse modelo não é capaz de representar deformações permanentes, pois não considera aspectos da plasticidade.

### 2.10.3 Modelo Viscoelástico Considerando Dano

Entende-se por dano qualquer alteração não reversível que possa ocorrer na estrutura do pavimento. Em geral, em pavimentação asfáltica, dano está ligado a trincas na estrutura. A Figura 12 mostra um processo de dano através de tomografia computadorizada de um corpo de prova sendo ensaiado até a ruptura. As imagens mostram o corpo sem deformação, com deformação de 2%, 4% e finalmente 8%. Como se pode perceber, o processo de danificação aumenta à medida que as deformações no material vão aumentando. Isso mostra a importância da consideração do efeito de dano nos modelos que tentam representar o comportamento mecânico dos materiais.

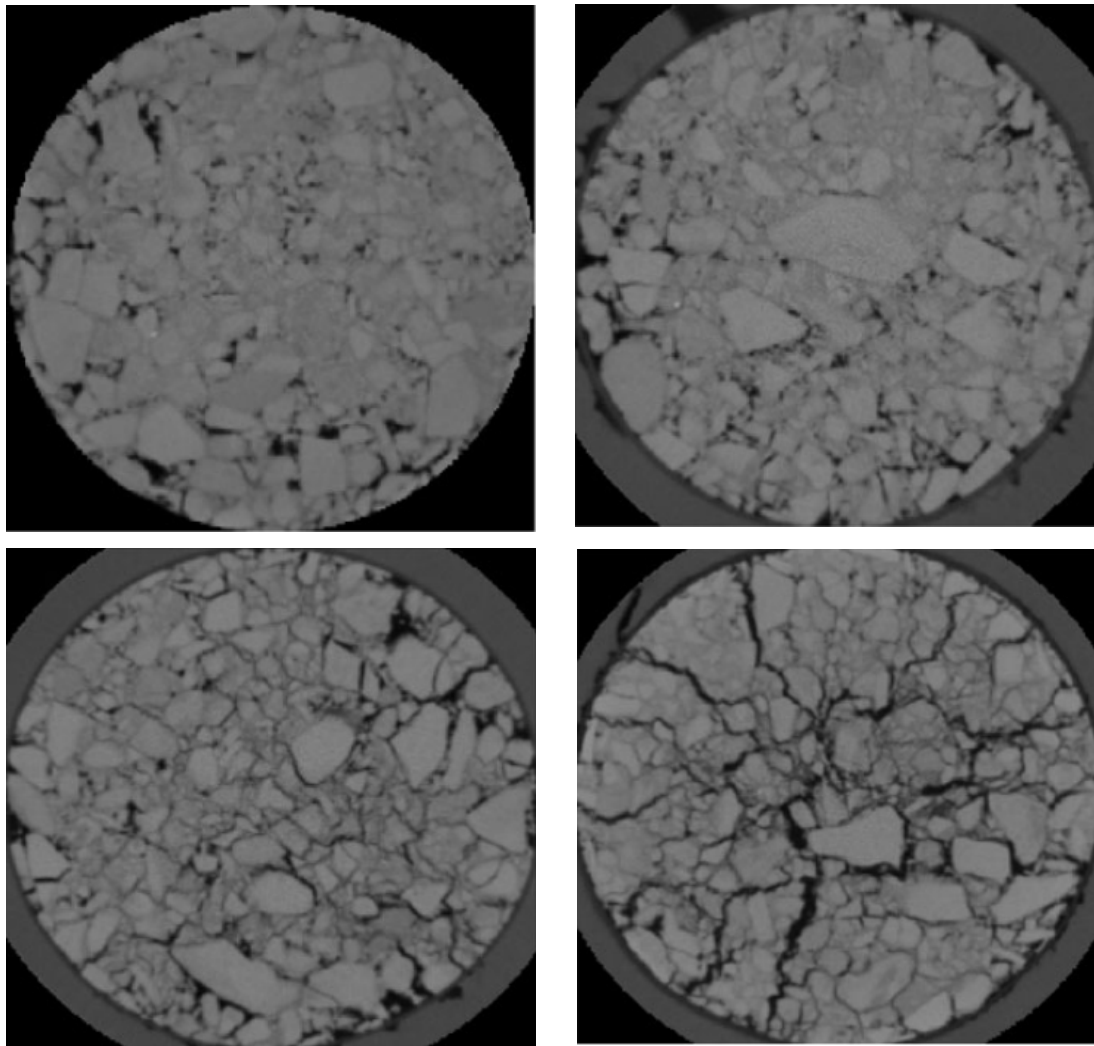


Figura 12 – Processo de dano através de tomografia computadorizada (Darabi, 2011).

Desde a década de 60, modelos constitutivos que tratam o dano têm sido desenvolvidos. Farris (1971) apresenta um dos estudos pioneiros usando Mecânica do Dano Contínuo em materiais viscoelásticos. Vratsanos e Farris (1993) propuseram relações constitutivas considerando o efeito do dano tanto para problemas que envolvem deformação de tração como de compressão. Muitas formulações têm sido apresentadas ao longo das últimas décadas, tais como: Simo (1987), Schapery (1981, 1991), Park *et al.* (1996), Abdel-Tawab e Weitsman (1998), Ha e Shapery (1998), Mun e Kim (2005), sendo estas baseadas na termodinâmica dos processos irreversíveis.

O modelo apresentado por Schapery (1981, 1991) foi inicialmente desenvolvido para um meio elástico e só posteriormente estendido para um meio viscoelástico. Este modelo foi baseado na termodinâmica dos processos irreversíveis com a descrição do dano feita pela VI.

Abdel-Tawab e Weitsman (1998) desenvolveram um modelo viscoelástico com dano baseado em um tensor de quarta ordem fazendo uso do conceito de tensão efetiva. Algumas verificações experimentais foram feitas para materiais compósitos unidimensionais.

Existe outra linha de tratamento do dano que faz uso dos chamados Modelos de Zona Coesiva. Segundo Souza (2005) este modelo pode ser definido como a substituição matemática da zona danificada existente nas proximidades da ponta da trinca (ou zona de processamento da trinca) por uma superfície mecanicamente equivalente submetida à ação de forças de superfície. Entre os principais trabalhos citam-se: Barenblatt (1962), Needleman (1987) e Tvergaard (1990), Allen *et al.* (1997), Knauss (1974) e Schapery (1975a, 1975b, 1975c).

Uma das grandes vantagens da Mecânica do Dano Contínuo é o fato de se ignorar algumas interações físicas complicadas que ocorrem a nível molecular e caracterizar o material usando observações de macro-escala. Park *et al.* (1996) desenvolveram um modelo baseado no Princípio da Correspondência Elástica-viscoelástica que descreve a dependência do tempo e da temperatura que o comportamento do material apresenta bem como a mudança microestrutural que ocorre devido à evolução do dano. O modelo proposto por Park *et al.* (1996) trata o dano em misturas asfálticas. Este modelo é baseado em três conceitos:

I) O Princípio da Correspondência Elástica-viscoelástica baseado na pseudodeformação para modelar o comportamento viscoelástico do material;

II) O dano contínuo para modelar os efeitos de microtrincas no comportamento global;

III) O Princípio da Superposição Tempo-temperatura para considerar os efeitos combinados do tempo e da temperatura. Este modelo parte das seguintes equações para representação do comportamento viscoelástico com dano:

$$\varepsilon^R = \frac{1}{E_R} \int_0^{\xi} E(\xi - \tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (29)$$

$$\sigma = C(S^*)\varepsilon^R \quad (30)$$

onde  $\varepsilon^R$  é a pseudodeformação;  $\sigma$  é a tensão;  $C$  é pseudorigidez;  $E_R$  é um módulo de referência e finalmente  $S^*$  é um parâmetro de dano. Kim (1997) relata que a grande vantagem de usar pseudovariáveis é que a dependência do tempo atribuída ao modelo viscoelástico é tratada apenas pela integral de convolução. Desta forma, qualquer redução na pseudorigidez será atribuída somente ao dano. O coeficiente  $C$  pode ser entendido como o efeito do dano, variando de 0 (material com falha completa) a 1 (material virgem). Deve-se ter em mente que este modelo não é capaz de caracterizar o concreto asfáltico na presença de deformações plásticas. Assim, uma vez que o comportamento viscoplástico se torna significativo outro modelo se torna necessário.

#### 2.10.4 Modelos Viscoplasticos

Nos modelos viscoplasticos, como o próprio nome indica, a consideração dos efeitos da viscosidade do material e do tempo são parâmetros fundamentais para uma modelagem mais realista do comportamento mecânico desses materiais. Sabe-se ainda que a deformação permanente em pavimentos asfálticos ocorre predominantemente devido a altas temperaturas e ao tráfego pesado. Assim, outro fator importante a ser considerado em qualquer análise mecânica que queira modelar a deformação permanente é a temperatura.

As teorias sobre plasticidade foram inicialmente desenvolvidas para metais. Regras e limites para a relação da tensão e deformação dos metais têm sido estabelecidos mostrando boa concordância com a realidade (Tashman et al., 2004).

Em termos de comportamento viscoplastico dos materiais asfálticos a teoria de Perzyna (1971) tem sido bastante aplicada por diversos pesquisadores para modelar a deformação permanente em misturas asfálticas. Como exemplo de alguns estudiosos que usaram a teoria de Perzyna (1971) para modelar a resposta mecânica de misturas

asfálticas podem-se se citar Lu e Wright (1998) e Masad *et al.* (2005). Saadeh *et al.* (2007), Huang (2008) e Abu Al-Rub *et al.* (2009) fizeram estudos mais avançados como, por exemplo, uma acoplagem de modelos viscoplásticos de Perzyna e viscoelástico não-linear de Schapery (1984, 1987) para uma modelagem mais realista do comportamento de materiais asfálticos em altas temperaturas.

Schapery (1999) juntamente com Uzan (1996) estabeleceram um modelo que descreve a deformação viscoplástica ( $\epsilon_{vp}$ ) como sendo:

$$\epsilon_{vp} = \left( \frac{p+1}{Y} \right)^{1/p+1} \left( \int_0^{\xi} \sigma^q d\xi \right)^{1/p+1} \quad (31)$$

onde  $Y$ ,  $q$  e  $p$  são coeficientes que podem ser obtidos a partir de ensaios monotônicos, e  $\xi$  representa o tempo reduzido. É válido ressaltar que estes ensaios são feitos em várias temperaturas, sendo em seguida realizada uma correspondência para uma temperatura escolhida como padrão. Como já mencionado, a vantagem desse modelo é a possibilidade de representar as deformações permanentes. Como estas estão associadas a altas temperaturas esse modelo seria mais recomendado para avaliar o comportamento de pavimentos em lugares mais quentes. Por outro lado, deve-se lembrar que este modelo não considera uma parcela elástica. Portanto, seria incapaz de representar cargas de alta velocidade de aplicação, pois, sabe-se que nestes casos apenas a parte elástica se manifesta.

## CAPÍTULO 3

### EFEITO DA TEMPERATURA EM PAVIMENTOS ASFÁLTICOS

A grande maioria das rodovias brasileiras é formada por pavimentos flexíveis. Este tipo de pavimento apresenta uma camada superficial de mistura asfáltica, o que torna seu comportamento dependente do tempo e da taxa de carregamento. Sabe-se que este comportamento pode ser bem representado por modelos viscoelásticos (Huang, 2004).

Como exposto anteriormente, a literatura mostra que a temperatura é outro fator que tem grande influência na resposta viscoelástica (Elseifi *et al*, 2006; Lu e Wright, 2000). Contudo, quantificar a influência deste efeito sobre as propriedades dos revestimentos asfálticos é uma tarefa complexa.

Na especificação e classificação dos ligantes asfálticos brasileiros (Figura 13) a temperatura é considerada fixa. Há alguns ensaios que devem ser executados sempre a uma dada temperatura. Como por exemplo, pode-se citar a classificação baseada no ensaio de penetração que é realizado a 25°C como uma agulha de massa padronizada de 100g (NBR 6576/98, 1998).

Características	Unidade	Limites				Métodos	
		CAP 30-45	CAP 50-70	CAP 85-100	CAP 150-200	ABNT	ASTM
Penetração (100g, 5s, 25, °C)	0,1mm	30 a 45	50 a 70	85 a 100	150 a 200	NBR 6576	D 5
Ponto de Amolecimento	°C	52	46	43	37	NBR 6560	D 36
Viscosidade Saybolt-Furol	s					NBR 14950	E 102
a 135°C		192	141	110	80		
a 150°C		90	50	43	36		
a 177°C		40 a 150	30 a 150	15 a 60	15 a 60		
Viscosidade Brookfield	cP					NBR 15184	D 4402
a 135°C, SP 21, 20rpm mín		374	274	214	155		
a 150°C, SP 21, mín		203	112	97	81		
a 177°C, SP 21 mín		76 a 285	57 a 285	28 a 114	28 a 114		
Índice de Susceptibilidade Térmica		(-1,5) a (+0,7)	(-1,5) a (+0,7)	(-1,5) a (+0,7)	(-1,5) a (+0,7)	-	-
Ponto de Fulgor mín.	°C	235	235	235	235	NBR 11341	D 92
Solubilidade em tricloroetileno, mín	% massa	99,5	99,5	99,5	99,5	NBR 14855	D 2042
Ductilidade a 25°C, mín.	cm	60	60	100	100	NBR 6293	D 113

Figura 13 – Especificação brasileira de ligantes asfálticos de 2005. (Fonte: Benucci *et al.*, 2007).

Deve-se lembrar de que esta especificação de caracterização de ligantes sempre foi bastante criticada pelo fato de dar pouca importância aos efeitos da temperatura. Já na metodologia Superpave, uma grande melhoria feita na caracterização de ligantes, apontado pela maioria dos estudiosos, foi a caracterização dos ligantes asfálticos com base no PG (*performance grade*), em português grau de desempenho desenvolvida pela SHRP. Este leva em conta os valores máximos e mínimos de temperatura aos quais o revestimento será submetido. Considerando a nomenclatura PG xx yy, xx representaria a média das temperaturas máximas dos 7 dias mais quentes consecutivos do ano e yy representaria a temperatura mínima do pavimento.

O grande diferencial da metodologia Superpave para caracterização de ligantes é, portanto, fixar o parâmetro de estudo, por exemplo, a viscosidade, e fazer variar a temperatura, observando-se assim para qual intervalo de temperatura o parâmetro ainda corresponde ao valor desejado de projeto. A Figura 14 mostra como se dá o uso de ligantes asfálticos classificados segundo a especificação Superpave nas cinco regiões brasileiras.

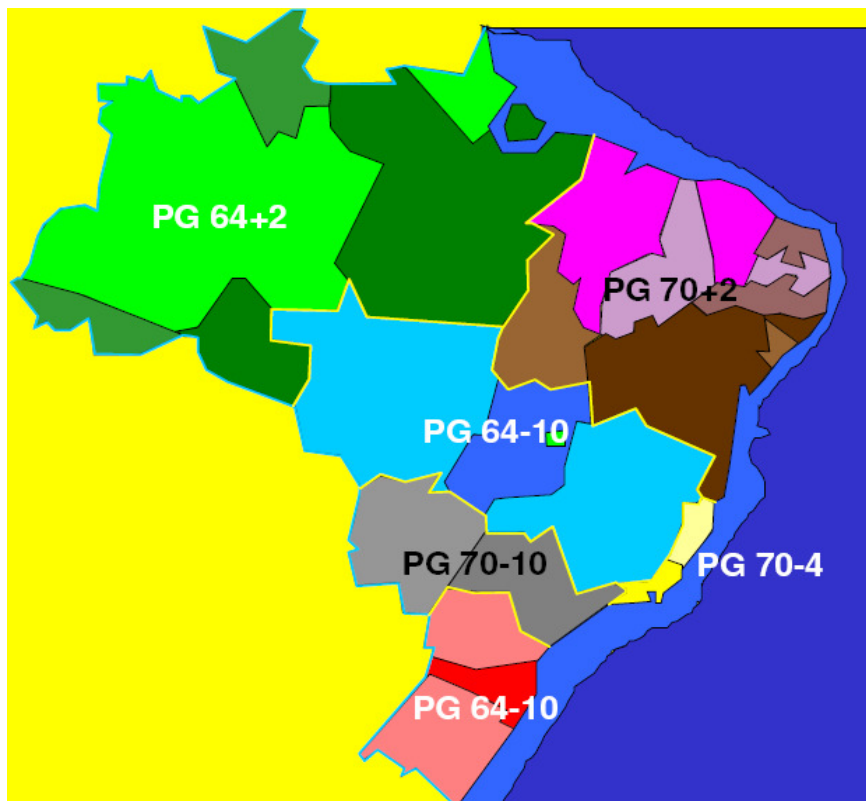


Figura 14 – Mapa do Brasil com respectivos ligantes indicados. (Fonte: Benucci *et al.*, 2006).



Em misturas asfálticas e outros materiais denominados termo-reologicamente simples, a relação tempo/temperatura pode ser descrita por modelos simplificados (Roylance, 2001), o que facilita tanto sua caracterização em laboratório quanto a sua análise estrutural pelo MEF, como será mostrado neste trabalho.

Em geral as formulações para tratamento da relação tensão deformação são muito complexas e não utilizam os dados comumente obtidos a partir do ensaio de misturas asfálticas. Assim, este trabalho apresenta uma metodologia para análise termo-mecânica de pavimentos asfálticos utilizando um modelo viscoelástico para materiais termo-reologicamente simples.

Neste sentido, é importante notar que apesar da influência conhecida da temperatura sobre o comportamento mecânico de misturas asfálticas, fato este usado normalmente nos ensaios para caracterização da resposta viscoelástica destas misturas, o número de trabalhos, no Brasil, sobre análise viscoelástica de pavimentos asfálticos onde esta variação é considerada é ainda pequeno.

### **3.1 Comportamento de Materiais Betuminosos**

As misturas asfálticas, quando submetidas a temperaturas não muito baixas, podem ter seu comportamento representado de maneira satisfatória pela teoria da viscoelasticidade (Huang, 2004). Quando estas misturas se apresentam na fase viscoelástica linear, o Princípio da Superposição Tempo-Temperatura (Shames e Cozzarelli, 1997; Lakes, 1998; Roylance, 2001) é aplicável e o material pode ser considerado termo-reologicamente simples. Isto implica que os mesmos valores para propriedades dos materiais podem ser obtidos tanto a baixas frequências e baixas temperaturas (longos tempos de carregamento), quanto a altas frequências e altas temperaturas (pequenos tempos de carregamento).

O Princípio da Superposição Tempo-Temperatura diz que o comportamento tensão-deformação em uma dada temperatura para uma determinada taxa de deformação será idêntico ao comportamento em outra temperatura para uma taxa de deformação diferente. Esta nova taxa de deformação é obtida por simplesmente escalar o tempo utilizando uma função da temperatura que usualmente é conhecida como fator deslocamento tempo-temperatura.

Assim, para este tipo simples de material a mudança de temperatura vai resultar em um **NOVO** valor de deslocamento na resposta viscoelástica sem que ocorra modificação

na forma da curva mestra. Com isso, um fator de deslocamento tempo-temperatura (*shift factor*)  $a_t(T)$  pode ser definido como o deslocamento horizontal que deve ser aplicado à curva mestra de uma dada resposta, medida a uma temperatura arbitrária,  $T$ , com o objetivo de movê-la para uma curva medida em uma dada temperatura de referência,  $T_{ref}$  (Roylance, 2001). Este deslocamento é mostrado esquematicamente na Figura 15.

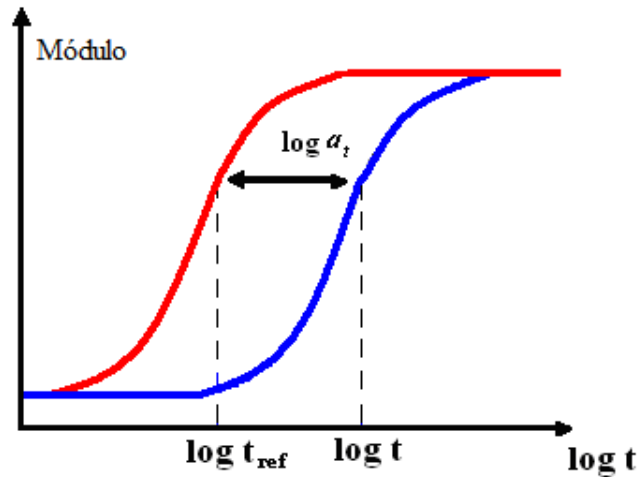


Figura 15: Fator de deslocamento tempo-temperatura.

O fator de deslocamento pode ser determinado de três maneiras diferentes: Equação de Arrhenius, Equação de Williams-Landel-Ferry (WLF) ou ainda através de resultados experimentais. De acordo com Cheung (1995), caso a diferença entre a temperatura a ser deslocada e a temperatura de referência ( $T-T_{ref}$ ) seja menor ou igual a 20°C a equação de Arrhenius fornece um melhor ajuste dos resultados. Por outro lado, quando ( $T-T_{ref}$ ) é maior que 20°C a equação WLF é mais indicada.

### 3.1.1 Equação de Arrhenius

A equação de Arrhenius é, comumente, o método mais utilizado para determinação do fator de deslocamento de misturas asfálticas, sendo representada pela equação:

$$\log a_t = C \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) = \frac{E_a}{2,303 \cdot R} \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \quad (32)$$

onde  $C$  é a constante do material (K),  $E_a$  é a energia de ativação (J/mol),  $R$  é a constante dos gases ideais (8,314J/ mol.K),  $T$  é a temperatura experimental (K),  $T_{ref}$  é a temperatura de referência (K) e o valor 2,303 corresponde ao logaritmo natural do número 10. Uma curva típica do fator de deslocamentos é mostrada na Figura 16 tendo sido obtida a partir de ensaios.

