



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA**

**JOÃO PEDRO SALES MONTEIRO**

**AVALIAÇÃO DO MODELO SEMI-ANALÍTICO DE POÇOS DE PETRÓLEO NA  
SIMULAÇÃO COMPOSICIONAL DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO EM  
CONJUNTO COM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS**

**FORTALEZA**

**2016**

JOÃO PEDRO SALES MONTEIRO

AVALIAÇÃO DO MODELO SEMI-ANALÍTICO DE POÇOS DE PETRÓLEO NA  
SIMULAÇÃO COMPOSICIONAL DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO EM  
CONJUNTO COM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS

Monografia apresentada ao Departamento de  
Engenharia Química da Universidade Federal  
do Ceará, como parte dos pré-requisitos à  
obtenção do Grau de Engenheiro de Petróleo.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Marcondes

FORTALEZA  
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M777a Monteiro, João Pedro Sales.  
Avaliação do modelo semi-analítico de poço de petróleo na simulação composicional de reservatórios de petróleo em conjunto com malhas não-estruturadas / João Pedro Sales Monteiro. – 2016.  
40 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia de Petróleo, Fortaleza, 2016.  
Orientação: Prof. Dr. Francisco Marcondes.

1. Modelo semi-analítico de poços de petróleo. 2. Simulação de reservatórios de petróleo. 3. Malhas não-estruturadas. I. Título.

CDD 665.5092

---

JOÃO PEDRO SALES MONTEIRO

AVALIAÇÃO DO MODELO SEMI-ANALÍTICO DE POÇOS DE PETRÓLEO NA  
SIMULAÇÃO COMPOSICIONAL DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO EM  
CONJUNTO COM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS

Monografia apresentada ao Departamento de  
Engenharia Química da Universidade Federal  
do Ceará, como parte dos pré-requisitos à  
obtenção do Grau de Engenheiro de Petróleo.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Marcondes

Aprovada em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Francisco Marcondes (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Vitor Moreira da Rocha Ponte  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Pedro Felipe Gadelha Silvino  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus.

Aos meus pais, João Filho e Gerliane.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por tudo que conquistei em minha vida.

Ao meu pai, João Filho, por todos os ensinamentos que moldaram a pessoa que sou hoje, e que ajudaram a desenvolver meu pensamento crítico.

A minha mãe, Gerliane, que com o seu amor incondicional e apoio incontestável me ensinou a ser uma pessoa mais generosa e grata pelas coisas simples da vida.

A minha família, que sempre me amparou, mesmo nos momentos de dificuldade, fornecendo suporte, e motivação para continuar lutando.

Ao professor Francisco Marcondes, pela credibilidade e confiança em mim depositadas, pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos meus amigos, Wellington Filho, Manoel Maurício, Clarissa Dantas e Leonardo Sales, com quem construí fortes laços de amizade, onde sempre encontro refúgio e fraternidade.

A todos, amigos e colegas de trabalho, que de forma direta, ou indireta, fizeram parte da construção do meu caráter profissional.

“As pessoas felizes lembram o passado com gratidão, alegram-se com o presente e encaram o futuro sem medo. ”

*Epicuro*

## RESUMO

Uma das atividades mais complexas desempenhadas pela simulação numérica de reservatórios de petróleo é a modelagem do escoamento ao longo dos poços de petróleo. A avaliação numérica dos poços é inviável, devido ao elevado grau de refinamento de malha necessário para contabilizar corretamente as características desse escoamento. Modelos analíticos foram inicialmente concebidos para abordar os poços separadamente do restante do reservatório, apresentando, no entanto, uma série de restrições. A crescente utilização de arranjos não convencionais de poços de petróleo como poços inclinados, horizontais e ramificados levaram à necessidade de se desenvolver novos métodos capazes de contabilizar corretamente as variáveis de produção para estas configurações. Assim, formulações semi-analíticas, que não assumem a maioria das simplificações inerentes aos modelos analíticos tradicionais, foram desenvolvidas a fim de conferir aos simuladores uma maior robustez e possibilidade de trabalhar com reservatórios e disposições de poços mais próximas da realidade. O presente trabalho tem por objetivo avaliar um modelo de poço semi-analítico implementado, em conjunto com a metodologia EbFVM (*Element-based Finite-Volume Method*) para malhas não-estruturadas em um simulador numérico composicional de petróleo. A análise foi realizada através da comparação entre os resultados obtidos pelo método estudado com um modelo analítico de referência. Os resultados são expressos em termos das curvas de produção de óleo e gás. Estes mostraram o bom ajuste entre os modelos quando atendida a maioria das restrições assumidas pelo modelo analítico de referência, ao passo que evidenciaram um desvio das curvas obtidas pela formulação semi-analítica, em relação à analítica, para condições que não respeitam as hipóteses simplificativas do escoamento no poço como escoamento linear e não permanente.

**Palavras-chave:** Simulação de Reservatórios. Modelo de Poço Semi-analítico. Malhas Não-estruturadas.

## ABSTRACT

One of the most complex activities performed by petroleum reservoir simulation is to model the fluid flow along wells. Numerical evaluation of wells is not feasible, due to the high level of mesh refinement needed to correctly account for every characteristic of the fluid flow. Analytical models were initially conceived to approach the wells separately from the rest of the reservoir, therefore presenting multiple restrictions. The growing use of unconventional well configurations, such as deviated, horizontal or ramified wells, created the need to develop new methods capable of correctly calculate the production variables for these configurations. Therefore, semi-analytical formulations that do not incorporate most of the assumptions related to the traditional analytical models were developed in order to make reservoir simulators more robust and capable of dealing with more realistic reservoirs and well configurations. The present work aims to analyze a semi-analytical well model, in conjunction with the EbFVM (Element-based Finite-Volume Method) methodology for unstructured meshes in a compositional petroleum simulator. The analysis was done by comparing the results obtained with the method in study and those obtained with a benchmark analytical model. The results are expressed in oil and gas production curves and showed a good match between the models, when most of the restrictions imposed by the analytical model are observed. At the same time, the results showed a deviation of the semi-analytical model curves in comparison to the analytical model curves for conditions that do not observe the simplifying hypotheses in the well flow, such as linear or unsteady flow.

**Keywords:** Reservoir Simulation. Semi-analytical Well Model. Unstructured Mesh.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Divisão de uma malha bidimensional em sub-volumes .....	20
Figura 2.2 – Sub-volumes de controle para os elementos tridimensionais .....	21
Figura 4.1 – Layout do reservatório para o caso 1 e 2 .....	29
Figura 4.2 – Taxas de produção para o caso 1 .....	30
Figura 4.3 – Taxas de produção para o caso 2 .....	32
Figura 4.4 – Layout do reservatório para o caso 3 .....	33
Figura 4.5 – Taxas de produção para o caso 3 .....	34
Figura 4.6 – Layout do reservatório para o caso 4 .....	35
Figura 4.7 – Taxas de produção para o caso 4 .....	36

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Frações molares de injeção dos estudos de caso .....	28
Tabela 4.2 – Características geométricas do reservatório e dados de operação dos estudos de caso .....	29

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>B</b>	Fator de formação da rocha (adimensional)
<b>c</b>	Compressibilidade da rocha ( $\text{Pa}^{-1}$ )
<b>h</b>	Distância entre bloco e poço (m)
<b>k</b>	Permeabilidade média da rocha ( $\text{m}^2$ )
<b>k<sub>i</sub></b>	Permeabilidade na direção “i” ( $\text{m}^2$ )
<b>K</b>	Tensor dispersão ( $\text{m}^2/\text{d}$ )
<b>N<sub>i</sub></b>	Quantidade de mols do componente “i” por unidade de volume ( $\text{mol}/\text{m}^3$ )
<b>P<sub>b</sub></b>	Pressão nos blocos do reservatório (Pa)
<b>P<sub>w</sub></b>	Pressão no poço (Pa)
<b>P<sub>D</sub></b>	Pressão adimensional
<b>q</b>	Vazão através do poço ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
<b>r<sub>w</sub></b>	Raio do poço (m)
<b>r<sub>0</sub></b>	Raio equivalente do poço (m)
<b>t</b>	Tempo (s)
<b>u</b>	Velocidade de escoamento (m/s)
<b>V<sub>b</sub></b>	Volume do bloco ( $\text{m}^3$ )
<b>x<sub>ij</sub></b>	Fração molar do componente “i” na fase “j” (adimensional)
<b>ξ<sub>j</sub></b>	Densidade molar da fase “j” ( $\text{mol}/\text{m}^3$ )
<b>λ<sub>j</sub></b>	Mobilidade da fase “j” ( $\text{s}/\text{Kg.m}$ )
<b>μ</b>	Viscosidade ( $\text{Kg.m}/\text{s}$ )
<b>φ</b>	Porosidade da rocha (adimensional)
<b>α, β e γ</b>	Parâmetros de adimensionalização (adimensional)
<b>θ</b>	Inclinação do poço
<b>φ</b>	Azimute do poço
<b>Φ</b>	Potencial hidrostático (Pa)

### Subscrito

<b>e</b>	Equivalente
<b>D</b>	Adimensional
<b>w</b>	Poço

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	15
<b>2.1</b>	<b>Índice de Produtividade</b> .....	16
<b>2.2</b>	<b>Modelos de Poço</b> .....	17
<b>2.2.1</b>	<i>Modelo de Peaceman</i> .....	17
<b>2.2.2</b>	<i>Modelo Semi-Analítico</i> .....	18
<b>2.3</b>	<b>Método de Volumes Finitos Baseado em Elementos</b> .....	19
<b>2.3.1</b>	<i>Tipos de Elementos Tridimensionais</i> .....	20
<b>3</b>	<b>MODELO PROPOSTO</b> .....	22
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	28
<b>4.1</b>	<b>Caso 1 – Poços Verticais</b> .....	29
<b>4.2</b>	<b>Caso 2 – Reservatório com Anisotropia de Permeabilidade</b> .....	31
<b>4.3</b>	<b>Caso 3 – Poços Verticais Parcialmente Completados</b> .....	33
<b>4.4</b>	<b>Caso 4 – Poços Horizontais</b> .....	35
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	38
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	39

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento das atividades de exploração e produção de campos petrolíferos é fortemente amparado pelos simuladores numéricos que são utilizados na modelagem dos reservatórios de petróleo, servindo como ferramenta fundamental na análise de suas características como propriedades físicas, escoamento de fluidos ao longo do reservatório e escoamento através dos poços.

