



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ZOOTECNIA**

RAFAEL RODRIGUES DA SILVA

**MODELOS NÃO-LINEARES PARA AJUSTE DE CURVAS DE LACTAÇÃO
DE VACAS GIR LEITEIRO**

**FORTALEZA
2018**

RAFAEL RODRIGUES DA SILVA

MODELOS NÃO-LINEARES PARA AJUSTE DE CURVAS DE LACTAÇÃO DE
VACAS GIR LEITEIRO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Zootecnia, do Centro de Ciências Agrárias da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Zootecnia. Área de concentração: Melhoramento e Produção Animal.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Pinheiro da Silva

FORTALEZA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S583m Silva, Rafael Rodrigues.
Modelos não lineares para ajuste de curvas de lactação de vacas Gir Leiteiro / Rafael Rodrigues Silva. –
2018.
31 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências Agrárias, Programa de
Pós-Graduação em Zootecnia, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Luciano Pinheiro da Silva.

1. Genética e Melhoramento Animal. I. Título.

CDD 636.08

RAFAEL RODRIGUES DA SILVA

MODELOS NÃO-LINEARES PARA AJUSTE DE CURVAS DE LACTAÇÃO DE VACAS
GIR LEITEIRO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Zootecnia, do Centro de Ciências Agrárias da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Zootecnia. Área de concentração: Melhoramento e Produção Animal.

Aprovada em: 07/02/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luciano Pinheiro da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof.^a Dra. Sônia Maria Pinheiro de Oliveira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Henrique Torres Ventura
Associação Brasileira dos Criadores de Zebu (ABCZ)

AGRADECIMENTOS

A Deus, escritor da vida, que nos permite respirar todos os dias e aproveitar das suas graças.

À Universidade Federal do Ceará, pelas oportunidades de aprendizado oferecidas.

À minha mãe, Vera Lúcia Rodrigues da Silva, pelos 26 anos de muito apoio e amor. Uma mulher que sempre me ensinou o valor da vida e do esforço e a quem eu tenho o orgulho de chamar de mãe. Te amo, mãe.

Ao meu pai, João Clóvis da Silva, por ter tido sempre o orgulho de me ter como filho e pelo apoio nas minhas escolhas profissionais.

Às minhas irmãs, Raquel, Lucileide, Lucilene e Ana Lúcia, por sempre estarem comigo mesmo à distância.

Aos meus velhos amigos, Luanna Joyce e Widemberg Nobre, pela amizade e momentos de descontração e companheirismo.

Às minhas amigas e cúmplices Marina Pantaleão e Mayara Andrade, pelos inúmeros momentos bons e ruins, de tristeza e felicidade, mas sempre com a certeza de uma amizade verdadeira.

Ao amigo Eduardo Pessoa e sua família, pelo companheirismo e parceria nos momentos bons e ruins, por me acolherem em sua casa como um membro da família, especialmente Dona Alice.

Aos amigos Gleyson Silveira, Theyson Duarte, Walisson Silveira, Érica Pinto e Tafnes Bernardo, pelo companheirismo e momentos de aprendizado e descontração.

Aos meus amigos e família, Priscila, Carlos, Elcio, Deived e Clemen, com quem tive o prazer de conviver por um ano e meio durante o intercâmbio e que, apesar da distância, nunca estiveram longe. *Love you, guys.*

Ao meu orientador Dr. Luciano Pinheiro da Silva, pela orientação, pela paciência e por todo o conhecimento repassado a mim, sempre com muita boa vontade.

À professora Dra. Sônia Maria Pinheiro de Oliveira, pela orientação, pelos conselhos e por ter despertado em mim o interesse por uma área tão fascinante que é o Melhoramento Genético Animal.

Ao Dr. Henrique Torres Ventura, pela disponibilidade em contribuir com o estudo.

À Associação Brasileira dos Criadores de Zebu pela contribuição e fornecimento dos dados utilizados no projeto.

Ao Prof. Magno José Duarte Candido e aos grupos PET Zootecnia e NEEF, pelos anos de parceria e aprendizado.

À Universidade de Wisconsin – River Falls, por ter me acolhido e me dado todo o apoio necessário para um bom intercâmbio durante minha graduação.

Aos amigos Laura Robey, Lindsay Plugger e Logan Berglund, por dividirem comigo alguns dos melhores momentos nos EUA, vocês são incríveis.

“A felicidade não se concretiza no ponto de chegada, mas em vários momentos ao decorrer do caminho. Logo, o mais importante não é o que se vai viver, mas o que está se vivendo”

RESUMO

As informações obtidas da variação na produção de leite durante a lactação dão origem a curva de lactação. Um dos aspectos dessa curva é a maneira que a produção de leite cai após o alcance do pico, que em bovinos leiteiros ocorre por volta dos 45 dias, isso determina se a lactação de um animal é persistente. Objetivou-se ajustar a curva de lactação de vacas primíparas da raça Gir Leiteiro. O arquivo utilizado na avaliação foi fornecido pela ABCZ e continha 125.992 registros do dia do controle de 16.646 vacas, de 1971 a 2016. Cinco modelos não lineares foram avaliados: Wood, Monofásico, Difásico, Modelo de Persistência de Lactação (LPM) e Modelo de Persistência de Lactação Reduzido (LRPM). Os modelos foram ajustados aos dados utilizando-se o método iterativo de Gauss-Newton, pelo procedimento NLIN do programa SAS. Os critérios utilizados para a determinação do melhor modelo foram Critério de Informação Akaike (AIC); Critério de Informação Bayesiano (BIC); Quadrado Médio do Erro (QME); Coeficiente de determinação Ajustado (R^2_{Aj}); Critério de Durbin-Watson (DW) e porcentagem de convergência (%C). A persistência, o pico de produção e o tempo de pico foram calculados de acordo com as funções descritas para cada modelo. Dentre os cinco modelos ajustados, o modelo de Wood foi o que apresentou menores valores de AIC (29,55391), BIC (29,39164) e QME (1,3895), além de maior R^2 ajustado (0,66) e maior porcentagem de convergência (0,99). O modelo de Wood foi o que apresentou melhor ajuste para representação da curva da primeira lactação de vacas Gir Leiteiro.

Palavras-chave: Gir Leiteiro. Primeira lactação. Modelos não lineares.

ABSTRACT

NON-LINEAR MODELS FOR FITTING LACTATION CURVES OF DAIRY GIR COWS

The information obtained from the variation in milk production during lactation are used to make the lactation curve. One aspect of this curve is how the milk yield falls after reaching the peak, which in dairy cattle happens around 45 days after calving, and that determines if an animal is persistent. The objective was to adjust the lactation curve of first order lactations of dairy Gir cows. The file used in the evaluation was provided by ABCZ and contained 125,992 records of the test-day yield of 16,646 cows from 1971 to 2016. Five nonlinear models were evaluated, Wood, Monophasic, Biphasic, Lactation Persistence Model (LPM) and Reduced Lactation Persistence Model (RLPM). Models were adjusted to the data using the iterative method of Gauss-Newton, by the NLIN procedure of the SAS program. The criteria used to determine the best model were the Akaike Information Criterion (AIC); Bayesian Information Criterion (BIC); Mean Square Error (MSE); Adjusted coefficient of determination (R^2_{Aj}); Durbin-Watson criterion (DW) and percentage of convergence (% C). The persistence, peak production and peak time were calculated according to the functions described for each model. Among the five adjusted models, the Wood model presented the lowest AIC (29.55391), BIC (29.39164) and MSE (1.3895), as well as the highest adjusted R^2 (0.66) and percentage of convergence (0.99). The Wood model presented the best goodness of fit for the curve of the first lactation of dairy Gir cows.