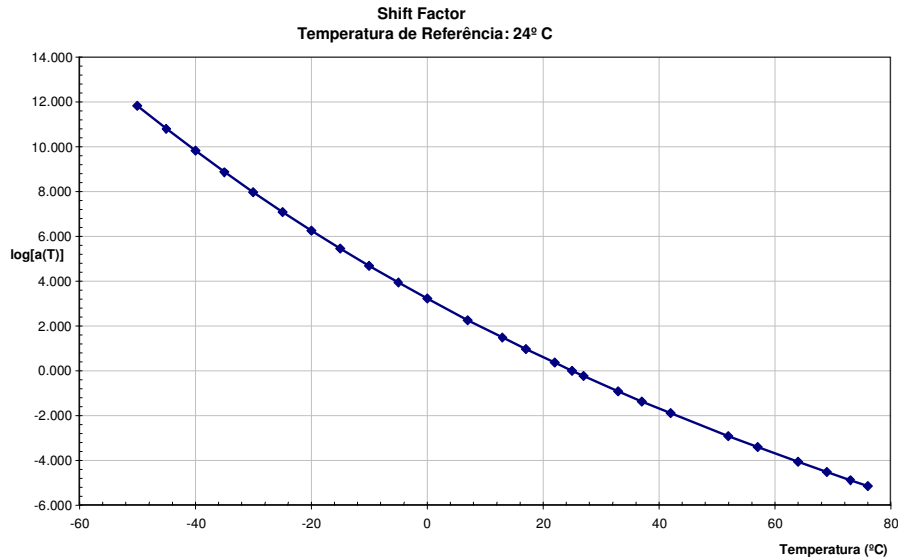


Figura 16 – Fator de deslocamento tempo-temperatura para  $T_{ref} = 24\text{ °C}$  – Equação de Arrhenius

Na literatura, valores distintos para a energia de ativação para diferentes ligantes asfálticos podem ser encontrados. Estes valores podem variar de 44 kJ/mol a 205 kJ/mol, o que faz com que os valores de  $C$  também variem para cada tipo de mistura asfáltica. Medani e Huurman (2003) citam diferentes valores para esta constante  $C$ , como 10.920 K, 13.060 K e 7.680 K.

### 3.1.2 Equação de Willians-Lande-Ferry (WLF)

A equação de WLF é outra formulação bastante utilizada para o cálculo do fator de deslocamento de materiais viscoelásticos, devendo ser usada para temperaturas próximas ou superiores à temperatura vítrea ( $T_g$ ) do material, ou seja, próximo a temperatura de transição de fase, onde o material se torna mais viscoso. Nesta formulação o fator de deslocamento é dado por:

$$\log a_t = \frac{-C_1(T - T_{ref})}{C_2 + (T - T_{ref})} \quad (33)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que dependem das propriedades de cada material e da temperatura de referência  $T_{ref}$ . De acordo com David *et al.* (2001), para uma grande quantidade de materiais, quando  $T_{ref}$  é igual a  $T_g$ , valores universais para  $C_1$  e  $C_2$  podem ser assumidos (Roylance, 2001). Nestes casos, o fator de deslocamento passa a ser dado pela expressão a seguir:

$$\log a_t = \frac{-17,4(T - T_g)}{51,6 + (T - T_g)} \quad (34)$$

### 3.1.3 Fator de deslocamento por resultados experimentais

A partir desta metodologia, os dados experimentais para a rigidez são postos *versus* o logaritmo da frequência, como pode ser visto na Figura 17, ou pelo logaritmo do tempo de carregamento. Depois de escolhida a temperatura de referência, os dados das outras temperaturas são deslocados horizontalmente até que se ajustem na curva da temperatura de referência como pode ser visto na Figura 18. Os deslocamentos podem ser obtidos por extrapolação ou por interpolação dos dados originais.

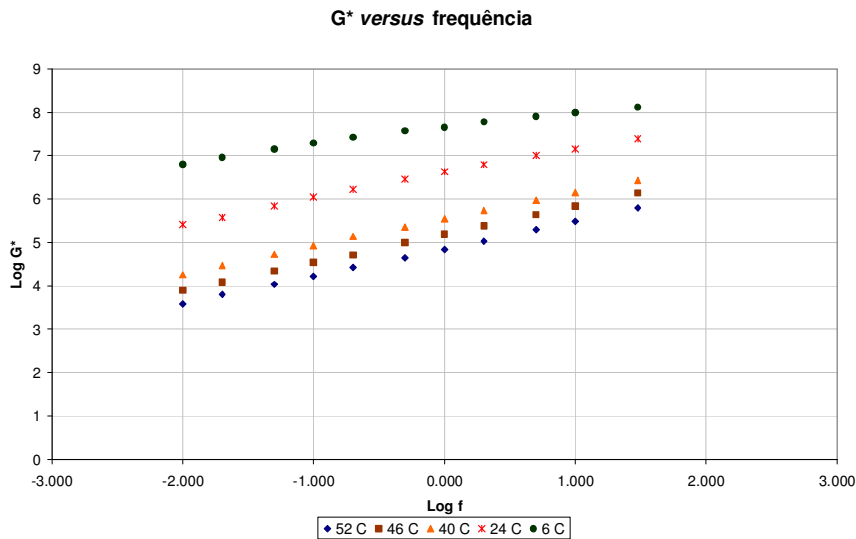


Figura 17 - Módulo cisalhante dinâmico ( $G^*$ ) x frequência de oscilação ( $f$ ) - dados experimentais.

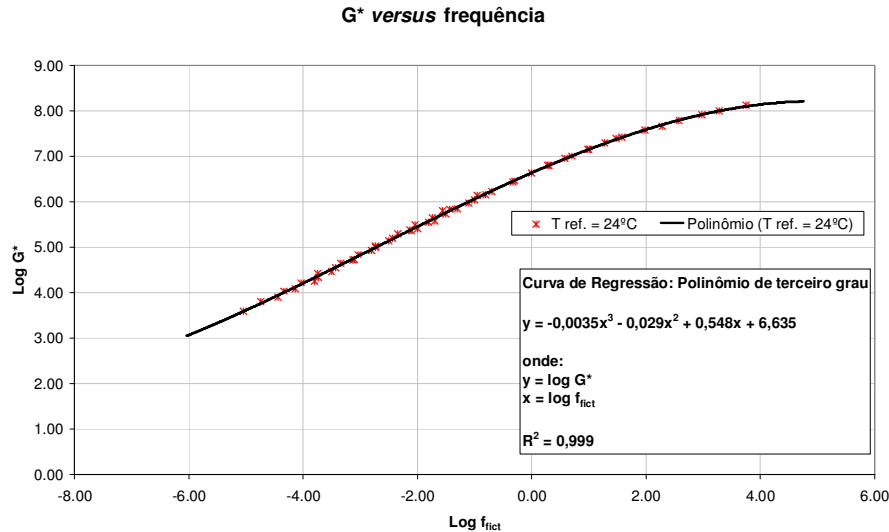


Figura 18 - Curva mestra do módulo dinâmico  $G^*$  a 24 °C. Método de Arrhenius.

### 3.2 Análise Viscoelástica Linear

Como já foi mencionado anteriormente, materiais viscoelásticos sujeitos a baixas temperaturas apresentam uma redução da parcela viscosa e diminuição do ângulo de fase, aumentando sua rigidez. Por outro lado, o aumento da temperatura gera uma redução na rigidez da mistura, cujo efeito é similar à aplicação do carregamento durante um tempo maior.

O uso do Princípio da Superposição de Boltzmann (Shames e Cozzarelli, 1997; Lakes, 1998; Roylance, 2001) permite escrever a relação tensão-deformação para um material viscoelástico linear qualquer de acordo com a Equação (24). Considerando o efeito da temperatura essa mesma integral passa a ser dada na forma de uma integral de convolução (integral hereditária) na seguinte forma:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(\xi - \xi') \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (35)$$

sendo  $E$  o módulo de relaxação,  $t$  o tempo contado a partir de um referencial qualquer,  $\tau$  o tempo contado a partir do início da aplicação da carga e  $\xi$  o tempo reduzido dado por:

$$\xi = \frac{t}{a_t(T)} \quad (36)$$

onde  $a_t(T)$  é o fator de deslocamento tempo-temperatura. É importante lembrar que a temperatura está sendo considerada constante durante a análise.

O módulo de relaxação, em geral, é representado através de uma série de Prony. Normalmente, essas séries são obtidas a partir da regressão de dados de compliância ou relaxação, que são obtidos experimentalmente nos ensaios de *creep* ou relaxação, respectivamente. Assim, o módulo de relaxação será representado de acordo com a Equação (25). A principal motivação da representação do módulo de relaxação por uma série de Prony está na boa concordância que há entre o modelo generalizado de Maxwell e esta série. É importante notar que o uso da série de Prony leva a uma implementação eficiente do cálculo da integral de convolução da Equação (24) através de um algoritmo incremental:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \Delta t \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + \Delta \xi \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_n + \Delta \sigma \end{aligned} \quad (37)$$

onde  $\Delta \xi$  é o incremento de tempo reduzido entre dois passos. Utilizando as Equações (24), (25) e (37) pode-se escrever:

$$\Delta \sigma = \sigma_{n+1} - \sigma_n = \int_0^{t_{n+1}} E(\xi_{n+1} - \xi) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt - \int_0^{t_n} E(\xi_n - \xi) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (38)$$

Com o objetivo de simplificar a Equação (38) a primeira integral será dividida em duas integrais para dois intervalos de tempo. Assim:

$$\Delta \sigma = \int_0^{t_n} E(\xi_{n+1} - \xi) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} E(\xi_{n+1} - \xi) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt - \int_0^{t_n} E(\xi_n - \xi) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (39)$$

Considerando que a deformação tem uma variação linear no intervalo de tempo entre  $n$  e  $n+1$  a deformação pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \cong \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} \quad (40)$$

Fazendo uso dessa aproximação e juntando as integrais de mesmo intervalo, a Equação (39) será simplificada para:

$$\Delta \sigma = \int_0^{t_n} \Delta E \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt + \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} E(\xi_{n+1} - \xi) dt \quad (41)$$

onde:

$$\Delta E = E(\xi_{n+1} - \xi) - E(\xi_n - \xi) \quad (42)$$

Representando o módulo de relaxação pela Equação (25), a segunda integral da Equação (41) pode ser resolvida analiticamente. Assim:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( E_\infty + \sum_{i=1}^p E_i e^{\frac{-(\xi_{n+1} - \xi_n)}{\rho_i}} \right) dt = \Delta \mathcal{E} \left[ E_\infty + \frac{a_t(T)}{\Delta t} \sum_{i=1}^p E_i \rho_i \left( 1 - e^{\frac{\Delta \xi}{\rho_i}} \right) \right] \quad (43)$$

Portanto, o incremento de tensões pode ser escrito como:

$$\Delta \sigma = \bar{E} \Delta \mathcal{E} + \Delta \hat{\sigma} \quad (44)$$

onde:

$$\bar{E} = E_\infty + \frac{a_t(T)}{\Delta t} \sum_{i=1}^p E_i \rho_i \left( 1 - e^{\frac{\Delta \xi}{\rho_i}} \right) \quad (45)$$

e

$$\Delta \hat{\sigma} = \int_0^{t_n} \Delta E \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (46)$$

As duas partes da Equação (44) têm significados diferentes. Fisicamente, o termo  $\bar{E} \Delta \mathcal{E}$  representa somente a parte elástica do incremento de tensão para uma dada temperatura, enquanto que a segunda parte da mesma equação representa a parte viscosa do incremento de tensão também para uma dada temperatura. Desta forma o parâmetro  $\bar{E}$  representa o módulo tangente para um dado material. É importante notar que este parâmetro não depende somente do módulo de relaxação, mas também do incremento de tempo usado na integração numérica e do fator de deslocamento tempo-temperatura (*shift factor*).

Matematicamente, o primeiro termo representa o incremento de tensão devido ao incremento de deformação ( $\Delta \mathcal{E}$ ) entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , enquanto o segundo termo ( $\Delta \hat{\sigma}$ ) representa o incremento de tensão devido ao tempo decorrido desde a aplicação do carregamento até o tempo corrente. É importante notar que todos os termos dependem do fator deslocamento tempo-temperatura sendo este o fator que considera o efeito da temperatura na análise do comportamento mecânico do pavimento asfáltico.

Usando a Equação (42) pode-se escrever a Equação (46) como:

$$\Delta \hat{\sigma} = \int_0^{t_n} \Delta E \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt = \int_0^{t_n} \sum_{i=1}^p E_i e^{\frac{(\xi - \xi_n)}{\rho_i}} \left( e^{\frac{-\Delta \xi}{\rho_i}} - 1 \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (47)$$

Esta expressão pode ser simplificada retirando os termos constantes de dentro da integral. Assim, tem-se:

$$\Delta \hat{\sigma} = - \sum_{i=1}^p \left( 1 - e^{\frac{-\Delta \xi}{\rho_i}} \right) \int_0^{t_n} E_i e^{\frac{(\xi - \xi_n)}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \Rightarrow \Delta \hat{\sigma} = - \sum_{i=1}^p \left( 1 - e^{\frac{-\Delta \xi}{\rho_i}} \right) H_i^n \quad (48)$$

onde o termo  $H_i^n$  pode ser escrito como:

$$H_i^n = \int_0^{t_{n-1}} E_i e^{\frac{\xi - \xi_n}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} E_i e^{\frac{\xi - \xi_n}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (49)$$

A variável auxiliar  $H_i^n$  contém a parte hereditária da integral.

É necessário observar que na segunda parte da integral da Equação (49) o intervalo de tempo é pequeno, de forma que é possível utilizar a Equação (40) novamente para fazermos a segunda aproximação do algoritmo. Finalmente, o parâmetro  $H_i^n$  é computado através da expressão recursiva:

$$H_i^n = e^{\frac{-\Delta \xi}{\rho_i}} H_i^{n-1} + E_i \rho_i a_i(T) \left( 1 - e^{\frac{-\Delta \xi_n}{\rho_i}} \right) \cdot \mathcal{E}^{n-1} \quad (50)$$

Verifica-se pela Equação (50) que a tensão para um determinado instante depende apenas do instante anterior e não mais de todo o histórico de tensões, garantindo uma maior eficiência computacional. Nesta expressão o efeito da temperatura está sendo considerado tanto pelo incremento de tempo reduzido  $\Delta \xi$  como pelo fator deslocamento tempo-temperatura  $a_i(T)$ . Estes dois parâmetros terão valores constantes visto que estamos considerando temperatura constante.

No caso de pavimentos asfálticos é necessário considerar um estado multidimensional de tensões. As tensões em um material termo-reologicamente simples podem ser calculadas a partir da integral hereditária:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{C}(\xi - \xi') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad (51)$$

onde a matriz  $\mathbf{C}$  depende das propriedades do material e do modelo de análise escolhido (e.g. Estado Plano de Tensões e Sólido 3D). A distribuição aleatória dos agregados de uma mistura asfáltica pode ser modelada sendo considerada como homogênea e isotrópica. Neste caso, a matriz de relaxação pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}(t) = E(t) \mathbf{A}(\nu) \quad (52)$$

sendo que a forma da matriz  $\mathbf{A}(\nu)$  depende do modelo de análise escolhido. Por exemplo, para análise de sólidos axissimétricos a matriz é dada por:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (53)$$



Outros modelos da matriz podem ser encontrados na literatura (Bathe, 1996). Em geral, o coeficiente de Poisson de materiais viscoelásticos é considerado constante (Shen, 1995).

Considerando o módulo de relaxação dado pela Equação (25), a Equação (51) passa a ser escrita como:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{A}(v) \int_0^t E(\xi - \xi') \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad (54)$$

Sendo assim, para problemas 2D e 3D, a Equação (44) passa a ser dada por:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{C}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{E}} \mathbf{A}(v) \quad (55)$$

Consequentemente a Equação (50) será dada por:

$$\mathbf{H}_i^n = e^{-\frac{\Delta \xi}{\rho_i}} \mathbf{H}_i^{n-1} + E_i \rho_i \alpha(T) (1 - e^{-\frac{\Delta \xi}{\rho_i}}) \mathbf{A}(v) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n-1} \quad (56)$$

É fácil observar que se continua com uma expressão recursiva. Contudo, para cada instante em que a tensão for calculada, será necessário armazenar um vetor e não mais um número, como era o caso 1D, o que obviamente elevará o custo computacional do problema.

### 3.3 Análise por Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (Bathe, 1996; Cook *et al*, 2002; Zienkiewicz e Taylor, 2005) é um método numérico no qual o domínio do problema é dividido em pequenas regiões de geometria simples, como triângulos e quadriláteros, denominadas de elementos finitos. No interior de cada elemento finito o campo de deslocamentos é aproximado por funções simples, em geral polinômios de baixa ordem interpolados a partir dos deslocamentos nodais ( $u$ ).

Desta forma a compatibilidade fica garantida visto que os deslocamentos no interior dos elementos são definidos por funções contínuas e nas fronteiras de dois elementos são definidos de forma única. As deformações no interior dos elementos são calculadas a partir dos deslocamentos nodais utilizando relações cinemáticas apropriadas a cada tipo de problema. Estas relações podem ser escritas na forma matricial como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (57)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz deformação-deslocamento. Esta matriz é independente dos deslocamentos nodais para problemas geometricamente lineares (pequenas deformações e deslocamentos).

De posse das deformações, as tensões podem ser calculadas utilizando a relação constitutiva do material que, para o caso de materiais viscoelásticos, deve considerar a dependência do tempo. Assim:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, t) \quad (58)$$

Fazendo uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e considerando pequenas deformações, como é usual em análise de pavimentos, o vetor de forças internas de um elemento finito ( $\mathbf{g}$ ) pode ser calculado a partir de:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}^t \mathbf{g} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV \Rightarrow \mathbf{g} = \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (59)$$

onde  $\delta \mathbf{u}$  é o campo de deslocamentos virtuais e  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}$  são as deformações virtuais no interior do elemento finito. O vetor das forças internas globais é calculado através da soma das contribuições dos elementos (Bathe, 1996). Vale ressaltar que esta expressão independe do comportamento do material (linear ou não-linear) uma vez que na sua dedução nenhuma hipótese foi adotada sobre a relação constitutiva do material.

A condição de equilíbrio é representada pela igualdade entre forças externas ( $\mathbf{f}$ ) e internas ( $\mathbf{g}$ ). Assim, no instante  $t_{n+1}$  tem-se:

$$\mathbf{g}(t_{n+1}) = \mathbf{f}(t_{n+1}) \Rightarrow \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV = \mathbf{f}_{n+1} \quad (60)$$

De acordo com as Equações (37) e (55) as tensões podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + \bar{\mathbf{C}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \quad (61)$$

Por outro lado, para os deslocamentos tem-se que

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u} \quad (62)$$

Sendo assim, as tensões serão finalmente dadas por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \quad (63)$$

A partir da Equação (60) chega-se a expressão da matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_{n+1} - \hat{\mathbf{g}}_{n+1} \quad (64)$$

onde a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  é dada por:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^t \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} dV \quad (65)$$

Como o modelo é viscoelástico linear, o algoritmo é puramente incremental não havendo a necessidade de iterações. Assim como na integração das tensões discutidas

no item anterior, as variáveis utilizadas pelo algoritmo de análise global também só dependem dos valores do passo anterior. Outra característica importante do algoritmo apresentada é que a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  permanece constante enquanto o incremento de tempo reduzido  $\Delta\xi$  for constante, o que é muito conveniente no caso de problemas isotérmicos, pois o fator de deslocamento  $\alpha_i(T)$  permanece constante durante a análise. Isto aumenta a eficiência do procedimento, uma vez que a fatoração desta matriz (Bathe, 1996), etapa mais cara da solução do sistema linear descrito pela Equação (64), só precisa ser realizada quando houver uma mudança do incremento  $\Delta\xi$ .

Na prática, a integração da matriz  $\mathbf{K}$  e do vetor  $\hat{\mathbf{g}}$  é realizada através da quadratura de Gauss. Portanto, o cálculo das tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  e da matriz  $\bar{\mathbf{C}}$  é realizado em cada ponto de integração da malha de elementos finitos. Uma vez que cada ponto de integração possui uma história de deformação diferente, estes precisam armazenar variáveis internas como as tensões  $\boldsymbol{\sigma}_n$  e os vetores  $\mathbf{H}_i^n$ , que são atualizadas após cada passo de integração.

Finalmente, a tensão pode ser calculada em qualquer instante por uma expressão recursiva. Esta formulação foi implementada no programa CAP3D (Holanda *et al.*, 2006) que realiza análises 2D e 3D de pavimentos asfálticos a partir do MEF.

## CAPÍTULO 4

### MODELAGEM DO DANO EM MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Segundo Lemaitre *et al.* (1990) o dano, do ponto de vista físico, é um processo pelo qual os materiais têm sua resistência reduzida. Lemaitre *et al.* (1990) ainda colocam que o fenômeno de dano representa descontinuidades na superfície dos materiais em forma de microtrincas e descontinuidades no volume na forma de cavidades, o que está relacionado diretamente à redução na resistência do material.

