



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

LEVI PIO SOUZA ARRAIS ALENCAR

**MODELAGEM E CONTROLE DE ROBÔ MANIPULADOR DE ARQUITETURA
PARALELA.**

FORTALEZA/CE

2018

LEVI PIO SOUZA ARRAIS ALENCAR

MODELAGEM E CONTROLE DE ROBÔ MANIPULADOR DE ARQUITETURA
PARALELA.

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Coordenação do Curso Graduação em Engenharia
Mecânica, da Universidade Federal do Ceará,
como parte dos requisitos exigidos para obtenção
do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Prof. Dr. George André Pereira Thé

FORTALEZA/CE

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- A354m Alencar, Levi Pio Souza Arrais.
Modelagem e controle de robô manipulador de arquitetura paralela. / Levi Pio Souza Arrais Alencar. –
2018.
104 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,
Curso de Engenharia Mecânica, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. George André Pereira Thé.
1. Robôs manipuladores de arquitetura paralela. 2. Modelo cinemático. 3. Modelo dinâmico. 4. Sistemas
de controle. 5. PID. I. Título.

CDD 620.1

LEVI PIO SOUZA ARRAIS ALENCAR

MODELAGEM E CONTROLE DE ROBÔ MANIPULADOR DE ARQUITETURA
PARALELA.

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Coordenação do Curso Graduação em Engenharia
Mecânica, da Universidade Federal do Ceará,
como parte dos requisitos exigidos para obten-
ção do grau de Bacharel em Engenharia Mecâ-
nica.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. George André Pereira Thé
(Orientador)

Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Carlos André Dias Bezerra

Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Romulo do Nascimento Rodrigues

Universidade Federal do Ceará

FORTALEZA/CE

2018

A Deus, que guia os meus pés em seus caminhos de alegria, mesmo em meio às dificuldades e a quem recorro nesses momentos. Ao meu pai Ronaldo, por todo o amor, exemplo e legado que me deixou. À minha mãe Cristina e meu irmão Davi, por terem me dado todo amor e carinho de que preciso, além de todas as lutas que superamos juntos como uma família. À minha noiva Cecília, a quem eu amo todos os dias, cada dia mais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus que me dá a vida todos os dias, sustentando a mim e a minha família com todo zelo e cuidado.

À minha mãe Cristina, que sempre cuidou de mim e meu irmão com todo o amor, mesmo em meio a todas as dificuldades que surgiram ao longo de nossas vidas, nos educou e lutou para nos dar o melhor que podia em educação, saúde e amor, sendo este trabalho fruto dessa luta.

Ao meu pai Ronaldo, que, mesmo na brevidade da vida, me deixou um exemplo e legado ao qual luto todos os dias seguir, tentando ao máximo ser motivo de honra a ele.

Ao meu irmão Davi, que sempre se mostrou mais que um irmão, também um grande amigo, e, mesmo distante nessa etapa da vida, ainda se mostra um companheiro leal.

À minha noiva Cecília, que me dá a cada dia seu amor de forma terna e carinhosa, me fazendo ser um homem melhor através de todo o caminho que percorremos.

Aos meus amigos Wesley, Lucas, Adolfo, Eliézer e todos os outros que, devido ao grande número, muito menor do que a amizade que me deram, não é possível listar neste trabalho, pelos momentos de descontração, diversão e por todo o apoio que me deram durante os momentos difíceis na trajetória acadêmica.

Ao meu orientador George Thé, por todo o apoio, confiança e motivação que dispôs a mim, sempre me estimulando a elevar o potencial destinado aos trabalhos desenvolvidos.

Aos colegas do CENTAURO, que em muito me ajudaram a desenvolver este trabalho e por todos os momentos de companheirismo e amizade.

Por fim, a todos os professores do curso de Engenharia Mecânica da UFC, que me estimularam em seus ensinamentos e cobranças a crescer pessoal e profissionalmente.

Levi Pio Souza Arrais Alencar

"Os homens põem limites às trevas e exploram até os confins as rochas na escuridão e nas mais densas trevas." Jó 28:3

"Contudo, onde se poderá encontrar a sabedoria? Onde habita o entendimento?" Jó 28:12

"Então asseverou ao ser humano: No temor ao Senhor está a sabedoria e evitar o mal é ter entendimento." Jó 28:28

RESUMO

Neste trabalho são desenvolvidos os modelos cinemáticos direto e inverso para um robô manipulador baseado em um mecanismo de 5 barras com dois graus de liberdade, bem como o modelo dinâmico completo e o modelo dinâmico reduzido através da utilização das restrições holonômicas características da configuração espacial do sistema dinâmico. Para esse desenvolvimento, são explicitados todos os fundamentos necessários para o entendimento e validação do trabalho, como os métodos de descrição espacial dos mecanismos e a mecânica de Lagrange. Utilizando esses modelos, projetou-se um sistema de controle baseado em controladores Proporcional, Integral e Derivativo (PID) através de métodos matemáticos e simulações, testando-o em um sistema de controle real aplicado ao mecanismo robótico real utilizado como base para o projeto. Os resultados ilustram a robustez do controlador projetado, bem como sua aplicabilidade no setor industrial mediante as devidas adaptações. Além disso, os resultados obtidos também geram motivação para uma série de trabalhos a serem desenvolvidos, futuramente.

Palavras-chaves: Robôs manipuladores de arquitetura paralela, modelo cinemático, modelo dinâmico, sistemas de controle, PID.

ABSTRACT

In this work the direct and inverse kinematic models are developed for a robot manipulator based on a 5-bar mechanism with two degrees of freedom, as well as the full dynamic model and the reduced dynamic model through the use of the holonomic constraints characteristic of the spatial configuration of the dynamic system. For this development, all the necessary fundamentals for the understanding and validation of the work are explained, as the methods of spatial description of the mechanisms and the mechanics of Lagrange. Using these models, the control system based on Proportional, Integral and Derivative controllers (PID) was designed through mathematical methods and simulations, testing it in a real control system applied to the real robotic mechanism used as the basis for the project. The results illustrate the robustness of the designed controller, as well as its applicability in the industrial sector through the appropriate adaptations. In addition, the results obtained also generate motivation for a series of works to be developed, in the future.

Key-words: Robots parallel architecture manipulators, kinematic model, dynamic model, control systems, PID.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Exemplo de cadeia cinemática de um manipulador de arquitetura serial.	18
Figura 2	– Exemplo de cadeia cinemática de um PKM.	18
Figura 3	– Manipuladores de arquitetura serial na execução de algumas tarefas.	19
Figura 4	– Manipuladores de arquitetura paralela na execução de algumas tarefas.	20
Figura 5	– Plataformas computacionais utilizadas.	24
Figura 6	– Equipamentos utilizados.	25
Figura 7	– Funcionamento dos equipamentos.	25
Figura 8	– Metodologia de projeto.	26
Figura 9	– Frames com mesma orientação e distanciados entre si.	28
Figura 10	– Frames sem distanciamento e com orientações diferentes.	29
Figura 11	– Rotação do <i>frame B</i> sobre o eixo ${}^A\hat{X}$	30
Figura 12	– <i>Frame B</i> girado e transladado em relação ao <i>frame A</i>	32
Figura 13	– Parâmetros para descrição de vínculos em mecanismos.	36
Figura 14	– Convenção para distribuição dos <i>frames</i> no mecanismo robótico.	37
Figura 15	– Robô planar baseado em um mecanismo de 5 barras.	38
Figura 16	– Robô de arquitetura paralela dividido em duas cadeias cinemáticas.	38
Figura 17	– Distribuição de <i>frames</i> em robô de arquitetura paralela.	39
Figura 18	– Parâmetros dimensionais.	40
Figura 19	– Geometria para a posição da ferramenta, considerando a cinemática direta.	46
Figura 20	– Geometria para a posição da ferramenta, considerando a cinemática inversa.	48
Figura 21	– Centros de massa dos elos.	54
Figura 22	– Clepsidra - Relógio de Ctesíbio baseado no controle de nível de água.	63
Figura 23	– Princípio dos sistemas de controle.	64
Figura 24	– Sistema de controle em malha aberta.	64
Figura 25	– Sistema de controle em malha fechada.	65
Figura 26	– Resposta de um controlador do tipo <i>on-off</i>	66
Figura 27	– Resposta de um controlador do tipo proporcional.	67
Figura 28	– Resposta de um controlador do tipo proporcional e integral (PI).	68
Figura 29	– Resposta de um controlador do tipo proporcional e derivativo (PD).	69
Figura 30	– Resposta de um controlador do tipo proporcional, integral e derivativo (PID).	70
Figura 31	– Malha de controle fechada com controlador PID.	70
Figura 32	– Malha de controle para controle independente de juntas.	71
Figura 33	– Malha fechada de controle independente de juntas utilizando controlador PID.	72
Figura 34	– Malha fechada de controle de coordenadas cartesianas através do controle independente de juntas.	72
Figura 35	– Resposta e período crítico para ganho crítico.	73

Figura 36 – Resposta de uma malha de controle PID através do método de sintonia de ganhos de Ziegler-Nichols.	74
Figura 37 – Resposta de uma malha de controle PID através do método de sintonia de ganhos de Ziegler-Nichols, após ajuste fino.	74
Figura 38 – Malha referente ao método computacional para realização de simulação da malha de controle.	75
Figura 39 – Estruturas cinemáticas obtidas a partir do modelo cinemático inverso.	78
Figura 40 – OpenDXF V1.0 - Software de simulação cinemática e comunicação computacional desenvolvido.	79
Figura 41 – Simulação do movimento do robô de acordo com pontos interpretados através do OpenDXF.	80
Figura 42 – Respostas oscilatórias de amplitude aproximadamente constante.	82
Figura 43 – Respostas do sistema com ganhos de Ziegler-Nichols.	84
Figura 44 – Respostas do sistema após ajuste fino de ganhos.	85
Figura 45 – Malha de controle implementada no robô real.	85
Figura 46 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 90^\circ$ e $\psi_{21} = 90^\circ$).	86
Figura 47 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 120^\circ$ e $\psi_{21} = 60^\circ$).	87
Figura 48 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 145^\circ$ e $\psi_{21} = 35^\circ$).	88
Figura 49 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 148^\circ$ e $\psi_{21} = 32^\circ$).	89
Figura 50 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 90^\circ$ e $\psi_{21} = 90^\circ$) (Vertical).	90
Figura 51 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 145^\circ$ e $\psi_{21} = 35^\circ$) (Vertical).	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características de manipuladores seriais e paralelos.	17
Tabela 2 – Principais tipos de juntas.	35
Tabela 3 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para o robô de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de cinco barras.	40
Tabela 4 – Parâmetros de Ziegler-Nichols para obtenção de ganhos para o controlador PID.	73
Tabela 5 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para o robô manipulador de arquitetura paralela.	77
Tabela 6 – Resultados para o modelo cinemático direto desenvolvido.	78
Tabela 7 – Resultados para o modelo cinemático inverso desenvolvido.	79
Tabela 8 – Massas e posições dos centros de massa dos elos.	81
Tabela 9 – Dados técnicos para o acionamento do robô.	81
Tabela 10 – Ângulos de juntas ativas utilizados para sintonia de ganhos.	81
Tabela 11 – Ganhos proporcionais e períodos críticos.	82
Tabela 12 – Ganhos proporcionais, integrais e derivativos pelo método de Ziegler-Nichols.	83
Tabela 13 – Ganhos proporcionais, integrais e derivativos obtidos após ajuste fino.	83
Tabela 14 – Posição inicial e de calibração para os testes do sistema de controle.	86
Tabela 15 – Erros de regime permanente.	88
Tabela 16 – Erros de regime permanente sob efeitos do termo gravitacional.	91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PKM	<i>Parallel Kinematic Machines</i>
gdl	Graus de liberdade
dof	<i>Degrees of freedom</i>
DH	Parâmetros de Denavit-Hartenberg
ORG	Origem
P	Prismática
C	Cilíndrica
H	Helicoidal
R	De revolução
F	Plana
S	Esférica
NC	Não conservativa
SISO	<i>Single Input, single Output</i>
MIMO	<i>Multiple Inputs, Multiple Outputs</i>
P	Controlador Proporcional
PI	Controlador Proporcional e Integral
PD	Controlador Proporcional e Derivativo
PID	Controlador Proporcional, Integral e Derivativo
RV	Razão de Velocidades
SP	<i>Set-Point</i>
CC	Corrente Contínua

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Motivação	21
1.2	Objetivos Gerais e Específicos	21
1.2.1	Objetivos específicos	21
1.3	Resumo dos Capítulos Restantes	22
2	METODOLOGIA E MATERIAIS	24
2.1	Plataformas Computacionais Utilizadas	24
2.2	Equipamentos Utilizados	24
2.3	Metodologia	26
2.4	Resumo do Capítulo	27
3	DESCRIÇÃO ESPACIAL DOS MECANISMOS ROBÓTICOS	28
3.1	Descrição de Posição	28
3.2	Descrição de Orientação	29
3.3	Matriz de Transformação Homogênea	32
3.4	Resumo do Capítulo	33
4	CINEMÁTICA DE ROBÔS DE ARQUITETURA PARALELA	34
4.1	Convenção de Denavit-Hartenberg	36
4.2	Cinemática Direta de Robôs de Arquitetura Paralela	38
4.3	Cinemática Inversa de Robôs de Arquitetura Paralela	43
4.4	Posição e Orientação da Ferramenta	46
4.5	Resumo do Capítulo	48
5	MODELAGEM DINÂMICA DE ROBÔS DE ARQUITETURA PARALELA	49
5.1	Modelagem Dinâmica Completa de Robôs de Arquitetura Paralela	49
5.1.1	Mecânica de Lagrange	49
5.1.2	Modelo Dinâmico de Robôs de Arquitetura Paralela	53
5.2	Restrições Holonômicas e Não Holonômicas	56
5.2.1	Restrições Holonômicas	56
5.2.2	Restrições Não Holonômicas	57
5.3	Modelo Dinâmico Reduzido de Robôs de Arquitetura Paralela	57
5.4	Resumo do Capítulo	62
6	CONTROLADORES PID	63

6.1	Sistemas de Controle	63
6.1.1	Breve Histórico	63
6.1.2	Funcionamento	64
6.1.3	Tipos de controladores	65
6.1.3.1	Controlador <i>On-Off</i>	66
6.1.3.2	Controlador Proporcional (P)	66
6.1.3.3	Controlador Proporcional e Integral (PI)	67
6.1.3.4	Controlador Proporcional e Derivativo (PD)	68
6.1.3.5	Controlador Proporcional, Integral e Derivativo (PID)	69
6.2	Controle PID em Malha Fechada	70
6.3	Método de sintonia	72
6.3.1	Método de Ziegler-Nichols	73
6.3.2	Ajuste Fino de Ganhos	74
6.4	Método Computacional	75
6.5	Resumo do Capítulo	75
7	RESULTADOS OBTIDOS	77
7.1	Cinemática Direta e Inversa	77
7.2	Sistema de Controle	80
7.2.1	O Mecanismo Robótico Real	80
7.2.2	Sintonia de Ganhos	81
7.2.3	Resultados Simulados x Resultados Empíricos	83
7.2.4	Robustez do controlador	88
7.3	Resumo do Capítulo	92
8	CONCLUSÕES	93
	REFERÊNCIAS	94
	APÊNDICE A – ELEMENTOS DAS MATRIZES REFERENTES AO MODELO DINÂMICO	97
	APÊNDICE B – ELEMENTOS DAS MATRIZES REFERENTES AO MODELO DINÂMICO REDUZIDO	100

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o uso de dispositivos robóticos está amplamente consolidado nos mais diversos ramos profissionais, sendo os manipuladores mecânicos os mais estabelecidos dentre tais dispositivos. Os primeiros manipuladores mecânicos industriais foram desenvolvidos na década de 1950 e, desde a década de 1990, seu custo tem se tornado cada vez menor frente ao custo do trabalho humano. Além do fator custo, outros fatores, tais como velocidade, precisão e flexibilidade, associados à execução de tarefas, tornam a utilização desses dispositivos mais atrativa (CRAIG, 2005).

Com a acelerada evolução da robótica, em meio às necessidades de uma indústria cada vez mais competitiva, a diversidade de manipuladores mecânicos trouxe a necessidade de classificá-los de acordo com sua arquitetura cinemática, sendo, atualmente, classificados em dois grupos: manipuladores de arquitetura serial, de arquitetura paralela (ou PKM - *Parallel Kinematic Machines* (BRIOT; KHALIL, 2015)) e de arquitetura híbrida, que apresenta características dos dois grupos anteriores. Os manipuladores seriais são os mais difundidos dentre os grupos de robôs manipuladores citados, mas este fato não indica uma superioridade absoluta com relação aos manipuladores paralelos, aliás, estes apresentam uma série de vantagens, dentre elas: maior estabilidade, peso e momento de inércia menores, o que possibilita a execução de tarefas que requerem maior precisão ou maior velocidade de execução, enquanto que suas principais desvantagens são: menor volume de trabalho e um maior número de restrições. Algumas características dos dois principais grupos de manipuladores mecânicos (arquitetura serial e arquitetura paralela), que podem definir para quais tarefas cada grupo é mais adequado, podem ser visualizadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Características de manipuladores seriais e paralelos.

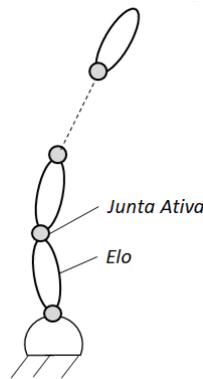
Grupo	Serial	Paralelo
Momento de Inércia	Elevado	baixo
Peso	Elevado	baixo
Volume de Trabalho	Elevado	Pequeno
Controle de Posição	Difícil	Fácil
Controle de Força	Fácil	Difícil
Modelagem Dinâmica	Fácil	Difícil
Fabricação	Difícil	Fácil

Fonte: Adaptado de (ARAI; SHERIDAN, 1989).

Para um melhor entendimento dessas duas classes, faz-se necessário o conhecimento das definições de alguns elementos que constituem um mecanismo: elos, juntas e graus de liberdade. Elos são os corpos rígidos que constituem a arquitetura de um mecanismo. Eles são unidos por juntas, que podem ser ativas (quando seu movimento é estabelecido por um atuador) ou passivas (quando seu movimento é uma consequência do movimento de uma junta ativa), sendo que cada

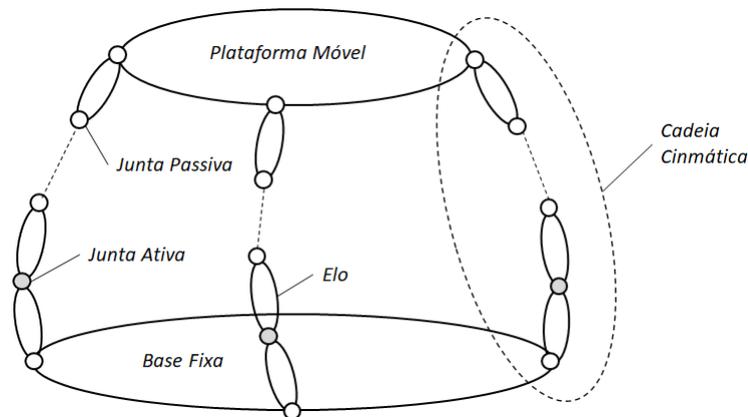
junta une um par de elos vizinhos. graus de liberdade (gdl ou dof, do inglês *degree of freedom*) se refere ao número de variáveis de posição independentes do sistema, que são necessárias para descrever a configuração espacial do mecanismo (CRAIG, 2005), ou seja, descrever como a cadeia cinemática, ou as cadeias cinemáticas, do robô estarão dispostas no espaço com relação à posição de seus elos e juntas e orientação dos seus elos. A partir dessas definições, pode-se definir arquitetura serial, para um robô manipulador, como um conjunto de elos, unidos por juntas (geralmente, todas ativas) e distribuídos através de uma cadeia cinemática aberta, como ilustra a Figura 1, em que, geralmente, o número de graus de liberdade é igual ao número de juntas totais, enquanto arquitetura paralela, para um robô manipulador, pode ser definida como um conjunto de elos, unidos por juntas (ativas e passivas) e distribuídos através de uma cadeia cinemática fechada, como ilustra a Figura 2, constituída por pelo menos duas cadeias cinemáticas ligadas entre uma base fixa e uma base móvel, em que, geralmente, o número de graus de liberdade é diferente do número de juntas totais e igual ao número de juntas ativas.

Figura 1 – Exemplo de cadeia cinemática de um manipulador de arquitetura serial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2 – Exemplo de cadeia cinemática de um PKM.



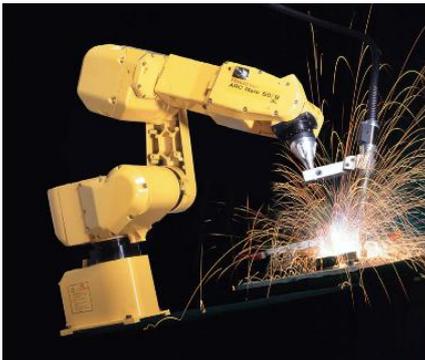
Fonte: Elaborada pelo autor.

As aplicações de cada grupo de robô manipulador são as mais diversas possíveis, e estão de acordo com os requisitos para a execução da tarefa desejada. Para os robôs manipuladores seriais, algumas aplicações são as seguintes:

- Operações de montagem em linha de produção (Figura 3b);
- Soldagem de precisão (Figura 3a);
- Processo de pintura, corte ou acabamento;
- Processos de manipulação e transporte.

Figura 3 – Manipuladores de arquitetura serial na execução de algumas tarefas.

(a)



Fonte: (TACO, Acesso: 11 de Março de 2018.)

(b)



Fonte: (TAN, Acesso: 11 de Março de 2018.)

Para manipuladores mecânicos paralelos, algumas aplicações são as seguintes (BRIOT; KHALIL, 2015)):

- Operações *Pick-and-Place* em indústrias alimentícias, farmacêuticas, dentre outras (Figura 4a);
- Impressoras 3D;
- Operações médicas (Figura 4b);
- Simuladores de movimento (Figura 4d);
- Acesso a estruturas *offshore* (Figura 4c).

Figura 4 – Manipuladores de arquitetura paralela na execução de algumas tarefas.

(a)



Fonte: (REVIEW, Acesso: 11 de Março de 2018.)

(b)



Fonte: (ROBOTYKA, Acesso: 11 de Março de 2018.)

(c)



Fonte: (MARITIEMNIEUWS, Acesso: 11 de Março de 2018.)

(d)



Fonte: (CARMINATI, Acesso: 11 de Março de 2018.)

Fonte: BRIOT, et al. (2015).

Algumas das tarefas que podem ser executadas por manipuladores mecânicos, mencionadas anteriormente, são ilustradas na Figura 3, para manipuladores seriais e na Figura 4, para manipuladores paralelos.

Por trás de todos os manipuladores mecânicos, existem sistemas de controle que garantem que as tarefas previstas sejam bem executadas. Esses sistemas podem se basear em diversos tipos de controladores, desde controladores clássicos, como o são os controladores PID (*Proportional-Integral-Derivative* ou Proporcional-Integral-Derivativo), até controladores adaptativos, como o são os controladores *Fuzzy* (baseados em lógica difusa) ou controladores preditivos, baseados em redes neurais artificiais (WESTENSKOW, 1997). Para muitos controladores, o desenvolvimento da modelagem dinâmica do sistema a ser controlado se faz necessária devido a necessidade de realizar-se simulações para obtenção dos parâmetros a serem utilizados no controlador. Como explicitado na Tabela 1, a modelagem dinâmica de manipuladores mecânicos de arquitetura paralela é, consideravelmente, mais complexa que a modelagem dinâmica dos seriais, devido a presença de juntas passivas (esse aspecto será abordado nos Capítulos 4 e 5). Controladores

baseados em redes neurais artificiais, por exemplo, dispensam a necessidade de um modelo dinâmico como exposto por (MELEIRO *et al.*, 2002) e (AGUIRRE *et al.*, 1998), entretanto, necessitam de um vasto conjunto de dados experimentais. Para este trabalho, foi escolhido o projeto de um controlador PID clássico aplicado a um PKM de 2 graus de liberdade.

1.1 Motivação

Com o advento de uma indústria cada vez mais automatizada, o estudo de sistemas robóticos automatizados por sistemas de controle torna-se cada vez mais necessário, sendo os conhecimentos adquiridos a partir desse estudo aplicáveis em muitas outras áreas do conhecimento. Para isso, existe uma vasta produção científica a respeito de diversos assuntos voltados a manipuladores mecânicos de arquitetura serial, entretanto, essa quantidade é consideravelmente inferior quando o foco são os manipuladores de arquitetura paralela. O estudo e pesquisa aplicados a esta classe de manipuladores mecânicos resulta em um aprendizado consideravelmente maior devido a uma maior quantidade de obstáculos para o desenvolvimento de um trabalho. Além disso, cada trabalho realizado tendo como base essa classe de manipuladores é de grande proveito para a comunidade científica.

Outro ponto motivador deste trabalho é gerar resultados que abram caminho para trabalhos a serem desenvolvidos futuramente. Um exemplo que pode ser citado é com relação à comparação entre estratégias de controle para verificação de suas performances. Outro trabalho futuro, que se vale dos resultados obtidos neste trabalho, é com relação a uma análise da "degeneração" histórica da dinâmica do robô real, tendo como base o modelo dinâmico aqui desenvolvido e utilizando-se a estratégia de particionamento da lei de controle. Em suma, o desenvolvimento deste trabalho abre caminho para uma série de trabalhos futuros.

1.2 Objetivos Gerais e Específicos

Em virtude do exposto na seção anterior, o objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento dos modelos cinemáticos e dinâmicos para uma PKM com 2 graus de liberdade, bem como o projeto de um controlador PID clássico para aplicação em robô real.

1.2.1 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho estão listados a seguir:

- Aplicar os modelos desenvolvidos em uma malha de controle em simulação para o projeto de um controlador PID clássico, utilizando-se para isso a linguagem de programação Julia;
- Desenvolver um malha de controle, utilizando-se o controlador projetado, para aplicação em robô PKM real;
- Realização de testes para obtenção de resultados;

- Comparação dos resultados obtidos através do sistema real com os obtidos através do sistema simulado, para validação dos modelos e do controlador projetado;
- Apresentar as conclusões do trabalho proposto.

1.3 Resumo dos Capítulos Restantes

O restante deste documento está organizado segundo a lista de capítulos apresentada abaixo:

- **Capítulo 2** - Descreve as plataformas computacionais e os equipamentos utilizados no desenvolvimento do projeto ao qual se refere este trabalho, bem como a metodologia científica utilizada para obtenção dos resultados propostos nos objetivos deste trabalho.
- **Capítulo 3** - Explicita as formas de descrever espacialmente os mecanismos robóticos, segundo as descrições de posição e orientação, sendo desenvolvidas todas as transformações necessárias para realizar essas descrições.
- **Capítulo 4** - Descreve a convenção de Denavit-Hartenberg e a convenção para distribuição dos *frames* sobre o mecanismo robótico. Além disso, serão desenvolvidos os modelos cinemáticos direto e inverso para um mecanismo robótico de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras, bem como desenvolvidas as equações descritivas dos ângulos de juntas passivas em função dos ângulos de juntas ativas e as equações para utilização da posição real da ferramenta.
- **Capítulo 5** - Descreve a Mecânica Lagrangeana para desenvolvimento de modelos dinâmicos, bem como o desenvolvimento do modelo dinâmico completo para o mecanismo robótico em estudo. A partir dos conceitos de restrições abordados neste capítulo, serão encontradas as restrições holonômicas para o sistema em estudo e, a partir delas, será desenvolvido o modelo dinâmico reduzido em termos de coordenadas generalizadas ativas.
- **Capítulo 6** - Será explicitado um breve histórico da engenharia de controle, bem como o funcionamento e os principais tipos de controladores industriais clássicos. Além disso, será abordado o método de sintonia de ganhos de Ziegler-Nichols associado a um ajuste fino de ganhos, um dos métodos de sintonia mais utilizados para sistemas não-lineares. Por fim, será descrito o método computacional utilizado para obtenção de resultados através de simulação utilizado neste trabalho.
- **Capítulo 7** - Serão explicitados e discutidos todos os resultados obtidos neste trabalho, desde os resultados para os modelos cinemáticos desenvolvidos, até os resultados para as simulações do sistema de controle projetado utilizando o modelo dinâmico desenvolvido. Além disso, serão ilustrados e discutidos os resultados obtidos para o mecanismo robótico

real, comparando-os com os resultados simulados e testando a robustez do sistema de controle projetado ao impor ao sistema dinâmico real condições não modeladas no projeto.

- **Capítulo 8** - Este capítulo conclui o que foi proposto por este trabalho, explicitando as contribuições geradas devido ao desenvolvimento deste trabalho.