A tarefa específica de avaliar as condições em que ocorre o escoamento através dos poços, do reservatório até a superfície (produção), ou da superfície até o reservatório (injeção), representa um dos aspectos mais complexos de um simulador de reservatórios de petróleo. Isso se deve ao elevado grau de complexidade do escoamento dos fluidos ao longo do poço, devido às altas velocidades e presença de múltiplas fases.

Durante muito tempo os simuladores de reservatórios efetuaram a avaliação do escoamento em poços por meio de modelos analíticos, frente à impossibilidade de tratar as minúcias de tal escoamento numericamente em razão do alto nível de refinamento de malha necessário. Tais modelos, ainda amplamente utilizados, apresentam limitações frente ao grande número de restrições que devem ser atendidas para que estes possam apresentar um resultado aplicável à realidade. As limitações inerentes as metodologias analíticas implicam na obtenção de resultados não coerentes, quando estas são utilizadas no tratamento de geometrias mais complexas de reservatórios, escoamento multifásico, assim como configurações de poços não convencionais.

Os modelos analíticos largamente utilizados lançam mão de um importante fator definido como índice de produtividade (IP), responsável por realizar o acoplamento entre o poço e o reservatório. Todos os componentes de um sistema de produção de petróleo podem ser condensados dentro do índice de produtividade (ECONOMIDES, 1994).

O modelo de Peaceman (1977), apesar de possuir uma série de restrições, é um modelo totalmente analítico que ainda encontra grande aplicação comercial nos simuladores de petróleo utilizados atualmente, apresentando resultados confiáveis para diversas condições de operação. No entanto, o desenvolvimento de novas tecnologias de produção de petróleo como a utilização de poços horizontais e ramificados, aliado à necessidade de tratar reservatórios com anisotropia de permeabilidade, criaram a necessidade de desenvolver novas técnicas de avaliar os poços de petróleo nos simuladores.

Para contornar tais limitações surge a utilização de modelos semi-analíticos de

poços. Essa nova metodologia propicia uma abordagem menos restrita, objetivando resultados mais realísticos e que possam abranger um maior espectro de condições em que são explorados os campos de petróleo, especialmente os campos *offshore*. Em simulação de reservatórios, modelos de escoamento que definem a relação entre poços e reservatórios desempenham um papel fundamental (SHU, 2005).

A busca pela avaliação, com maior acurácia, de reservatórios das mais complexas características, desde anisotropias de propriedades como permeabilidade e porosidade, até o tratamento de geometrias complexas e irregulares, é também amparada pela utilização do método numérico de volumes finitos baseado em elementos. O modelo de poço semi-analítico estudado, foi aplicado em um simulador de reservatórios composicional UTCOMP (Chang, 1990). Trata-se de um simulador de petróleo acadêmico desenvolvido pela universidade do Texas em Austin, que se utiliza da formulação EbFVM. Tal abordagem introduziu a possibilidade de se trabalhar com malhas não-estruturadas, que, por conseguinte se adequam melhor às geometrias mais complexas, comumente encontradas nos reservatórios de petróleo.

Neste trabalho, foi utilizado um modelo semi-analítico de poço implementado em conjunto com malhas não-estruturadas para a obtenção de resultados mais precisos das variáveis de poço, objetivando um maior alcance de aplicações. A validação e comparação com modelo analítico já consagrado permitiu evidenciar o elevado potencial no tratamento de configurações não convencionais de poços de petróleo.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A indústria do petróleo apresenta uma grande dinâmica no que concerne às tecnologias utilizadas na exploração e produção dos campos petrolíferos. Atualmente, cada vez mais, novas técnicas são empregadas no desenvolvimento de reservatórios de petróleo, tais como a ampla utilização de poços direcionais, horizontais e ramificados. As técnicas mencionadas são conhecidas como configurações não convencionais de poços de petróleo, e seu objetivo é fornecer uma maior produtividade dos reservatórios em que são empregadas. Acoplada à disseminação dessas tecnologias está a necessidade de obtenção de ferramentas capazes de avaliar corretamente o escoamento dos fluidos ao longo dos poços, exigindo por parte dos simuladores de reservatórios modelos de poços que atuem nesse sentido.

Um grande empecilho encontrado no tratamento da interação poço-reservatório é a diferença de dimensão entre o bloco de malha onde o segmento do poço está inserido e o poço propriamente dito. Dessa forma os poços e suas regiões adjacentes necessitariam de um refino de malha muito grande para que o escoamento através dessas áreas específicas pudesse ser tratado numericamente pelos simuladores. No entanto, essa alternativa se mostra não atrativa, devido ao elevado tempo computacional necessário, tornando a simulação, por esse meio, proibitiva em termos de custo computacional.

Com o objetivo de contornar toda essa problemática surgiu inicialmente a alternativa de desacoplar o poço do restante do reservatório, para que esse fosse tratado por métodos analíticos (Peaceman, 1977; Babu e Odhe, 1989). Dessa forma o reservatório seria, como um todo, simulado numericamente, e os poços presentes em seu domínio teriam seus fluxos e pressões avaliados de forma completamente analítica. Um índice de produtividade do poço foi então idealizado para manter a relação entre o reservatório e o poço.

Contudo, as restrições impostas por estes métodos analíticos limitam bastante os seus campos de aplicação, suscitando a necessidade de modelos mais robustos que possam ser usados na análise de variadas configurações de poços, que mais se aproximam da realidade. Inicialmente alguns modelos semi-analíticos (Maizeret, 1996; Economides *et al.*, 1996) foram propostos a fim de avaliar os poços de petróleo de forma menos limitada, apresentando soluções coerentes para condições que não se enquadram nas restrições dos métodos analíticos.

O método semi-analítico foi alvo de modificações (Valvatne, 2000; Wolfeiner *et al.*, 2000; Shu, 2005), sendo apontado como uma boa alternativa para o tratamento de conformações mais realísticas de operação, uma vez que não apresenta a maioria das limitações encontradas nos métodos analíticos. Esta nova classe de modelo de poço possui vantagens em

poder trabalhar com poços inclinados, ramificados, horizontais, poços parcialmente penetrados, anisotropia de permeabilidade, entre outras.

## 2.1 Índice de Produtividade (IP)

O índice de produtividade do poço, comumente denotado na literatura como índice de poço (*well index*), é o coeficiente responsável pelo acoplamento entre o poço de petróleo e o reservatório. É utilizado para relacionar a pressão em fluxo do poço com a pressão do bloco de malha obtida numericamente, podendo ser definido pela seguinte equação:

$$IP = \frac{q_w \mu}{(P_b - P_w)} \quad (1)$$

A diferença entre a pressão de reservatório e a pressão do poço, presente no denominador da Eq. (1) é conhecida como *pressure drawdown*, sendo definida como a força motriz que impulsiona os fluidos presentes no reservatório até o poço.

Tal coeficiente contabiliza características geométricas do poço, bem como propriedades do reservatório. O índice de produtividade representa a geometria do bloco de malha, localização e orientação do segmento de poço no bloco de malha e propriedades de rocha (WOLFSTEINER *et al.*, 2000).

Os modelos analíticos de poço avaliam de forma semelhante o índice de produtividade a partir de um raio equivalente do bloco de malha, conceito esse introduzido por Peaceman (1977). Os índices calculados pelos métodos analíticos apresentam erros quando utilizados em condições que não atendem às restrições requeridas por estes, tais como poços inclinados, anisotropia de permeabilidade e escoamento linear.

Os modelos semi-analíticos surgiram para suprir a necessidade de avaliar corretamente o índice de produtividade para variados arranjos de poços e condições de reservatórios. A abordagem semi-analítica computa exatamente o índice de produtividade para qualquer tipo de poço e em qualquer cenário, e seu uso em simuladores reproduz exatamente as soluções analíticas de referência (SHU, 2005).

## 2.2 Modelos de poços

### 2.2.1 Modelo de Peaceman

O modelo de Peaceman (1977) foi inicialmente idealizado para contabilizar analiticamente o índice de produtividade dos poços, e, por conseguinte, avaliar os perfis de vazão e pressão ao longo do mesmo. Este modelo apresenta uma série de restrições pontuadas a seguir:

- Escoamento uniforme monofásico de apenas um pseudocomponente;
- Escoamento radial;
- Uniformidade da malha;
- Poço vertical;
- Penetração completa do poço no reservatório;
- Poço isolado (sem influência de outros poços e fronteiras);
- Campo de permeabilidade homogêneo.

Devido às diferenças de dimensão entre o poço e o bloco de malha, onde este é alocado, se faz necessário a utilização de um raio equivalente para computar corretamente a pressão ao longo do poço. O raio equivalente consiste em uma distância radial na qual a equação de escoamento radial resolvida para o regime permanente retorna a mesma pressão do bloco de malha obtida numericamente.