De forma geral, podemos definir dano como qualquer alteração irreversível que ocorra no material. O dano se manifesta em níveis microscópicos, onde normalmente as ligações entre os átomos são rompidas. Vale ressaltar que os modelos constitutivos usados na análise de estruturas são formulados a níveis macroscópicos, de forma que a relação entre a microescala e a macroescala é feita com base na definição de variáveis ditas internas. Também é importante deixar claro que a implementação apresentada aqui é feita toda unidimensional.

#### 4.1 Problema Elástico de Referência e Equações Constitutivas Viscoelásticas

As equações (3) e (4) foram desenvolvidas pensando-se principalmente em um meio elástico. As equações usadas aqui são baseadas no seguinte potencial:

$$\sigma^R = \frac{\partial W}{\partial(\varepsilon^R)} \Rightarrow \varepsilon^R = \partial \varepsilon^R / \partial x \quad (66)$$

Para um material elástico,  $W$  é dado como a densidade de energia de deformação e o superscrito  $R$  significa que as tensões e deslocamentos estão sendo analisados para um problema elástico de referência. Em um corpo viscoelástico, as tensões  $\sigma^R$  e os deslocamentos  $u^R$  não são necessariamente quantidades com um significado físico, por isso são denominadas pseudotensões e pseudodeslocamentos (Schapery, 1984). Estes valores são relacionados com deslocamentos  $u(x,t)$  e tensões  $\sigma(x,t)$  no corpo viscoelástico pela seguinte equação hereditária:

$$u^R = \frac{1}{E_R} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau \quad (67)$$

Nesta equação  $u(x,t)$  é o deslocamento físico no sólido viscoelástico em termos da variável de integração,  $\tau$  e  $x$  são as coordenadas no corpo indeformado e  $E_R$  é uma constante livre chamada de módulo de referência, em geral tomada com valor unitário.

A motivação para escrever as equações constitutivas em termos de pseudodeslocamento e pseudotensão se dá pelo fato desta teoria aproximar bem o comportamento constitutivo de vários materiais e levar a equações relativamente simples como será mostrado mais adiante. Em termos de pseudodeformação, a Equação (67) é escrita da seguinte forma:

$$\varepsilon^R = \frac{1}{E_R} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (68)$$

É interessante notar ainda que a equação da pseudodeformação apresenta uma ideia similar ao conceito de tensão média em relação ao módulo de referência, ou seja, a soma das tensões viscoelásticas ao longo do tempo dividida pelo módulo de referência. Para a solução das pseudodeformações considera-se que as pseudotensões são conhecidas no tempo  $t_n$  e busca-se aqui determinar o incremento de pseudodeformação ( $\Delta\varepsilon^R$ ) definido a partir da expressão:

$$\Delta\varepsilon^R = \varepsilon_{n+1}^R - \varepsilon_n^R \quad (69)$$

Aplicando-se a Equação (68) em cada intervalo de tempo do incremento considerado, tem-se que

$$\varepsilon_{n+1}^R = E_R^{-1} \int_0^{t_{n+1}} E(t_{n+1}-t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt \quad \text{e} \quad \varepsilon_n^R = E_R^{-1} \int_0^{t_n} E(t_n-t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt \quad (70)$$

O incremento de pseudodeformação pode ser obtido substituindo as pseudodeformações acima na Equação (69), levando a:

$$\Delta\varepsilon^R = \varepsilon_{n+1}^R - \varepsilon_n^R = E_R^{-1} \int_0^{t_{n+1}} E(t_{n+1}-t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt - E_R^{-1} \int_0^{t_n} E(t_n-t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt \quad (71)$$

A fim de simplificar estas expressões é interessante dividir a primeira integral em dois intervalos de integração:

$$\Delta\varepsilon^R = E_R^{-1} \int_0^{t_n} E(t_{n+1}-t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt + E_R^{-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} E(t_{n+1}-t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt - E_R^{-1} \int_0^{t_n} E(t_n-t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt \quad (72)$$

Agora, podem-se agrupar as integrais de mesmo intervalo de integração obtendo-se:

$$\Delta \mathcal{E}^R = E_R^{-1} \int_0^{t_n} [E(t_{n+1} - t) - E(t_n - t)] \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt + E_R^{-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} E(t_{n+1} - t) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (73)$$

Nota-se que a segunda parcela da integral na Equação (73) está delimitada por um intervalo bem pequeno. Assim, pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \cong \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} \quad (74)$$

Esta aproximação corresponde a uma variação linear da deformação no intervalo de tempo considerado. Fazendo a definição

$$\Delta E = E(t_{n+1} - t) - E(t_n - t) \quad (75)$$

obtem-se a integral:

$$\Delta \mathcal{E}^R = E_R^{-1} \int_0^{t_n} \Delta E \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt + \frac{\Delta \mathcal{E}}{E_R \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} E(t_{n+1} - t) dt \quad (76)$$

Como o módulo de relaxação é representado pela série de Prony dada na Equação (25), a variação  $\Delta E$  pode ser escrita como:

$$\Delta E = E(t_n + \Delta t - t) - E(t_n - t) = \left( E_\infty + \sum_{i=1}^p E_i e^{\frac{(t-t_n-\Delta t)}{\rho_i}} \right) - \left( E_\infty + \sum_{i=1}^p E_i e^{\frac{(t-t_n)}{\rho_i}} \right) \quad (77)$$

Usando as propriedades da função exponencial, esta expressão pode ser simplificada para:

$$\Delta E = \sum_{i=1}^p E_i e^{\frac{(t-t_n)}{\rho_i}} \left( e^{\frac{-\Delta t}{\rho_i}} - 1 \right) \quad (78)$$

Logo, a primeira integral da Equação (76) pode ser escrita como:

$$\Delta \hat{\mathcal{E}}^R = E_R^{-1} \int_0^{t_n} \Delta E \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt = E_R^{-1} \int_0^{t_n} \sum_{i=1}^p E_i e^{\frac{(t-t_n)}{\rho_i}} (e^{\frac{-\Delta t}{\rho_i}} - 1) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (79)$$

Esta expressão pode ser simplificada retirando os termos constantes da integral:

$$\Delta \hat{\mathcal{E}}^R = -E_R^{-1} \sum_{i=1}^p (1 - e^{\frac{-\Delta t}{\rho_i}}) \int_0^{t_n} E_i e^{\frac{t-t_n}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \Rightarrow \Delta \hat{\mathcal{E}}^R = -E_R^{-1} \sum_{i=1}^p (1 - e^{\frac{-\Delta t}{\rho_i}}) H_i^n \quad (80)$$

onde

$$H_i^n = \int_0^{t_n} E_i e^{\frac{t-t_n}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (81)$$

A variável auxiliar  $H_i^n$  contém a parte hereditária da integral, uma vez que ela depende de toda a deformação ocorrida entre  $t = 0$  e  $t = t_n$ . A equação acima pode ser reescrita dividindo o intervalo de integração, o que leva à expressão:

$$H_i^n = \int_0^{t_{n-1}} E_i e^{\frac{t-t_n}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} E_i e^{\frac{t-t_n}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (82)$$

Pode-se perceber que a segunda parcela da Equação (82) pode ser obtida de maneira aproximada utilizando a Equação (74), pois o intervalo de integração é pequeno. Portanto:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} E_i e^{\frac{t-t_n}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt = E_i \rho_i (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}}) \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} \Big|_{n-1} = E_i \rho_i (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}}) \dot{\mathcal{E}}^{n-1} \quad (83)$$

onde  $\dot{\mathcal{E}}^{n-1}$  representa a taxa de deformação no passo anterior. Quanto à primeira parcela da Equação (82), a utilização das propriedades da função exponencial permite escrevê-la como:

$$\int_0^{t_{n-1}} E_i e^{\frac{t-t_n}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt = \int_0^{t_{n-1}} E_i e^{\frac{t-t_{n-1}-\Delta t}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt = \int_0^{t_{n-1}} E_i e^{\frac{t-t_{n-1}}{\rho_i}} e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt \quad (84)$$

Retirando do integrando os termos constantes e comparando a integral remanescente com a Equação (81), verifica-se que:

$$\int_0^{t_{n-1}} E_i e^{\frac{t-t_n}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \int_0^{t_{n-1}} E_i e^{\frac{t-t_{n-1}}{\rho_i}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} H_i^{n-1} \quad (85)$$

Finalmente, utilizando as Equações (82), (83) e (85) verifica-se que a Equação (81) pode ser escrita como:

$$H_i^n = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} H_i^{n-1} + E_i \rho_i (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}}) \dot{\mathcal{E}}^{n-1} \quad (86)$$

Considerando agora a segunda parcela da Equação (76):

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{E_R \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} E(t_{n+1} - t) dt \quad (87)$$

Considerando que o módulo de relaxação é representado pela série de Prony dada na Equação (25), tem-se que:

$$= \frac{\Delta \mathcal{E}}{E_R \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ E_\infty + \sum_{i=1}^p E_i e^{\frac{-(t_{n+1}-t)}{\rho_i}} \right] dt = \frac{\Delta \mathcal{E}}{E_R \Delta t} \left[ E_\infty \Delta t + \sum_{i=1}^p E_i \rho_i \left( e^0 - e^{-\frac{t_n-t_{n+1}}{\rho_i}} \right) \right] \quad (88)$$

Logo:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{E_R \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} E(t_{n+1} - t) dt = \frac{\Delta \mathcal{E}}{E_R} \left( E_\infty + \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^p E_i \rho_i \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \right) \right) \quad (89)$$

A partir da Equação (76) pode-se concluir que o termo acima representa o incremento de pseudodeformação devido ao incremento de deformação ( $\Delta \mathcal{E}$ ) ocorrido no intervalo

de tempo  $\Delta t$ . Portanto, o termo entre parênteses representa fisicamente o módulo de elasticidade tangente (ou instantâneo) do material neste incremento de tempo. A partir da Equação (89) este módulo tangente ( $\bar{E}$ ) é definido como:

$$\bar{E} = E_{\infty} + \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^p E_i \rho_i \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \right) \quad (90)$$

É importante notar que o módulo é constante, desde que o incremento de tempo  $\Delta t$  também seja constante.

Para finalizar, pode-se representar o incremento de pseudodeformação através da expressão:

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^R = \left( \frac{\Delta \varepsilon}{E_R} \bar{E} + \Delta \hat{\varepsilon}^R \right)_{n+1} \quad (91)$$

Uma vez que a relação entre tensão e pseudodeformação pode ser dada por:

$$\sigma = E_R \varepsilon^R \quad (92)$$

aqui novamente chama-se  $E_R$  módulo de referência por causa da relação que este módulo apresenta entre deformações viscoelásticas e deformações elásticas. Considerando um módulo de relaxação constante:

$$E(t - \tau) = E_R \quad (93)$$

a Equação (68) resultará em:

$$\varepsilon^R = \varepsilon \quad (94)$$

e, conseqüentemente, a Equação (92) se tornará:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (95)$$

o que na verdade é a equação constitutiva que relaciona tensões e deformações em materiais elásticos. Vê-se então que, partindo-se de uma equação viscoelástica usando o módulo de referência chega-se a uma equação elástica. Assim, pode-se definir o módulo de referência como sendo o módulo para o qual a pseudodeformação se tornará a deformação elástica real.

Uma equação similar à Equação (68) é usada para relacionar  $\sigma$  e  $\sigma^R$ :

$$\sigma^R = E_R \int_0^t E_0(t - \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (96)$$

onde “0” apenas indica que o módulo  $E_0$  não é necessariamente o mesmo módulo da Equação (67). Na verdade, o módulo  $E_0$  é conhecido como *creep*.



Nesse modelo, a sequência de utilização das equações constitutivas consiste em, a partir das deformações reais conhecidas no corpo viscoelástico, obter pela Equação (68) as deformações equivalentes às de um problema elástico de referência. O Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica baseia-se no fato de que um material viscoelástico na verdade é uma soma de uma parcela elástica e uma parcela viscosa. Uma vez encontrados os valores de  $\epsilon^R$  com a Equação (92) encontram-se as tensões no corpo viscoelástico. Como comentado anteriormente  $\epsilon^R$  não tem necessariamente um significado físico e o índice  $R$  indica apenas que essas pseudodeformações estão relacionadas a um problema elástico teórico de referência.

## 4.2 Dano Contínuo na Teoria Viscoelástica

De forma bem simples, mesmo na teoria viscoelástica, a Mecânica do Dano Contínuo considera um sólido danificado com uma dada rigidez como um sólido sem dano com uma rigidez reduzida. Um modelo que se propõe a considerar o efeito do dano na modelagem constitutiva de materiais terá de quantificar duas variáveis: um parâmetro de dano e a rigidez efetiva. O parâmetro de dano, em geral, quantifica qualquer alteração microestrutural que resulta em uma redução de rigidez.

O estado de dano pode ser quantificado por parâmetros que são conhecidos como variáveis internas de estado no contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis, sendo que o crescimento do dano é definido pela lei de evolução do dano. Ainda no contexto da termodinâmica, essa lei, em geral, relaciona energia dissipada com os parâmetros de dano  $S$ . No presente modelo, será utilizada apenas uma variável de dano, denominada  $S$ . Trata-se, portanto de um modelo de dano escalar.

Este parâmetro está relacionado à mudança na microestrutura do material, ou seja, informa a redução da rigidez do material. Fazendo uso da Equação (22) matematicamente, tem-se:

$$\frac{dS}{dt} = \left( - \frac{\partial W^R}{\partial S} \right)^\alpha \quad (97)$$

onde  $dS/dt$  é a taxa de crescimento do dano, ou seja, a lei de evolução do dano,  $\alpha$  é uma constante relacionada às propriedades viscoelásticas do material,  $W^R$  é a função densidade de energia de pseudodeformação, sendo sua derivada em relação a  $S$  a energia dissipada devido a evolução do dano.

Para a solução da Equação (97) parte-se da ideia de um material hiperelástico. Assim, a função densidade de energia de deformação é dada por:

$$W^R = \frac{1}{2}C(S)(\epsilon^R)^2 \quad (98)$$

onde  $C(S)$  representa a rigidez do material e é conhecida como pseudorigidez. Sendo o problema de referência um caso particular de materiais hiperelásticos, as tensões podem ser obtidas por derivação da função densidade de energia:

$$\sigma = \frac{\partial W^R}{\partial \epsilon^R} \Rightarrow \sigma = C(S)\epsilon^R \quad (99)$$

Como consequência, tem-se que:

$$C(S) = \frac{\sigma}{\epsilon^R} \quad (100)$$

É interessante notar que para materiais elásticos a Equação (98) é dada por:

$$W = \frac{1}{2}E\epsilon^2 \quad (101)$$

Comparando-se as Equações (98) e (101) pode-se identificar uma correspondência entre a pseudorigidez e o módulo de Young em materiais elásticos, bem como a deformação elástica com a pseudodeformação. Substituindo-se a Equação (98) na Equação (97), tem-se que:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial S} (\epsilon^R)^2 \right]^\alpha \quad (102)$$

A Equação (100) pode ser utilizada para construir a curva  $C(S)$  do material. Esta curva pode ser construída a partir de ensaios de laboratórios onde as tensões e as deformações reais são medidas e as pseudodeformações são calculadas utilizando a Equação (68).

No caso de materiais asfálticos como o concreto asfáltico, experiências de laboratório (Mun 2003, Mun e Kim 2005) têm mostrado que a relação entre  $C$  e  $S$  é uma curva que pode ser representada por:

$$C(S) = C_0 e^{aS^b} \quad (103)$$

onde  $C_0$  é uma constante usada para correção da variabilidade de resultados dos ensaios, e  $a$  e  $b$  são constantes obtidas a partir de ensaios laboratoriais. O formato da curva gerado pela pseudorigidez  $C$  com o parâmetro de dano  $S$  depende do material e não do tipo de carregamento. A Figura 19 mostra um exemplo de uma curva típica formada pela Equação (103). Neste caso, os valores de  $a$ ,  $b$  e  $C_0$  são -0,002288, 0,506 e 0,81, respectivamente.

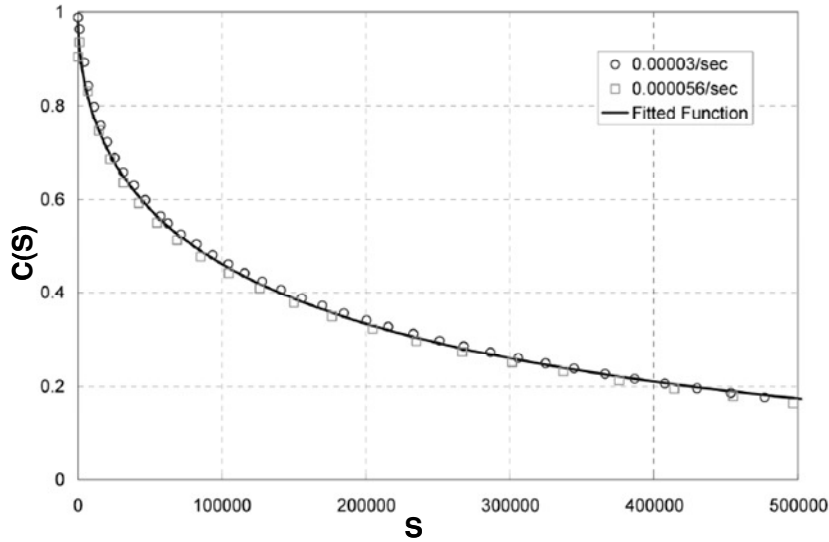


Figura 19 – Curva da pseudorigidez *versus* parâmetro de dano (Fonte: Mun e Kim, 2005).

A determinação da curva apresentada na Figura 19 passa, em um primeiro momento, pela análise de dados obtidos em laboratório a partir de ensaio específico, sobre o qual há detalhes disponíveis na literatura (Kim *et al.* 1996). O resultado do ensaio gera uma curva  $C(S) \times S$ . A partir desta curva faz-se uma aproximação obtendo-se os valores de  $C_0$ ,  $a$  e  $b$ . Para a integração da Equação (102) é necessário calcular o incremento do dano. Assim, este incremento pode então ser calculado pela seguinte integral:

$$\Delta S_{n+1} = \int_{S_n}^{S_{n+1}} \dot{S} dt = \int_{S_n}^{S_{n+1}} dS = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( -\frac{\partial W^R}{\partial S} \right)^\alpha dt \quad (104)$$

Para a solução numérica da expressão acima pode-se usar a regra do ponto médio generalizado (Chapra, 1998). Desta forma chega-se a seguinte expressão:

$$S_{n+1} = S_n + \dot{S}_{n+q} \Delta t \quad (105)$$

onde  $S_{n+1}$  é o parâmetro de dano atualizado,  $S_n$  é o parâmetro atual de dano e  $\dot{S}_{n+q}$  é a taxa de variação do parâmetro no instante  $n + q$ . Juntando-se as Equações (102) e (104) e definindo a variável auxiliar  $D$ :

$$D(S) = \frac{\partial C}{\partial S} \quad (106)$$

tem-se que:

$$S_{n+1} = S_n + \left[ -\frac{1}{2} D(S_{n+q}) (\varepsilon^R)^2 \right]^\alpha \Delta t \quad (107)$$

Tomando  $q = 0$ , ou seja, usando o Método de Euler explícito, tem-se:

$$S_{n+1} = S_n + \left[ -\frac{1}{2} D(S_n) (\varepsilon_n^R)^2 \right]^\alpha \Delta t \quad (108)$$

A fim de permitir incrementos de tempos maiores é interessante a utilização do Método de Euler implícito, que é incondicionalmente estável. Tomando-se  $q = 1$ , ou seja, usando o Método de Euler implícito, tem-se:

$$S_{n+1} = S_n + \left[ -\frac{1}{2} D(S_{n+1}) (\varepsilon^R)^2 \right]^\alpha \Delta t \quad (109)$$

É importante notar que neste caso o parâmetro de dano  $S_{n+1}$  aparece nos dois lados da igualdade, resultando em uma equação não linear. Portanto, teremos de usar métodos iterativos para a solução da Equação (109). Observe que para valores pequenos de  $\Delta t$  a aproximação feita pela segunda parte da soma da Equação (109) desempenha um papel menos importante.

O método usado neste trabalho foi o Método de Newton-Raphson. Uma das grandes vantagens do método é que a convergência é quadrática. No entanto, o método pode não convergir em alguns casos. Por exemplo, se o valor inicial posto para a variável que se está calculando, no caso  $S_{n+1}$ , for muito distante do valor que soluciona a Equação (109). Uma solução alternativa, utilizada por Mun e Kim (2005), é tentar eliminar na segunda parcela da soma da Equação (107) a dependência de  $S_n$ . Assim, partindo da Equação (102), tem-se que:

$$\frac{dS}{dt} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{dC}{dt} \frac{dt}{dS} (\varepsilon^R)^2 \right]^\alpha = \left[ -\frac{1}{2} \frac{dC}{dt} (\varepsilon^R)^2 \right]^\alpha \left( \frac{dS}{dt} \right)^{-\alpha} \quad (110)$$

Fazendo alguns rearranjos chega-se a:

$$\left( \frac{dS}{dt} \right)^{1+\alpha} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{dC}{dt} (\varepsilon^R)^2 \right]^\alpha \quad (111)$$

Eliminando o expoente do lado esquerdo da Equação (111), tem-se:

$$\frac{dS}{dt} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{dC}{dt} (\varepsilon^R)^2 \right]^{\alpha/(1+\alpha)} \quad (112)$$

Considerando agora que o incremento é pequeno o suficiente pode-se dizer que:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad e \quad \frac{dC}{dt} = \frac{\Delta C}{\Delta t} \quad (113)$$

Assim, a Equação (112) passa a ser dada por:

$$\Delta S = \left[ -\frac{1}{2} \frac{\Delta C}{\Delta t} (\varepsilon^R)^2 \right]^{\alpha/1+\alpha} \Delta t \quad (114)$$

Retirando  $\Delta t$  de dentro dos colchetes e considerando a variação do parâmetro de dano como:

$$\Delta S = S_{n+1} - S_n \quad (115)$$

chega-se a:

$$S_{n+1} = S_n + \left[ -\frac{1}{2} \Delta C_n (\varepsilon^R)_n^2 \right]^{\alpha/1+\alpha} \Delta t^{1/1+\alpha} \quad (116)$$

onde  $\Delta C_n$  representa a variação da pseudorigidez no incremento analisado, dada por:

$$\Delta C_n = C_{n+1} - C_n \quad (117)$$

Novamente, tem-se uma expressão não-linear que para ser resolvida requer uso do Método de Newton-Rapshon.