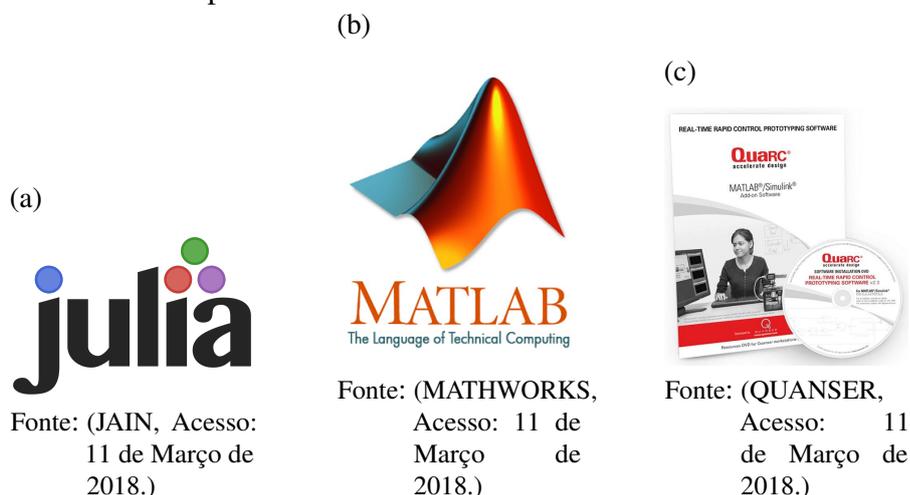
2 METODOLOGIA E MATERIAIS

Este capítulo descreve os equipamentos e materiais utilizados neste trabalho, bem como a metodologia utilizada para obtenção dos objetivos explicitados anteriormente, sendo cada etapa da metodologia melhor elucidada nos próximos capítulos.

2.1 Plataformas Computacionais Utilizadas

Neste trabalho, duas plataformas computacionais foram utilizadas. A primeira, utilizada para as simulações, precedentes da aplicação prática, foi a linguagem de programação *Julia Language* (Figura 5a) voltada para o cálculo numérico. A segunda, utilizada para a aplicação prática, foi o software MATLAB © (Figura 5b). O motivo da escolha de duas plataformas diferentes para realização das simulações e das aplicações reais se deve ao fato de a primeira plataforma apresentar uma velocidade de processamento computacional superior á segunda, o que é conveniente para as simulações que requerem a realização de métodos numéricos aplicados a equações matriciais diferenciais em diversas iterações, enquanto a segunda plataforma se mostrou mais conveniente para as aplicações reais devido à utilização do software de comunicação em tempo real QUARC 2.1 (Figura 5c), desenvolvido pela empresa Quanser © e integrado ao software MATLAB ©.

Figura 5 – Plataformas computacionais utilizadas.



2.2 Equipamentos Utilizados

Os principais equipamentos utilizados neste trabalho foram desenvolvidos pela empresa Quanser © e disponibilizados pelo Centro de Referência em Automação e Robótica (CENTAURO) em parceria com a Universidade Federal do Ceará (UFC). Trata-se de equipamentos destinados a experimentos em tempo real voltados a pesquisas científicas, dentre eles o robô

planar (todos os elos no mesmo plano) de arquitetura paralela com dois graus de liberdade (*2 dof planar robot* - Figura 6a), o sistema de aquisição de dados composto por uma placa conectada ao computador (*Q4 data acquisition card* - Figura 6b) via comunicação PCI e uma placa externa (*Q4 data acquisition board* - Figura 6c) e o sistema de amplificação de sinais (*Amplifier VoltPAQ-X2* - Figura 6d).

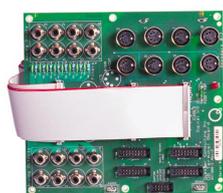
Figura 6 – Equipamentos utilizados.



(a) *2 dof planar robot*



(b) *Q4 data acquisition card*



(c) *Q4 data acquisition board*

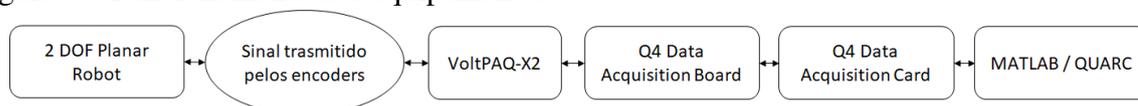


(d) *VoltPAQ-X2*

Fonte: (QUANSER, Acesso: 11 de Março de 2018.)

A metodologia de funcionamento dos equipamentos é ilustrada no diagrama da Figura 7. O *2 DOF Planar Robot* é o mecanismo robótico propriamente dito, trata-se de um robô de arquitetura paralela planar e horizontal (seu funcionamento padrão é definido com todos os elos dispostos horizontalmente) atuado por dois motores rotativos de Corrente Contínua que têm seus movimentos interpretados por encoders, dispositivos transdutores que interpretam movimentos rotativos como pulsos elétricos, e enviados um amplificador de sinais denominado *VoltPAQ-X2*. Após o sinal haver sido amplificado, é enviado para uma placa de aquisição de dados que possui canais de comunicação de entrada (pelos quais recebe dados do amplificador) e saída (pelos quais envia sinais para o amplificador de sinais). A interface entre a placa de aquisição de dados e o software em computador é realizada através de uma placa de controle, a *Q4 Data Acquisition Card*, conectada ao computador via entrada PCI (entradas para comunicação entre dispositivos periféricos e a placa mãe do computador) e configurada para se comunicar com o software QUARC dentro do ambiente de processamento do software MATLAB.

Figura 7 – Funcionamento dos equipamentos.

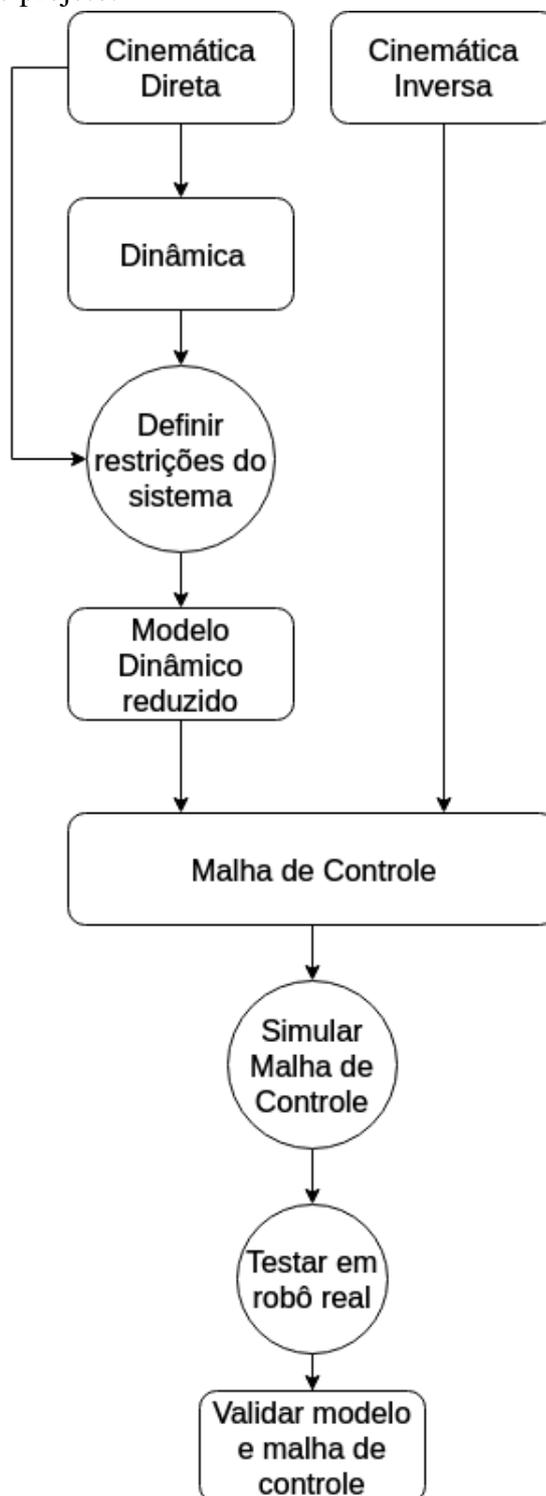


Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3 Metodologia

O projeto ao qual este trabalho se refere segue a metodologia descrita pelo fluxograma da Figura 8.

Figura 8 – Metodologia de projeto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A sequência apresentada no fluxograma da Figura 8 pode ser explicada de forma sucinta

da seguinte forma:

- Primeiramente, são calculadas as cinemáticas direta e inversa para o robô manipulador de arquitetura paralela, utilizando-se para isso os parâmetros de Denavit-Hartenberg extraídos do robô.
- Modela-se a dinâmica do robô pelo método de Lagrange, devido às facilidades que este método demonstra quando aplicado a sistemas acoplados, devido não ser necessário realizar um estudo sobre forças de vínculo e forças internas.
- Utiliza-se a cinemática direta para encontrar as restrições do sistema, que serão melhores elucidadas no capítulo 8.
- As restrições encontradas são então utilizadas para reduzir o modelo dinâmico a um modelo dependente das variáveis associadas às juntas ativas.
- Projeta-se então a malha de controle de posição, utilizando a cinemática inversa calculada para converter os valores de posição cartesiana em valores de ângulos de junta e o modelo dinâmico reduzido. Para o projeto, é necessário escolher o controlador adequado, que para este trabalho foi escolhido o controlador Proporcional, Integral e Derivativo (PID) clássico.
- Realiza-se simulações para verificar previamente o controlador e a malha de controle projetados antes de aplicá-los ao robô real. Para isso, utilizou-se a linguagem de programação *Julia Language*.
- Testa-se então o controlador e a malha de controle projetados aplicando-os ao robô real. Caso o erro de posição no regime seja igual ou inferior a 5 % (OGATA, 1998), comumente utilizado em projetos de malhas de controle, o modelo e a malha de controle podem ser validados.

2.4 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram brevemente descritos as plataformas computacionais e os equipamentos utilizados no desenvolvimento do projeto ao qual se refere este trabalho, bem como a metodologia científica utilizada para obtenção dos resultados propostos nos objetivos deste trabalho. Nos capítulos seguintes, será elucidado o desenvolvimento dos modelos cinemáticos e dinâmicos para um robô manipulador de arquitetura paralela, bem como o projeto do controlador PID clássico e da malha de controle utilizada no projeto.

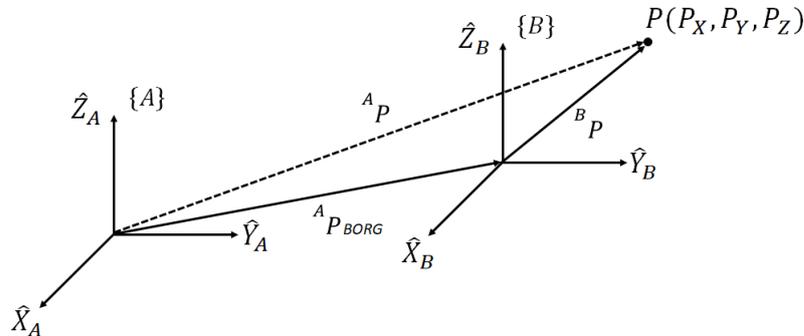
3 DESCRIÇÃO ESPACIAL DOS MECANISMOS ROBÓTICOS

Um sistema pontual pode ser descrito espacialmente através de uma representação de sua posição, por exemplo, através de coordenadas cartesianas. Entretanto, quando há a necessidade de descrever-se espacialmente um mecanismo, composto por corpos extensos, mais do que uma descrição de posição, faz-se necessária uma descrição da orientação desses corpos. Essa descrição é realizada a partir de sistemas de referência, compostos por uma descrição de posição e uma descrição de orientação, comumente nomeados de *frames*, como exposto por (CRAIG, 2005) e (SPONG *et al.*, 2006).

3.1 Descrição de Posição

Para os dois *frames* representados na Figura 9, o vetor ${}^B P$ descreve o ponto P em termos do *frame* B . A representação do mesmo ponto em termos do *frame* A pode ser obtida pela soma vetorial do vetor que distancia as origens dos *frames* A e B com o vetor ${}^B P$, devido ao fato de os dois *frames* possuírem a mesma orientação.

Figura 9 – Frames com mesma orientação e distanciados entre si.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma:

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG}, \quad (3.1)$$

Onde a notação ${}^A P$ identifica um vetor descrição do ponto P em termos do *frame* A , ${}^B P$ identifica um vetor descrição do ponto P em termos do *frame* B , ${}^A P_B$ identifica o ponto P do *frame* B descrito em termos do *frame* A e ${}^A P_{BORG}$ identifica o ponto de origem do *frame* B descrito em termos do *frame* A .

Além disso, a posição ${}^A P$ pode ser descrita através de três coordenadas, da seguinte forma:

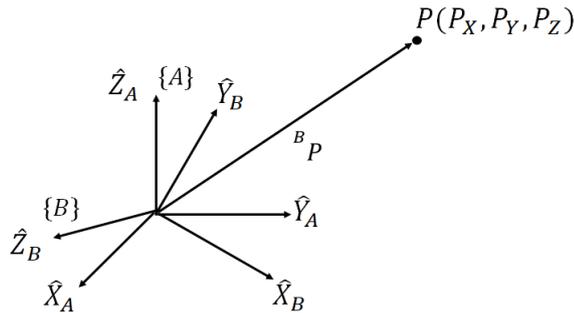
$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG} = \begin{bmatrix} {}^A p_x \\ {}^A p_y \\ {}^A p_z \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

Onde ${}^A p_x$, ${}^A p_y$ e ${}^A p_z$ são as projeções da posição sobre o *frame* de referência A .

3.2 Descrição de Orientação

Para os dois *frames* representados na Figura 10 não há distanciamento entre suas origens, entretanto, suas orientações são diferentes, isso implica que o vetor descrição de posição ${}^B P$ possui origem tanto em A quanto em B , mas sua representação em termos do *frame* A é diferente devido à diferença de orientação.

Figura 10 – Frames sem distanciamento e com orientações diferentes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível descrever ${}^B P$ em termos do *frame* A sabendo-se que as coordenadas de um vetor são suas projeções nas direções do *frame* de referência, que para este caso é o *frame* A . Em termos de vetores unitários, as projeções podem ser obtidas através do produto interno dos vetores unitários do *frame* B sobre o *frame* A , ou seja:

$${}^A \hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}, \quad {}^A \hat{Y}_B = \begin{bmatrix} \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}, \quad {}^A \hat{Z}_B = \begin{bmatrix} \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

A efeito de notação e melhoria na utilização em manipulações matemáticas, é possível organizar todas as projeções em uma única matriz, denominada como matriz de rotação:

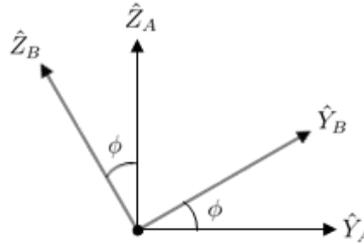
$${}^A R_B = [{}^A \hat{X}_B | {}^A \hat{Y}_B | {}^A \hat{Z}_B] = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

A matriz ${}^A R_B$ denota as projeções das coordenadas do vetor unitário de ${}^B P$ sobre o *frame* de referência A . Dessa forma, as projeções das coordenadas do vetor ${}^B P$, e conseqüentemente sua representação, sobre o *frame* de referência A pode ser expressa da seguinte forma:

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B p_x \\ {}^B p_y \\ {}^B p_z \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

A definição da matriz de rotação ${}^A R_B$ pode ser realizada partindo-se do fato que o *frame* B pode ser representado como uma série de rotações do *frame* A sobre os seus eixos fixos. Dessa forma, para uma rotação de um ângulo ϕ sobre o eixo ${}^A \hat{X}$, tem-se o ilustrado na Figura 11:

Figura 11 – Rotação do *frame* B sobre o eixo ${}^A \hat{X}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o produto interno entre dois vetores é dado pelo produto dos seus módulos e do cosseno do ângulo entre eles, para o produto interno entre vetores unitários:

$$\langle u, w \rangle = |u||w|\cos(\alpha) = 1.1.\cos(\alpha) = \cos(\alpha). \quad (3.6)$$

Tem-se então que:

$${}^A R_B^\phi = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(0) & \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(\phi) & \cos(\frac{\pi}{2} + \phi) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

De forma análoga, para uma rotação de um ângulo θ sobre o eixo ${}^A \hat{Y}$, tem-se que:

$${}^A R_B^\theta = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(0) & \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) & \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

E, ainda, para uma rotação de um ângulo ψ sobre o eixo ${}^A\hat{Z}$, tem-se que:

$${}^A R_B^\psi = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \cos(\frac{\pi}{2} + \psi) & \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \psi) & \cos(\psi) & \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Como abordado por (SPONG *et al.*, 2006), dentre as 12 composições possíveis (dois conjuntos de 6 composições, devido à simetria das possibilidades), uma das composições de rotações sobre eixos fixos mais conhecidas e utilizadas, é a composição "XYZ", muito utilizada na aeronáutica ao analisar os movimentos de "Row"(balanceio - ϕ), "Pitch"(empinamento - θ) e "Yaw"(cabeceio - ψ). Trata-se de aplicar, sucessivamente, rotações sobre os eixos X , Y e Z , nesta ordem:

$${}^B P' = {}^A R_B^\phi {}^B P, \quad (3.10)$$

$${}^B P'' = {}^A R_B^\theta {}^B P', \quad (3.11)$$

$${}^A P = {}^A R_B^\psi {}^B P'', \quad (3.12)$$

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P = {}^A R_B^\psi {}^A R_B^\theta {}^A R_B^\phi {}^B P. \quad (3.13)$$

Logo, tem-se que:

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

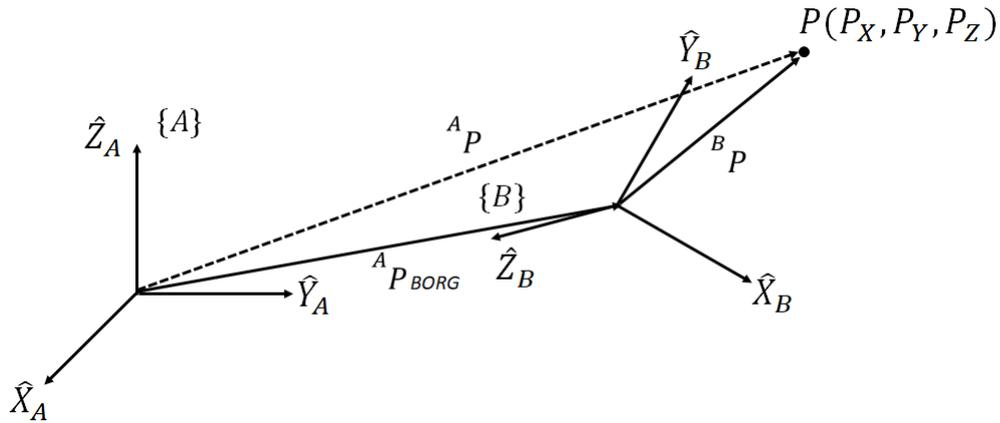
Desse modo, pode-se definir, a partir de uma das 12 composições possíveis ("XYZ"), a matriz de rotação como:

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) - \text{sen}(\psi)\cos(\phi) & \cos(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) + \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\psi)\cos(\theta) & \text{sen}(\psi)\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) + \cos(\psi)\cos(\phi) & \text{sen}(\psi)\text{sen}(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\cos(\phi) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta)\text{sen}(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

3.3 Matriz de Transformação Homogênea

O movimento descrito pelos elementos de um mecanismo, geralmente não é composto apenas por rotação ou por translação somente, esses movimentos geralmente se apresentam associados. Com isso, é muito importante que se tenha uma representação matemática desse movimento composto por rotação e translação, utilizando-se as descrições de posição e orientação explicitadas anteriormente.

Figura 12 – *Frame B* girado e transladado em relação ao *frame A*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando-se como exemplo os *frames A* e *B* da Figura 12, é possível descrever o vetor ${}^B P$ em termos do *frame A* da seguinte forma:

1. Descreve-se o vetor ${}^B P$, em termos de um *frame* genérico com a mesma orientação do *frame A*, ao aplicar uma rotação sobre o vetor ${}^B P$;
2. Descreve-se o descolamento entre as origens dos dois *frames* através de uma soma vetorial da descrição em termos do *frame A* explicitada no item anterior ao vetor de descolamento entre origens ${}^A P_{BORG}$, que também é descrito em termos do *frame A*.

Dessa forma, tem-se que a descrição do vetor ${}^B P$ em termos do *frame A* é dada por:

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P + {}^A P_{BORG}. \quad (3.16)$$

Uma representação matricial da equação 3.16 se mostra mais interessante, podendo ser organizada em uma matriz 4 x 4 da seguinte forma, como proposto por (CRAIG, 2005):

$$\begin{bmatrix} {}^A P_{3x1} \\ 1 \end{bmatrix}^{4x1} = \begin{bmatrix} {}^A R_B^{3x3} & {}^A P_{BORG}^{3x1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{4x4} \begin{bmatrix} {}^B P_{3x1} \\ 1 \end{bmatrix}^{4x1}, \quad (3.17)$$

Ou ainda:

$${}^A P = {}^A T_B {}^B P, \quad (3.18)$$

De modo que a matriz ${}^A T_B$ é denominada *Matriz de Transformação Homogênea* e pode ser definida matematicamente da seguinte forma:

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) - \sin(\psi)\cos(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\psi)\sin(\phi) & {}^A x_{BORG} \\ \sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) + \cos(\psi)\cos(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\sin(\phi) & {}^A y_{BORG} \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) & {}^A z_{BORG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Para os mecanismos robóticos, constituídos por vários elos unidos por juntas, é necessário que seja descrita a posição e orientação da ferramenta (ou órgão terminal, ou ainda, *End-effector*). Para isso, utiliza-se os parâmetros de elos e juntas, definidos no capítulo que segue, para desenvolver uma série de transformações homogêneas de um *frame* e termos do *frame* anterior, desde o *frame* da ferramenta até o *frame* universal definido. A Matriz de Transformação Homogênea que descreve *frame* da ferramenta em termos do *frame* universal é definida aplicando-se essas transformações *frame-a-frame* em cadeia, de modo que:

$${}^n T_{n+m} = \prod_{i=1}^m {}^{n+i-1} T_{n+i}, \quad (3.20)$$

Onde, com o objetivo de descrever o *frame* da ferramenta em termos do *frame* universal, n representa o *frame* universal e $n + m$ representa o *frame* da ferramenta.

3.4 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram abordadas as formas de descrever espacialmente os mecanismos robóticos, segundo as descrições de posição e orientação, sendo desenvolvidas todas as transformações necessárias para realizar essas descrições. No capítulo que segue, serão elucidadas as modelagens cinemáticas direta e inversa dos mecanismos de arquitetura paralela.

4 CINEMÁTICA DE ROBÔS DE ARQUITETURA PARALELA

A cinemática é o ramo da ciência que se encarrega de estudar o movimento dos corpos, desconsiderando as forças que agem sobre o sistema. Como ilustrado no fluxograma da Figura 8, existem dois tipos de modelo cinemático, o direta e o inverso, sendo o foco deste capítulo a cinemática direta.

Para o desenvolvimento de um modelo cinemático robótico, alguns conceitos importantes, já mencionados anteriormente, são necessários. O primeiro conceito a ser compreendido é o conceito de elo. Como explicitado anteriormente, eles são os corpos rígidos que constituem a estrutura de um mecanismo, sendo o movimento desses corpos objeto de estudo da cinemática. Outro conceito importante é o conceito de juntas, ou articulações, que são os elementos que unem os elos entre si, sendo responsáveis pelas restrições às quais estão submetidos os mecanismos. A Tabela 2 ilustra os principais tipo de juntas.

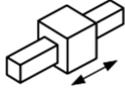
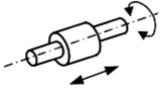
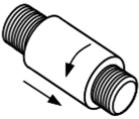
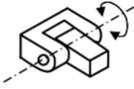
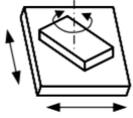
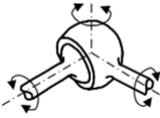
O terceiro conceito importante é o de graus de liberdade, que se refere ao número de variáveis de posição independentes do sistema, que são necessárias para descrever a configuração espacial do mecanismo (NORTON, 2010). Por exemplo, a junta de revolução ilustrada na Tabela 2 permite apenas movimento de rotação em um eixo e, por isso, para descrever a configuração espacial de um mecanismo composto por dois elos unidos por uma junta de revolução, é necessário conhecer apenas o ângulo de rotação em um eixo, ou seja, esse mecanismo possui apenas 1 grau de liberdade. Entretanto, substituindo a junta de revolução por uma junta esférica, que permite movimento de rotação em três eixos, seriam necessários o conhecimento de três ângulos de rotação e, por isso, o mecanismo teria 3 graus de liberdade.

A configuração de um mecanismo é descrita através das relações de vínculo estabelecidas por elos e juntas. Para essa descrição, é necessário conhecer-se quatro parâmetros: o comprimento dos elos (a) e seus ângulos de torção (α), a distância entre elos (d) e o ângulo de junta (θ).

O comprimento a é medido para a linha perpendicular aos eixos de duas juntas consecutivas. O parâmetro α se refere ao ângulo entre eixos de juntas consecutivas. O parâmetro d se refere à distância, ao longo do eixo de uma junta que une dois elos, entre as linhas referentes ao parâmetro a de dois elos consecutivos. E, por fim, o parâmetro θ se refere ao ângulo entre as linhas referentes ao parâmetro a de dois elos consecutivos. Geralmente, para elos não flexíveis, os parâmetros a e α são fixos e os parâmetros d e θ podem variar.

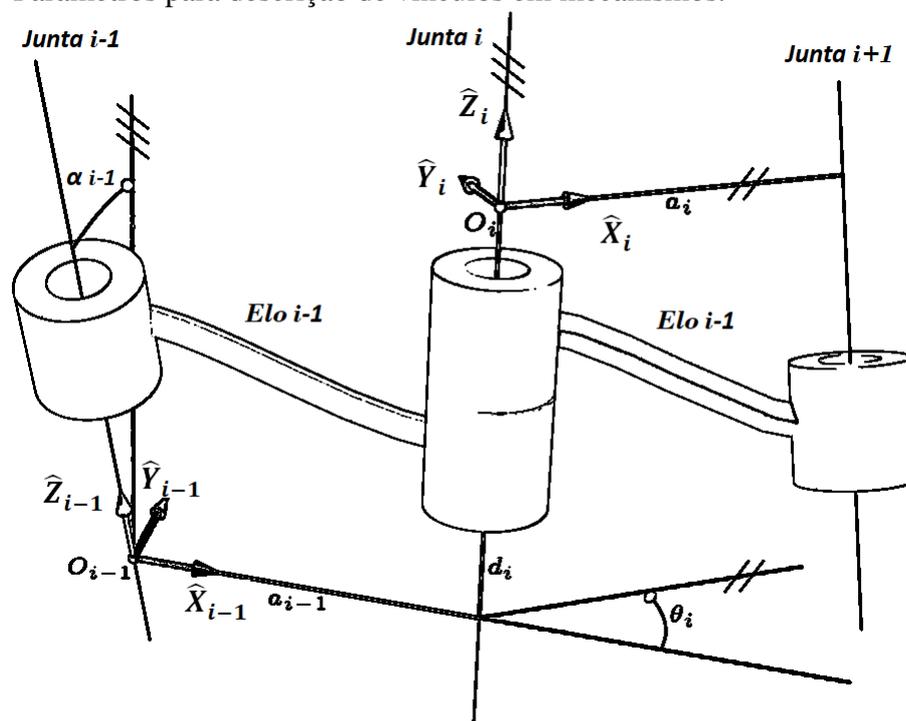
Conhecendo-se os conceitos de elo, juntas, graus de liberdade e dos parâmetros que descrevem os vínculos em um mecanismo, pode-se então explicitar o desenvolvimento da descrição espacial de um mecanismo robótico e uma das convenções mais utilizadas na modelagem cinemática de sistemas robóticos, a convenção de Denavit-Hartenberg.

Tabela 2 – Principais tipos de juntas.

Tipo	Geometria	Graus de liberdade (gdl)
Prismática (P)		1
Cilíndrica (C)		2
Helicoidal (H)		1
De revolução (R)		1
Plana (F)		3
Esférica (S)		3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – Parâmetros para descrição de vínculos em mecanismos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1 Convenção de Denavit-Hartenberg

Esta convenção foi introduzida pelo matemático e físico Jacques Denavit e pelo engenheiro Richard Hartenberg no ano de 1955 e apresentaram-na, como conhecida hoje, em seu trabalho *Kinematic Synthesis of Linkages* (1964), com o objetivo de padronizar os sistemas de referência nos mecanismos. Esta convenção utiliza os quatro parâmetros mencionados anteriormente para descrever espacialmente os mecanismos (PAUL, 1981), sendo o princípio fundamental da convenção, a utilização desses parâmetros como referenciais descritivos dos movimentos gerados nas juntas dos mecanismos.