Keywords: Dairy Gir. First order lactation. Nonlinear models.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	–	Curvas de Lactação em diferentes níveis de persistência	16
Figura 2	–	Produção de leite diária observada e estimada através do modelo de Wood	24
Figura 3	–	Produção de leite diária observada e estimada através do modelo Monofásico	25
Figura 4	–	Produção de leite diária observada e estimada através do modelo Difásico	25

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Modelos utilizados no ajuste das curvas vacas primíparas da raça Gir Leiteiro	19
Tabela 2	– Equações de persistência de lactação, produção no pico e tempo do pico..	21
Tabela 3	– Valores médios estimados para os parâmetros dos modelos estudados	22
Tabela 4	– Valores de persistência, produção no pico e tempo do pico para os cinco modelos avaliados	23
Tabela 5	– Valores médios dos critérios utilizados para a escolha do modelo de melhor ajuste	26

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REVISÃO DE LITERATURA	14
2.1	Curva de lactação	14
2.2	Gir leiteiro	15
2.3	Persistência de lactação	15
2.4	Modelos matemáticos	18
3	MATERIAL E MÉTODOS	18
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	21
5	CONCLUSÃO	27
	REFERÊNCIAS	27

1 INTRODUÇÃO

Os diferentes estágios de uma lactação podem ser observados e descritos através de uma curva, comumente chamada de curva de lactação. Com a curva é possível observar aspectos como a produção inicial, a produção total, o pico de produção, a fase de secagem, dentre outros. A maneira que a produção de leite cai após o alcance do pico determina se a lactação de um animal é persistente ou não, sendo desejável que essa queda seja suave, em outros termos, que haja maior persistência de lactação. (ZURWAN *et al.*, 2017)

De acordo com Ruvuna *et al.* (1995), a curva de lactação representa a relação entre a produção de leite e o tempo após o parto. A forma padrão da curva de lactação pode ser descrito como um crescimento a uma taxa relativamente alta, até um ponto máximo em que se obtém o pico de produção, da qual há um decréscimo à uma baixa taxa até o fim do ciclo produtivo. A forma resultante da curva de lactação fornece uma valiosa informação sobre a eficiência econômica e biológica do animal ou rebanho (GROSSMANe KOOPS, 1988).

O conhecimento da curva de lactação dos animais é necessário para um manejo mais efetivo em termos de requerimento nutricional e melhoramento genético, sendo uma ferramenta prática e eficiente no controle da produção (BANGARE VERMA, 2017). As curvas de lactação são especialmente importantes quando a tomada de decisão é dependente do tempo. Esta eficiência ocorre pela estimativa do pico produtivo, da produção total por lactação e da persistência de lactação. Modelos de curvas de lactação também são utilizados na predição de futuras produções de um animal.

Podem-se observar diversas formas para a obtenção da curva de lactação, e esta pode ser individual ou para um grupo de animais. Uma alternativa é através da utilização de modelos matemáticos não-lineares, que são capazes de estimar os parâmetros que formarão a curva. A utilidade de um modelo de lactação depende em quão este é eficiente em simular o processo biológico e quão ajustado estará para os fatores não genéticos que podem influenciar na produção (OLORI *et al.*, 1999).

O desenvolvimento de equações matemáticas para predição de fenômenos biológicos deve satisfazer ao menos quatro requisitos básicos: ser matematicamente tratável; apresentar adequação ao conjunto de dados em estudo; ser simples ou pelo menos mais simples entre as possíveis funções; ser coerente e consistente com o sistema biológico a ser descrito (SEARLE, 1971).

Dessa forma, objetivou-se com o presente estudo analisar e escolher o melhor modelo matemático para ajustar a curva da primeira lactação de vacas da raça Gir Leiteiro, bem como calcular a persistência de lactação a partir dos modelos analisados.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Curva de Lactação

A utilidade de um modelo de curva de lactação depende em quão este é eficiente em simular o processo biológico e quão ajustado estará para os fatores não genéticos que podem influenciar na produção (OLORI *et al.*, 1999).

Do ponto de vista científico, há duas aplicações principais para o conhecimento e utilização das curvas de lactação de um rebanho. A primeira se relaciona à forma da curva e de seus componentes, isto é, os seus parâmetros, que podem ser utilizados em programas de melhoramento. A segunda é que as curvas de lactação possibilitam a estimação da produção total de leite, através de produções parciais, contribuindo para uma identificação precoce dos melhores animais (EL FARO, 1996).

A curva de lactação fornece informações valiosas, essenciais para avaliar a eficiência do animal ou rebanho, seja para avaliações genéticas, econômicas ou de saúde dos animais (SHERCHAND *et al.*, 1995; KOÇAKE EKIZ, 2008). Algumas características, tais como a produção de leite diária máxima, dia de lactação máxima, produção de leite e a persistência da lactação podem ser obtidas diretamente dos modelos de curva de lactação. E com essas informações, podem ser utilizadas para melhoramento dos rebanhos e para avaliar os rebanhos em lactação (SWALVE 1995; FADLELMOULA *et al.*, 2007). Além disso, saber o que esperar da produção de um animal, permitiria montar estratégias, principalmente com relação a sua dieta nos vários estágios de lactação, otimizando os gastos e mantendo o melhor rendimento possível (TOZER; HUFFAKER 1999; GRZESIAK *et al.*, 2003). Bianchini Sobrinho (1984), enfatiza que por meio da previsão da produção de leite total de uma vaca, é possível escolher reprodutores e matrizes dentro de um rebanho por meio de seus descendentes, o que antecipa o processo de seleção.

Tekerli *et al.* (2000) acrescentam que nem todas as vacas, ou um determinado grupo de vacas, possuem curvas de lactação iguais, pois, além do componente genético, a magnitude dos parâmetros que determinam sua forma varia segundo a influência de fatores como o rebanho, o ano do parto, a ordem de parição, a idade da vaca e a estação de parição. De acordo com Sölkner e Fuchs (1987), há indicativos da existência de diferenças genéticas para persistência de lactação entre animais, razão pela qual a seleção, para esta característica, possa ser vantajosa.

A seleção de animais objetivando alteração na forma da curva de lactação é facilitada devido à persistência de lactação ser uma característica de herdabilidade moderada e de baixa correlação com a produção leiteira até 305 dias, em bovinos da raça Holandesa (COBUCI *et al.*, 2004).

2.2 Gir Leiteiro

A Gir é uma das raças mais importantes utilizadas na produção de leite em países de clima tropical, pois apresenta boa adaptabilidade a regiões quentes com presença de parasitas e com pastagens de baixa qualidade nutricional. Esta raça é uma das mais utilizadas no Brasil para a produção de leite, principalmente, em cruzamentos com raças taurinas especializadas, como a holandesa, buscando uma maior adaptabilidade, além de melhores desempenhos produtivos em condições tropicais (LEDIC *et al.*, 2002a).

