

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**GEOVANNE VIANA NOGUEIRA**

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO**  
**ARMADO**

**FORTALEZA**

**2013**

GEOVANNE VIANA NOGUEIRA

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO  
ARMADO**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

---

N71a Nogueira, Geovanne Viana.  
Análise não linear física de pórticos planos de concreto armado / Geovanne Viana Nogueira –  
2012.  
118 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Monografia (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de  
Engenharia Estrutural e Construção Civil, Engenharia Civil, Fortaleza, 2012.  
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Método das Fatias. 3. Lei Constitutiva. I. Título.

---

CDD 620

GEOVANNE VIANA NOGUEIRA

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO  
ARMADO**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior

Aprovada em 08 / 02 / 2013.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Evandro Parente Junior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Leonardo Melo Bezerra  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À Deus.

Aos meus pais, Geová e Sonha.

Às minhas irmãs, Glacyanne, Leidyanne,  
Leilyanne, Lilyanne e Lidianne.

À minha amiga e namorada Rafaelly.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, agradeço à Deus por ter me ajudado e dado força não só para elaborar este trabalho, mas também para superar os desafios encontrados ao longo de todo o curso de graduação.

Agradeço a minha família, por toda a compreensão e apoio irrestrito.

Faço um especial agradecimento ao professor Evandro Parente Junior pelo seu excelente trabalho de acompanhamento para o desenvolvimento desse trabalho e por todo o conhecimento repassado.

## RESUMO

No Estado Limite Último o comportamento da estrutura é fortemente não linear devido à ocorrência de fenômenos como grandes deslocamentos, flambagens, plastificações, fissuração, entre outros. Um problema é dito não linear quando a rigidez depende dos deslocamentos da estrutura. Esta dependência é dita fisicamente não linear quando a rigidez é função do estado de deformação que o material está sujeito e por sua Lei Constitutiva. O presente trabalho visa realizar análises estruturais de pórticos planos de concreto armado com seção retangular, modelados utilizando o Método dos Elementos Finitos e considerando a não linearidade física. Serão consideradas para o concreto e para o aço as Leis Constitutivas descritas na NBR 6118:2003 e no Eurocode 2:2004. A não linearidade geométrica é considerada nas análises estruturais, mas não é abordada neste trabalho, pois é utilizado o programa FAST que já possui a implementação computacional necessária para realizar uma análise estrutural não linear geométrica de pórticos planos baseada na formulação corrotacional. Com o objetivo de considerar a não linearidade física nas análises estruturais, pretende-se apresentar os diversos métodos empregados para a integração das tensões na seção transversal com foco no Método das Fatias, que é o método adotado. O desenvolvimento do trabalho consistiu inicialmente por uma revisão bibliográfica sobre o conceito e os tipos de não linearidades presentes nas estruturas. A revisão também foi direcionada para entender a formulação de elementos finitos de pórtico plano baseada na teoria de Navier-Bernoulli e para identificação e entendimento das diversas técnicas de integração das tensões na seção transversal como o Método das Fatias. Com a implementação computacional estabelecida, partiu-se para a modelagem e análise estrutural de pórticos planos de concreto armado com seção retangular. Foi constatado que para o diagrama tensão-deformação da NBR 6118:2003 e para uma seção retangular de concreto armado, são necessários no mínimo 100 fatias na discretização da seção transversal para que a integração das tensões apresente resultados satisfatórios. As divergências encontradas em relação aos resultados experimentais e numéricos de outros autores estão relacionadas principalmente à Lei Constitutiva empregada para o concreto e para o aço. É importante, na análise estrutural não linear física, empregar modelos constitutivos mais adequados que o diagrama parábola-retângulo sugerido pela NBR 6118:2003 sendo mais indicado empregar a curva tensão-deformação do concreto na compressão sugerido pelo Eurocode 2:2004.

**Palavras-chave:** Análise não linear. Não linearidade física. Método dos Elementos Finitos. Método das Fatias. NBR 6118:2003. Eurocode 2:2004. Concreto armado. Lei Constitutiva.

## ABSTRACT

In the Ultimate Limit State the structural behavior is strongly nonlinear due to the occurrence of phenomena such as large displacements, buckling, laminates, cracking, among others. One problem is said nonlinear when the displacement depends on the stiffness of the structure. This dependence is said physically nonlinear stiffness when is a function of the state of deformation that the material is subject and its Constitutive Law. This study aims to perform structural analysis of reinforced concrete plane frames with rectangular section, modeled using the finite element method and considering the physical nonlinearity. It will be considered for the concrete and steel Constitutive Laws described in NBR 6118:2003 and Eurocode 2:2004. The geometric nonlinearity is considered in the structural analysis, but is not addressed in this study, because the FAST program is used that already has a computer implementation necessary to perform a geometric nonlinear structural analysis of plane frames based on the corotational formulation. Aiming to consider the physical nonlinearity in structural analysis, this paper aims to present the various methods used for the integration of the stresses in the cross section focusing on the Method of Slices, which is the method adopted. The development work originally consisted of a literature review on the concept and types of nonlinearities present in the structures. The review was also aimed to understand the finite element formulation of plane frame based on the theory of Navier-Bernoulli and for identifying and understanding the various integration techniques tensions in cross section as the Method of Slices. By implementing computational established, broke for modeling and structural analysis of reinforced concrete plane frames with rectangular section. It was found that for the stress-strain diagram of the NBR 6118:2003 and a rectangular section of concrete reinforced are required at least 100 slices in the discretization of the cross section for the integration of the tensions present satisfactory results. The differences found in relation to the experimental and numerical results of other authors are primarily related to the Constitutive Laws used for concrete and steel. It is important, in physics nonlinear structural analysis, employing constitutive models more suitable than the parabola-rectangle diagram suggested by NBR 6118:2003 been more appropriately employ the stress-strain curve of concrete in compression suggested by Eurocode 2:2004.

**Keywords:** Nonlinear Analysis. Physical nonlinearity. Finite Element Method. Method of Slices. NBR 6118:2003. Eurocode 2:2004. Concrete reinforced. Constitutive Law.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Exemplo de Curva de Equilíbrio (a) Linear e (b) Não Linear .....	17
Figura 2 - Efeito do Deslocamento, (a) viga em balanço e (b) pilar engastado e livre .....	20
Figura 3 - Relação tensão-deformação (a) linear e (b) não linear .....	22
Figura 4 - Modelos Constitutivos: (a) elástico, (b) plástico, (c) elastoplástico, (d) viscoelástico e (e) viscoplástico .....	23
Figura 5 - Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto na compressão .....	23
Figura 6 - Diagrama tensão-deformação bilinear do concreto na tração.....	24
Figura 7 - Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva.....	24
Figura 8 - Diagrama tensão-deformação para concreto na compressão .....	25
Figura 9 - Exemplo de problema de contato.....	26
Figura 10 - Curva carga-deslocamento para o exemplo do problema de contato. ....	27
Figura 11 - Malha de elementos finitos .....	28
Figura 12 - Deslocamentos de uma barra fletida .....	29
Figura 13 - Exemplos de projetos baseados no modelo de barras.....	30
Figura 14 - Geometria de placas e cascas.....	30
Figura 15 - Hipótese de Kirchhoff para placas.....	31
Figura 16 - Elementos finitos .....	31
Figura 17 - (a) Mola não linear e (b) comportamento de enrijecimento e amolecimento .....	32
Figura 18 - Caminhos não lineares de equilíbrio.....	33
Figura 19 - Viga de concreto armado simplesmente apoiada sob ações de serviço.....	36
Figura 20 - Pilar equivalente. ....	39
Figura 21 - Comportamento de pórticos planos e espaciais e pilar E-L.....	40
Figura 22 - Configuração indeformada e deformada da viga baseada nas hipóteses da TCV. ....	44
Figura 23 - Elementos de treliça (a), de viga (b) e de pórtico plano (c).....	47
Figura 24 - Ações genéricas. ....	49
Figura 25 - Representação gráfica dos polinômios de Hermite.....	52
Figura 26 - Graus de liberdade do elemento de pórtico plano no sistema de coordenadas local (a) e global (b) .....	63
Figura 27 - Ângulo de inclinação do elemento em relação ao sistema de coordenadas global .....	64
Figura 28 - Sistema de eixos local e global. ....	65
Figura 29 - Estados de deformação possíveis da seção .....	71

Figura 30 - Curva $C$ fechada, simples, seccionalmente suave. ....	73
Figura 31 - Discretização do contorno $C$ em segmentos de retas. ....	74
Figura 32 - Regiões para integração do concreto. ....	75
Figura 33 - Parametrização do segmento da poligonal.....	76
Figura 34 - Integral definida.....	77
Figura 35 - Regra do Retângulo .....	79
Figura 36 - Regra dos Trapézios .....	80
Figura 37 - Regra dos Trapézios. ....	80
Figura 38 - Regra de Simpson. ....	81
Figura 39 - Área sob o trecho parabólico .....	82
Figura 40 - Regra de Simpson .....	82
Figura 41 - Integração numérica na seção transversal com quadratura de Gauss .....	83
Figura 42 - Integração numérica em sub-regiões .....	86
Figura 43 - Discretização de uma seção retangular em fatias .....	87
Figura 44 - Decomposição da seção transversal em fibras.....	88
Figura 45 - Associação entre o método das fatias e a quadratura de Gauss. ....	90
Figura 46 - Seção para avaliação do Método das Fatias .....	92
Figura 47 - Erro do Método das Fatias para a Força Normal .....	93
Figura 48 - Erro do Método das Fatias para o Momento Fletor .....	94
Figura 49 - Viga em balanço de concreto armado.....	97
Figura 50 - Curva de equilíbrio da viga em balanço de concreto armado.....	98
Figura 51 - Barra de concreto armado .....	99
Figura 52 - Curva de equilíbrio da barra de concreto armado.....	100
Figura 53 - Viga de concreto armado, carregamento e geometria (dimensões em mm).....	101
Figura 54 - Curvas equilíbrio para a viga de concreto armado .....	102
Figura 55 - Pilar de concreto armado: geometria, material e carregamento.....	103
Figura 56 - Curva de equilíbrio do pilar de concreto armado .....	104
Figura 57 - Quadro de concreto armado: geometria, material e carregamento .....	105
Figura 58 - Curva de equilíbrio do quadro de concreto armado.....	106
Figura 59 - Pórtico de concreto armado: geometria, material e carregamento.....	107
Figura 60 - Malha de elementos finitos do pórtico de concreto armado .....	108
Figura 61 - Curvas de equilíbrio do pórtico de concreto armado.....	109
Figura 62 - Diagrama tensão - deformação para o concreto tracionado.....	110
Figura 63 - Carregamento e geometria da viga .....	110

Figura 64 - Flecha inicial para as 10 vigas biapoiadas .....	112
--------------------------------------------------------------	-----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Pesos da quadratura de Gauss. ....	61
Tabela 2 - Pesos da quadratura de Lobatto.....	62
Tabela 3 - Características das metodologias de análise de seções .....	68
Tabela 4 - Limites de integração dos estados de deformação .....	72
Tabela 5 - Estados de deformação .....	92
Tabela 6 - Propriedades das barras de aço da viga .....	101
Tabela 7 - Cargas e armaduras das vigas.....	111

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b> .....	14
<b>1.2</b>	<b>Organização do texto</b> .....	14
<b>1.3</b>	<b>Metodologia</b> .....	15
<b>2</b>	<b>ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS</b> .....	16
<b>2.1</b>	<b>Análise linear x não linear</b> .....	17
<b>2.2</b>	<b>Não linearidade geométrica</b> .....	19
<b>2.3</b>	<b>Não linearidade física</b> .....	22
<b>2.4</b>	<b>Problemas de contato</b> .....	25
<b>2.5</b>	<b>Fundamentos do Método dos Elementos Finitos</b> .....	27
<b>2.6</b>	<b>Métodos de solução da equação de equilíbrio</b> .....	32
<b>3</b>	<b>PRESCRIÇÕES DA NBR 6118:2003 PARA ANÁLISE LINEAR E NÃO LINEAR</b> .....	34
<b>3.1</b>	<b>Análise linear</b> .....	35
<b>3.2</b>	<b>Análise não linear</b> .....	37
<b>3.2.1</b>	<i>Dispensa da consideração dos efeitos globais de 2º ordem</i> .....	37
<b>3.2.1.1</b>	<i>Parâmetro de instabilidade <math>\alpha</math></i> .....	38
<b>3.2.1.2</b>	<i>Coefficiente <math>\gamma_z</math></i> .....	40
<b>3.2.2</b>	<i>Análise de estruturas de nós fixos</i> .....	41
<b>3.2.3</b>	<i>Análise de estruturas de nós móveis</i> .....	41
<b>4</b>	<b>MODELO DISCRETO DE PÓRTICO PLANO</b> .....	43
<b>4.1</b>	<b>Pórticos planos considerando a teoria de vigas de Navier-Bernoulli</b> .....	43
<b>4.1.1</b>	<i>Hipóteses</i> .....	43
<b>4.1.2</b>	<i>Campo de deslocamentos</i> .....	44
<b>4.1.3</b>	<i>Relações deformação-deslocamento</i> .....	45
<b>4.1.4</b>	<i>Relações tensão-deformação</i> .....	46
<b>4.1.5</b>	<i>Esforços internos</i> .....	46
<b>4.2</b>	<b>Elemento finito de pórtico plano</b> .....	47
<b>4.2.1</b>	<i>Equações de equilíbrio do elemento</i> .....	47
<b>4.2.2</b>	<i>Formulação do elemento finito</i> .....	49
<b>4.2.2.1</b>	<i>Parcela de membrana</i> .....	50

4.2.2.2	<i>Parcela de flexão</i> .....	51
4.2.2.3	<i>Elemento de pórtico plano</i> .....	53
4.2.3	<i>Elemento de pórtico plano com linearidade física</i> .....	55
4.2.4	<i>Elemento de pórtico plano com não linearidade física</i> .....	56
4.2.5	<i>Técnicas de integração ao longo do eixo longitudinal</i> .....	59
4.2.6	<i>Transformação para o sistema global</i> .....	63
5	<b>MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NA SEÇÃO TRANSVERSAL</b> .....	67
5.1	<b>Integração analítica</b> .....	70
5.1.1	<i>Integração direta</i> .....	70
5.1.2	<i>Emprego do teorema de Green</i> .....	73
5.2	<b>Integração numérica</b> .....	77
5.2.1	<i>Regra do retângulo, regra do trapézio e regra de Simpson</i> .....	79
5.2.2	<i>Quadraturas de Gauss e de Lobatto</i> .....	83
5.2.3	<i>Método das Fatias</i> .....	86
5.2.3.1	<i>Associação entre Método das Fatias e quadratura de Gauss</i> .....	89
6	<b>EXEMPLOS</b> .....	91
6.1	<b>Avaliação do Método das Fatias</b> .....	91
6.2	<b>Avaliação da implementação computacional</b> .....	96
6.2.1	<i>Exemplo de verificação: viga em balanço</i> .....	97
6.2.2	<i>Exemplo de verificação: barra sob carga axial e transversal na extremidade</i> .....	98
6.2.3	<i>Exemplo de validação: viga de concreto armado</i> .....	100
6.2.4	<i>Exemplo de validação: pilar de concreto armado</i> .....	102
6.2.5	<i>Exemplo de validação: quadro de concreto armado</i> .....	104
6.2.6	<i>Exemplo de validação: pórtico de concreto armado</i> .....	106
6.3	<b>Cálculo de flechas em vigas utilizando a rigidez equivalente de Branson (1968) e através da análise não linear física</b> .....	109
7	<b>CONCLUSÃO</b> .....	113
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	115

## 1 INTRODUÇÃO

Com o avanço tecnológico e os recursos computacionais disponíveis, cada vez mais se busca a realização de análises estruturais mais refinadas e realistas, pois a ferramenta computacional permite o cálculo com grande velocidade e precisão. Dessa forma, análises estruturais que levem em consideração as não linearidades tendem a se tornar mais comuns nos projetos das estruturas.

No que diz respeito às estruturas de concreto armado utilizadas em edificações, as estruturas reticuladas constituídas por vigas e pilares, formando os pórticos, são a tipologia estrutural mais empregada. O avanço da ferramenta computacional associado ao desenvolvimento de materiais mais resistentes tem viabilizado a execução de estruturas de edificações cada vez mais altas e com elementos estruturais mais esbeltos. Assim, torna-se mais difícil atender às hipóteses necessárias à aplicação da análise estrutural linear, pois esta é baseada principalmente na hipótese de pequenos deslocamentos e no comportamento linear dos materiais. Diante desse contexto, a realização de análises estruturais mais realistas deve considerar tanto a não linearidade geométrica e como a física, conforme recomenda a NBR 6118:2003.

Uma poderosa ferramenta para análise não linear de estruturas é o Método dos Elementos Finitos, pois permite a modelagem de diferentes estruturas sujeitas a diferentes solicitações e restrições. A formulação dos modelos discretos de elementos finitos empregada é a de elementos finitos de pórtico plano considerando como base para sua formulação a Teoria de Navier-Bernoulli.

Segundo Fonseca (2006), em mecânica computacional, um problema é dito não linear quando a rigidez depende dos deslocamentos da estrutura. Esta dependência é dita fisicamente não linear quando a rigidez é função do estado de deformação que o material está sujeito e por sua Lei Constitutiva. No presente trabalho, serão consideradas para o concreto e para o aço as Leis Constitutivas descritas na NBR 6118:2003 e no Eurocode 2:2004. A não linearidade geométrica é considerada nas análises estruturais, mas não é abordada neste trabalho, pois se utiliza o programa FAST que está em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da UFC e que possui a implementação computacional necessária para realizar uma análise estrutural não linear geométrica de pórticos planos baseada na formulação corrotacional (MEIRELES NETO, 2012).

## 1.1 Objetivos

Com o objetivo de considerar a não linearidade física nas análises estruturais, o presente trabalho pretende apresentar os diversos métodos empregados para a integração das tensões na seção transversal com foco no Método das Fatias, que é o método adotado.

Além disso, o presente trabalho visa realizar análises estruturais de pórticos planos de concreto armado com seção retangular, modelados utilizando o Método dos Elementos Finitos e considerando a não linearidade física e geométrica. Como objetivos específicos, pretende-se:

- a) apresentar os métodos de integração das tensões na seção transversal para a obtenção dos esforços internos e da matriz constitutiva tangente;
- b) avaliar a eficiência do Método das Fatias;
- c) realizar a implementação computacional da formulação do Método das Fatias no programa FAST;
- d) verificar a flecha de vigas biapoiadas obtida através da rigidez equivalente, calculada com a fórmula de Branson (1968), e através da análise não linear física.

## 1.2 Organização do texto

O texto deste trabalho está dividido em 7 capítulos. No Capítulo 2, é feita uma discussão sobre a diferença entre uma análise linear e uma análise não linear, são identificadas e caracterizadas as principais fontes de não linearidades nas estruturas (a geométrica, a física e a de contato) e é exposto o fundamento do Método dos Elementos Finitos.

O Capítulo 3 contém as prescrições da NBR 6118:2003 sobre a realização de análises estruturais lineares ou não lineares. Neste capítulo, são apresentados os parâmetros que identificam quando se deve realizar uma análise não linear e os métodos para realizar essa análise de forma aproximada.

No Capítulo 4, é apresentada toda a formulação do modelo discreto de pórtico plano implementada no programa FAST, que é baseada em elementos finitos de pórtico plano considerando a teoria de Navier-Bernoulli.

Uma revisão bibliográfica sobre os métodos de integração das tensões na seção transversal é apresentada no Capítulo 5, no qual se encontra a exposição sobre o Método das Fatias, que foi o método adotado e implementado no programa FAST.

No Capítulo 6, são expostos os resultados sobre a avaliação da eficiência do Método das Fatias. Também estão apresentados os resultados obtidos para os exemplos de verificação e validação, que foram utilizados para avaliar a implementação computacional, e os resultados das verificações de flechas em vigas biapoiadas.

Conclusões, bem como sugestões para futuros trabalhos de pesquisa, são apresentadas no Capítulo 7.

### **1.3 Metodologia**

A metodologia para o desenvolvimento do trabalho consistiu inicialmente de uma revisão bibliográfica sobre o conceito e os tipos de não linearidades presentes nas estruturas. Com o entendimento sobre as não linearidades, buscou-se conhecer as recomendações da NBR 6118:2003 a respeito de como considerar as não linearidades presentes nas estruturas de concreto armado.

A revisão também foi direcionada para entender a formulação de elementos finitos de pórtico plano baseada na Teoria de Navier-Bernoulli que permite a realização de análises estruturais considerando as não linearidades física e geométrica. Por fim, a revisão bibliográfica se voltou para identificação e entendimento das diversas técnicas de integração das tensões na seção transversal como o Método das Fatias. O Método das Fatias foi, então, implementado no programa FAST e uma série de exemplos, tanto de verificação como de validação, foram analisados e os resultados confrontados com os encontrados na literatura.

Com a implementação computacional estabelecida, partiu-se para a modelagem e análise estrutural de vigas biapoiadas de concreto armado com seção retangular para verificar as flechas obtidas de acordo com a fórmula de Branson (1968) e de acordo com a análise não linear física.

## 2 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Uma grande quantidade de fenômenos apresenta comportamento não linear e cada um possui uma determinada dificuldade para a formulação de um modelo apropriado. É o caso, por exemplo, de problemas de transferência de calor, radiação, problemas de fluxo de fluidos e de estruturas mecânicas.

Em estruturas é realizada a análise estrutural cujo objetivo é a determinação das respostas mecânicas da estrutura quando sujeita a ações externas. Essas respostas são constituídas por deslocamentos, deformações, esforços e tensões internas.

Na verificação da segurança das estruturas, a análise estrutural é realizada com a carga de colapso. De acordo com as normas técnicas, essa carga corresponde a um Estado Limite Último (ELU). A segurança está garantida quando a carga de colapso é superior às ações externas mesmo na combinação mais desfavorável.

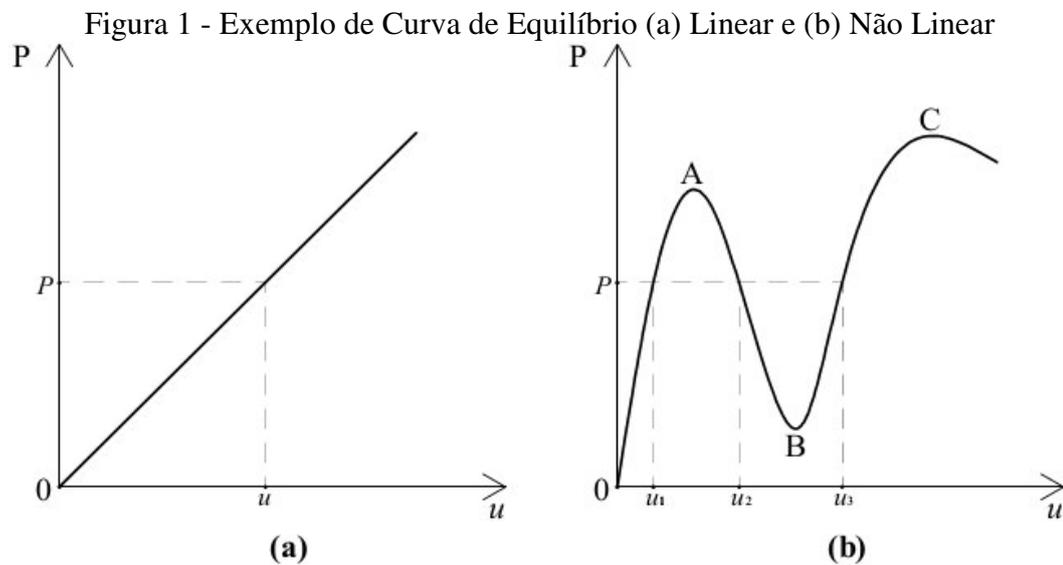
Na situação próxima ao ELU, é observado experimentalmente que o comportamento da estrutura é fortemente não linear devido à ocorrência de fenômenos como grandes deslocamentos, flambagens, plastificações, fissuração, entre outros (PARENTE JUNIOR, 2012).

A não linearidade impõe dificuldades na descrição do fenômeno através de modelos matemático e numéricos e também na resolução das equações não lineares que surgem. O enfoque requerido e o custo computacional para a análise aumentam substancialmente. Mesmo com o aumento dos recursos computacionais disponíveis, a análise estrutural ainda é feita normalmente no regime linear. Isto porque os modelos lineares produzem resultados satisfatórios para muitos problemas de interesse prático, em que os deslocamentos são limitados, e também porque a análise linear é muito mais simples e rápida do que a não linear.

Apesar da dificuldade de se realizar uma análise não linear, ela por ser mais realista traz como principal vantagem a possibilidade de redução dos coeficientes de segurança e, com isso, a obtenção de projetos mais econômicos sem comprometer os níveis de segurança da estrutura. Outra vantagem da análise não linear é a consideração do efeito da plastificação, que permite a redistribuição de esforços em vigas, pórticos, placas e cascas, e do efeito dos deslocamentos, que pode levar ao enrijecimento de cabos, vigas e placas sob carga transversal (PARENTE JUNIOR, 2012).

## 2.1 Análise linear x não linear

Quando a estrutura apresenta comportamento linear, para cada condição de carregamento existe sempre um e somente um deslocamento associado. O problema linear sempre possui solução independente da carga aplicada. No caso de estruturas com comportamento não linear, o problema pode tanto não ter solução, como para cargas acima da carga de colapso, como ter mais de uma solução, quando a curva de equilíbrio apresenta pontos de máximos e de mínimos.



Fonte: Próprio autor.

Como pode ser visto na Figura 1(a), para qualquer carga a curva de equilíbrio linear só apresenta um único deslocamento correspondente. A representação do comportamento linear é dada pela Lei de Hooke.

$$P = ku \quad (1)$$

O comportamento de uma estrutura não linear pode apresentar uma curva de equilíbrio típica como a da Figura 1(b). Nessa curva, podemos observar, por exemplo, que para um dado carregamento  $P$  pode haver mais de um deslocamento de equilíbrio  $u_1, u_2, u_3$ . A equação que descreve uma curva de equilíbrio não linear pode ser escrita de forma genérica por:

$$P = f(u) \quad (2)$$

A curva de equilíbrio é uma ferramenta essencial à análise não linear, permitindo visualizar o comportamento da estrutura, estudar sua estabilidade e avaliar sua capacidade de carga (PARENTE JUNIOR, 2012).