A equação de escoamento radial para a pressão do bloco do poço, assumindo regime permanente, pode ser escrita da seguinte forma:

$$P_b = P_w + \frac{q\mu}{2\pi kh} \ln\left(\frac{r_0}{r_w}\right), \quad (2)$$

onde  $k$  é a média geométrica das permeabilidades nas três direções do sistema de coordenadas cartesiano, e  $r_0$  o raio equivalente, parâmetro chave do modelo de poço de Peaceman, podendo este ser avaliado para malhas cartesianas pela seguinte equação:

$$r_0 = \frac{\left( \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{1/2} \Delta x^2 + \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{1/2} \Delta y^2 \right)^{1/2}}{\left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{1/4} + \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{1/4}} \quad (3)$$

Através da Eq. (2) podemos obter uma expressão para o cálculo direto do índice de produtividade, desde que sejam conhecidas as propriedades geométricas do poço e reservatório, assim como os valores de permeabilidade e viscosidade. Rearranjando a Eq. (2) obtemos:

$$IP = \frac{2\pi kh}{\ln(r_0/r_w)} \quad (4)$$

O modelo de Peaceman é completamente analítico, e apesar de apresentar uma série de restrições, vigora até hoje como um dos modelos mais utilizados de poços, mesmo nos simuladores comerciais, apresentando resultados satisfatórios para a maioria das configurações em que estes são empregados. O UTCOMP (Chang, 1990), possui como modelo de poço padrão o modelo de Peaceman, em conjunto com o método de Babu-Odeh (Bbu e Odeh, 1989). Modificações do método foram propostas ao longo dos anos (Peaceman, 1983, 1995 e 2003), visando melhorar a capacidade do modelo de avaliar precisamente as condições de operação do poço mais próximas da realidade.

### 2.2.2 Modelo Semi-analítico

Essa nova classe de modelo de poço surgiu como tentativa de contornar as deficiências dos métodos analíticos em se trabalhar com conformações de poços não convencionais, cada vez mais presente no setor de exploração e produção de petróleo, assim como reservatórios de geometrias complexas e com anisotropia no campo de permeabilidade. Os primeiros trabalhos nesse sentido (Economides *et al.*, 1996; Maizeret, 1996) foram desenvolvidos com o objetivo de obter o índice de produtividade do poço diretamente pela equação (1) rearranjada por algumas transformações que serão detalhadas no capítulo seguinte. A rotina de cálculo realizada pelo modelo consiste em duas partes distintas: o cálculo analítico das pressões e vazões ao longo do poço e a obtenção da pressão do reservatório através da simulação numérica. O cálculo analítico das variáveis de poço envolve a utilização das funções

de Green em conjunto com o princípio da superposição, que por sua vez permite que o poço seja modelado como uma sequência de segmentos. Tal abordagem introduziu a possibilidade de trabalhar com configurações de poços mais complexas, sem a maioria das restrições impostas pelos métodos tradicionais.

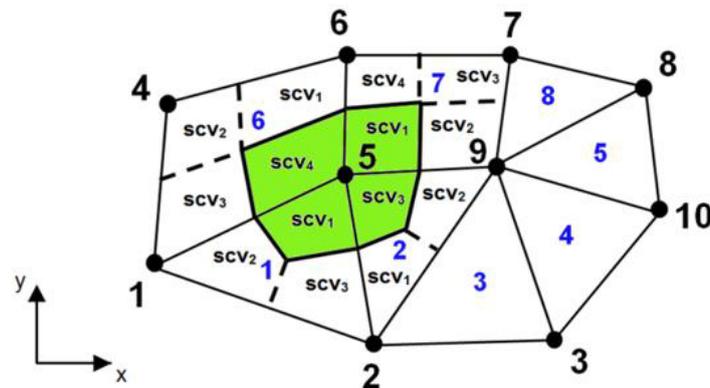
O modelo ainda possuía inicialmente algumas limitações tais como escoamento monofásico, reservatórios de geometria simples e campos de permeabilidades homogêneos. Alguns trabalhos promoveram modificações no modelo semi-analítico inicial (Wolfsteiner, 2000, 2002; Serve, 2002; Shu, 2005), tendo como objetivo a validação do método, demonstrando a sua aplicabilidade, assim como seu aperfeiçoamento.

### **2.3 Método de Volumes Finitos Baseado em Elementos (EbFVM)**

Outra questão importante acerca da simulação de reservatórios de petróleo, é a necessidade de modelar reservatórios de formas complexas, que exigem por sua vez a utilização de malhas que se ajustem perfeitamente as especificidades da formação rochosa do reservatório. As malhas não-estruturadas apresentam as características que suprem essa necessidade com maior eficácia. Contudo, a maioria dos trabalhos presentes na literatura acerca do modelo semi-analítico de poço abordam apenas malhas cartesianas, que não apresentam um ajustamento muito preciso para geometrias complexas de reservatório.

Uma importante base para a utilização de malhas não-estruturadas foi dada por trabalhos como o de Baliga e Patankar (1983), onde foi criado o método CVFEM (*Control Volume Finite-Element Method*), utilizando-se elementos triangulares, e o trabalho de Schneider e Raw (1986), este fazendo o uso de quadriláteros. Nesse método as propriedades são conservadas em volumes de controle discretos constituídos a partir da contribuição de sub-volumes de diferentes elementos adjacentes ao mesmo nó, mantendo-se a flexibilidade da modelagem geométrica típica do método de elementos finitos. A Figura 2.1 exemplifica como é feita a subdivisão do domínio de uma malha bidimensional em sub-volumes.

Figura 2.1 – Divisão de uma malha bidimensional em sub-volumes.

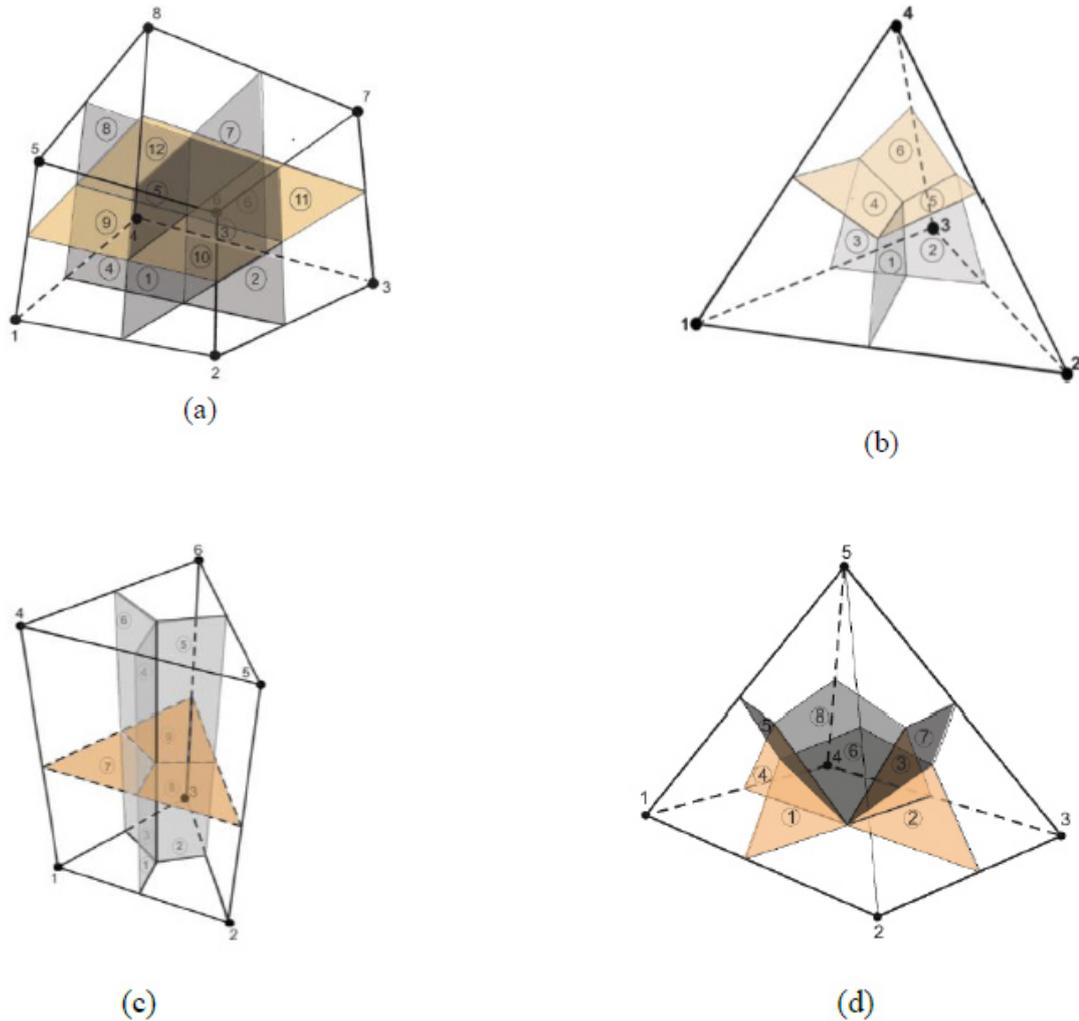


Inicialmente, abordagens desenvolvidas por Forsyth (1990) e Fung *et al.* (1992) introduziram o método CVFEM na simulação de reservatórios de petróleo com aplicação em malhas não-estruturadas bidimensionais e com a restrição de escoamento monofásico. Nos anos seguintes, novos trabalhos propuseram modificações a fim de estender a aplicação do método. Cordazzo (2004) desenvolveu uma metodologia diferente do método original, contabilizando o escoamento multifásico e múltiplos componentes. A nova metodologia passou a se chamar Método dos Volumes Finitos Baseado em Elementos (EbFVM) (Cordazzo *et al.* 2004), nomenclatura esta considerada mais adequada, pois se trata de um método de volumes finitos, acrescido da flexibilidade da utilização de elementos, e funções de formas, inerentes ao método de elementos finitos. Paluszny *et al.* (2007) e Marcondes *et al.* (2013) expandiram o método para malhas tridimensionais e simulação composicional de reservatórios de petróleo.