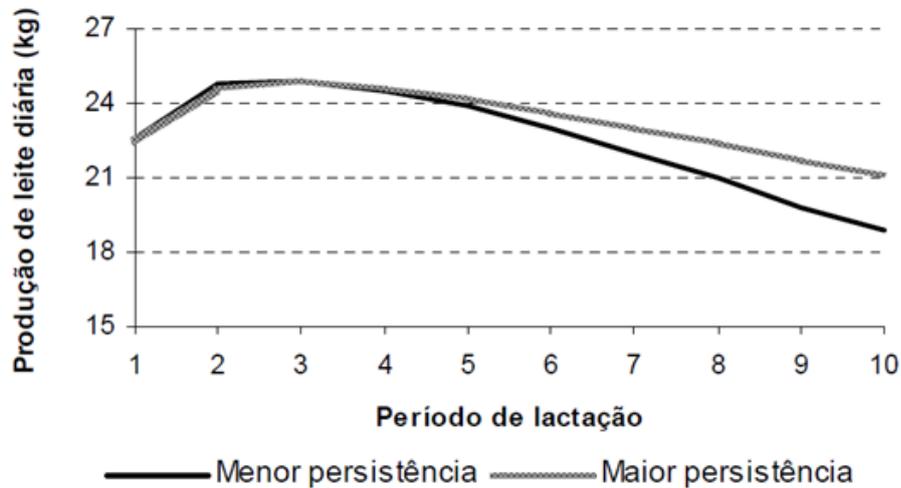
O Brasil foi o primeiro país em fazer avaliação genética para produção de leite na raça Gir (LEDIC *et al.*, 2002). A partir daí, programas de seleção vêm sendo desenvolvidos na tentativa de aumentar o desempenho das fêmeas para esta característica, e a persistência de lactação é uma característica que está começando a ser incluída nos catálogos de avaliação genética para a raça Gir por guardar grande relação com o desempenho produtivo e reprodutivo das fêmeas, motivo para ser incluída nos critérios de seleção.

2.3 Persistência de Lactação

De forma geral, a persistência de lactação é representada pela decadência da produção de leite após o pico, cujos animais mais persistentes são aqueles cujo formato da curva é mais achatado após o pico, conforme é possível ser observado no exemplo da Figura 1 (COBUCI *et al.*, 2003).

Na literatura, há quatro diferentes tipos de quantificação da persistência da lactação. O primeiro tipo usa razões entre produções de leite em diferentes partes da lactação. O segundo é baseado na variação da produção de leite durante a lactação, calculada como desvio-padrão entre as produções no dia do controle. O terceiro tipo é obtido por meio das estimativas de parâmetros de modelos matemáticos que descrevem a curva de lactação. E o último tipo, descrito por Grossman *et al.* (1999), difere dos três primeiros, por expressar a persistência em termos de duração de tempo na qual a produção de leite se mantém constante.

Figura 1. Curvas de Lactação em diferentes níveis de persistência



Fonte: COBUCI *et al.*, (2003)

A primeira referência à persistência de lactação encontrada na literatura foi a de Turner (1925), que a definiu como “porcentagem média da persistência de secreção durante o declínio da lactação”. Vários outros autores relataram abordagens diferentes como seguem: Cupps (1966), como “a capacidade da vaca em manter alta produção de leite até o final da lactação”; Wood (1967), como “a dimensão na qual o pico de produção é mantido”; Grossman *et al.* (1999), como “o número de dias durante o qual um nível constante de produção de leite é mantido”.

Para Gengler (1995), uma definição consistente deveria estar relacionada com a curvatura da lactação, ser de fácil interpretação e ser independente do nível de produção de leite. Dekkers *et al.* (1998) relataram que a escolha entre as diferentes alternativas de mensuração da persistência para uso em programas de melhoramento deve ser baseada nos seguintes critérios: a mensuração da persistência deve ser não correlacionada com a produção em 305 dias; a mensuração da persistência deve apresentar uma substancial herdabilidade e variância genética; a mensuração da persistência deve explicar a maior proporção da variabilidade genética dos fatores que contribuem para a importância econômica da persistência, como custo de alimentação, saúde e reprodução.

Para o produtor, vacas com maiores persistências de lactação são mais viáveis, pois possuem vantagens sobre aquelas que apresentam uma curva mais acentuada após o pico, mesmo que obtenham a mesma produção total. Duas razões básicas (do ponto de vista econômico e biológico) são relatadas na literatura: vacas com menores inclinações na curva de lactação requerem menores quantidades de alimento (concentrado) do que aquelas com

produções muito altas no pico e quedas elevadas na produção após o pico. Estão sujeitas, também, a menores estresses devido à ausência de um elevado pico de produção, o que reduz a incidência de problemas reprodutivos e de doenças metabólicas, aumentando a vida útil dos animais e aumentando também a rentabilidade por indivíduo (MADSEN, 1975; SÖLKNER;FUCHS, 1987; GENGLER, 1995; DEKKERS *et al.*, 1996; VARONA *et al.*, 1997;GROSSMAN *et al.*, 1999).

Vários estudos apontam que a mudança da forma da curva de lactação com intuito de melhorar a persistência é passível de seleção genética (FERRIS*et al.*, 1985;VARONA *et al.*, 1997; REKAYA*et al.*, 2000; TOGASHI;LIN, 2003;TOGASHIe LIN,2004). A exemplo disto,no Canadá e em alguns países da Europa já se inclui a persistência como critério de seleção em seus programas de melhoramento, além das características usuais de produção de leite, gordura, proteína e escore de células somáticas. As vacas com maior persistência ingerem menos alimento para produzir a mesma quantidade de leite produzido por uma vaca com menor persistência, sendo alimentadas de acordo com seus requerimentos, visto que suas curvas de lactação são diretamente relacionadas com sua capacidade de ingestão de alimentos (SHAHRBABA, 1997).

A persistência de lactação está diretamente relacionada com aspectos econômicos da atividade leiteira, pois a melhoria desta persistência pode contribuir para redução de custos no sistema de produção (TEKERLI*et al.*, 2000; JAKOBSEN*et al.*, 2002). Na produção os custos podem ser reduzidos basicamente de três formas: com o barateamento da alimentação dos animais, em que o alimento concentrado pode ser substituído por alimento volumoso (SÖLKNER; FUCHS, 1987); pela produção de leite adicional, obtida de animais com melhores níveis de persistência (DEKKERS*et al.*, 1996; DEKKERS*et al.*, 1998); e pela minimização de problemas associados à saúde e reprodução animal (MADSEN, 1975; SÖLKNER e FUCHS, 1987; REENTS *et al.*, 1996; GROSSMAN*et al.*, 1999).

Para a raça Gir e as raças Zebuínas ou cruzadas de maneira geral, a avaliação genética e a seleção para a persistência da lactação são de grande importância, pois estas raças apresentam curvas com picos bem próximos ao parto da vaca e com baixa persistência, como consequência, a vaca tende a permanecer em lactação por um período menor que o desejável. (ZADRA, 2012).

Embora vários estudos indiquem a importância da utilização dessa característica na avaliação genética de animais (BAR-ANAN e RON, 1985; SÖLKNER e FUCHS, 1987; SINGH, 1995; JAMROZIK *et al.*, 1995,1997,1998; TEKERLI *et al.*, 2000; SCHAEFFER *et*

al., 2000), a maior parte das avaliações genéticas, em diferentes países, não considera a persistência de lactação em seus programas de seleção.

Neste contexto, é notória a importância do estudo da persistência de lactação, entretanto, as definições de persistência utilizadas na literatura são divergentes. Como resultado destas divergências, as medidas de persistência propostas na literatura também são inconsistentes, tornando difícil a comparação entre os estudos com diferentes definições e medidas para persistência. O problema no estudo da persistência está no fato de como expressar a forma da curva de lactação em um único termo. Muitas tentativas têm sido feitas com objetivo de encontrar a melhor maneira de expressá-la.

2.4 Modelos Matemáticos

Segundo Cunha *et al.* (2010), de acordo com a média de produção e a ordem de parto, determinados modelos matemáticos se mostram mais eficientes que outros. Os referidos autores separaram os animais em níveis de produção e subgrupos de acordo com a ordem de parto (1°, 2°, 3° ou mais), e verificaram que os modelos matemáticos estudados apresentavam diferentes ajustes em função dos grupos, sendo que vacas de primeira lactação foram melhor representadas pelo método de Wilmink (1987), animais de baixa produção e terceira lactação, pelo modelo de Wood (1967), que se ajustou para todas ordens de lactação de animais de produção mediana, e Dijkstra (1997) apresentou melhor ajustamento para todas as ordens de lactação do grupo de alta produção.