Para a curva da Figura 1(b), podemos identificar três trechos bem definidos. No trecho OA, a curva é crescente até um ponto limite A, que é um máximo local, e representa uma situação de equilíbrio estável, pois para haver aumento de deslocamento é necessário aumento da carga aplicada. O segundo trecho vai de A até o ponto B, que é um mínimo local. Nesse trecho, a curva é decrescente e representa uma situação de equilíbrio instável, pois o deslocamento aumenta com a redução da carga aplicada. Após o ponto B, a curva volta a ser crescente e a estrutura é novamente estável até o ponto C.

Quando a equação de equilíbrio é não linear, o princípio da superposição não é mais aplicável. Cada caso de carregamento requer uma análise separada e não é possível combinar os resultados das análises de casos de carregamento individuais para obter os resultados de uma combinação de casos de carregamento. Por exemplo, se um caso de carregamento é composto por duas porções que são sequencialmente aplicadas, invertendo essa sequência de aplicação de cargas, podem-se obter resultados diferentes.

Na análise estrutural, o objetivo é determinar os deslocamentos, tensões, deformações da estrutura quando sujeita às ações externas. Assim, a maneira mais intuitiva de traçar a curva carga-deslocamento é aplicar diversos níveis de carga e obter os deslocamentos correspondentes até que se atinja a carga máxima de projeto ou que a estrutura entre em colapso.

Esse procedimento, no entanto, é mais complexo, pois envolve a resolução de uma equação não linear (Equação (2)). A resolução de equações não lineares não é um problema trivial porque estas podem tanto não ter solução como ter múltiplas soluções. Além disso, esse procedimento não é capaz de traçar a parte instável da curva de equilíbrio. Ao aumentarmos a carga além do ponto A, a estrutura saltaria para uma configuração de equilíbrio cuja carga correspondente estaria entre A e C. Este fenômeno é conhecido na literatura como *snap-through* ou salto dinâmico.

Segundo Cook *et al* (2002), em estruturas mecânicas as fontes de não linearidades podem ser divididas em três tipo:

- a) geométrica: em que os deslocamentos são grandes. As equações de equilíbrio devem ser escritas com relação à geometria deformada da estrutura;

- b) física ou do material: em que as propriedades do material são funções do estado de tensão ou de deformação;
- c) de contorno ou de contato: em que as condições de contorno se modificam com as ações externas. É o caso, por exemplo, de uma fissura entre partes adjacentes que pode diminuir ou aumentar, ou de uma área de contato entre partes que se modifica com a mudança das forças de contato, ou de um deslizamento do contato.

Cada um dos tipos de não linearidades será mais bem caracterizado nos itens seguintes.

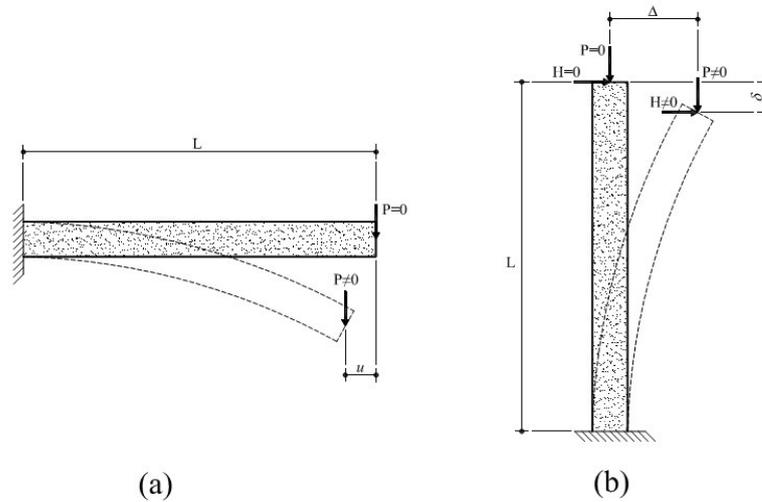
## 2.2 Não linearidade geométrica

A não linearidade geométrica surge quando os deslocamentos são grandes o suficiente para alterar a distribuição e orientação das cargas aplicadas e, conseqüentemente, dos esforços internos. Na literatura de Engenharia Civil, a análise não linear geométrica é conhecida por análise de 2º ordem e os efeitos dos deslocamentos são conhecidos também por efeitos de 2º ordem.

A dificuldade de se realizar uma análise não linear geométrica ocorre porque as equações de equilíbrio devem ser escritas com relação à geometria deformada da estrutura, que não é conhecida com antecedência (COOK *et al*, 2002). A configuração geométrica inicial ou indeformada só é uma configuração de equilíbrio quando não há forças externas sendo aplicadas à estrutura. Se há forças externas, a configuração de equilíbrio é deformada.

Problemas com não linearidade geométrica podem simultaneamente apresentar problemas de contato e de não linearidade física. A não linearidade geométrica leva naturalmente a problemas de instabilidade e flambagem. Dois exemplos clássicos da influência da não linearidade geométrica na análise estrutural são os casos da viga engastada e em balanço e o do pilar engastado e livre conforme está representado na Figura 2.

Figura 2 - Efeito do Deslocamento, (a) viga em balanço e (b) pilar engastado e livre



Fonte: Próprio autor.

No caso da viga, o momento fletor no engaste calculado na configuração indeformada é:

$$M = -PL \quad (3)$$

No entanto, a horizontal só é uma configuração de equilíbrio se  $P=0$ . Para  $P \neq 0$ , o momento fletor na configuração deformada é dado por:

$$M = -P(L-u) \Rightarrow M = -PL(1-u/L) \quad (4)$$

Esta expressão mostra que o momento fletor diminui com o deslocamento horizontal  $u$  da extremidade livre da viga. Esse é um exemplo em que a estrutura apresenta enrijecimento com ação do carregamento. Nos casos reais, as normas técnicas limitam os deslocamentos transversais (flechas) das vigas. Dessa forma, a relação  $u/L$  se torna muito pequena. Assim:

$$u/L \ll 1 \Rightarrow M \approx -PL \quad (5)$$

que é o momento de primeira ordem, isto é, baseado na configuração inicial (indeformada).

No caso do exemplo do pilar, o momento fletor na base calculado na configuração indeformada é:

$$M = HL \quad (6)$$

Com a atuação da força horizontal, a extremidade livre do pilar sofrerá um deslocamento vertical  $\delta$  e um deslocamento horizontal  $\Delta$ . Considerando esses deslocamentos,

a carga vertical passa a contribuir com momento fletor na base do pilar e o momento devido à carga horizontal é reduzido. A expressão do momento fletor passa a ser:

$$M = H(L - \delta) + P\Delta \quad \rightarrow \quad M = M_1 + M_2 \quad (7)$$

onde  $M_1 = HL$  é o momento de primeira ordem e  $M_2 = P\Delta - H\delta$  é conhecido como momento de segunda ordem.

O momento de segunda ordem irá contribuir com um aumento do deslocamento horizontal em relação ao que haveria se não houvesse a carga vertical. Consequentemente, esse aumento de deslocamento leva a um aumento também do momento de segunda ordem, o que mostra um efeito da não linearidade geométrica. Esse efeito é conhecido na literatura como Efeito  $P\Delta$ .

Um aspecto relevante do Efeito  $P\Delta$  é que embora as normas técnicas de projeto limitem os deslocamentos a valores pequenos, normalmente as cargas dos pilares são bastante elevadas, tornando esse efeito significativo e importante para a verificação da segurança. Isto mostra a relevância do contraventamento de edifícios altos, cuja função principal é limitar os deslocamentos laterais, tornando a estrutura mais rígida e reduzindo a influência do efeito de segunda ordem.

A consideração da não linearidade geométrica ganha cada vez mais importância à medida que os edifícios ficam cada vez mais altos e os materiais mais resistentes, tornando as estruturas mais esbeltas e flexíveis.

Dessa discussão, vemos que garantir a hipótese de pequenos deslocamentos é fundamental para permitir a realização de uma análise linear de primeira ordem com uma precisão adequada.

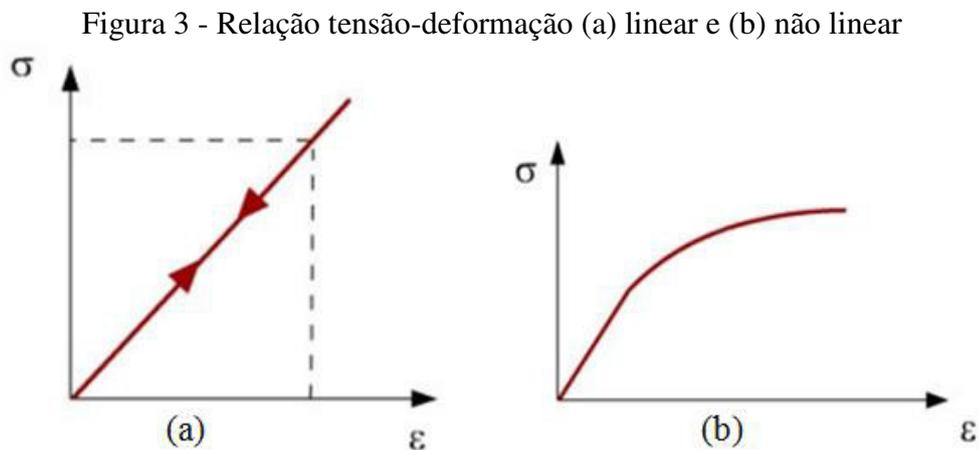
Uma análise não linear rigorosa considera tanto grandes deslocamentos quanto deformações. Como a maioria dos materiais empregados nas estruturas não podem ter grandes deformações sem inviabilizar seu emprego, é possível admitir que os materiais sofrem deformações pequenas, mesmo quando a estrutura apresenta grandes deslocamentos. Esta hipótese é considerada na maioria das análises não lineares de estruturas, o que permite simplificar as formulações matemáticas utilizadas.

### 2.3 Não linearidade física

Como comentado anteriormente, numa análise linear, considera-se que os materiais apresentam comportamento linear elástico. A não linearidade física ocorre quando a relação tensão-deformação não pode ser representada pela Lei de Hooke e sim por uma relação não linear. A Figura 3 mostra diagramas tensão-deformação linear e não linear. As relações que representam essas curvas podem ser escritas como:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \text{Lei de Hooke}$$

$$\sigma = f(\varepsilon) \Rightarrow \text{Material Não Linear} \quad (8)$$



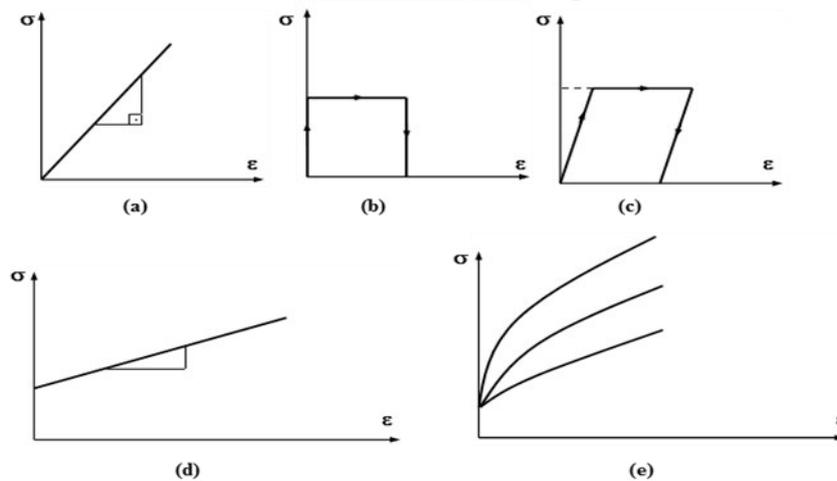
Fonte: AltoQi (2012).

Na Lei de Hooke,  $E$  representa o módulo de elasticidade longitudinal do material. A principal característica dessa lei é a proporcionalidade entre tensões e deformações, constituindo uma das condições essenciais para o emprego da superposição de efeitos que é a base da análise linear. Quando essa relação não é mais linear, a proporcionalidade deixa de existir e o princípio da superposição não pode mais ser empregado. Esse é um dos fatores que tornam a análise não linear mais complexa.

Conforme observado por Pitangueira (1998), o efeito da não linearidade física do material ocorre de tal maneira que, durante o processo de deterioração da estrutura, alguns pontos apresentam características mecânicas distintas dos demais, observando-se que esta combinação de materiais com características muito diversas (regiões danificadas junto a outras com as características do material homogêneo inicial) causa efeitos não lineares pronunciados na resposta da estrutura.

A relação entre tensões e deformações é única e não depende da geometria. Esta relação é uma propriedade do material e é conhecida na literatura como a Lei Constitutiva do material. Esta é a ideia usual da análise por elementos finitos, que considera o meio contínuo, o material inicialmente homogêneo e a lei tensão-deformação conhecida *a priori* (FONSECA, 2006). Existem diversos modelos constitutivos para representar o comportamento mecânico dos materiais, além do linear, há os elastoplásticos, viscoelásticos, viscoplásticos, etc.

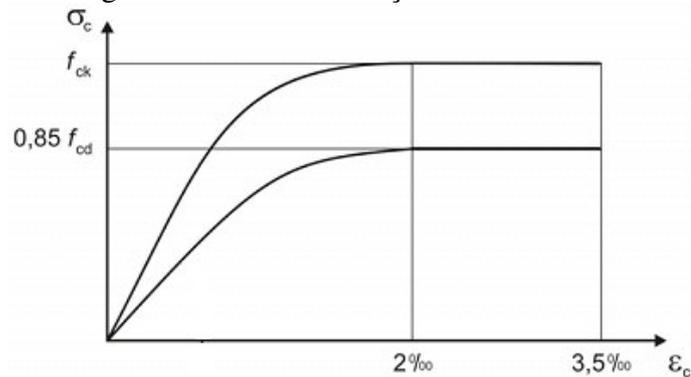
Figura 4 - Modelos Constitutivos: (a) elástico, (b) plástico, (c) elastoplástico, (d) viscoelástico e (e) viscoplástico



Fonte: Pimenta (2006).

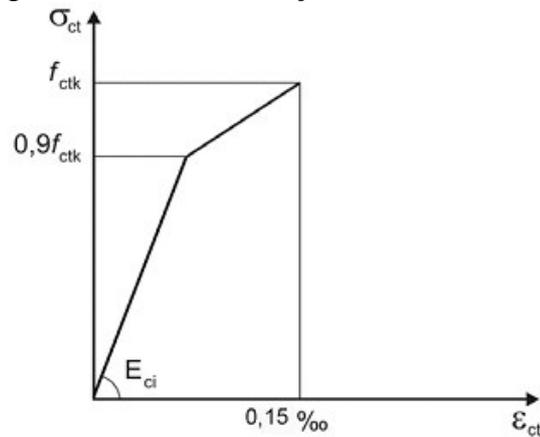
Os diagramas tensão-deformação recomendados pela NBR 6118:2003, para análises estruturais nos estados limites últimos são o diagrama idealizado parábola-retângulo para concreto comprimido (Figura 5), o diagrama bilinear para o concreto tracionado (Figura 6) e o diagrama elastoplástico (Figura 7) para o aço.

Figura 5 – Diagrama tensão-deformação do concreto na compressão



Fonte: NBR 6118:2003.

Figura 6 – Diagrama tensão-deformação bilinear do concreto na tração



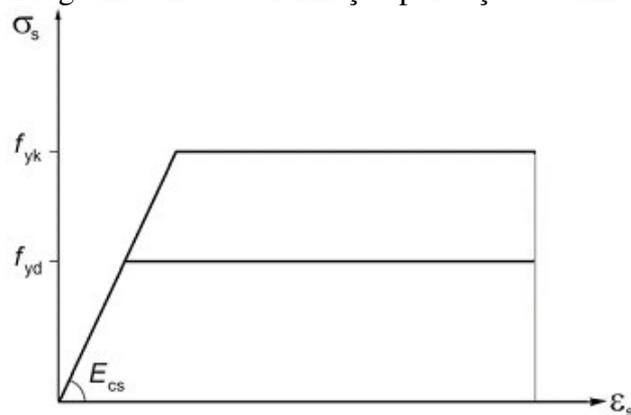
Fonte: NBR 6118:2003.

A equação que representa o trecho parabólico do diagrama tensão-deformação do trecho comprimido é dada por:

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{2‰} \right)^2 \right] \quad (9)$$

onde  $\varepsilon_c$  (‰) é o módulo da deformação de compressão do concreto e  $f_{cd}$  é tensão de compressão resistente de cálculo do concreto para uma idade igual ou superior a 28 dias e igual a  $f_{ck}/\gamma_c$ , com  $\gamma_c$  igual a 1,4.

Figura 7 – Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva



Fonte: NBR 6118:2003.

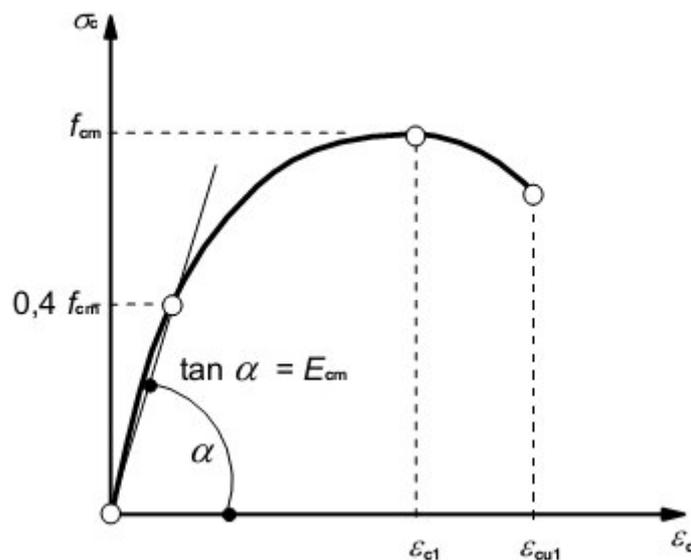
onde  $E_{CS}$  é o módulo de elasticidade, que na falta de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante pode ser admitido igual a 210 GPa,  $f_{yk}$  é a resistência característica ao escoamento e  $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$  é a resistência ao escoamento de cálculo, com  $\gamma_s$  igual a 1,15.

O diagrama tensão-deformação para o concreto na compressão, recomendado pelo Eurocode 2:2004, para análises estruturais nos estados limites últimos é o diagrama representado por uma função racional do tipo:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right] \quad (10)$$

onde  $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$ , em que  $\varepsilon_{c1} = 0,7 f_{cm}^{0,31}$  é a deformação no pico da tensão e  $k = 1,05 E_{cm} |\varepsilon_{c1}| / f_{cm}$ , em que o módulo de elasticidade é  $E_{cm}$  (GPa) =  $22[0,1 f_{cm}]^{0,3}$  com  $f_{cm} = f_{ck} + 8$  em MPa. Esta equação é válida para  $0 < |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{cu1}|$ , em que  $\varepsilon_{cu1} = 3,5 \text{ ‰}$  para  $f_{ck} < 50 \text{ MPa}$ . A curva tensão-deformação representada por esta equação está ilustrada na figura abaixo:

Figura 8 – Diagrama tensão-deformação para concreto na compressão



Fonte: Eurocode 2:2004.

## 2.4 Problemas de contato

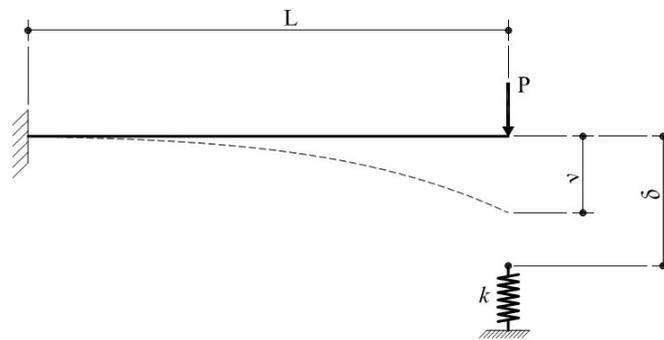
A análise linear considera que as condições de contorno em forças e deslocamentos permanecem constantes durante a aplicação do carregamento. Na prática, isso nem sempre ocorre, como é o caso quando se considera na análise estrutural o problema da interação entre o solo e a estrutura.

De acordo com Cook *et al* (2002), problemas de contato são um tipo de não linearidade que surge quando estruturas diferentes ou superfícies diferentes de uma única

estrutura entram em contato, separam-se ou deslizam uma sobre as outras. As forças de contato podem aumentar ou diminuir e devem ser determinadas e representadas para que se possa avaliar sua influência no comportamento da estrutura como, por exemplo, as forças de atrito. Além disso, a localização e extensão do contato não são conhecidas *a priori* e também devem ser determinadas.

Um exemplo simples de problema de contato é o da viga engastada e em balanço ilustrada na Figura 9 que apresenta uma folga  $\delta$  entre sua extremidade e uma mola de rigidez  $k$ .

Figura 9- Exemplo de problema de contato.



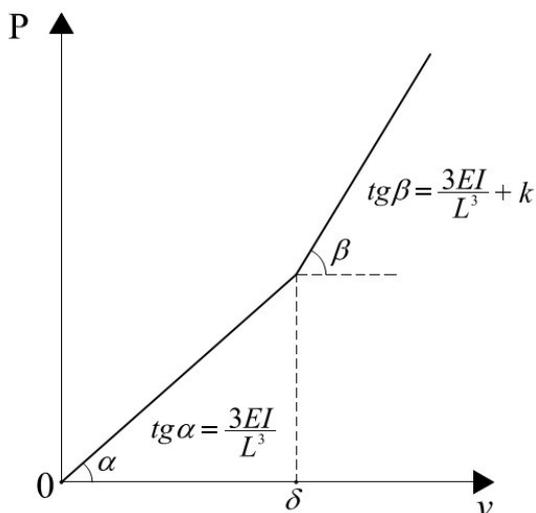
Fonte: Próprio autor.

A extremidade da viga sofrerá um deslocamento  $v$  quando for aplicada uma força  $P$ . Enquanto  $v$  for menor que  $\delta$ , somente a viga resistirá à carga, mas com o aumento de  $P$ , o deslocamento vertical pode superar a folga e a carga passará a ser resistida pela viga e a mola juntas. Considerando um comportamento linear da viga e da mola, a relação entre a carga e o deslocamento vertical pode ser representada matematicamente por:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{3EI}{L^3} v \quad \text{se } v \leq \delta \\
 P &= \frac{3EI}{L^3} v + k(v - \delta) \quad \text{se } v > \delta
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

A curva carga - deslocamento resultante dessas relações apresenta dois trechos retos com o segundo trecho apresentando uma inclinação maior, pois a rigidez aumentou com a influência da mola. A Figura 10 representa a curva carga-deslocamento para esse problema. Apesar de a curva carga-deslocamento ser composta por trechos retos, ela é não linear, pois a proporcionalidade só é válida dentro do domínio de deslocamento de cada trecho.

Figura 10- Curva carga-deslocamento para o exemplo do problema de contato.



Fonte: Próprio autor.

## 2.5 Fundamentos do Método dos Elementos Finitos

Em uma análise estrutural, o problema de meio contínuo da estrutura real é representado por um modelo matemático utilizando-se hipóteses simplificadoras. Matematicamente o problema do meio contínuo é descrito por equações diferenciais ou por integrais cujas soluções analíticas são desconhecidas para a maioria dos casos, exceto para problemas simples.

O primeiro passo para a resolução de um problema é identificar os aspectos que envolvem o problema como qual o fenômeno físico mais importante, se há ou não dependência do tempo, quais não linearidades estão envolvidas, entre outros. Além disso, é necessário conhecer quais as informações que se deseja obter com a análise e qual a precisão requerida.

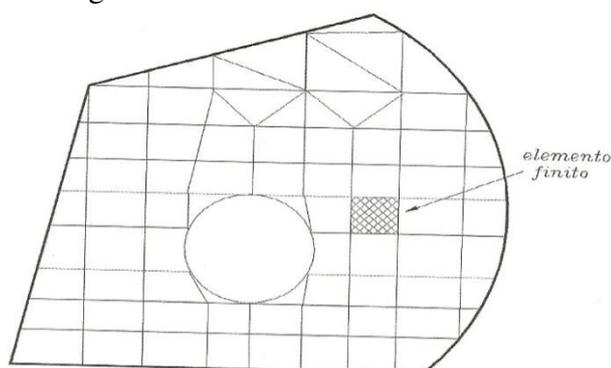
Após o estudo da natureza física do problema, um modelo para a análise é concebido e um método analítico é aplicado. Na modelagem, procura-se excluir detalhes superficiais, mas são incluídas todas as características essenciais para a descrição do problema real com suficiente precisão. O modelo geométrico se torna um modelo matemático quando seu comportamento é descrito ou aproximado por equações diferenciais e condições de contorno. Essas equações podem incorporar restrições como homogeneidade, isotropia, propriedades do material, consideração de pequenas deformações e rotações, entre outras (COOK *et al*, 2002). Enfim, um modelo matemático é uma idealização em que geometria, propriedades do material, carregamento e condições de contorno são simplificadas com base

no entendimento de quais características são importantes na obtenção dos resultados requeridos.

Para superar as limitações da resolução das equações diferenciais associadas às soluções analíticas, adota-se um modelo numérico aproximado dito modelo discreto (PITANGUEIRA, 2000). Nos modelos discretos, as equações são algébricas e as incógnitas são determinadas em um número finito de pontos ou nós. Em relação à realidade, duas fontes principais de erro podem ser identificadas: os erros introduzidos pelo modelo considerado e os erros introduzidos pela discretização. Além disso, as operações aritméticas realizadas pelo computador produzem erros numéricos devido à consideração de números com uma precisão finita para a representação das informações e dos resultados das informações.