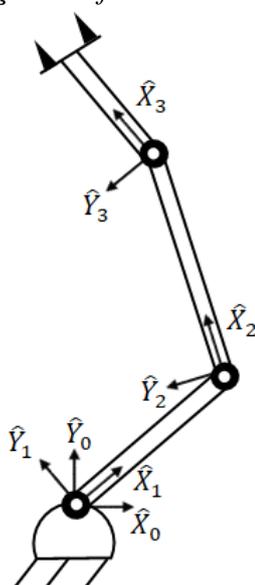
Os quatro parâmetros (Figura 13) utilizados na convenção de Denavit-Hartenberg podem ser descritos da seguinte forma, sendo os dois primeiros parâmetros descritivos dos elos e os outros dois parâmetros descritivos das juntas:

- $a_i \rightarrow$ Distância entre os eixos de junta Z_i e Z_{i-1} na direção do eixo X_{i-1} , referente ao comprimento do elo;
- $\alpha_i \rightarrow$ Ângulo entre os eixos de junta Z_i e Z_{i-1} em X_{i-1} , referente ângulo de torção do elo;
- $d_i \rightarrow$ Distância entre os eixos X_i e X_{i-1} na direção do eixo Z_i , referente ao distanciamento entre juntas;
- $\theta_i \rightarrow$ Ângulo entre os eixos X_i e X_{i-1} em Z_i , referente ao ângulo de junta.

Para definir esses parâmetros, faz-se necessário estabelecer os *frames* necessários para descrever espacialmente o mecanismo e como será a distribuição deles. É uma prática comum na modelagem cinemática de mecanismos robóticos a distribuição dos *frames* nas juntas que geram o movimento, sendo que algumas convenções são geralmente utilizadas para simplificar e padronizar a modelagem. São elas, como explicitadas em (CRAIG, 2005):

1. Defini-se a posição e orientação do *frame* universal, geralmente posicionada na base do mecanismo robótico. É em termos dele que será descrita a posição e orientação da ferramenta (ou *End-effector*);
2. Distribui-se um *frame* sobre cada uma das juntas do mecanismo;
3. O *i*-ésimo eixo \hat{Z} é alinhado com o eixo da *i*-ésima junta no sentido positivo do movimento;
4. O eixo *i*-ésimo eixo \hat{X} é alinhado de forma que, além de perpendicular ao *i*-ésimo eixo \hat{Z} , seja perpendicular também ao eixo \hat{Z}_{i+1} . Se possível deve ser alinhado ao *i*-ésimo elo;
5. O eixo \hat{Y} é então obtido utilizando-se a regra da mão direita.

Figura 14 – Convenção para distribuição dos *frames* no mecanismo robótico.



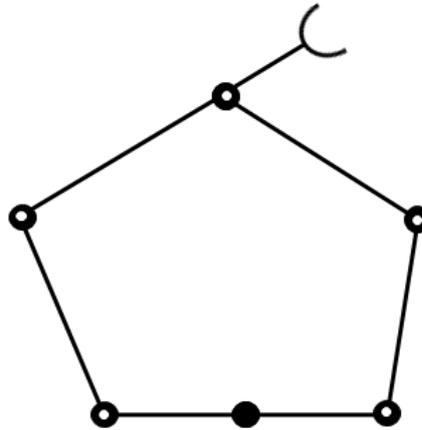
Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando o mecanismo robótico do tipo planar RRR (três juntas rotativas) ilustrado na Figura 14, é possível verificar que os parâmetros a_i são os próprios tamanhos dos elos, enquanto o parâmetro d_i é nulo por não haver deslocamento entre os eixos \hat{X}_i e \hat{X}_{i-1} na direção de \hat{Z}_i . Já com relação ao parâmetro α_i verifica-se que ele é nulo pelo fato de os eixos \hat{Z}_i e \hat{Z}_{i-1} serem paralelos, enquanto o parâmetro θ_i é o ângulo formado entre dois elos consecutivos, ou, o ângulo formado entre eixos \hat{X} consecutivos.

4.2 Cinemática Direta de Robôs de Arquitetura Paralela

Os mecanismos robóticos de arquitetura paralela possuem como principal característica o fato de apresentarem sob a configuração de cadeia fechada, na qual existem mais de uma cadeia cinemática (TSAI, 1999) que se encontram em um único ponto, geralmente, na ferramenta (ou *End-effector*). Para o robô utilizado neste trabalho (Figura 15), planar e baseado em um mecanismo de 5 barras com dois graus de liberdade, percebe-se que ele é formado por duas cadeias cinemáticas.

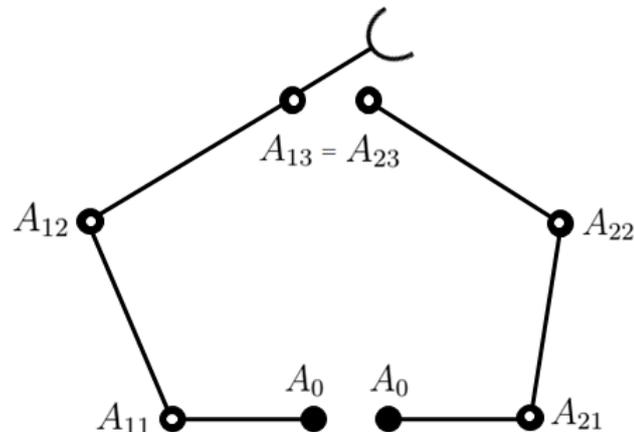
Figura 15 – Robô planar baseado em um mecanismo de 5 barras.



Fonte: Elaborada pelo autor.

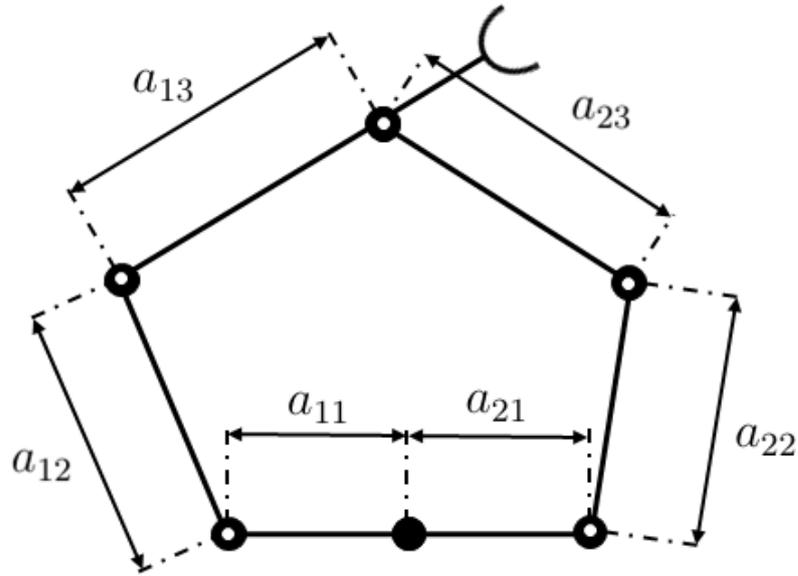
Um dos pontos-chave para a modelagem cinemática dos mecanismos robóticos de arquitetura paralela, é a possibilidade de dividir o mecanismo no número de cadeias cinemáticas existentes (BRIOT; KHALIL, 2015), sendo essa divisão, geralmente, realizada nas localizações dos *frames* universal e de ferramenta. Dessa forma, o mecanismo robótico ilustrado na Figura 15 pode ser dividido em duas cadeias cinemáticas da seguinte forma:

Figura 16 – Robô de arquitetura paralela dividido em duas cadeias cinemáticas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Parâmetros dimensionais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir das informações ilustradas nas Figuras 17 e 18, pode-se definir os parâmetros de Denavit-Hartenberg para o mecanismo de arquitetura paralela da Figura 15 como os parâmetros explicitados na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para o robô de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de cinco barras.

ij	a_{ij}	α_{ij}	d_{ij}	θ_{ij}
11	$a_{11} = -l_{OA11}$	0	0	ψ_{11}
12	$a_{12} = l_{A11A12}$	0	0	ψ_{12}
13	$a_{13} = l_{A12A13}$	0	0	$\psi_{13} = 0$
21	$a_{21} = l_{OA21}$	0	0	ψ_{21}
22	$a_{22} = l_{A21A22}$	0	0	ψ_{22}
23	$a_{23} = l_{A22A23}$	0	0	ψ_{23}

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com os parâmetros de Denavit-Hartenberg definidos, tem-se como objetivo descrever o vetor posição da ferramenta em termos do *frame* universal A_0 , ou seja, definir o vetor ${}^0P_{13ORG}$ ou o vetor ${}^0P_{23ORG}$.

Observando a Figura 17, pode-se concluir que todos os *frames* A_{ij} podem ser descritos com relação a um *frame* anterior $A_{i(j-1)}$ através de uma rotação sobre o eixo \hat{Z}_{ij} , dessa forma, a matriz de transformação homogênea descrita pela Equação 3.19 pode ser resumida a:

$${}^{i(j-1)}T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & {}^{i(j-1)}x_{ijORG} \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & {}^{i(j-1)}y_{ijORG} \\ 0 & 0 & 1 & {}^{i(j-1)}z_{ijORG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Devido à convenção adotada e descrita na seção anterior, a qual define, em um dos tópicos, que o i -ésimo eixo \hat{X} deve ser alinhado de forma que, além de perpendicular ao i -ésimo eixo \hat{Z} , seja perpendicular também ao eixo \hat{Z}_{i+1} e, além disso, deve também ser alinhado ao i -ésimo elo (se possível), os eixos \hat{X} são alinhados aos elos e perpendiculares aos eixos \hat{Z} , como ilustrado na Figura 17. Devido a isso, tem-se que:

$${}^{i(j-1)}P_{ijORG} = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Dessa forma, devido à convenção adotada, algumas simplificações podem ser feitas de forma que a matriz de transformação homogênea para o mecanismo robótico de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras pode ser definida como:

$${}^{i(j-1)}T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 & a_{ij} \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i=(1;2)}. \quad (4.3)$$

Para cada cadeia cinemática, então, existem três transformações homogêneas, que podem ser descritas da seguinte forma:

$${}^0T_{i1} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{i1}) & -\text{sen}(\psi_{i1}) & 0 & a_{i1} \\ \text{sen}(\psi_{i1}) & \cos(\psi_{i1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i=(1;2)}, \quad (4.4)$$

$${}^{i1}T_{i2} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{i2}) & -\text{sen}(\psi_{i2}) & 0 & a_{i2} \\ \text{sen}(\psi_{i2}) & \cos(\psi_{i2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i=(1;2)}, \quad (4.5)$$

$${}^{i2}T_{i3} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{i3}) & -\text{sen}(\psi_{i3}) & 0 & a_{i3} \\ \text{sen}(\psi_{i3}) & \cos(\psi_{i3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i=(1;2)}. \quad (4.6)$$

A matriz de transformação que descreve um vetor do *frame* A_{i3} em termos do *frame* A_0 pode ser obtida aplicando as transformações descritas nas Equações 4.4, 4.5 e 4.6, de modo que:

$${}^0T_{i3}|_{i=(1;2)} = {}^0T_{i1} {}^{i1}T_{i2} {}^{i2}T_{i3}|_{i=(1;2)}, \quad (4.7)$$

Ou ainda:

$${}^0T_{i3} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{i1} + \psi_{i2} + \psi_{i3}) & -\sin(\psi_{i1} + \psi_{i2} + \psi_{i3}) & 0 & a_{i1} + a_{i2}\cos(\psi_{i1}) + a_{i3}\cos(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ \sin(\psi_{i1} + \psi_{i2} + \psi_{i3}) & \cos(\psi_{i1} + \psi_{i2} + \psi_{i3}) & 0 & a_{i2}\sin(\psi_{i1}) + a_{i3}\sin(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i=(1;2)}. \quad (4.8)$$

Ao comparar as Equação 4.8 com a Equação 3.19, conclui-se que o vetor ${}^0P_{i3ORG}$ é denotado por:

$${}^0P_{i3ORG} = \begin{bmatrix} {}^0x_{i3ORG} \\ {}^0y_{i3ORG} \\ {}^0z_{i3ORG} \end{bmatrix}_{i=1,2} = \begin{bmatrix} a_{i1} + a_{i2}\cos(\psi_{i1}) + a_{i3}\cos(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ a_{i2}\sin(\psi_{i1}) + a_{i3}\sin(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ 0 \end{bmatrix}_{i=(1;2)}. \quad (4.9)$$

Com isso, a modelagem cinemática direta, ou seja, a definição de coordenadas de posição em função das coordenadas generalizadas do mecanismo robótico de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras é finalizada. Entretanto, uma dificuldade prática, que será melhor abordada no Capítulo 4 - Modelagem Dinâmica de Robôs de Arquitetura Paralela, surge com a presença de juntas ativas e juntas passivas. De forma sucinta, como o movimento das juntas passivas é consequência do gdl de cada junta, o movimento gerado nas juntas ativas resulta no movimento das juntas passivas, com isso, nem todas as juntas de um mecanismo robótico de arquitetura paralela são controláveis diretamente. Geralmente, somente os ângulos de juntas ativas são medidos nos sistemas de controle, sendo necessária, por isso, uma forma de representar os ângulos de juntas passivas em função dos ângulos de juntas ativas medidos (GHORBEL *et al.*, 1994), a fim de obter o vetor posição da ferramenta, ou seja, para definir a própria cinemática direta. Para o mecanismo robótico utilizado neste trabalho, as juntas ativas são as juntas 11 e 21, ou seja, o robô possui dois graus de liberdade, enquanto as passivas são as juntas 12 e 22.

Outro ponto-chave para a modelagem cinemática dos mecanismos de arquitetura paralela que vem a ser base para solucionar o problema anterior, é o fato de a descrição do vetor posição da ferramenta ser a mesma para todas as cadeias cinemáticas, ou seja, para o mecanismo robótico

de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} {}^0x_{13ORG} \\ {}^0y_{13ORG} \\ {}^0z_{13ORG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0x_{23ORG} \\ {}^0y_{23ORG} \\ {}^0z_{23ORG} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12}\cos(\psi_{11})+a_{13}\cos(\psi_{11}+\psi_{12}) \\ a_{12}\sin(\psi_{11})+a_{13}\sin(\psi_{11}+\psi_{12}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21}+a_{22}\cos(\psi_{21})+a_{23}\cos(\psi_{21}+\psi_{22}) \\ a_{22}\sin(\psi_{21})+a_{23}\sin(\psi_{21}+\psi_{22}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Verifica-se na Equação 4.11 um sistema formado por duas equações e duas incógnitas, o que permite representar os ângulos de junta ψ_{12} e ψ_{22} (juntas passivas) em função dos ângulos de junta ψ_{11} e ψ_{21} (juntas ativas). A resolução do sistema definido pela Equação 4.11 para os ângulos de juntas passivas resulta nas Equações 4.12 e 4.13:

$$\psi_{12} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{a_{22}\text{sen}(\psi_{21}) + a_{23}\text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}) - a_{12}\text{sen}(\psi_{11})}{a_{13}}\right) - \psi_{11}, \quad (4.12)$$

$$\psi_{22} = \text{cos}^{-1}\left(\frac{\varepsilon\zeta \pm \sqrt{(\varepsilon^2\zeta^2 - (\zeta^2 + \kappa^2)(\varepsilon^2 - \kappa^2))}}{\zeta^2 + \kappa^2}\right) - \psi_{21}, \quad (4.13)$$

Onde:

$$\zeta = a_{21} - a_{11} + a_{22}\cos(\psi_{21}) - a_{12}\cos(\psi_{11}), \quad (4.14)$$

$$\kappa = a_{22}\sin(\psi_{21}) - a_{12}\sin(\psi_{11}), \quad (4.15)$$

$$\varepsilon = \frac{a_{13}^2 - a_{23}^2 - (\zeta^2 + \kappa^2)}{2a_{23}}. \quad (4.16)$$

4.3 Cinemática Inversa de Robôs de Arquitetura Paralela

Enquanto a modelagem cinemática direta, descrita na seção anterior, trata de descrever a posição e orientação da ferramenta em termos do *frame* universal e em função das coordenadas generalizadas, que, no caso, referem-se aos ângulos de junta, a modelagem cinemática inversa

trata de calcular as coordenadas generalizadas, que geram a configuração do mecanismo robótico, em função da descrição de posição e orientação da ferramenta. Trata-se de um problema, relativamente, mais complexo que a modelagem cinemática inversa, pois faz-se necessário calcular os ângulos de juntas ativas, em função das coordenadas de posição da ferramenta, e, depois, calcular os ângulos de juntas passivas com o auxílio de equações como as Equações 4.12 e 4.13, ou seja, além da expertise necessária em algumas etapas de cálculo, existem mais etapas a serem realizadas que na modelagem cinemática direta.

Para o desenvolvimento da cinemática inversa de forma analítica, faz-se necessária a utilização da modelagem cinemática direta desenvolvida na seção anterior, mais especificamente do modelo descrito pela Equação 4.9. Existem outros métodos de desenvolver o modelo cinemático inverso, como exemplo o método geométrico, entretanto, não é o escopo deste trabalho abrangê-los.

Primeiramente, a Equação matricial 4.9 pode ser reorganizada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} {}^0x_{i3ORG} - a_{i1} - a_{i2}\cos(\psi_{i1}) \\ {}^0y_{i3ORG} - a_{i2}\sin(\psi_{i1}) \\ {}^0z_{i3ORG} \end{bmatrix}_{i=(1;2)} = \begin{bmatrix} a_{i3}\cos(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ a_{i3}\sin(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ 0 \end{bmatrix}_{i=(1;2)}. \quad (4.17)$$

Nomeando cada uma das matrizes explicitadas na equação 4.17, da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} {}^0x_{i3ORG} - a_{i1} - a_{i2}\cos(\psi_{i1}) \\ {}^0y_{i3ORG} - a_{i2}\sin(\psi_{i1}) \\ {}^0z_{i3ORG} \end{bmatrix}_{i=(1;2)}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} a_{i3}\cos(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ a_{i3}\sin(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ 0 \end{bmatrix}_{i=(1;2)}, \quad (4.19)$$

Manipulando-se, matematicamente, a Equação 4.17 a fim de encontrar a identidade trigonométrica para os elementos da matriz \mathbf{B}_i e encontrar um sistema de equações funções somente dos ângulos de juntas ativas (os ângulos de juntas passivas são calculados em função dos ângulos de juntas ativas), tem-se que:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{B}_i, \quad (4.20)$$

Como:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{B}_i \implies \mathbf{A}_i^T = \mathbf{B}_i^T, \quad (4.21)$$

De modo que é possível afirmar que:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i = \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_i. \quad (4.22)$$

A Equação 4.22 equivale a realizar o somatório dos quadrados dos elementos das matrizes \mathbf{A}_i e \mathbf{B}_i , de modo que:

$$\sum_{n=1}^{n=3} \mathbf{A}_i^2(n, 1) = \sum_{n=1}^{n=3} \mathbf{B}_i^2(n, 1). \quad (4.23)$$

A solução da Equação 4.23 permite estabelecer um modelo cinemático inverso para o mecanismo robótico de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras. Esse modelo é descrito pela Equação 4.24:

$$\psi_{i1} = \cos^{-1} \left(\frac{\Upsilon_i \Gamma_i \pm \sqrt{\Upsilon_i^2 \Gamma_i^2 - (\Gamma_i^2 + \Theta_i^2)(\Upsilon_i^2 - \Theta_i^2)}}{\Gamma_i^2 + \Theta_i^2} \right), \quad (4.24)$$

Onde:

$$\Gamma_i = 2a_{i2} {}^0x_{i3ORG} - 2a_{i1}a_{i2}, \quad (4.25)$$

$$\Theta_i = 2 {}^0y_{i3ORG} a_{i2}, \quad (4.26)$$

$$\Upsilon_i = a_{i2}^2 + ({}^0x_{i3ORG} - a_{i1})^2 + {}^0y_{i3ORG}^2 - a_{i3}^2. \quad (4.27)$$

Percebe-se pela Equação 4.24 que o modelo desenvolvido refere-se aos ângulos de juntas ativas ψ_{11} e ψ_{21} , entretanto, os ângulos de juntas passivas ψ_{12} e ψ_{22} podem ser calculados com o auxílio das Equações 4.12 e 4.13 que são funções da Equação 4.24. Dessa forma, o modelo

cinemático inverso completo para o mecanismo robótico é dado pelo vetor $\tilde{\mathbf{q}}$ (todos os ângulos de juntas):

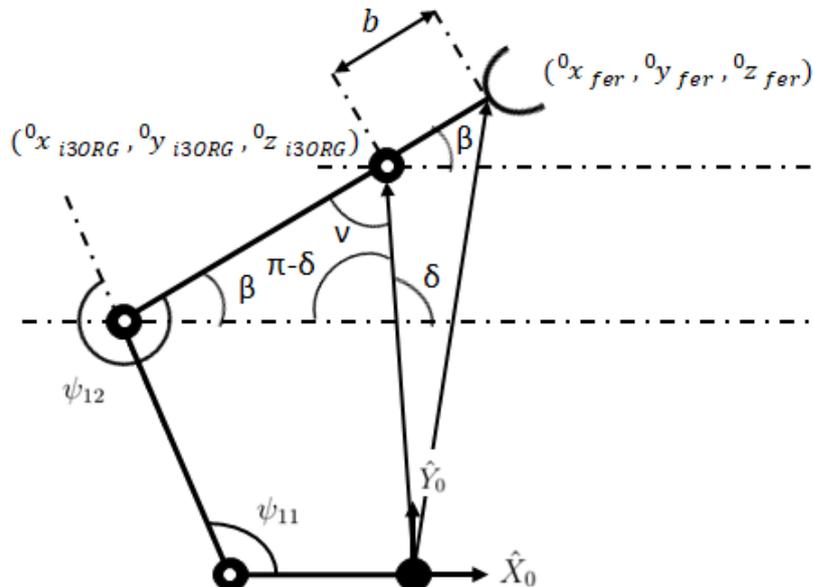
$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^{-1} \left(\frac{r_1 \Gamma_1 \pm \sqrt{r_1^2 \Gamma_1^2 - (\Gamma_1^2 + \theta_1^2)(r_1^2 - \theta_1^2)}}{\Gamma_1^2 + \theta_1^2} \right) \\ \cos^{-1} \left(\frac{r_2 \Gamma_2 \pm \sqrt{r_2^2 \Gamma_2^2 - (\Gamma_2^2 + \theta_2^2)(r_2^2 - \theta_2^2)}}{\Gamma_2^2 + \theta_2^2} \right) \\ \sin^{-1} \left(\frac{a_{22} \sin(\psi_{21}) + a_{23} \sin(\psi_{21} + \psi_{22}) - a_{12} \sin(\psi_{11})}{a_{13}} \right) - \psi_{11} \\ \cos^{-1} \left(\frac{\varepsilon \zeta \pm \sqrt{(\varepsilon^2 \zeta^2 - (\zeta^2 + \kappa^2)(\varepsilon^2 - \kappa^2))}}{\zeta^2 + \kappa^2} \right) - \psi_{21} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

4.4 Posição e Orientação da Ferramenta

Até o momento, a posição e a orientação da ferramenta, para o mecanismo robótico utilizado neste trabalho, foi tratada genericamente como posicionada nos *frames* A_{i3} . Entretanto, para o mecanismo robótico real, existe um deslocamento fixo da ferramenta com relação aos *frames* A_{i3} . Devido esse deslocamento ser fixo em relação aos *frames* A_{i3} , não há nenhum prejuízo com relação à modelagem cinemática desenvolvida até o momento, devendo-se apenas ajustar-se a posição da ferramenta.

Para isso, deve-se levar em conta os dois tipos de modelagem desenvolvidas até o momento. Para o modelo cinemático direto desenvolvido neste trabalho, tem-se que as coordenadas x, y e z encontradas referem-se à posição dos *frames* A_{i3} , dessa forma deve-se avaliar geometricamente a cadeia cinemática 1 como na Figura 19:

Figura 19 – Geometria para a posição da ferramenta, considerando a cinemática direta.



Tem-se que, pela soma dos ângulos internos de um quadrilátero:

$$\psi_{11} + (\pi - \delta) + (\psi_{12} - \pi) + \nu = 2\pi, \quad (4.29)$$

$$\nu = 2\pi - \psi_{11} - \psi_{12} + \delta. \quad (4.30)$$

Ainda, pela soma dos ângulos internos de um triângulo:

$$\beta + \nu + (\pi - \delta) = \pi, \quad (4.31)$$

$$\beta = \delta - \nu, \quad (4.32)$$

$$\beta = \delta - 2\pi + \psi_{11} + \psi_{12} - \delta, \quad (4.33)$$

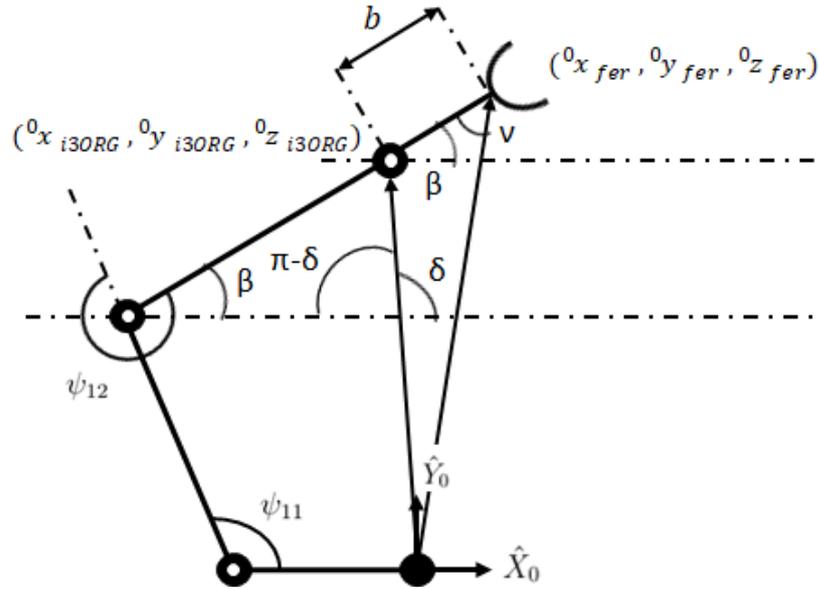
$$\beta = \psi_{11} + \psi_{12} - 2\pi. \quad (4.34)$$

Dessa forma, a posição real da ferramenta, considerando o seu deslocamento fixo com relação aos *frames* A_{i3} , é dada por:

$$\begin{bmatrix} {}^0x_{fer} \\ {}^0y_{fer} \\ {}^0z_{fer} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0x_{i3ORG} + b \cos(\beta) \\ {}^0y_{i3ORG} + b \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0x_{i3ORG} + b \cos(\psi_{11} + \psi_{12} - 2\pi) \\ {}^0y_{i3ORG} + b \sin(\psi_{11} + \psi_{12} - 2\pi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Considerando agora o modelo cinemático inverso, onde a posição da ferramenta é conhecida, sendo necessário encontrar as coordenadas ${}^0x_{i3ORG}$, ${}^0y_{i3ORG}$ e ${}^0z_{i3ORG}$, deve-se avaliar geometricamente a cadeia cinemática 1 como na Figura 20:

Figura 20 – Geometria para a posição da ferramenta, considerando a cinemática inversa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De forma similar, pode-se realizar o mesmo desenvolvimento que resulta na Equação 4.34, entretanto, as coordenadas da ferramenta são dadas por:

$$\begin{bmatrix} {}^0x_{i3ORG} \\ {}^0y_{i3ORG} \\ {}^0z_{i3ORG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0x_{fer} - b \cos(\beta) \\ {}^0y_{fer} - b \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0x_{fer} - b \cos(\psi_{11} + \psi_{12} - 2\pi) \\ {}^0y_{fer} - b \sin(\psi_{11} + \psi_{12} - 2\pi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Percebe-se que, pela Equação 4.36, faz-se necessário os ângulos ψ_{11} e ψ_{12} . Para obtê-los, basta aplicar a Equação 4.24 para definir o ângulo ψ_{11} de modo que, em vez de usar as coordenadas para a posição da origem dos frames A_{i3} , deve-se usar as coordenadas de posição da ferramenta. Ao encontrar o ângulo a_{11} , deve-se aplicar a Equação 4.12 para definir-se o ângulo ψ_{12} e, então, utilizar a equação 4.36 para definir-se as coordenadas de posição dos frames A_{i3} e utilizar o modelo cinemático inverso desenvolvido a fim de definir todos os outros ângulos.

4.5 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram abordadas a convenção de Denavit-Hartenberg, que padroniza os sistemas de referência nos mecanismos robóticos e a descrição destes, e a convenção para distribuição dos frames sobre o mecanismo robótico. Além disso, foram desenvolvidos os modelos cinemáticos direto e inverso para um mecanismo robótico de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras, bem como desenvolvidas as equações descritivas dos ângulos de juntas passivas em função dos ângulos de juntas ativas e as equações para utilização da posição real da ferramenta. No capítulo que segue, será elucidada a modelagem dinâmica completa e reduzida para o mecanismo robótico em estudo.

5 MODELAGEM DINÂMICA DE ROBÔS DE ARQUITETURA PARALELA

Além da modelagem cinemática, a modelagem dinâmica é de extrema importância para o estudo de todos os mecanismos, sendo complementares entre si. A grande diferença entre as duas modelagens é que, enquanto a modelagem cinemática abrange um estudo do movimento no que diz respeito às posições e velocidades, a modelagem dinâmica abrange um estudo das forças envolvidas no sistema em função das posições, velocidades e acelerações. A modelagem dinâmica para os mecanismos robóticos de arquitetura paralela (especificamente, o baseado em mecanismo de 5 barras) é explicitada na seção seguinte.