Modelos matemáticos são muito utilizados na raça Holandesa e em outras raças europeias devido a sua grande importância no âmbito mundial de produção de leite. No Brasil, além da raça Holandesa, o rebanho tem grandes frações de composição genética da raça Gir, sendo a maior parte do rebanho leiteiro nacional mestiço destas duas raças. Porém, a literatura carece de estudos sobre modelos de persistência de lactação para raça Gir Leiteiro.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Os dados analisados são de registros de produção de leite da Raça Gir Leiteiro, provenientes do banco de dados da Associação Brasileira dos Criadores de Zebu (ABCZ). O arquivo continha inicialmente informações da primeira a décima terceira lactação de 29.715 vacas de 1971 a 2016.

Para a utilização das informações foi realizada uma análise prévia dos dados, em que foram eliminados animais com lactação superior a 350 dias, animais cuja diferença entre controles foi maior do que 45 dias, além de animais sem informação das primeiras 4 lactações, ou sem informação de pai, mãe, duração de lactação, data de lactação e fazenda.

Os animais foram agrupados em grupos contemporâneos (GC) formados por fazenda, ano e estação do nascimento, e só foram utilizados os grupos contemporâneos com três animais ou mais, e também com animais que tinham no mínimo quatro informações de controle de lactação. Os arquivos foram organizados por lactação, com informação de número do animal, a produção em cada dia do controle existente e dias em lactação (DEL). Como apenas a primeira lactação foi utilizada, após a consistência dos dados restaram 125.992 informações do dia do controle de 16.646 vacas.

Cinco modelos não-lineares foram utilizados para o ajuste das curvas de lactação: Modelo de Wood (1967); Modelos Monofásico e Difásico (GROSSMAN e KOOPS, 1988); Modelo de Persistência de Lactação (LPM) e Modelo de Persistência de Lactação Reduzido (RLPM) (GROSSMAN *et al.*,1999). As funções que representam cada modelo estão representadas na Tabela 1.

Tabela 1. Modelos utilizados no ajuste das curvas vacas primíparas da raça Gir Leiteiro.

Modelo	Autor	Função
Wood	Wood (1967)	$y_t = at^b * e^{-ct}$
Monofásico	Grossman eKoops (1988)	$y_t = ab(1 - \tanh^2(b(t - c)))$
Difásico	Grossman eKoops (1988)	$y_t = a_1b_1(1 - \tanh^2(b_1(t - c_1))) + a_2b_2(1 - \tanh^2(b_2(t - c_2)))$
LPM	Grossman (1999)	$y_t = y_p + b_1(t - t_1) - r_1b_1 \text{Ln} \left[\frac{e^{t/r_1} + e^{t_1/r_1}}{1 + e^{t_1/r_1}} \right] + r_2b_3 \text{Ln} \left[\frac{e^{t/r_2} + e^{(t_1+P)/r_2}}{1 + e^{(t_1+P)/r_2}} \right]$
RLPM	Grossman (1999)	$y_t = \frac{y_p}{t_1} t - \frac{y_p}{t_1} \text{Ln} \left[\frac{e^t + e^{t_1}}{1 + e^{t_1}} \right] + b_3 \text{Ln} \left[\frac{e^t + e^{t_1+P}}{1 + e^{t_1+P}} \right]$

Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo de Wood é uma função gama incompleta, em que a se aproxima do rendimento de leite inicial após o parto; b é o parâmetro de inclinação para o pico; e c é o parâmetro de declive descendente.

Os modelos monofásico e difásico têm o intuito de corrigir a presença de resíduos autocorrelacionados que são comumente detectados em modelos com base na função gama. No modelo monofásico Y_t representa a produção no tempo t , a é a metade da produção assintótica total, b é a taxa de produção relativa ao parâmetro a (dias⁻¹) e c é o tempo do pico. E no modelo difásico as variáveis têm o mesmo significado, porém existem duas fases.

O Modelo de Persistência de Lactação (LPM) foi desenvolvido para fornecer parâmetros adicionais para medir a persistência, em que y_t é a produção no tempo t , y_p é o nível de rendimento constante; b são as inclinações das linhas retas; t são os tempos de transição; r são as medidas de duração da transição; P é a persistência. O Modelo de Persistência de Lactação Reduzido (RLPM) se baseia no LPM, mas o número de parâmetros é reduzido, em que y_t é a produção no tempo t , t_1 é o tempo em transição da produção ascendente até a produção constante, y_p é nível de produção constante, b_3 é a taxa de declínio na produção do fim da produção constante até o encerramento da lactação e P é a persistência da produção constante.

Os critérios utilizados para avaliar a qualidade de ajuste dos modelos foram os valores médios de: Critério de Informação Akaike (AIC); Critério de Informação Bayesiano (BIC); Quadrado Médio do Erro (QME); Coeficiente de determinação Ajustado (R^2_{aj}); Critério de Durbin-Watson (DW) e Porcentagem de Convergência (%C). As funções que descrevem os avaliadores estão a seguir:

$$AIC = -2\loglike + 2p$$

$$BCI = -2\loglike + p\ln(n)$$

$$QME = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n - p)}$$

$$R^2_{aj} = 1 - \frac{SQR}{SQT} - \left(\frac{p-1}{n-p}\right) \left((-1) - \left(1 - \frac{SQR}{SQT}\right) \right)$$

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

p é o número de parâmetros, n é o número de observações, \loglike é o valor do logaritmo da função de verossimilhança, \hat{y}_i representa os valores estimados y_i representa os valores observados, SQR é a soma de quadrados do resíduo e SQT é a soma de quadrados total. Na função de Durbin-Watson, e_t representa o resíduo no tempo t e e_{t-1} representa o resíduo no tempo $t-1$.

Os modelos foram ajustados aos dados utilizando o método iterativo de Gauss-Newton, pelo procedimento NLIN do programa SAS (SAS, 2001). A convergência foi verificada com a diferença da soma de quadrado de resíduos entre duas iterações consecutivas. O critério de convergência foi calculado pelo número animais que convergiram dividido pelo número total animais no arquivo de primeira lactação.

As curvas de lactação para cada modelo foram elaboradas a partir da média de produção diária dos animais na amostra para cada dia em lactação. Após o estudo dos modelos de curva de lactação, a persistência (PS), a produção no pico de lactação (PP) e o tempo do pico (TP) foram calculados para os modelos de acordo com as equações dos autores na Tabela 2.

Tabela 2. Equações de persistência de lactação, produção no pico e tempo do pico.

Função	Autor
PS = $-(b+1)\ln(c)$	Wood (1967)
PP = $a(b/c)^b \exp^{-b}$	
TP = b/c	
PS = $2b_2^{-1}$	Grossman e Koops (1988)
PP = $a*b$	
TP = c	
PS = P	Grossman <i>et al.</i> (1999)
PP = y_p	
TP = t_1	

Fonte: Elaborada pelo autor.

PS = persistência; PP = produção no pico; TP = tempo do pico.

As curvas de lactação para cada modelo foram elaboradas a partir da média de produção diária dos animais na amostra para cada dia em lactação.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados dos valores médios dos parâmetros estimados para cada modelo encontram-se na Tabela 3. De forma geral observou-se que os modelos de Wood, Monofásico, Difásico e RLPM apresentaram a maioria dos parâmetros de mais fácil interpretação biológica, ou seja, valores mais próximos da realidade (VARANIS *et al.*, 2016), enquanto o modelo LPM apresentou coeficientes médios mais difíceis de serem interpretados biologicamente.