Dentre os métodos discretos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o mais difundido. No modelo de deslocamentos do MEF, o problema é dividido em subdomínios de dimensões finitas, denominados elementos finitos, onde o campo de deslocamentos é arbitrado. O conjunto de elementos finitos forma a malha. Escrevendo-se o campo de deslocamentos de cada elemento em função dos deslocamentos nodais, obtém-se um sistema de equações que permite solucionar o problema (FONSECA, 2006).

Figura 11- Malha de elementos finitos



Fonte: Assan (2003).

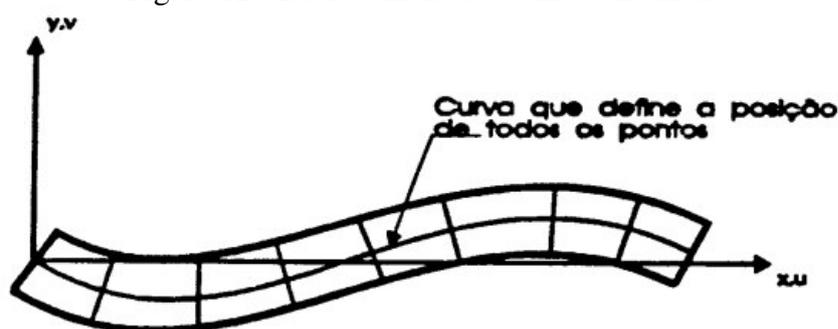
A malha desse reticulado pode ser aumentada ou diminuída variando o tamanho dos elementos finitos, que é conhecido por refinamento  $h$ . Em vez de buscar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para todo o domínio, no MEF, as funções admissíveis são definidas apenas no domínio de cada elemento finito (ASSAN, 2003). A essência do MEF é a aproximação das quantidades de campo desejadas por funções de interpolação e comumente se utiliza o método de Rayleigh-Ritz com funções de interpolação

polinomiais. Outra forma de melhorar a precisão dos resultados obtidos é através do aumento do grau dos polinômios de interpolação, que é conhecido por refinamento  $p$ .

Deve-se atentar, no entanto, que, para a acurácia do modelo discreto, é necessário um modelo matemático adequado e a definição de um meio contínuo coerente com a estrutura real. Dessa forma, a análise estrutural se baseia em três simplificações de geometria presentes nos modelos de barras, placas e cascas.

As barras são elementos caracterizados por uma seção transversal de dimensões pequenas quando comparadas com o seu comprimento. A análise de tensões em barras fletidas se baseia na hipótese de que seções transversais permanecem planas e ortogonais à curva definida pelo seu eixo. Esta é a hipótese de Navier-Bernoulli que define o campo de deslocamentos de uma barra fletida conforme está ilustrado na figura abaixo.

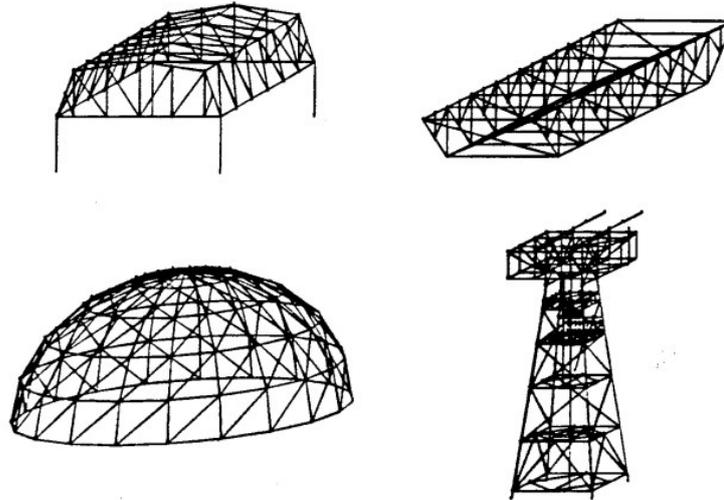
Figura 12 - Deslocamentos de uma barra fletida



Fonte: Martha (1994).

Com a hipótese de Navier-Bernoulli, o campo de deslocamentos  $(u, v, w)$  de todos os pontos de uma barra fica definido pelo deslocamento da curva do centróide das seções. Com isto, a equação diferencial que descreve o comportamento deste campo deixa de ser parcial e torna-se ordinária. A descrição dos deslocamentos a partir da extremidade e a continuidade do campo de deslocamentos entre elementos requerem, entretanto, a utilização de rotações como medidas de deslocamentos. Na mecânica de pequenos deslocamentos, estas rotações são aproximadas por derivadas de deslocamentos e tratadas como vetores (MARTHA, 1994).

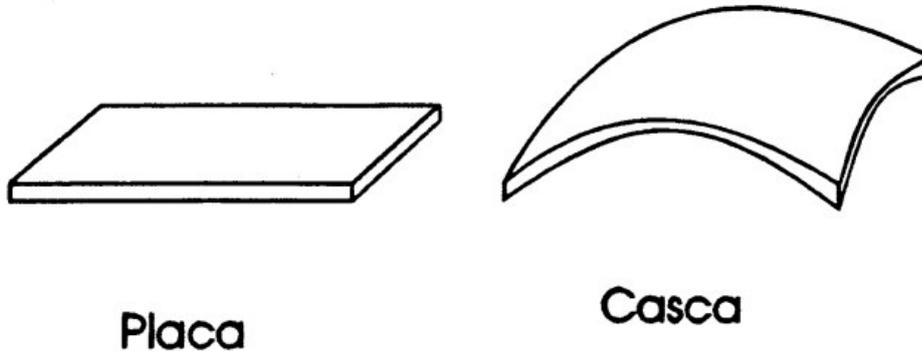
Figura 13 – Exemplos de projetos baseados no modelo de barras



Fonte: Martha (1994).

Outra simplificação de geometria importante é a que ocorre no estudo dos elementos de placas e cascas. Placas (planas) e cascas (curvas) são objetos com uma dimensão (espessura) bem menor que as outras duas.

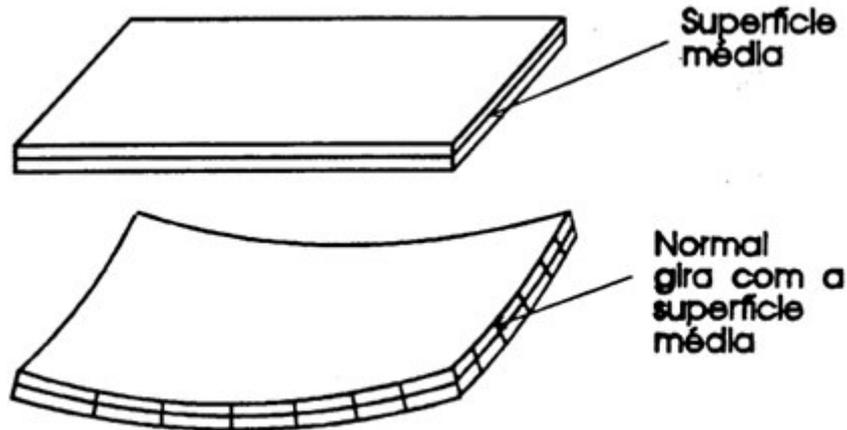
Figura 14 – Geometria de placas e cascas



Fonte: Martha (1994).

Os deslocamentos das placas e cascas são descritos a partir dos deslocamentos de sua superfície média. A hipótese de Kirchhoff estabelece que a normal à superfície média permanece reta e perpendicular à superfície após o deslocamento da placa.

Figura 15 – Hipótese de Kirchhoff para placas

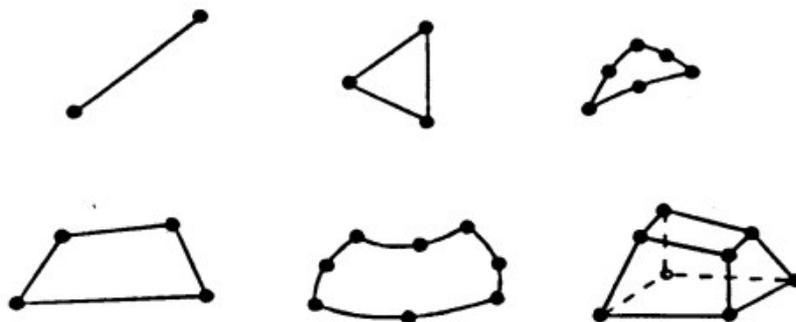


Fonte: Martha (1994).

A equação parcial de placas e cascas é função das duas variáveis que descrevem a superfície média e sua discretização requer o uso de rotações para representar o campo de deslocamentos.

De uma maneira geral, pode-se dizer que a ideia central do MEF é subdividir o domínio da equação que descreve o fenômeno físico em pequenas regiões (elementos) onde o comportamento do campo possa ser aproximado por um polinômio de grau baixo. Este polinômio é escrito em função de valores do campo nos vértices (nós) destes elementos e estes valores (incógnitas do problema discreto) podem ser determinados através da minimização de um funcional associado à equação diferencial (MARTHA, 1994). A Figura 16 ilustra alguns tipos de elementos comumente encontrados na engenharia.

Figura 16 – Elementos finitos



Fonte: Martha (1994).

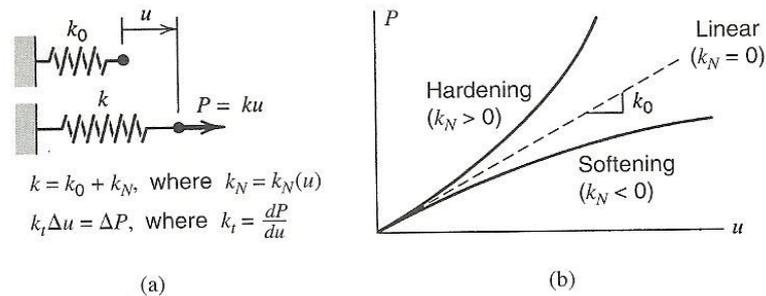
## 2.6 Métodos de solução da equação de equilíbrio

Na análise não linear, a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais se tornam funções dos deslocamentos ou deformações.

Problemas desse tipo são não lineares porque, na equação de equilíbrio  $\mathbf{KD} = \mathbf{R}$ , a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e talvez a de cargas  $\mathbf{R}$  se tornam função dos deslocamentos  $\mathbf{D}$ . Assim, não é possível resolver a equação imediatamente para obter  $\mathbf{D}$  porque  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{R}$  não são conhecidos. Um processo incremental-iterativo é necessário para obter  $\mathbf{D}$  e seus associados  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{R}$  (COOK *et al*, 2002).

Um problema que retrata de forma simples esse comportamento é o de uma força aplicada a uma mola não linear conforme mostra a figura abaixo:

Figura 17 - (a) Mola não linear e (b) comportamento de enrijecimento e amolecimento



Fonte: Cook *et al* (2002).

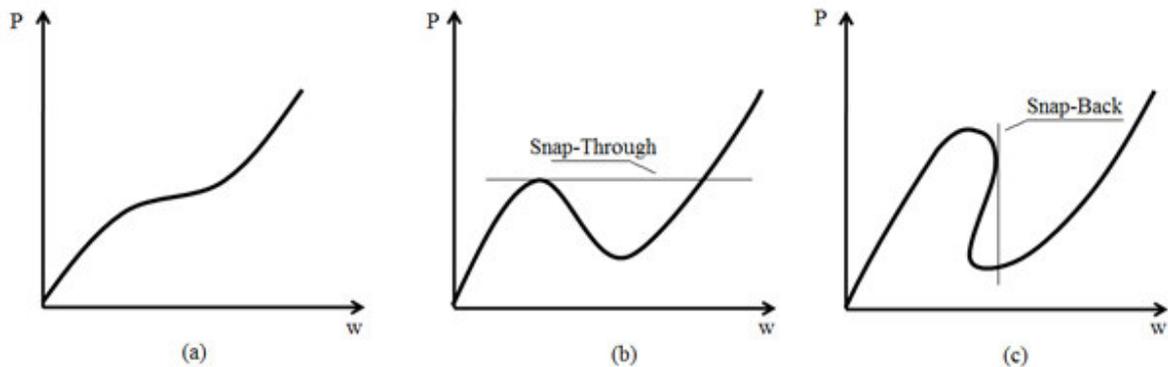
A relação entre uma força  $P$  e um deslocamento  $u$  pode ser escrito:

$$ku = P \Rightarrow (k_0 + k_N)u = P, k_N = k_N(u) \quad (12)$$

como  $k$  é uma função de  $u$ , não é possível calcular  $u$  diretamente a partir de um valor prescrito para  $P$ . Em vez disso,  $u$  é obtido por uma série de passos lineares, cada um correspondendo a uma mudança na carga, que pode ser calculada usando a rigidez tangente  $k_t = dP/du$ .

A solução da equação de equilíbrio através de um processo incremental-iterativo pode ser realizada basicamente através do Método de Newton-Raphson ou do Método com Controle de Deslocamentos ou do Método do Comprimento de Arco (COOK *et al*, 2002). A figura abaixo ilustra as situações em que cada método é mais adequado:

Figura 18 - Caminhos não lineares de equilíbrio.



Fonte: Meireles Neto (2012).

O Método de Newton-Raphson consiste em iterações a cada incremento de carga, contudo há estruturas que apresentam a ocorrência dos *snap-through* e *snap-back*. Como ilustra a Figura 18(b) e (c). Assim, o Método de Newton-Raphson, o qual trabalha com incremento de carga, não é capaz de traçar o caminho de equilíbrio de todas as estruturas, somente daquelas que apresentam caminhos de equilíbrio como da Figura 18(a).

A Figura 18(b) apresenta um caminho com *snap-through*. Nesta situação, o Método de Newton-Raphson não é capaz de traçar o caminho, pois não é possível representar o trecho em que há uma queda na carga. Por outro lado, pode-se usar um método com Controle de Deslocamento para este caminho, pois é um método em que o incremento passa a ser o deslocamento em vez da carga.

Finalmente, a Figura 18(c), além de possuir um caminho com *snap-through*, apresenta o *snap-back*. Nesta situação ambos os métodos de Newton-Raphson e Controle de Deslocamento não são capazes de construir este tipo de caminho de equilíbrio. Como método mais refinado e capaz de representar esta terceira situação, há o Método do Comprimento de Arco. Segundo Crisfield (1991), é um método destinado a permitir que algoritmos passem por pontos limites. Sua interpretação tende a ser mais geométrica do que física, pois o incremento não é de carga nem de deslocamento e sim um passo dado no caminho de equilíbrio.

### 3 PRESCRIÇÕES DA NBR 6118:2003 PARA ANÁLISE LINEAR E NÃO LINEAR

O objetivo da análise estrutural é obter os efeitos das ações em uma estrutura, determinando as distribuições de esforços internos, deformações, deslocamentos e tensões na estrutura, com a finalidade de efetuar verificações de estados limites último e de serviço.

O modelo estrutural deve ser realista e deve permitir representar o comportamento e as características geométricas dos elementos, as vinculações, os caminhos percorridos pelas ações até os apoios da estrutura e também as propriedades dos materiais.

Como hipóteses básicas, a NBR 6118:2003 estabelece que:

- a) as condições de equilíbrio devem ser sempre respeitadas. As equações de equilíbrio podem ser estabelecidas com base na geometria indeformada da estrutura (teoria de 1º ordem), exceto nos casos em que os deslocamentos alterem de maneira significativa os esforços internos (teoria de 2º ordem);
- b) a compatibilidade deve ser atendida nos deslocamentos ao longo da estrutura e quando as condições de compatibilidade não forem verificadas no estado limite último considerado, devem ser adotadas medidas que garantam ductilidade adequada da estrutura, resguardando um desempenho adequado nos estados limites de serviço. A ductilidade é a capacidade de a estrutura apresentar grandes deformações antes da ruptura;
- c) o carregamento pode ser considerado monotônico desde que os ciclos de carga e descarga, em serviço, não solicitem o concreto a tensões de compressão superiores a  $0,5f_{ck}$ . Caso contrário, poderia haver deformações residuais e seria necessário conhecer o histórico de carregamento.

Para a análise de estruturas que possam ser assimiladas a elementos lineares (vigas, pilares, tirantes, arcos, pórticos, grelhas, treliças), a NBR 6118:2003 admite as seguintes hipóteses:

- a) manutenção da seção plana após a deformação (hipótese da teoria de vigas de Navier-Bernoulli);
- b) representação dos elementos pelos seus eixos longitudinais (hipótese da teoria de vigas de Navier-Bernoulli);
- c) comprimento limitado pelos centros de apoios ou pelo cruzamento com o eixo de outro elemento estrutural.

### 3.1 Análise linear

Na análise linear, a NBR 6118:2003 admite comportamento elástico-linear para os materiais. Para uma análise global, as características geométricas podem ser determinadas pela seção bruta de concreto dos elementos estruturais. Já em análises locais para cálculo de deslocamentos, a fissuração deve ser considerada.

Para análises elásticas de projeto e para a avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou seção transversal, quando não forem feitos ensaios, deve ser considerado o módulo de elasticidade secante, dado por:

$$E_{cs} = 0,85E_{ci} \quad (13)$$

onde  $E_{ci}$  é o módulo de elasticidade tangente inicial, estimado por:

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}} \quad (14)$$

com  $E_{ci}$  e  $f_{ck}$  dados em megapascal (MPa).

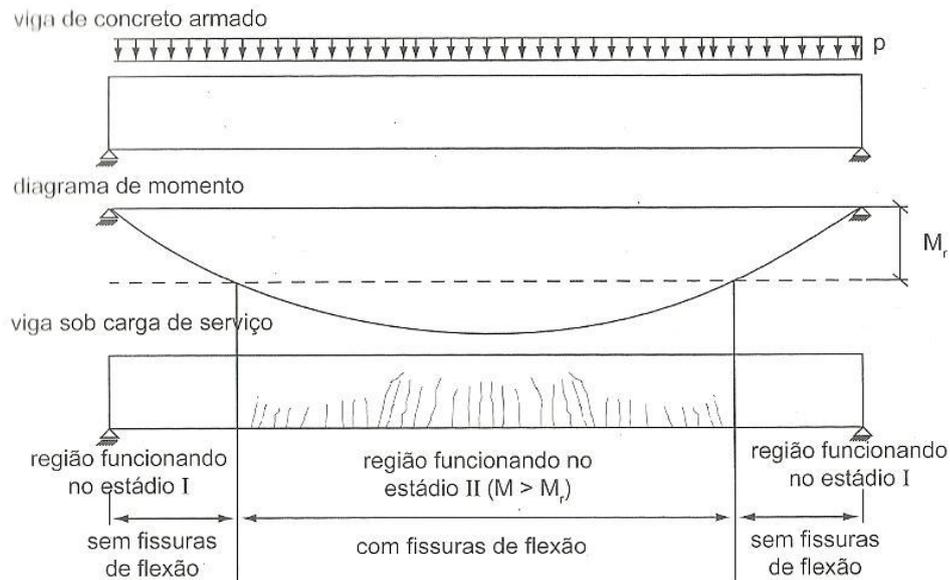
Na avaliação do comportamento global da estrutura, pode ser utilizado em projeto o módulo de elasticidade tangente inicial  $E_{ci}$ .

Os resultados de uma análise linear são usualmente empregados nas verificações de estado de limite de serviço, como para a verificação do estado limite de abertura de fissuras e de deformação excessiva. Nesse último, no entanto, deve ser utilizada a rigidez equivalente  $(EI)_{eq}$ .

De acordo com a NBR 6118:2003, a verificação dos valores limites para a deformação da estrutura deve ser realizada através de modelos que considerem a rigidez efetiva das seções dos elementos estruturais. Nesse sentido, deve-se levar em consideração a presença das armaduras e a fissuração do concreto no cálculo da rigidez, além das deformações diferidas no tempo.

Para uma avaliação aproximada da deformação em vigas e em lajes, pode-se admitir o concreto e o aço como materiais de comportamento linear elástico. Em uma viga ou laje, há trechos não fissurados (Estádio I) e fissurados (Estádio II) para os carregamentos de estado limite de serviço, conforme está ilustrado na Figura 19.

Figura 19- Viga de concreto armado simplesmente apoiada sob ações de serviço.



Assim, para uma avaliação da flecha imediata, a NBR 6118:2003 permite o uso da rigidez equivalente, obtida a partir do modelo simplificado de Branson (1968), para o cálculo da flecha imediata, cuja equação é dada por:

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (15)$$

onde:  $I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto,  $I_{II}$  é o momento de inércia da seção fissurada do concreto no Estádio II, calculado com  $\alpha_e = E_s/E_{cs}$ ,  $M_a$  é o momento fletor na seção crítica do vão considerado e  $M_r$  é o momento de fissuração do elemento estrutural.

Para verificações de estado limite último, é permitido utilizar uma análise linear, mesmo com tensões elevadas, desde que a estrutura apresente suficiente ductilidade para atingir a distribuição das solicitações previstas. Essa exigência é na verdade uma aplicação do Teorema Estático da Teoria da Plasticidade Geral também conhecido como Teorema do Limite Inferior, que para ter validade necessita que as peças tenham um comportamento plástico (ALTOQI, 2012). É por esse motivo que a norma exige uma ductilidade mínima das peças.

## 3.2 Análise não linear

Na análise não linear, considera-se o comportamento não linear dos materiais. Toda a geometria da estrutura, bem como todas as suas armaduras, precisam ser conhecidas para que a análise não linear possa ser efetuada, pois a resposta da estrutura depende de como ela foi armada. Condições de equilíbrio, compatibilidade e ductilidade devem ser necessariamente atendidas.

De acordo com a NBR 6118:2003, as análises não lineares podem ser utilizadas tanto para verificações de estado limite último como para verificações de estado limite de serviço. Chamam-se efeitos de 2º ordem aqueles que se somam aos obtidos numa análise de 1º ordem quando a análise do equilíbrio da estrutura passa a ser realizada com a configuração deformada e obrigatoriamente considerando o comportamento não linear físico dos materiais.

Conforme a NBR 6118:2003, os nós da estrutura deslocam-se horizontalmente sob a ação de cargas horizontais e verticais e os esforços de 2º ordem decorrentes desses deslocamentos são chamados efeitos globais de 2º ordem. Assim, quanto maiores forem esses deslocamentos, maiores serão os efeitos globais de 2º ordem, sendo necessário, portanto, adequar a rigidez adotada para os diversos elementos estruturais de forma a limitar esses efeitos que influenciam diretamente nos momentos de dimensionamento.

Com base na ordem de grandeza dos efeitos globais de 2º ordem, as estruturas são classificadas em estruturas de nós fixos e de nós móveis. As estruturas consideradas de nós fixos são mais rígidas, apresentam deslocamentos horizontais pequenos e podem ser desprezados os efeitos globais de 2º ordem, pois são inferiores a 10% dos respectivos esforços de 1º ordem. As estruturas de nós móveis são mais flexíveis e, por isso, os deslocamentos horizontais não são pequenos. Nessas estruturas, os efeitos globais de 2º ordem são importantes e superiores a 10% dos respectivos esforços de 1º ordem.

### 3.2.1 *Dispensa da consideração dos efeitos globais de 2º ordem*

A classificação de uma estrutura com relação à consideração dos efeitos globais de 2º ordem, ou seja, se é uma estrutura de nós fixos ou de nós móveis pode ser realizada através de dois processos aproximados, o parâmetro de instabilidade  $\alpha$  e o coeficiente  $\gamma_z$ .

### 3.2.1.1 Parâmetro de instabilidade $\alpha$

Segundo Carmo (1995), o parâmetro  $\alpha$  foi idealizado por Beck e König (1966) como uma grandeza para avaliar a rigidez horizontal de uma estrutura. O desenvolvimento deste parâmetro foi feito a partir de análises da rigidez de pórticos rotulados, contraventados por paredes.

É uma grandeza capaz de avaliar a sensibilidade de uma estrutura com relação aos efeitos globais de 2º ordem. Segundo a NBR 6118:2003, uma estrutura simétrica pode ser considerada de nós fixos se seu parâmetro de instabilidade  $\alpha$  for menor que  $\alpha_1$ , conforme a expressão:

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{\frac{N_k}{(E_{cs} I_c)}} < \alpha_1 \quad (16)$$

sendo:

- $\alpha_1 = 0,2 + 0,1n$ , se  $n \leq 3$ ;
- $\alpha_1 = 0,6$ , se  $n \geq 4$  e para estruturas usuais de edifícios, associações de pilares-parede e para pórticos associados a pilares-parede;
- $\alpha_1 = 0,7$ , se  $n \geq 4$  e para contraventamento constituído exclusivamente por pilares-parede;
- $\alpha_1 = 0,5$ , se  $n \geq 4$  e quando só houver pórticos.

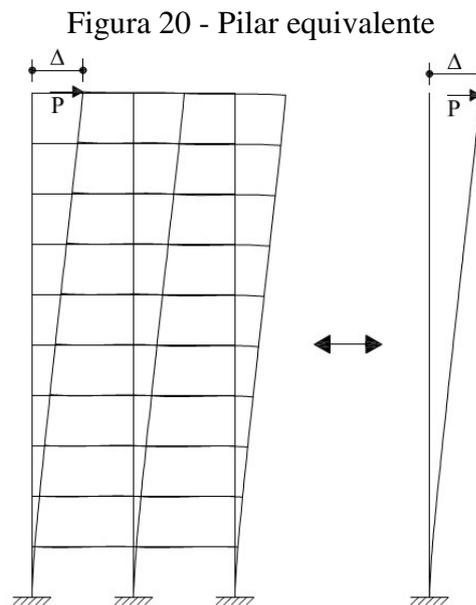
onde  $n$  é o número de pavimentos acima da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo,  $H_{tot}$  é a altura total da estrutura,  $N_k$  é o somatório de todas as cargas verticais atuantes na estrutura, com seu valor característico e  $E_{cs}I_c$  representa o somatório dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada. No caso de estruturas de pórticos, de treliças ou mistas, ou com pilares de rigidez variável ao longo da altura, pode ser considerado o valor da expressão  $E_{cs}I_c$  de um pilar equivalente de seção constante.