### 2.3.1 Tipos de Elementos Tridimensionais

Na discretização tridimensional da abordagem EbFVM existem quatro tipos de elementos: hexaedro, tetraedro, prisma e pirâmide. A montagem dos volumes de controle é feita, no entanto, ao redor dos vértices da malha. Para isso, cada elemento é dividido em sub-elementos, ou sub-volumes de controle, como são comumente chamados. A junção dos sub-volumes de controle em torno do mesmo ponto nodal forma o volume da malha, para o qual os balanços serão efetuados. A divisão dos elementos de malha tridimensional é mostrada na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Sub-volumes de controle para os diferentes tipos de elementos. a) hexaedro. b) tetraedro. c) prisma. d) pirâmide



Os balanços são então efetuados em cada sub-volume de controle para posteriormente serem somados, indicando o balanço correspondente ao volume de malha referente ao nó circundado pelo sub-volumes de controle. Por exemplo, para um sub-volume qualquer, o balanço material assume a seguinte forma:

$$\int_V \frac{1}{V_b} \frac{\partial N_i}{\partial t} dV - \int_A \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j x_{ij} \lambda_j \overline{\overline{K}} \cdot \overline{\nabla} \Phi_j \cdot d\overline{A} - \int_V \frac{q_i}{V_b} = 0 ; i = 1, 2, \dots, n_{c+1} \quad (5)$$

onde  $V_b$  é o volume do bloco,  $N_i$  é a quantidade de mols do componente “i” por unidade de volume,  $\xi_j$  a densidade molar da fase “j”,  $x_{ij}$  a fração molar do componente “i” na fase “j”,  $\lambda_j$  a mobilidade da fase “j”,  $\overline{\overline{K}}$  o tensor dispersão de permeabilidades,  $\Phi_j$  potencial hidrostático da fase “j”.

### 3 MODELO PROPOSTO

A concepção do modelo de poço semi-analítico analisado deriva das hipóteses de escoamento monofásico e campo homogêneo de permeabilidades, ainda que não necessariamente isotrópico. A análise parte então da descrição do escoamento de um fluido levemente compressível em meio poroso.

$$\nabla u + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{B} \right) = 0 \quad (6)$$

$$u + \frac{k}{B\mu} \nabla P = 0, \quad (7)$$

onde a Eq. (6) representa a conservação de momento, e a Eq. (7) é a Lei de Darcy. Nas expressões acima, a viscosidade ( $\mu$ ) e o fator de formação da rocha ( $B$ ) são considerados constantes, enquanto a porosidade do meio ( $\phi$ ) é função da pressão na seguinte forma:

$$\phi = \phi_0 [1 + c(P - P_i)] \quad (8)$$

A combinação das Eqs. (6-8) resulta na expressão:

$$\nabla^2 P = \frac{\phi\mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (9)$$

A Eq. (9), resolvida analiticamente com o auxílio das funções de Green, representa a componente analítica do modelo, responsável por avaliar a pressão e fluxo ao longo dos poços. Entretanto, no formato apresentado, tal equação não contabiliza os efeitos de anisotropia no campo de permeabilidade. Para isso, as dimensões do reservatório são transformadas, com o objetivo de modelar um reservatório isotrópico correspondente.

$$x_e = \frac{x \sqrt{k_y k_z}}{k} \quad (10)$$

$$y_e = \frac{y\sqrt{k_x k_z}}{k} \quad (11)$$

$$z_e = \frac{z\sqrt{k_x k_y}}{k} \quad (12)$$

A transformação das dimensões do reservatório afeta o poço, alterando o seu formato. A seção transversal de um poço muda de um círculo para uma elipse. O raio do poço pode ser obtido pela seguinte equação:

$$r_w^e = \frac{r_w}{\alpha^{1/3}} \frac{1}{2\beta} \sqrt{\left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma}\right) + \left[\left(\sqrt{\frac{k_x}{k_y}} - \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}\right) \frac{\cos \theta \cos \varphi \sin \varphi}{\gamma}\right]^2} \quad (13)$$

Na Eq. (14)  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros calculados por:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{k_x k_y}}{k_z}} \quad (14)$$

$$\beta = \sqrt{\sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \cos^2 \varphi + \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \sin^2 \varphi} \quad (15)$$

$$\gamma = \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{\sqrt{k_x k_y}}{k_z} \beta^2 \sin^2 \varphi} \quad (16)$$

A partir desse ponto, tem-se a parcela analítica do problema pronta para ser avaliada, entretanto é recomendável adimensionalizar a Eq. (9), conferindo maior flexibilidade em sua utilização. Para tanto, começamos definindo as dimensões do reservatório adimensionais:

$$x_D = \frac{x}{x_e} \quad (17)$$

$$y_D = \frac{y}{y_e} \quad (18)$$

$$z_D = \frac{z}{z_e} \quad (19)$$

Então, podemos definir o tempo, vazão e pressão adimensionais como segue:

$$t_D = \frac{kt}{\phi\mu cx_e^2} \quad (20)$$

$$q_D = \frac{Bq\mu}{x_e k P_i} \quad (21)$$

$$P_D = \frac{P_i - P}{q_D P_i} = \frac{kx_e}{Bq\mu} (P_i - P) \quad (22)$$

Utilizando as Eqs. (17-22), podemos reescrever a equação da pressão, na sua forma expandida, como:

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 P_D}{\partial y_D^2} + \frac{\partial^2 P_D}{\partial z_D^2} = \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \quad (23)$$

A expressão acima é a forma adimensionalizada da Eq. (9). Uma vez obtido o comportamento da pressão ao longo do poço, o cálculo das vazões pode ser realizado, levando em consideração as condições operacionais. Uma hipótese com grau de realismo elevado é assumir que cada poço tem uma vazão total constante, onde os segmentos do poço apresentam escoamento uniforme. Nossa análise pode então começar com a definição do potencial  $\Phi$ . Para que  $P_D$  seja a solução da Eq. (22) o valor de  $\Phi$  deve ser:

$$\Phi = P + \rho q h \quad (24)$$

Na expressão acima temos que o potencial é a pressão no poço acrescida de um termo que contabiliza o efeito hidrostático. A adimensionalização gera uma equação semelhante a Eq. (22), como pode ser observado a seguir:

$$\Phi_D(j_w, j_s, i_w, i_s) = \frac{\Phi_i - \Phi_{(i_s, i_w)}}{q_{iD}(j_s, j_w)\Phi_i} \quad (25)$$

Assumimos que as pressões em cada ponto do poço apresentam influência entre si, ou seja, a pressão em cada segmento do poço produz uma resposta em todos os demais segmentos dos poços. Assim, temos que o potencial adimensional na Eq. (25) representa a resposta produzida no segmento  $i_s$  do poço  $i_w$ , em relação ao segmento  $j_s$  do poço  $j_w$ . Utilizando o princípio da superposição, podemos calcular a soma de todas as respostas em um segmento  $(i_s, i_w)$  como segue:

$$\frac{\Phi_i - \Phi_w(i_w)}{\Phi_i} = \sum_{j_w=1}^{n_w} \sum_{j_s=1}^{n_s(j_w)} q_{iD}(j_s, j_w)\Phi_D(j_s, j_w, i_s, i_w) \quad (26)$$

A obtenção da expressão acima parte da hipótese de que, em um poço,  $\Phi_w$  é constante em todos os segmentos. Escrevendo a Eq. (26) para todos os segmentos de cada poço, temos um sistema linear com  $n_s \times n_w$  equações. No entanto, esse sistema ainda não pode ser resolvido, uma vez que apresenta  $(n_s+1) \times n_w$  variáveis, onde  $n_w$  e  $n_s$  referem-se ao número de poços e o número de segmentos em que o poço é dividido, respectivamente. Acrescentam-se então  $n_w$  equações de conservação de fluxo para os poços, resultando no seguinte sistema:



Diferentemente dos modelos de poços analíticos tradicionais, na abordagem semi-analítica, tratada neste trabalho, a determinação do índice de produtividade do poço não é realizada por procedimentos completamente analíticos. Isso se deve ao fato de parte da rotina de cálculo envolver simulação numérica para a obtenção da pressão dos blocos do reservatório, onde está alocado o poço.

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o objetivo de corroborar a aplicação do modelo de poço semi-analítico para condições de operação que não atendem às hipóteses simplificativas do modelo analítico de Peaceman, alguns estudos de caso foram simulados. Em um primeiro momento o modelo estudado é validado através da sua comparação com o modelo analítico para condições onde o modelo analítico apresenta uma solução precisa. Os casos seguintes avaliam desde condições de poço não completamente penetrados no reservatório e heterogeneidades de permeabilidade, até configurações não convencionais de poços, onde o modelo semi-analítico é então proposto para tratar destas condições com maior acurácia.

Os resultados são expressos em termos das curvas de produção de óleo e gás. Com o intuito de uniformizar as análises, as propriedades de reservatório são essencialmente as mesmas para todos os estudos de caso. A Tabela 4.1 estabelece as características geométricas do reservatório, assim com dados de operação utilizados nos estudos de caso.