A presença de atipicidade também foi observada no momento da elaboração das curvas, onde os modelos LPM e RLPM apresentaram curvas não correspondentes à uma curva de lactação típica, com valores discrepantes e até negativos, indicando a dificuldade de utilização desses modelos descrever os dados do presente estudo.

Tabela 3. Valores médios estimados para os parâmetros dos modelos estudados

Parâmetros	Modelos				
	Wood	Monofásico	Difásico	LPM	RLPM
a_1	8,112669	8796,257	576,3499	-	-
b_1	0,367703	0,002182	0,009992	-0,03502	-
c_1	0,00581	4,571722	39,56041	-	-
a_2	-	-	5035,2	-	-
b_2	-	-	0,001338	-	-
c_2	-	-	150	-	-
t_1	-	-	-	11089,28	2,676133
b_3	-	-	-	0,030564	-0,031449
P	-	-	-	2573,186	14,64906
y_p	-	-	-	1112,963	12,30492
r_1	-	-	-	21030,41	-
r_2	-	-	-	1799334	-
r_3	-	-	-	100	-

Fonte: Elaborada pelo autor.

a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 são parâmetros específicos dos modelos. Nos modelos LPM e RLPM t_1 = tempo de transição da produção crescente até a produção constante, b_3 = taxa de declínio do final da produção constante até o fim da lactação, P = persistência (dias de produção constante) y_p = nível de produção constante, r_1 , r_2 e r_3 são as durações das transições entre fases.

Os valores encontrados para persistência, produção no pico e tempo do pico encontram-se na Tabela 4. Os modelos de Wood e Monofásico tenderam a superestimar a produção média diária, com uma produção no pico estimada em 25,81 e 19,19 kg e pico aos 63,28 e 4,57 dias, respectivamente para os modelos de Wood e Monofásico (Tabela 4). Segundo Cunha *et al.* (2010), existem criticismo sobre o modelo de Wood devido a sua tendência em superestimar ou subestimar a produção de leite do meio até o fim da lactação. No presente estudo a superestimação foi observada durante quase todo o período de lactação.

O modelo difásico superestimou a produção inicial, porém subestimou a produção no restante da lactação, estimando a produção no pico na primeira fase em 5,70 kg e em 6,54 kg na segunda fase, totalizando 12,5 kg, além do pico observado aos 39 dias na primeira fase e 150 dias na segunda fase (Tabela 4). O modelo LPM estimou valores atípicos para o pico de produção e o modelo RLPM estimou um pico de 12,30 kg aos 2,67 dias, ou sejam, logo após o parto.

Tabela 4. Valores de persistência, produção no pico e tempo do pico para os cinco modelos avaliados

Modelos	Variáveis		
	PS	PP (Kg)	TP (dias)
Wood	7,04	25,81	63,29
Monofásico	-	19,19	4,57
Difásico (1ªFase)	-	5,76	39,56
Difásico (2ªFase)	373,65	6,74	150
LPM	2573,186	1112,963	11089,28
RLPM	14,64	12,30	2,67

Fonte: Elaborada pelo autor.

PS = persistência; PP = produção no pico de lactação e TP = tempo do pico.

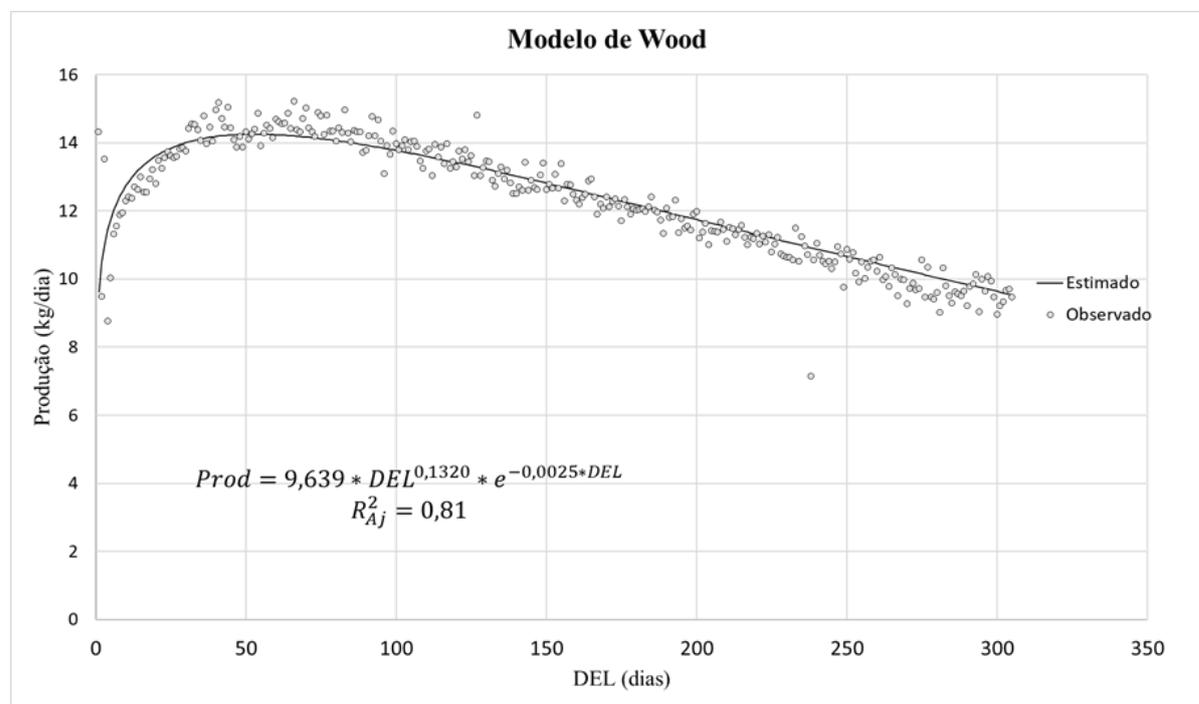
A persistência observada pelo modelo de Wood foi de 7,04, que não apresenta unidade por ser definida como a dimensão em que o pico de produção é mantido. Resultados parecidos foram observados por Rekik *et al.*, (2003) que ao avaliar a persistência de vacas holandesas encontrou valores entre 6,93 e 7,41 para animais de primeira lactação e observou que essas vacas foram mais persistentes do que as vacas de segunda lactação em diante. Por outro lado, Bangar *et al.*, (2017), trabalhando com vacas Gir, encontrou o valor de apenas 2,60 para animais em primeira lactação, mas também constatou que esses eram os mais persistentes.

Nos modelos monofásico e difásico existe o conceito de duração da fase, que seria o tempo necessário para atingir 75% da produção total assintótica durante aquela fase, e, para Grossman e Koops (1988), a duração da segunda fase poderia ser considerada uma medida de persistência, porém essa medida de persistência só se aplicaria ao modelo difásico que apresentou o valor de 373,65 dias, bem abaixo do observado por Gonçalves *et al.*, (2002) para vacas Holandesas (833,3 dias) e parecido com o observado por Vargas *et al.*, (2007) também para vacas Holandesas (187-399 dias). Esse valor significa que a segunda fase foi além dos 305 dias, porém sua relação com a persistência é inconclusiva no presente estudo.

Para a variável persistência, o modelo LPM novamente apresentou valores discrepantes, e o modelo RLPM apresentou o valor de 14,64 dias. Segundo os autores desses modelos, a persistência é definida como o número de dias nos quais a produção é constante após atingir o pico, dessa forma pelo modelo RLPM a produção só seria constante durante 14,64 dias, valor abaixo dos 42,07 dias observados por Grossman *et al.*, (1999) porém para vacas Holandesas.