A extrema importância do modelo dinâmico está associada ao projeto do sistema de controle a ser utilizado no mecanismo robótico real, por ela definir, como será explicitado mais adiante, a planta do sistema na malha de controle. Antes de se implementar um sistema de controle no mecanismo real, deve-se projetar os controladores através de métodos matemáticos e simulações computacionais, verificando-se como será a resposta obtida e, em caso satisfatório, implementar o sistema de controle projetado no mecanismo robótico real.

5.1 Modelagem Dinâmica Completa de Robôs de Arquitetura Paralela

Existem várias formas de obter-se o modelo dinâmico para os mecanismos (dentre as mais conhecidas estão as equações de Newton, Lagrange e Hamilton), entretanto, é escopo deste trabalho a utilização da mecânica de Lagrange para o desenvolvimento da modelagem dinâmica.

5.1.1 Mecânica de Lagrange

A mecânica de Lagrange utiliza as energias envolvidas no sistema a ser analisado para desenvolver um conjunto de equações que resultarão no modelo dinâmico do sistema. Esse conjunto de equações, conhecidas por Equações de Lagrange, são dependentes das coordenadas generalizadas que configuram o sistema (bem como de suas derivadas primeiras) e do tempo.

Para um conjunto de N corpos de massa m_i com coordenadas cartesianas r_i tais que:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ r_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \vdots \\ r_N(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

E sabendo, pelo cálculo vetorial, que:

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j, \quad (5.2)$$

A diferença entre os deslocamentos reais dr_i e virtuais δr_i é que o deslocamento virtual é definido para um instante de tempo, de tal modo que:

$$dr_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} dt, \quad (5.3)$$

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (5.4)$$

Tem-se que considerando as forças aplicadas F_i^a e as forças de vínculo f_i dos mecanismos, tem-se, pela segunda lei de Newton, que:

$$F_i - m_i \ddot{r}_i = F_i^a + f_i - m_i \ddot{r}_i = 0. \quad (5.5)$$

Pelo princípio de D'Alembert, para um deslocamento virtual δr_i cujo trabalho realizado pelas forças de vínculo f_i é nulo, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^N (F_i^a - m_i \ddot{r}_i) \delta r_i = \sum_{i=1}^N F_i^a \delta r_i - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \delta r_i = 0, \quad (5.6)$$

Utilizando a Equação 5.4 em conjunto com um dos termos da Equação 5.6, é possível definir o conceito de Forças Generalizadas como:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i^a \delta r_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n F_i^a \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (5.7)$$

O outro termo da Equação 5.6 pode ser simplificado através de algumas manipulações matemáticas, como exposto por (AGUIAR, 2017):

1. Derivando com relação ao tempo a coordenada cartesiana r_i tem-se que, de forma similar ao exposto pela Equação 5.2:

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}, \quad (5.8)$$

2. Derivando parcialmente a Equação 5.8 com relação a \dot{q}_j , tem-se que:

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}, \quad (5.9)$$

3. Sabendo que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_j} \quad (5.10)$$

E que:

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^K \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_j} \quad (5.11)$$

E, portanto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}. \quad (5.12)$$

4. Através da seguinte regra elementar do cálculo:

$$2f(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f^2(x), \quad (5.13)$$

É possível afirmar que (sendo T a variável referente à energia cinética do sistema):

$$\sum_{j=1}^n m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad (5.14)$$

Da mesma forma que:

$$\sum_{j=1}^n m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (5.15)$$

Dessa forma o outro termo da Equação 5.6 pode ser representado por:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (5.16)$$

Ou ainda, sabendo que, manipulando, matematicamente, a derivada do produto:

$$\frac{d^2 f(x)}{x^2} g(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} g(x) \right] - \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx}, \quad (5.17)$$

Tem-se que a Equação 5.18 pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left[m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (5.18)$$

Utilizando as manipulações matemáticas descritas anteriormente, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left[m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j, \quad (5.19)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \delta r_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j. \quad (5.20)$$

Dessa forma, pelo princípio de D'Alembert descrito pela Equação 5.6, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^N (F_i^a - m_i \ddot{r}_i) \delta r_i = \sum_{i=1}^N F_i^a \delta r_i - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \delta r_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0, \quad (5.21)$$

Ou ainda, para deslocamentos virtuais δq_j independentes entre si:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (5.22)$$

Supondo que as forças aplicadas F^a são compostas por forças conservativas (F_i^C) e não conservativas (F_i^{NC}), de tal modo que as forças conservativas podem ser descritas como um gradiente de potencial, (GOLDSTEIN, 1980), (MARION, 1970), tem-se que:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i^a \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N (F_i^C + F_i^{NC}) \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N (-\nabla_i V + F_i^{NC}) \frac{\partial r_i}{\partial q_j}, \quad (5.23)$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\partial V}{\partial r_i} + F_i^{NC} \right) \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}. \quad (5.24)$$

Substituindo a Equação 5.24 na Equação 5.22 e supondo o potencial como independente das derivadas primeiras das coordenadas generalizadas, tem-se que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}, \quad (5.25)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = Q_j^{NC}, \quad p/ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (5.26)$$

Dessa forma, é possível definir uma função que segundo Lagrange caracteriza todos os sistemas dinâmicos, denominada por Função Lagrangeana, tal que:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t), \quad (5.27)$$

De modo que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC}, \quad (5.28)$$

Ou ainda, para n coordenadas generalizadas, as Equações de Lagrange são definidas como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{nx1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{nx1}} = Q_{nx1}^{NC}. \quad (5.29)$$

As forças generalizadas não conservativas Q_{nx1}^{NC} podem englobar as forças, tanto dissipativas, quanto oriundas dos atuadores presentes nas juntas ativas, sendo que elas são não conservativas pelo fato de que, o trabalho desenvolvido por essas forças é dependente da trajetória desenvolvida. Para o presente trabalho, somente as forças oriundas dos atuadores foram consideradas como forças não conservativas, sendo representadas pela letra τ , de modo que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{nx1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{nx1}} = \tau_{nx1}. \quad (5.30)$$

5.1.2 Modelo Dinâmico de Robôs de Arquitetura Paralela

O Modelo Dinâmico para um mecanismo robótico de arquitetura paralela pode ser obtido através das Equações de Lagrange definidas pela Equação 5.30, de modo que é função de todas

as coordenadas generalizadas, incluindo coordenadas de juntas ativas e passivas, de modo que as coordenadas generalizadas para o modelo são definidas e organizadas da seguinte forma:

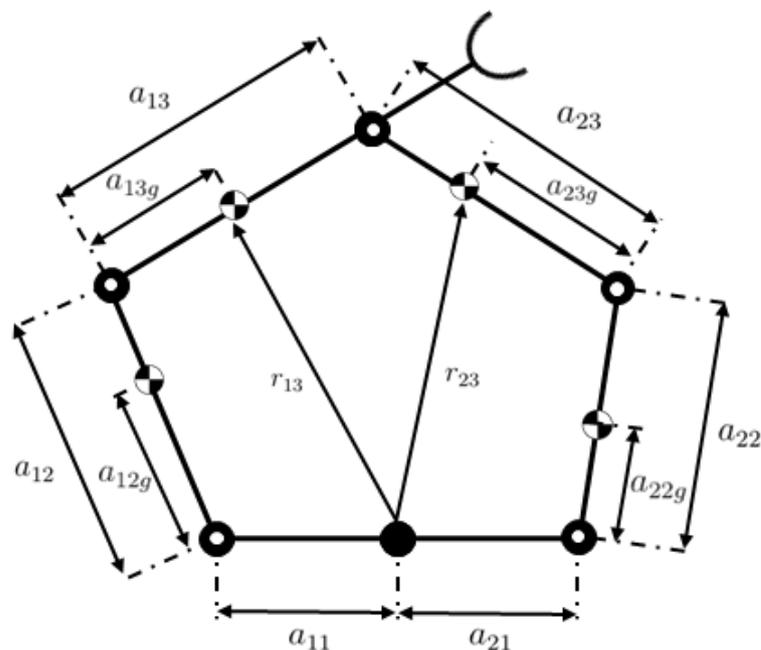
$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_{ativas} \\ q_{passivas} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

O primeiro passo para desenvolver o modelo dinâmico é definir a função Lagrangeana. Para o mecanismo robótico objeto de estudo deste trabalho, tem-se que o potencial pode ser considerado nulo pelo fato de o robô ser planar e horizontal. Dessa forma, tem-se que para o robô planar e horizontal:

$$L(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}, t) = T(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}, t). \quad (5.32)$$

Deve-se então definir a energia cinética do sistema ao calcular a energia cinética de cada um dos elos. Entretanto, deve-se ter consciência que os elos não descrevem movimentos de mesma natureza. Por exemplo, enquanto os elos a_{i2} descrevem movimento puramente rotativo em torno das juntas $i2$, os elos $i3$ descrevem movimentos gerais compostos por rotação e translação. Para a distribuição de centros de massa como ilustrada pela Figura 21:

Figura 21 – Centros de massa dos elos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tem-se que, para os elos $i2$ com movimento puramente rotativo, a energia cinética pode ser descrita como:

$$T_{i2} = \frac{1}{2} I_{i2} \dot{\psi}_{i1}^2. \quad (5.33)$$

Sendo I_{i2} o momento de inércia do elo, sendo que, considerando-o como uma barra e pelo Teorema dos Eixos Paralelos, tem-se que:

$$T_{i2} = \frac{1}{2} I_{i2} \dot{\psi}_{i1}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_{i2} a_{i2}^2 + m_{i2} a_{i2g}^2 \right) \dot{\psi}_{i1}^2. \quad (5.34)$$

Para os elos $i3$ com movimento composto por rotação e translação, tem-se que:

$$T_{i3} = T_{i3}^{Rot} + T_{i3}^{Trans} = \frac{1}{2} I_{i3} \dot{\psi}_{i2}^2 + \frac{1}{2} m_{i3} \dot{r}_{i3}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_{i3} a_{i3}^2 + m_{i3} a_{i3g}^2 \right) \dot{\psi}_{i2}^2 + \frac{1}{2} m_{i3} \dot{r}_{i3}^2. \quad (5.35)$$

O vetor r_{i3} pode ser obtido através da cinemática direta descrita pela Equação 4.9, sendo que o vetor r_{i3} é para o comprimento de elo a_{i3g} , de modo que:

$$r_{i3} = \begin{bmatrix} a_{i1} + a_{i2} \cos(\psi_{i1}) + a_{i3g} \cos(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ a_{i2} \sin(\psi_{i1}) + a_{i3g} \sin(\psi_{i1} + \psi_{i2}) \\ 0 \end{bmatrix}_{i=(1;2)}. \quad (5.36)$$

O termo \dot{r}_{i3}^2 é calculado a partir do módulo da derivada da Equação 5.36 elevado ao quadrado, de modo que:

$$\dot{r}_{i3}^2 = a_{i2}^2 \dot{\psi}_{i1}^2 + a_{i3g}^2 (\dot{\psi}_{i1} + \dot{\psi}_{i2})^2 + 2a_{i2}a_{i3g} \dot{\psi}_{i1} (\dot{\psi}_{i1} + \dot{\psi}_{i2}) \cos(\psi_{i2}). \quad (5.37)$$

Assim, tem-se que:

$$T_{i3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_{i3} a_{i3}^2 + m_{i3} a_{i3g}^2 \right) \dot{\psi}_{i2}^2 + \frac{1}{2} m_{i3} [a_{i2}^2 \dot{\psi}_{i1}^2 + a_{i3g}^2 (\dot{\psi}_{i1} + \dot{\psi}_{i2})^2 + 2a_{i2}a_{i3g} \dot{\psi}_{i1} (\dot{\psi}_{i1} + \dot{\psi}_{i2}) \cos(\psi_{i2})], \quad (5.38)$$

Então, a função Lagrangeana é definida por:

$$L(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}, t) = T(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}, t) = \sum_{i=1}^2 (T_{i2} + T_{i3}). \quad (5.39)$$

Resolvendo a Equação 5.30 para a Equação 5.39, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{i1}} = & \left(\frac{1}{12} m_{i2} a_{i2}^2 + m_{i2} a_{i2g}^2 + m_{i3} a_{i2}^2 + m_{i3} a_{i3g}^2 + \right. \\ & 2m_{i3} a_{i2} a_{i3g} \cos(\psi_{i2}) \Big) \ddot{\psi}_{i1} + (m_{i3} a_{i3g}^2 + m_{i3} a_{i2} a_{i3g} \cos(\psi_{i2})) \ddot{\psi}_{i2}, \\ & \left. - m_{i3} a_{i2} a_{i3g} \sin(\psi_{i2}) (2\dot{\psi}_{i1} + \dot{\psi}_{i2}^2) = \tau_{i1} \right. \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{i2}} = & (m_{i3} a_{i3g}^2 + m_{i3} a_{i2} a_{i3g} \cos(\psi_{i2})) \ddot{\psi}_{i1} + (m_{i3} a_{i3g}^2 + \\ & \frac{1}{12} m_{i3} a_{i3}^2 + m_{i3} a_{i3g}^2) \ddot{\psi}_{i2} + m_{i3} a_{i2} a_{i3g} \sin(\psi_{i2}) \dot{\psi}_{i1}^2 = \tau_{i2} \end{aligned} \quad (5.41)$$

As quatro equações obtidas a partir das Equações 5.40 e 5.41 (para $i = 1, 2$) podem ser organizadas, matricialmente, como uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d^2 \tilde{\mathbf{q}}}{dt^2} + \tilde{\mathbf{C}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \tau_{4 \times 1}, \quad (5.42)$$

Onde a matriz $\tilde{\mathbf{M}}$ representa a matriz de Inercia do sistema dinâmico e $\tilde{\mathbf{C}}$ representa a matriz de efeitos de Coriolis, de modo que seus elementos são explicitados nos Anexos deste trabalho.

A Equação 5.42 representa o Modelo Dinâmico do mecanismo robótico de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras.

5.2 Restrições Holonômicas e Não Holonômicas

No capítulo anterior, foi descrito um dos problemas com relação à modelagem cinemática de um mecanismo robótico de arquitetura paralela, a presença de juntas passivas, cujos ângulos são definidos de acordo com os ângulos de juntas ativas. Isso acontece porque somente as juntas ativas são atuadas diretamente e seus ângulos são medidos, levando dessa forma, ao fato de os ângulos de juntas passivas não poderem ser utilizados como variáveis de controle em uma malha de controle (que será melhor descrita no próximo capítulo). Esse fato reflete a necessidade de obter-se um modelo dinâmico reduzido em termos de coordenadas generalizadas ativas, que são as variáveis de controle (GHORBEL *et al.*, 1994). A obtenção desse modelo reduzido surge a partir de conceitos fundamentais a respeito dos sistemas dinâmicos: as restrições holonômicas e não holonômicas.

5.2.1 Restrições Holonômicas

As restrições holonômicas são restrições de posição (GHORBEL *et al.*, 1994), ou ainda restrições de configuração, que restringem as posições de um sistema dinâmico a um espaço de

configurações definido, de tal modo que:

$$\lambda(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}, \quad (5.43)$$

Essas restrições podem ser derivadas pelo menos duas vezes, gerando restrições de velocidade e aceleração e, se forem integradas, é possível encontrar novamente as restrições de posição, caracterizando o sistema como holonômico. Cada restrição pode ser usada para reduzir em um o número de graus de liberdade do sistema. Isso ajuda a resolver o problema relacionado à presença de coordenadas generalizadas passivas, pois é possível reduzir o modelo em termos de coordenadas generalizadas ativas. Em geral, os robôs manipuladores estão sujeitos a restrições holonômicas.

5.2.2 Restrições Não Holonômicas

As restrições Não Holonômicas são restrições de velocidade e não de posição, que restringem as velocidades de um sistema dinâmico a um espaço de velocidades definido (ORIOLO; NAKAMURA, 1991), tais que:

$$G\left(\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}\right) = \mathbf{0}, \quad (5.44)$$

A definição da não holonomia do sistema está em definir as restrições de velocidades e verificar a possibilidade de obtenção, através de integração, de restrições como as descritas pela Equação 5.43. Caso não seja possível obter essas restrições, diz-se que o sistema está sujeito a restrições não holonômicas.

5.3 Modelo Dinâmico Reduzido de Robôs de Arquitetura Paralela

O Modelo Dinâmico Reduzido é obtido em termos de coordenadas generalizadas ativas de tal modo que, para o mecanismo robótico em foco neste trabalho, tem-se que:

$$\mathbf{M}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbf{C}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{2 \times 1}, \quad (5.45)$$

De tal modo que \mathbf{q} representa o conjunto de coordenadas generalizadas ativas e $\boldsymbol{\tau}_{2 \times 1}$ representa as forças generalizadas aplicadas nas juntas referentes a essas coordenadas generalizadas ativas. De modo que:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$\tau_{2x1} = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

O modelo dinâmico descrito pela Equação 5.45 é obtido a partir das restrições holonômicas do sistema, que, como explicitado na seção anterior, podem reduzir o número de graus de liberdade do sistema pelo número de restrições, portanto, o objetivo é que cada restrição reduza o grau de liberdade associado a uma junta passiva. As restrições holonômicas para o mecanismo robótico de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras podem ser obtidas a partir da cinemática direta descrita pela Equação 4.9 e assumem a seguinte forma:

$$\lambda(x, y, \tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} x - [a_{i1} + a_{i2}\cos(\psi_{i1}) + a_{i3}\cos(\psi_{i1} + \psi_{i2})] \\ y - [a_{i2}\sin(\psi_{i1}) + a_{i3}\sin(\psi_{i1} + \psi_{i2})] \end{bmatrix}_{i=1,2} = \mathbf{0}. \quad (5.48)$$

E conhecendo-se a relação expressa pela Equação 4.10, ao desenvolver a Equação 5.48, as restrições holonômicas do sistema podem ser descritas em termos de $\tilde{\mathbf{q}}$ como:

$$\lambda(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} [a_{11} + a_{12}\cos(\psi_{11}) + a_{13}\cos(\psi_{11} + \psi_{12})] - [a_{21} + a_{22}\cos(\psi_{21}) + a_{23}\cos(\psi_{21} + \psi_{22})] \\ [a_{12}\sin(\psi_{11}) + a_{13}\sin(\psi_{11} + \psi_{12})] - [a_{22}\sin(\psi_{21}) + a_{23}\sin(\psi_{21} + \psi_{22})] \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Para reduzir o sistema em dois graus de liberdade, deve-se encontrar a seguinte parametrização, o que significa representar as coordenadas generalizadas ativas em termos de todo o vetor de coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{bmatrix} = \varphi(\tilde{\mathbf{q}}), \quad (5.50)$$

O próximo passo é fazer uso das funções de $\tilde{\mathbf{q}}$ como definido nas Equações 5.49 e 5.50 para definir uma nova função η , como proposto por (GHORBEL *et al.*, 1994):

$$\eta(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \lambda(\tilde{\mathbf{q}}) \\ \varphi(\tilde{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

Ou ainda:

$$\eta(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} [a_{11} + a_{12}\cos(\psi_{11}) + a_{13}\cos(\psi_{11} + \psi_{12})] - [a_{21} + a_{22}\cos(\psi_{21}) + a_{23}\cos(\psi_{21} + \psi_{22})] \\ [a_{12}\sin(\psi_{11}) + a_{13}\sin(\psi_{11} + \psi_{12})] - [a_{22}\sin(\psi_{21}) + a_{23}\sin(\psi_{21} + \psi_{22})] \\ \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Até então, não se conhece uma relação matemática explícita entre $\tilde{\mathbf{q}}$ e \mathbf{q} , necessária para a redução do sistema, exigindo o uso do Teorema da Função Implícita (AMORIM, 2016). Para isso, o primeiro passo para garantir a existência dessa relação é atender a um dos postulados do teorema que requer uma relação do tipo $\mu(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \text{constante}$. Esta relação, obtida através de Equação 5.51 por simples manipulação matemática, sendo definida como:

$$\mu(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \eta(\tilde{\mathbf{q}}) - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.53)$$

E ainda:

$$\frac{\partial \mu(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \eta(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.54)$$

Que pode ser calculada como:

$$\frac{\partial \mu(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} k_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) & k_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) & k_{13}(\tilde{\mathbf{q}}) & k_{14}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ k_{21}(\tilde{\mathbf{q}}) & k_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) & k_{23}(\tilde{\mathbf{q}}) & k_{24}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

Onde:

$$k_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) = -a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) - a_{12}\text{sen}(\psi_{11});$$

$$k_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) = a_{23}\text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}) + a_{22}\text{sen}(\psi_{21});$$

$$k_{13}(\tilde{\mathbf{q}}) = -a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12});$$

$$k_{14}(\tilde{\mathbf{q}}) = a_{23}\text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22});$$

$$k_{21}(\tilde{\mathbf{q}}) = a_{13}\text{cos}(\psi_{11} + \psi_{12}) + a_{12}\text{cos}(\psi_{11});$$

$$k_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) = -a_{13}\text{cos}(\psi_{21} + \psi_{22}) - a_{22}\text{cos}(\psi_{21});$$

$$k_{23}(\tilde{\mathbf{q}}) = a_{13}\text{cos}(\psi_{11} + \psi_{12});$$

$$k_{24}(\tilde{\mathbf{q}}) = -a_{23}\text{cos}(\psi_{21} + \psi_{22}),$$

Ainda, escolhendo-se um conjunto de $\tilde{\mathbf{q}}$ para as quais $\det\left[\frac{\partial \mu(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\right] \neq 0$ (para atender o segundo postulado do Teorema) e utilizando, novamente, o Teorema da Função Implícita, uma equação explícita para $\tilde{\mathbf{q}}$ em termos de \mathbf{q} pode ser definida:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \omega(\mathbf{q}) \quad (5.56)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{\partial \omega(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \omega(\varphi(\tilde{\mathbf{q}}))}{\partial \varphi(\tilde{\mathbf{q}})} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d\mathbf{q}}{dt}. \quad (5.57)$$

Agora, derivando a Equação 5.51, tem-se que:

$$\frac{\partial \eta(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

Através da Equação 5.54 e como já foi discutido anteriormente, para um conjunto de $\tilde{\mathbf{q}}$ para as quais $\det\left[\frac{\partial \mu(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\right] \neq 0$, então, $\frac{\partial \eta(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}$ é invertível:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \left[\frac{\partial \eta(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

E, ainda, para o sistema em questão:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \left[\frac{\partial \eta(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{q}}{dt}. \quad (5.60)$$

Comparando as Equações 5.57 e 5.60, é definido que:

$$\gamma(\tilde{\mathbf{q}}) = \left[\frac{\partial \eta(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Agora, tem-se uma função explícita (5.60) que será utilizada para reduzir o sistema descrito pela Equação 5.42 que, por sua vez, pode ser rearranjada em uma forma equilibrada como:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d^2 \tilde{\mathbf{q}}}{dt^2} + \tilde{\mathbf{C}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} - \tau_{4 \times 1} = \mathbf{0}. \quad (5.62)$$

Agora, enquanto o conjunto de forças generalizadas agindo no sistema gerarem um deslocamento virtual $\delta \tilde{\mathbf{q}}$, realizando assim um trabalho virtual δW , tal que:

$$\delta \tilde{\mathbf{q}}^T \left[\tilde{\mathbf{M}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d^2 \tilde{\mathbf{q}}}{dt^2} + \tilde{\mathbf{C}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} - \tau_{4 \times 1} \right] = \delta W = 0 \quad (5.63)$$

E sabendo-se que, pela Equação 5.57:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d\mathbf{q}}{dt} \implies \delta\tilde{\mathbf{q}} = \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) \delta\mathbf{q} \implies \delta\tilde{\mathbf{q}}^T = \delta\mathbf{q}^T \gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}), \quad (5.64)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d\mathbf{q}}{dt} \implies \frac{d^2\tilde{\mathbf{q}}}{dt^2} = \frac{d\gamma(\tilde{\mathbf{q}})}{dt} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2}. \quad (5.65)$$

Utilizando-se as Equações 5.64 e 5.65 na Equação 5.63, define-se o modelo dinâmico reduzido em termos de coordenadas generalizadas ativas (5.67):

$$\delta\mathbf{q}^T \left[\gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{M}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}) \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} + (\gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{M}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d\gamma(\tilde{\mathbf{q}})}{dt} + \gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{C}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \gamma(\tilde{\mathbf{q}})) \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tau_{4 \times 1} \right] = 0 \quad (5.66)$$

$$\gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{M}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}) \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} + \left[\gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{M}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d\gamma(\tilde{\mathbf{q}})}{dt} + \gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{C}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) \right] \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tau_{4 \times 1} \quad (5.67)$$

A qual pode ser escrita como descrito pela Equação 5.68, para uma melhor visualização:

$$\mathbf{M}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} + \mathbf{C}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \tau_{2 \times 1}, \quad (5.68)$$

Onde:

$$\mathbf{M}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}) = \gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{M}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}) \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.69)$$

$$\mathbf{C}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) = \gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{M}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{d\gamma(\tilde{\mathbf{q}})}{dt} + \gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{C}}_{4 \times 4}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \gamma(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

$$\tau_{2 \times 1} = \gamma^T(\tilde{\mathbf{q}}) \tau_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{bmatrix}, \quad (5.71)$$

Tem-se que Φ_{11} and Φ_{21} são as saídas do controlador, que será estudado no próximo capítulo, que representam os torques aplicados às juntas ativas do mecanismo robótico. Os vários elementos das matrizes descritas nas Equações 5.69 e 5.70 são apresentados nos Anexos deste trabalho.

Sabendo-se que a matriz de Inércia $\mathbf{M}_{2 \times 2}$ é positiva semidefinida e, por isso, é invertível, o modelo dinâmico utilizado na simulação da malha de controle é descrito como segue (Equação 5.72):

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \mathbf{M}^{-1}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}) [\boldsymbol{\tau}_{2 \times 1} - (\mathbf{C}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \frac{d\mathbf{q}}{dt})] \quad (5.72)$$

5.4 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foi explicitada a Mecânica Lagrangeana para desenvolvimento de modelos dinâmicos, bem como o desenvolvimento do modelo dinâmico completo para o mecanismo robótico em estudo. A partir dos conceitos de restrições abordados neste capítulo, foram encontradas as restrições holonômicas para o sistema em estudo e, a partir delas, foi desenvolvido o modelo dinâmico reduzido em termos de coordenadas generalizadas ativas.

6 CONTROLADORES PID

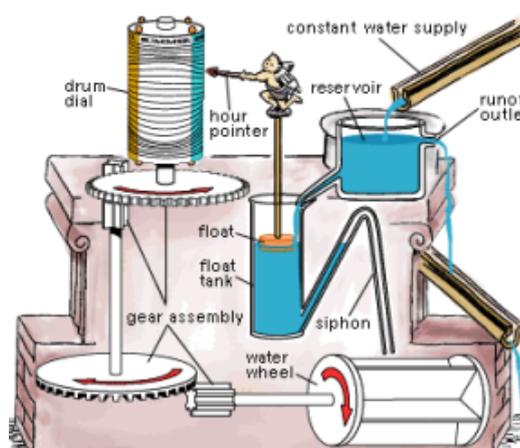
Até o presente momento, o leitor foi direcionado ao desenvolvimento dos modelos matemáticos que abrangem os mecanismos robóticos, especialmente, os de arquitetura paralela. Entretanto, os mecanismos robóticos, devido à demanda de precisão, eficiência e estabilidade dos processos aos quais estão relacionados, são constituídos por muitos outros sistemas além da sua estrutura mecânica propriamente dita. Dentre esses sistemas, é importante mencionar os sensores, os atuadores, o sistema computacional e um sistema que utiliza de todos os anteriores e que é responsável pelo funcionamento adequado dos mecanismos robóticos, trata-se do Sistema de Controle.

6.1 Sistemas de Controle

6.1.1 Breve Histórico

Os sistemas de controle, apesar de associados a tecnologias modernas, datam dos primórdios do pensamento científico. Já no ano de 300 a.C. Ctesíbio, matemático e engenheiro grego, desenvolveu uma série de sistemas baseados nos princípios do controle, como exemplo o relógio de água (JUNIOR, 2014), conhecido como Clepsidra (Figura 22), que era baseado no nível de água e sujeito à ação de controle devido à presença de uma boia.

Figura 22 – Clepsidra - Relógio de Ctesíbio baseado no controle de nível de água.



Fonte: (AJLILL, Acesso: 11 de Março de 2018.).

Em 1681, o físico francês Denis Papin criou uma válvula para controle de pressão, conhecida como Válvula Denis Papin. Um século após, foram criados vários sistemas de controle de velocidade, sendo os mais populares aqueles baseados em realimentação de máquinas a vapor.

A teoria do controle, mais similar com a utilizada nos dias de hoje, começou a aparecer no cenário científico a partir do século XIX com o desenvolvimento de critérios de estabilidade

para os sistemas propostos por James Maxwell, Routh (Artigo "Um tratado sobre estabilidade de um dado estado de movimento" de 1877) e Lyapunov (Tese "O problema Geral da Estabilidade do Movimento" de 1892).