Tabela 4.1 – Características geométricas do reservatório e dados de operação para os estudos de caso.

<i>Propriedades</i>	<i>Valor</i>
Comprimento	170,69 [m]
Largura	170,69 [m]
Altura	30,48 [m]
Porosidade	0,35 [-]
Saturação Inicial	0,25 [-]
Pressão Inicial	20,68 [Mpa]
Permeabilidade nas Direções X e Y	$2,0 \times 10^{-13}$ [m <sup>2</sup> ]
Permeabilidade na Direção Z – casos 1 e 3	$2,0 \times 10^{-13}$ [m <sup>2</sup> ]
Permeabilidade na Direção Z – casos 2	$2,0 \times 10^{-14}$ [m <sup>2</sup> ]
Temperatura	299,82 [K]
Vazão de Injeção Constante	$5,66 \times 10^5$ [m <sup>3</sup> /d]
Pressão de Fundo do Poço Produtor	20,68 [Mpa]

Todos os casos tratam de uma recuperação secundária, através da injeção de gás imiscível, modelado como sendo uma corrente gasosa composta por 3 pseudocomponentes. As frações molares iniciais e de injeção dos pseudocomponentes para os estudos de caso são mostradas na Tabela 4.2.

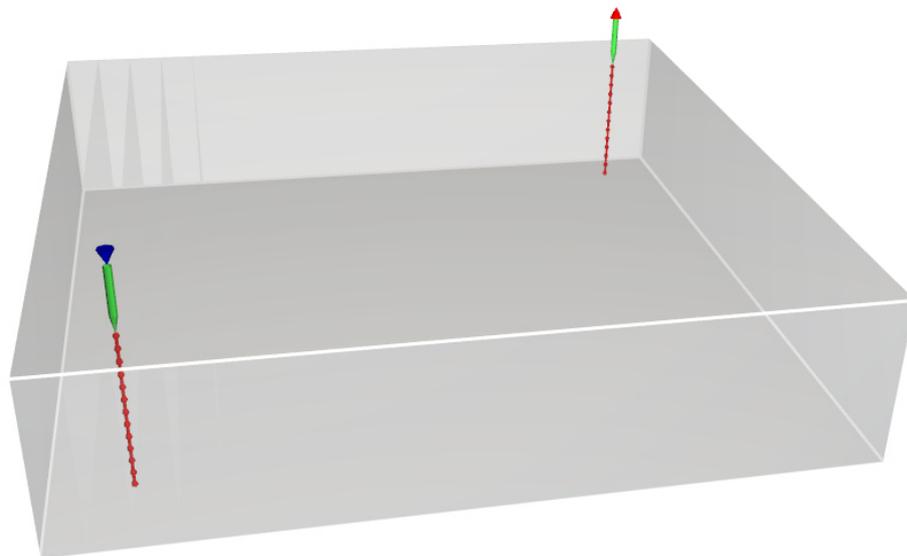
Tabela 4.2 – Frações molares de injeção dos estudos de caso.

<i>Componente</i>	<i>Fração Molar Global</i>	<i>Fração Molar de Injeção</i>
CO <sub>2</sub>	0,01	0,95
C <sub>1</sub>	0,19	0,05
C <sub>16</sub>	0,80	0,00

#### 4.1 Caso 1 – Poços Verticais

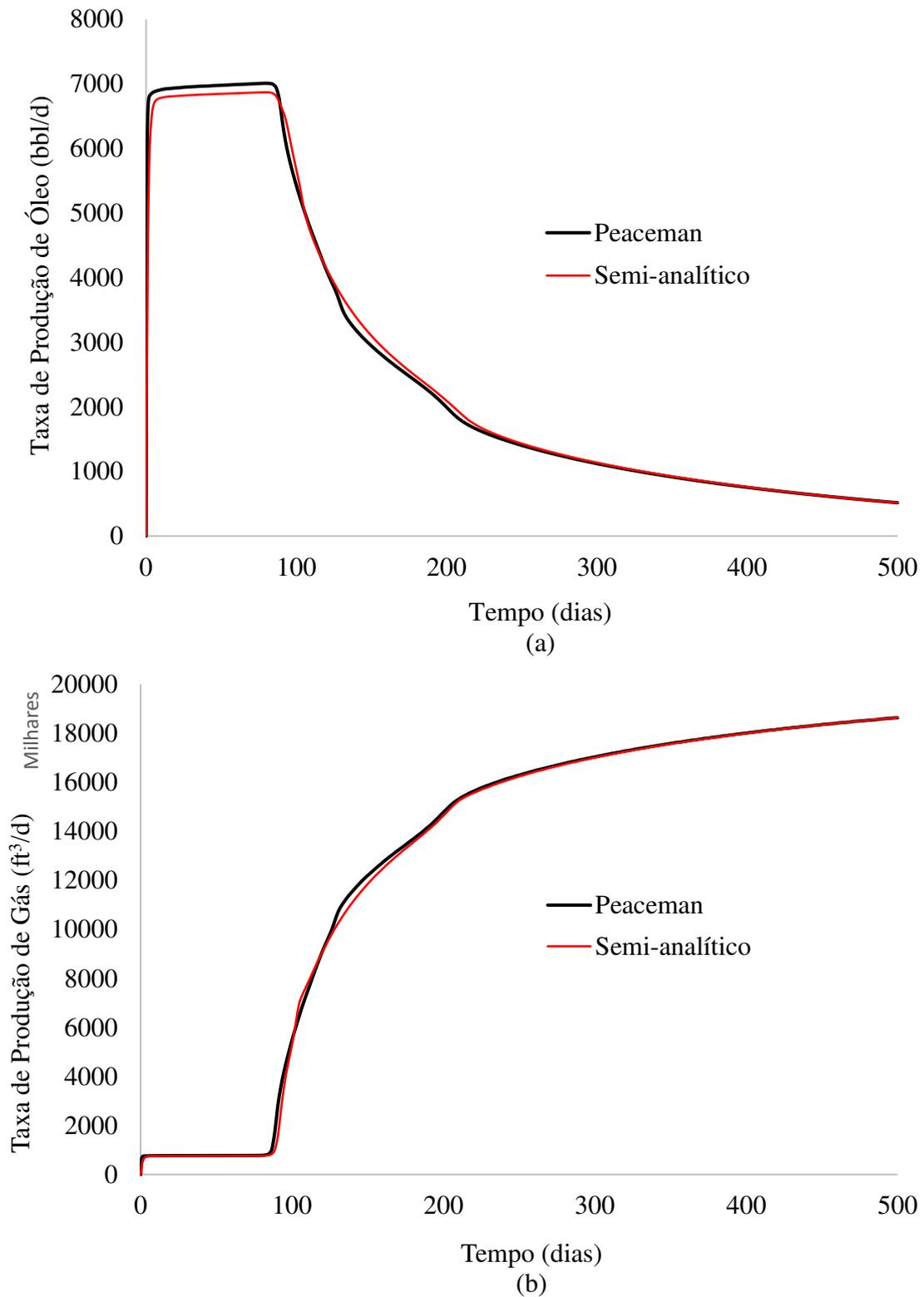
Neste caso ambos os modelos, analítico e semi-analítico, foram testados em uma malha não estruturada de mesmo refino para um quarto da configuração de *five-spot*, com dois poços verticais completamente penetrados no reservatório, sendo um produtor e o outro injetor. A Figura 4.1 esquematiza o reservatório modelado, onde o detalhe em azul indica o poço injetor e o em vermelho o produtor.

Figura 4.1. Layout do reservatório para o caso 1 e 2.



Para uma malha não estruturada de hexaedros, contendo 25215 volumes, os resultados em termos das curvas de produção de óleo e gás são mostrados na Figura 4.2.

Figura 4.2. – Taxas de produção para o caso 1. a) Óleo. b) Gás.



Como podemos observar na Figura 4.2, para as condições testadas neste caso, que atendem a maioria das hipóteses assumidas pelo modelo de Peaceman, o ajuste muito próximo das curvas de produção obtidas pelas duas formulações indica que a utilização do modelo semi-analítico culmina em um resultado coerente e confiável, validando assim a metodologia testada. No tempo de início, aproximadamente 200 dias para o referido caso, o escoamento é distinto do padrão de regime permanente, ou mesmo pseudopermanente, de forma que o poço produtor não sente a interferência de outros poços e das fronteiras do reservatório. O escoamento de óleo em regime transiente, inerente a este tempo, resulta em uma leve diferença entre os resultados obtidos pelos dois modelos, uma vez que a formulação analítica é idealizada para escoamento permanente.