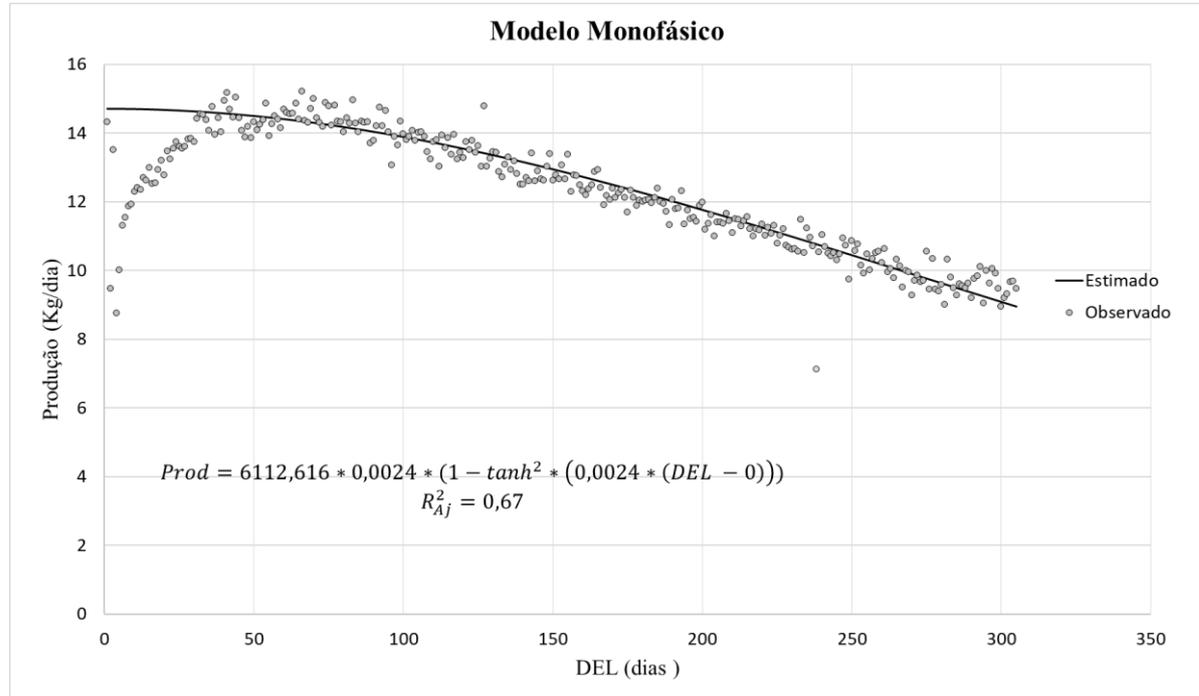
As figuras 2, 3 e 4 mostram o formato das curvas da primeira lactação ajustadas para os valores médios de cada dia em lactação pelos modelos de Wood, Monofásico e Difásico. Os modelos LPM e RLPM não ajustaram curvas adequadas ou interpretáveis biologicamente. Enquanto o modelo LPM estimou valores de produção diária extremamente altos, o modelo RLPM estimou somente valores negativos. Resultado semelhante foi observado por Vargas *et al.* (2000), que observaram que o modelo LPM mesmo demonstrado bom ajuste, apresentava parâmetros atípicos.

Figura 2. Produção de leite diária observada e estimada através do modelo de Wood.



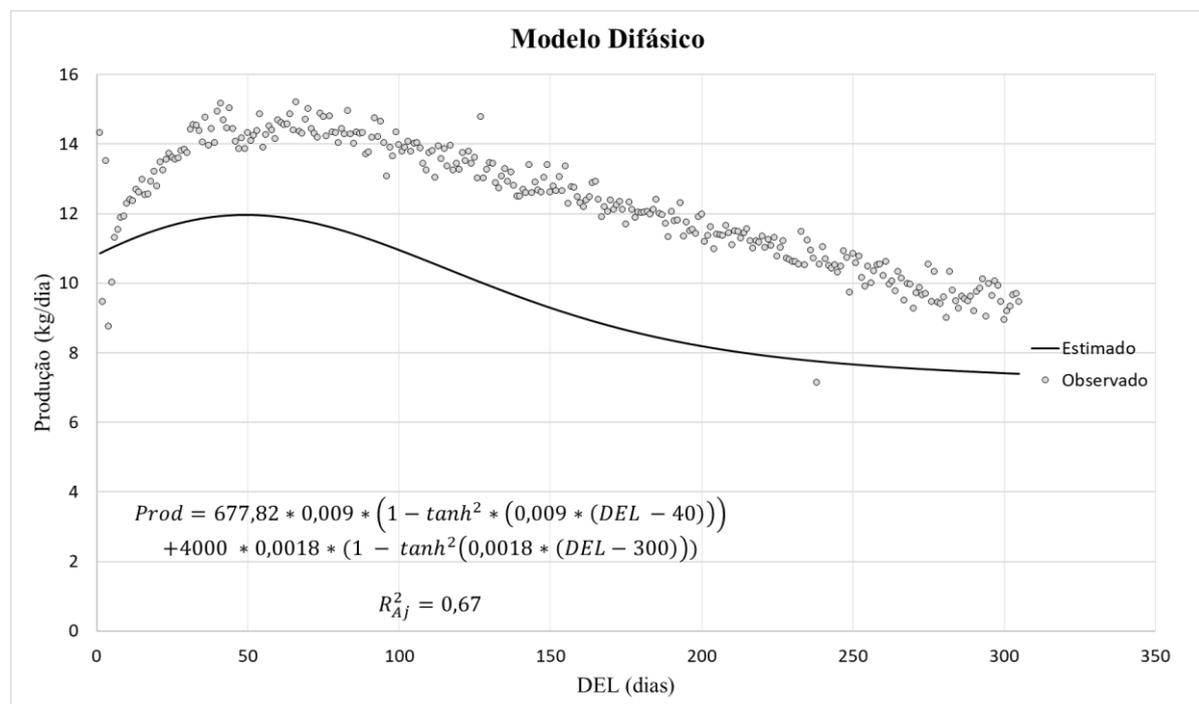
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3. Produção de leite diária observada e estimada através do modelo Monofásico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4. Produção de leite diária observada e estimada através do modelo Difásico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com relação aos avaliadores utilizados na escolha do modelo de melhor ajuste, os valores médios se encontram na Tabela 5. O modelo de Wood apresentou os menores valores de AIC e BIC, 29,5539 e 29,39164, respectivamente. Para Silveira (2010), a utilização dos critérios AIC e BIC são importantes na escolha do modelo de melhor ajuste, pois nem sempre o modelo mais parametrizado é o melhor, como ocorreu no presente estudo.

Tabela 5. Valores médios dos critérios utilizados para a escolha do modelo de melhor ajuste.

Modelos	Critérios					
	AIC	BIC	QME	R ² Aj	DW	C
Wood	29,55391	29,39164	1,3895	0,66	2,44	0,99
Monofásico	34,90161	34,73934	2,0814	0,55	1,90	0,86
Difásico	42,06139	41,73685	2,3924	0,46	1,85	0,71
LPM	44,35476	43,92204	2,5155	0,50	2,29	0,22
RLPM	35,68489	35,46853	2,0011	0,55	1,97	0,98

Fonte: Elaborada pelo autor.

AIC: Critério de Informação de Akaike; BIC: Critério de Informação Bayesiano; QME: Quadrado Médio do Erro; R²Aj: Coeficiente de Determinação Ajustado; DW: Durbin-Watson e C: percentual de convergência.

Os modelos de Wood, RLPM, Monofásico e Difásico atingiram os maiores percentuais de convergência, 99, 98, 86, 71%, respectivamente. Segundo Bonfá (2012), modelos mais complexos e com maior número de parâmetros tendem a convergir menos, como ocorreu no presente estudo com o modelo LPM que atingiu apenas 22% de convergência. Ainda, para Silva *et al.* (2011), o percentual de convergência pode ser decisivo na escolha do modelo, pois se um modelo apresentar ótimos ajustes em outros critérios, porém baixa convergência, esse modelo representaria apenas poucos animais.