### 4.3 Solução da Equação do Parâmetro de Dano pelo Método de Newton Rapshon:

Como se sabe, o método de Newton Raphson aproxima a raiz de uma equação não linear por iterações. A Equação (118) mostra a expressão para a qual irá se aplicar o Método de Newton-Rapshon. O objetivo é encontrar valores de  $S_{n+1}$  para os quais  $f(S_{n+1})$  seja zero.

$$f(S_{n+1}) = S_{n+1} - S_n - \left[ -\frac{1}{2} D(S_{n+1}) (\varepsilon^R)^2 \right]^{\alpha} \Delta t \quad (118)$$

Para obter tal solução, parte-se da seguinte expressão genérica:

$$S_{n+1}^{k+1} = S_{n+1}^k - \frac{f(S_{n+1}^k)}{f'(S_{n+1}^k)} \quad (119)$$

onde  $k$  representa a iteração. Como também será necessária a derivada da Equação (118) tem-se que:

$$f'(S_{n+1}) = 1 - \frac{\partial \left\{ \left[ -\frac{1}{2} D(S_{n+1}) (\varepsilon^R)^2 \right]^{\alpha} \right\}}{\partial S_{n+1}} \Delta t \quad (120)$$

Assim tem-se:

---

Quadro 1 – Processo iterativo para a solução da Equação (118) por Newton Raphson.

Dados:  $a, b, \varepsilon^R, \alpha$  e  $\Delta t$ , é feita uma estimativa inicial para  $S_{n+1}$

---

---

Computa-se  $f(S_{n+1})$

Computa-se  $f'(S_{n+1})$

Computa-se  $\Delta S = -f(S_{n+1})/f'(S_{n+1})$

Usa-se  $S_{n+1}^{k+1} = S_{n+1}^k + \Delta S$  para repetir o processo

Repete-se o processo até  $|\Delta S| \leq tol$

---

#### 4.4 Particularização do Método de Newton Raphson

Dada à motivação do uso da Equação (103) para representar a relação  $C(S) \times S$ , faz-se a particularização das expressões da seção anterior para este caso. A Equação (118) passa a ser dada por:

$$f(S_{n+1}) = S_{n+1} - S_n - \left[ -\frac{1}{2} (C_0 e^{aS_{n+1}^b} ab S_{n+1}^{b-1}) (\epsilon^R)^2 \right]^\alpha \Delta t \quad (121)$$

Derivando a Equação (121) e chamando:

$$k = ab S_{n+1}^{b-1} \quad e \quad q = C_0 e^{aS_{n+1}^b} \quad (122)$$

chega-se a:

$$f'(S_{n+1}) = 1 - \alpha \left[ -\frac{1}{2} (\epsilon^R)^2 (qk) \right]^{\alpha-1} \left\{ -\frac{1}{2} (\epsilon^R)^2 [q(k)^2 + (b-1)qab S_{n+1}^{b-2}] \right\} \Delta t \quad (123)$$

Usa-se então o processo iterativo representado no Quadro 1 para a solução da Equação (121). Entre as principais vantagens do Método de Newton-Raphson está o fato de que comparado a outros métodos ele é mais rápido, pois possui convergência quadrática. No entanto, o método nem sempre converge e precisa do cálculo da derivada da função, o que nem sempre é uma tarefa fácil.

A convergência do processo iterativo descrito no Quadro 1 para a solução de uma equação não-linear está sempre garantida para um dado intervalo  $[a, b]$  que contém a raiz de  $f(x)$ , desde que  $f(x)$  e  $f'(x)$  sejam contínuas nesse intervalo e que  $f'(x) \neq 0$ . Portanto, se for utilizada uma estimativa inicial  $x_0$  tal que  $x_0 \in [a, b]$ , a convergência estará garantida. Em outras palavras, para o método de Newton-Raphson convergir, é preciso que a estimativa inicial esteja próxima da raiz. No caso da Equação (121), a estimativa inicial do parâmetro de dano corresponde ao valor deste parâmetro no instante anterior ( $S_{n+1}^0 = S_n$ ).

Uma das grandes vantagens do tratamento do dano fazendo uso do Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica através do uso da pseudodeformação está no fato de se poder calcular as tensões viscoelásticas lineares independentemente do parâmetro de dano. De acordo com a Equação (99), a tensão no instante  $t_{n+1}$  é dada por:

$$\sigma_{n+1} = C(S_{n+1})\epsilon_{n+1}^R \quad (124)$$

De acordo com esta equação, o valor da tensão é calculado multiplicando a pseudodeformação pela rigidez do material danificado, normalmente representado por uma expressão como a Equação (103). A pseudodeformação por sua vez é calculada a partir da Equação (91). De forma incremental tem-se:

$$\epsilon_{n+1}^R = \epsilon_n^R + \frac{1}{E_R} (\bar{E} \Delta \epsilon + \Delta \hat{\sigma})_{n+1} \quad (125)$$

Através da Equação (125) nota-se que a não-linearidade do cálculo da tensão reside no cálculo da pseudorigidez e não no cálculo da pseudodeformação. Neste sentido, é importante notar que o parâmetro de dano ( $S$ ) não afeta a pseudodeformação ( $\epsilon^R$ ), mas a pseudodeformação afeta o parâmetro de dano, como mostram as Equações (109) e (118).

Utilizando a Equação (125), pode-se escrever a Equação (124) como:

$$\sigma_{n+1} = C(S_{n+1}) \left[ \epsilon_n^R + \frac{1}{E_R} (\bar{E} \Delta \epsilon + \Delta \hat{\sigma})_{n+1} \right] \quad (126)$$

Caso as deformações reais sejam conhecidas, como é o caso dos ensaios de laboratório, as tensões podem ser calculadas diretamente a partir da Equação (126). Contudo, na maioria dos casos práticos, o que se procura é determinar as tensões e deformações reais, devido a forças externas (cargas) aplicadas sobre o sólido. Neste caso é necessária a verificação do equilíbrio global do sólido através do Método dos Elementos Finitos, como será discutido a seguir.

#### 4.5 Modelagem por Elementos Finitos

De forma geral, utiliza-se o PTV para se chegar às equações do MEF. Sabe-se que o PTV – Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas tensões nas deformações virtuais do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças externas nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação. (Cook et al, 2002; Zienkiewicz, 1998). Assim sendo tem-se:

$$\delta U_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \Rightarrow \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV = \int_L \delta \mathbf{u}^t \mathbf{q} dx \quad (127)$$

onde  $\delta U_{\text{int}}$  é o trabalho virtual interno e  $\delta W_{\text{ext}}$  é o trabalho virtual externo. Desta forma, a Equação (127) será dada por:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{L_e} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{q} dx \quad (128)$$

O campo de deslocamentos é dado por:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_n u_n = \mathbf{N} \mathbf{u}_e \quad (129)$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz/vetor que contem as funções de forma,  $n$  é o número de nós no elemento e  $\mathbf{u}_e$  representa os deslocamentos nodais. Considerando ainda que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 + \dots + \frac{dN_n}{dx} u_n = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (130)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz deformação-deslocamento do elemento, pode-se dizer que:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}_e \text{ e } \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_e \quad (131)$$

A Equação (128) simboliza a igualdade da soma dos trabalhos virtuais interno e externo, de todos os elementos, o que caracteriza o MEF como discutido anteriormente. Pode-se ainda escrever a Equação (128) como:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_e^t \int_{V_e} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV = \sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_e^t \int_{L_e} \mathbf{N}^t \mathbf{q} dx \quad (132)$$

onde:

$$\mathbf{g}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV \text{ e } \mathbf{f}_e = \int_{L_e} \mathbf{N}^t \mathbf{q} dx \quad (133)$$

É importante lembrar que tanto  $\mathbf{g}_e$  (vetor de forças internas do elemento) quanto  $\mathbf{f}_e$  (vetor de forças externas do elemento) são válidos para qualquer lei de tensão e deformação. A formulação desenvolvida até aqui não faz menção a qualquer tipo de lei constitutiva podendo ser aplicada para qualquer tipo de material como, por exemplo, materiais elásticos, viscoelásticos lineares, viscoelásticos não-lineares.

Pode-se ainda inserir aqui o conceito de matriz de incidência cinemática, ou seja, a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com os deslocamentos globais. Assim:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \quad (134)$$

onde:  $\mathbf{u}_e$  é o deslocamento no elemento,  $\mathbf{A}_e$  é a matriz de incidência e  $\mathbf{u}$  é o deslocamento global.

Desta forma pode-se escrever a Equação (132) como:



$$\delta \mathbf{u}_e^t \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{A}_e^t \mathbf{g}_e = \delta \mathbf{u}_e^t \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{A}_e^t \mathbf{f}_e \quad (135)$$

Pela equação anterior pode-se concluir que o vetor de cargas internas é igual ao vetor de cargas externas.

$$\delta \mathbf{u}^t \mathbf{g} = \delta \mathbf{u}^t \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (136)$$

O parâmetro  $t$  foi incluído na expressão acima para ressaltar que as forças internas e externas variam ao longo do tempo em função do carregamento aplicado. Para o instante  $t_{n+1}$  tem-se:

$$\mathbf{g}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (137)$$

onde  $\mathbf{g}_{n+1} = \mathbf{g}(t_{n+1})$  e  $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1})$ .

A partir da Equação (133) a força interna no instante  $t_{n+1}$  é dada por:

$$\mathbf{g}_{n+1} = \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV \quad (138)$$

Para se chegar ao equilíbrio global é necessário que a Equação (137) seja atendida. De forma que se pode escrever:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{g}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1} = 0 \quad (139)$$

onde  $\mathbf{r}_{n+1}$  é a função resíduo. Obviamente, busca-se um valor nulo para esta função, o que na prática quase nunca acontece. Desta forma se estabelece um valor bem pequeno para que o procedimento continue acontecendo até a tolerância desejada. Fazendo uso da expansão de Taylor, chega-se a:

$$\mathbf{r}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{r}_{n+1}^k + \frac{\partial \mathbf{r}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \delta \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \right) \delta \mathbf{u} = -\mathbf{r}_{n+1}^k \quad (140)$$

onde  $k$  representa a iteração e  $n$  representa o passo no tempo. Uma vez calculada a expressão (140) faz-se a atualização dos deslocamentos pela seguinte expressão:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \delta \mathbf{u} \quad (141)$$

De acordo com a Equação (139) e omitindo  $k$  pode-se escrever a derivada do resíduo da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{g}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} - \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad (142)$$

Como a função  $\mathbf{f}$  não depende dos deslocamentos, sua derivada em relação aos deslocamentos é nula. A função  $\mathbf{g}$ , por sua vez, é dependente dos deslocamentos e sua derivada é dada pela Equação (144). Assim chega-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \mathbf{K}_{n+1} \quad (143)$$

onde  $\mathbf{K}_{n+1}$  é a matriz de rigidez tangente. Considerando que a tensão viscoelástica com efeito do dano é dada pela Equação (124) e que a matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{g}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \int_V \mathbf{B}^t \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}} dV \quad (144)$$

onde:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} \quad (145)$$

pode-se então definir o módulo de elasticidade tangente como:

$$\mathbf{E}_t = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^R} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^R}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (146)$$

Novamente pela Equação (124), tem-se que:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^R} = \mathbf{C}(S)_{n+1} \quad (147)$$

Considerando ainda a Equação (125), tem-se:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^R}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{E_R} \bar{\mathbf{E}} \quad (148)$$

de forma que a matriz constitutiva tangente seria dada por:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{C}(S)_{n+1} \frac{\bar{\mathbf{E}}}{E_R} \quad (149)$$

Assim, a matriz de rigidez tangente representada pela Equação (144) passa a ser dada por:

$$\mathbf{K}_{n+1} = \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{E}_t \mathbf{B} dV \quad (150)$$

Finalmente, usando a Equações (139), (140) e (143) escreve-se a variação dos deslocamentos como:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = -\mathbf{r} \quad (151)$$

Para a solução do problema, apresenta-se a seguinte sequência:

Para  $i = 1$  até INTMAX

Calcula-se  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  pela Equação (125)

Calcula-se  $\mathbf{g}_{n+1}$  pela Equação (138);

Calcula-se  $\mathbf{K}_{n+1}$  pela Equação (150);

Verifica-se o valor do resíduo pela Equação (139)

---

Se  $\mathbf{r}_{n+1} \leq \text{Tolerância}$ :

Calcula-se  $\delta \mathbf{u}$  pela Equação (151);

Calcula-se um novo  $\mathbf{u}$  pela Equação (141);

Se  $\mathbf{r}_{n+1} > \text{Tolerância} \rightarrow \text{recomeça}$

---

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS E ANÁLISES

#### 5.1 Verificação do Modelo Considerando Temperatura

Com o objetivo de validar o algoritmo apresentado no Capítulo 3 usa-se, por base, a barra uniaxial (Figura 20) retirada e adaptada do trabalho desenvolvido por Zocher (1995). No trabalho de Zocher (1995) foram apresentadas soluções analíticas para alguns problemas de viscoelasticidade linear. Partiu-se de um material hipotético, isotrópico. O módulo de relaxação é dado por:

$$E(t) = E_{\infty} + E_1 e^{-t/\rho_1} \quad (152)$$

onde  $E_{\infty} = 100$  KPa,  $E_1 = 400$  KPa e  $\rho_1 = 1$ . A barra uniaxial apresenta comprimento e área da seção transversal unitários. A estrutura tem uma das extremidades restringida e na outra é aplicado um deslocamento  $u(t)$  como pode ser visto na Figura 20.

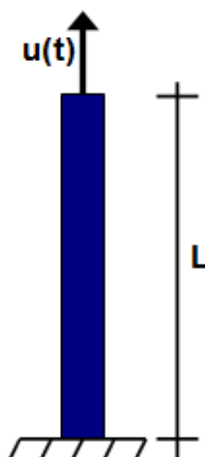


Figura 20 – Barra uniaxial.

Neste exemplo considera-se a função deslocamento sendo dada por:

$$u(t) = u_0 t \quad (153)$$

onde  $u_0 = 0.001$  m/s. Assim a função deslocamento tem seu comportamento de acordo com a Figura 21. Este tipo de carregamento descreve uma taxa constante de variação da deformação. A solução analítica considerando diferentes temperaturas (Zocher, 1995) é dada por:

$$\sigma(t) = u_0 \left[ E_\infty t + E_1 a_t \rho_1 (1 - e^{-\frac{t}{a_t \rho_1}}) \right] \quad (154)$$

onde o *shift factor*  $a_t$  é dado pela Equação (32). As temperaturas de 20°C, 25°C, 30°C e 40°C foram consideradas para o cálculo de  $a_t$ . Adotou-se a temperatura de 25°C como sendo a temperatura de referência, ou seja, a temperatura para a qual o valor de  $a_t = 1$ .

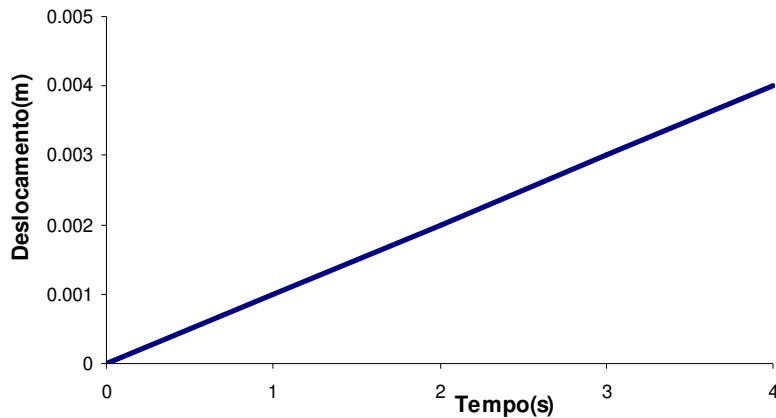


Figura 21 – Função deslocamento.

O algoritmo apresentado foi usado para o cálculo dos valores de tensão ao longo do tempo na barra apresentada. Neste problema foi considerado  $\Delta t = 0.001s$ . Como pode ser observado na Figura 22, o valor encontrado pelo algoritmo, independentemente da temperatura estudada, é exatamente o mesmo encontrado analiticamente, o que mostra uma ótima concordância entre o resultado modelado com o MEF e o resultado analítico. Na verdade, este resultado era esperado em virtude da aproximação feita na Equação (40). Como no presente exemplo a variação da deformação é constante, as soluções se equiparam.

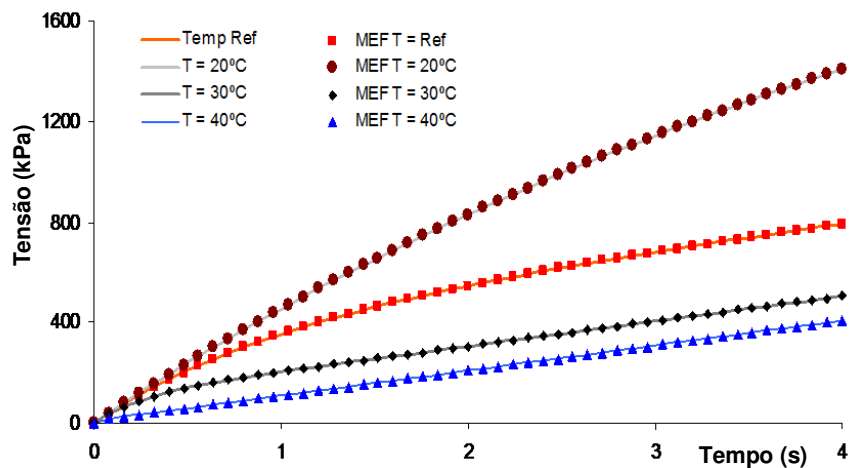


Figura 22 – Comparação das tensões analíticas com as numéricas.

## 5.2 Análise do Efeito da Temperatura em Pavimentos Asfálticos

Este exemplo tem por objetivo estudar o efeito da temperatura nas misturas asfálticas no que diz respeito ao comportamento mecânico de pavimentos flexíveis. Para este fim foi escolhido um pavimento composto por três camadas (revestimento asfáltico, base e sub-base) além do subleito da região, como ilustrado na Figura 23.

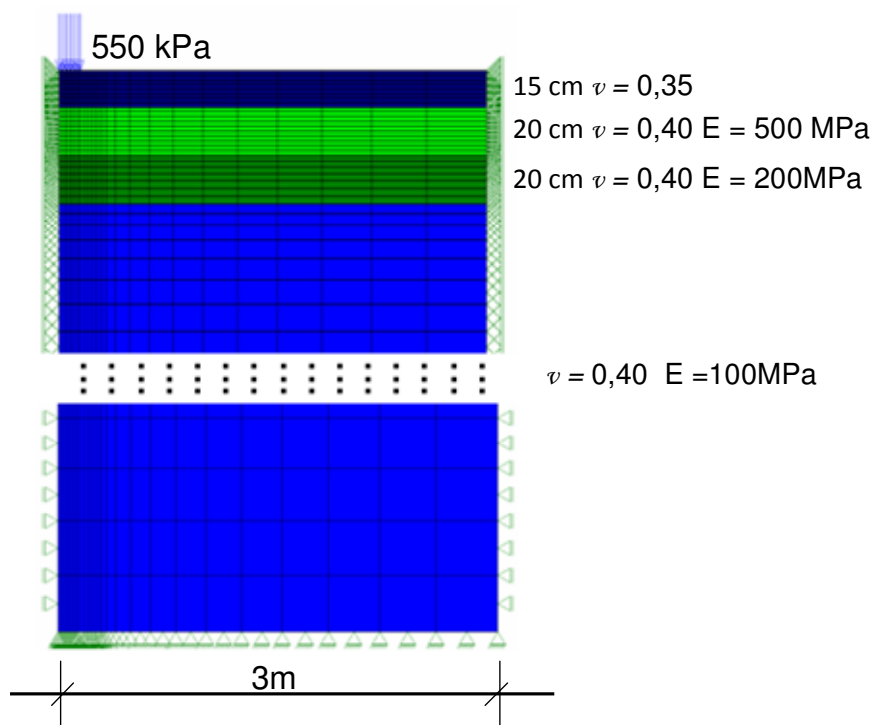


Figura 23 – Geometria, condições de contorno, carregamento e malha de EF.

A camada de revestimento asfáltico tem 15 cm de espessura,  $\nu = 0,35$  e módulo de relaxação apresentado na Tabela 2. O subleito, a sub-base e a base têm módulos de Young e coeficiente de Poisson respectivamente iguais a 100MPa e 0,4; 200MPa e 0,4; 500MPa e 0,4. As espessuras da base e da sub-base são iguais a 20 cm.