Uma das primeiras utilizações do controle Proporcional, Integral e Derivativo (PID) foi no ano de 1922 em um sistema de pilotagem automática de embarcações desenvolvido pela *Speny Gyroscope Company*. No ano de 1930, Bode e Nyquist desenvolveram métodos de análise no domínio da frequência e, dezoito anos após, Walter Evans desenvolveu o método do Lugar das Raízes.

6.1.2 Funcionamento

Para uma boa compreensão do funcionamento de uma forma geral, é necessário conhecer-se a definição de sistema de controle. Tratam-se de sistemas que recebem a entrada de um determinado processo e a converte, através de ações de controle, em uma resposta, próxima (ou igual) à resposta desejada, as saídas desse processo.

Figura 23 – Princípio dos sistemas de controle.

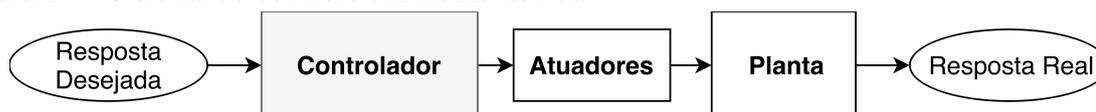


Fonte: Elaborada pelo autor.

Partindo dessa definição, os conceitos de sensores, controlador, atuadores e planta devendo ser definidos. Os sensores são elementos capazes de detectar informações do ambiente físico. O controlador é o elemento que definirá as ações de controle, buscando ajustar a resposta real a uma resposta desejada. Os atuadores são os elementos que receberão a saída do controlador e executarão essa saída na planta que, por sua vez, consiste no processo dinâmico a ser controlado.

A partir desses conceitos, é possível definir dois tipos de sistemas de controle: sistema de controle em malha aberta e em malha fechada. Os sistemas de controle em malha aberta agem como ilustrado na Figura 24.

Figura 24 – Sistema de controle em malha aberta.



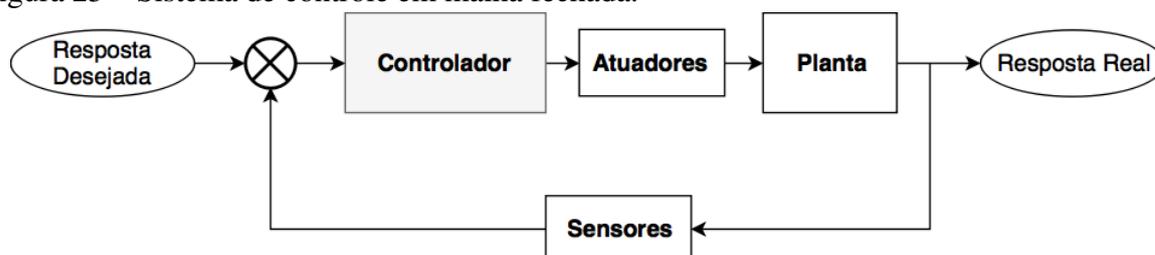
Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que o controlador recebe como entrada a resposta desejada e sobre ela aplica as ações de controle, de modo a desenvolver uma resposta para os atuadores que traduzem-na para a planta como um estímulo físico, gerando assim uma resposta real próxima ou igual à resposta desejada. Entretanto, na maioria dos casos, não é interessante a utilização desse tipo de

sistema de controle, devido à ausência de monitoramento da resposta real através de elementos sensores, o que torna a entrada do controlador independente da resposta obtida, dessa forma, para perturbações na planta que gerem instabilidade, por exemplo, a entrada do sistema continuará a mesma, o que pode acabar por intensificar a instabilidade do processo. Além disso, sem o monitoramento da resposta do sistema, não há mapeamento do erro entre resposta desejada e resposta real, tornando a possibilidade de haver flutuações, imprecisão da resposta real ou um erro entre resposta real e desejada elevados.

Para o sistema de controle em malha fechada, o processo é o ilustrado pela Figura 25. Diferentemente do sistema em malha aberta, para o sistema de controle de malha fechada há a utilização de elementos sensores, o que possibilita relacionar entrada (resposta desejada) e saída (resposta real) através de um erro associado. Dessa forma, o estímulo gerado pelo controlador evolui de acordo com a resposta real do sistema. Por exemplo, caso a resposta real esteja muito diferente da resposta desejada, o valor do erro entre elas será elevado e esse valor será agirá como entrada para o controlador, o qual irá gerar um estímulo mais intensificado a fim de corrigir esse erro (OGATA, 1998).

Figura 25 – Sistema de controle em malha fechada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

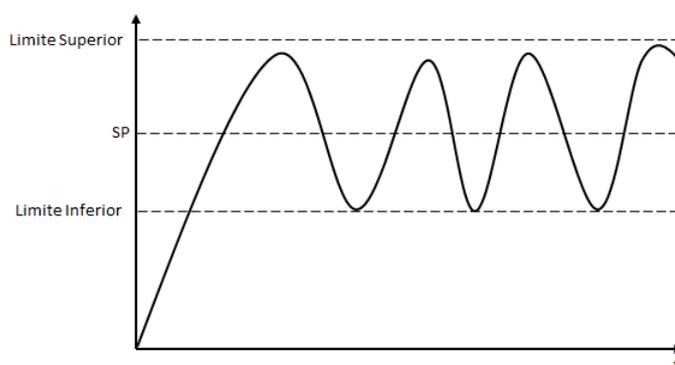
6.1.3 Tipos de controladores

A um nível industrial, existem cinco tipos de controladores mais utilizados por já estarem consolidados em grande escala, são eles os controladores: *ON-OFF*, Proporcional, Proporcional e Integral (PI), Proporcional e Derivativo (PD) e o Proporcional, Integral e Derivativo (PID). A definição e funcionamento de cada um deles será explicitada a seguir e como exposto por (SOUZA, 2004), sendo elas consideradas para sistemas onde somente há uma entrada e uma saída, sistemas estes denominados como SISO (*Single Input, Single Output*), que diferem de sistemas MIMO (*Multiple Inputs, Multiple Outputs*) por estes possuírem múltiplas entradas e múltiplas saídas, sistemas fortemente acoplados, ou seja, uma variável se relaciona fortemente com, no mínimo, outra, variável. Posteriormente, será explicitado que o sistema de controle projetado neste trabalho é, originalmente, um sistema MIMO, entretanto, visando reduzir a complexidade do projeto, utiliza-se uma técnica denominada controle independente de juntas.

6.1.3.1 Controlador *On-Off*

Este controlador é consideravelmente simples quando comparado aos que se serão descritos a seguir. Ele consiste em atuar sobre a variável de controle de modo que a saída do sistema esteja sempre contida em uma faixa limítrofe para o valor desejado, constituída por um limite superior e inferior, denominada por histerese. Basicamente, o atuador trabalhará em estados de "ligado" e "desligado" (por isso *On-Off*), de acordo com a necessidade do sistema para um determinado valor desejado (*set-point*). Se o sensor indicar que a saída do sistema atingiu o limite inferior, então o atuador trabalhará em estado "ligado", caso o sensor indique que a saída do sistema atingiu o limite superior, então o atuador trabalhará em estado desligado.

Figura 26 – Resposta de um controlador do tipo *on-off*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A grande vantagem desse tipo de controlador está fortemente associada à sua intrínseca simplicidade e, conseqüentemente, ao seu baixo custo de desenvolvimento. Entretanto, a sua grande desvantagem está relacionada ao fato de não ser possível alcançar a estabilidade do processo, pois a variável de controle sempre variará em torno do *set-point*, como ilustra a Figura 26.

6.1.3.2 Controlador Proporcional (P)

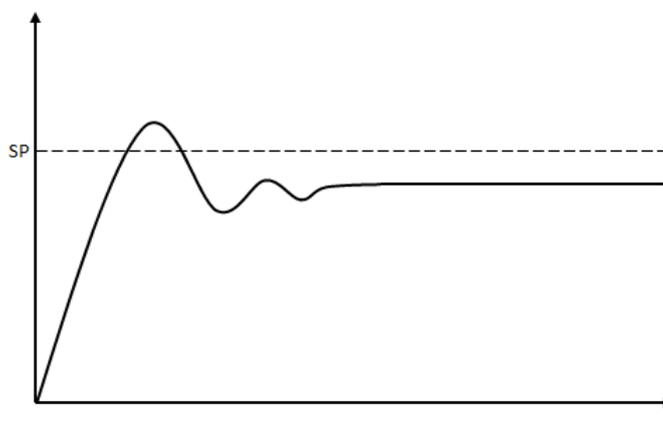
Apesar de sua simplicidade, o Controlador Proporcional é mais elaborado quando comparado com o Controlador On-Off. O princípio fundamental deste controlador é o de gerar um saída proporcional ao valor da entrada, ou seja, se o valor da entrada for elevado, a resposta que o controlador gerará na saída também será elevada, sendo que esta saída é proporcional pelo que se define por Ganho Proporcional, comumente definido como K_p , de modo que:

$$V_s = K_p V_e \quad (6.1)$$

Onde V_s refere-se à variável de saída e V_e à variável de entrada do controlador. A fim de evitar que a resposta proporcional cresça, ou decresça, indefinidamente, de modo que o sistema pudesse ser danificado de alguma forma e para o próprio funcionamento da malhada controle, é comum

definir, assim como para o controlador On-Off, um limite máximo e um limite mínimo para a resposta, sendo a faixa compreendida entre esses limites definida como banda proporcional.

Figura 27 – Resposta de um controlador do tipo proporcional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 27 ilustra a resposta de um controlador proporcional bem como uma de suas desvantagens. Como a saída é proporcional à entrada, à medida que a variável controlada se torna mais próxima do valor desejado (*set-point*), a entrada do controlador (geralmente, em malhas fechadas, o erro entre saída real e desejada) se torna muito pequena para gerar algum estímulo no atuador, de modo que será gerado um erro de regime permanente. Uma das estratégias para reduzir o erro de regime permanente é aumentar o ganho proporcional, entretanto, apesar da tendência de reduzir esse erro, isso pode gerar a instabilidade do sistema.

Outra desvantagem deste tipo de controlador é a possibilidade de haver oscilação da resposta do sistema, o que, geralmente, está associado à elevada taxa de variação da variável de entrada do controlador. Nesses casos, quando a resposta provida pelo controlador está próxima do valor desejado, devido à elevada taxa de variação da resposta, logo ela ultrapassa o valor desejado, provocando assim uma oscilação da resposta do sistema.

6.1.3.3 Controlador Proporcional e Integral (PI)

A desvantagem do controlador proporcional, descrita anteriormente, de haver erro de regime permanente pode ser contornada através da utilização do Controlador Proporcional e Integral. A saída desse tipo de controlador é uma composição de respostas proporcionais e integrais à entrada, de modo que, além do ganho proporcional K_p , existe um Ganho Integrativo, comumente definido por K_i , de modo que:

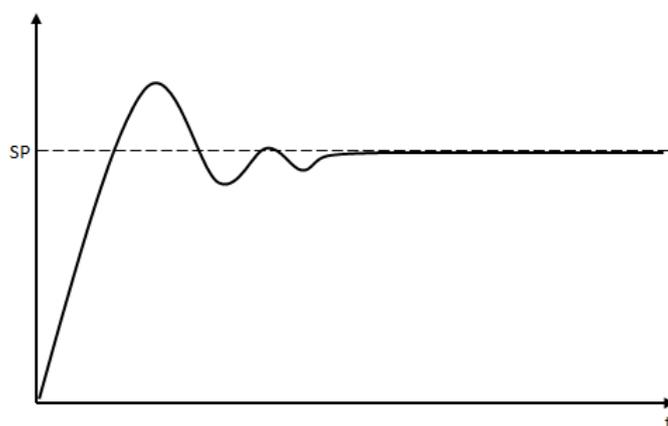
$$V_s = K_p V_e + K_i \int V_e dt \quad (6.2)$$

A parcela integrativa da resposta do controlador soma, ao longo do tempo, os valores da entrada de modo que, o produto do ganho integrativo com esse somatório mantém o estímulo ao atuador,

mesmo quando a entrada do controlador se torna pequena. Dessa forma, a resposta de um controlador PI pode ser interpretada em duas etapas, a primeira, quando a intensidade da entrada ainda é elevada, é predominantemente proporcional e a segunda, quando a intensidade da entrada é pequena, é predominantemente integral.

Entretanto, a utilização da ação integrativa não evita a oscilação da resposta do sistema, o que geralmente ocorre quando a variação da entrada, e conseqüentemente da resposta, é elevada, como mencionado para o controlador proporcional.

Figura 28 – Resposta de um controlador do tipo proporcional e integral (PI).



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.1.3.4 Controlador Proporcional e Derivativo (PD)

Uma das formas de evitar a oscilação, bem como sobressinal, da resposta do sistema frente a variações elevadas da resposta é a utilização da ação derivativa. Assim como a ação proporcional é proporcional à entrada do controlador e a ação integral é proporcional à integral da entrada, a ação derivativa é proporcional à variação (derivada) da entrada, de modo que o Controlador Proporcional e Derivativo possui não só a parcela proporcional, mas também a parcela composta pelo produto do Ganho Derivativo, comumente denominado por K_d , pela taxa de variação da entrada, tal que:

$$V_s = K_p V_e + K_d \frac{dV_e}{dt} \quad (6.3)$$

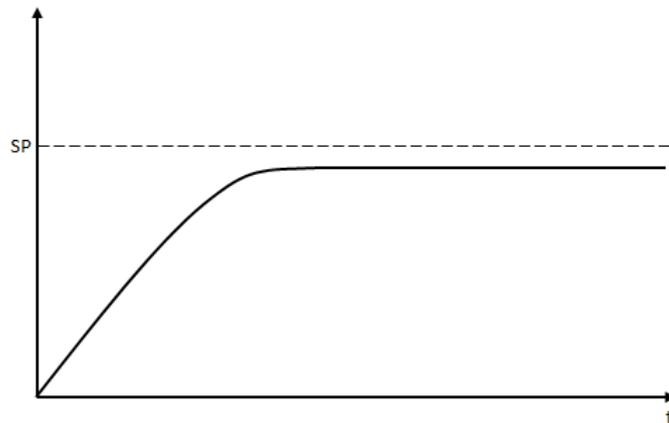
A parcela derivativa tende a atenuar os efeitos da elevada variação da variável de entrada, devido ao fato de a derivada da variável de entrada prever a tendência de evolução da resposta do sistema. Dessa forma, se a variação da variável de entrada estiver elevada, a parcela derivativa diminui (em casos de variação positiva), ou eleva (em casos de variações negativas), a intensidade da resposta do sistema.

Uma prática aconselhável, é a utilização de ganhos derivativos baixos, devido ao fato da possibilidade de haver ruído na aquisição do sinal provido pelo elemento sensor. Um ruído pode ser

interpretado como uma tendência de variação elevada da resposta do sistema, podendo fazer com que o controlador atenuie ou eleve a resposta sem necessidade, podendo gerar a instabilidade do sistema.

Apesar de o controlador PD eliminar a oscilação da resposta do sistema, ele em nada interfere durante o regime permanente, onde a variável de entrada se mantém, praticamente, constante. Desse modo, assim como para o controlador proporcional, pode haver erro de regime permanente.

Figura 29 – Resposta de um controlador do tipo proporcional e derivativo (PD).



Fonte: Elaborada pelo autor.

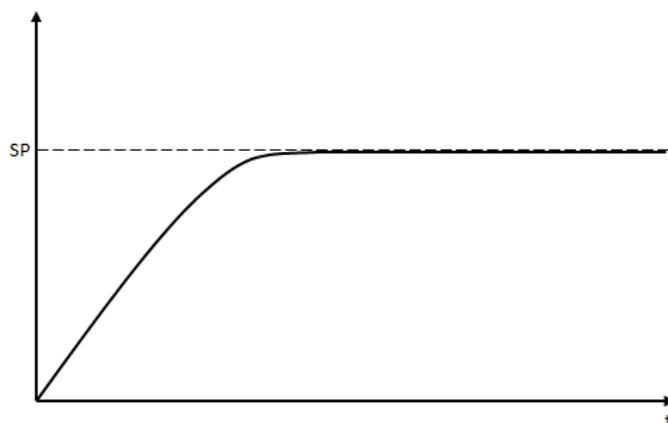
6.1.3.5 Controlador Proporcional, Integral e Derivativo (PID)

Um dos tipos de controladores mais consolidados é constituído por uma associação das ações integral e derivativa à ação proporcional. Trata-se do controlador Proporcional, Integral e Derivativo (PID). A resposta provida por esse tipo de controlador é descrita matematicamente como:

$$V_s = K_p V_e + K_d \frac{dV_e}{dt} + K_i \int V_e dt \quad (6.4)$$

Para este tipo de controlador, evita-se além da possível oscilação das resposta do sistema, devido à presença da ação derivativa, também o erro de regime permanente, devido à presença da ação integral. A resposta característica do Controlador PID é ilustrada na Figura

Figura 30 – Resposta de um controlador do tipo proporcional, integral e derivativo (PID).

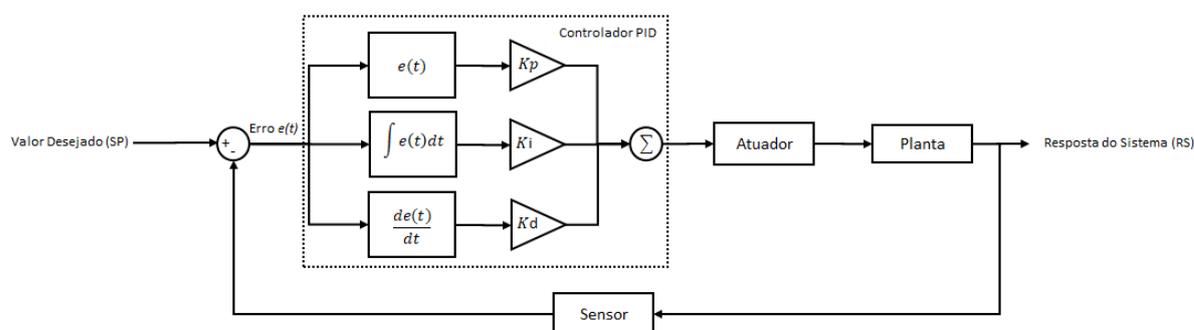


Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 Controle PID em Malha Fechada

Para a utilização do Controlador PID em uma malha de controle fechada, a variável de entrada para o controlador é o erro gerado pela diferença entre o valor desejado para a variável a ser controlada, comumente denominado por *set-point*, e o valor real da variável a ser controlada, mensurada pelo elemento sensor (OGATA, 1998). A malha de controle fechada pode ser definida como ilustrado na Figura 31.

Figura 31 – Malha de controle fechada com controlador PID.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A malha de controle fechada ilustrada pela Figura 31 utiliza um controlador PID a fim de estabilizar o erro definido entre o valor de *set-point* (SP) e o valor real definido pela resposta do sistema (RS) para a variável controlada em zero. O erro gerado na retroalimentação da malha é dado por:

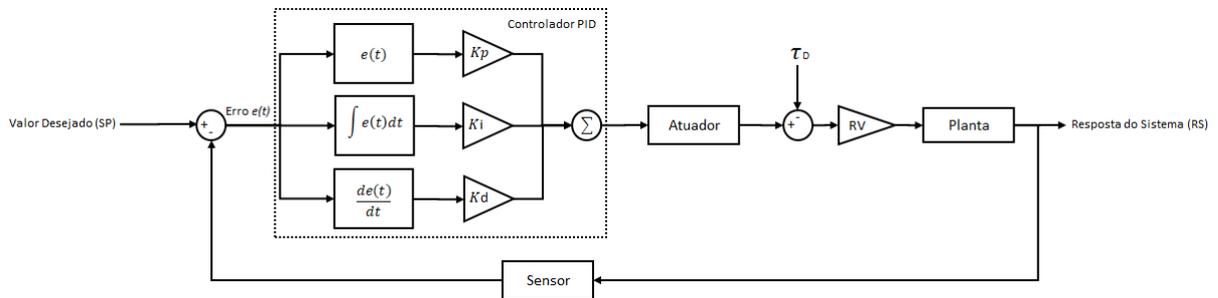
$$e(t) = SP - RS \quad (6.5)$$

A malha de controle fechada ilustrada pela Figura 31 define uma sistema genérico SISO, entretanto, a malha de controle projetada neste trabalho, para um mecanismo robótico

de arquitetura paralela, trata-se de um sistema de MIMO. Isso se deve ao fato de o sistema ser fortemente acoplado, ou seja, uma variável se relaciona fortemente com outra variável.

O projeto de uma malha de controle para um sistema MIMO possui um nível de complexidade elevado e, por isso, é comum buscar estratégias de controle que simplifiquem o controle do sistema. Uma dessas técnicas, e a que é utilizada neste trabalho, é a estratégia de controle independente das juntas. Essa estratégia de controle utiliza uma malha de controle para cada uma das juntas, tratando-as, separadamente, como sistemas SISO. Entretanto, para essa técnica, deve-se projetar a malha de controle tratando os acoplamentos como distúrbio (τ_D), logo, a malha de controle para a estratégia de controle independente de juntas é dada por:

Figura 32 – Malha de controle para controle independente de juntas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

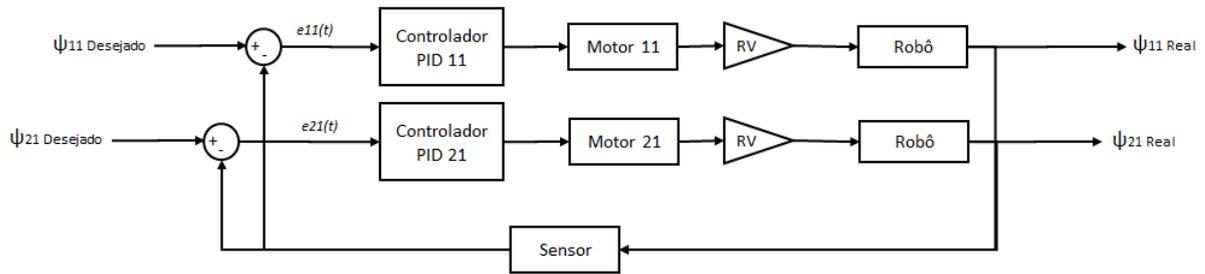
Como o distúrbio τ_D deve abranger os efeitos dos acoplamentos, ele pode ser interpretado para uma determinada junta como a resultante do torque desenvolvido pela própria carga aplicada na junta diretamente (τ_{junta}), junto ao torque gerado pelo movimento das outras juntas acopladas ($\tau_{indireto}$). Desse modo, para um mecanismo robótico com acionamento indireto, ou seja, que utiliza de um sistema de transmissão mecânica na interseção entre atuador e junta, geralmente, composto por um motor de alta rotação com uma caixa de transmissão que diminui a velocidade de rotação e amplifica o torque aplicado à junta através de uma razão de velocidade (RV), o distúrbio τ_D é reduzido pela razão de velocidade, de modo que:

$$\tau_D = \frac{\tau_{junta} + \tau_{indireto}}{RV} \quad (6.6)$$

Desse modo, para mecanismos com acionamento indireto, quão maiores forem as razões de velocidade, mais reduzidos serão os efeitos provocados pelo distúrbio τ_D . Como proposto por (SPONG *et al.*, 2006), para razões de velocidade situadas entre 20 e 100, esses efeitos podem ser desconsiderados, e, por consequência, as juntas podem ser controladas como sistemas SISO independentemente.

Para o mecanismo robótico de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras, foco deste trabalho, a malha fechada de controle independente das juntas ativas, utilizando um controlador PID, é ilustrada pela Figura 33.

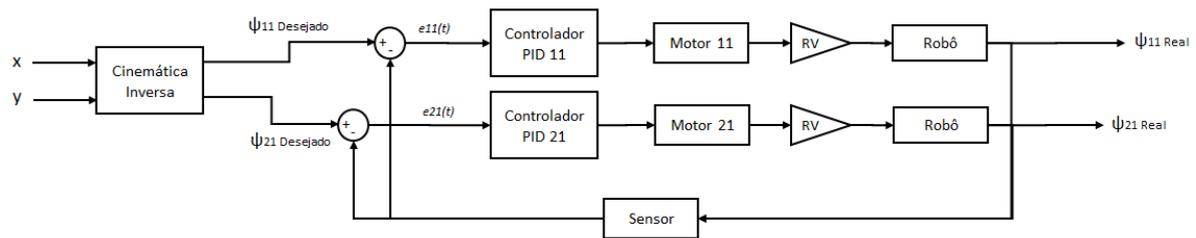
Figura 33 – Malha fechada de controle independente de juntas utilizando controlador PID.



Fonte: Elaborada pelo autor.

E para o controle de posição baseado em coordenadas cartesianas, deve-se utilizar o modelo cinemático inverso, expresso pela Equação 4.28, para definir os ângulos de juntas que serão utilizados para cálculo do erro de posição para os controladores. Dessa forma, a malha fechada de controle de coordenadas cartesianas através do controle independente de juntas ativas, utilizando um controlador PID, é ilustrada pela Figura 34.

Figura 34 – Malha fechada de controle de coordenadas cartesianas através do controle independente de juntas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, tem-se que os torques aplicados às juntas ativas τ_{11} e τ_{21} podem ser modelados matematicamente em termos de parâmetros do controlador e da razão de velocidade, de modo que:

$$\tau_{2x1} = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RV_{11} [K_{p11} e_{11}(t) + K_{d11} \frac{de_{11}(t)}{dt} + K_{i11} \int e_{11}(t) dt] \\ RV_{21} [K_{p21} e_{21}(t) + K_{d21} \frac{de_{21}(t)}{dt} + K_{i21} \int e_{21}(t) dt] \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Assim, a Equação 6.7 pode ser utilizada no modelo dinâmico definido pela Equação 5.72 para simular a malha de controle, através de métodos computacionais de cálculo numérico para resolução de equações diferenciais, afim de sintonizar os ganhos dos controladores e verificar os resultados obtidos.

6.3 Método de sintonia

O método de sintonia refere-se ao ajuste dos ganhos utilizados no controlador afim de obter-se a resposta mais adequada ao projeto. Para isso, existem vários métodos possíveis, dentre

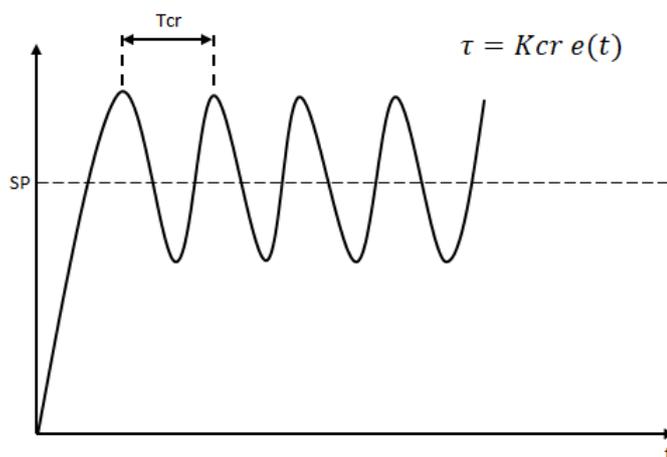
eles o método do lugar das raízes é muito utilizado. Entretanto, para sistemas não-lineares, como é o caso do sistema abordado neste trabalho, a utilização deste método é pouco aplicada. Para esses sistemas, uma das formas de realizar essa sintonia de ganhos é dividida em duas etapas: A primeira refere-se à utilização do método de Ziegler-Nichols e a segunda refere-se a um ajuste fino dos ganhos obtidos através da primeira etapa.

6.3.1 Método de Ziegler-Nichols

Este método de sintonia de ganhos, proposto pelos engenheiros de controle John G. Ziegler e Nathaniel B. Nichols, utiliza-se do modelo dinâmico junto à malha de controle para, a partir de simulações, verificar as respostas do sistema e ajustar os ganhos do controlador.

O primeiro passo para definir os ganhos a partir do método de Ziegler-Nichols é definir o Ganho Crítico (K_{cr}) e o Período Crítico (T_{cr}). O ganho crítico refere-se ao ganho proporcional que gera uma resposta oscilatória de amplitude constante, quando os ganhos integral e derivativo são nulos, enquanto o período crítico refere-se ao período dessa resposta oscilatória de amplitude constante (PINTO, 2014), como ilustrado pela Figura 35.

Figura 35 – Resposta e período crítico para ganho crítico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O segundo passo, é utilizar-se dos parâmetros definidos por Ziegler-Nichols para obtenção dos ganhos proporcional (K_p), integral (K_i) e derivativo (K_d). Esses parâmetros são, comumente, organizados em uma Tabela para uma melhor visualização das informações, como explicitado na Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros de Ziegler-Nichols para obtenção de ganhos para o controlador PID.