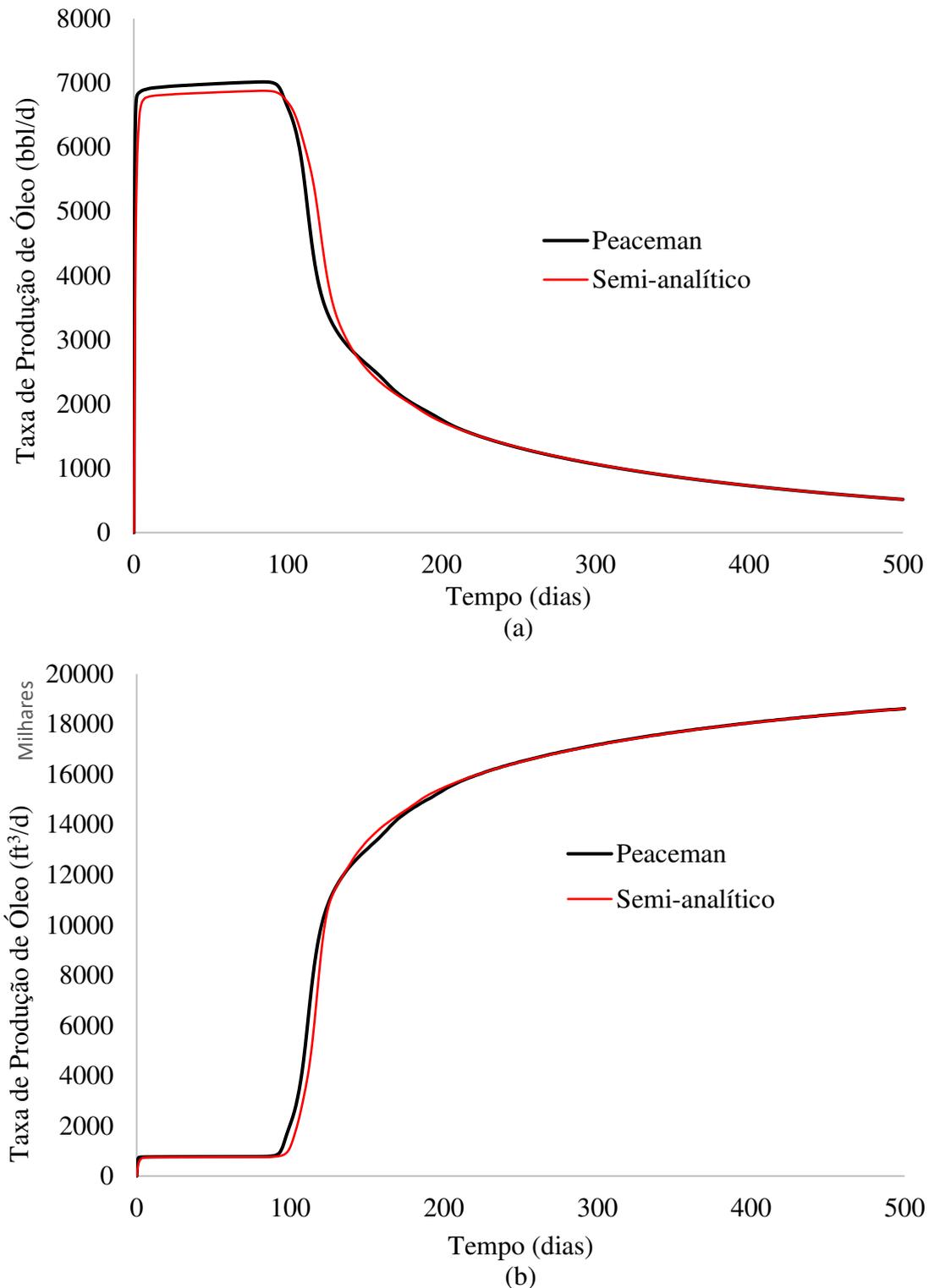
#### **4.2 Caso 2 – Reservatório com Anisotropia de Permeabilidade**

Para o caso 2 é mantida a mesma disposição dos poços, mostrada na Figura 4.1. As propriedades de reservatório e dados de operação, como visto na Tabela 4.1, são praticamente os mesmos do caso 1, com a única diferença da permeabilidade na direção vertical do reservatório ser reduzida a um valor dez vezes menor.

O objetivo desta análise é verificar a interferência da anisotropia da permeabilidade no cálculo do índice de produtividade. A permeabilidade vertical é naturalmente menor, devido às elevadas tensões provocadas pelo soterramento das diversas camadas rochosas resultarem em uma maior compactação da rocha nesse sentido.

As curvas de produção, de óleo e gás, obtidas para os dois modelos de poço são mostradas na Figura 4.3. Para simular este caso, a mesma malha não estruturada de hexaedro, contendo 25215 volumes, foi utilizada.

Figura 4.3. – Taxas de produção para o caso 2. a) Óleo. b) Gás.



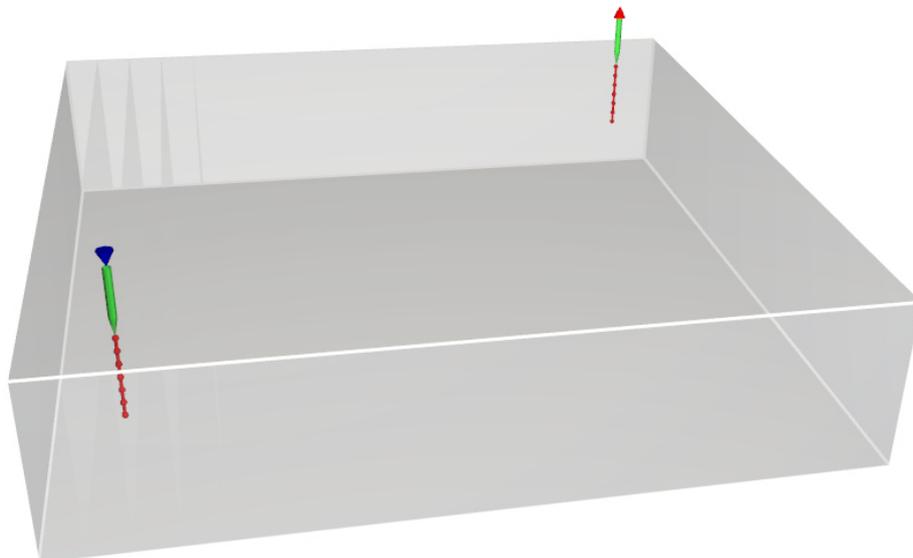
Pela análise da figura acima, a anisotropia de permeabilidade na direção vertical resulta em um leve desvio das curvas de produção obtidas pela formulação semi-analítica com relação às obtidas pelo modelo de Peaceman. Isso se deve ao fato de o modelo de Peaceman não contabilizar corretamente reservatórios com campo de permeabilidade. A diferença de

permeabilidade na direção vertical afeta especialmente o escoamento dos fluidos que passam de um padrão radial para linear, que por sua vez não é abrangido pelas hipóteses simplificativas do modelo analítico de Peaceman. A diferença nas curvas de produção referente ao tempo de início do escoamento também é perceptível, como observada no caso anterior, devendo-se à contribuição do regime transiente, onde não é percebido a interferência de outros poços e das fronteiras no poço produtor.

### 4.3 Caso 3 – Poços Verticais Parcialmente Completados

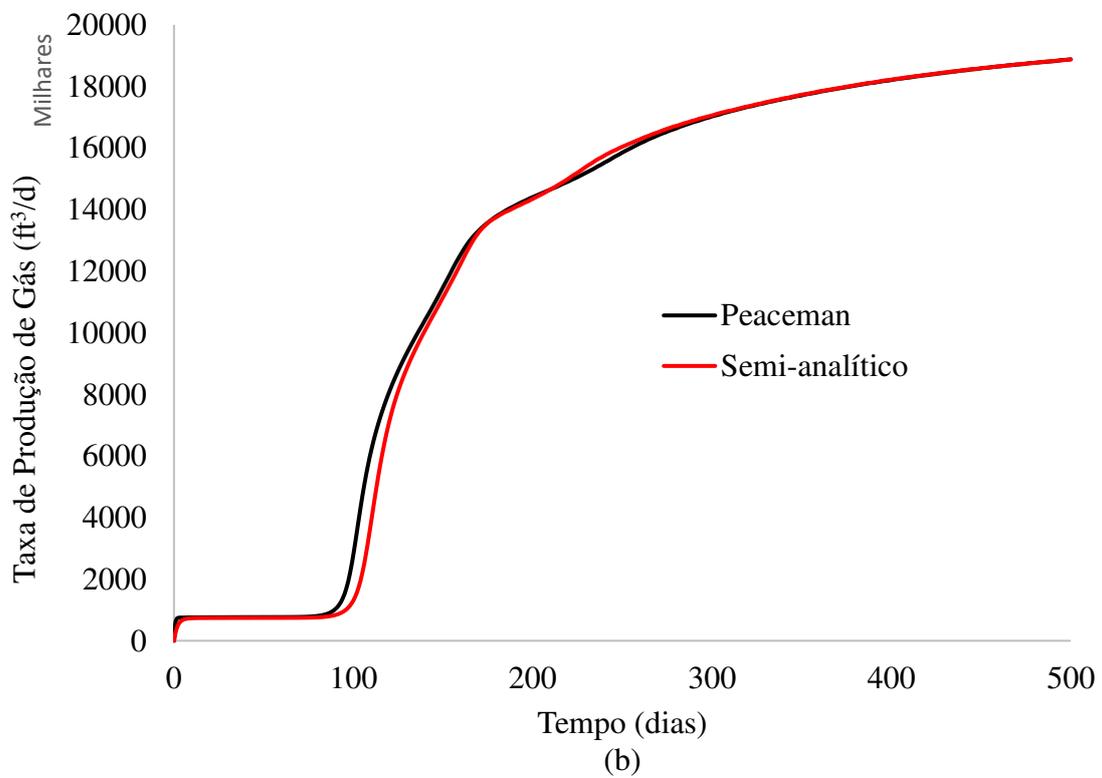
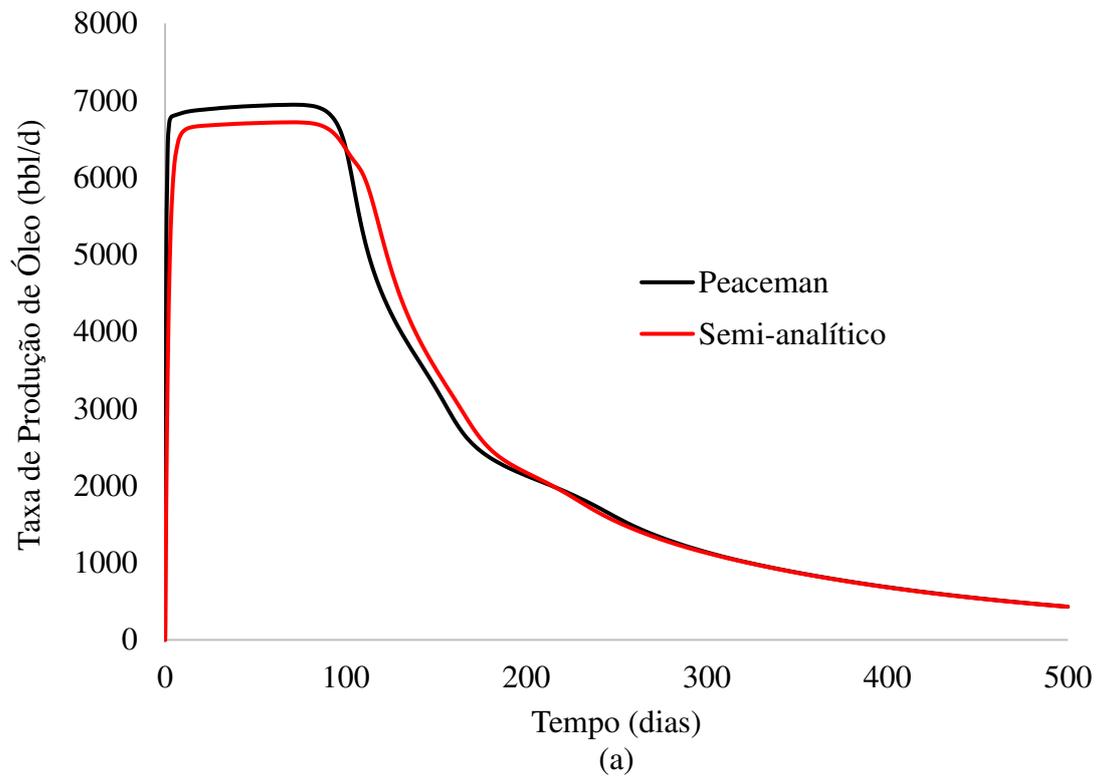
Para este caso são replicadas as mesmas condições do caso 1 com exceção da disposição dos poços, os quais não penetram totalmente no reservatório. Tal condição é comumente encontrada nas operações de campos de petróleo reais, quando se deseja evitar a problemática conhecida como cone de água, que consiste na conexão de um possível aquífero situado abaixo do reservatório, provocando uma redução da energia disponível para o escoamento dos fluidos petrolíferos e produção indesejada de água. A Figura 4.4 apresenta a configuração dos poços no reservatório hipotético, onde o detalhe em azul indica o poço injetor e o em vermelho o produtor.