Para que o parâmetro  $\alpha$  seja representativo, o edifício deve ser preferencialmente simétrico, pois o parâmetro de instabilidade  $\alpha$  não se aplica a estruturas significativamente assimétricas ou que apresentem deslocamentos horizontais apreciáveis sob a ação das cargas verticais (IBRACON, 2006).

No cálculo do  $\alpha$ , o valor de  $I_c$  deve ser calculado considerando as seções brutas dos pilares e pode ser adotado o módulo de elasticidade tangente inicial.

A NBR 6118:2003 permite substituir  $E_{cs} I_c$  pela rigidez calculada através de um pilar equivalente. Este pilar pode ser engastado e livre com carga concentrada na extremidade, como mostrado na Figura 20.

Igualando-se o deslocamento horizontal do pilar sob a ação de uma carga horizontal  $P$  ao deslocamento obtido para o sistema de contraventamento, obtém-se a rigidez equivalente:

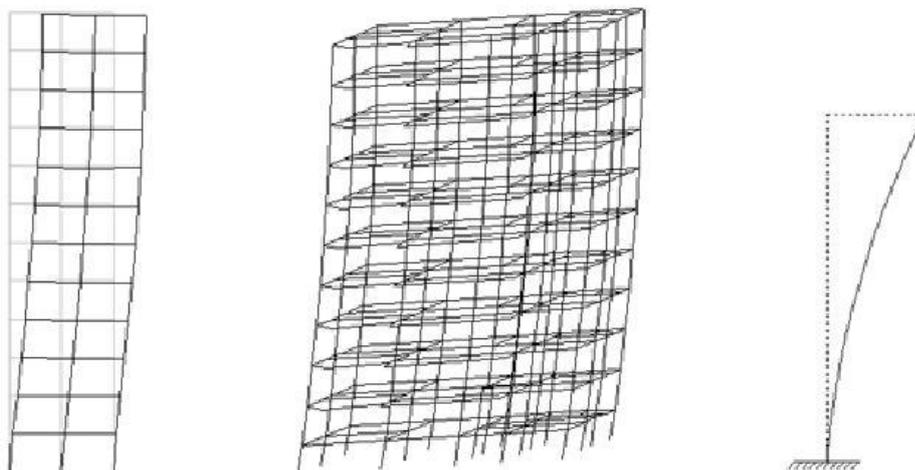


Fonte: Próprio autor.

$$\Delta = \frac{PH^3}{3E_{cs}I_c} \Rightarrow E_{cs}I_c = \frac{PH^3}{3\Delta} \quad (17)$$

Em contrapartida à facilidade de determinação do parâmetro  $\alpha$ , a maioria das estruturas não apresenta comportamento semelhante ao de um pilar engastado e livre (E-L), como ilustra a Figura 21. Outros aspectos relevantes dizem respeito à questão do parâmetro  $\alpha$  supor que  $EI$  é constante ao longo da altura, o que usualmente não acontece, e ao fato de ele não permitir uma estimativa dos acréscimos de esforços devido aos efeitos globais de 2º ordem.

Figura 21 - Comportamento de pórticos planos e espaciais e pilar E-L



Fonte: AltoQi (2012).

### 3.2.1.2 Coeficiente $\gamma_z$

O coeficiente  $\gamma_z$  permite avaliar a estabilidade global, estimar os esforços globais de 2º ordem de edifícios e classificar as estruturas quanto à deslocabilidade dos nós, tendo sido idealizado por Franco e Vasconcelos (1991).

O coeficiente  $\gamma_z$  de avaliação da importância dos esforços globais de 2º ordem é válido para estruturas reticuladas de no mínimo quatro pavimentos. Ele pode ser determinado a partir dos resultados de uma análise linear de 1º ordem. O valor de  $\gamma_z$  é dado pela expressão:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (18)$$

onde  $M_{1,tot,d}$  é o momento de tombamento devido às ações horizontais e  $\Delta M_{tot,d}$  é o momento oriundo do produto de todas as forças verticais pelos respectivos deslocamentos horizontais de seus pontos de aplicação. Considera-se que a estrutura é de nós fixos quando  $\gamma_z \leq 1,1$ .

A utilização do parâmetro  $\gamma_z$  em estruturas com menos de quatro pavimentos não é recomendada devido à possibilidade de se terem casos reais com valores de rigidez menores que os recomendados. Neste caso, sugere-se a utilização do parâmetro  $\alpha$  (IBRACON, 2006).

### 3.2.2 *Análise de estruturas de nós fixos*

Com relação à análise global, as estruturas de nós fixos são sempre consideradas como deslocáveis sob a ação de forças horizontais. O fato de a estrutura ser classificada como sendo de nós fixos dispensa apenas a consideração dos efeitos globais de 2º ordem, sendo ainda necessário serem considerados os efeitos locais e localizados de 2º ordem.

O dimensionamento de estruturas de nós fixos pode ser realizado considerando cada elemento comprimido isoladamente onde se aplicam os esforços obtidos pela análise da estrutura efetuada segundo a teoria de 1º ordem.

### 3.2.3 *Análise de estruturas de nós móveis*

De acordo com a NBR 6118:2003, na análise de estruturas de nós móveis, devem ser obrigatoriamente considerados os efeitos da não linearidade geométrica e física e, portanto, devem ser obrigatoriamente considerados, no dimensionamento, os efeitos globais de 2º ordem, além dos efeitos locais e localizados.

A norma permite realizar uma determinação aproximada dos esforços globais de 2º ordem, obtendo assim os esforços finais (1º ordem + 2º ordem), a partir da majoração adicional dos esforços horizontais por  $0,95\gamma_z$ , desde que  $\gamma_z \leq 1,3$ .

A consideração da não linearidade física deveria prever o cálculo da rigidez da seção a partir das relações constitutivas dos materiais, da quantidade e disposição das armaduras e do nível de solitação atuante. Por ser complicado e trabalhoso obter os dados de um modelo constitutivo que represente de maneira mais fiel o comportamento do concreto armado, a NBR 6118:2003 propõe a adoção de fatores que reduzam a rigidez do elemento analisado. A redução da rigidez à flexão dos elementos é dada por:

$$(EI)_{sec} = \beta E_{ci} I_c \quad (19)$$

onde  $\beta$  é o fator de redução da rigidez,  $E_{ci}$  é o módulo de elasticidade tangente inicial e  $I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto.

Dessa forma, a norma permite a consideração da não linearidade física de forma aproximada, tomando-se como rigidez dos elementos estruturais os seguintes valores:

a) Lajes:  $(EI)_{sec} = 0,3E_{ci} I_c$  ;

b) Vigas:  $(EI)_{sec} = 0,4E_{ci} I_c$  para  $A'_s \neq A_s$  ou  $(EI)_{sec} = 0,5E_{ci} I_c$  para  $A'_s = A_s$  ;

c) Pilares:  $(EI)_{\text{sec}} = 0,8E_{ci}I_c$ .

onde  $E_{ci}$  é o módulo de elasticidade tangente inicial,  $A_s$  é a área da armadura tracionada e  $A'_s$  é a área da armadura comprimida.

Quando a estrutura de contraventamento for composta exclusivamente por vigas e pilares, permite-se tomar a rigidez de vigas e pilares por  $(EI)_{\text{sec}} = 0,7E_{ci}I_c$ .

## 4 MODELO DISCRETO DE PÓRTICO PLANO

Neste capítulo está descrita a formulação do elemento finito de pórtico plano utilizada que tem como base para a sua formulação a teoria de vigas de Navier-Bernoulli. As principais hipóteses e aspectos dessa teoria também são introduzidos nesse capítulo.

### 4.1 Pórticos planos considerando a teoria de vigas de Navier-Bernoulli

Também chamada na literatura por Teoria Clássica de Vigas (TCV), esta teoria adota uma série de hipóteses estáticas e cinemáticas para transformar a análise de vigas de um problema 3D para 1D.

Uma viga possui o comprimento longitudinal preponderante em relação às dimensões transversais. Segundo a NBR 6118:2003, para ser considerado como viga, o comprimento longitudinal deve superar em pelo menos três vezes a maior dimensão transversal.

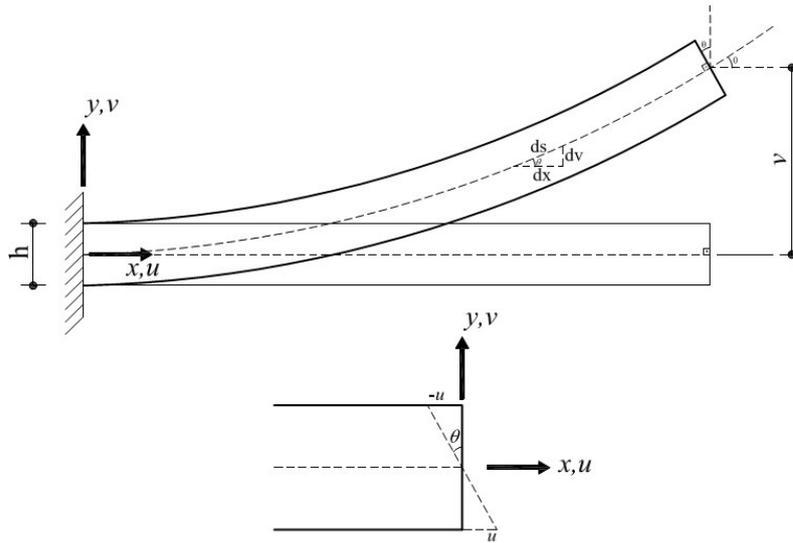
#### 4.1.1 Hipóteses

Como as vigas são estreitas e suas faces laterais estão livres de tensões, pode-se considerar que todas as forças atuantes estão contidas no plano  $xy$ , assim, o estado de tensões de uma viga é plano. Esta hipótese reduz o problema de 3D para 2D.

As tensões e deformações perpendiculares ao eixo da viga são pequenas e muito menores que as tensões na direção do eixo e podem, portanto, ser desprezadas. Adicionalmente, o efeito de Poisson e do cisalhamento são desprezados. Estas hipóteses reduzem o problema de 2D para 1D.

A principal hipótese da TCV considera que as seções planas e perpendiculares ao eixo da viga antes da deformação, permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga após a deformação. Esta hipótese é conhecida como hipótese de Navier e está ilustrada na Figura 22.

Figura 22 - Configuração indeformada e deformada da viga baseada nas hipóteses da TCV



Fonte: Próprio autor.

#### 4.1.2 Campo de deslocamentos

A partir das hipóteses adotadas para a TCV e da observação da Figura 22, pode-se obter o campo de deslocamentos para qualquer ponto de uma barra.

Da hipótese de tensões transversais e efeito de Poisson nulos, obtemos que os deslocamentos transversais só dependem da posição ao longo do eixo longitudinal:

$$\sigma_y = 0 \rightarrow \varepsilon_y = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

$$\bar{v}(x, y) = v(x) \quad (21)$$

onde  $v$  representa os deslocamentos transversais do eixo da viga.

Da hipótese das seções planas, obtemos a inclinação do eixo a partir do deslocamento transversal  $v$  e obtemos os deslocamentos axiais ao longo da seção transversal:

$$\theta \cong \text{tg } \theta = \frac{dv}{dx} = \frac{-u}{y} \rightarrow u = -y\theta \quad (22)$$

$$u(x, y) = -y \frac{dv}{dx} = -yv'_{,x} \quad (23)$$

Adicionando os deslocamentos axiais do eixo da viga  $u(x)$ , geralmente associado ao centróide da seção, que surgem devido aos esforços normais atuantes em um pórtico plano,

temos que o campo de deslocamentos  $(\bar{u}, \bar{v})$  baseados na TCV para qualquer ponto da barra do elemento é dado por:

$$\bar{u}(x, y) = u(x) - y v_{,x} \quad (24)$$

$$\bar{v}(x, y) = v(x) \quad (25)$$

onde  $u$  e  $v$  representam os deslocamentos axiais e transversais do eixo da viga, respectivamente.

### 4.1.3 Relações deformação-deslocamento

A partir do campo de deslocamentos descrito e considerando a teoria da elasticidade clássica para pequenos deslocamentos e deformações, obtêm-se as seguintes relações entre deformações e deslocamentos para um ponto qualquer da barra:

$$\varepsilon_x = \bar{u}_{,x} = u_{,x} - y v_{,xx} \quad (26)$$

$$\varepsilon_y = \bar{v}_{,y} = 0 \quad (27)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} = v_{,x} - v_{,x} = 0 \quad (28)$$

portanto, a única deformação presente é a deformação axial ao eixo da barra. Podemos escrever a Equação (26) de forma mais conveniente como:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_m - y \kappa \quad (29)$$

onde  $\varepsilon_m$  é a deformação de membrana geralmente associada ao eixo do centróide da barra e se deve aos esforços normais,  $\kappa$  é curvatura da barra e se deve aos momentos fletores.

A deformação de membrana  $\varepsilon_m$  e a curvatura  $\kappa$  constituem o vetor chamado de deformações generalizadas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (30)$$

#### 4.1.4 Relações tensão-deformação

Uma propriedade do material que não depende da geometria da estrutura e que relaciona as tensões e deformações é a sua Lei Constitutiva. Essa propriedade do material deve ser prescrita como um dado externo à análise. No caso mais geral, pode-se assumir uma Lei Constitutiva não linear:

$$\sigma_x = \sigma(\varepsilon_x) \quad (31)$$

#### 4.1.5 Esforços internos

Para o caso de elementos de pórtico plano baseados na TCV, os esforços de interesse são a força normal  $N$  e o momento fletor  $M$ , pois o cisalhamento é desprezado. Os esforços internos podem ser obtidos a partir da resultante devido à integração das tensões na seção da barra.

Assim, a força normal é a resultante das forças geradas pelas tensões atuantes na direção do eixo da barra e é obtida por:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (32)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal da barra. O momento fletor é a resultante dos momentos em torno do eixo horizontal da seção transversal gerados pelas tensões axiais. O momento fletor pode ser obtido por:

$$M = \int_A (-y \sigma_x) dA \quad (33)$$

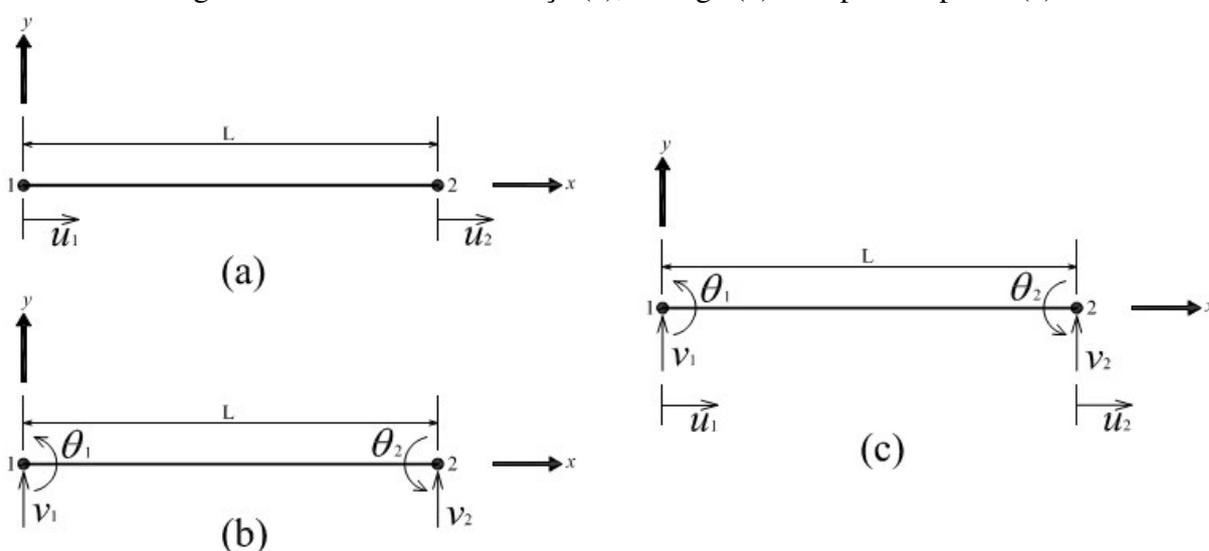
Os esforços internos resultantes  $(N, M)$  constituem um vetor das tensões generalizadas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (34)$$

## 4.2 Elemento finito de pórtico plano

O desenvolvimento de um elemento finito consiste inicialmente na determinação dos graus de liberdade e das funções de interpolação. Para o caso do elemento de pórtico plano apresentado neste capítulo, os graus de liberdade considerados serão resultado de uma associação entre as parcelas de membrana e de flexão, ou seja, uma associação entre os graus de liberdade de um elemento de treliça e de um elemento de viga. A figura abaixo ilustra essa associação:

Figura 23- Elementos de treliça (a), de viga (b) e de pórtico plano (c)



Fonte: Próprio autor.

### 4.2.1 Equações de equilíbrio do elemento

Para a obtenção das equações de equilíbrio do elemento, pode-se utilizar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), pois este princípio pode ser empregado em situações onde o campo de energia não é conservativo. Este é o caso quando se realiza uma análise estrutural não linear.

De acordo com o PTV, o trabalho virtual realizado pelas forças internas é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças externas devido a um deslocamento virtual aplicado. Este deslocamento virtual é imaginário, pequeno, possível e compatível com as vinculações da estrutura:

$$\delta U = \delta W_{ext} \quad (35)$$

onde  $\delta U$  representa o trabalho virtual interno e  $\delta W_{ext}$  o trabalho virtual externo.

Como o elemento de pórtico plano considerado é baseado na TCV, a única tensão de interesse é  $\sigma_x$ . Assim, o trabalho virtual interno pode ser obtido por:

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon_x^T \sigma_x dv \quad (36)$$

De acordo com a equação (29), a deformação virtual é dada por:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \varepsilon_m - y \cdot \delta \kappa \quad (37)$$

Substituindo a equação (37) na equação (36), obtemos uma expressão para o cálculo do trabalho virtual interno de pórticos planos:

$$\delta U = \int_V (\delta \varepsilon_m - y \delta \kappa)^T \sigma_x dv = \int_L \int_A (\delta \varepsilon_m - y \delta \kappa)^T \sigma_x dA dx \quad (38)$$

Separando a integral, podemos escrever o trabalho virtual interno como a soma de duas parcelas:

$$\delta U = \int_L \delta \varepsilon_m^T \int_A \sigma_x dA dx + \int_L \delta \kappa^T \int_A (-y \sigma_x) dA dx \quad (39)$$

A deformação de membrana e a curvatura variam ao longo do comprimento da barra e são constantes na seção transversal, por isso saem da integral de área. A Equação (39) pode ser reescrita utilizando as expressões dos esforços internos obtidos a partir das Equações (32) e (33).

$$\delta U = \int_L \delta \varepsilon_m^T N dx + \int_L \delta \kappa^T M dx = \delta U_m + \delta U_b \quad (40)$$

Nesta expressão, as parcelas  $\delta U_m$  e  $\delta U_b$  correspondem ao trabalho virtual interno de membrana e de flexão, respectivamente. Esta expressão pode ser escrita de forma compacta:

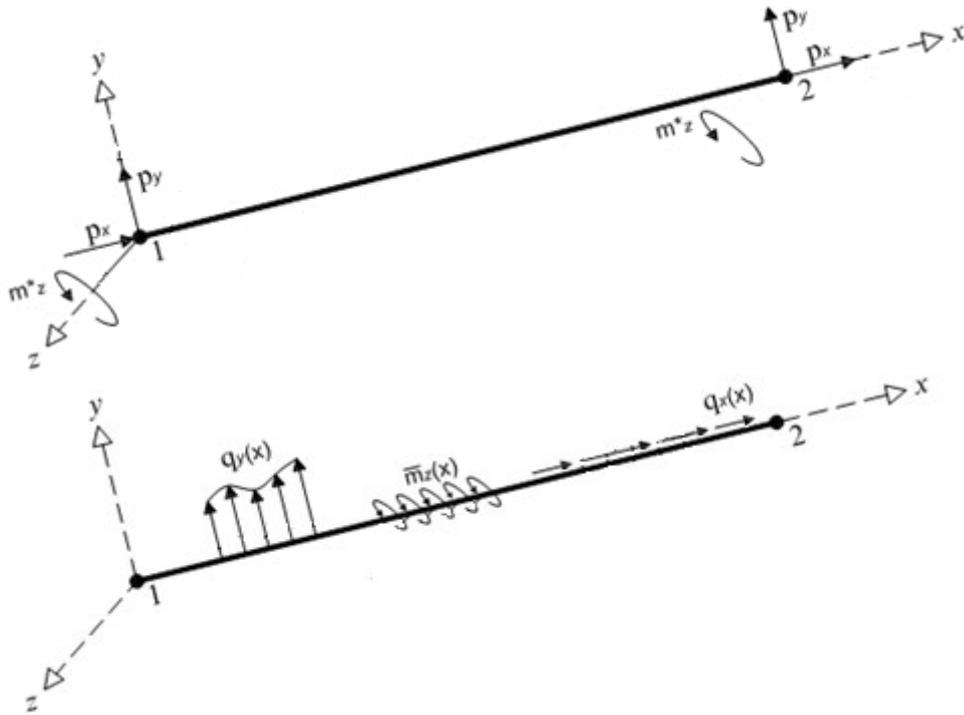
$$\delta U = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (41)$$

onde os vetores  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  correspondem às deformações e tensões generalizadas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (42)$$

O trabalho virtual externo  $\delta W_{ext}$  é definido como o trabalho realizado pelas forças de campo (vetor  $\mathbf{b}$ ) e de superfície (vetor  $\mathbf{q}$ ), somado ao trabalho realizado pelas forças aplicadas diretamente sobre os nós do elemento (vetor  $\mathbf{P}$ ). A figura abaixo ilustra um elemento sujeito a forças externas genéricas para o caso de um elemento de pórtico plano:

Figura 24 - Ações genéricas



Fonte: Adaptado de Fonseca (2006).

Então, o trabalho virtual externo pode ser calculado através da expressão:

$$\delta W_{ext} = \int_V (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}) dV + \int_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}) dS + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{P} \quad (43)$$

onde  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}_e$  representam os vetores de deslocamento no interior do elemento e de deslocamentos nodais, respectivamente.

#### 4.2.2 Formulação do elemento finito

Neste item é apresentada a formulação do elemento finito de pórtico plano que é resultante da associação entre os comportamentos de membrana (elemento de treliça) e de flexão (elemento de viga).

Para cada elemento, são descritos os graus de liberdade considerados e as funções de interpolação. Para garantir a convergência do MEF, essas funções de interpolação precisam ter continuidade  $C^{m-1}$ , onde  $m$  é a maior ordem de derivação que aparece na expressão do trabalho virtual (COOK *et al*, 2003).

#### 4.2.2.1 Parcela de membrana

No caso da parcela de membrana, a equação do trabalho virtual interno envolve apenas derivadas de primeira ordem, como pode ser visto nas Equações (26) e (39), relativa à parcela da energia de membrana. Assim, as funções de interpolação precisam ser contínuas (continuidade  $C^0$ ).

Os deslocamentos axiais podem ser interpolados através de uma função linear, que requer apenas dois graus de liberdade. Pode-se, então, escrever o deslocamento axial no elemento.

$$u = L_1 u_1 + L_2 u_2 \quad (44)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos nodais na direção axial e  $L_1$  e  $L_2$  são os polinômios de interpolação lineares de Lagrange. Esses polinômios são definidos no intervalo  $0 \leq x \leq L$  por:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ L_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (45)$$

Escrevendo a Equação (44) de forma matricial, temos:

$$u = [L_1 \quad 0 \quad 0 \quad L_2 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u = \mathbf{N}_m \mathbf{u}_e \quad (46)$$

Obtido o campo de deslocamentos axiais no elemento, a deformação de membrana pode ser escrita:

$$\varepsilon_m = \frac{\partial \mathbf{N}_m}{\partial x} \mathbf{u}_e = [L_{1,x} \quad 0 \quad 0 \quad L_{2,x} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_m = \mathbf{B}_m \mathbf{u}_e \quad (47)$$

onde  $\mathbf{B}_m$  é a parcela de membrana da matriz deformação-deslocamento, responsável por transformar os deslocamentos nodais axiais em deformações axiais no interior do elemento.

#### 4.2.2.2 Parcela de flexão

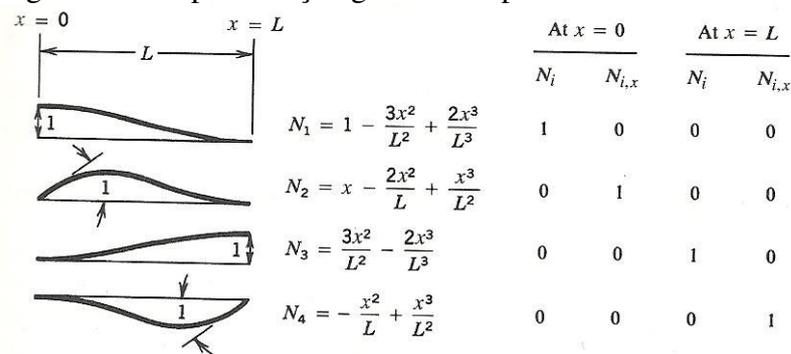
No caso da parcela de flexão, a equação do trabalho virtual interno envolve derivadas de segunda ordem, como pode ser visto na Equação (39). Assim, tanto as funções de interpolação como as derivadas de primeira ordem precisam ser contínuas (continuidade  $C^1$ ). Fisicamente, isso significa que tanto as deflexões como as rotações precisam ser contínuas entre elementos adjacentes, a menos que haja uma rótula. Portanto, para garantir a continuidade dos deslocamentos transversais e das rotações no interior do elemento, é necessário empregar os quatro graus de liberdade nodais do elemento de viga como mostrado na Figura 23(b). Assim, os deslocamentos transversais são interpolados através da expressão seguinte:

$$v = H_1 v_1 + H_2 \theta_1 + H_3 v_2 + H_4 \theta_2 \quad (48)$$

onde as funções de interpolação  $H$  são conhecidas como os polinômios de Hermite (COOK *et al.*, 2002). Estes polinômios são cúbicos, pois são utilizados para uma interpolação a partir de quatro graus de liberdade nodais. Usam-se os polinômios de Hermite quando se quer interpolar entre dois pontos com dois valores e duas tangentes conhecidas. As expressões e a representação gráfica dos polinômios de Hermite estão mostradas abaixo:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\
 H_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\
 H_3 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\
 H_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}
 \end{aligned} \tag{49}$$

Figura 25 – Representação gráfica dos polinômios de Hermite



Fonte: Cook *et al* (2002).