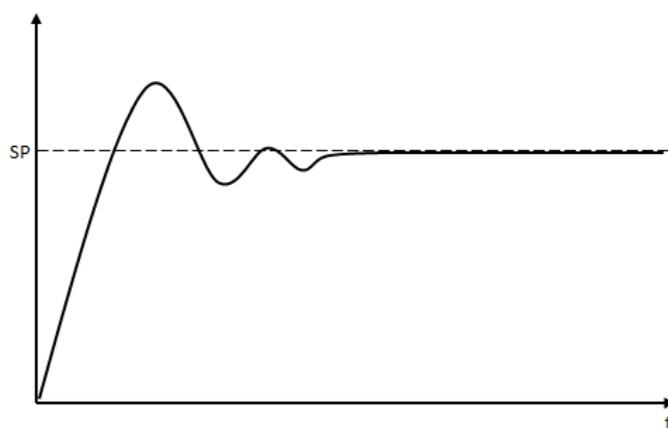
Tipo de Controlador	K_p	K_i	K_d
P	$0,5K_{cr}$	0	0
PI	$0,45K_{cr}$	$1,2\frac{K_p}{T_{cr}}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$2\frac{K_p}{T_{cr}}$	$0,125K_p T_{cr}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.3.2 Ajuste Fino de Ganhos

Entretanto, é comum após a utilização do método de Ziegler-Nichols obter-se uma resposta estável e que se adequa ao valor desejado, porém, uma oscilatória, como o ilustrado pela Figura 36. Isso se deve, em grande parte, pelo fato de o método de Ziegler-Nichols tratar-se de um método heurístico, ou seja, de um método que visa resolver um determinado problema de forma fácil e rápida, mesmo que parte da informação do problema seja desconsiderada.

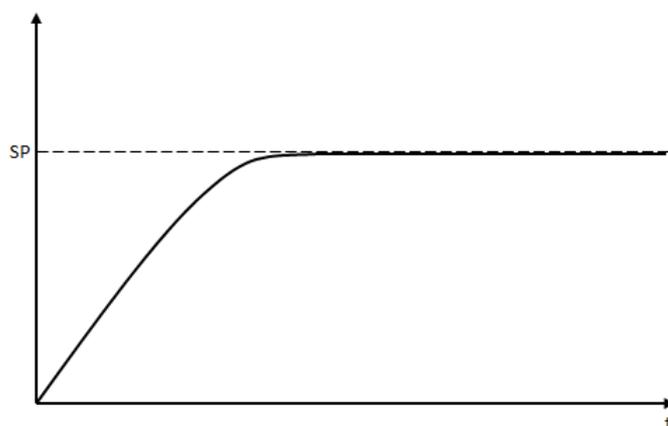
Figura 36 – Resposta de uma malha de controle PID através do método de sintonia de ganhos de Ziegler-Nichols.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por isso, é comum no projeto de um controlador PID para o qual foi aplicado o método de sintonia de ganhos de Ziegler-Nichols, a utilização de uma segunda etapa de sintonia, através da qual é realizado um ajuste fino para os ganhos. Para isso, é de suma importância que se tenha um bom entendimento e conhecimento dos efeitos de cada um dos ganhos sobre a resposta do sistema, de modo a variar os ganhos encontrados pelo método de Ziegler-Nichols até encontrar uma resposta mais similar possível com a ilustrada pela Figura 37.

Figura 37 – Resposta de uma malha de controle PID através do método de sintonia de ganhos de Ziegler-Nichols, após ajuste fino.



Fonte: Elaborada pelo autor.

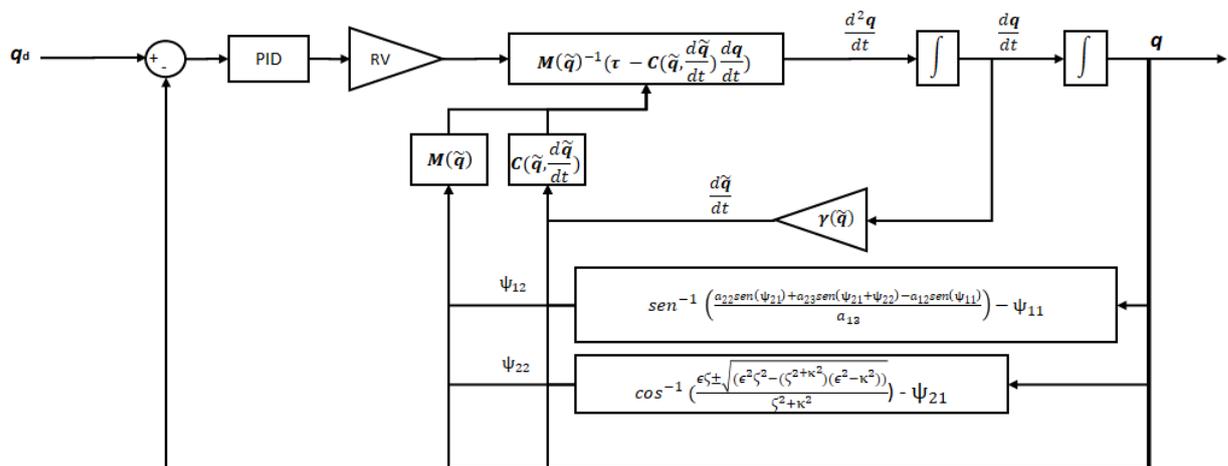
6.4 Método Computacional

Para a sintonia dos ganhos do controlador PID, faz-se necessária a utilização de ferramentas computacionais que auxiliem na visualização dos resultados. Para isso, como o modelo dinâmico referente à planta da malha de controle é uma equação diferencial, faz-se necessária a utilização de métodos numéricos para sua resolução. O método utilizado neste trabalho foi o método de Runge-Kutta, entretanto, não é escopo desta seção explicitar o método numérico utilizado, mas sim, a malha de controle realmente utilizada na simulação computacional.

Um ponto importante para a solução do modelo dinâmico expresso pela Equação 5.72 é a realimentação da planta com o vetor completo de coordenadas generalizadas $\tilde{\mathbf{q}}$ e com o vetor completo de velocidades $\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}$. Para isso, deve-se utilizar as Equações 4.12 e 4.13 para definir através das coordenadas generalizadas ativas as coordenadas generalizadas passivas, obtendo-se o vetor completo de coordenadas generalizadas $\tilde{\mathbf{q}}$ e a Equação 5.61 para, através do vetor de velocidades ativas, obter o vetor completo de velocidades e, com isso, alimentar os parâmetros $\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{q}})$ e $\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt})$ referentes às matrizes de efeitos de Inércia e de Coriolis, respectivamente, do modelo dinâmico do robô.

Desse modo, o método computacional utilizado para obter os resultados da malha de controle através de simulação computacional é ilustrado pela Figura 38.

Figura 38 – Malha referente ao método computacional para realização de simulação da malha de controle.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.5 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foi explicitado um breve histórico da engenharia de controle, bem como o funcionamento e os principais tipos de controladores industriais clássicos. Além disso, foi abordado o método de sintonia de ganhos de Ziegler-Nichols associado a um ajuste fino de ganhos, um dos métodos de sintonia mais utilizados para sistemas não-lineares. Por fim, foi

explicitado o método computacional utilizado para obtenção de resultados através de simulação utilizado neste trabalho.

7 RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos neste trabalho referem-se a um robô manipulador real de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de cinco barras com dois graus de liberdade, desde resultados simulados até resultados empíricos, bem como a comparação entre esses resultados. Obtiveram-se resultados referentes aos modelos cinemáticos (direto e inverso), através de implementação em código computacional dos modelos cinemáticos desenvolvidos neste trabalho, e para o modelo dinâmico através de simulação e testes reais do sistema de controle projetado.

7.1 Cinemática Direta e Inversa

O primeiro resultado obtido refere-se aos modelos cinemáticos utilizando os parâmetros de Denavit-Hartenberg para o robô manipulador de arquitetura paralela utilizado neste trabalho. Seguindo os conceitos desenvolvidos na seção 4.1 do Capítulo 4 deste trabalho, obtiveram-se os parâmetros de Denavit-Hartenberg presentes na Tabela 5, sendo que os comprimentos dos elos foram disponibilizados pela empresa fabricante.

Tabela 5 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para o robô manipulador de arquitetura paralela.

ij	a_{ij} (mm)	α_{ij}	d_{ij} (mm)	θ_{ij}
11	$a_{11} = -34$	0	0	ψ_{11}
12	$a_{12} = 100$	0	0	ψ_{12}
13	$a_{13} = 125$	0	0	$\psi_{13} = 0$
21	$a_{21} = 34$	0	0	ψ_{21}
22	$a_{22} = 80$	0	0	ψ_{22}
23	$a_{23} = 115$	0	0	ψ_{23}

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com os parâmetros de Denavit-Hartenberg estabelecidos, implementou-se em código computacional (utilizando-se a linguagem de programação *Python*) o modelo cinemático direto explicitado pela Equação 4.9 e com o auxílio das Equações 4.12 e 4.13, calculou-se as coordenadas cartesianas x e y da ferramenta utilizando, como entradas para o modelo cinemático direto, valores dos ângulos das juntas ativas 11 e 21. Os ângulos de juntas ativas selecionados, bem como suas respectivas coordenadas cartesianas, obtidas através do modelo cinemático direto, estão explicitados na Tabela 6.

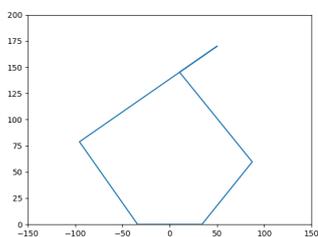
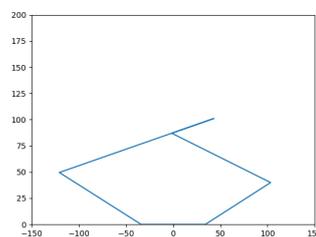
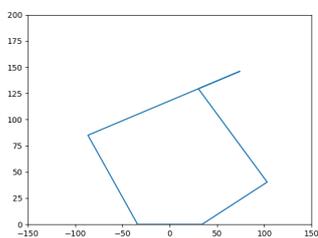
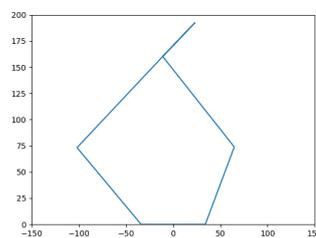
Tabela 6 – Resultados para o modelo cinemático direto desenvolvido.

$\psi_{11}(^{\circ})$	$\psi_{21}(^{\circ})$	$x(mm)$	$y(mm)$
85	0	145,33	119,38
148	32	43,33	109,67
145	35	43,57	121,11
120	60	48,30	196,14
105	75	56,73	222,70
90	90	79,04	229,32
211	111	51,35	193,87

Fonte: Elaborada pelo autor.

Também através código computacional (utilizando-se a linguagem de programação *Python*), foi implementado o modelo cinemático inverso utilizando a Equação 4.28. Em posse dos ângulos de juntas, obtidos pela modelo cinemático inverso, e dos parâmetros do robô é possível descrever graficamente a estrutura cinemática do robô, tendo-se como entrada para o modelo cinemático as coordenadas cartesianas x e y da ferramenta, obtendo-se como resultado, para os ângulos selecionados, as estruturas cinemáticas ilustradas pelas Figura 39 (obtida através da linguagem *Python*).

Figura 39 – Estruturas cinemáticas obtidas a partir do modelo cinemático inverso.

(a) $x = 50$ mm e $y = 170$ mm(b) $x = 43$ mm e $y = 101$ mm(c) $x = 74$ mm e $y = 146$ mm(d) $x = 22$ mm e $y = 192$ mm

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para as coordenadas cartesianas da ferramenta utilizadas para obtenção da Figura 39 e explicitadas nas legendas dessa Figura, são obtidas as coordenadas generalizadas explicitadas na Tabela 7 através do modelo cinemático inverso.

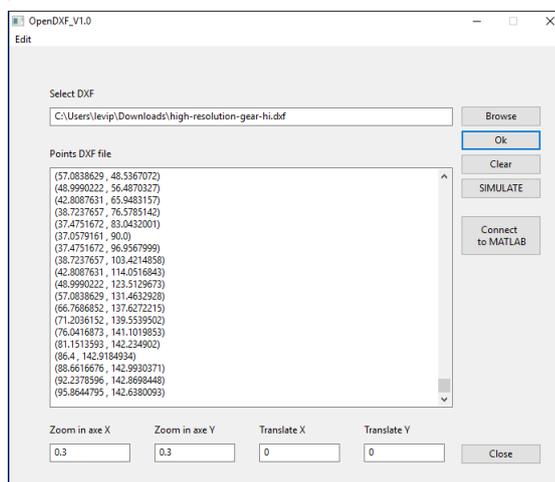
Tabela 7 – Resultados para o modelo cinemático inverso desenvolvido.

$x(mm)$	$y(mm)$	$\psi_{11}(^{\circ})$	$\psi_{21}(^{\circ})$	$\psi_{12}(^{\circ})$	$\psi_{22}(^{\circ})$
170	50	127,99	48,24	-95,92	83,73
101	43	150,31	29,94	-132,87	125,90
146	74	121,72	30,31	-100,94	98,96
192	22	132,91	67,38	-89,58	63,93

Fonte: Elaborada pelo autor.

A fim de se obter um sistema de simulação cinemática e comunicação com a malha de controle em aplicações práticas, através da geração e envio da trajetória a ser seguida pela ferramenta do mecanismo robótico, foi desenvolvido um software que atendesse a essas necessidades, nomeando-o de OpenDXF.

Figura 40 – OpenDXF V1.0 - Software de simulação cinemática e comunicação computacional desenvolvido.

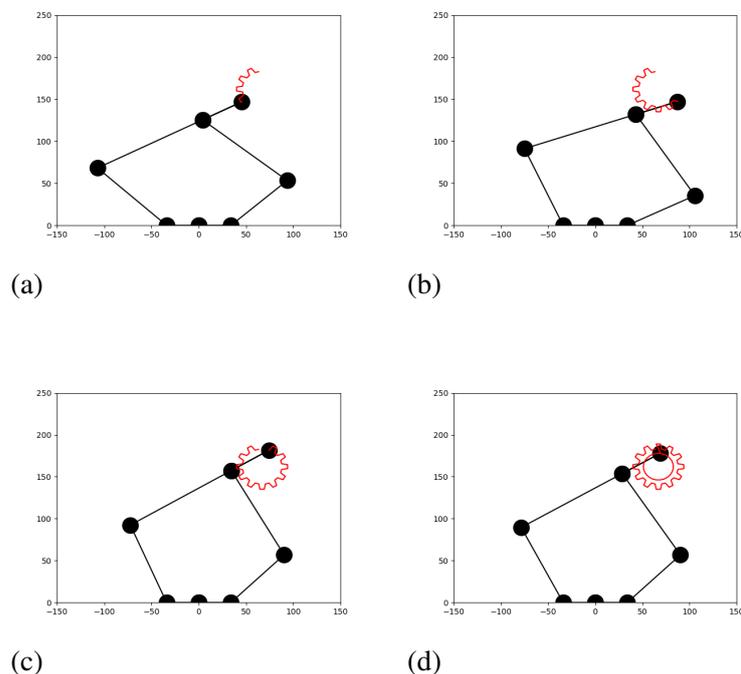


Fonte: Elaborada pelo autor.

Basicamente, através do software OpenDXF, é possível interpretar as coordenadas cartesianas de desenhos no formato de arquivo *dxf* (formato utilizado muitas vezes em desenhos CAD - *Computer Aided Design* ou desenho assistido por computador), ajustar as coordenadas de acordo com o espaço de trabalho do mecanismo robótico e simular o movimento descrito pelo robô, como ilustrado pela Figura 41.

A simulação do movimento é gerada a partir dos modelos cinemáticos, direto e inverso, desenvolvidos neste trabalho e dos parâmetros do robô, sendo que, através dela, é possível prever como ele descreverá a sua trajetória de acordo com a trajetória definida para a ferramenta. Além disso, os pontos interpretados são utilizados para gerar a trajetória e enviá-la à malha de controle para obter o movimento controlado no mecanismo robótico real, que será explicitada na seção seguinte.

Figura 41 – Simulação do movimento do robô de acordo com pontos interpretados através do OpenDXF.



Fonte: Elaborada pelo autor.

7.2 Sistema de Controle

O projeto e desenvolvimento do sistema de controle utilizado neste trabalho foi dividido em quatro etapas: o desenvolvimento do modelo dinâmico do mecanismo robótico, desenho da malha de controle, sintonia de ganhos baseada em simulações computacionais e testes práticos em robô real, que serão descritas, juntamente com seus resultados, a seguir.

7.2.1 O Mecanismo Robótico Real

O robô utilizado para obtenção dos resultados deste trabalho é um mecanismo robótico desenvolvido pela empresa canadense Quanser. Trata-se de um robô de arquitetura paralela baseado em um mecanismo de 5 barras com dimensões de elos presentes na Tabela 5. Entretanto, além dessas informações, outras informações fazem-se importantes.

Uma das informações de extrema importância para a resolução do modelo dinâmico do robô é com relação às massas e às posições dos centros de massa dos elos. Essas informações se encontram na Tabela 8 e foram disponibilizadas pela empresa fabricante do robô, sendo que as configurações das posições dos centros de massa se encontram esquematizadas na Figura 21.

Tabela 8 – Massas e posições dos centros de massa dos elos.

ij	a_{ijg} (mm)	m_{ij} (g)
12	$a_{12g} = 49,37$	$m_{12} = 39,49$
13	$a_{13g} = 57,50$	$m_{13} = 44,83$
22	$a_{22g} = 27,10$	$m_{22} = 58,11$
23	$a_{23g} = 85,54$	$m_{23} = 413,73$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Outra informação importante está relacionada às especificações do acionamento do robô. Para o robô utilizado neste trabalho, o acionamento é realizado por motores de corrente contínua que transmitem movimento para uma caixa redutora de velocidade e amplificadora de torque, esta, por sua vez, transmite o movimento e potência aos elos do robô. Faz-se então necessárias informações como torque nominal dos motores, constante de conversão de torque-tensão e redução de velocidade promovida pela caixa redutora, que se encontram explicitadas na Tabela 9 e foram disponibilizadas pela empresa fabricante do robô.

Tabela 9 – Dados técnicos para o acionamento do robô.

Torque Nominal (Motor CC)	0,0263 Nm
Constante Torque-Tensão do Motor (K_{tt})	98,7745 V/Nm
Redução de Velocidade da Caixa Redutora (RV)	1:50

Fonte: Elaborada pelo autor.

Essas informações são importantes devido ao fato de a saída dos controladores projetados ser referente aos torques aplicados aos motores, sendo que para o acionamento destes, faz-se necessária a aplicação de uma tensão elétrica nos terminais dos motores. Dessa forma as saídas dos controladores serão torques que serão convertidos em tensões equivalentes, através de uma constante de conversão torque-tensão dos motores, sendo estas aplicadas aos motores que girarão transmitindo movimento às caixas redutoras, que transmitirão, aos elos 12 e 22, um torque amplificado em 50 vezes.

7.2.2 Sintonia de Ganhos

Para a sintonia de ganhos dos controladores PID projetados neste trabalho, foi realizada simulação computacional, em linguagem Julia de programação, da malha de controle esquematizada na Figura 38, sendo o método numérico utilizado para resolver a equação diferencial referente ao modelo dinâmico do robô foi o método numérico de Runge-Kutta de 4^o Ordem.

Para a aplicação do método de Ziegler-Nichols, foram escolhidos valores aleatórios de *set-point* para os ângulos de juntas ativas, sendo eles explicitados na Tabela 10.

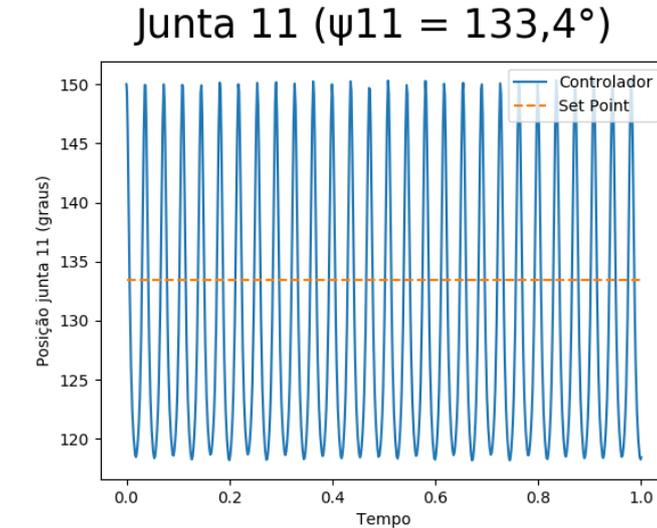
Tabela 10 – Ângulos de juntas ativas utilizados para sintonia de ganhos.

$\psi_{11} (^{\circ})$	$\psi_{21} (^{\circ})$
133,4	41,7

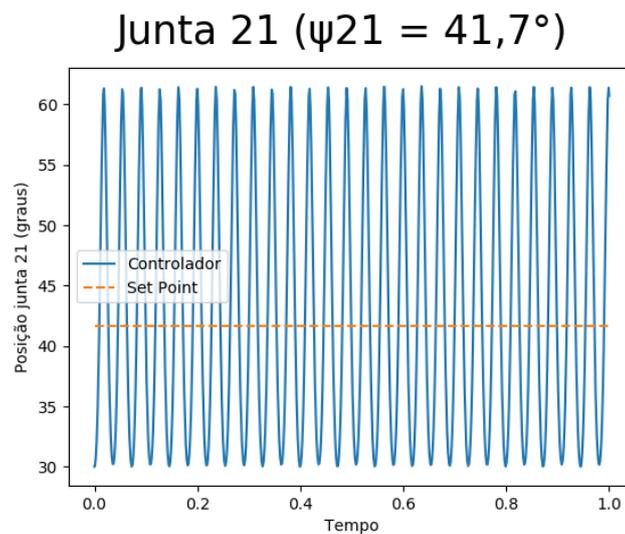
Fonte: Elaborada pelo autor.

Após várias simulações com o objetivo de encontrar uma resposta do sistema oscilatória de amplitude aproximadamente constante e, conseqüentemente, encontrar os ganhos proporcionais críticos (K_{pcr11} e K_{pcr21}) e os períodos críticos (T_{cr11} e T_{cr21}), obtiveram-se as respostas ilustradas pela Figura 42.

Figura 42 – Respostas oscilatórias de amplitude aproximadamente constante.



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dos resultados ilustrados pela Figura 42, foram encontrados os ganhos proporcionais e períodos críticos explicitados na Tabela 11.

Tabela 11 – Ganhos proporcionais e períodos críticos.

	Junta 11	Junta 21
K_{pcr}	1	2,15
$T_{cr}(s)$	0,04	0,04

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dos ganhos e períodos críticos, explicitados na Tabela 11, e utilizando a Tabela 4 de Ganhos de Ziegler-Nichols, obtém-se os ganhos proporcional, integral e derivativo para os controladores projetados para utilização na malha utilizada no controle do mecanismo de robótico utilizado neste trabalho. Os ganhos estão explicitados na Tabela 12.

Tabela 12 – Ganhos proporcionais, integrais e derivativos pelo método de Ziegler-Nichols.

	K_p	K_i	K_d
Junta 11	0,6	30	0,003
Junta 21	1,29	64,5	0,00645

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao implementar os ganhos explicitados na Tabela 12 na malha de simulação computacional obtém-se as respostas ilustradas pela Figura 43.

Percebe-se pela, Figura 43, que apesar de o sistema se estabilizar rapidamente (aproximadamente 4 segundos, com um erro praticamente nulo), ao utilizar-se os ganhos obtidos pelo método de Ziegler-Nichols, ainda trata-se de um sistema com resposta oscilatória, devido à todas as considerações realizadas pelo método e pela sua própria natureza heurística. É, então, que faz-se necessário um ajuste fino dos ganhos obtidos pelo método de Ziegler-Nichols, ajuste esse realizado através de repetidas simulações e variações dos ganhos obtidos, a fim de obter os efeitos que geram uma resposta não oscilatória. Os ganhos obtidos através da etapa de ajuste fino dos ganhos Proporcional, Integral e Derivativo estão explicitados na Tabela 13.

Tabela 13 – Ganhos proporcionais, integrais e derivativos obtidos após ajuste fino.

	K_p	K_i	K_d
Junta 11	1,7	0,1	0,1
Junta 21	2,3	0,1	0,1

Fonte: Elaborada pelo autor.

As resposta dos sistema após implementar os ganhos explicitados na Tabela 13 estão ilustradas na Figura 44. Percebe-se que após o ajuste fino, o sistema ainda se estabiliza rapidamente e com erro praticamente nulo, entretanto sem nenhuma oscilação da resposta, o que ilustra a comum necessidade de se utilizar esta etapa de ajuste fino na maioria dos sistemas, principalmente, os de ordem elevada e altamente acoplados.

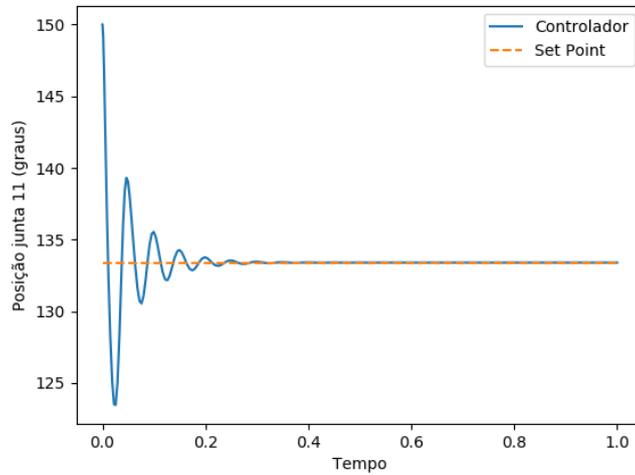
7.2.3 Resultados Simulados x Resultados Empíricos

Após obter-se os resultados simulados, obtiveram-se os resultados empíricos utilizando o mecanismo robótico real de modo a buscar validar os modelos cinemático e dinâmico desenvolvidos para o robô utilizado neste trabalho, bem como a malha de controle projetada.

Para implementar a malha de controle projetada foi utilizado o software MATLAB devido sua interface com o software QUARC desenvolvido pela empresa fabricante do robô e utilizado

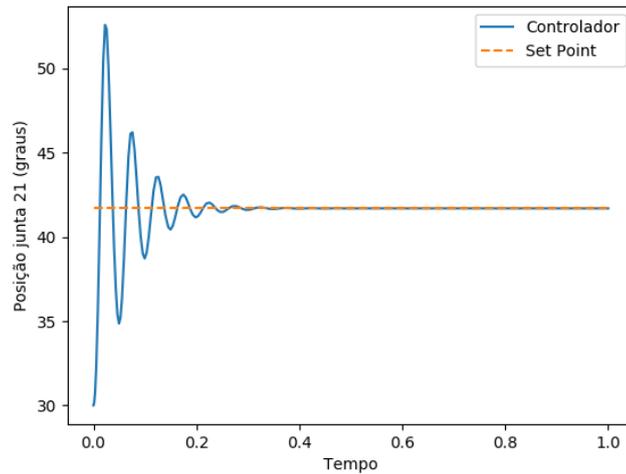
Figura 43 – Respostas do sistema com ganhos de Ziegler-Nichols.

Junta 11 ($\psi_{11} = 133,4^\circ$)



(a)

Junta 21 ($\psi_{21} = 41,7^\circ$)



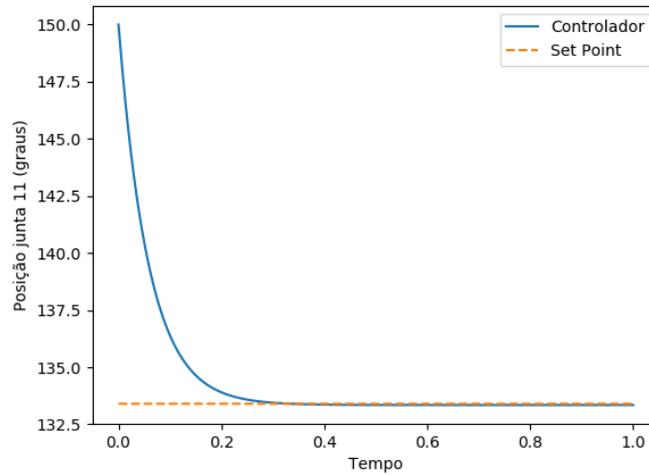
(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

para comunicação e aquisição de dados referentes aos atuadores e, conseqüentemente, às juntas ativas do robô. Conhecendo-se as especificações do acionamento do robô, que podem ser vistas na Tabela 9, e após serem realizadas uma série de simulações para o projeto do controlador, a malha de controle foi implementada na prática, como esquematizado na Figura 45.

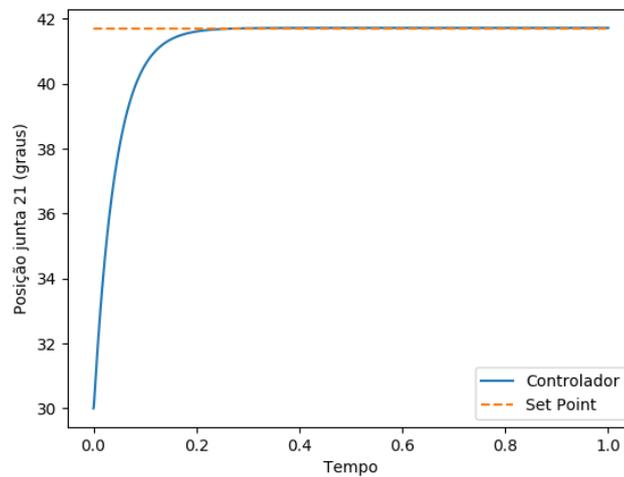
Figura 44 – Respostas do sistema após ajuste fino de ganhos.