Considerou-se para o revestimento um ligante asfáltico típico do Brasil, PG 70-22, produzido na Universidade Federal do Ceará com 5,7% de teor de ligante e com agregados graníticos típicos do Estado do Ceará. Três corpos de prova com 100 mm de diâmetro, 150 mm de altura e teor de vazios de 3,8% foram moldados e ensaiados (Araújo et al. 2010). Os valores dos coeficientes para a série de Prony estão listados na Tabela 2.

A análise do pavimento foi realizada através de um modelo axissimétrico, sendo considerado como carregamento uma pressão de 550 kPa distribuída em uma área circular de raio ( $r$ ) igual a 15 cm. A camada de revestimento foi modelada considerando o modelo viscoelástico linear com efeito da temperatura e as demais camadas foram tratadas de forma elástica linear. A carga aplicada varia na forma de um pulso semi-senoidal com uma duração de 0.013s correspondente a um veículo com velocidade de 60km/h (Brown, 1973).

Foram usados elementos finitos quadráticos de 8 nós (Q8) com integração de 2x2 pontos de Gauss. A malha de elementos finitos possui 1430 elementos e foi construída de forma a simular um espaço semi-infinito. Assim, a face lateral está a uma distância de 3m (20r) do eixo de simetria e o final do subleito está a 7,5 m (50r) abaixo da superfície. Essas representações estão esquematizadas na Figura 23. O tamanho dos elementos é menor próximo à região de aplicação da carga onde as tensões e deformações têm uma variação mais significativa. Elementos maiores são utilizados no subleito.

Tabela 2 – Série de Prony ( $T_{ref} = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) (Araújo et al, 2010).

<b>PG 70-22</b>		
Termo	E(Pa)	$\rho$ (s)
$\infty$	8,45E+08	-
1	-1,53E+09	2,00E-05
2	5,04E+09	2,00E-04
3	4,86E+09	2,00E-03
4	4,28E+09	2,00E-02
5	2,89E+09	2,00E-01
6	1,78E+09	2,00E+00
7	6,13E+06	2,00E+01
8	-6,80E+04	2,00E+02

A temperatura de referência da Série de Prony é igual 25 °C, como indicado na Tabela 2. O fator de deslocamento  $a_i(T)$  foi calculado utilizando a expressão de Arrhenius, Equação (32), com uma constante  $C = 10500\text{ K}$ , uma vez que esta expressão deu o melhor resultado na construção da curva mestra da mistura a partir do Princípio da Superposição Tempo-Temperatura.

A formulação apresentada neste trabalho foi utilizada para simular o comportamento do pavimento considerando a temperatura da camada de revestimento variando de 15 °C a 50 °C. Os resultados obtidos, ilustrados a seguir, mostram claramente a influência que

a temperatura tem sobre o comportamento de materiais tratados com o modelo viscoelástico linear.

Os deslocamentos verticais máximos no topo da camada de revestimento para os diferentes valores de temperatura são mostrados na Figura 24. Como era de se esperar quanto mais quente estiver o material, maior será o deslocamento do pavimento. Entre as temperaturas de 15 °C a 50 °C a variação observada é de quase 60%, o que é um resultado bastante significativo.

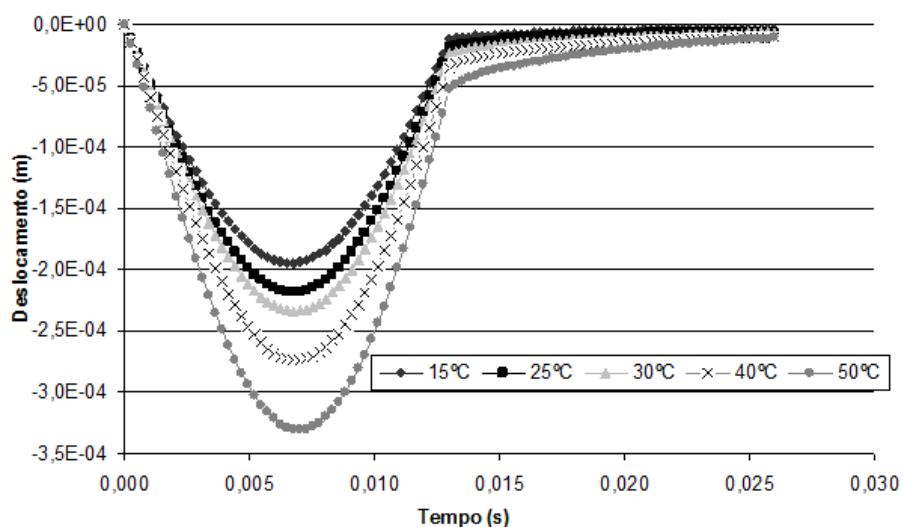


Figura 24 – Deslocamento vertical no topo da camada de revestimento.

A Figura 25 mostra a variação das tensões horizontais na base do revestimento asfáltico ao longo do tempo para as diferentes temperaturas consideradas neste trabalho. Observa-se que o aumento da temperatura acarreta inicialmente um pequeno aumento das tensões horizontais. Contudo, para temperaturas um pouco maiores a tensão de tração começa a ser reduzida e, finalmente, para temperaturas ainda maiores ocorre uma inversão no sinal destas tensões que passam de tração para compressão.



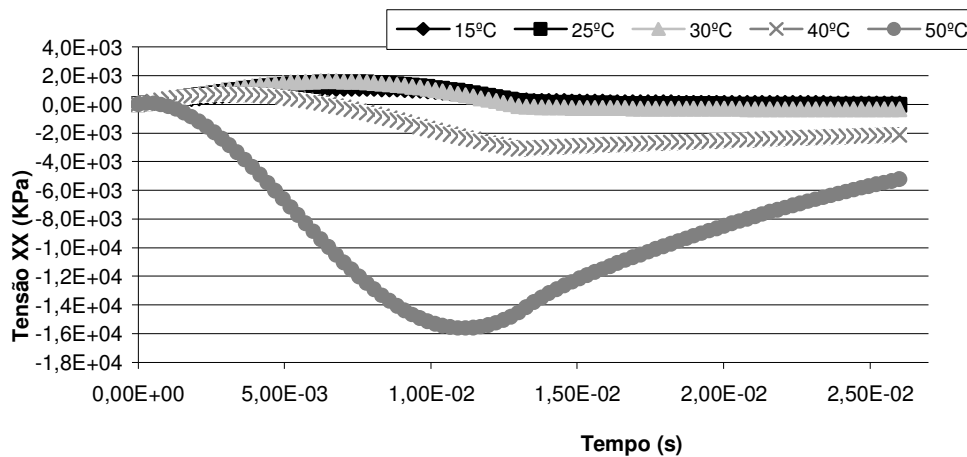


Figura 25 – Tensões horizontais ( $\sigma_{xx}$ ) na base da camada de revestimento.

Uma interpretação para este fenômeno é que a redução da rigidez do revestimento, devido ao aumento de temperatura, faz com que o carregamento externo deixe de ser resistido por flexão do revestimento, à semelhança de uma placa em base elástica, e passe a ser transferido diretamente para as subcamadas granulares (base, sub-base e subleito). Esta situação é desfavorável ao pavimento, pois a reação vertical destas camadas passa a ser distribuída em uma área menor. Isto eleva as tensões verticais nestas camadas, o que pode vir a causar deformações permanentes no pavimento.

### 5.3 Validação do Modelo Considerando Dano

A formulação apresentada nas seções anteriores foi implementada em um pequeno programa na linguagem C++. Este programa será usado com o objetivo de estudar o efeito do dano no comportamento viscoelástico das misturas asfálticas. Neste exemplo, os resultados obtidos na análise numérica serão comparados com outros valores numéricos e também com resultados experimentais encontrados na literatura (Mun e Geem, 2009).

Para a análise mecânica utilizou-se um concreto asfáltico não modificado com teor de ligante de 5.2%. A série de Prony usada é mostrada na Tabela 3. Para o cálculo do parâmetro de dano e conseqüentemente da pseudorigidez, ou seja, Equação (103), os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $C_0$  e  $\alpha$ , foram tomados como -0.002757, 0.543455, 1.0 e 2.9, respectivamente.

Tabela 3 – Série de Prony (Mun e Geem, 2009).

ASFALTO NÃO MODIFICADO - TEOR 5.2%		
Termo	E(kPa)	$\rho$
$\infty$	22400	-
1	507220	1.0E-10
2	834930	1.0E-09
3	1353670	1.0E-08
4	2139180	1.0E-07
5	323737	1.0E-06
6	4555730	1.0E-05
7	5683890	1.0E-04
8	5855130	1.0E-03
9	4555500	1.0E-02
10	2485680	1.0E-01
11	949990	1.0E+00
12	282390	1.0E+01
13	77290	1.0E+02
14	22600	1.0E+03

Todos os dados usados neste exemplo foram obtidos a partir de ensaios descritos em Mun e Geem (2009). A variação do deslocamento no tempo imposta é dada pela Equação (155) e sua representação gráfica é vista na Figura 26:

$$u = 0.0003t^2 + 0.0002t - 0.0000001 \quad (155)$$

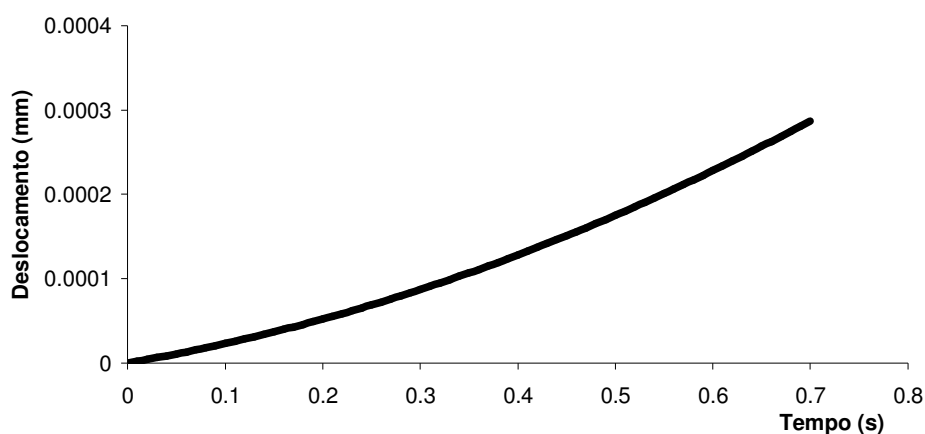


Figura 26 – Curva de deslocamento aplicado.

O módulo de referência foi considerado com valor unitário. Os resultados numéricos usando o MEF e um incremento de tempo  $\Delta t = 0.01s$  são mostrados na Figura 27 e Figura 28. Como se pode observar existe uma boa concordância entre os valores

experimentais obtidos por Mun e Geem (2009) e a resposta numérica obtida neste trabalho para o cálculo da curva da função de dano  $C(S)$ .

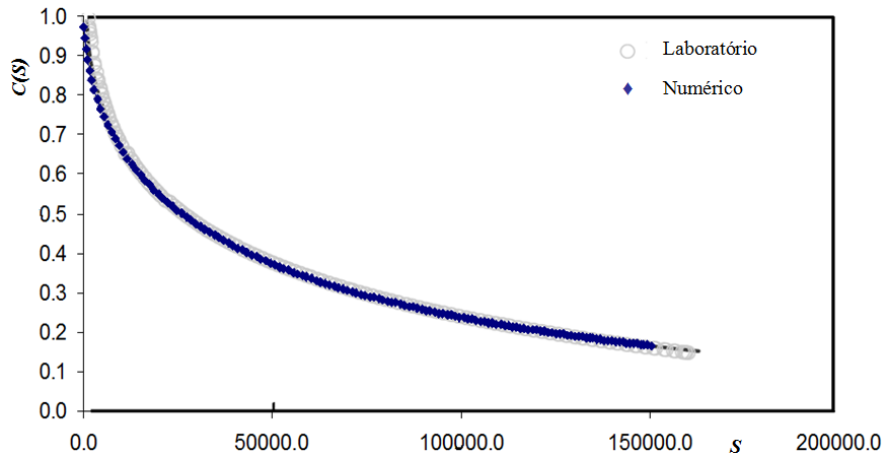


Figura 27 - Comparação entre os resultados laboratoriais e numéricos.

A Figura 28 apresenta uma comparação entre os valores das tensões viscoelásticas encontradas a partir de ensaios de laboratórios e os calculados numericamente. Observa-se uma boa aproximação entre os resultados encontrados através do modelo apresentado no presente trabalho (Numérico VDC) e os valores obtidos por Mun e Geem (2009).

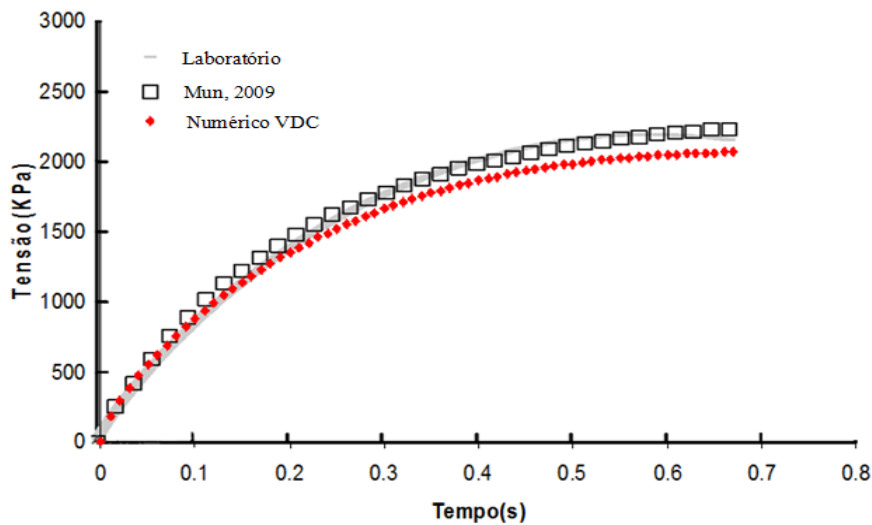


Figura 28 – Comparação das tensões obtidas em laboratório e numericamente.

A Figura 29 mostra uma comparação entre a variação com o tempo das tensões viscoelásticas lineares (VCL) e das tensões viscoelásticas com dano contínuo (VDC). O comportamento obtido foi dentro do esperado, ou seja, no início do carregamento os valores são praticamente os mesmos. Com o passar do tempo o efeito do dano passa a ser mais presente ocasionando uma redução nos valores das tensões viscoelásticas.

Outro aspecto importante é o fato de que a curva das tensões VDC, quando o tempo tende ao infinito, praticamente não sofre mais redução de seu valor, o que mostra o efeito do dano no material, similar ao que ocorre no processo de plastificação. Ao contrário do modelo com dano, as tensões viscoelásticas lineares apresentam valores cada vez maiores com o passar do tempo.

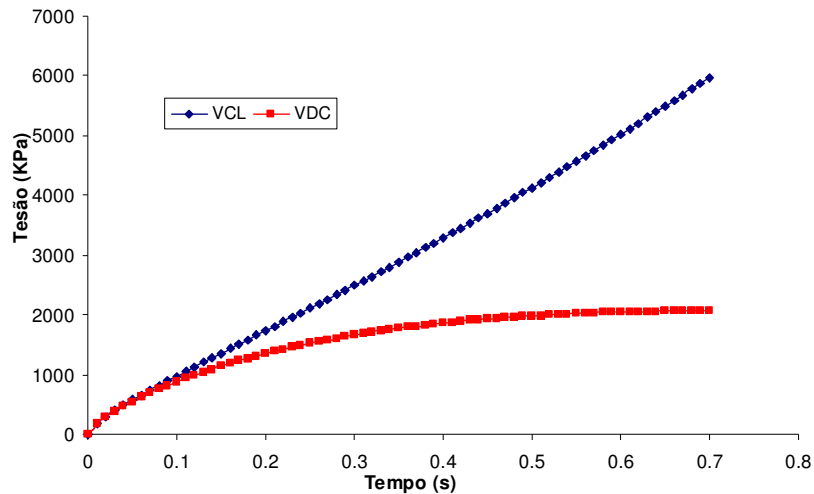


Figura 29 – Variação das tensões viscoelásticas com e sem dano com o tempo.

A Figura 30 mostra que o caráter viscoelástico é mais presente no início carregamento. Percebe-se que a parte final do gráfico mostra um comportamento do material semelhante ao elástico. Os altos valores de pseudodeformação são devido ao valor unitário tomado para o módulo de referência, uma vez que a pseudodeformação corresponde, matematicamente, à tensão viscoelástica linear dividida pelo módulo de referência.

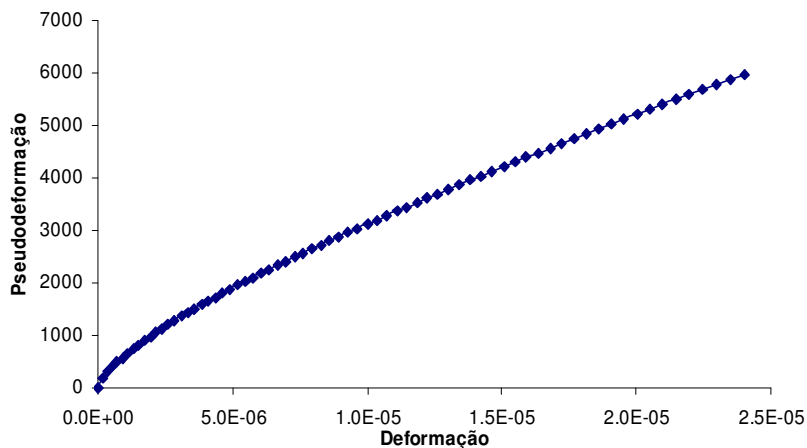


Figura 30 – Variação da pseudodeformação com a deformação real viscoelástica.

A Figura 31 mostra um comportamento do material acentuadamente não-linear. Percebe-se que, somente no início da aplicação do carregamento existe um

comportamento semelhante ao linear. A variação da tensão com a deformação mostra ainda que a partir do valor 0.00002 de deformação a variação da tensão é praticamente a mesma mostrando uma concordância com a Figura 28.

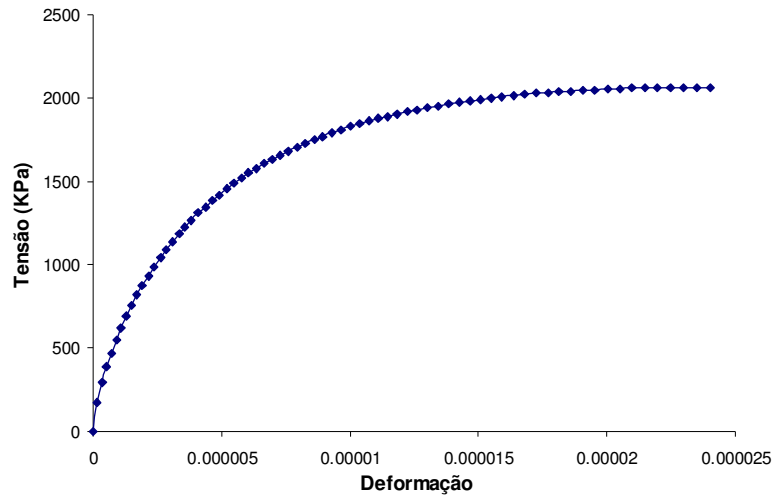


Figura 31 – Variação da tensão com a pseudodeformação.

#### 5.4 Análise do Efeito do Dano para Deformações Cíclicas

O uso de carregamentos cíclicos na modelagem de materiais viscoelásticos considerando o efeito do dano é motivado pelo fato de cargas monotônicas gerarem dano continuamente crescente, enquanto que cargas cíclicas geram danificação de forma intermitente, isto é, na fase de carregamento o dano é crescente e na fase de descarregamento o dano se mantém constante. Neste caso está se desconsiderando o fenômeno de fechamento das trincas, conhecido na literatura internacional como *healing*.

Essencialmente pavimentos asfálticos sofrem aplicações cíclicas de carregamentos. Pode-se observar isso tanto do ponto de vista mecânico, ação do tráfego de automóveis, como do clima ou ações do tempo. No primeiro caso, a passagem por um determinado ponto do pavimento tem uma fase de descanso, período em que o veículo ainda não passou pelo ponto especificado e uma fase de ação da carga, período em que o automóvel passa pelo ponto. Da mesma forma, se observa com respeito à ação do clima. Por exemplo, pode-se entender a ação do sol, ou o aumento da temperatura como a fase de aplicação da carga e a ausência destes efeitos como um período de descanso. Assim, sucessivos dias geram pontos de ação de cargas térmicas seguidos por ausência dessas cargas durante a noite.

A importância da análise de cargas cíclicas é motivada pelo fato de que estas produzem falhas no material para valores menores do que as falhas geradas por carga estática no mesmo material. Esse fenômeno é conhecido como fadiga e é um problema essencialmente não-linear, o que quer dizer que o dano produzido no primeiro ciclo é diferente do dano produzido nos demais ciclos.