Figura 4.4. Layout do reservatório para o caso 3.



Os resultados para este caso são contemplados na Figura 4.5, expressos na forma das curvas de produção de óleo e gás para a mesma malha não estruturada de hexaedros utilizada na simulação dos dois casos anteriores.

Figura 4.5. – Taxas de produção para o caso 3. a) Óleo. b) Gás.



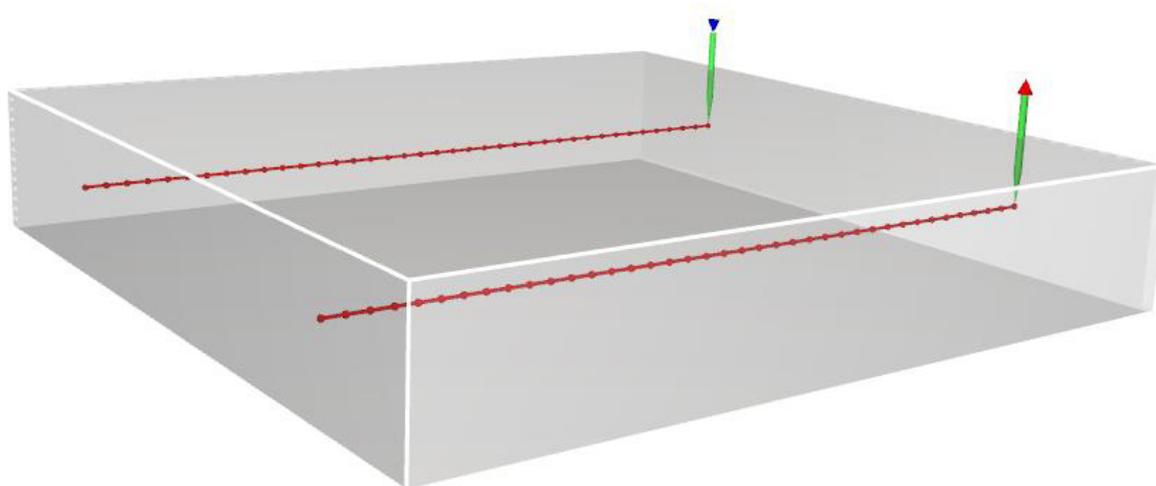
Os resultados obtidos para o caso 3 corroboram a justificativa em se utilizar o modelo de poço semi-analítico para avaliar a condição de poços não completamente penetrados no reservatório, uma vez que se trata de uma das hipóteses simplificativas do modelo de

Peaceman, não atendida para este caso. O desvio das curvas de produção se mostra mais acentuado que o observado nos casos anteriores. Esta disposição de poço promove um escoamento linear nas proximidades do fundo do poço, levando a uma avaliação errônea do modelo analítico, visto que este trabalha com a restrição de escoamento radial.

#### 4.4 Caso 4 – Poços Horizontais

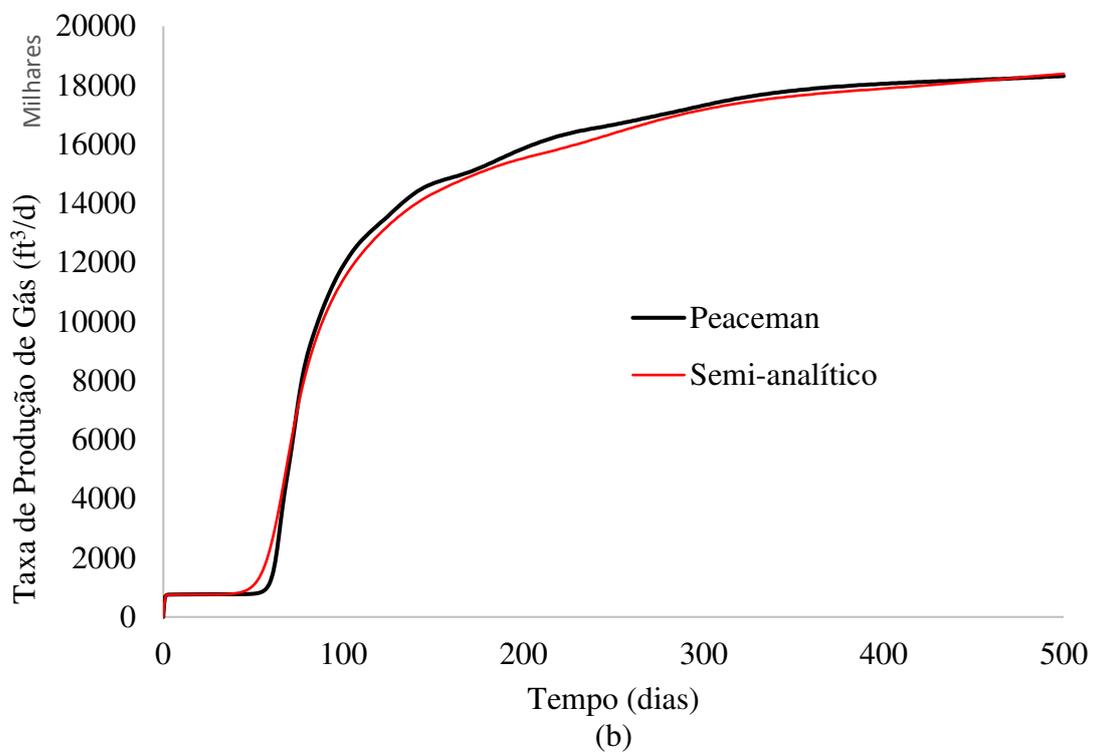
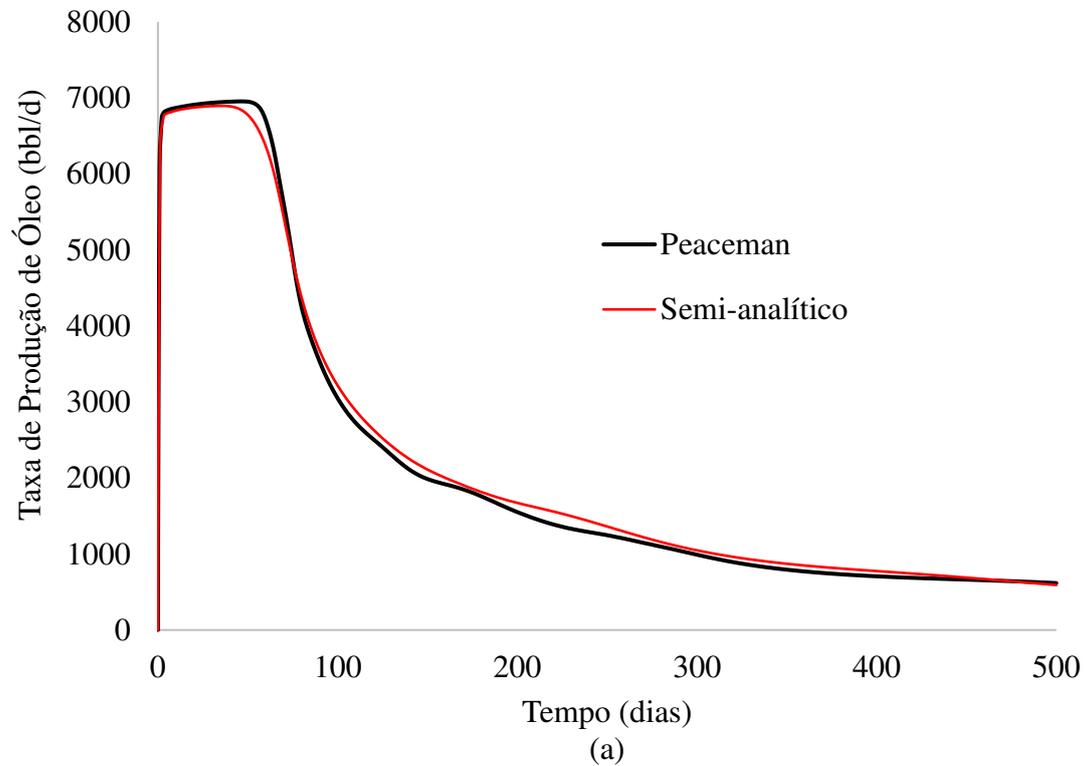
Uma das simplificações inerentes ao modelo de Peaceman é a hipótese de poços verticais. No entanto, a utilização de poços horizontais se apresenta de forma cada vez mais presente na indústria petrolífera, devido esta conformação apresentar uma maior área aberta ao fluxo, resultando em uma maior produção. Neste caso a configuração de poços horizontais é avaliada para o modelo analítico e semi-analítico, a fim de mostrar a diferença entre as duas formulações. O método semi-analítico não assume a restrição de poço vertical, esperando-se um resultado mais preciso obtido por esta formulação. A Figura 4.6 esquematiza os poços presentes no reservatório simulado para esse estudo de caso, onde o detalhe em azul indica o poço injetor e o em vermelho o produtor.