Junta 11 ($\psi_{11} = 133,4^\circ$)



(a)

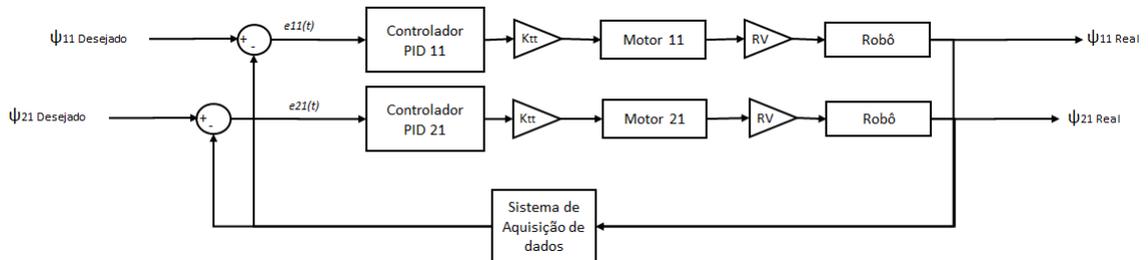
Junta 21 ($\psi_{21} = 41,7^\circ$)



(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 45 – Malha de controle implementada no robô real.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para os testes do controlador, foram selecionadas algumas posições a serem utilizadas como *set-points* na malha de controle, sendo que a posição inicial foi arbitrada como os valores

explicitados na Tabela 14, por ser a posição de calibração do robô e por possuir um fim de curso removível que permitia um ajuste preciso da posição inicial do robô.

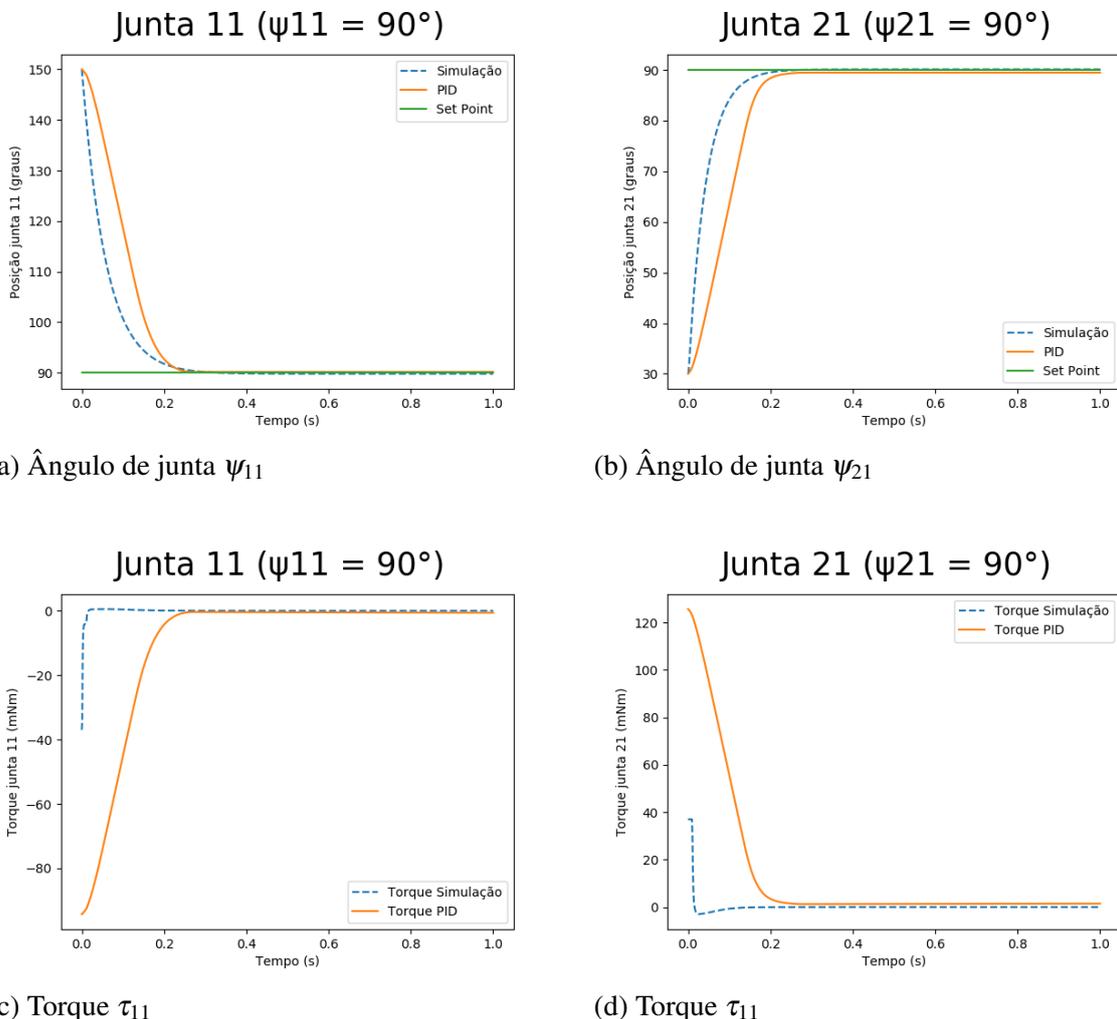
Tabela 14 – Posição inicial e de calibração para os testes do sistema de controle.

$\psi_{11} (^{\circ})$	$\psi_{21} (^{\circ})$
150	30

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, são ilustrados alguns dos resultados para o teste do sistema de controle de posição, projetado e implementado no robô real, para as posições selecionadas como *set-points* do sistema.

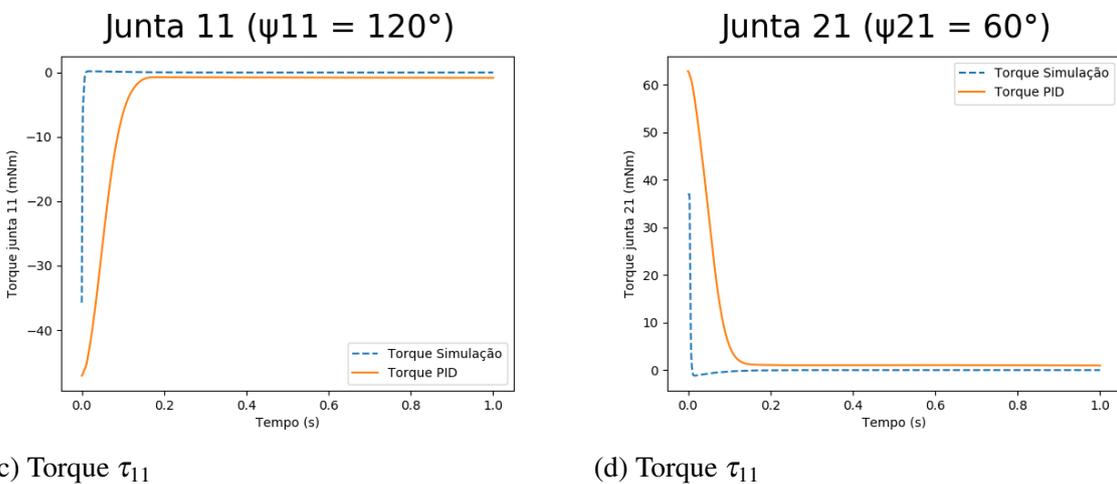
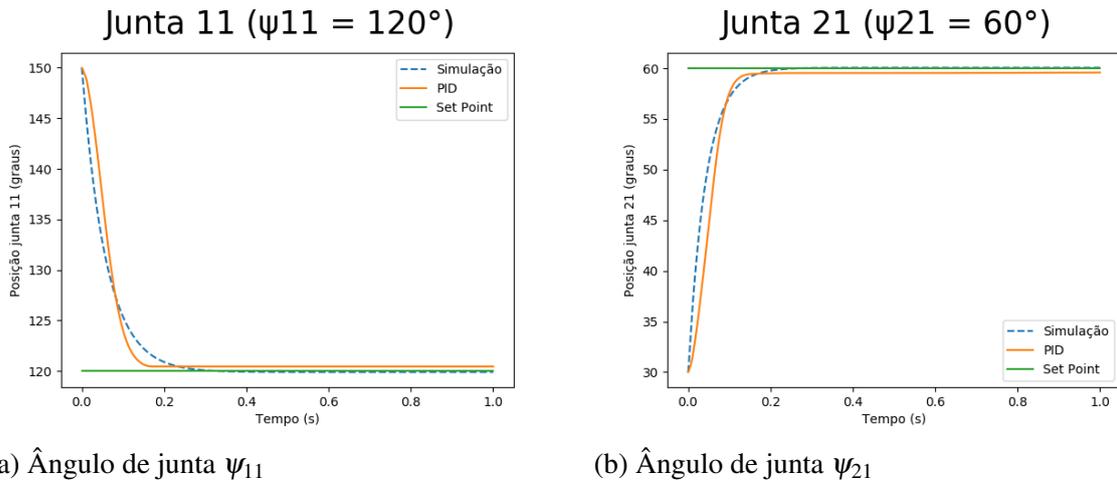
Figura 46 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 90^{\circ}$ e $\psi_{21} = 90^{\circ}$).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que os resultados empíricos (em azul) se mostraram bem similares aos resultados simulados (em vermelho), entretanto com pequenas diferenças em seus comportamentos, isso se deve, em grande parte, às irreversibilidades presentes no sistema real (geradas devido folga de elementos de fixação, atrito, vibração de elementos e da estrutura, entre outros fatores) e que não foram consideradas no desenvolvimento do modelo dinâmico.

Figura 47 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 120^\circ$ e $\psi_{21} = 60^\circ$).



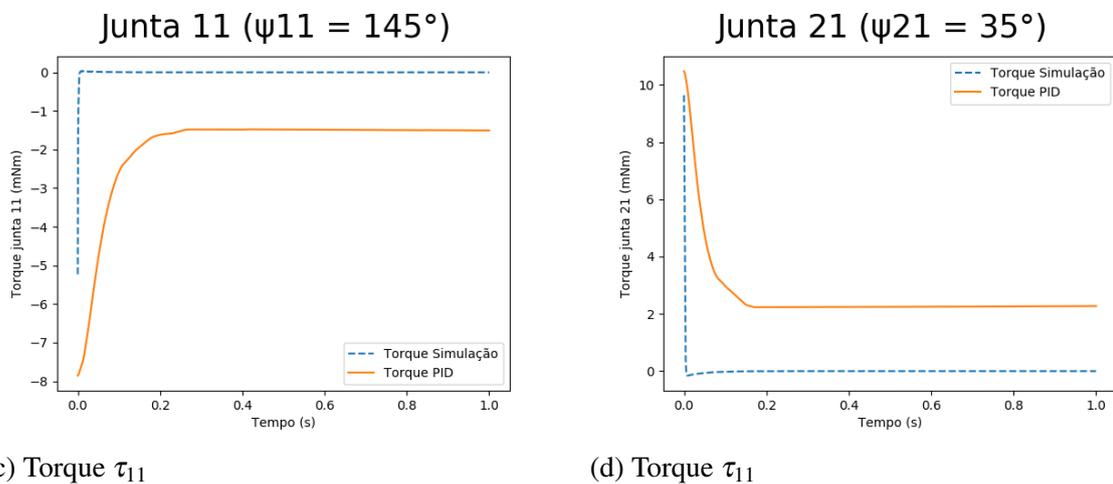
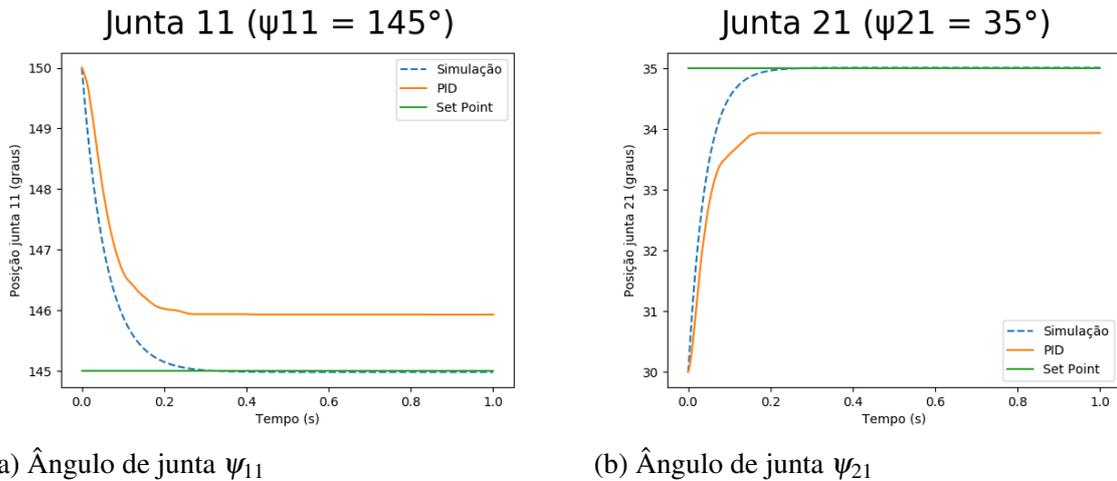
Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, para variações elevadas nos valores dos ângulos de junta com relação à posição inicial, os resultados se mostraram satisfatórios pelo fato de sistema se estabilizar rapidamente (em torno de 0,2s para as posições utilizadas como *set-point* das respostas ilustradas nas Figuras 46 e 47) com erros de regime bem abaixo dos erros de regime convencionalmente aceitos na literatura (de 3% a 5% (OGATA, 1998)). Entretanto, para pequenas variações de ângulos de junta com relação à posição inicial, os resultados se mostraram inferiores, em performance, com relação aos resultados ilustrados anteriormente, como se encontra ilustrado nas Figuras 48 e 49.

Essa performance inferior aos resultados ilustrados pelas Figuras 46 e 47 é explicada pelo próprio projeto dos controladores: a sintonia dos ganhos dos controladores foi realizada para uma faixa de ângulos, estando sujeito a não obter a mesma performance quando utilizada outras faixas de ângulos. Em geral, a performance dos controladores projetados neste trabalho reduz com a redução da variação dos ângulos de juntas em relação à posição inicial.

A Tabela 15 resume os resultados anteriores através da indicação dos erros de regime para cada um dos *set-points* aqui avaliados. Percebe-se que, de acordo com a prática comum na

Figura 48 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 145^\circ$ e $\psi_{21} = 35^\circ$).



Fonte: Elaborada pelo autor.

literatura de se aceitar valores de erro de regime de 3% a 5% (OGATA, 1998), para as variações muito pequenas de ângulos de juntas ativas, os resultados não são satisfatórios. Entretanto, para faixas de variações maiores, para as quais os controladores foram projetados, os resultados se mostram satisfatórios.

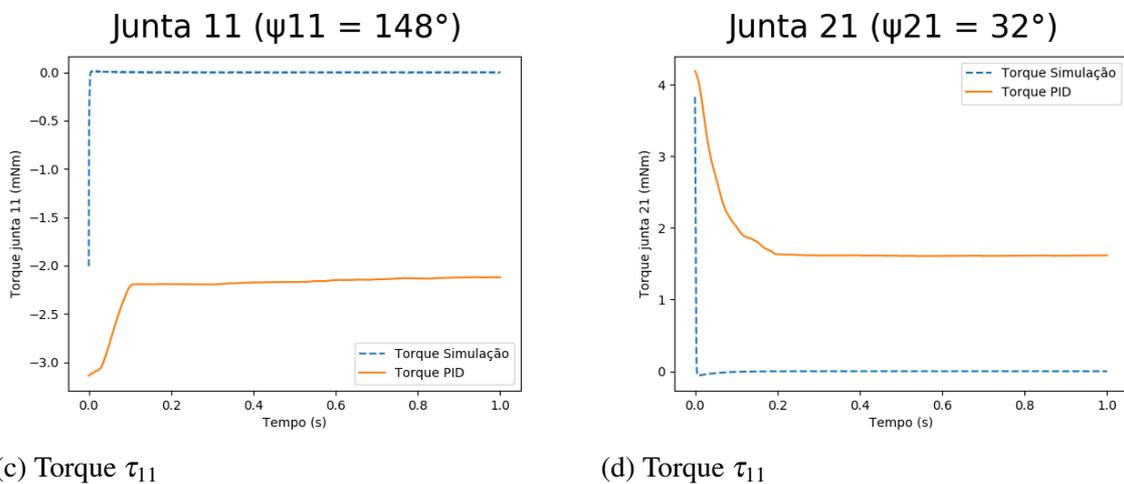
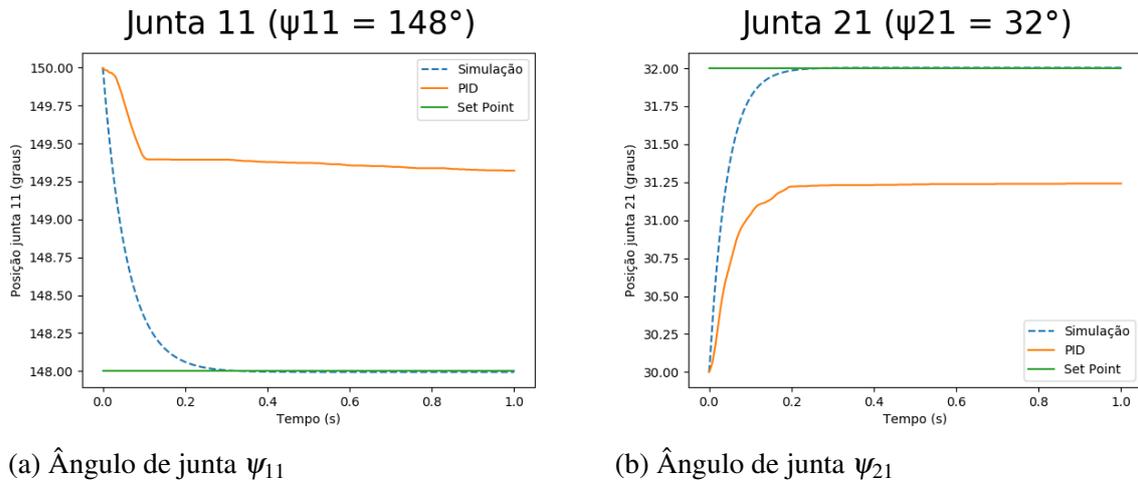
Tabela 15 – Erros de regime permanente.

$\psi_{11}(^\circ)$	$\psi_{21}(^\circ)$	$Erro_{11}(^\circ)$	$Erro_{21}(^\circ)$	$Erro_{11}\%$	$Erro_{21}\%$
90	90	-0,16	0,54	0,3	0,9
120	60	-0,45	0,41	1,5	1,4
145	35	-0,93	1,06	18,6	21,3
148	32	-1,32	0,76	66,1	37,9

Fonte: Elaborada pelo autor.

7.2.4 Robustez do controlador

Para o teste da robustez do controlador, foi avaliado como a resposta do sistema de controle projetado se comportaria ao ser exposta a uma situação para a qual não foi projetado.

Figura 49 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 148^\circ$ e $\psi_{21} = 32^\circ$).

Fonte: Elaborada pelo autor.

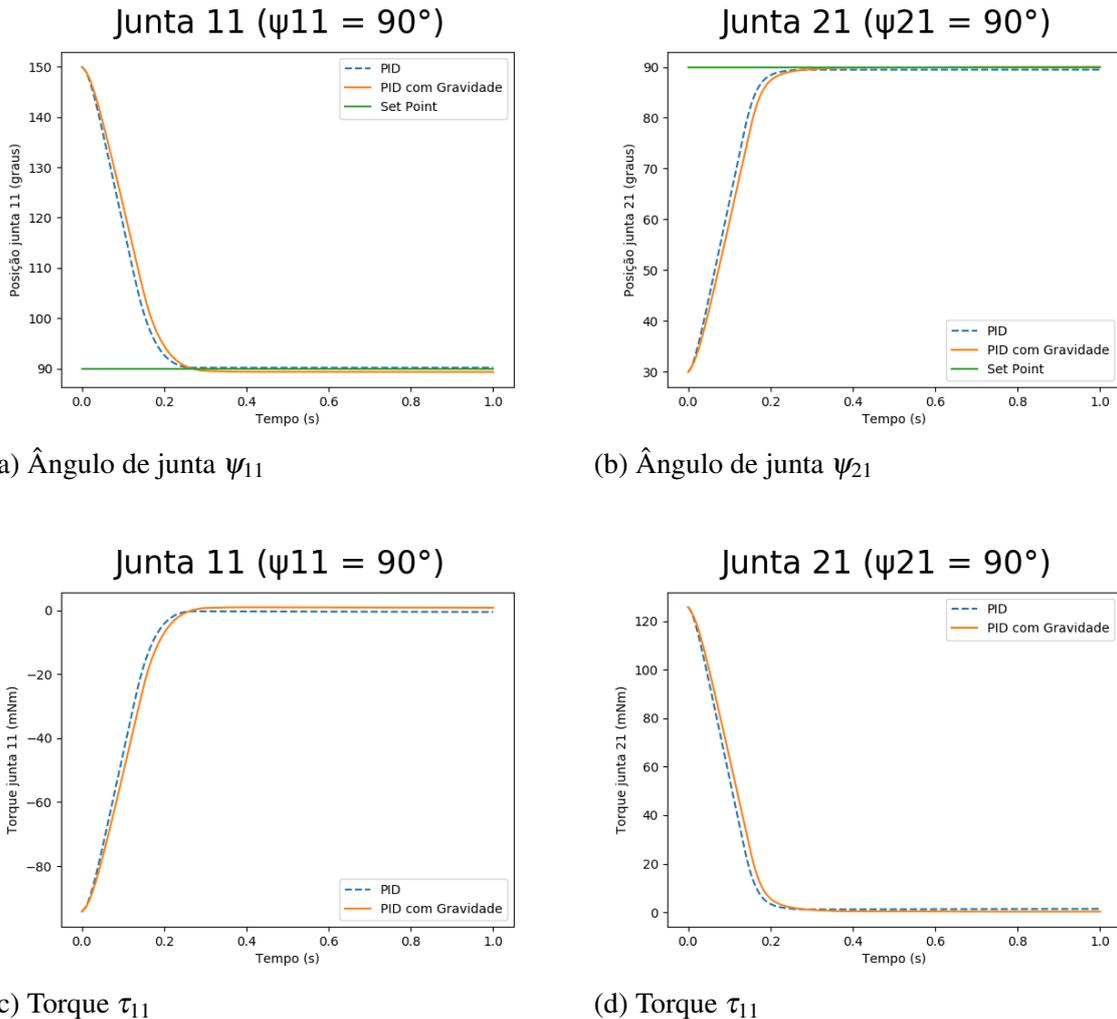
Para isso, além das próprias condições do sistema real que não foram modeladas (já mencionadas na seção anterior), a ação da gravidade sobre os torques aplicados nas juntas também foi desconsiderada no modelo, devido à natureza do mecanismo robótico, que é horizontal. Para o robô em configuração vertical, ao invés do modelo dinâmico definido na Equação 5.72, teria-se um acréscimo da matriz de efeitos gravitacionais $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{q}})$ função das coordenadas generalizadas ativas e passivas, como explicitado pela Equação 7.1.

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \mathbf{M}^{-1}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}) [\tau_{2 \times 1} - (\mathbf{C}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt}) \frac{d\mathbf{q}}{dt}) - \mathbf{G}_{2 \times 2}(\tilde{\mathbf{q}})] \quad (7.1)$$

Levando isso em consideração, uma forma de testar a robustez do sistema de controle projetado consiste, basicamente, em verticalizar o mecanismo robótico, sem, no entanto, modificar os controladores, ou seja, consiste em submeter o sistema real à energia potencial gravitacional não nula sem que o sistema de controle tenha sido projetado considerando a presença da matriz de efeitos gravitacionais $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{q}})$, verificando se a performance se mantém satisfatória.

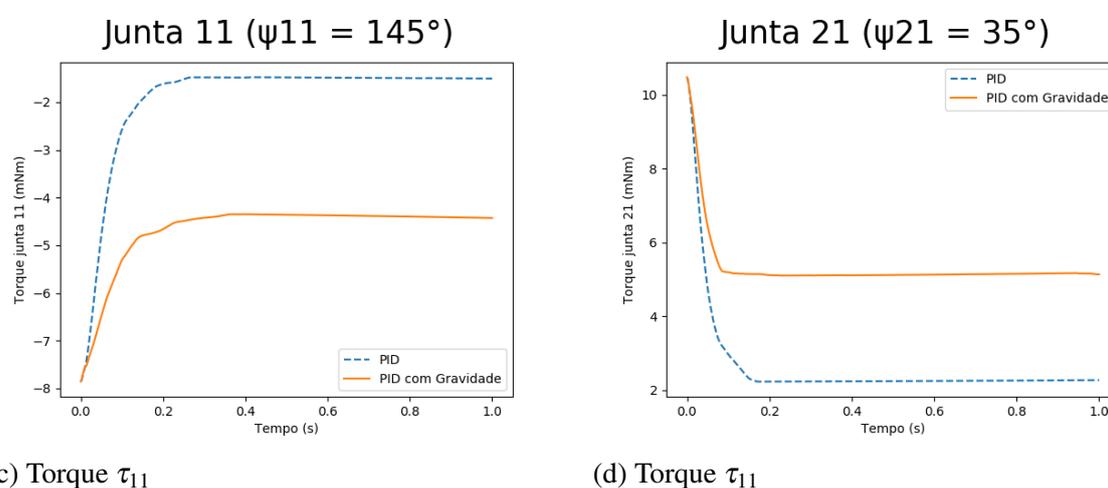
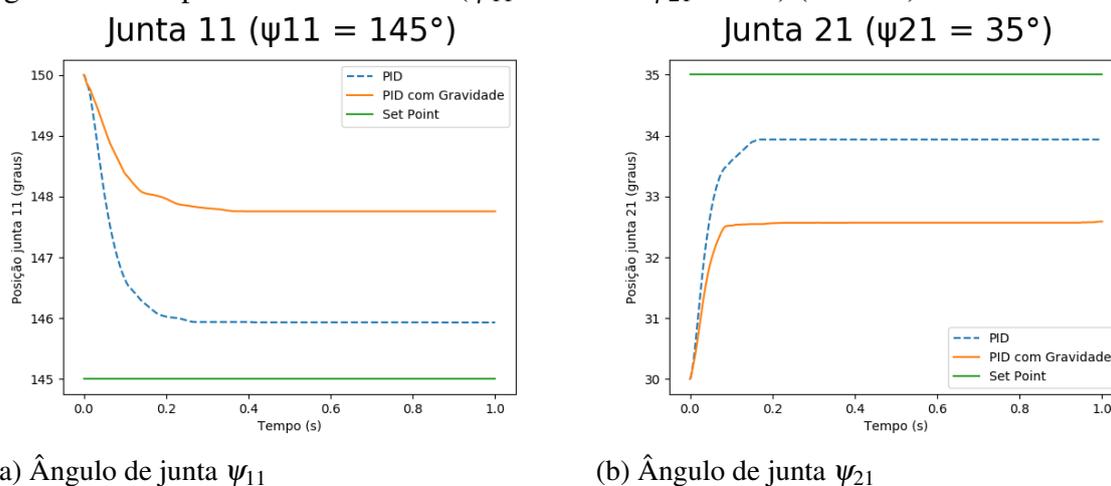
Foram selecionados dois dos testes realizados a fim de ilustrar o efeitos que a ausência da ação da gravidade no modelo dinâmico, ao projetar o sistema de controle, tem sobre resultados quando o sistema é submetido a tais condições desconsideradas. As Figuras 50 e 51 ilustram os resultados do teste da robustez para dois valores de *set-points*, um para faixa de variação de ângulo de junta maior (para a qual os controladores foram projetados), $\psi_{11} = 90$ e $\psi_{21} = 90$, e outro para uma faixa de variação menor (para a qual os controladores não foram projetados), $\psi_{11} = 145$ e $\psi_{21} = 35$.

Figura 50 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 90^\circ$ e $\psi_{21} = 90^\circ$) (Vertical).



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 16 explicita os erros de regime para os resultados anteriores. Percebe-se que para a faixa de variações de ângulo de junta que os controladores foram projetados (Figura 50), para uma das juntas o resultado se mostrou mais satisfatório, entretanto para a outra se mostrou mais inferior com uma imprecisão maior do que melhora gerada na outra junta, quando comparados com os resultados para o sistema horizontal, sendo, ainda, um resultado satisfatório. Entretanto, para a faixa de variação que os controladores não foram projetados (Figura 51) o resultado se mostrou ainda mais inferior. Ou seja, para faixa de variação de projeto, os controladores se

Figura 51 – Resposta do sistema real ($\psi_{11} = 145^\circ$ e $\psi_{21} = 35^\circ$) (Vertical).

Fonte: Elaborada pelo autor.

mostrou robusto, mas para faixas de variação pequenas, a performance dos controladores se mostrou baixa.