Todos os modelos apresentaram valores medianos de coeficiente de determinação ajustado (R²_{Aj}), entre 0,46 e 0,66, dentre os quais o modelo de Wood obteve o maior valor (0,66), valor semelhante ao observado por Cunha *et al.* (2010). Os baixos valores do coeficiente de determinação ajustado podem ser explicados pela utilização de dados individuais, que apresentam alta variação, assim quando se utilizou a média dos dados observados para a elaboração das curvas no presente estudo, o R²_{Aj} aumentou (GUIMARÃES

et al., 2006; DAMATAWEWA *et al.*, 2007). Dessa forma, o R^2_{Aj} sozinho não é suficiente para determinar o melhor modelo.

Os modelos RLPM e Monofásico apresentaram valores de Durbin-Watson de 1,97 e 1,90, respectivamente, ou seja, mais próximos de 2 demonstrando ausência de autocorrelação residual, em relação ao modelo Monofásico esse fato já era esperado, uma vez que esse modelo é baseado na função logística que tem a finalidade de diminuir o problema de autocorrelação presente em modelos baseados na função gama (VARGAS, 2000), como ocorreu com o modelo de Wood, que apresentou um valor de 2,44, apesar do mesmo ter apresentado o menor quadrado médio do erro, 1,3895.

5 CONCLUSÃO

O modelo de Wood apresenta-se como o melhor modelo para ajuste da curva de lactação de vacas primíparas da raça Gir Leiteiro por apresentar menores valores de AIC, BIC e QME, além de ter obtido o maior coeficiente de determinação e maior percentual de convergência.

REFERÊNCIAS

- BANGAR, Y. C.; VERMA, M. R. Non-linear modelling to describe lactation curve in Gir crossbred cows. **Journal of Animal Science and Technology**, Seul, v.59, n. 1, p.3, dez. 2017.
- BAR-ANAN, R.; RON, M.; WIGGANS, G. R. Associations among milk yield, yield persistency, conception, and culling of Israeli Holstein dairy cattle. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 68, n. 2, p. 382-386, fev. 1985.
- BIANCHINI SOBRINHO, Evaristo. **Estudo da curva de lactação de vacas da raça Gir**. 1984. 88 f. Tese (Doutorado em Genética) – Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto.
- BONFÁ, Hugo Colombarolli. **Modelos de curva de lactação e intervalos de controle de vacas Holandesas**. 2012. 47 f. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) – Escola de Veterinária, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- COBUCCI, A.J.; EUCLYDES, R.F.; COSTA, C.N. Análises da persistência na lactação de vacas da raça Holandesa, usando produção no dia do controle e modelo de regressão aleatória. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v.33, n.3, p.546-554, mar. 2004.
- CUNHA, D.N.F.V.; PEREIRA, J.C.; SILVA, F.F.; CAMPOS, O.F.; BRAGA, J.L.; MARTUSCELLO, J.A.; Selection of models lactation curves to use in milk production simulation systems. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v.39, n.4, p.891-902, abr. 2010.
- CUPPS, P.T. **Breeds of dairy cattle**. 2nd. Ed. W.H. Freeman e Co., San Francisco, CA. 1966. 149 p.
- DAMATAWEWA, C. M. B.; PEARSON, R. E.; VANRADEN, P. M. Modeling Extended Lactations of Holsteins. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 90, n. 8, p. 3924–3936, mar. 2007.
- DEKKERS, J.C.M., JAMROZIK, J., TEN HAG, J.H., SCHAEFFER, L.R., WEERSINK, A. Genetic and economic evaluation of persistency in dairy cattle. **Interbull Bulletin**, Bélgica, v. 12, p. 97-102, jan.1996.
- DEKKERS, J.C.M., TEN HAG, J.H., WEERSINK, A. Economic aspects of persistency of lactation in dairy cattle. **Livestock Production Science**, Amsterdam, v.53, n. 3, p. 237-252, mar. 1998.
- DIJKSTRA, J.; FRANCE, J.; DHANOA, M.S.; MAAS, J.A.; HANIGAN, M.D.; ROOK, A.J.; BEEVER, D.E. A model describe growth patterns of the mammary gland during pregnancy and lactation. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v.80, n. 10, p.2340-2354, out. 1997.

EL FARO, Lenira. **Estudo da curva de lactação de um rebanho da raça Caracu**. 1996. 179 f. Dissertação (Mestrado em Genética e Melhoramento Animal). Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, Universidade Estadual Paulista, Jaboticabal.

EMILIANO, P. C.; PENHA VEIGA, E.; FERRUA VIVANCO, M. J.; SILVA DE MENEZES, F. Critérios de informação de Akaike versus Bayesiano: análise comparativa. In: 19^o SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 2010, São Pedro – SP, Anais do 19^o SINAPE, São Paulo: ABE, 2010. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/sinape/19sinape/node/615>>. Acesso em: 16 out 2016.

FADLELMOULA, A.A.; YOUSIF, I.A.; ABU NIKHAILA, A.M. Lactation curve and persistency of crossbred dairy cows in the Sudan. **Journal of Applied Sciences Research**, Paquistão, v.3, n. 10, p.1127-1133, jan.2007.

FERRIS, T.A.; MAO, I. L.; ANDERSON, C.R. Selecting for lactation curve and milk yield in dairy cattle. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 68, n. 6, p. 1438-1448, jun. 1985.

GENGLER, N.; KEOWN, J.K.; VAN VLECK, L.D. Various persistency measures and relationships with total, partial and peak milk yields. **Revista Brasileira de Genética**, Ribeirão Preto, v. 18, n. 2, p. 237-243, fev. 1995.

GROSSMAN, M.; KOOPS, W.J. Multiphasic analysis of lactation curves in dairy cattle. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v.71, n.6, p.1598-1608, jun. 1988.

GROSSMAN, M.; KOOPS, W. J.; HARTZ, S. M. Persistency of lactation production: a novel approach. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 82, n. 10, p. 2192–2197, out. 1999.

GRZESIAK, A. L.; LANG, M.; KIM, K.; MATZGER, A. J. Comparison of the four anhydrous polymorphs of carbamazepine and the crystal structure of form I. **Journal of Pharmaceutical Sciences**, Washington, v. 92, n. 11, p. 2260-2271, nov.2003.

GUIMARÃES, V. P.; RODRIGUES, M. T.; ROCHA SARMENTO, J. L.; DA ROCHA, D. T. Utilização de funções matemáticas no estudo da curva de lactação em caprinos. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v.35, n. 2, p.535–543, mar./abr. 2006.

JAKOBSEN, J.H.; MADSEN, P.; JENSEN, J.; PEDERSON J.; CHRISTENSEN, L.G.; SORENSEN, D.A. Genetic parameters for milk production and persistency for Danish Holstein estimated in random regression models using REML. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 85, n. 6, p. 1607-1616, jun. 2002.

JAMROZIK, J.; SCHAEFFER, L.R.; DEKKERS, J.C.M; Genetic evaluation of dairy cattle using test day yields and random regression model. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 80, n.6, p. 1217-1226, jun. 1997.

JAMROZIK, J.; SCHAEFFER, L. R. Estimates of genetic parameters for a test day model with random regression for yield traits of first lactation Holstein. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 80, n. 4, p. 762-770, abr. 1997.

JAMROZIK, J., JANSEN, G., SCHAEFFER, L.R., LIU, Z. Analysis of persistency of lactation calculates from a random regression test day model. **Interbull Bulletin**, Nova Zelândia, v. 17, p. 64-69, jan.1998.