Figura 4.6. Layout do reservatório para o caso 4.



Para a obtenção dos resultados, em termos das curvas de produção de óleo e gás, foi utilizada a mesma malha não estruturada de hexaedros dos demais casos, contendo um total de 25215 volumes. A Figura 4.7 exhibe os resultados para este estudo de estudo.

Figura 4.7. – Taxas de produção para o caso 4. a) Óleo. b) Gás.



É esperada a diferença entre as duas formulações para esse arranjo de produção, visto que o padrão de escoamento da configuração de poços horizontais difere da condição de escoamento radial requerida pelo modelo de Peaceman. Dessa forma o resultado obtido por essa metodologia apresenta uma certa imprecisão para o caso estudado, apesar da semelhança nos perfis das duas curvas. Não é observado o ajuste preciso entre as curvas à medida que o escoamento permanente é estabelecido, diferentemente dos casos anteriores, onde a curva obtida pelos métodos semi-analítico e analítico convergem para um mesmo perfil de taxa de produção. Isto é um fator relevante para análise de reservatórios, no que concerne a estimação de produção em grandes horizontes temporais, mostrando que o modelo de poço analítico pode conduzir a resultados não realísticos, resultando em uma avaliação errônea do potencial do reservatório avaliado.

## 5 CONCLUSÃO

Por meio deste trabalho foi possível verificar a aplicabilidade de um modelo semi-analítico de poço em diversas condições onde os modelos analíticos tradicionais apresentam certas limitações. Mostrou-se que a formulação semi-analítica apresenta resultados satisfatórios para configurações onde são atendidas às restrições simplificativas do modelo de Peaceman, tomado como referência, validando assim a metodologia abordada.

Os resultados obtidos evidenciaram que para determinadas condições como anisotropia de permeabilidade, poços não completamente penetrados no reservatório e poços horizontais, o modelo semi-analítico apresenta uma solução mais precisa em relação ao modelo analítico. Isso se deve ao fato das condições restritivas assumidas pelo método analítico não serem atendidas para os casos estudados. O mesmo não ocorre para a formulação semi-analítica, pois esta não assume tais simplificações, implicando em resultados mais precisos.

Além disso, a utilização do método EbFVM na simulação composicional de reservatórios traz a possibilidade em se trabalhar com malhas não estruturadas, que podem ter o seu uso estendido para geometrias de reservatórios mais complexas. Dessa forma, constatou-se que, o método semi-analítico de poço utilizado em conjunto com malhas não-estruturadas fornece um maior alcance de atuação aos simuladores de reservatórios de petróleo, visto que possibilita o tratamento, com maior acurácia, de condições operacionais mais próximas da realidade como reservatórios de geometrias complexas, anisotropia de permeabilidade e configurações não convencionais de poços de petróleo.

## REFERÊNCIAS

- BABU, D.K., ODEH, A.S., Productivity of a Horizontal Well, SPE – Society of Petroleum Engineers (SPE 18298-PA), 1989.
- BALIGA, B.K., PATANKAR, S.V., A Control Volume Finite-Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer, Numerical Heat Transfer, vol. 6, p. 245-261, 1983.
- CHANG, Y.B., Development and Application of an Equation of State Compositional Simulator, THESIS (Ph.D in Petroleum Engineering) – Center of Petroleum and Geosystem Engineering, The University of Texas at Austin, Austin, TX, USA, 1990.
- CORDAZZO, J., An Element Based Conservative Scheme using Unstructured Grids for Reservoir Simulation, SPE International Student Paper Contest, The SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, 2004.
- CORDAZZO, J., MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C., HURTADO, F. S. V., The Negative Transmissibility Issue When Using CVFEM in Petroleum Reservoir Simulation - 1. Theory”, The 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT 2004, Braz. Soc. of Mechanical Sciences and Engineering - ABCM, Rio de Janeiro, Brazil, Nov. 29-Dec. 03., 2004.
- CORDAZZO, J., MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C., HURTADO, F. S. V., 2004, The Negative Transmissibility Issue When Using CVFEM in Petroleum Reservoir Simulation - 2. Results, The 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT 2004, Braz. Soc. of Mechanical Sciences and Engineering - ABCM, Rio de Janeiro, Brazil, Nov. 29-Dec. 03.
- ECONOMIDES, M.J., BRAND, C.W., FRICK, T.P., Well Configurations in Anisotropic Reservoirs, SPE – Society of Petroleum Engineers (SPE 27980), 1996.
- FORSYTH, P.A., A Control-Volume Finite Element Method for Local Mesh Refinement in Thermal Reservoir Simulation, SPE 18415, 1990.
- FUNG, L.S., HIEBERT, A.D., NGHIEM, L., Reservoir Simulation with a Control-Volume Finite –Element Method, SPE 21224, The 11th SPE Symposium on Reservoir Simulation, 1991.
- MAIZERET, P.D., Well Indices for Non Conventional Wells, Master’s Report, Stanford University, 1996.
- MARCONDES, F., SANTOS, L., VARAVEI, A., SEPEHRNOOORI, K., A 3D Hybrid Element-based Finite-volume Method for Heterogeneous and Anisotropic Compositional Reservoir Simulation, Journal of Petroleum Science & Engineering, 2013.
- PEACEMAN, D.W., Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation, SPE 6893, SPE-AIME 52nd Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Denver, 1977.

OUYANG, L.B., Single Phase and Multiphase Fluid Flow in Horizontal Wells, Master, Stanford University, 1998.

PEACEMAN, D.W., Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation with Nonsquare Grid Blocks and Anisotropic Permeability, SPEJ, p. 531-543, 1983.

PEACEMAN, D.W., A New Method for Representing Multiple Wells with Arbitrary Rates in Numerical Reservoir Simulation, SPERE, p. 253-257, 1995.

RAW, M., A New Control Volume Based Finite Element Procedure for the Numerical Solution of the Fluid Flow and Scalar Transport Equations, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1985.

SERVE, J., An Enhanced Framework of Modeling Complex Well Configurations, Master's Report, Stanford University, 2002.

SHU, J., Comparison of Various Techniques for Computing Well Index, Master's Report, Stanford University, 2005.

VALVATNE, P.H., A Framework for Modeling Complex Well Configurations, Master's Report, Stanford University, 2000.

WAN, J.; AZIZ, K., Semi-Analytical Well Model of Horizontal Wells With Multiple Hydraulic Fractures, SPE Journal, Dezembro, 2002.

WOLFSTEINER, C., Modeling and Upscaling of Nonconventional Wells in Heterogeneous Reservoir (Ph.D in Philosophy) – Committee on Graduate Studies, Stanford University, Stanford, CA, USA, 2002.

WOLFSTEINER, C.; DURLOFSKY, L.J.; AZIZ, K., Approximate Model for Productivity of Nonconventional Wells in Heterogeneous Reservoirs, SPE – Society of Petroleum Engineers Journal, vol. 5, No. 2, p. 218-226, 2000.

WOLFSTEINER, C.; DURLOFSKY, L.J.; AZIZ, K., Calculation of Well Index for Nonconventional Wells on Arbitrary Grids", Computational Geosciences, vol. 7, p. 61-82, 2003.

WOLFSTEINER, C.; AZIZ, K.; DURLOFSKY, L.J., Modeling Conventional and Non-Conventional Wells, 6<sup>th</sup> International Forum on Reservoir Simulation, Holf/Salzburg, Austria, Sept 3-7, 2001.