Escrevendo a equação (48) de forma matricial, temos:

$$v = \begin{bmatrix} 0 & H_1 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v = \mathbf{N}_b \mathbf{u}_e \tag{50}$$

Obtido o campo de deslocamentos transversais no elemento, a deformação de flexão pode ser escrita:

$$\kappa = \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b}{\partial x^2} \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} 0 & H_{1''} & H_{2''} & 0 & H_{3''} & H_{4''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \kappa = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_e \tag{51}$$

onde  $\mathbf{B}_b$  é a parcela de flexão da matriz deformação-deslocamento, responsável por transformar os deslocamentos nodais na curvatura no interior do elemento.

#### 4.2.2.3 Elemento de pórtico plano

Um pórtico plano apresenta comportamento tanto de membrana (treliça) como de flexão (viga), logo, o elemento de pórtico plano pode ser obtido pela composição desses dois comportamentos. Com base nas equações anteriores, podemos escrever a interpolação dos deslocamentos como:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e \quad (52)$$

onde  $\mathbf{u}$  representa os deslocamentos no interior do elemento,  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de forma que realiza a interpolação dos deslocamentos nodais e  $\mathbf{u}_e$  representa os deslocamentos nodais do elemento de pórtico plano.

A partir do campo de deslocamentos do elemento, pode-se obter o vetor das deformações generalizadas  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,x} & 0 & 0 & L_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & H_{1,xx} & H_{2,xx} & 0 & H_{3,xx} & H_{4,xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}_e \quad (53)$$

onde  $\mathbf{B}$  representa a matriz deformação-deslocamento para o elemento de pórtico plano.

Os elementos da matriz  $\mathbf{B}$  não dependem dos deslocamentos, assim, podemos escrever o vetor das deformações virtuais por:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}_e \quad (54)$$

Com o vetor das deformações virtuais estabelecido, podemos substituí-lo na Equação (41) e obter o trabalho virtual interno do elemento:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \int_L \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \delta \mathbf{u}_e^T \int_L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx \\
\mathbf{g}_e &= \int_L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx \\
\delta U &= \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e
\end{aligned} \tag{55}$$

onde  $\mathbf{g}_e$  representa o vetor de forças internas para o elemento de pórtico plano.

Substituindo as deformações virtuais na expressão do trabalho virtual interno subdividido nas parcelas de membrana e de flexão (Equação (40)), podemos escrever o vetor de forças internas subdividido nessas duas parcelas:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \delta \mathbf{u}_e^T \int_L \mathbf{B}_m^T N dx + \delta \mathbf{u}_e^T \int_L \mathbf{B}_b^T M dx = \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{g}_m + \mathbf{g}_b) \\
\mathbf{g} &= \mathbf{g}_m + \mathbf{g}_b
\end{aligned} \tag{56}$$

onde  $\mathbf{B}_m$  e  $\mathbf{B}_b$  correspondem às parcelas de membrana e de flexão da matriz  $\mathbf{B}$ , respectivamente,  $\mathbf{g}_m$  e  $\mathbf{g}_b$  correspondem a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_m &= \int_L \mathbf{B}_m^T N dx \\
\mathbf{g}_b &= \int_L \mathbf{B}_b^T M dx
\end{aligned} \tag{57}$$

É possível, também, definir o vetor de forças externas substituindo os deslocamentos virtuais na expressão do trabalho virtual externo (Equação (43)):

$$\begin{aligned}
\delta W_{ext} &= \int_V (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{b}) dV + \int_S (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{q}) dS + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{P} \\
\delta W_{ext} &= \delta \mathbf{u}_e^T (\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \mathbf{P}) \\
\delta W_{ext} &= \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{f}_b + \mathbf{f}_q + \mathbf{P}) \\
\mathbf{f}_e &= \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_q + \mathbf{P}
\end{aligned} \tag{58}$$

onde  $\mathbf{f}_e$  representa o vetor de forças externas equivalentes nodais e  $\mathbf{f}_b$  e  $\mathbf{f}_q$  são os vetores de forças externas equivalentes nodais relativos às forças de campo e de superfície.

A partir das Equações (56), (58) e do PTV, representado pela Equação (35), temos que para um deslocamento virtual arbitrário  $\delta \mathbf{u}_e$ , o equilíbrio ocorre quando:

$$\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e \Rightarrow \mathbf{g}_e = \mathbf{f}_e \tag{59}$$

Vale ressaltar que esta formulação é válida para qualquer material, seja ele linear ou não linear.

#### 4.2.3 Elemento de pórtico plano com linearidade física

Considerando o material elástico linear, a relação entre as tensões e deformações é dada pela Lei de Hooke:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (60)$$

Para o elemento de pórtico plano baseado na TCV, a deformação axial é representada pela Equação (29):

$$\sigma_x = E(\varepsilon_m - y\kappa) \quad (61)$$

Dessa forma, os esforços internos atuantes na seção transversal do elemento, que compõem o vetor das tensões generalizadas  $\sigma$ , podem ser determinados substituindo a Equação (61) nas integrais dadas pelas Equações (32) e (33).

$$\begin{aligned} N &= \int_A E(\varepsilon_m - y\kappa)dA = E\varepsilon_m \int_A dA + E\kappa \int_A (-y)dA \\ M &= \int_A (-y)E(\varepsilon_m - y\kappa)dA = E\varepsilon_m \int_A (-y)dA + E\kappa \int_A y^2 dA \end{aligned} \quad (62)$$

Nessa Equação, as integrais representam a área  $A$ , o momento estático  $S$  e o momento de inércia  $I$  da seção transversal:

$$A = \int_A dA \quad S = \int_A (-y)dA \quad I = \int_A y^2 dA \quad (63)$$

Os esforços internos podem ser representados de forma compacta por:

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon_m + ES\kappa \\ M &= ES\varepsilon_m + EI\kappa \end{aligned} \quad (64)$$

e na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & ES \\ ES & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (65)$$

Se os eixos da seção transversal tiverem origem no centróide, o momento de primeira ordem é nulo e as tensões e deformações generalizadas ficam desacopladas:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (66)$$

A relação entre tensões generalizadas e deformações generalizadas pode ser escrita de maneira simbólica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (67)$$

onde  $\mathbf{C}$  representa a matriz constitutiva do material. Utilizando a Equação (53), podemos representar as tensões generalizadas em função dos deslocamentos nodais:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_e \quad (68)$$

Substituindo na expressão do vetor de forças internas  $\mathbf{g}_e$ , representado em (55), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_e &= \int_L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_e dx = \left( \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{C}\mathbf{B} dx \right) \mathbf{u}_e \\ \mathbf{g}_e &= \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \end{aligned} \quad (69)$$

Nessa expressão,  $\mathbf{K}_e$  representa a matriz de rigidez do elemento de pórtico plano. Realizando as integrais, a expressão analítica da matriz  $\mathbf{K}_e$  é idêntica à forma clássica obtida através do Método da Rigidez Direta:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (70)$$

#### 4.2.4 Elemento de pórtico plano com não linearidade física

Quando a não linearidade física (NLF) é considerada, a relação entre deslocamentos e forças internas passa a ser não linear. Para a solução do sistema de equações de equilíbrio (Equação (59)), é necessário o emprego de um procedimento incremental-

iterativo como o método de Newton-Raphson. Para isso, é calculado o resíduo, que é o valor do desequilíbrio nodal dado pela diferença entre o vetor de forças internas e o vetor de forças externas (PARENTE JUNIOR, 2012):

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \quad (71)$$

Para que haja o equilíbrio, esse resíduo deve ser nulo ou atender a uma tolerância pré-estabelecida. Expandindo através de uma série de Taylor e truncando para dois termos, o resíduo pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) &= \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \frac{\delta\mathbf{r}(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}} \delta\mathbf{u} + \frac{\delta^2\mathbf{r}(\mathbf{u})}{2!} (\delta\mathbf{u})^2 + \dots \\ \mathbf{r}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) &\cong \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \frac{\delta\mathbf{r}(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}} \delta\mathbf{u} \end{aligned} \quad (72)$$

Fazendo a Equação (72) ser nula, obtemos a equação que aplica o método de Newton-Raphson em uma determinada iteração:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) &\cong \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \frac{\delta\mathbf{r}(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}} \delta\mathbf{u} = 0 \\ \frac{\delta\mathbf{r}(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}} \delta\mathbf{u} &= -\mathbf{r}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (73)$$

$$\mathbf{K}_T \delta\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{g}(\mathbf{u})$$

onde  $\mathbf{K}_T$  representa a matriz de rigidez tangente do elemento. Da Equação (71), podemos verificar que a matriz de rigidez tangente é igual à taxa de variação do vetor de forças internas em relação ao vetor de deslocamentos nodais:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} = \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} - \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}} \Rightarrow \mathbf{K}_T = \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} \quad (74)$$

Diferenciando a Equação do vetor de forças internas (55), podemos calcular a matriz de rigidez tangente:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} = \int_L \mathbf{B}^T \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\mathbf{u}} dx = \int_L \mathbf{B}^T \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{u}} dx \quad (75)$$

Considerando a Equação (53), a matriz de rigidez tangente pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_T = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{C}_t \mathbf{B} dx \quad (76)$$

onde  $\mathbf{C}_t$  é a matriz constitutiva tangente que relaciona os incrementos de tensão e de deformação:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (77)$$

A matriz constitutiva tangente é obtida a partir da diferenciação do vetor de tensão generalizada  $\boldsymbol{\sigma}$  em relação ao vetor de deformação generalizada  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . A partir da Equação (29) a (34), a matriz  $\mathbf{C}_t$  pode ser escrita como (PARENTE JUNIOR, 2012):

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial N}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M}{\partial \kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & ES \\ ES & EI \end{bmatrix} \quad (78)$$

Os termos da matriz constitutiva tangente são dados por:

$$\begin{aligned} EA &= \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_m} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_m} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_m} dA \\ ES &= \frac{\partial N}{\partial \kappa} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \kappa} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \kappa} dA = \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_m} \\ EI &= \frac{\partial M}{\partial \kappa} = \int_A -y \frac{\partial \sigma_x}{\partial \kappa} dA = \int_A -y \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \kappa} dA \end{aligned} \quad (79)$$

que podem ser escritos em função do módulo de elasticidade tangente  $E_t$  da curva tensão-deformação do material:

$$\begin{aligned} EA &= \int_A E_t dA \\ ES &= -\int_A E_t y dA \\ EI &= \int_A E_t y^2 dA \end{aligned} \quad (80)$$

onde  $E_t$  é dado por:

$$E_t = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \quad (81)$$

É importante notar que, devido à NLF, o módulo de elasticidade tangente  $E_t$  varia na seção transversal, pois depende da deformação  $\varepsilon_x$  do ponto considerado na seção e da curva tensão-deformação do material.

#### 4.2.5 Técnicas de integração ao longo do eixo longitudinal

O cálculo das integrais de área das expressões da matriz constitutiva tangente (Equação (79)), bem como, das integrais dos esforços resistentes da seção (Equações (32) e (33)) pode ser realizado por diversos métodos, alguns analíticos e outros numéricos. Os métodos para a obtenção dos esforços internos e dos termos da matriz constitutiva tangente são discutidos no próximo capítulo. Já para calcular as integrais ao longo do eixo longitudinal do elemento, necessárias para a obtenção do vetor de forças internas (Equação (56) e (57)) e da matriz de rigidez tangente local (Equação (76)), são empregados métodos de integração numéricos.

Para a realização da integração numérica ao longo do eixo longitudinal do elemento, os métodos mais utilizados são as quadraturas de Gauss e de Lobatto. No método das quadraturas, considera-se inicialmente uma função contínua  $f(x)$  definida em um intervalo  $[a, b]$ . Para calcular o valor aproximado da integral definida, utiliza-se uma combinação linear de valores da função  $f(x)$  em certos pontos  $x_i$  pertencentes ao intervalo  $[a, b]$  e certos valores  $w_i$ , chamados pesos, de modo que a integral é calculada somando-se os produtos dos pesos de cada ponto pelos valores respectivos da função nos mesmos pontos (ASSAN, 2003):

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n) \quad (82)$$

No caso da quadratura de Gauss, os pontos  $x_i$  e os pesos  $w_i$  são determinados de modo que a integração numérica seja exata para uma função polinomial de grau  $2n-1$ , onde  $n$  é o número de pontos de Gauss no intervalo  $[-1, 1]$ .

No caso da quadratura de Lobatto, os pontos  $x_i$  e os pesos  $w_i$  são determinados de modo que a integração numérica seja exata para uma função polinomial de grau  $2n-3$ , onde  $n$  é o número de pontos de Lobatto no intervalo  $[-1, 1]$ .

Na quadratura de Gauss, os pontos são distribuídos de forma simétrica em relação ao centro do intervalo de integração e os pares simétricos possuem o mesmo peso. A quadratura de Gauss não inclui os valores da função nos limites do intervalo de integração, mas a quadratura de Lobatto considera os pontos extremos e o ponto médio.

O intervalo de integração corresponde a uma parametrização da variável  $x$  para  $t$ , que varia no intervalo  $[-1, 1]$ . A integral é, então, transformada da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = J \int_{-1}^1 g(t)dt \quad (83)$$

onde  $J$  é chamado de Jacobiano da transformação. A obtenção desse Jacobiano vem da transformação de variáveis:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \\ dx &= \frac{b-a}{2}dt \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t)dt \\ J &= \frac{b-a}{2} \end{aligned} \quad (84)$$

A integração numérica a partir das quadraturas passa a ser, então, obtida por:

$$\int_a^b f(x)dx = J \int_{-1}^1 g(t)dt = J \sum_{i=1}^n w_i g(t_i) = J \sum_{i=1}^n w_i g_i \quad (85)$$

onde  $n$  é o número de pontos de integração,  $i$  é o número do ponto de integração,  $t_i$  é a coordenada do ponto de integração  $i$  e  $w_i$  é o peso associado ao ponto  $i$ .

De acordo com o tipo de quadratura empregada, há tabelas específicas que associam o número de pontos de integração com o número dos pontos, sua coordenada e seu peso, como pode está exemplificado nas tabelas abaixo.

Tabela 1 – Pesos da quadratura de Gauss

$n$	$i$	$t_i$	$w_i$
1	1	0	2
2	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	1	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
	2	0	$\frac{8}{9}$
	3	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	1	$\sqrt{\frac{\left(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}}$	$\frac{(18 - \sqrt{30})}{36}$
	2	$\sqrt{\frac{\left(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}}$	$\frac{(18 + \sqrt{30})}{36}$
	3	$-\sqrt{\frac{\left(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}}$	$\frac{(18 + \sqrt{30})}{36}$
	4	$-\sqrt{\frac{\left(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}}$	$\frac{(18 - \sqrt{30})}{36}$

continua

$n$	$i$	$t_i$	$w_i$
	1	$\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{(322 - 13\sqrt{70})}{900}$
	2	$\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{(322 + 13\sqrt{70})}{900}$
5	3	0	$\frac{128}{225}$
	4	$-\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{(322 + 13\sqrt{70})}{900}$
	5	$-\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{(322 - 13\sqrt{70})}{900}$

Fonte: Wikipedia (Gaussian ..., 2012).

Tabela 2 – Pesos da quadratura de Lobatto

$n$	$i$	$t_i$	$w_i$
	1	-1	$\frac{1}{3}$
3	2	0	$\frac{4}{3}$
	3	1	$\frac{1}{3}$
	1	1	$\frac{1}{3}$
	2	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{6}$
4	3	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{6}$
	4	-1	$\frac{1}{3}$

continua

$n$	$i$	$t_i$	$w_i$
	1	1	$\frac{1}{10}$
	2	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{49}{90}$
5	3	0	$\frac{32}{45}$
	4	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{49}{90}$
	5	-1	$\frac{1}{10}$

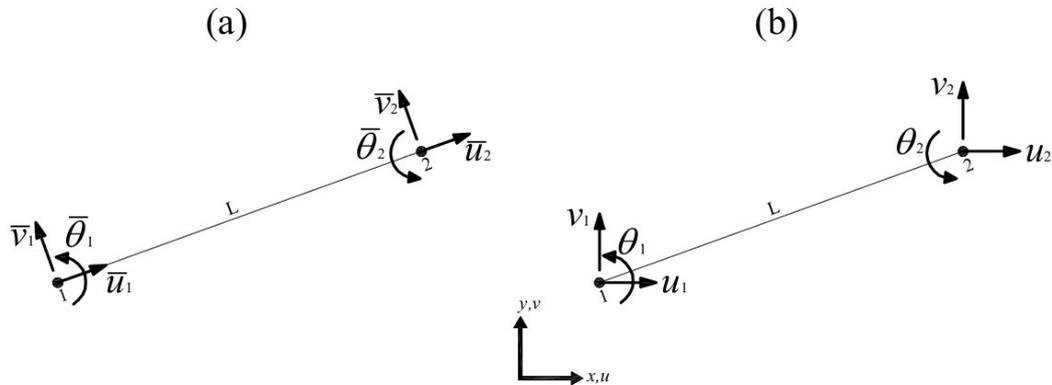
Fonte: Wikipedia (Gaussian ..., 2012).

Deve-se observar que se a função a ser integrada não for um polinômio, não se obterá uma integração exata, mas será tão mais precisa quanto maior for o número de pontos de integração usado.

#### 4.2.6 Transformação para o sistema global

Nos desenvolvimentos anteriores, foram obtidos o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente no sistema local, onde os graus de liberdade são paralelos aos eixos do elemento. No entanto, em uma estrutura real, os elementos apresentam diferentes inclinações, isto é, cada elemento possui um sistema local próprio (PARENTE JUNIOR, 2012). Para a definição única dos deslocamentos da estrutura (graus de liberdade) e para a obtenção das equações de equilíbrio é necessário a definição de um sistema de coordenadas comum a todos os elementos, conhecido como sistema de coordenadas global. A figura abaixo ilustra a diferença entre os dois sistemas de coordenadas:

Figura 26 – Graus de liberdade do elemento de pórtico plano no sistema de coordenadas local (a) e global (b)



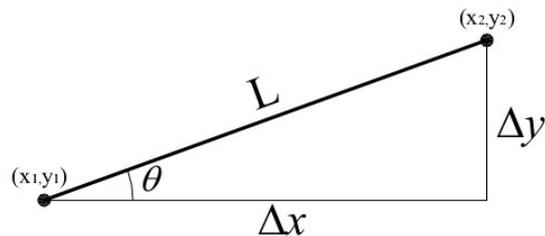
Fonte: Próprio autor.

Os deslocamentos podem ser transformados do sistema local para o global, bastando conhecer as coordenadas do nó inicial e final do elemento, pois, assim, pode-se obter o cosseno e o seno do ângulo de inclinação do elemento em relação ao sistema global conforme a Figura 27:

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= x_2 - x_1 \\
 \Delta y &= y_2 - y_1 \\
 L &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\
 c &= \Delta x/L \\
 s &= \Delta y/L
 \end{aligned} \tag{86}$$

onde  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são as coordenadas do nó inicial e final do elemento, respectivamente,  $c = \cos \theta$  e  $s = \sin \theta$ .

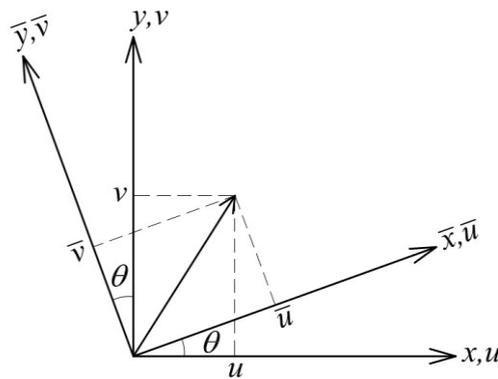
Figura 27 – Ângulo de inclinação do elemento em relação ao sistema de coordenadas global



Fonte: Próprio autor.

Com essa informação, a transformação dos deslocamentos axial e transversal no sistema local pode ser feita para o sistema global. A rotação é indiferente em relação aos sistemas. Da Figura 28, temos:

Figura 28 – Sistema de eixos local e global



Fonte: Próprio autor.

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}c - \bar{v}s \\ v &= \bar{u}s + \bar{v}c \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (87)$$

onde  $c = \cos \theta$  e  $s = \sin \theta$ .

Considerando os três deslocamentos dos dois nós do elemento, obtemos a matriz de transformação global-local para os elementos de pórtico plano:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (88)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}$  é o vetor de deslocamentos nodais no sistema local,  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais no sistema global e  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação global-local.

As forças internas nodais podem ser transformadas utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, pois o trabalho é um escalar e, portanto, é indiferente aos sistemas.

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{g}} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (89)$$

A matriz de rigidez relaciona os deslocamentos com forças internas em um dado sistema, dessa forma, temos:

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (90)$$

Portanto, a matriz de rigidez no sistema global pode ser obtida a partir da transformação da matriz de rigidez no sistema local.

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \quad (91)$$

## 5 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NA SEÇÃO TRANSVERSAL

Em cada elemento finito de pórtico plano é realizada a integração longitudinal através de um dos métodos de integração numérica discutidos anteriormente, que são as quadraturas de Gauss e de Lobatto. Viu-se que esses métodos transformam a integral em um somatório dos produtos de um peso pelo valor da função a ser integrada em determinados pontos do domínio.

Em cada um desses pontos, é necessária a realização de integrações na seção transversal do elemento. Essas integrais envolvem as expressões dos esforços resistentes da seção (Equações (32) e (33)) e da matriz constitutiva tangente (Equação (79)). Há diversos métodos para o cálculo dessas integrais de área, alguns analíticos e outros numéricos. Esses métodos são discutidos neste capítulo.

O problema da realização de integrações em seções transversais arbitrárias tem recebido atenção na literatura desde a década de 1970. Ao longo dos anos, várias metodologias analíticas, numéricas ou mistas têm sido sugeridas para a análise de seções de variada complexidade em termos de geometria e material de composição. Os diversos métodos se diferenciam com relação à eficiência, precisão, simplicidade e generalidade.

Segundo Papanikolaou (2012), cinco características principais nas metodologias de análise de seções podem ser identificadas:

- a) tipo de seção: se a seção é de concreto armado ou mista (aço e concreto armado);
- b) lei constitutiva do material: se é composta por funções polinomiais ou por funções arbitrárias;
- c) subdivisão da seção: se é imposta ou não para a integração das tensões;
- d) método de integração das tensões;
- e) estratégia de solução das equações de equilíbrio de forças.

Além dessas cinco características, pode-se acrescentar mais uma relativa à finalidade das metodologias propostas para análise de seções. As metodologias podem ser destinadas à obtenção dos esforços resistentes da seção ou ao cálculo da matriz constitutiva tangente.

Tabela 3 – Características das metodologias de análise de seções

Autores	Tipo de seção	Lei constitutiva do material	Subdivisão da seção	Integração das tensões	Estratégia de solução	Finalidade da metodologia
Penelis (1969), De Vivo e Rosati (1998), Alfano <i>et al</i> (2007)	concreto armado	parábola – linear	um polígono por parte de $\sigma(\varepsilon)$	analítica por polígono	Newton-Raphson	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes
Werner (1974)	concreto armado	parábola – linear	um polígono por parte de $\sigma(\varepsilon)$	analítica por polígono	iterações aninhadas	-
Brondum–Nielsen (1985), Dundar e Sahin (1993), Yen (1991)	concreto armado	constante (retangular)	não subdivide	analítica	método de Newton	esforços resistentes
Yau <i>et al.</i> (1993)	concreto armado	constante (retangular)	não subdivide	analítica	sem derivada (regula-falsi)	esforços resistentes
Rodriguez e Ochoa (1999)	concreto armado	parábola-linear com amolecimento	trapézios	analítica por trapézio	Newton-Raphson	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes
Chen <i>et al.</i> (2001)	composta	parábola - linear	não subdivide	analítica	sem derivada (Regula-Falsi)	esforços resistentes
Fafitis (2001)	concreto armado	parábola – linear	não subdivide	Green/Gauss	-	esforços resistentes
Sfakianakis (2002)	composta	parábola-linear com amolecimento	não subdivide	método das fibras	pesquisa incremental	esforços resistentes
Bonet <i>et al.</i> (2004)	concreto armado	funções parciais não polinomiais (arbitrárias)	um polígono (fatia espessa) por parte de $\sigma(\varepsilon)$	2D Gauss ou Green/Gauss por polígono	-	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes
Sousa e Muniz (2007)	composta	funções parciais polinomiais de até terceiro grau	um polígono por parte de $\sigma(\varepsilon)$	analítica por polígono	-	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes
Charalampakis e Koumoussis (2008)	composta	funções parciais polinomiais de até terceiro grau	trapézios curvilíneos	analítica por trapézio	sem derivada (Brent)	esforços resistentes
Rosati <i>et al.</i> (2008)	composta	parábola - linear	um polígono por parte de $\sigma(\varepsilon)$	analítica por polígono	procedimento iterativo	matriz de rigidez secante e esforços resistentes
Pallarés <i>et al.</i> (2009)	concreto armado	não polinomial -linear (EC2)	não subdivide	analítica	Newton-Raphson	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes

continua

Autores	Tipo de seção	Lei constitutiva do material	Subdivisão da seção	Integração das tensões	Estratégia de solução	Finalidade da metodologia
Chiorean (2010)	composta	parábola-linear com amolecimento	não subdivide	Green/Gauss-Lobatto com bisseção adaptativa	comprimento de arco	esforços resistentes
Papanikolaou (2012)	composta	funções parciais não polinomiais (arbitrárias)	não subdivide	Green/Gauss com adaptação ao mapeamento de deformação	sem derivada (Brent)	esforços resistentes

Fonte: Papanikolaou (2012).