KOÇAK, O.; EKIZ, B. Comparison of different lactation curve models in Holstein cows raised on a farm in the south-eastern Anatolia region. **Archives of Animal Breeding**. Istanbul, v. 51, n. 4, p. 329-337, out.2008.

LEDIC, I. L.; VERNEC, R. S.; EL FARO, L.; TONHATI, H.; MARTINEZ, M. L.; OLIVEIRA, M. D. S.; COSTA, C. N.; TEODORO, R. L.; FERNANDES, L.O. Avaliação Genética de Touros da Raça Gir para Produção de Leite no Dia do Controle e em 305 Dias de Lactação. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v.31, n.5, p.1964-1972, set./out. 2002.

LEDIC, I. L.; TONHATI, H.; VERNEQUE, R. S. *et al.* Estimativa de parâmetros genéticos, fenotípicos e ambientes para as produções de leite no dia do controle e em 305 dias de lactação de vacas da raça Gir. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v.31, n. 5, p. 1963-1963, set./out. 2002.

MADSEN, O. A comparison of some suggested measures of persistency of milk yield in dairy cows. **Animal Production**, Cambridge, 20, n. 2, p. 191-197, abr. 1975.

OLORI, V. E.; HILL W. G.; MCGUIRK, B. J.; BROTHERSTONE S. Estimating variance components for test day milk records by restricted maximum likelihood with a random regression animal model. **Livestock Production Science**, Amsterdam, v.61, n.1, p.53-63, ago. 1999.

QUENOUILLE, M. H. Notes on bias in estimation. **Biometrika**, Oxford, v. 43, n. 3-4, p. 353-360, dez. 1956.

REENTS, R.; REINHARDT, F.; ABRAMOWSKY, M. Calculation of persistency proofs from the German multi-lactation model for production traits. **Interbull Bulletin**, Bélgica, v. 12, p. 103-107, jan.1996.

REKAYA, R.; WEIGEL, K. A., GIANOLA, D. Hierarchical nonlinear model for persistency of milk yield in the first three lactations of Holsteins. **Livestock Production Science**, Amsterdam, v.68, n. 2-3, p.181-187, mar. 2001.

REKAYA, R.; CARABAÑO, M.J.; TORO, M.A. Assessment of heterogeneity of residual variance using changing points techniques. **Genetics Selection Evolution**, Londres, v. 32, n. 4, p.383-394, jul./ago. 2000.

RESENDE, M. D. V. **Genética biométrica e estatística no melhoramento de plantas perenes**. Brasília: Embrapa Informação Tecnológica, 2002.

RUVUNA, F.; KOGI, J.K.; TAYLOR, J.F. *et al.* Lactation curves among crosses of Galla and East African with Toggenburg and Anglo Nubian goats. **Small Ruminant Research**, Arkansas, v. 16, n. 1, p. 1-6, mar. 1995.

SAS Institute Inc. **Statistical Analysis System User's Guide**. Version 9.1. Ed. Cary, SAS Institute, EUA, 2003.

SCHAEFFER, L.R.; JAMROZIK, J.; KISTEMAKER, G.J.; VAN DOORMAAL. Experience with a test-day model. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 83, n. 5, p. 1135-1144, mai. 2000.

SEARLE, S. R. **Linear Models**, John Wiley e Sons. Inc., New York-London-Sydney-Toronto, 1971.

SHAHRBABAQ, Mohammad Moradi. **Feasibility of random regression models for Iranian Holstein test day records**. 1997. 138 f. Tese(PhD Animal Breeding) University Of Guelph, Guelph, Canada.

SHERCHAND, L.; MCNEW, R.W.; KELLOGG, D.W.; JOHNSON, Z.B. Selection of a mathematical model to generate lactation curves using daily milk yields of Holstein cows. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 78, n. 11, p. 2507-2513, nov. 1995.

SILVA, N.A.M.; LANA, A.M.Q.; SILVA, F.F.; SILVEIRA, F.G.; BERGMANN, J.A.G.; SILVA, M.A.; TORAL, F.L.B. Seleção e classificação multivariada de modelos de crescimento não lineares para bovinos Nelore. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, Belo Horizonte, v.63, n. 2, p.364–371, mar. 2011.

SILVEIRA, Fernanda Gomes. **Classificação multivariada de modelos de crescimento para grupos genéticos de ovinos de corte**. 2012. 61 f. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria).Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, Minas Gerais.

SINGH, S.R. Variation in persistency of lactation yield in Jersey X Harijana cows. **Indian Journal of Dairy Science**, Nova Deli, v. 48, n. 10, p. 603- 604, 1995.

SÖLKNER, J.; FUCHS, W. A comparison of different measures of persistency with special respect to variation of Test-day milk yields. **Journal of Dairy Science**, Illinois,v. 16, n. 4, p. 305-319, jun. 1987.

SWALVE, H.H. The effect of test day models on the estimation of genetic parameters and breeding values for dairy yield traits. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v.78, n.4, p.929-938, abr. 1995.

TEKERLI, M., AKINCI, Z., DOGAN, I., AKCAN, A. Factors affecting the shape of lactation curves of Holstein cows from the Balikesir province of Turkey. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 83, n. 6, p. 1381-1386, jun. 2000.

TOGASHI, K.; LIN, C. Y. Modifying The Lactation Curve To Improve Lactation Milk And Persistency. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v.86, n.4, p.1487-1493, abr. 2003.

TOGASHI, K.; LIN, C. Y. Development of an optimal index to improve lactation yield and persistency with the least selection intensity. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 87, n. 9, p. 3047-3052, set. 2004.

TOZER, P.R.; HUFFAKER; R.G. Mathematical equations to describe lactation curves for Holstein-Friesian cows in New South Wales. **Australian Journal of Agricultural Research**, Australia, v. 50, n. 3, p. 431-440,mar. 1999.

TURNER, C. W. A quantitative form of expressing persistency of milk or fat secretion. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 9, n. 2, p. 203-214, mar. 1926.

VARANIS, L.F.M.; DA SILVA, Ñ.A.M.; TEIXEIRA, A. M. Seleção de modelos não lineares para estimação da curva de lactação de vacas mestiças pelo método de análise de agrupamento. **Caderno de Ciências Agrárias**, Belo Horizonte, v.8, n.3, p.28-37, nov. 2016.

VARGAS, B.; KOOPS, W. J.; HERRERO, M.; VAN ARENDONK, J. A. M., Modeling extended lactations of dairy cows. **Journal of Dairy Science**, Illinois, v. 83, n. 6, p.1371–1380, jun. 2000.

VARONA, L.; MORENO, C.;GARCÍA CORTÉS, L.A.; ALTARRIBA, J. Multiple trait analysis of underlying biological variables of production functions. **LivestockProduction Science**, Amsterdam, v.47, n. 3, p. 201-209, mar. 1997.

WILMINK, J.B.M. Adjustment of test-day milk, fat and protein yields for age, season and stage of lactation. **LivestockProduction Science**, Amsterdam, v.16, n. 4, p.335-348, jun. 1987.

WOOD, P.D.P. Algebraic model of lactation curve in cattle. **Nature**, Londres, v.216, p.164-165, out. 1967.

ZADRA, Lenira El Faro. Persistência da lactação de bovinos leiteiros. **PesquisaeTecnologia**, v. 9, n. 2, jul./dez. 2012.

ZURWAN, A.; MOAEEN-UD-DIN, M.; BILAL, G.; ZIA-UR-REHMAN;KHAN, M. S. Estimation of genetic parameters for persistency of lactation in Sahiwal dairy cattle. **Pakistan Journal of Zoology**, Paquistão, v.49, n. 3, p.877–882, abr. 2017.