Lee *et al* (2000) desenvolveram um modelo para prever fadiga a partir da deformação controlada. O parâmetro usado para prever a fadiga do material é a chamada pseudorigidez secante que mede a relação entre o pico de pseudodeformação e o valor de tensão correspondente em cada ciclo  $m$ :

$$P^R = \frac{\sigma_m}{\epsilon_m^R} \quad (156)$$

Lee *et al* (2000) ainda afirmam que a comparação da mudança da pseudorigidez sob carga cíclica com o aumento de trincas na superfície do material revelam que 50% de redução na pseudorigidez é um critério de falha razoável para o concreto asfáltico sob carga cíclica. Nota-se que não é a redução de 50% da rigidez e sim da pseudorigidez. Lembra-se ainda que a redução na rigidez de um material viscoelástico não necessariamente está ligada ao dano, podendo estar ligada somente à viscoelasticidade do material.

Muitos ensaios dentro da pavimentação asfáltica têm suas cargas aplicadas de forma cíclica. Partindo dessa informação aplica-se uma deformação senoidal no mesmo material estudado no exemplo anterior. Tenta-se assim avaliar a resposta do material no que tange tanto a variação de amplitude como para diferentes períodos de aplicação da carga. A deformação aplicada é descrita pela Equação (157).

$$\epsilon = \epsilon_0 \text{sen}(2\pi t / T) \quad (157)$$

onde  $\epsilon_0$  é a amplitude da deformação e  $T$  o período de aplicação da amplitude de deformação. Para esta análise foram usados três valores de períodos de tempo 1s, 10s e 20s. Estes períodos foram escolhidos por serem alguns dos valores que são usados no ensaio de módulo complexo. Também foram utilizados quatro valores diferentes de amplitude de deformação: 0.1, 0.01, 0.001 e 0.0063 e sempre um incremento de tempo de 0.01s.

O objetivo deste exemplo é tentar avaliar as respostas numéricas sob vários aspectos, como, por exemplo, os valores de tensão para diferentes períodos e diferentes amplitudes de deformação, os valores de pseudodeformação, a defasagem, que forma o

ângulo de fase, para diferentes situações e a variação que a discretização acarreta na resposta do modelo.

Como pode ser observado através da Figura 33, Figura 34 e Figura 36, a resposta da tensão de um material viscoelástico linear com dano tem comportamento diferente do que ocorre no material viscoelástico linear. Quando se aumenta a deformação os valores de tensão também aumentam, visto que existe uma relação diretamente proporcional entre deformação e tensão como pode ser observado na Figura 32. Pode-se perceber que os valores de tensão são crescentes na ordem de 0.001, 0.0063 e 0.01 de amplitude de deformação.

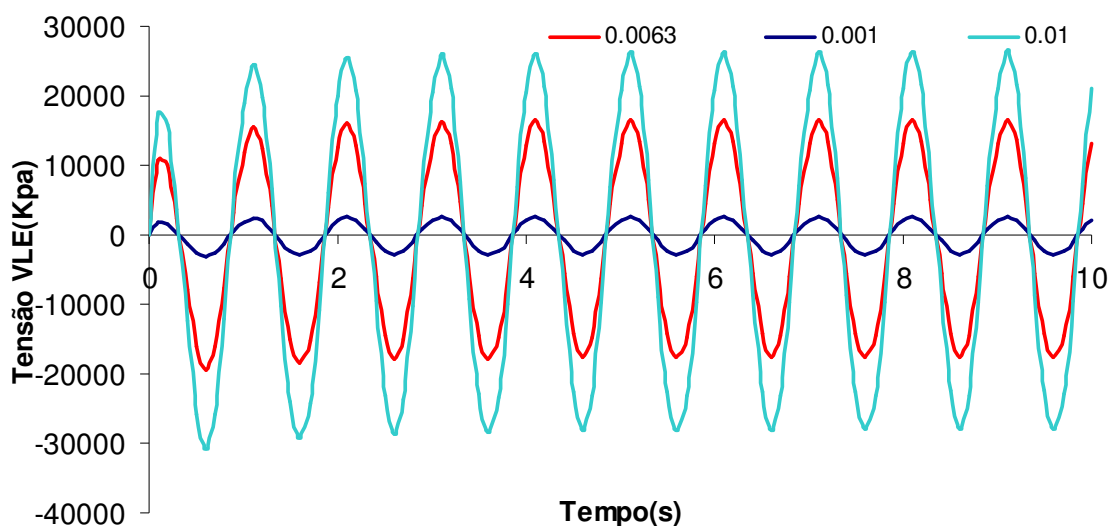


Figura 32 – Variação da tensão viscoelástica linear com o tempo para várias amplitudes de deformação e  $T = 1s$ .

No caso das tensões viscoelásticas considerando o efeito do dano, a proporcionalidade da relação tensão x deformação não existe. Na verdade, essa relação pode assumir diferentes comportamentos dependendo dos valores de frequência e amplitude adotados. De fato, poderia se concluir que em uma escala de tempo muito grande para maiores amplitudes os valores de tensão seriam menores independentemente da frequência que o material estaria sendo submetido.

Na Figura 33 observa-se que existe um comportamento bem definido das tensões. Isso quer dizer que para valores relativamente grandes de frequência, ou seja, valores relativamente pequenos de períodos de aplicação da deformação, os valores de tensão são inversamente proporcionais aos valores crescentes de amplitude de

deformação, ou seja, quanto maior for a amplitude de deformação menor será a tensão. Isso faz bastante sentido, uma vez que um carregamento maior intensifica o processo de danificação, diminuindo a pseudorigidez do material. Conseqüentemente, com baixos valores de pseudorigidez encontram-se baixos valores de tensão.

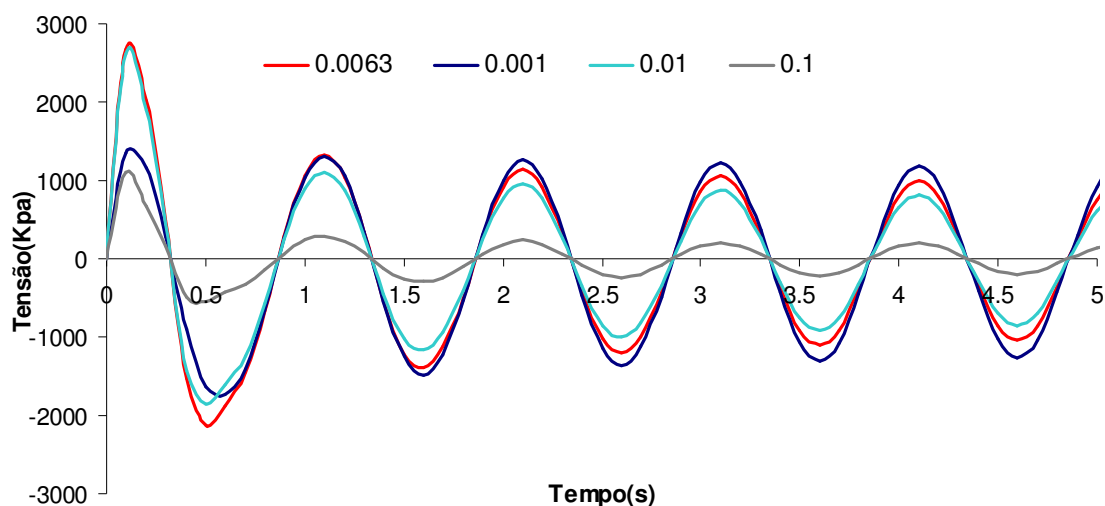


Figura 33 – Variação da tensão com o tempo para várias amplitudes de deformação e  $T = 1s$ .

A Figura 34 e a Figura 36 também mostram a variação da tensão viscoelástica considerando o efeito do dano. Percebe-se, nessas figuras, que não existe um padrão bem definido da relação entre amplitude de deformação aplicada e valores de tensão, ou seja, a ordem de valores das amplitudes não necessariamente representa a ordem com que as curvas nas figuras em questão irão se mostrar.

Observa-se claramente que, na Figura 34, nos primeiros 3s de aplicação da deformação os valores de tensão seguem o padrão do que acontece quando não existe o dano, ou seja, relação diretamente proporcional entre deformação e tensão. Isso se justifica com base na ideia de que uma vez que o carregamento ainda está no início da aplicação, o dano ainda não começou a ser representativo de fato, gerando assim um comportamento que se aproxima do comportamento do material sem considerar o efeito do dano.



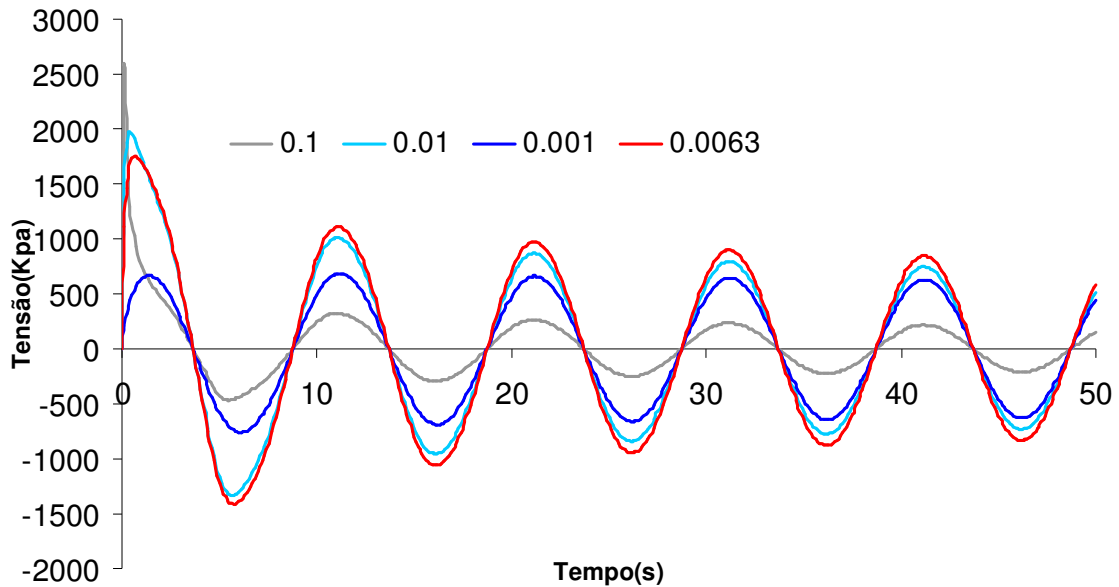


Figura 34 – Variação da tensão com o tempo para várias amplitudes de deformação e  $T=10s$ .

Com o passar do tempo observa-se que a relação que existia da deformação e da tensão com os valores da amplitude de deformação já não faz mais sentido. Este fato está relacionado tanto com o tempo de observação quanto com o período que se está realizando a análise. Observa-se, nos gráficos para períodos de 10 e 20 segundos, representados pela Figura 35 e pela Figura 36, respectivamente, que os valores de tensão para amplitudes de 0.01 e 0.001 se invertem. Na verdade, tem-se que considerar tanto o efeito do dano quanto da frequência em que se trabalha.

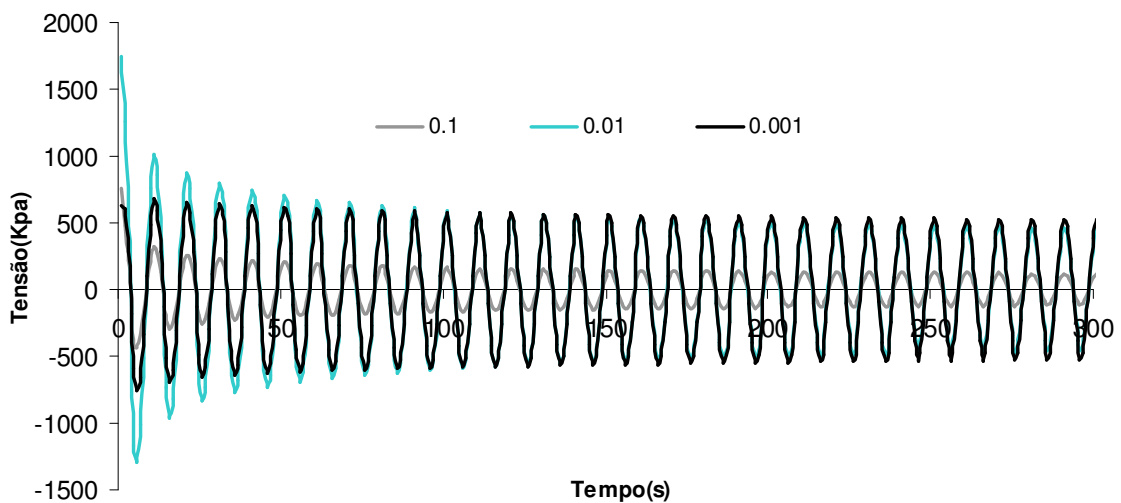


Figura 35 – Variação da tensão com o tempo para várias amplitudes de deformação e  $T=10s$ .

Como foi dito anteriormente, no longo prazo os valores de tensão serão tanto maiores quanto menores forem as amplitudes de deformação. Tanto a Figura 34 como a Figura 36 mostram valores de tempo relativamente pequenos, mas pode-se observar que quando se aumenta o tempo de análise as tensões de fato tornam-se inversamente proporcionais às amplitudes de deformação. Este fato pode ser melhor observado na Figura 35. Esta representa a continuação do gráfico representado na Figura 34. Como se pode notar, a partir do instante 100s os valores de tensão para amplitudes de 0.001 e 0.01 começam a se comportar de forma condizente com o esperado, ou seja, os valores de tensões para a amplitude de 0.01 se tornam menores do que os valores de tensão para amplitudes de 0.001. Deve-se lembrar que isso ocorre quando se trabalha em baixas frequências.

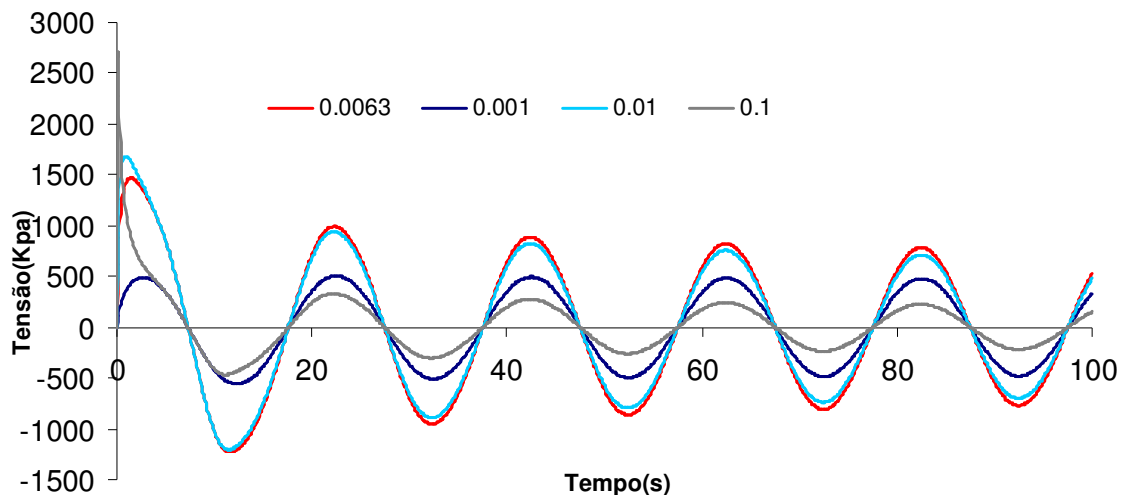


Figura 36 – Variação da tensão com o tempo para várias amplitudes de deformação e  $T=20s$

Com respeito ao comportamento do dano, existem dois requisitos que este deve atender. O primeiro deles é ligado à segunda lei da termodinâmica. Esta lei afirma que a entropia de um sistema sempre tende a aumentar e nunca a diminuir. Isso significa que o dano no modelo adotado não pode diminuir e sempre tenderá a aumentar com o tempo. Pode-se observar, na Figura 37, que é exatamente isso que acontece, ou seja, independentemente da amplitude aplicada o parâmetro de dano está sempre aumentando com o passar do tempo.

O segundo aspecto que deve ser observado quanto ao dano é que no momento em que o material submetido à deformação é carregado o dano deve aumentar. Por

outro lado, no momento em que o descarregamento acontecer, o dano não deve diminuir e sim permanecer constante. A Figura 37 também confirma este comportamento. Nessa mesma figura observa-se que quanto maior é a amplitude imposta ao material tanto maior será o valor do dano.

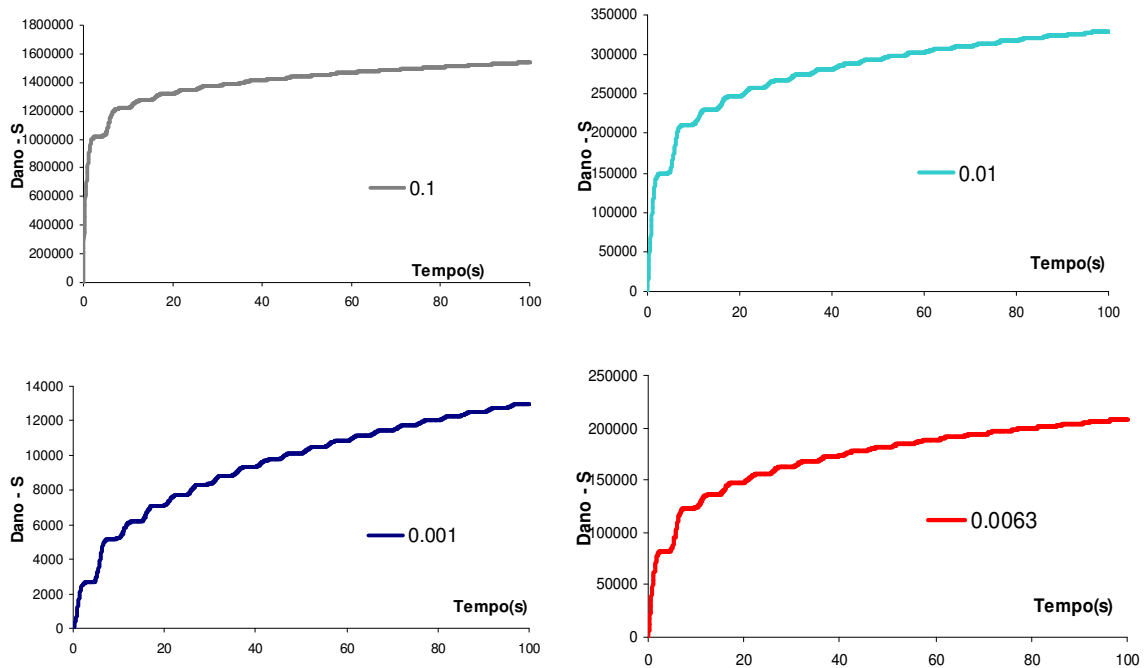


Figura 37 – Variação do dano com o tempo para diversas amplitudes de deformação e  $T=10s$ .

#### 5.4.1 Ângulo de Fase

Quando a caracterização de materiais viscoelásticos é feita mediante carregamentos harmônicos são dois os parâmetros que são usados nessa caracterização: ângulo de fase ( $\delta$ ) e módulo complexo ( $G^*$ ). Estes dois parâmetros se relacionam através da Equação (158).

$$G^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta) + i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin(\delta) \quad (158)$$

onde  $\sigma_0$  é o pico da tensão e  $\varepsilon_0$  é o pico da deformação. O ângulo de fase nada mais é do que a diferença entre as fases de tensão e deformação como pode ser observado na Figura 38.

Bonnaure *et al.* (1977) argumentam que o comportamento tração-compressão do carregamento é bem mais representativo do que acontece em campo. O ângulo de fase, na

verdade, é um indicador das propriedades viscosas do material. Desta forma para um material puramente elástico o ângulo de fase tem um valor nulo ( $\delta = 0^\circ$ ), e, por outro lado para um material puramente viscoso o ângulo é de  $\delta = 90^\circ$ . Pode-se concluir, então, que materiais viscoelásticos têm ângulos de fase entre os valores de  $0^\circ$  e  $90^\circ$  mostrando assim um pouco das duas partes, tanto elástica quanto viscosa. É por este motivo que é comum falar-se que um determinado material viscoelástico tem um comportamento mais próximo de um comportamento elástico ou de um comportamento viscoso.

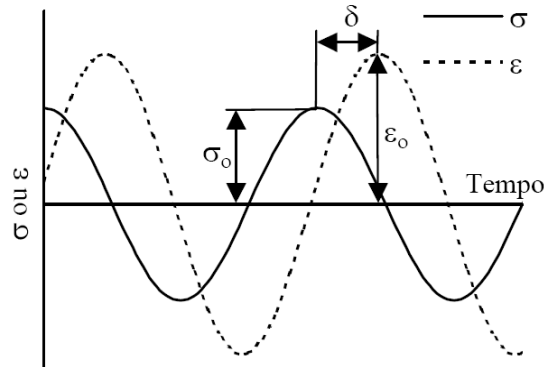


Figura 38 – Comportamento viscoelástico com carregamento harmônico. (Souza, 2005)

O importante a ser observado é que materiais com comportamento viscoelástico certamente apresentarão uma defasagem entre as fases de tensão e de deformação. A Figura 39 e a Figura 40 mostram como se comportam essas fases para o exemplo da seção anterior considerando um período de aplicação da carga de 1s e 10s, respectivamente e amplitudes de deformação de 0.001.