Uma revisão crítica das metodologias encontradas na literatura (listadas na Tabela 3) leva às seguintes observações (PAPANIKOLAOU, 2012):

- um significativo número de algoritmos sugeridos são limitados às seções de concreto armado de forma simples e com barras de aço individuais. Esses métodos não apresentam, portanto, grande generalidade, mas possuem boa precisão e eficiência;
- muitos estudos impõem restrição à lei constitutiva do material, geralmente utilizando as leis constitutivas especificadas pelos códigos normativos ou funções polinomiais parciais. É o que ocorre com os métodos analíticos, que, em contrapartida, são altamente precisos e eficientes;
- com relação aos métodos de integração das tensões podem ser identificados três métodos principais:
  - Método das Fibras: é um método aproximado, lento e requer um aumento da densidade da malha de fibras para se conseguir uma precisão aceitável. No entanto, esse é o método mais adequado quando se trabalha com carregamentos cíclicos ou com materiais cujo comportamento depende da história do carregamento, como os materiais elastoplásticos (PARENTE JUNIOR, 2012). Este método apresenta como principal vantagem a alta generalidade, permitindo analisar seções com qualquer geometria e Lei Constitutiva para os materiais. A seção pode ser de concreto armado ou mista;
  - integração analítica: é um método que produz resultados exatos e rápidos, mas é restrita à geometria da seção e a uma relação tensão-deformação

específica. Este, portanto, é um método altamente eficiente e preciso, mas é de baixa generalidade;

- integração numérica usando quadraturas de Gauss nas integrais de contorno com o emprego do Teorema de Green: é um caminho para produzir uma solução geral para leis constitutivas arbitrárias. Porém, em certos casos, a solução numérica pode ter um custo computacional maior que os métodos analíticos e o emprego de uma integração numérica de baixa ordem pode produzir erros inaceitáveis;
- muitos métodos de integração das tensões requerem, para ter eficiência, uma subdivisão prévia da seção, o que naturalmente leva a uma redução da velocidade de execução e a uma maior complexidade na implementação;
- a maioria das estratégias de solução encontradas na literatura se baseiam no Método de Newton-Raphson, que requer o cálculo prévio de derivadas (rigidez). Essa é uma desvantagem apenas quando se trata da obtenção dos esforços internos, pois há um custo computacional adicional para o cálculo das derivadas, além das questões inerentes a não convergência;
- em geral os métodos são desenvolvidos para o cálculo dos esforços resistentes da seção. Somente os trabalhos voltados para a análise não linear de estruturas aplicam os métodos também para cálculo da matriz de rigidez tangente.

## 5.1 Integração analítica

### 5.1.1 Integração direta

Conhecida a curva tensão-deformação do concreto, é possível calcular os esforços internos de maneira analítica realizando as integrais definidas pelas Equações (32) e (33), desde que a geometria da seção seja simples, como no caso da seção retangular ou de seções trapezoidais.

Conforme realizado por Melo (2000) em uma seção retangular, para o cálculo da parcela de contribuição do concreto, é necessário dividir a seção transversal em sub-regiões cujas coordenadas limites dependem das deformações que definem os trechos da curva  $\sigma(\varepsilon)$ . A coordenada correspondente à deformação limite de uma sub-região é obtida a partir da Equação (29):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_m - y\kappa \Rightarrow y = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_x}{\kappa} \quad (92)$$

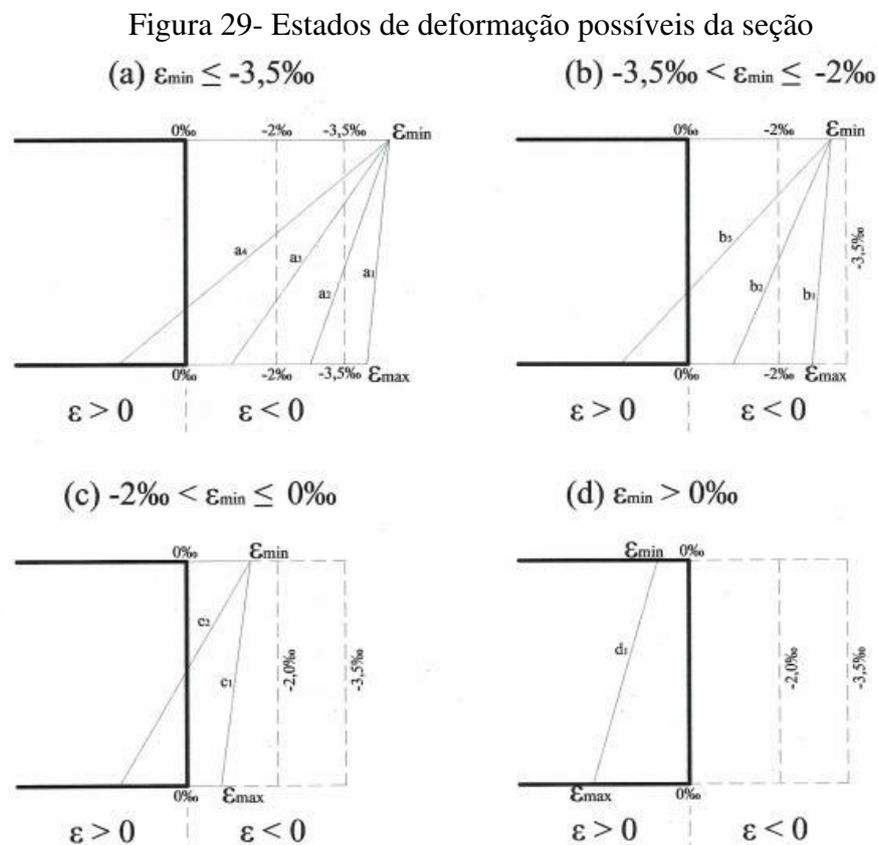
Nessa equação, se caso  $\kappa$  for nulo, não há necessidade da realização das integrais, pois a seção de concreto estará sujeita à compressão simples e os esforços internos serão simplesmente dados por  $N = \sigma(\varepsilon_m)A$  e  $M = 0$ .

Para a situação de flexo-compressão reta, o primeiro passo para o cálculo dos esforços internos atuantes na seção retangular é o cálculo das deformações limites da seção. Considerando as deformações de compressão com sinal negativo e as deformações de tração com sinal positivo, as deformações limites para uma curvatura positiva são dadas por:

$$\varepsilon_{\min} = \varepsilon_m - \frac{h}{2}\kappa$$

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_m + \frac{h}{2}\kappa \quad (93)$$

Em função dos valores obtidos para  $\varepsilon_{\min}$  e  $\varepsilon_{\max}$ , a seção transversal poderá está sujeita a qualquer um dos estados de deformação apresentados na Figura 29.



Fonte: Próprio autor.

Tabela 4 – Limites de integração dos estados de deformação

Limite de deformação	Estado de deformação	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_b$	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_d$
$\varepsilon_{\min} \leq -3,5\%$	$a_1$	-	-	-	-
	$a_2$	-	-	-0,0035	$\varepsilon_{\max}$
	$a_3$	-0,002	$\varepsilon_{\max}$	-0,0035	-0,002
	$a_4$	-0,002	0	-0,0035	-0,002
$-3,5\% < \varepsilon_{\min} \leq -2\%$	$b_1$	-	-	$\varepsilon_{\min}$	$\varepsilon_{\max}$
	$b_2$	-0,002	$\varepsilon_{\max}$	$\varepsilon_{\min}$	-0,002
	$b_3$	-0,002	0	$\varepsilon_{\min}$	-0,002
$-2\% < \varepsilon_{\min} \leq 0\%$	$c_1$	$\varepsilon_{\min}$	$\varepsilon_{\max}$	-	-
	$c_2$	$\varepsilon_{\min}$	0	-	-
$\varepsilon_{\min} > 0\%$	$d_1$	-	-	-	-

Fonte: Próprio autor.

A identificação do estado de deformação da seção é necessária para o cálculo correto das integrais dos esforços internos. De acordo com a curva tensão-deformação da NBR 6118:2003, as expressões analíticas das integrais desenvolvidas neste item são específicas para a região parabólica e para a região retangular da curva, desprezando-se a parcela de resistência à tração do concreto. Assim, identificado o estado de deformação da seção em um dos casos mostrados na Figura 29, a parcela dos esforços internos atuantes sobre o concreto pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} N &= N_{par} + N_{ret} \\ M &= M_{par} + M_{ret} \end{aligned} \quad (94)$$

Nessa expressão, as parcelas  $N_{par}$  e  $M_{par}$  correspondem à contribuição de força normal e momento fletor, respectivamente, devidas ao trecho parabólico da curva tensão-deformação e as parcelas  $N_{ret}$  e  $M_{ret}$  correspondem à contribuição de força normal e momento fletor, respectivamente, devidas ao trecho retangular da curva tensão-deformação. Cada uma dessas parcelas é calculada por integração analítica direta e são dadas por:

$$\begin{aligned} N_{par} &= -\frac{850f_{cd}b}{\kappa} \left[ \frac{250}{3} (\varepsilon_a^3 - \varepsilon_b^3) + \frac{1}{2} (\varepsilon_a^2 - \varepsilon_b^2) \right] \\ M_{par} &= -\frac{850f_{cd}b}{\kappa^2} \left[ \frac{250}{4} (\varepsilon_a^4 - \varepsilon_b^4) + \frac{(1 - 250\varepsilon_m)}{3} (\varepsilon_a^3 - \varepsilon_b^3) - \frac{\varepsilon_m}{2} (\varepsilon_a^2 - \varepsilon_b^2) \right] \end{aligned} \quad (95)$$

que corresponde a contribuição do trecho parabólico da distribuição de tensões na seção transversal para  $-0,002 \leq \varepsilon_a, \varepsilon_b \leq 0$ , e:

$$\begin{aligned}
 N_{ret} &= \frac{0,85 f_{cd} b}{\kappa} (\varepsilon_c - \varepsilon_d) \\
 M_{ret} &= \frac{0,85 f_{cd} b}{2\kappa^2} (\varepsilon_c^2 - \varepsilon_d^2) - \frac{0,85 f_{cd} b \varepsilon_m}{\kappa^2} (\varepsilon_c - \varepsilon_d)
 \end{aligned}
 \tag{96}$$

corresponde a contribuição do trecho retangular da distribuição de tensões na seção transversal para  $-0,0035 \leq \varepsilon_c, \varepsilon_d < -0,002$ . Nessas equações,  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$ ,  $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_d$  são os limites de integração definidos na Tabela 4 de acordo com os estados de deformação possíveis,  $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$  é a resistência à compressão de projeto do concreto,  $b$  é a base do retângulo,  $\kappa$  é a curvatura e  $\varepsilon_m$  é deformação de membrana.

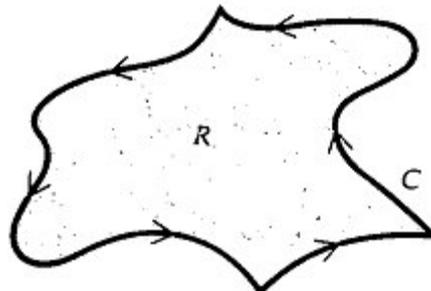
### 5.1.2 Emprego do teorema de Green

O teorema de Green expressa uma integral dupla sobre uma região  $R$  em termos de uma integral de linha ao longo da fronteira de  $R$ . Segundo Leithold (1994), dadas  $M$  e  $N$  funções de duas variáveis  $x$  e  $y$ , de tal modo que tenham derivadas parciais primeiras contínuas em um disco aberto  $B$  em  $\mathbb{R}^2$ , se  $C$  for uma curva fechada, simples, seccionalmente suave, contida inteiramente em  $B$ , e se  $R$  for a região limitada por  $C$ , então:

$$\oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA
 \tag{97}$$

O teorema de Green se refere a uma curva  $C$  fechada, simples, seccionalmente suave que forma a fronteira de uma região  $R$  no plano e o sentido ao longo de  $C$  é anti-horário, conforme ilustra a figura abaixo:

Figura 30- Curva  $C$  fechada, simples, seccionalmente suave

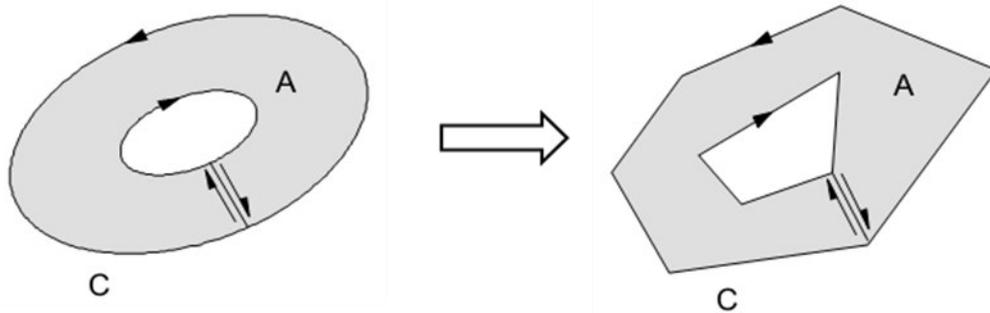


Fonte: Leithold (1994).

As integrais referentes aos esforços internos (Equações (32) e (33)) podem ser resolvidas após uma transformação das integrais de área em integrais de contorno através de uma aplicação do Teorema de Green conforme sugerido por Werner (1974) e realizado por diversos autores como Dumont e Musso Jr. (1987), Fafitis (2001), Bonet *et al* (2004), Sousa Jr. e Caldas (2005), Sousa Jr. e Muniz (2007) e Chiorean (2010). Essa técnica também pode ser utilizada para o cálculo das integrais referentes aos termos da matriz constitutiva tangente (Equação (79)).

Com o uso do teorema de Green, pode-se obter de forma analítica qualquer integral polinomial em domínio plano fechado, simples e seccionalmente suave. Para isso o contorno da seção é descrito através de segmentos de retas.

Figura 31- Discretização do contorno  $C$  em segmentos de retas



Fonte: Adaptado de Campos Filho (2000).

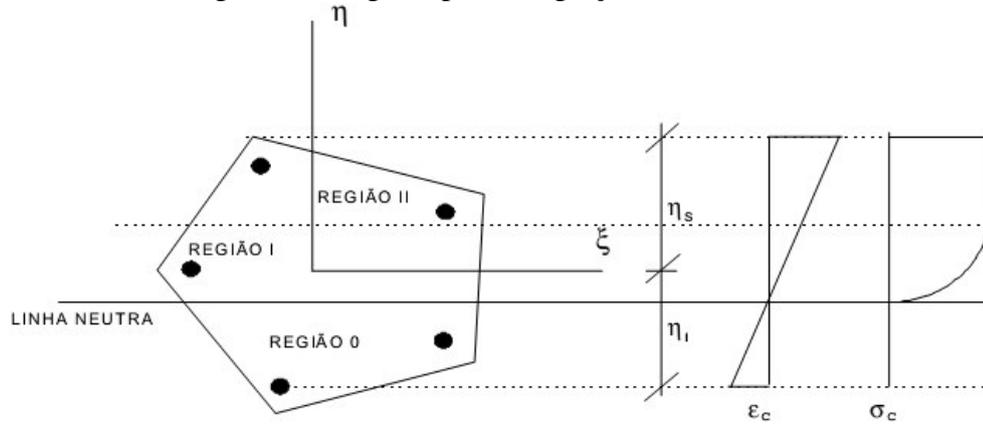
A expressão do teorema de Green fica, então, da seguinte forma:

$$\iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \sum_{i=1}^n \left( \oint_{P_i \rightarrow P_{i+1}} M(x, y) dx + N(x, y) dy \right) \quad (98)$$

onde  $n$  representa o número de segmentos que discretiza o contorno  $C$ ,  $P_i$  e  $P_{i+1}$  são os vértices de cada segmento de reta.

Para que a integração seja realizada, é necessário que a discretização do contorno da seção seja feita em cada região dentro de um intervalo de deformação correspondente aos trechos parabólico e retangular da curva tensão-deformação do concreto da NBR 6118:2003, conforme ilustra a Figura 32.

Figura 32- Regiões para integração do concreto



Fonte: Campos Filho (2000).

Após a identificação e discretização das regiões de integração na seção, as integrais de superfície referentes aos esforços internos e aos termos da matriz constitutiva tangente podem ser calculadas. Os integrandos desses termos são funções polinomiais de no máximo terceiro grau, pois a lei constitutiva do concreto é representada por funções polinomiais parciais parabólicas ou lineares. Assim, podem-se manipular as funções  $M(x,y)$  e  $N(x,y)$ , que representam os integrandos, de forma a escrevê-las em função de termos do tipo:

$$\iint_A x^a y^b dA \quad (99)$$

com  $a$  e  $b$  números inteiros. Nessa equação,  $x$  e  $y$  são as coordenadas de um ponto da seção em relação a um sistema de eixos localizado no centróide da seção e com o eixo  $x$  paralelo à linha neutra.

Usando o teorema de Green, a integral de área da Equação (99) pode ser escrita em uma integral de contorno:

$$\iint_A x^a y^b dA = \oint_C \frac{x^{a+1} y^b}{a+1} dy \quad (100)$$

Como o contorno é representado por uma poligonal fechada, a integral (100) pode ser substituída por um somatório:

$$\iint_A x^a y^b dA = \oint_C \frac{x^{a+1} y^b}{a+1} dy = \sum_{i=1}^n I_{ab} \quad (101)$$

com

$$I_{ab} = \frac{1}{a+1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} x^{a+1} y^b dy \quad (102)$$

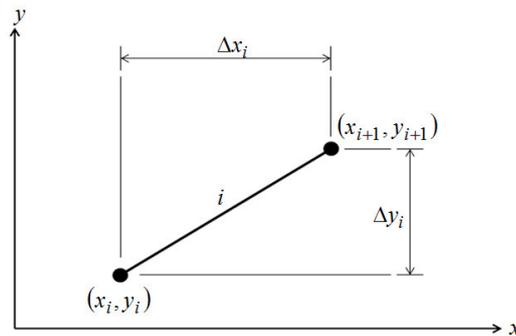
sendo  $n$  o número de segmentos da poligonal,  $y_i$  e  $y_{i+1}$  as ordenadas do  $i$ -ésimo segmento.

Fazendo a parametrização de um segmento genérico da poligonal, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} x &= x_i + \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} t \\ y &= y_i + t \end{aligned} \quad (103)$$

com  $0 \leq t \leq \Delta y_i$ .

Figura 33- Parametrização do segmento da poligonal



Fonte: Próprio autor.

Substituindo a parametrização das coordenadas do segmento na Equação (102), obtemos:

$$I_{ab} = \frac{1}{a+1} \int_0^{\Delta y_i} \left( x_i + \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} t \right)^{a+1} (y_i + t)^b dt \quad (104)$$

Como a lei constitutiva do concreto adotada é o diagrama parábola-retângulo da NBR 6118:2003 e com a hipótese das seções planas, as integrais de área a serem calculadas serão realizadas em integrandos polinomiais de no máximo terceiro grau. Além disso, para pórticos planos com seção retangular, só há esforços de flexão composta reta em que a linha neutra é sempre paralela ao eixo  $x$ . Dessa forma, os termos  $I_{ab}$  que necessitam ser calculados são do tipo  $I_{00}$ ,  $I_{01}$ ,  $I_{02}$  e  $I_{03}$ . Segundo Campos Filho (2000), substituindo os valores correspondentes de  $a$  e  $b$  em (104), esses termos resultam em:

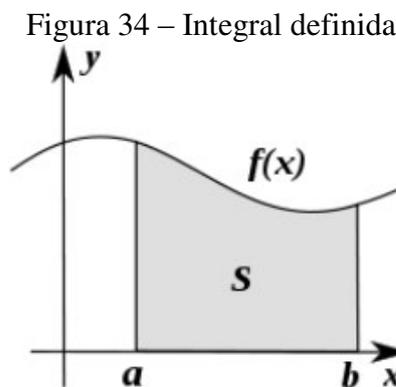
$$\begin{aligned}
I_{00} &= \left( x_i + \frac{\Delta x_i}{2} \right) \Delta y_i \\
I_{01} &= \left[ x_i \left( y_i + \frac{\Delta y_i}{2} \right) + \Delta x_i \left( \frac{y_i}{2} + \frac{\Delta y_i}{3} \right) \right] \Delta y_i \\
I_{02} &= \left\{ x_i \left[ y_i (y_i + \Delta y_i) + \frac{\Delta y_i^2}{3} \right] + \Delta x_i \left[ y_i \left( \frac{y_i}{2} + \frac{2\Delta y_i}{3} \right) + \frac{\Delta y_i^2}{4} \right] \right\} \Delta y_i \\
I_{03} &= \left\{ x_i \left[ y_i \left( \Delta y_i^2 + y_i \left( \frac{3\Delta y_i}{2} + y_i \right) \right) + \frac{\Delta y_i^3}{4} \right] + \Delta x_i \left[ y_i \left( \frac{3\Delta y_i^2}{4} + y_i \left( \Delta y_i + \frac{y_i}{2} \right) \right) + \frac{\Delta y_i^3}{5} \right] \right\} \Delta y_i
\end{aligned} \tag{105}$$

## 5.2 Integração numérica

Em análise numérica, a integração numérica constitui uma ampla família de algoritmos empregados com intuito de calcular o valor numérico de uma integral definida. O termo quadratura numérica também é empregado no lugar de integração numérica, principalmente quando aplicado em integrações unidimensionais.

O problema básico a ser resolvido pela integração numérica é calcular uma solução aproximada para uma integral definida, ou seja, encontrar um valor aproximado para o valor de  $S$  (Figura 34).

$$S = \int_a^b f(x) dx \tag{106}$$



Fonte: Wikipedia (Numerical ..., 2012).

Os diversos métodos de integração numérica são aplicados sobre curvas suaves e sobre limites de integração bem definidos. Existem diversas razões para a realização da integração numérica. O integrando  $f(x)$  pode ser conhecido somente em certos pontos do

domínio, como os dados obtidos experimentalmente ou por amostragem. O integrando pode ser conhecido, mas pode ser difícil ou impossível a obtenção da antiderivada, que é uma função elementar. Pode ocorrer, também, de ser possível encontrar uma antiderivada, mas, às vezes, é mais fácil calcular uma aproximação numérica do que o cálculo da antiderivada.

Os métodos de integração numérica podem geralmente ser descritos com uma combinação de avaliações do integrando em um número finito de pontos, chamados pontos de integração, e uma soma ponderada desses valores é usada para aproximar a integral. Os pontos de integração e os pesos dependem do método específico utilizado e da precisão requerida para a aproximação.

Uma parte importante na análise de qualquer método de integração numérica é o estudo do erro de aproximação como uma função do número de pontos de integração. A redução do número de pontos de integração reduz o número de operações aritméticas envolvidas e, portanto, reduz os erros de arredondamentos. Além disso, deve-se levar em conta também que, em cada avaliação do integrando, um determinado tempo é gasto. Dessa forma, os métodos que produzem erros pequenos para um pequeno número de pontos de integração são considerados superiores.

Uma grande quantidade de quadraturas é derivada do emprego de funções de interpolação de fácil integração. Geralmente essas funções de interpolação são polinomiais. A interpolação com polinômios avaliados em pontos igualmente espaçados em  $[a, b]$  produz as fórmulas de Newton-Cotes, da qual pertencem a regra do retângulo, a regra do trapézio e a regra de Simpson. Quando se permite a variação entre os intervalos dos pontos de integração, surge outro grupo de quadraturas, tal como as quadraturas de Gauss. As quadraturas de Gauss são tipicamente mais precisas do que as fórmulas de Newton-Cotes quando se emprega uma mesma quantidade de pontos de integração e quando o integrando é uma função suave (se a função é suficientemente diferenciável) (WIKIPEDIA, 2012).

Em qualquer um dos métodos de integração numérica, pode-se obter uma maior precisão na aproximação através da subdivisão do intervalo de integração  $[a, b]$  em  $N$  subintervalos, calculando uma aproximação para cada subintervalo e realizando um somatório dos resultados de cada subintervalo cujo resultado é o resultado total. Esta técnica é chamada de regra composta, estendida ou iterativa.

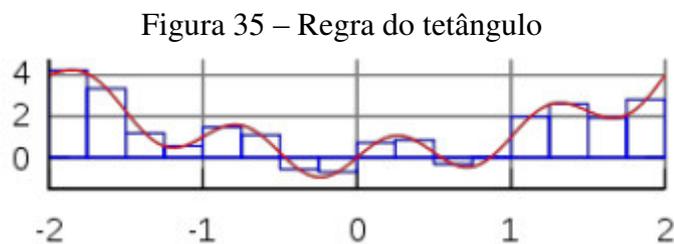
### 5.2.1 Regra do retângulo, regra do trapézio e regra de Simpson

Um dos métodos mais simples é o que utiliza como função de interpolação uma função constante (polinômio de grau zero) que passa pelo ponto médio do intervalo de integração  $((a+b)/2, f((a+b)/2))$ . Este método é chamado de regra do ponto médio ou regra do retângulo.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (107)$$

Na integração numérica através da regra do retângulo, se a função  $f$  for contínua no intervalo fechado  $[a,b]$  e os números  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  formarem uma partição regular de  $[a,b]$ , então:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{n} \left[ f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \right] \quad (108)$$

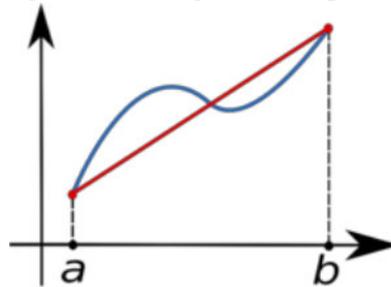


Fonte: Wikipedia (Numerical ..., 2012).