Tabela 16 – Erros de regime permanente sob efeitos do termo gravitacional.

$\psi_{11}(^\circ)$	$\psi_{21}(^\circ)$	$Erro_{11}(^\circ)$	$Erro_{21}(^\circ)$	$Erro_{11}\%$	$Erro_{21}\%$
90	90	0,49	0,05	-0,8	0,1
145	35	-2,75	2,41	55,1	48,2

Fonte: Elaborada pelo autor.

A condição imposta pela gravidade ao sistema impactou nos resultados no sentido de elevar o erro de regime, entretanto o controlador ainda se mostrou robusto para manter o erro de regime em um valor satisfatório. Verificou-se então que, dentre as condições avaliadas, variações de ângulos de junta muito pequenas resultam em impactos realmente significativos para a robustez do sistema de controle projetado, quando compara-se com os efeitos gerados pelas condições não modeladas no projeto, porque tende a gerar um elevado erro de regime e a intensificar esse erro quando o sistema é imposto a condições não consideradas no desenvolvimento do modelo

dinâmico, como ilustrado pela Figura 51.

7.3 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram explicitados e discutidos todos os resultados obtidos neste trabalho, desde os resultados para os modelos cinemáticos desenvolvidos, até os resultados para as simulações do sistema de controle projetado utilizando o modelo dinâmico desenvolvido. Além disso, foram ilustrados e discutidos os resultados obtidos para o mecanismo robótico real, comparando-os com os resultados simulados e testando a robustez do sistema de controle projetado ao impor ao sistema dinâmico real condições não modeladas no projeto.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi projetado o sistema de controle para um robô manipulador de arquitetura paralela, obtendo-se resultados satisfatórios dentro dos padrões definidos na literatura, demonstrando que a metodologia de projeto utilizado pelo autor também pode ser aplicada em robôs mais robustos e aplicados, industrialmente, em atividades precisas.

O projeto do sistema de controle só foi possível devido ao desenvolvimento dos modelos cinemáticos e dinâmicos, utilizados nas simulações de projeto dos controladores. A reduzida literatura voltada ao desenvolvimento desses modelos, para mecanismos robóticos de arquitetura paralela, se mostrou um dos pontos de maior dificuldade inicial e também um dos pontos motivadores para o desenvolvimento de resultados que possam ser atualmente utilizados pela comunidade científica.

Avaliando-se esses resultados, é possível chegar à conclusão de que os métodos e modelos utilizados neste trabalho se mostraram satisfatórios pelo fato da obtenção de resultados em robô real com erros de posição em regime permanente de monores do que 2% em relação ao erro inicial para as faixas de variação de ângulos de junta utilizadas no projeto, performance essa que pode ser utilizada em atividades como impressão de placas de circuito, soldagem a ponto e manipulação de objetos. Entretanto, a performance, consideravelmente, inferior para pequenas variações incitou o desenvolvimento de outros trabalhos relacionados (sujeitos à futura publicação) e incentivou o desenvolvimento de trabalhos futuros, como a comparação de resultados ao utilizar-se estratégias de controles ou controladores diferentes.

Além disso, verificou-se a robustez do sistema de controle projetado ao impor nas condições de operação do mecanismo robótico condições não consideradas no projeto dos controladores, que demonstraram uma performance ainda satisfatória, no caso de faixas de variação de ângulos de junta utilizadas no projeto. Isso demonstra o atendimento de uma das necessidades que os sistemas de controle devem suprir em ambiente industrial referente às condições de operação não mapeadas no desenvolvimento do projeto.

Por fim, é válido explicitar que os objetivos apresentados e intrínsecos a este trabalho foram realizados, tais como o crescimento intelectual do autor, que pode desenvolver, praticar e agregar vários conhecimentos adquiridos no decorrer do curso, bem como obter conhecimentos aplicados em tecnologias de ponta nas grandes indústrias, o desenvolvimento científico promovido pelos resultados obtidos e pela literatura desenvolvida, que pode ser utilizado em aplicações acadêmicas e industriais e a influência deste trabalho no desenvolvimento de outros trabalhos, abrindo caminho para trabalhos futuros, que em muito devem agregar valor nos conhecimentos aqui adquiridos.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, M. A. M. d. **Tópicos de Mecânica Clássica**. Tese (Doutorado), 2017. Nenhuma citação no texto.
- AGUIRRE, L. A.; RODRIGUES, G. G.; JÁCOME, C. R. Identificação de sistemas não lineares utilizando modelos narmax polinomiais—uma revisão e novos resultados. **SBA Controle e automação**, v. 9, n. 2, p. 90–106, 1998. Nenhuma citação no texto.
- AJLILL. **Water Clock Experiment Wrap-up**. [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<http://edu.ajlc.waterloo.on.ca/node/58>>. Nenhuma citação no texto.
- AMORIM, C. R. O. **Teorema da função implícita e suas aplicações**. Tese (Doutorado), 2016. Nenhuma citação no texto.
- ARAI, T.; SHERIDAN, T. **Characteristics and mechanism analysis of parallel link manipulator**. [S.l.]: Elsevier, 1989. 119–124 p. Nenhuma citação no texto.
- ARRUDA, L. V. R. d.; SWIECH, M. C. S.; NEVES-JR, F.; DELGADO, M. R. Um método evolucionário para sintonia de controladores pi/pid em processos multivariáveis. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 19, n. 1, p. 1–17, 2008. Nenhuma citação no texto.
- BRIOT, S.; KHALIL, W. **Dynamics of Parallel Robots: From Rigid Bodies to Flexible Elements**. [S.l.]: Springer, 2015. v. 35. Nenhuma citação no texto.
- CARMINATI, R. **Bosch Rexroth: ancora in crescita nel 2014 nonostante la crisi**. [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<http://www.fonderianews.it/bosch-rexroth-ancora-in-crescita-nel-2014-nonostante-la-congiuntura/>>. Nenhuma citação no texto.
- CRAIG, J. J. **Introduction to robotics: mechanics and control**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, 2005. v. 3. Nenhuma citação no texto.
- GHORBEL, F.; CHETELAT, O.; LONGCHAMP, R. A reduced model for constrained rigid bodies with application to parallel robots. v. 27, 09 1994. Nenhuma citação no texto.
- GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1980. Nenhuma citação no texto.
- JAIN, K. **Getting started with Julia – a high level, high performance language for computing**. [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<https://www.analyticsvidhya.com/blog/2015/07/julia-language-getting-started/>>. Nenhuma citação no texto.
- JUNIOR, L. A. F. **O uso de arduino na criação de kit para oficinas de robótica de baixo custo para escolas públicas**. Tese (Doutorado), 2014. Nenhuma citação no texto.
- MARION, J. B. **Classical Dynamics of particle and systems**. [S.l.]: Academic Press, 1970. Nenhuma citação no texto.

MARITIEMNIEUWS. **Uitvinder van Ampelmann benoemd tot KIVI-erelid.** [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<https://maritiemnieuws.nl/84391/uitvinder-van-ampelmann-benoemd-tot-kivi-erelid/>>. Nenhuma citação no texto.

MATHWORKS. **MATLAB: Math. Graphics. Programming.** [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>>. Nenhuma citação no texto.

MELEIRO, L. A. d. C. *et al.* Projeto e aplicação de controladores baseados em modelos lineares, neurais e nebulosos. [sn], 2002. Nenhuma citação no texto.

NORTON, R. L. **Cinemática e dinâmica dos mecanismos.** [S.l.]: AMGH Editora, 2010. Nenhuma citação no texto.

OGATA, K. **System dynamics.** [S.l.]: Prentice Hall New Jersey, 1998. v. 3. Nenhuma citação no texto.

ORIOLO, G.; NAKAMURA, Y. Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: Underactuated manipulators. In: IEEE. **Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on.** [S.l.], 1991. p. 2398–2403. Nenhuma citação no texto.

OVIEDO, J. E.; BOELEN, T.; OVERSCHEE, P. van. Robust advanced pid control. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 26, n. 1, p. 15–19, 2006. Nenhuma citação no texto.

PAUL, R. P. **Robot manipulators: mathematics, programming, and control: the computer control of robot manipulators.** [S.l.]: Richard Paul, 1981. Nenhuma citação no texto.

PINTO, J. E. M. G. **Aplicação Prática do Método de Sintonia de Controladores PID Utilizando o Método do Relé com Histerese.** Tese (Doutorado), 2014. Nenhuma citação no texto.

QUANSER. **Quanser: Innovate. Educate.** [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<https://www.quanser.com/>>. Nenhuma citação no texto.

QUANSER. **QUARC™ Real-Time Control Software.** [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<https://www.quanser.com/products/quarc-real-time-control-software/>>. Nenhuma citação no texto.

REVIEW, R. B. **How Omron Adept Robots Are Changing Packaging Applications.** [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<https://www.roboticsbusinessreview.com/podcast/omron-adept-robots-are-changing-packaging-applications/>>. Nenhuma citação no texto.

ROBOTYKA. **Manipulatory równoległe o zamkniętym łańcuchu kinematycznym.** [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<https://www.robotyka.com/teoria.php/teoria.41>>. Nenhuma citação no texto.

ROMANO, V. F. **Robótica Industrial.** [S.l.]: Edgard Blucher, São Paulo, 2002. Nenhuma citação no texto.

SILVA, E. S. R. d. L. **Investigação do Comportamento Dinâmico e Avaliação de Estratégias de Identificação, Controle e Otimização de um Reator FCC.** Tese (Doutorado), 2006. Nenhuma citação no texto.

SOBRINHO, C. A. N. **Controlador Neural Aplicado a um Sistema Posicionador Acionado por Motores de Indução Trifásicos**. Tese (Doutorado), 2011. Nenhuma citação no texto.

SOUZA, G. T. d. **Controle e Automação Industrial**. Tese (Doutorado), 2004. Nenhuma citação no texto.

SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. **Robot modeling and control**. [S.l.]: Wiley New York, 2006. v. 3. Nenhuma citação no texto.

TACOI. **INDUSTRIAL MANUFACTURING**. [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<http://www.tacoi.es/technology/>>. Nenhuma citação no texto.

TAN, V. **Willrich Precision Instrument - Thread Gauges, Cylindrical Gauges, Micrometers And Calipers**. [S.l.], Acesso: 11 de Março de 2018. Disponível em: <<https://www.landyreg.com/journal/Willrich/17072>>. Nenhuma citação no texto.

TSAI, L.-W. **Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. Nenhuma citação no texto.

WESTENSKOW, D. R. Fundamentals of feedback control: Pid, fuzzy logic, and neural networks. **Journal of Clinical Anesthesia**, v. 9, n. 6, Supplement 1, p. 33S – 35S, 1997. ISSN 0952-8180. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0952818097001232>>. Nenhuma citação no texto.

**APÊNDICE A – ELEMENTOS DAS MATRIZES REFERENTES AO MODELO
DINÂMICO**

$$\tilde{d}_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) = (a_{12}^2 m_{12})/12 + a_{12g}^2 m_{12} + a_{12}^2 m_{13} + a_{13g}^2 m_{13} + 2a_{12} a_{13g} m_{13} \cos(\psi_{12}) \quad (\text{A.1})$$

$$\tilde{d}_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{d}_{13}(\tilde{\mathbf{q}}) = m_{13} a_{13g}^2 + a_{12} m_{13} \cos(\psi_{12}) a_{13g} \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{d}_{14}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{d}_{21}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\tilde{d}_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) = (a_{22}^2 m_{22})/12 + a_{22g}^2 m_{22} + a_{22}^2 m_{23} + a_{23g}^2 m_{23} + 2a_{22} a_{23g} m_{23} \cos(\psi_{22}) \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{d}_{23}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{d}_{24}(\tilde{\mathbf{q}}) = m_{23} a_{23g}^2 + a_{22} m_{23} \cos(\psi_{22}) a_{23g} \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{d}_{31}(\tilde{\mathbf{q}}) = m_{13} a_{13g}^2 + a_{12} m_{13} \cos(\psi_{12}) a_{13g} \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{d}_{32}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{d}_{33}(\tilde{\mathbf{q}}) = (m_{13} a_{13}^2)/12 + m_{13} a_{13g}^2 \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{d}_{34}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{d}_{41}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\tilde{d}_{42}(\tilde{\mathbf{q}}) = m_{23}a_{23g}^2 + a_{22}m_{23}\cos(\psi_{22})a_{23g} \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{d}_{43}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{d}_{44}(\tilde{\mathbf{q}}) = (m_{23}a_{23}^2)/12 + m_{23}a_{23g}^2 \quad (\text{A.16})$$

E:

$$\tilde{c}_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) = (-2)a_{12}a_{13g}\frac{d\psi_{12}}{dt}m_{13}\text{sen}(\psi_{12}) \quad (\text{A.17})$$

$$\tilde{c}_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\tilde{c}_{13}(\tilde{\mathbf{q}}) = -a_{12}a_{13g}\frac{d\psi_{12}}{dt}m_{13}\text{sen}(\psi_{12}) \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{c}_{14}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\tilde{c}_{21}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\tilde{c}_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) = (-2)a_{22}a_{23g}\frac{d\psi_{22}}{dt}m_{23}\text{sen}(\psi_{22}) \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{c}_{23}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\tilde{c}_{24}(\tilde{\mathbf{q}}) = -a_{22}a_{23g}\frac{d\psi_{22}}{dt}m_{23}\text{sen}(\psi_{22}) \quad (\text{A.24})$$

$$\tilde{c}_{31}(\tilde{\mathbf{q}}) = a_{12}a_{13g}\frac{d\psi_{11}}{dt}m_{13}\text{sen}(\psi_{12}) \quad (\text{A.25})$$

$$\tilde{c}_{32}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\tilde{c}_{33}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\tilde{c}_{34}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\tilde{c}_{41}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\tilde{c}_{42}(\tilde{\mathbf{q}}) = a_{22}a_{23g} \frac{d\psi_{21}}{dt} m_{23} \text{sen}(\psi_{22}) \quad (\text{A.30})$$

$$\tilde{c}_{43}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.31})$$

$$\tilde{c}_{44}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\text{A.32})$$

**APÊNDICE B – ELEMENTOS DAS MATRIZES REFERENTES AO MODELO
DINÂMICO REDUZIDO**

$$\begin{aligned}
d_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) = & (a_{12}^2 m_{12})/12 + a_{12g}^2 m_{12} + a_{12}^2 m_{13} + a_{13g}^2 m_{13} \\
& - ((8a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + 8a_{12} \text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22}))(a_{13g}^2 m_{13} \\
& + a_{12} a_{13g} m_{13} \cos(\psi_{12}) - ((a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{12} \text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22}))) \\
& ((m_{13} a_{13}^2)/12 + m_{13} a_{13g}^2)) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} \\
& - \psi_{22}))) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) - ((a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} \\
& - \psi_{22}) + a_{12} \text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22}))(m_{13} a_{13g}^2 + \\
& a_{12} m_{13} \cos(\psi_{12}) a_{13g}) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + 2a_{12} a_{13g} m_{13} \cos(\psi_{12}) + \\
& (20a_{12} \text{sen}(\psi_{12})^2 ((m_{23} a_{23}^2)/12 + m_{23} a_{23g}^2)) / (23a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})^2)
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
d_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) = & (a_{12} \text{sen}(\psi_{12})(m_{23} a_{23g}^2 + a_{22} m_{23} \cos(\psi_{22}) a_{23g})) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (16 \text{sen}(\psi_{22})(a_{13g}^2 m_{13} + a_{12} a_{13g} m_{13} \cos(\psi_{12}) - ((a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + \\
& a_{12} \text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22}))) ((m_{13} a_{13}^2)/12 + m_{13} a_{13g}^2)) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} \\
& + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / (25 \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (a_{12} \text{sen}(\psi_{12}) ((m_{23} a_{23}^2)/12 \\
& + m_{23} a_{23g}^2) (200a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + 200a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21}))) / (23a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \\
& \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})^2)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
d_{21}(\tilde{\mathbf{q}}) = & (20 \text{sen}(\psi_{12})(a_{23g}^2 m_{23} \\
& - (((m_{23} a_{23}^2)/12 + m_{23} a_{23g}^2)(a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21})))) / \\
& (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + a_{22} a_{23g} m_{23} \cos(\psi_{22})) / (23 \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - \\
& (a_{22} \text{sen}(\psi_{22})(m_{13} a_{13g}^2 + a_{12} m_{13} \cos(\psi_{12}) a_{13g}) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{22} \text{sen}(\psi_{22}) \\
& (8a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + 8a_{12} \text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22}))) ((m_{13} a_{13}^2)/12 + m_{13} a_{13g}^2)) \\
& / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})^2)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
d_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) = & (a_{22}^2 m_{22})/12 + a_{22g}^2 m_{22} + a_{22}^2 m_{23} + a_{23g}^2 m_{23} - ((200a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} \\
& - \psi_{21} - \psi_{22}) + 200a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21}))(a_{23g}^2 m_{23} - (((m_{23} a_{23}^2)/12 + m_{23} a_{23g}^2)(a_{23} \text{sen}(\psi_{11} \\
& + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21})))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + a_{22} a_{23g} m_{23} \\
& \cos(\psi_{22})) / (23 \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + 2a_{22} a_{23g} m_{23} \\
& \cos(\psi_{22}) - ((m_{23} a_{23g}^2 + a_{22} m_{23} \cos(\psi_{22}) a_{23g})(a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} \\
& - \psi_{21}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (16a_{22} \text{sen}(\psi_{22})^2 ((m_{13} a_{13}^2)/12 + m_{13} a_{13g}^2)) / (25a_{13} \\
& \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})^2)
\end{aligned} \tag{B.4}$$

E:

$$\begin{aligned}
& c_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) \tag{B.5} \\
& = (a_{12}\text{sen}(\psi_{12})((m_{23}a_{23}^2)/12 + m_{23}a_{23g}^2)((a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{12}\text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22}))) \\
& \quad ((a_{13}\cos(\psi_{11} + \psi_{12})^2(\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))/ (a_{23}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{13}\text{sen}(\psi_{11} \\
& \quad + \psi_{12})^2(\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))/ (a_{23}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))))/ (a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) \\
& \quad - (\cos(\psi_{11} + \psi_{12})(a_{13}\cos(\psi_{11} + \psi_{12})(\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}) + a_{12}\frac{d\psi_{11}}{dt}\cos(\psi_{11}))/ (a_{23}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} \\
& \quad - \psi_{21} - \psi_{22})) - (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12})(a_{12}\frac{d\psi_{11}}{dt}\text{sen}(\psi_{11}) + a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12})(\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))/ (a_{23} \\
& \quad \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{12}\text{sen}(\psi_{12})((\cos(\psi_{11} \\
& \quad + \psi_{12})\cos(\psi_{21} + \psi_{22})(\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))/ \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12})\text{sen}(\psi_{21} + \\
& \quad \psi_{22})(\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))/ \text{sen}(\psi_{11} \\
& \quad + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))/ (a_{23}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))))/ (a_{23}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - \\
& \quad 2a_{12}a_{13g}\frac{d\psi_{12}}{dt}m_{13}\text{sen}(\psi_{12}) - (a_{13g}^2m_{13} + a_{12}a_{13g}m_{13}\cos(\psi_{12}) - ((a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) \\
& \quad + a_{12}\text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22})))((m_{13}a_{13}^2)/12 + m_{13}a_{13g}^2))/ (a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})))((\cos(\psi_{21} \\
& \quad + \psi_{22})(a_{13}\cos(\psi_{11} + \psi_{12})(\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}) + a_{12}\frac{d\psi_{11}}{dt}\cos(\psi_{11}))/ (a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) \\
& \quad - ((a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{12}\text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22})))((\cos(\psi_{11} + \psi_{12})\cos(\psi_{21} + \psi_{22}) \\
& \quad (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))/ \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12})\text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22})(\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))/ \\
& \quad \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))/ (a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (\text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22})(a_{12}\frac{d\psi_{11}}{dt} \\
& \quad \text{sen}(\psi_{11}) + a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12})(\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))/ (a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (a_{12}\text{sen}(\psi_{12}) \\
& \quad ((a_{23}\cos(\psi_{21} + \psi_{22})^2(\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))/ (a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{23}\text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22})^2 \\
& \quad (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))/ \\
& \quad (a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))))/ (a_{23}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) + (a_{12}a_{13g}\frac{d\psi_{12}}{dt}m_{13}\text{sen}(\psi_{12}) \\
& \quad (8a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + 8a_{12}\text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22}))/ \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) - \\
& \quad (a_{12}a_{13g}\frac{d\psi_{11}}{dt}m_{13}\text{sen}(\psi_{12})(a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{12}\text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22}))/ \\
& \quad (a_{13}\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) &= (a_{13g}^2 m_{13} + a_{12} a_{13g} m_{13} \cos(\psi_{12})) \tag{B.6} \\
&- ((a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{12} \text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22}))((m_{13} a_{13}^2)/12 + m_{13} a_{13g}^2)) / (a_{13} \\
&\quad \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) ((\cos(\psi_{21} + \psi_{22})(a_{23} \cos(\psi_{21} + \psi_{22})(\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}) + \\
&\quad a_{22} \frac{d\psi_{21}}{dt} \cos(\psi_{21}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (\text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22})(a_{22} \frac{d\psi_{21}}{dt} \text{sen}(\psi_{21}) + a_{23} \\
&\quad \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22})(\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (((a_{23} \cos(\psi_{21} + \psi_{22}))^2 (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \\
&\quad \frac{d\psi_{22}}{dt})) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{23} \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}))^2 (\frac{d\psi_{21}}{dt} \\
&\quad + \frac{d\psi_{22}}{dt})) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} \\
&\quad - \psi_{21}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{22} \text{sen}(\psi_{22})) ((\cos(\psi_{11} + \psi_{12}) \cos(\psi_{21} + \psi_{22})) (\frac{d\psi_{11}}{dt} \\
&\quad + \frac{d\psi_{12}}{dt})) / \text{sen}(\psi_{11} + \\
&\quad \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22})) (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt})) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / \\
&\quad (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) + (a_{12} \text{sen}(\psi_{12})) ((m_{23} a_{23}^2)/12 + m_{23} a_{23g}^2) ((\cos(\psi_{11} + \psi_{12})) (a_{23} \\
&\quad \cos(\psi_{21} + \psi_{22})(\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}) + a_{22} \frac{d\psi_{21}}{dt} \cos(\psi_{21}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (((\cos(\psi_{11} \\
&\quad + \psi_{12}) \cos(\psi_{21} + \psi_{22})(\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt})) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}) \\
&\quad (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt})) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \\
&\quad \psi_{21}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12})) (a_{22} \frac{d\psi_{21}}{dt} \text{sen}(\psi_{21}) + a_{23} \text{sen}(\psi_{21} + \\
&\quad \psi_{22})(\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{22} \text{sen}(\psi_{22})) ((a_{13} \cos(\psi_{11} + \psi_{12}))^2 (\frac{d\psi_{11}}{dt} \\
&\quad + \frac{d\psi_{12}}{dt})) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \\
&\quad \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}))^2 (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt})) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / (a_{13} \\
&\quad \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} \\
&\quad - \psi_{22}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (16 a_{12} a_{13g} \frac{d\psi_{12}}{dt} m_{13} \text{sen}(\psi_{12}) \text{sen}(\psi_{22})) / (25 \text{sen}(\psi_{11} \\
&\quad + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{12} a_{22} a_{23g} \frac{d\psi_{21}}{dt} m_{23} \text{sen}(\psi_{12}) \text{sen}(\psi_{22})) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{21}(\tilde{\mathbf{q}}) = & \tag{B.7} \\
& (a_{23g}^2 m_{23} - (((m_{23} a_{23}^2)/12 + m_{23} a_{23g}^2)(a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \\
& \psi_{21})))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + a_{22} a_{23g} m_{23} \cos(\psi_{22}) (((a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) \\
& + a_{12} \text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22})) (a_{13} \cos(\psi_{11} + \psi_{12}))^2 (\frac{d\psi_{11}}{dt} \\
& + \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \\
& \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}))^2 (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} \\
& - \psi_{22}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (\cos(\psi_{11} + \psi_{12}) (a_{13} \cos(\psi_{11} + \psi_{12})) (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}) \\
& + a_{12} \frac{d\psi_{11}}{dt} \cos(\psi_{11}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} \\
& - \psi_{21} - \psi_{22})) - (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) (a_{12} \frac{d\psi_{11}}{dt} \text{sen}(\psi_{11}) + a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / (a_{23} \\
& \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{12} \text{sen}(\psi_{12}) ((\cos(\psi_{11} + \\
& \psi_{12}) \cos(\psi_{21} + \psi_{22}) (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) \text{sen}(\psi_{21} \\
& + \psi_{22}) (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / \text{sen}(\psi_{11} \\
& + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) + \\
& (a_{22} \text{sen}(\psi_{22}) ((m_{13} a_{13}^2)/12 + m_{13} a_{13g}^2) ((\cos(\psi_{21} + \psi_{22}) (a_{13} \cos(\psi_{11} + \psi_{12})) (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}) + a_{12} \\
& \frac{d\psi_{11}}{dt} \cos(\psi_{11}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \\
& \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - ((a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{12} \text{sen}(\psi_{11} - \psi_{21} - \psi_{22})) ((\cos(\psi_{11} + \psi_{12}) \\
& \cos(\psi_{21} + \psi_{22}) (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \\
& \psi_{21} - \psi_{22}) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}) (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \\
& \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} \\
& + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (\text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}) (a_{12} \frac{d\psi_{11}}{dt} \text{sen}(\psi_{11}) + a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \\
& \psi_{12}) (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (a_{12} \text{sen}(\psi_{12}) ((a_{23} \cos(\psi_{21} + \psi_{22}))^2 (\frac{d\psi_{21}}{dt} \\
& + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{23} \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22})^2 (\frac{d\psi_{21}}{dt} \\
& + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \\
& \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - \\
& (20 a_{22} a_{23g} \frac{d\psi_{22}}{dt} m_{23} \text{sen}(\psi_{12}) \text{sen}(\psi_{22})) / (23 \text{sen}(\psi_{11} \\
& + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - \\
& (a_{12} a_{13g} a_{22} \frac{d\psi_{11}}{dt} m_{13} \text{sen}(\psi_{12}) \text{sen}(\psi_{22})) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) = & (a_{23g}^2 m_{23} - (((m_{23} a_{23}^2)/12 + m_{23} a_{23g}^2)(a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) \quad (\text{B.8}) \\
& + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + a_{22} a_{23g} m_{23} \cos(\psi_{22}) ((\cos(\psi_{11} \\
& + \psi_{12})(a_{23} \cos(\psi_{21} + \psi_{22}) (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}) + a_{22} \frac{d\psi_{21}}{dt} \cos(\psi_{21}))) / (a_{23} \\
& \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (((\cos(\psi_{11} + \psi_{12}) \cos(\psi_{21} + \\
& \psi_{22}) (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) \text{sen}(\psi_{21} + \\
& \psi_{22}) (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} \\
& - \psi_{21}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) (a_{22} \frac{d\psi_{21}}{dt} \text{sen}(\psi_{21}) \\
& + a_{23} \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}) (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + \\
& (a_{22} \text{sen}(\psi_{22}) ((a_{13} \cos(\psi_{11} + \psi_{12}))^2 (\frac{d\psi_{11}}{dt} \\
& + \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12})^2 (\frac{d\psi_{11}}{dt} \\
& + \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \\
& \psi_{22})) - 2a_{22} a_{23g} \frac{d\psi_{22}}{dt} m_{23} \text{sen}(\psi_{22}) - (a_{22} \text{sen}(\psi_{22}) \\
& ((m_{13} a_{13}^2)/12 + m_{13} a_{13g}^2) \\
& ((\cos(\psi_{21} + \psi_{22}) (a_{23} \cos(\psi_{21} + \psi_{22}) (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}) + a_{22} \frac{d\psi_{21}}{dt} \cos(\psi_{21}))) / \\
& (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} \\
& + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + (\text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}) (a_{22} \frac{d\psi_{21}}{dt} \text{sen}(\psi_{21}) + a_{23} \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}) \\
& (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (((a_{23} \cos(\psi_{21} + \psi_{22}))^2 (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / \\
& (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \\
& \psi_{21} - \psi_{22})) + (a_{23} \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22})^2 (\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} \\
& - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) \\
& + (a_{22} \text{sen}(\psi_{22}) ((\cos(\psi_{11} + \psi_{12}) \cos(\psi_{21} + \psi_{22}) (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \\
& \psi_{21} - \psi_{22}) + (\text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12}) \text{sen}(\psi_{21} + \psi_{22}) (\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt}))) / \text{sen}(\psi_{11} + \\
& \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))) / (a_{13} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) + \\
& (a_{22} a_{23g} \frac{d\psi_{22}}{dt} m_{23} \text{sen}(\psi_{22}) (200 a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + 200 a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21}))) / \\
& (23 \text{sen}(\psi_{11} \\
& + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22})) - (a_{22} a_{23g} \frac{d\psi_{21}}{dt} m_{23} \text{sen}(\psi_{22}) (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \\
& \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}) + a_{22} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21}))) / (a_{23} \text{sen}(\psi_{11} + \psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{22}))
\end{aligned}$$