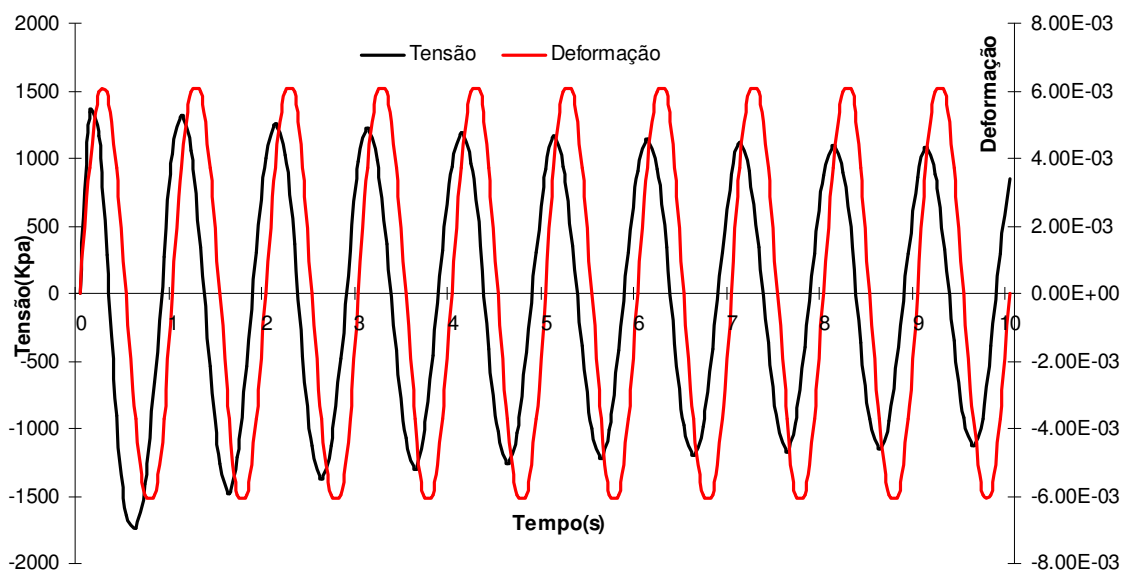


Figura 39 – Comportamento viscoelástico com carregamento harmônico para amplitude

de deformação de 0.001 e  $T=1s$

Como se pode observar nas duas figuras o comportamento da tensão e da deformação está dentro do esperado, ou seja, as variáveis se encontram defasadas o que nos faz assumir um comportamento viscoelástico. Deve ser lembrado que o uso do ângulo de fase como parâmetro que caracteriza os materiais viscoelásticos tem fundamento muito mais voltado para o regime linear. O presente trabalho trata de comportamento constitutivo não-linear de forma que o ângulo de fase aqui se limita a uma variável qualitativa, ou seja, qualquer aspecto quantitativo exige uma análise mais apurada para serem feitas considerações sobre o comportamento viscoelástico do material com base no ângulo de fase. De qualquer forma, espera-se que mesmo com a presença do dano a defasagem permaneça, o que de fato é observado.

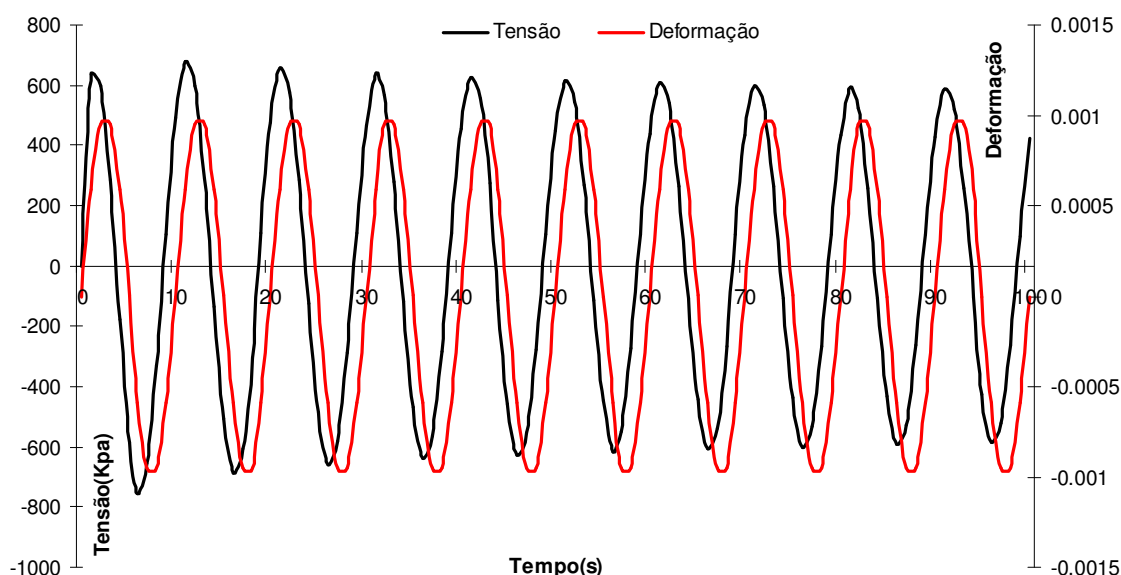


Figura 40 – Comportamento viscoelástico com carregamento harmônico para amplitude de deformação de 0.001 e  $T=10s$ .

#### 5.4.2 Análise do Efeito da Variação do Incremento de Tempo

Os exemplos analisados anteriormente mostraram que os algoritmos apresentados e implementados foram capazes de descrever o comportamento de materiais viscoelásticos considerando o efeito da temperatura e o do dano. No entanto, é sempre interessante que algoritmos também se apresentem de forma eficiente, ou seja, que façam pouco uso de memória e tenham um custo computacional menor. Neste

trabalho, este aspecto também é garantido por conta da propriedade recursiva que o modelo apresentado possui, ou seja, o cálculo das tensões viscoelásticas não dependem de todo o histórico de tensões, mas apenas do instante anterior. Procura-se aqui fazer um estudo de como a discretização do tempo aproxima os resultados das tensões. Dessa forma, com o objetivo de estabelecer um limite aceitável para a discretização no tempo do algoritmo apresentado verifica-se a variação das tensões e do parâmetro de dano considerando um período de 1s e uma amplitude de deformação de 0.001.

Como se pode observar na Figura 41, os valores de tensões, devido ao dano, vão diminuindo ao longo do tempo independentemente do valor de  $\Delta t$  usado, o que mostra claramente que o modelo de fato gera redução na rigidez do material. Observa-se também que, praticamente não há mais alterações nos valores de tensão na variação de 0.01 para 0.001 no incremento de tempo. As curvas preta e azul praticamente se sobrepõem. Isso mostra que o custo computacional gerado por conta da variação de  $\Delta t$  de 0.01 para 0.001 não se justifica uma vez que a melhoria dos resultados não é significativa.

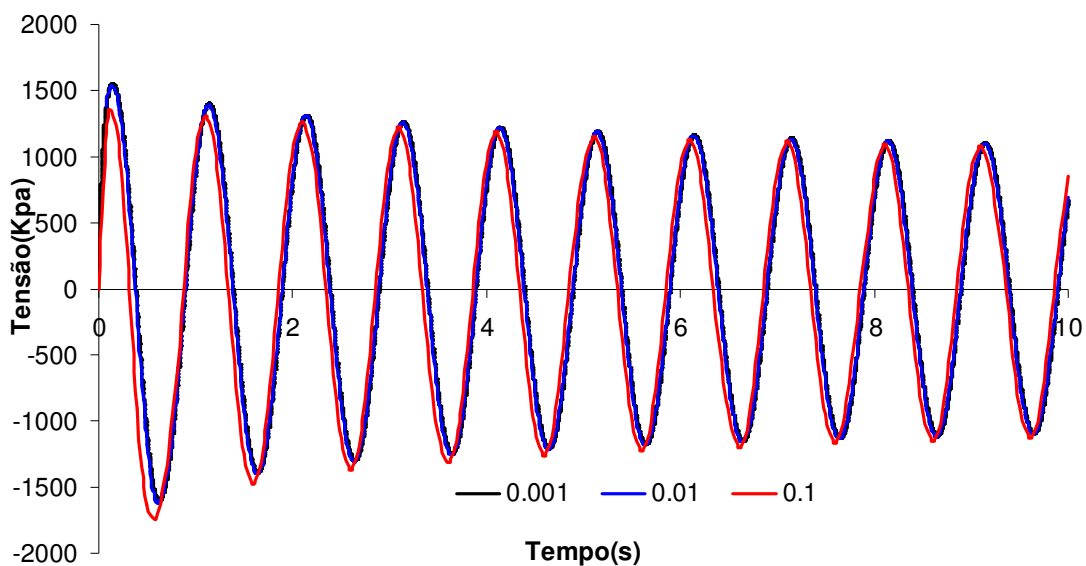


Figura 41 – Variação da tensão com o tempo para vários incrementos de tempo.

A Figura 42, assim como a Figura 41, mostra que a variação de incremento de tempo de 0.01s para 0.001s praticamente não altera o resultado final. As duas linhas, exceto entre os instantes 0.5 e 1 segundo, praticamente se sobrepõem. Outro aspecto muito importante da Figura 42 é que ela obedece a segunda lei da termodinâmica. Esta afirma que a variação da entropia nunca pode ser negativa, ou seja, o dano no material

nunca irá diminuir. Como podemos observar pela figura, de fato, a variável dano só aumenta seu valor ao longo do tempo. Ainda nota-se que para maiores amplitudes a curva de dano também apresenta predominantemente valores maiores de dano para o mesmo instante de tempo. Observa-se que a curva vermelha passa mais de 95% do tempo acima das curvas azul e preta.

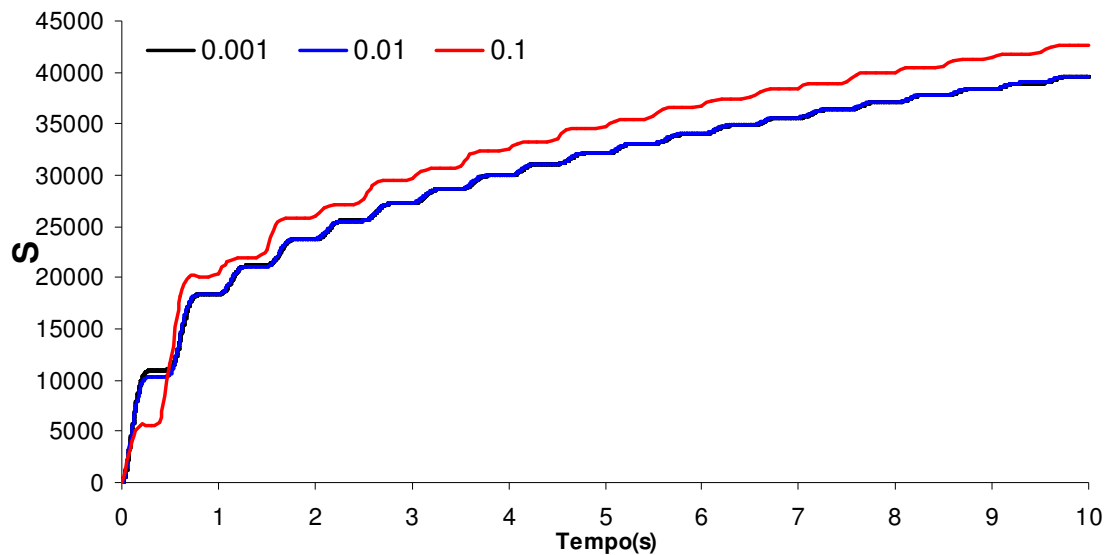


Figura 42 – Variação do dano no tempo para vários incrementos de tempo.

Deve ser lembrado aqui que o cálculo das tensões viscoelásticas considerando o efeito do dano é o produto da pseudorigidez pelo valor da pseudodeformação. A pseudorigidez é calculada com base no parâmetro de dano da Figura 42 gerando assim a Figura 43. Assim o gráfico da Figura 41 é um produto da Figura 43 pela Figura 44.

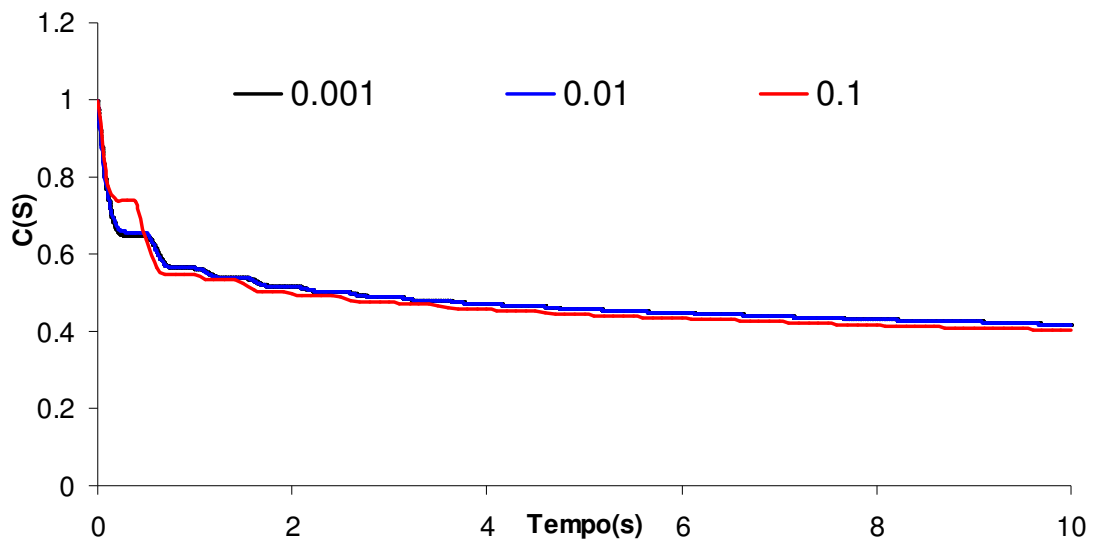


Figura 43 – Variação da pseudorigidez para diferentes incrementos de tempo.

Tanto a pseudorigidez como a pseudodeformação apresentam um comportamento parecido com a variação das tensões viscoelásticas, isto é, a variação do incremento de tempo de 0.01s para 0.001s não apresenta mudanças significativas no resultado final. Assim, não se justifica o uso de um valor de  $\Delta t$  menor do que 0.01s.

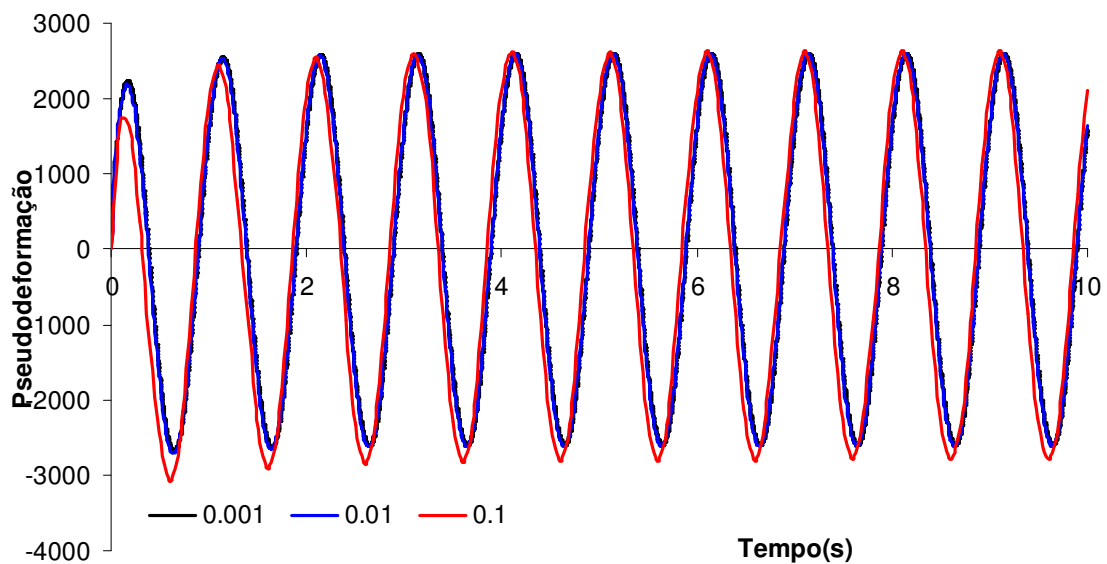


Figura 44 – Variação da pseudodeformação para diferentes incrementos de tempo



## CAPÍTULO 6

### COMENTÁRIOS FINAIS

O presente trabalho discutiu sobre vários modelos para tratamento das relações constitutivas em materiais asfálticos. Dentre os modelos apresentados destacam-se duas características que esse trabalho se dispôs a tratar: temperatura e dano. Pode-se observar que o tratamento dado à temperatura se traduziu em um algoritmo incremental para análise viscoelástica de pavimentos através do Método dos Elementos Finitos. Este algoritmo é baseado na discretização no tempo da integral de convolução e na representação do módulo de relaxação como uma série de Prony.

Com relação ao efeito da temperatura, este foi incluído na formulação apresentada a partir da hipótese de que as misturas asfálticas apresentam comportamento termo-reologicamente simples. Esta hipótese tem sido confirmada por diversos trabalhos e é bastante utilizada na caracterização viscoelástica de misturas asfálticas. Pode-se ainda perceber que o algoritmo é eficiente do ponto de vista computacional uma vez que as variáveis, como tensões e deslocamentos, só dependem de seus valores no instante de tempo anterior.

A análise do pavimento mostrou a importância da consideração dos efeitos da temperatura no comportamento de pavimentos asfálticos. Verificou-se um aumento significativo das deflexões dos pavimentos com o aumento da temperatura, devido à redução da rigidez do revestimento asfáltico causada por este aumento. Esta pode ser uma das explicações para o problema das elevadas deflexões observadas nos pavimentos urbanos em várias cidades no Brasil onde as temperaturas são elevadas e os ônibus urbanos trafegam em baixa velocidade.

No que diz respeito às tensões horizontais observa-se também um grande efeito da temperatura, havendo uma redução das tensões máximas na base do revestimento com o aumento da temperatura. Verifica-se ainda uma inversão no sinal das tensões, de tração para compressão, para o caso de temperaturas elevadas. Esta inversão mostra que o revestimento deixa de trabalhar em flexão o que acarreta redução na área de transferência das tensões verticais e aumento destas tensões nas subcamadas do pavimento. Portanto, a elevação da temperatura acarreta o aumento da possibilidade de deformações permanentes no pavimento, que é um problema bastante comum nas rodovias localizadas em regiões tropicais.

O presente trabalho apresentou ainda um algoritmo incremental para análise de materiais asfálticos considerando o efeito do dano através da abordagem da Mecânica do Dano Contínuo utilizando o Método dos Elementos Finitos. Este algoritmo também é baseado na discretização no tempo da integral de convolução, na representação do módulo de relaxação como uma série de Prony e no Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica.

O algoritmo é bastante eficiente do ponto de vista computacional uma vez que as variáveis, como tensões e deformações, só dependem de seus valores no instante de tempo anterior. Para o caso 2D ter-se-ia ainda o fato de que a matriz de rigidez seria constante para incremento de tempo constante quando não houver dano. Os resultados obtidos no exemplo de validação estão em concordância com a solução obtida a partir de ensaios de laboratório encontrados no trabalho de Mun e Geem (2009) para montagem da curva  $C(S) \times S$  e do comportamento da tensão no tempo. A mesma concordância ocorreu com os valores numéricos encontrados na literatura.

A análise do material representado pela Série de Prony na Tabela 3 mostrou a importância da consideração dos efeitos de danificação na simulação do comportamento de materiais asfálticos. A presença do dano reduziu a rigidez do material, fazendo com que os valores da tensão diminuíssem com o tempo, comportamento inverso ao apresentado pelo material viscoelástico linear sem dano.

O efeito do dano na modelagem de materiais viscoelásticos lineares submetidos a cargas cíclicas também foi avaliado. A importância destas análises reside no fato de pavimentos asfálticos estarem sujeitos a cargas cíclicas mecânicas (passagem intermitente de veículos) e térmicas.

Os exemplos de materiais asfálticos submetidos à deformação aplicada mostraram que a relação tensão *versus* deformação assume diferentes comportamentos dependendo dos valores de frequência e amplitude adotados. Para valores relativamente altos de frequência, os valores de tensão são inversamente proporcionais aos valores crescentes de amplitude. Isto ocorre porque uma carga maior intensifica o processo de dano, diminuindo a pseudorigidez do material, diminuindo, conseqüentemente, o valor da tensão. Contudo, para baixas frequências, este comportamento se inverteu.

Os resultados obtidos mostraram ainda um comportamento condizente com os princípios da Termodinâmica. O parâmetro de dano permaneceu constante nos momentos de descarregamento e aumentou quando o material foi submetido à nova aplicação de deformação. Outro resultado esperado e ocorrido diz respeito ao ângulo de

fase que é usado na caracterização de materiais viscoelásticos sob carregamentos harmônicos. Observou-se que de fato o caminho das deformações distorcia do caminho das tensões, mostrando que a defasagem esperada ocorreu.

Por fim, o estudo do incremento de tempo mostrou que, com a discretização os resultados melhoravam, chegando a um ponto onde o custo computacional da solução já não justifica menores incrementos de tempo, incluindo o fato de que para determinados valores de incremento de tempo as respostas praticamente permaneciam as mesmas.

Observa-se que em vários aspectos os modelos implementados apresentam bons resultados. Observou-se boa concordância entre os resultados de laboratórios e numéricos para o caso de dano e entre soluções analíticas e numéricas para o efeito da temperatura. O presente trabalho mostrou que, de fato, a consideração dos efeitos da temperatura e do dano tem influência significativa nas respostas das misturas asfálticas. Entende-se por tanto, que a consideração destes efeitos no dimensionamento do pavimento deve ser avaliada.