Quando a função de interpolação é uma função afim (polinômio de primeiro grau) que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , a quadratura é chamada de regra dos trapézios. A integração numérica através da regra dos trapézios faz uma aproximação da região sob o gráfico da função  $f(x)$  com um trapézio e calcula sua área, como está representado pela equação abaixo e pela Figura 36:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (109)$$

Figura 36 – Regra dos trapézios

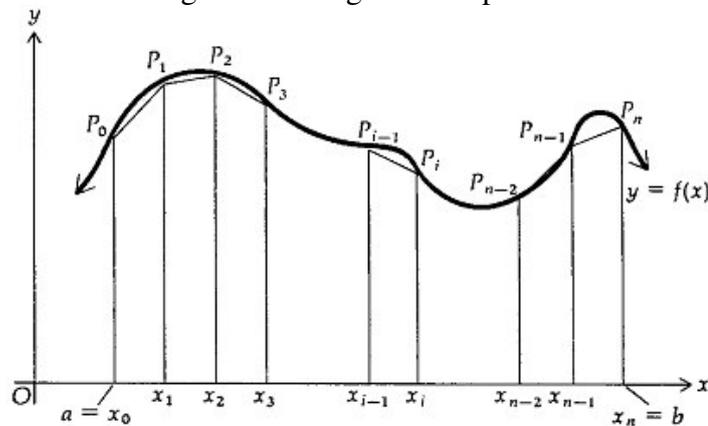


Fonte: Wikipedia (Trapezoidal ..., 2012).

Segundo Leithold (1994), a regra do trapézio pode ser enunciada formalmente através do seguinte teorema: se a função  $f$  for contínua no intervalo fechado  $[a,b]$  e os números  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  formarem uma partição regular de  $[a,b]$ , então

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (110)$$

Figura 37 – Regra dos trapézios



Fonte: Leithold (1994).

Para considerar a precisão da aproximação da integral definida, devem ser considerados dois tipos de erros. Um deles é o erro de truncamento que surge quando o gráfico da função é aproximado por uma função polinomial qualquer. O outro erro é chamado de erro de arredondamento e é inevitável porque números reais são representados por números com finitas casas decimais.

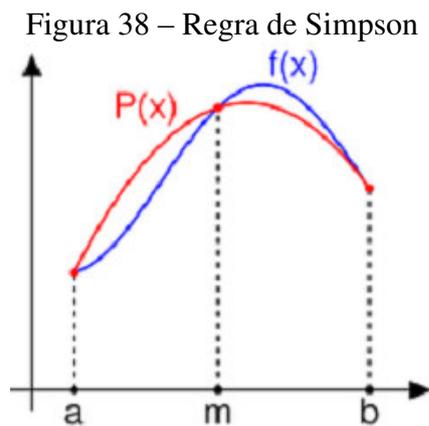
O teorema seguinte, provado em análise numérica, fornece um método para estimar o erro de truncamento cometido quando se emprega a regra do trapézio (LEITHOLD, 1994): seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a,b]$  e  $f^i$  e  $f^{ii}$

existem em  $[a, b]$ . Se  $\varepsilon_T = \int_a^b f(x)dx - T$ , onde  $T$  é o valor aproximado pela regra do trapézio, então, existe algum número  $\eta$  em  $[a, b]$  tal que:

$$\varepsilon_T = -\frac{1}{12}(b-a)f''(\eta)(\Delta x)^2 \quad (111)$$

Assim, a regra do trapézio integra exatamente funções polinomiais de primeiro grau, pois a derivada segunda de uma função linear é nula.

Outro método empregado para aproximar o valor de uma integral definida é regra de Simpson. Na regra de Simpson, os pontos sucessivos no gráfico de  $f(x)$  são conectados por segmentos de parábola.

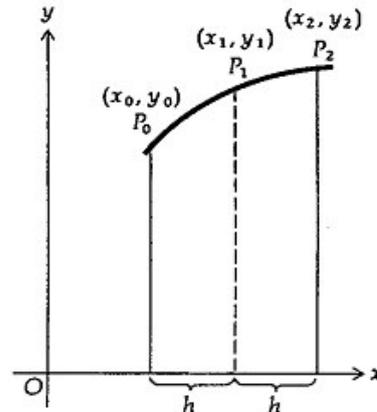


Fonte: Wikipedia (Simpson's ..., 2012).

Se  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  forem três pontos não colineares sobre uma parábola com  $y_0$ ,  $y_1$  e  $y_2$  positivos,  $x_1 = x_0 + h$  e  $x_2 = x_1 + h$ , então, a área delimitada pela parábola, pelo eixo  $x$  e pelas retas  $x = x_0$  e  $x = x_2$  será dada por:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (112)$$

Figura 39 – Área sob o trecho parabólico

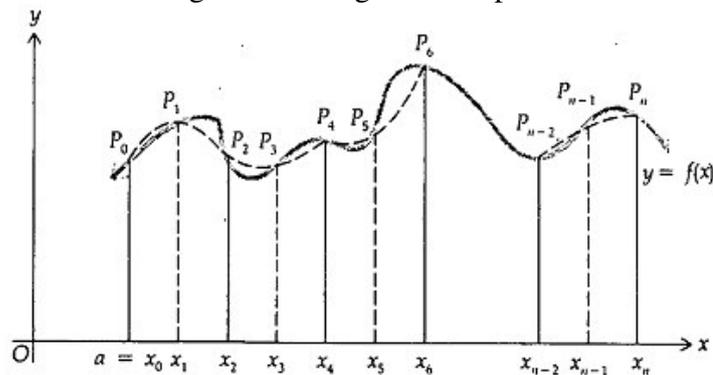


Fonte: Leithold (1994).

Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ . Considerando uma partição regular do intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos, onde  $n$  é par e com  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ . A regra de Simpson estabelece, então, que (LEITHOLD, 1994):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (113)$$

Figura 40 – Regra de Simpson



Fonte: Leithold (1994).

O teorema seguinte, provado em análise numérica, fornece um método para estimar o erro de truncamento cometido quando se emprega a regra de Simpson (LEITHOLD, 1994): seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e  $f^i, f^{ii}, f^{iii}, f^{iv}$  existentes em  $[a, b]$ . Se  $\varepsilon_s = \int_a^b f(x)dx - S$ , onde  $S$  é o valor aproximado pela regra de

Simpson, então, existe algum número  $\eta$  em  $[a, b]$  tal que:

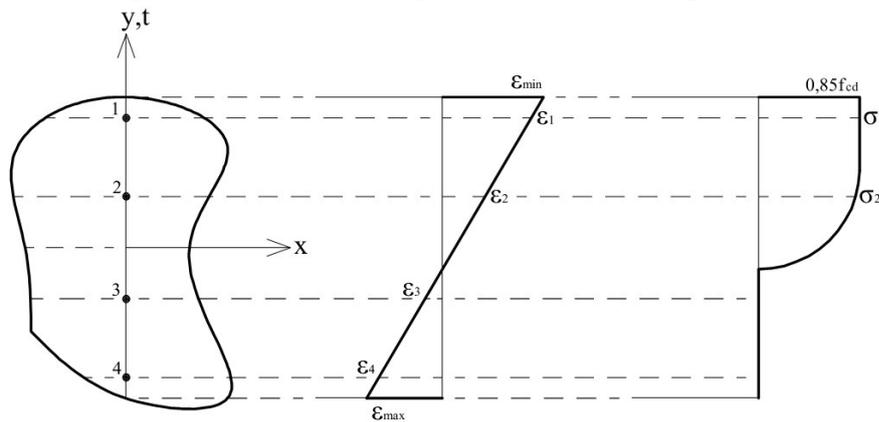
$$\varepsilon_s = -\frac{1}{180}(b-a)f^{iv}(\eta)(\Delta x)^4 \quad (114)$$

Assim, a regra de Simpson integra exatamente até funções polinomiais de terceiro grau, pois a derivada quarta de uma função cúbica é nula.

### 5.2.2 *Quadraturas de Gauss e de Lobatto*

Uma forma simples de obter as integrais do vetor de forças internas e da matriz constitutiva tangente é através da integração numérica com o emprego das quadraturas de Gauss (BATHE, 1996; COOK *et al.*, 2004) e de Lobatto (CRISFIELD, 1991).

Figura 41- Integração numérica na seção transversal com quadratura de Gauss



Fonte: Próprio autor.

Para a aplicação da quadratura de Gauss, é necessária a mudança da variável  $y$  para uma variável paramétrica  $t$  que varia no intervalo  $[-1, 1]$ :

$$y = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \Rightarrow dy = Jdt \quad (115)$$

onde  $J = (b-a)/2$  é o jacobiano da transformação de coordenadas. Fazendo a mudança de variável nas expressões dos esforços internos (Equações (32) e (33)), obtemos:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-1}^1 \sigma(\varepsilon(y(t))) b(y(t)) J dt \\ M &= - \int_{-1}^1 y(t) \sigma(\varepsilon(y(t))) b(y(t)) J dt \end{aligned} \quad (116)$$

As outras integrais na seção transversal que necessitam ser calculadas são as que fornecem os termos da matriz constitutiva tangente (Equação (79)). Aplicando a mudança de variável a essas integrais, temos:

$$\begin{aligned}
 EA &= \int_{-1}^1 E_t(\varepsilon(y(t)))b(y(t))Jdt \\
 ES &= -\int_{-1}^1 E_t(\varepsilon(y(t)))y(t)b(y(t))Jdt \\
 EI &= \int_{-1}^1 E_t(\varepsilon(y(t)))y^2(t)b(y(t))Jdt
 \end{aligned} \tag{117}$$

Após a mudança de variável, as integrais podem ser avaliadas através de um somatório do produto entre o valor do integrando, em pontos simétricos do domínio, e o peso correspondente a cada par de pontos simétricos:

$$\begin{aligned}
 N &= J \sum_{i=1}^n \sigma_i b_i w_i \\
 M &= -J \sum_{i=1}^n y_i \sigma_i b_i w_i \\
 EA &= J \sum_{i=1}^n E_{t_i} b_i w_i \\
 ES &= -J \sum_{i=1}^n E_{t_i} y_i b_i w_i \\
 EI &= J \sum_{i=1}^n E_{t_i} y_i^2 b_i w_i
 \end{aligned} \tag{118}$$

onde  $\sigma_i$  é a tensão no ponto de integração,  $y_i$  é a coordenada cartesiana do ponto de integração,  $b_i$  é a largura da seção no ponto de integração,  $w_i$  é o peso correspondente ao ponto de integração,  $E_{t_i}$  é módulo de elasticidade tangente no ponto de integração e  $n$  é o número de pontos de integração.

Se a quadratura de Gauss for aplicada para o caso de uma seção retangular com o sistema de coordenadas localizado no centróide da seção bruta de concreto, a base  $b_i$  passa a ser um termo constante  $b$  e o Jacobiano se torna  $J = h/2$ . Assim, os termos da expressão (118) ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
N &= \frac{bh}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i w_i \\
M &= -\frac{bh}{2} \sum_{i=1}^n y_i \sigma_i w_i \\
EA &= \frac{bh}{2} \sum_{i=1}^n E_i w_i \\
ES &= -\frac{bh}{2} \sum_{i=1}^n E_i y_i w_i \\
EI &= \frac{bh}{2} \sum_{i=1}^n E_i y_i^2 w_i
\end{aligned} \tag{119}$$

A quadratura de Gauss possui uma elevada precisão numérica, pois  $n$  pontos integram exatamente um polinômio de grau  $p = 2n - 1$ . A quadratura de Lobatto possui uma precisão numérica inferior e, portanto, para a obtenção da mesma precisão da quadratura de Gauss é necessário mais pontos de integração, pois  $n$  pontos integram exatamente um polinômio de grau  $p = 2n - 3$ . Uma função polinomial de terceiro grau seria integrada exatamente por dois pontos de integração no caso da quadratura de Gauss ou por três pontos de integração no caso da quadratura de Lobatto. No entanto, o emprego da quadratura de Lobatto é mais eficiente para captar o início do processo de plastificação, pois há sempre pontos de integração nos extremos do intervalo ( $t = -1$  e  $t = 1$ ), onde as tensões são máximas para esforços de flexão.

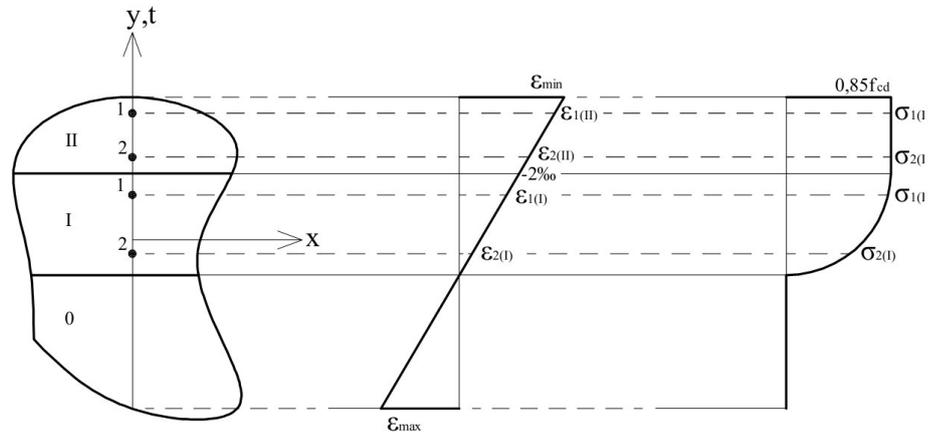
A integração numérica leva a excelentes resultados quando aplicada a seções com variações suaves de geometria e em materiais com uma curva tensão-deformação também suave. No caso de seções com variações bruscas, como seções I e T, e curvas tensão-deformação definidas por trechos, como a curva do concreto da NBR 6118:2003, os resultados obtidos não são tão bons, pois o integrando deixa de ter uma variação suave na seção.

Uma alternativa para melhorar os resultados obtidos com a integração numérica é realizá-la em sub-regiões com comportamento suave em termos de geometria e material. Por exemplo, em seções I, pode-se aplicar a integração numérica separadamente para as abas e para alma.

Além disso, ao longo da seção transversal, podem-se identificar os pontos que limitam os trechos da curva tensão-deformação do material. Por exemplo, identificando os trechos do intervalo de integração onde se desenvolve o trecho parabólico e reto da curva do

concreto da NBR 6118:2003 e, dessa forma, realizar a integração de forma exata em cada sub-região.

Figura 42- Integração numérica em sub-regiões



Fonte: Próprio autor.

Os termos da expressão (119) são obtidos a partir do somatório da contribuição de cada sub-região  $m$  :

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{j=1}^m N_j \\
 M &= \sum_{j=1}^m M_j \\
 EA &= \sum_{j=1}^m EA_j \\
 ES &= \sum_{j=1}^m ES_j \\
 EI &= \sum_{j=1}^m EI_j
 \end{aligned} \tag{120}$$

### 5.2.3 Método das Fatias

Quando se considera a não linearidade física, as propriedades mecânicas (ou rigidez da seção transversal) e o vetor de forças internas são obtidos através de integração numérica das tensões na seção transversal da barra como pode ser observado nas Equações (32), (33), (34), (78) e (79), que representam os elementos constituintes do vetor de forças internas  $\sigma$  e da matriz constituinte tangente  $C_t$ .

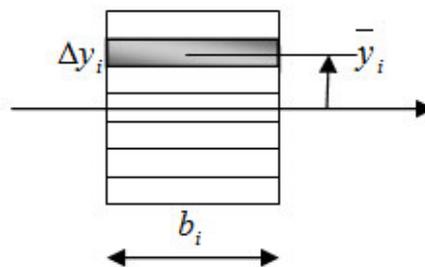
Conhecidas as deformações na seção transversal, as tensões atuantes podem ser determinadas a partir da lei constitutiva do material. De posse da distribuição de deformação e de tensão na seção transversal, as integrais da matriz constitutiva tangente e do vetor de forças internas podem ser calculadas. Para seções simples como a retangular, as integrais podem ser obtidas analiticamente, como realizado por Melo (2000).

Para geometrias mais complexas e para qualquer curva tensão-deformação, as integrais da seção transversal podem ser obtidas de forma aproximada através do Método das Fatias, como empregado por Assan (2003) e Bratina e Planinc (2004).

Nesse método, a seção é dividida em  $n$  fatias horizontais e em cada uma dessas fatias toma-se a deformação e a tensão constantes e iguais aos valores correspondentes ao ponto no centro da fatia. Pode-se observar que o Método das Fatias nada mais é do que uma aplicação da regra do retângulo em que o integrando  $f(x)$  é a tensão em função da posição ao longo da seção transversal, com o sistema de eixos no centróide da seção bruta de concreto. Cada fatia representa um subintervalo do domínio da função tensão e o valor da tensão no centro da fatia é o valor da função no centro do subintervalo. A Equação (121) ilustra a associação entre a regra do retângulo e o Método das Fatias:

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} &\Rightarrow \Delta y_i \\ \frac{x_{i-1} + x_i}{2} &\Rightarrow \bar{y}_i \\ f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) &\Rightarrow \sigma_i \end{aligned} \quad (121)$$

Figura 43 – Discretização de uma seção retangular em fatias



Fonte: Próprio autor.

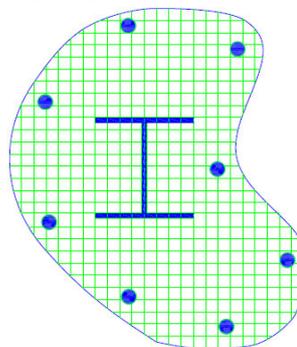
Com as deformações nos centros das fatias e com a lei constitutiva do concreto, obtêm-se as tensões. De posse das tensões no centro das fatias, as integrais na seção transversal podem ser obtidas de acordo com as expressões abaixo:

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^n \sigma_i b_i \Delta y_i \\
 M &= - \sum_{i=1}^n \sigma_i b_i \bar{y}_i \Delta y_i \\
 \overline{\overline{EA}} &= \sum_{i=1}^n E_i A_i \\
 \overline{\overline{ES}} &= - \sum_{i=1}^n E_i A_i \bar{y}_i \\
 \overline{\overline{EI}} &= \sum_{i=1}^n E_i (I_i + A_i \bar{y}_i^2)
 \end{aligned} \tag{122}$$

onde  $\bar{y}_i$  é a coordenada do centro da fatia,  $\Delta y_i$  é a altura da fatia e  $b_i$  é largura da fatia.

O Método das Fatias é simples e robusto, podendo ser aplicado em seções transversais de geometria complexa e relações tensão-deformação definidas por trechos e com variações não suaves (descontinuidades) entre os trechos. Obviamente, os esforços calculados não serão exatos, mas a precisão pode ser melhorada aumentando o número de fatias. Outra vantagem deste método é que ele pode ser facilmente adaptado para a flexão composta oblíqua, dividindo cada fatia em um conjunto de retângulos obtendo, assim, o chamado Método das Fibras. Este método foi utilizado nos trabalhos realizados por Spacone, Filippou e Taucer (1996), Sfakianakis (2002) e Fonseca (2006), como ilustrado na figura abaixo:

Figura 44 - Decomposição da seção transversal em fibras



Fonte: Fonseca (2006).

Por outro lado, a utilização do Método das Fatias quando a relação tensão-deformação é descrita por uma curva suave resulta em uma precisão inferior a dos métodos de integração

numérica discutidos anteriormente, quando a mesma discretização é utilizada. Esta menor precisão é decorrente das hipóteses de tensão constante e largura constante em cada fatia. Assim, normalmente este método requer uma discretização mais refinada a fim de obter uma boa precisão.

O Método das Fatias produz erros maiores porque utiliza como função de interpolação em cada fatia um polinômio de grau zero, que é a tensão constante. Assim, para obter uma maior precisão nos resultados das integrais é necessário aumentar o número de fatias, que leva a um aumento do custo computacional.

Uma forma de melhorar a precisão dos resultados obtidos sem a necessidade de aumentar o número de fatias é utilizar polinômios de interpolação com graus maiores, por exemplo, utilizando um polinômio de primeiro grau (função linear) que é a aplicação da regra do trapézio ou utilizando um polinômio de segundo grau (parábola) que é a aplicação da regra de Simpson.

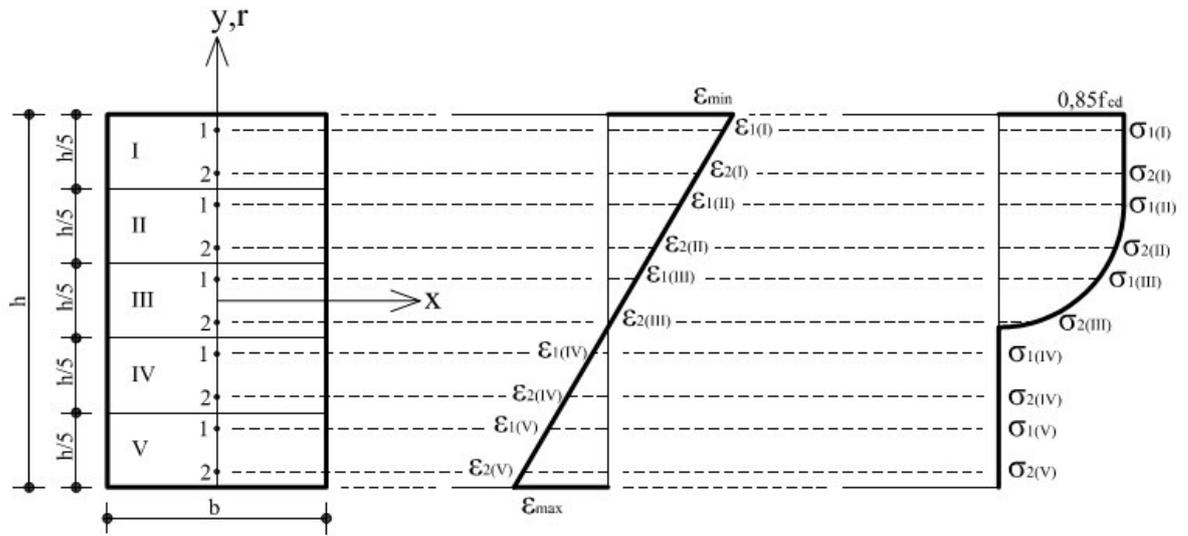
#### *5.2.3.1 Associação entre Método das Fatias e quadratura de Gauss*

Uma forma de realizar as integrações na seção transversal que se mostra bastante eficiente em termo de precisão numérica e custo computacional é associar o Método das Fatias com a integração numérica através da quadratura de Gauss ou de Lobatto, conforme pode ser observado no trabalho de Bratina e Planinc (2004).

A associação consiste basicamente em computar a contribuição de cada fatia através de uma integração numérica com o emprego das quadraturas. Empregando, por exemplo, dois pontos de Gauss ou três pontos de Lobatto, a maior parte dos termos dos somatórios da expressão (122) seriam integrados exatamente para o caso do emprego da curva tensão-deformação da NBR 6118:2003, pois os trechos dessa curva são polinômios com grau máximo igual a dois. Assim, os termos da Equação (122) que possuem maior grau são o momento fletor  $M$  e a parcela  $\overline{EI}$ , ambos os polinômios são cúbicos para as fatias que caem no trecho parabólico da curva tensão-deformação.

Dessa forma, as únicas fatias que possuiriam erro numérico na integração seriam aquelas que contivessem os pontos limites entre os trechos da curva tensão-deformação, pois a integração não seria realizada em um trecho suave da curva. A figura abaixo ilustra a ideia da associação entre o Método das Fatias e a quadratura de Gauss para uma seção retangular.

Figura 45- Associação entre o método das fatias e a quadratura de Gauss



Fonte: Próprio autor.

## 6 EXEMPLOS

Neste capítulo são expostos os resultados das análises estruturais não lineares realizadas pelo programa FAST em diversos exemplos encontrados na literatura. Para verificar a eficiência e precisão do Método das Fatias, calcularam-se os esforços internos resistentes de uma seção retangular de concreto armado para todos os estados de deformações ilustrados na Figura 29. Os esforços internos foram calculados utilizando a Integração Direta e o Método das Fatias.

A avaliação da implementação computacional do Método das Fatias que permitiu a realização de análises não lineares físicas foi feita através de dois exemplos de verificação e em quatro exemplos de validação, os quais são constituídos por vigas em balanço, vigas biapoiadas, pilares e pórticos. Todos os exemplos foram discretizados com elementos finitos de pórtico plano, alguns foram analisados considerando somente a não linearidade física e outros considerando as não linearidades física e geométrica. Além disso, alguns exemplos foram analisados considerando tanto a lei constitutiva do concreto recomendada pela NBR 6118:2003 como pelo Eurocode 2:2004. Os resultados das análises foram confrontados com os obtidos pelas análises numéricas realizadas por outros autores e com os resultados experimentais.

Por fim, para realizar uma aplicação prática do programa FAST, obtiveram-se as flechas de vigas biapoiadas utilizando a análise não linear física. Os resultados foram comparados com as flechas obtidas empregando a rigidez equivalente calculada com a fórmula de Branson (1968) (Equação (15)) e com resultados experimentais e numéricos encontrados na literatura.

### 6.1 Avaliação do Método das Fatias

Sabe-se que o aumento do número de fatias na discretização de uma seção para a integração das tensões leva a uma redução do erro cometido quando se considera a tensão constante dentro de uma mesma fatia. No entanto, como na análise não linear o processo é incremental e iterativo e a estrutura deve ser melhor discretizada com elementos finitos para que se tenha resultados aceitáveis, a quantidade de fatias utilizadas na discretização da seção transversal do elemento finito tem bastante influência no custo computacional e no tempo de processamento das análises. Assim, é interessante otimizar a quantidade de fatias empregadas.