### **6.1. Sugestões de Trabalho Futuros**

Dentre as recomendações para trabalhos futuros citam-se:

- Expansão do modelo de dano para duas e três dimensões;
- Tratamento da temperatura variável dentro da camada de revestimento asfáltico, uma vez que a incidência do calor se dá predominantemente no topo da camada e este tende a diminuir com o aumento da profundidade;
- Incorporação do efeito da temperatura no modelo viscoelástico linear com dano;
- Realização de um estudo comparativo entre as medidas de deslocamento vertical no revestimento asfáltico obtidas nas análises computacionais e as encontradas no laboratório e em campo;
- Estudo do cálculo do *shift-factor* a partir de outras equações e seus impactos nas respostas do pavimento;
- Uso de um incremento de tempo variável durante a discretização do problema.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abu Al-Rub, R. K., Masad, E. A., Huang, C. W. (2009). Improving the sustainability of asphalt pavements through developing a predictive model with fundamental material properties. Final Report Submitted to Southwest University Transportation Center, Report; 1–45.
- Abdel-Tawab, K. and Weitsman, Y.J., “A coupled viscoelasticity/damage model with application to swirl-mat composites”, *Internat. J. Fracture* 7, 1998, 351–380.
- Ali, H. A., e Tayabji, S. D., (1998) “Evaluation of mechanistic-empirical performance prediction models for flexible pavements.”, Transportation Research Board.
- Allen, D.H. and Searcy, C.R. (2000). “Numerical Aspects of a Micromechanical Model of a Cohesive Zone.” *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 19, No. 3, pp. 240-248.
- Allen, D.H. and Searcy, C.R. (2001). “A Micromechanical Model for a Viscoelastic Cohesive Zone.” *International Journal of Fracture*, v. 107, p. 159-176.
- Allen, D.H., Lo, D.C. and Zocher, M.A., ‘Modeling of damage evolution in laminated viscoelastic composites’, *Internat. J. Damage Mech.* 6, 1997, 5–22.
- Araujo, P.C., Soares, J.B., Holanda, A.S., Parente, E.P., Evangelista, F. (2010) “Dynamic Viscoelastic Analysis of Asphalt Pavements using Finite Element Formulation”. *Road Materials and Pavement Design*. Vol 11 pg 409 to 433.
- Bathe, K.J. (1996) *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice Hall.
- Bechara, M.F.; Faxina, A.L.; Fabbri, G.T.P.; Soares, J.B.; Soares, S.A. *Avaliação dos Efeitos dos Envelhecimentos a Curto e Longo Prazos por Meio de Curvas Mestras*. 19º Encontro de Asfalto, Rio de Janeiro/RJ, CD-ROM, 2008.
- Bernucci, L. B., Soares, J.B et al. *Pavimentação Asfáltica: Formação Básica para Engenheiros*. Petróbras-Asfaltos. Rio de Janeiro. 2007.
- Benevides, S. 2000. *Análise Comparativa dos Métodos de Dimensionamento dos Pavimentos Asfálticos: Empírico do DNER e da Resiliência da COPPE/UFRJ em rodovias do Estado do Ceará [Rio de Janeiro] 2000*.
- Barenblatt, G. I. (1962) *The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture*. *Advances in Applied Mechanics*, v. 7, p. 55-129.
- Bonnaure, F.; Gest, G.; Gravois, A. e P. Uge (1977) *A New Method of Predicting the Stiffness of Asphalt Paving Mixtures*, *Proceedings, Association of Asphalt Paving Technologists*, Vol. 46, pp. 64-100.
- Boussinesq, J., 1885 . *Application des Potentiels a l'etude de l'equilibre et du Mouvement des Solids Elastiques* ; Gauthier-Villars, Paris.

- Brown S.F., Determination of Young's Modulus for Bituminous Material in Pavements Design, Highway Research Record, Vol. 431, 1973, p. 38-49.
- Burmister, D. M., 1943. "The Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems and Applications to the Design of Airport Runways," Proceedings, Highway Research Board, Vol. 23, pp. 126-144.
- Burmister, D. M., 1945. "The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Soil Systems," Journal of Applied Physics, Vol. 16, pp. 84-94, 126-127, 296-302.
- Castelo Branco, V.T. F, Masad, E, Little, D. N, Soares, J. B. (2006) Análise do dano por fadiga em amostras de mástique utilizando ensaios a tensão e a deformação controlada. 18º Encontro de Asfalto. Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás. (IBP), Rio de Janeiro, RJ.
- Chabot A., Tamagny P., Poché D. , Duhamel D. (2006). Visco-elastic modelling for asphalt pavements – software ViscoRoute. 10th International Conference on Asphalt Pavements. Québec.
- Chapra, S. C., Canale, R. P. (1998). Numerical Methods for Engineers. McGraw-Hill, Inc. 2 second edition.
- Cheung, C.Y. (1995). Mechanical Behavior of Bitumens and Bituminous Mixtures. Ph. D Dissertation. University of Cambridge, Cambridge, UK.
- Christensen, R. M. (1982) Theory of Viscoelasticity. Dover, New York, NY, USA, 2nd Edition.
- Christensen, D. W. (2002). NCHRP Project 9-25 Quarterly Report to the National Cooperative Highway Research Program.
- Chehab, G., Kim, Y. R., Schapery, R. A., Witzak, M. W., and Bonaquist, R. (2003). "Characterization of Asphalt Concrete in Uniaxial Tension Using a Viscoelastoplastic Continuum Damage Model." Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists, 72, 315-355.
- CNT (2009), Boletim Estatístico. Site da Confederação Nacional do Transporte – CNT, <http://www.cnt.org.br/>. Acesso em Junho de 2010.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., de Witt (2002). Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons.
- Daniel, J. S. and Kim, Y. R. (2002). "Development of a Simplified Fatigue Test and Analysis Procedure Using a Viscoelastic, Continuum Damage Model." Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists, 71, 619-650.
- Driemeier, L., (1995). Contribuição ao Estudo da Localização de Deformações com Modelos Constitutivos de Dano e Plasticidade. Tese de Doutorado. São Carlos. SP.

- DNIT. 2005. Manual de pavimentação. 3. ed. Rio de Janeiro: DNIT/Instituto de Pesquisas Rodoviárias.
- Dubois, F., Arfaoui, M. Laveissiere, D., Petit, C. (1999). A Finite Element Thermoviscoelastic Model: Application to Pavement Structures. 13th Engineering Mechanics Conference, ASCE, Baltimore.
- Dugdale, D. S. (1960) Yielding of Steel Sheets Containing Slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 8, p. 100-104.
- Freitas, F.A.C., Soares, J.B., and Allen, D.H. (2005). Determinação experimental de parâmetros de dano viscoelásticos em misturas asfálticas. Proceedings of ANPET, Brasil.
- Duncan, J.M., Monismith, C.L. e Wilson, E.L. (1968) Finite Element Analysis of Pavements. HRR 228.
- Elseifi, M.A., Al-Qadi, I.L., Yoo, P.J., (2006). Viscoelastic Modeling and Field Validation of Flexible Pavements. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 132, No 2, p. 172-178.
- Evangelista Jr, F., Parente Jr, E. Holanda, A. S, Soares, J. B. (2006) *Análise quasi-estática e dinâmica de pavimentos asfálticos*. XX Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes (ANPET), Brasília, DF.
- Farris, R.J., ‘The stress-strain behavior of mechanically degradable polymers’, in *Polymer Networks: Structure and Mechanical Properties*, Chompff and S. Newman (eds.), Plenum Publishing Co., 1971.
- Freitas, F.A.C., Soares, J.B., and Allen, D.H. (2005). Determinação experimental de parâmetros de dano viscoelásticos em misturas asfálticas. Proceedings of ANPET, Brasil.
- Freitas, F.A.C., (2007). A theoretical and Experimental Technique to Measure Fracture Properties in Viscoelastic Solids. Tese de Doutorado. Universidade de Nebraska em Lincoln. 133pg.
- Gibson, N. H., Schwartz, C. W., Schapery, R. A., and Witczak, M. W. (2003). “Viscoelastic, Viscoplastic, and Damage Modeling of Asphalt Concrete in Unconfined Compression.” *Journal of the Transportation Research Board, TRB*, 1860, 3-15.
- Goodrich, J. L. (1988) Asphalt and Polymer Modified Asphalt Properties Related to the Performance of Asphalt Concrete Mixes. *Asphalt Paving Technology*, v. 57, p. 116–175.
- Ha, K. and Schapery, R. A., (1998) *A Three-Dimensional Viscoelastic Constitutive Model for Particulate Composites with Growing Damage and its Experimental Validation*. *International Journal of Solids and Structures*, v. 35, n. 26/27, p. 3497-3517.

- Harichandran, R. S., Yeh, M. S. and Baladi, G. Y.(1990) *MICHPAVE: A Nonlinear Finite Element Program for the Analysis of Flexible Pavements*, Transportation Research Record, No. 1286.
- Holanda, A. S, Parente Jr, E, Araújo, T. D. P; Melo, L. T. B, Evangelista Jr, F, & Soares, J, B.,(2006). *Finite Element Modeling of Flexible Pavements*. In XXVII Iberian Latin-American Congress on computational Methods in Engineering (CILAMCE), Belém, Pará.
- Huang, Y. H, (2004). *Pavement Analysis and Design. 2.ed. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, USA.*
- Huang, C. W., (2008). *Development and numerical implementation of nonlinear viscoelastic-viscoplastic model for asphalt materials*. Dissertação, Texas A&M University.
- Hutchinson, J. W., *Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 16, 13-31, 1968
- Hutchinson, J. W. and Paris, P. C., *Stability analysis of J-controlled crack growth*, Elastic-elastic Fracture, ASTM STP668, 37-64, 1979.
- Knauss, W. G. (1974) On the Steady Propagation of a Crack in a Viscoelastic Sheet: Experiments and Analysis. In: Kausch, H. H.; J. A. Hassell e R. I. Jaffee (eds.) *Deformation and Fracture of High Polymers*. Ed. Plenum Press, p. 501-541.
- Klompfen, E.T.J., Govaert, L.E., (1999). *Nonlinear Viscoelastic Behaviour of Thermorhologically Complex Materials. Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 3, No 1, p. 49-69.
- Kim, Y. R., and Little, D. N. (1990). "One-Dimensional Constitutive Modeling of Asphalt Concrete." Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 116(4), 751-772.
- Kim, Y. R., and
- Kim, Y.R., H.J. Lee, e D.N. Little. (1997) Fatigue Characterization of Asphalt Concrete Using Viscoelasticity and Continuum Damage Theory, Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists, Vol. 66, pp. 520-569.
- Kim, Y., Little, D. N., and Song, I. (2003). "Effect of Mineral Fillers on Fatigue Resistance and Fundamental Material Characteristics: Mechanistic Evaluation." Journal of the Transportation Research Board, TRB, 1832, 1-8.
- Lakes, R. S. (1998). *Viscoelastic Solids*. CRC Press.
- Lee, H. J. (1996). *Uniaxial Constitutive Modeling of Asphalt Concrete Using Viscoelasticity and Continuum Damage Modeling*. PhD thesis, Civil Engineering Department, North Carolina University, USA.

- Lee, H. J., Daniela, J. S. and Kim, Y. R. (2000). Continuum Damage Mechanics-Based Fatigue Model of Asphalt Concrete. *Journal of Material Civil Engineering*
- Lee, H. J., Kim, Y. R, and Lee, S. W. (2003). “Prediction of Asphalt Mix Fatigue Life with Viscoelastic Material Properties.” *Journal of the Transportation Research Board, TRB, 1832, 139-147.*
- Lee, H. J., Daniel, J. S., and Kim, Y. R. (2000). “Continuum Damage Mechanics-Based Fatigue Model of Asphalt Concrete.” *Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE, 12(2), 105-112.*
- Lemaitre, J; Chaboche, J. *Mechanics of Solid Materials.* Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.
- Lu, Y., Wright, P., (2000). *Temperature Related Visco-Elastoplastic Properties of Asphalt Mixtures. Journal of Transportation Engineering, Vol. 16, No 1, p. 58-65.*
- Lu, Y., Wright, P., (1998). Numerical approach of visco-elastoplastic analysis for asphalt mixtures. *Composite Structures; Vol 69:139–147.*
- Masad, E., Tashman, L., Little, D., and Zbib, H. (2005). “Viscoplastic Modeling of Asphalt Mixes with the Effects of Anisotropy, Damage and Aggregate Characteristics,” *Journal of Mechanics of Materials, 37(12), 1242-1256.*
- Matsuda, J. R., *Análise de fadiga em materiais dúcteis através de uma formulação localmente acoplada da Mecânica do Dano Contínuo, 2008, Dissertação. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.*
- Motta, L. M. G., 1991, *Método de Dimensionamento de Pavimentos Flexíveis; Critério de Confiabilidade e Ensaio de Cargas Repetidas.* Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Medani, T. O., Huurman, M. (2003). *Constructing the Stiffness Master Curves for Asphaltic Mixes.* ISSN 0169-9288.
- Medina, J., Mota, L.M.G. (2005). *Mecânica dos Pavimentos. 2ª edição. 574p.* Editora UFRJ. Rio de Janeiro. RJ
- Medeiros Junior, M. S. (2006) *Estudo de Interconversão entre o Módulo Complexo e a Creep Compliance na Caracterização de Misturas Asfálticas.* Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, Fortaleza, 123 pg.
- Motta, L.M. G., Medina, J. (2005) *Mecânica dos Pavimentos.* Rio de Janeiro, Segunda Edição.
- Muliana, A., Khan, K. A. (2008). A time-integration algorithm for thermo-rheologically complex polymers. *Computational Materials Science.* Vol. 41, pp. 576-588.



- Mun, S. (2003). “Nonlinear Finite Element Analysis of Pavements and its Application to Performance Evaluation.”, Tese de Doutorado. 105 páginas. Universidade da Carolina do Norte em Raleigh.
- Mun, S., Geem, Z.W. (2009). “ Determination of viscoelastic and damage properties of hot mix asphalt concrete using a harmony search algorithm”. *Mechanics of Materials*, 24, 339-353
- Mun, S., Kim Y. R (2005).” Continuum Damage Finite Element Modeling of Asphalt Concrete” *Journal of Civil Engineering*, Vol.9, No 3. 205-211.
- Nchrp – National Cooperative Highway Research Program. Guide for Mechanistica-Empirical Design of New and Rehabilitation Pavement Structure. Relatório final NCHRP 1-37A. Champaign, Illinois, 2004.
- Needleman, A. (1987) A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding. *Journal of Applied Mechanics*, v. 54, p. 525-531.
- Park, S. W., Kim, Y. R., and Schapery, R. A. (1996). “A Viscoelastic Continuum Damage Model and Its Application to Uniaxial Behavior of Asphalt Concrete.” *Mechanics of Materials*, 24, 241-255.
- Park, S. W. and Schapery, R. A. (1997) A Viscoelastic Constitutive Model for Particulate Composites with Growing Damage. *International Journal of Solids and Structures*, v. 34, n.8, p.931-947
- Perzyna P. (1971). Thermodynamic theory of viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics*;
- Raad, L., and Figueroa, J. L. (1980), Load response of transportation support system, *Journal of Transportation Engineering*, ASCE, v. 106, pp. 111–128.
- Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material*, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 16, 1-12, 1968.
- Roylance, D. (2001). *Engineering Viscoelasticity*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Saadeh, S. Masad, E. Little, D., (2007). Characterization of hot mix asphalt using anisotropic damage viscoelasticviscoplastic model and repeated loading. *ASCE Journal of Materials in Civil Engineering*; Vol 19:912–924.
- Sawant, S. Muliana, A. (2008). *A thermo-mechanical viscoelastic analysis of orthotropic materials. Composite Structures*. Vol. 83, pp. 61-72.
- Schapery, R. A. (1975) *A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media I. Theoretical development*. *International Journal of Fracture*, v. 11, pp. 141-159.
- Schapery, R. A. (1974) A nonlinear constitutive theory for particulate composites based on viscoelastic fracture mechanics. In *Proc. of the 1 lth Meeting of the JANNAF*

*Structures & Mechanical Behavior Working Group*, Chemical Propulsion Information Agency, Publication No. 253.

Schapery, R.A. (1975a). "A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media; Part I: Theoretical Development." *International Journal of Fracture*, 11(1), 141-159.

Schapery, R.A. (1975b). "A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media; Part II: Approximate Methods of Analysis." *International Journal of Fracture*, 11(3), 369-387.

Schapery, R. A. (1975c) A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media; Part III: Analysis of Continuous Growth. *International Journal of Fracture*, v. 11, n. 4, p. 549-562.

Schapery, R. A. (1981) On a viscoelastic deformation and failure behavior of composite materials with distributed flaws. In 1981 *Advances in Aerospace Structures and Materials* (S. S. Wang and W. J. Renton), ASME, New York, AD-01, pp. 5-20.

Schapery, R. A. (1982) Models for damage growth and fracture in nonlinear viscoelastic particulate composites. In *Proc. Ninth U.S. National Congress of Applied Mechanics*, Book No. H00228 (ed. Y. H. Pao), ASME, New York, pp. 237-245.

Schapery, R. A. (1984). "Correspondence Principles and a Generalized J-Integral for Large Deformation and Fracture Analysis of Viscoelastic Media." *International Journal of Fracture*, 25, 195-223.

Schapery, R. A. (1987a) Deformation and fracture characterization of inelastic composite materials using potentials. *Polymer Engng and Sci.* 27, 63-76.

Schapery, R. A. (1987b) Nonlinear constitutive equations for solid propellant based on a work potential and micromechanical model. In *Proc. 1987 JANNAF Structures and Mechanical Behavior Meeting*, 17-19 March, CPIA, Huntsville, AL.

Schapery, R. A. (1989) Mechanical characterization and analysis of inelastic composite laminates with growing damage. *Mech. Comp. Mat. and Structures*, ASME AMD, 100, 1-9.

Schapery, R. A. (1990a) A Theory of Mechanical Behavior of Elastic Media with Growing Damage and other Changes in Structure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.38, p. 215-253.

Schapery, R. A. (1990b) Simplifications in the behavior of viscoelastic composites with growing damage. In *Proc. IUTAM Symposium in Inelastic Deformation of Composite*.

Schapery, R. A. (1991) Analysis of damage growth in particulate composites using a work potential. *Comp. Engng* 91, 167--182.

Schapery, R. A. and Sicking, D. L. (1995) On nonlinear constitutive equations for

elastic and viscoelastic composites with growing damage. In *Mechanical Behavior of Materials* (ed. A. Bakker), Delft University Press, Delft, The Netherlands, pp. 45-76.

- Schapery, R.A., (1999). Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations with growing damage. *International Journal of Fracture*.
- Shames, I. H; Cozzarelli, F. A. (1997) *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Taylor & Francis, Revised Printing.
- Shen, Y. P.; Hasebe, N.; Lee, L. X. (1995) *The finite element method of three-dimensional nonlinear viscoelastic large deformation problems*. *Computers & Structures*, v. 55, n. 4, pp. 659-666.
- Simo, J.C. (1987), *On a fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 60, 153–173.
- Simo, J; Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer.
- Simulia, 2007. ABAQUS/Standard User's Manual - Version 6.7, Providence, RI, USA.
- Soares, J. B. e Souza, F. (2002) *Verificação do Comportamento Viscoelástico Linear em Misturas Asfálticas*. Anais do 16º Encontro de Asfalto, IBP, Rio de Janeiro.
- Souza, F.V. (2005) “Modelo Multi-Escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos Suscetíveis ao Dano”, Master’s Thesis, Universidade Federal do Ceará, Brasil.
- Uzan, J. (1996), “Asphalt Concrete Characterization for Pavement Performance Prediction,” *Association of Asphalt Paving Technologists*, 65, 573-607.
- Taylor, R.L., Pister, K.S., Goudreau, G.L. (1970). Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, No. 1, p. 45-59.
- Tvergaard, V. (1990) Effect of Fiber Debonding in a Whisker-Reinforced Metal. *Materials Science and Engineering A: Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing*, v. A125, n. 2, p. 203-213.
- Tashman, L., Masad, E., Little, D. N., and Lytton, R. L. (2004). “Damage Evolution in Triaxial Compression Tests of HMA at High Temperatures.” *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, 73, 53-87.
- Vrastsanos, L.A., and Farris, R. (1993) A predictive model for the mechanical behavior of particulate composites. Part I: Model derivation. *Polymers Engineering and Sc*;
- Yoon, C. and Allen, D.H. (1999). “Damage Dependent Constitutive Behavior and Energy Release Rate for a Cohesive Zone in a Thermoviscoelastic Solid.” *International Journal of Fracture*, Vol. 96, 56-74.

- Wong, W., Zhong, Y.: Flexible pavement thermal stresses with variable temperature. *Journal of Transportation Engineering*. 126, 46–49 (2000).
- Zienkiewicz, O.C, Taylor, R.L.E. (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Massachusetts. Elsevier.
- Zocher, M.A. (1995) A thermoviscoelastic finite element formulation for the analysis of composites. PhD dissertation, Texas A&M University, College Station, EUA.
- Zocher. M.A., Groves, S.E., Allen, D.H. (1997). A Three-Dimensional Finite Element Formulation for Thermoviscoelastic Orthotropic Media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, p. 2267-2288.
- Zhong, Y., Geng, L. (2009). Thermal stresses of asphalt pavement under dependence of material characteristics on reference temperature. *Mech Time-dependent Materials*, Vol. 13 pp. 81-91.