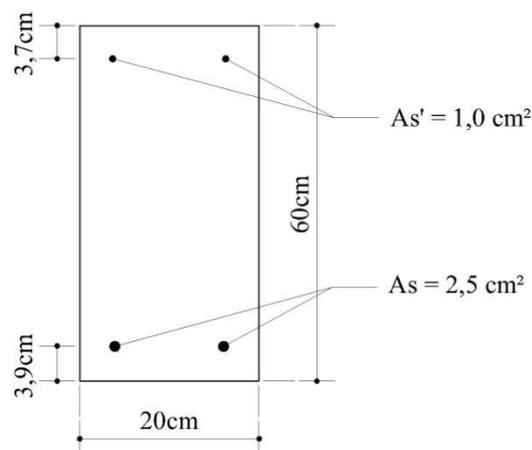
Para avaliar o erro cometido com o emprego do Método das Fatias, os esforços internos (Força Normal e Momento Fletor) foram calculados em uma seção retangular de concreto armado ilustrada na Figura 46 para todos os estados de deformação representados pela Figura 29 e com os valores para curvatura ( $\kappa$ ) e deformação de membrana ( $\varepsilon_m$ ) descritos na Tabela 5. Em todos os casos analisados o concreto possui  $f_{ck}$  de 30 MPa, o aço possui tensão de escoamento  $f_{yk}$  de 500 MPa e módulo de elasticidade igual a 210 GPa. Não se considerou a contribuição do concreto na resistência à tração.

Tabela 5 - Estados de deformação

Casos	$\varepsilon_{min}$	$\varepsilon_{max}$	$\kappa$ (m <sup>-1</sup> )	$\varepsilon_m$
a <sub>1</sub>	-0,0050	-0,0040	0,001666667	-0,00450
a <sub>2</sub>	-0,0050	-0,0030	0,003333333	-0,00400
a <sub>3</sub>	-0,0050	-0,0010	0,006666667	-0,00300
a <sub>4</sub>	-0,0050	0,0005	0,009166667	-0,00225
b <sub>1</sub>	-0,0030	-0,0020	0,001666667	-0,00250
b <sub>2</sub>	-0,0030	-0,0010	0,003333333	-0,00200
b <sub>3</sub>	-0,0030	0,0005	0,005833333	-0,00125
c <sub>1</sub>	-0,0150	-0,0005	0,024166667	-0,00775
c <sub>2</sub>	-0,0150	0,0005	0,025833333	-0,00725
d <sub>1</sub>	0,0005	0,0050	0,007500000	0,00275

Fonte: Próprio autor.

Figura 46- Seção para avaliação do Método das Fatias

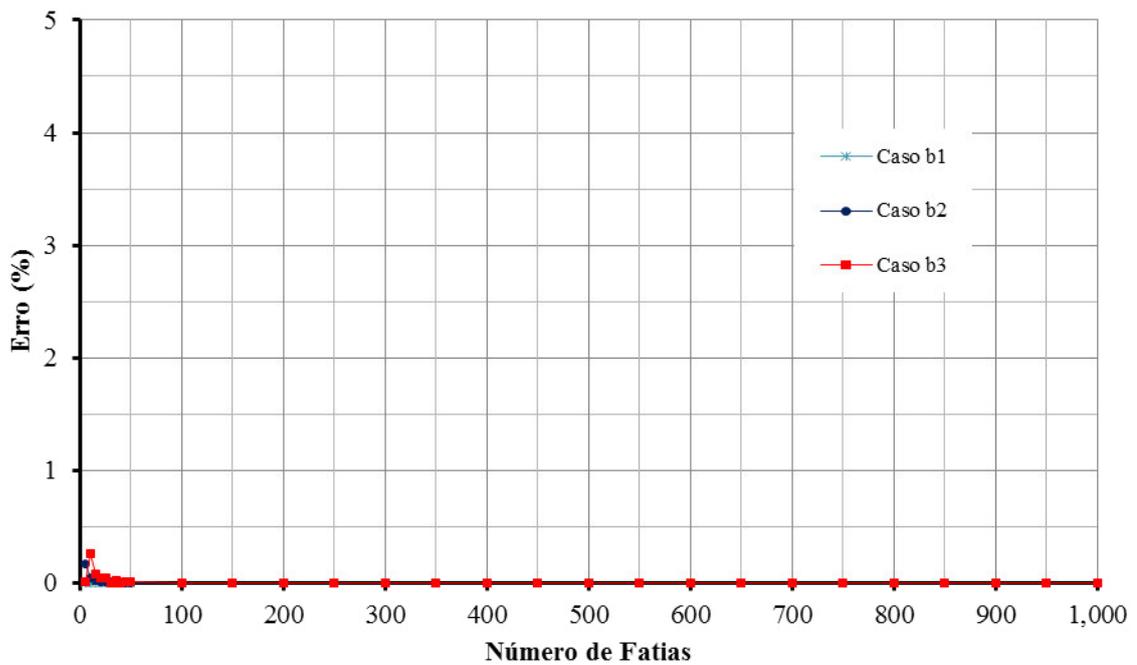
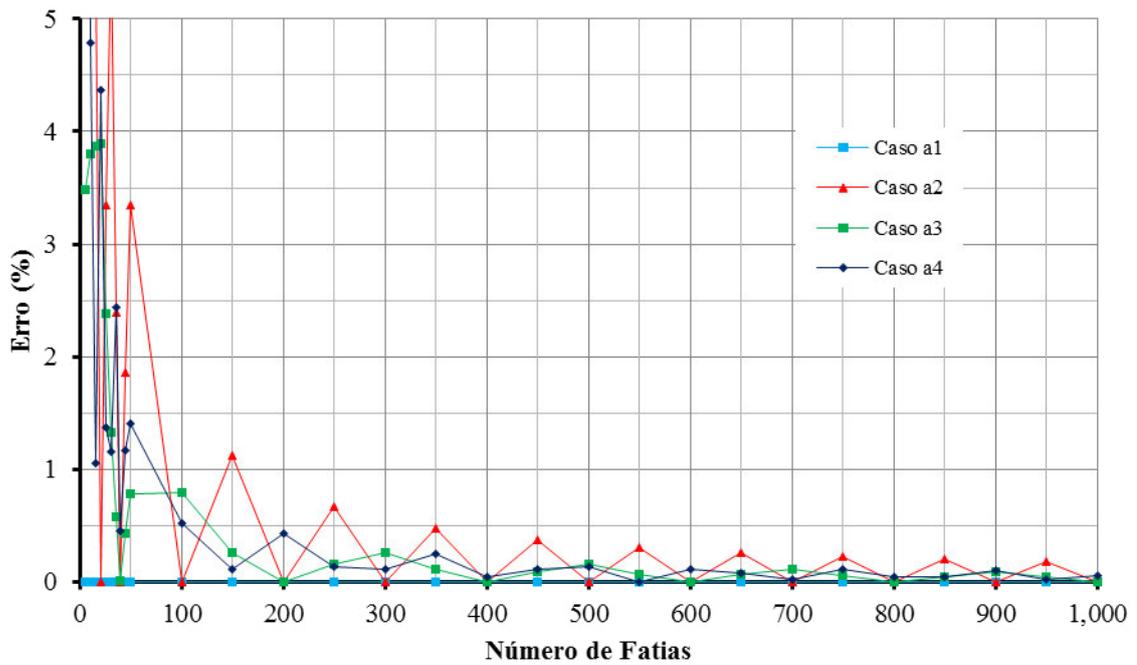


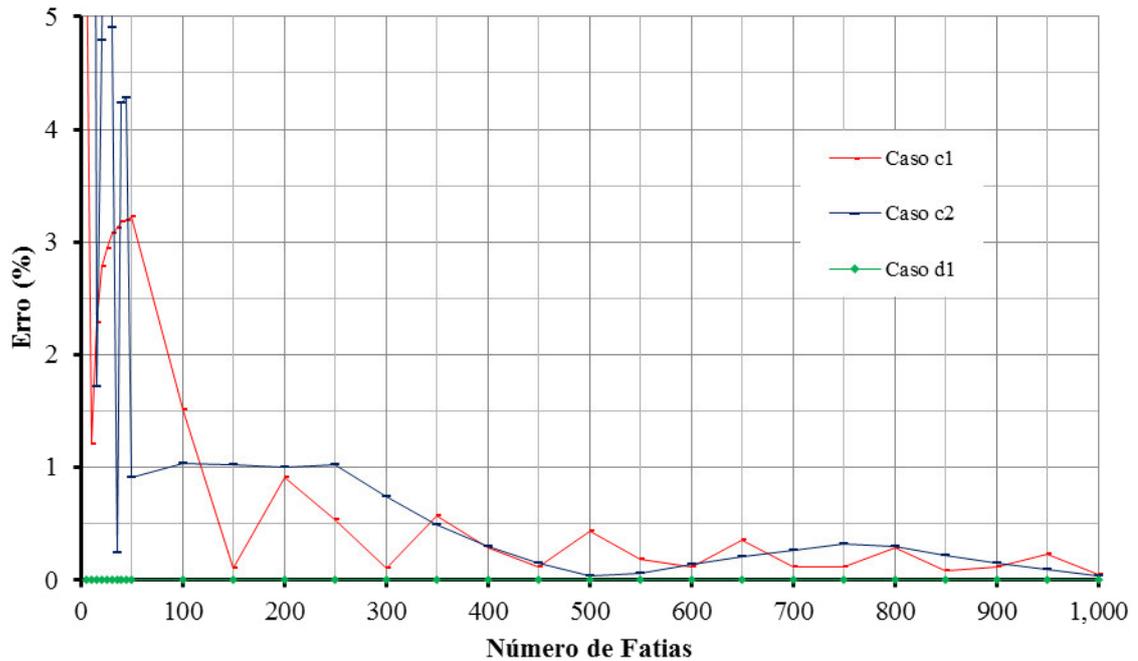
Fonte: Próprio autor.

O erro cometido com o cálculo dos esforços internos pelo Método das Fatias foi obtido em relação aos esforços internos obtidos de forma exata utilizando a integração direta expressa pelas Equações (95) e (96). Além disso, o erro foi calculado separadamente para o

esforço normal  $N$  e para o momento fletor  $M$ . O número de fatias variou de 5 a 50, com incrementos de 5 fatias, e de 50 a 1000, com incrementos de 50 fatias. Os gráficos abaixo apresentam a variação do erro com relação ao número de fatias:

Figura 47 – Erro do Método das Fatias para a Força Normal

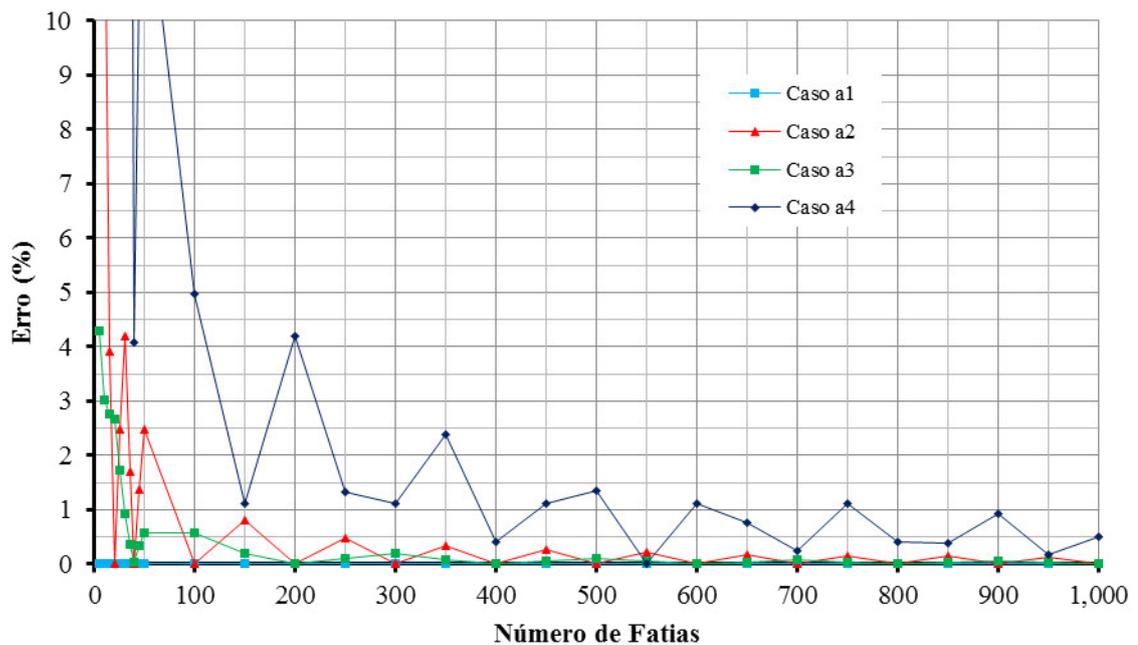


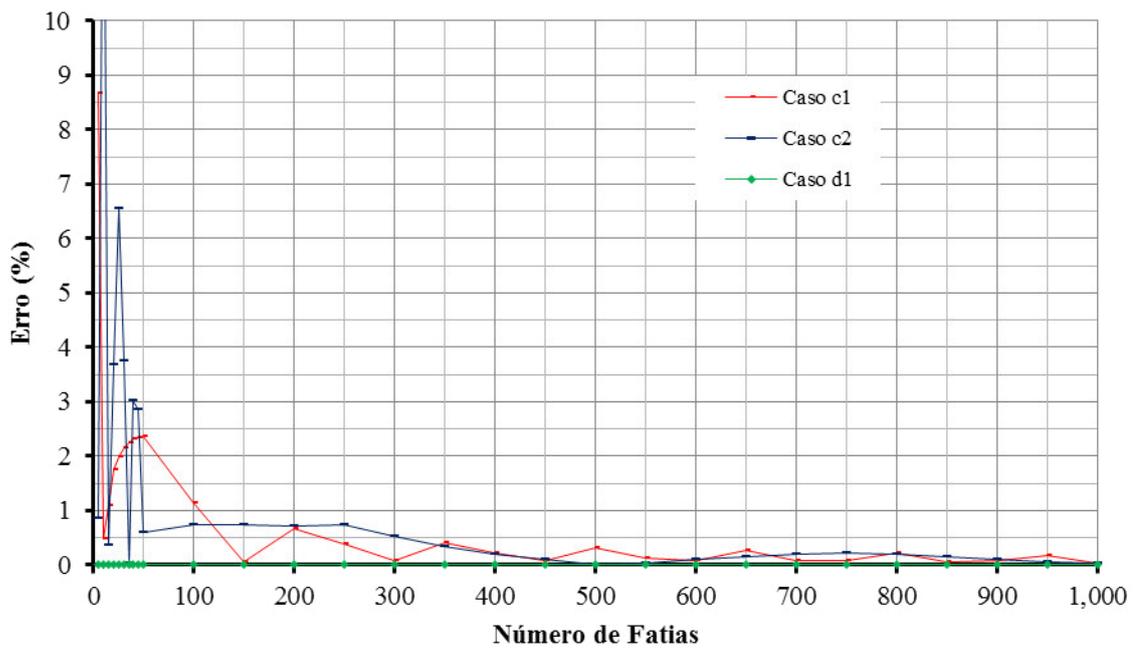
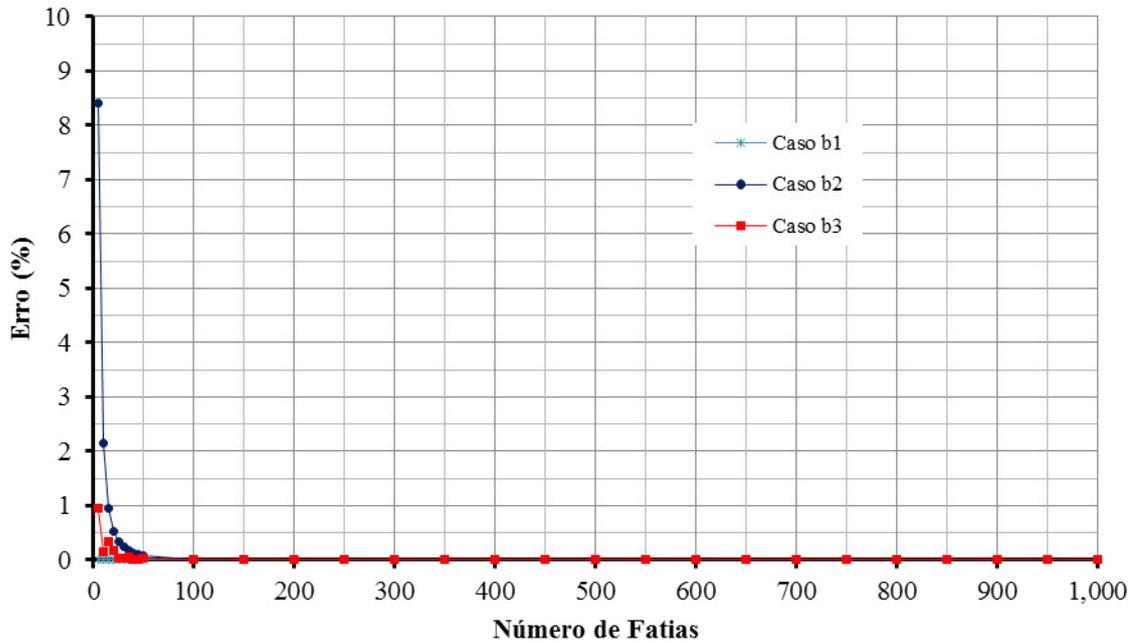


Fonte: Próprio autor.

Para o cálculo da Força Normal, pode-se observar que até 50 fatias os erros ainda são elevados, ficando em torno de 5 %. Somente a partir de 100 fatias, os erros apresentam uma redução para valores mais aceitáveis.

Figura 48 – Erro do Método das Fatias para o Momento Fletor





Fonte: Próprio autor.

Para o cálculo do Momento Fletor, pode-se observar que até 50 fatias os erros ainda são elevados, ficando em torno de 10%. Somente a partir de 100 fatias, os erros apresentam uma redução para valores mais aceitáveis.

Tanto no cálculo da Força Normal como do Momento Fletor, observou-se uma oscilação dos resultados com o aumento do número de fatias. Isso ocorre porque a curva do concreto utilizada para a avaliação (parábola-retângulo) é composta por funções polinomiais

parciais. Assim, quando se discretiza a seção em fatias com tensão constante, surgem erros tanto para as fatias que se encontram no trecho parabólico e como para as fatias que se encontram na interseção entre os trechos da curva.

Apesar da oscilação, observou-se que a tendência é de redução do erro com o aumento do número de fatias. Pode-se concluir que com 100 fatias se obtém um erro menor que 1% para o cálculo da Força Normal e menor que 5% para o cálculo do Momento Fletor. Abaixo de 100 fatias, os erros são significativos e podem comprometer os resultados da análise não linear física.

O Método das Fatias é simples e robusto, mas exige uma grande discretização da seção para que os resultados sejam precisos. Dessa forma, o método apresenta baixa eficiência, pois leva a um custo computacional elevado.

Uma forma de melhorar o desempenho do método seria associá-lo a uma integração de Gauss. Dentro de cada fatia poderia ser aplicada uma integração de Gauss com dois pontos. Dessa forma se obteria integrais exatas para todas as fatias que se encontrassem totalmente dentro dos trechos com distribuição de tensão parabólica ou linear. As únicas fatias que produziriam erros seriam aquelas que se localizassem na interseção entre dois trechos da curva.

## **6.2 Avaliação da implementação computacional**

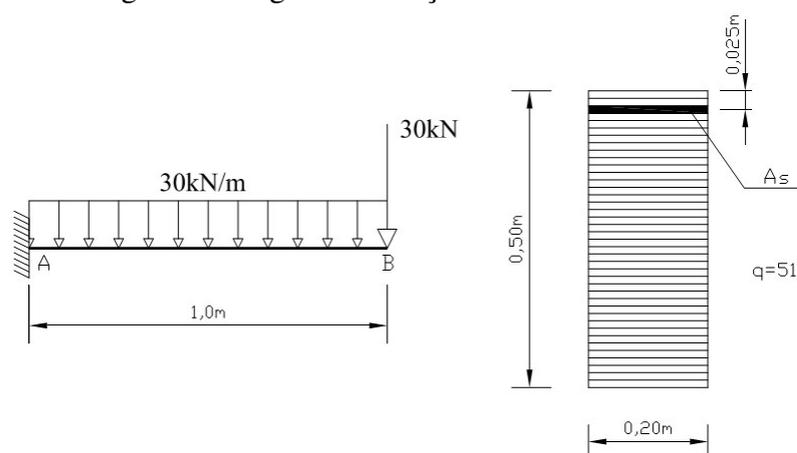
Com o objetivo de verificar e validar a implementação computacional do Método das Fatias no programa FAST, foram selecionados seis exemplos encontrados na literatura para a realização das análises não lineares. Em cada exemplo, os resultados obtidos no FAST são comparados aos obtidos por outros autores.

Com exceção do exemplo da viga em balanço extraída do trabalho do Fonseca (2006), todos os outros exemplos foram analisados considerando a não linearidade física e a geométrica. A não linearidade física foi considerada discretizando as seções com 100 fatias e a não linearidade geométrica foi baseada na formulação corrotacional (MEIRELES NETO, 2012).

### 6.2.1 Exemplo de verificação: viga em balanço

A viga em balanço, cuja configuração geométrica e de cargas está representada na Figura 49, foi modelada sem armadura e utilizando 4 áreas de armadura diferentes: 1,5 cm<sup>2</sup>, 3,0 cm<sup>2</sup>, 6,0 cm<sup>2</sup> e 12,0 cm<sup>2</sup>.

Figura 49- Viga em balanço de concreto armado



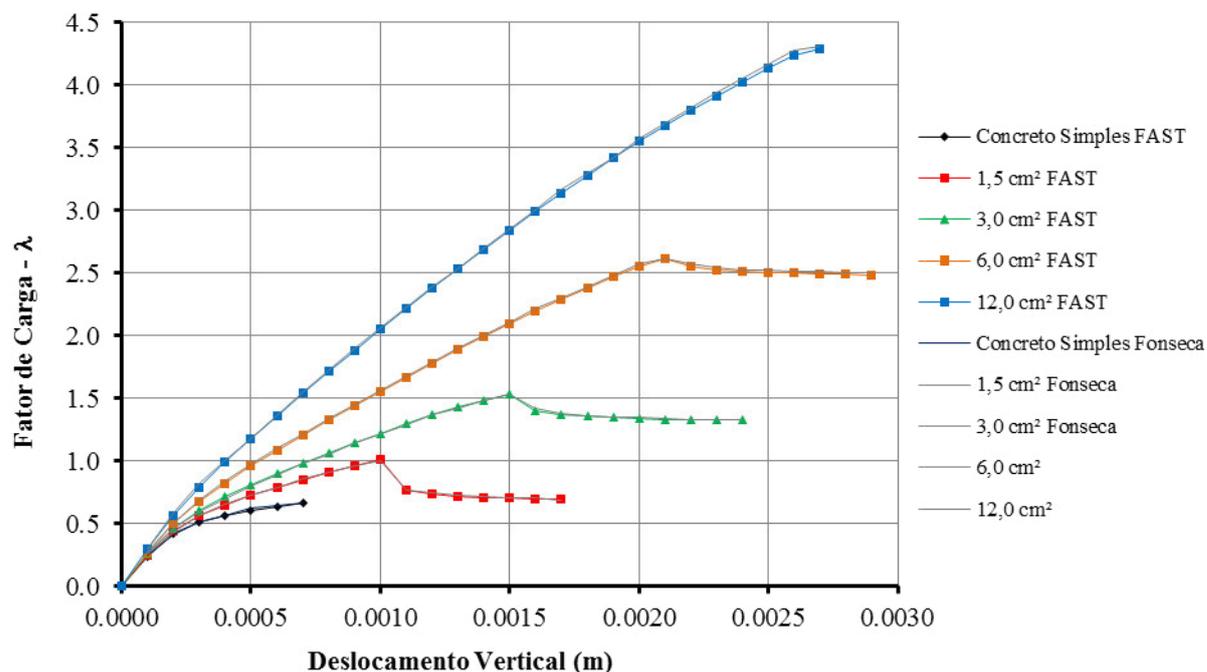
Fonte: Fonseca (2006).

Foram adotados na discretização, 16 elementos finitos de pórtico plano. A seção transversal da viga foi discretizada com 100 fatias, diferente das 51 fatias adotadas por Fonseca (2006). Para o concreto, considerou-se a Lei Constitutiva da NBR 6118:2003, com  $f_{ck} = 20$  MPa. Para o aço das armaduras, considerou-se comportamento elastoplástico sem endurecimento com  $E_s = 210$  GPa e  $f_y = 420$  MPa. Considerou-se ainda para o aço um alongamento limite de 10 %, como limitação à fissuração do concreto.

Na análise não linear da viga, adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos, com incremento de  $-1 \times 10^{-4}$  m para o deslocamento vertical da extremidade livre da viga, com tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-4}$ .

As curvas de equilíbrio correspondentes ao deslocamento vertical da extremidade livre da viga para cada caso de armadura estão apresentadas na figura abaixo:

Figura 50- Curva de equilíbrio da viga em balanço de concreto armado



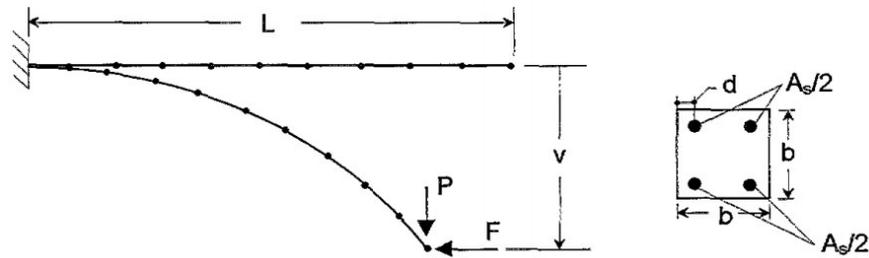
Fonte: Próprio autor.

Viu-se que as curvas de equilíbrio obtidas com o programa FAST praticamente coincidiram com as obtidas por Fonseca (2006). Além disso, elas representaram de forma coerente as cargas máximas para cada caso de armadura.

### 6.2.2 Exemplo de verificação: barra sob carga axial e transversal na extremidade

Este exemplo foi analisado por Araripe (1998) no qual se considerou tanto a não linearidade geométrica como a física. A barra foi analisada com o modelo constitutivo da NBR 6118:2003 e do Eurocode 2:2004, mas a tração no concreto foi desprezada. O aço foi representado pelo modelo elastoplástico sem endurecimento com alongamento limite de 10%. A barra analisada está representada na figura abaixo:

Figura 51- Barra de concreto armado



Fonte: Araripe (1998).

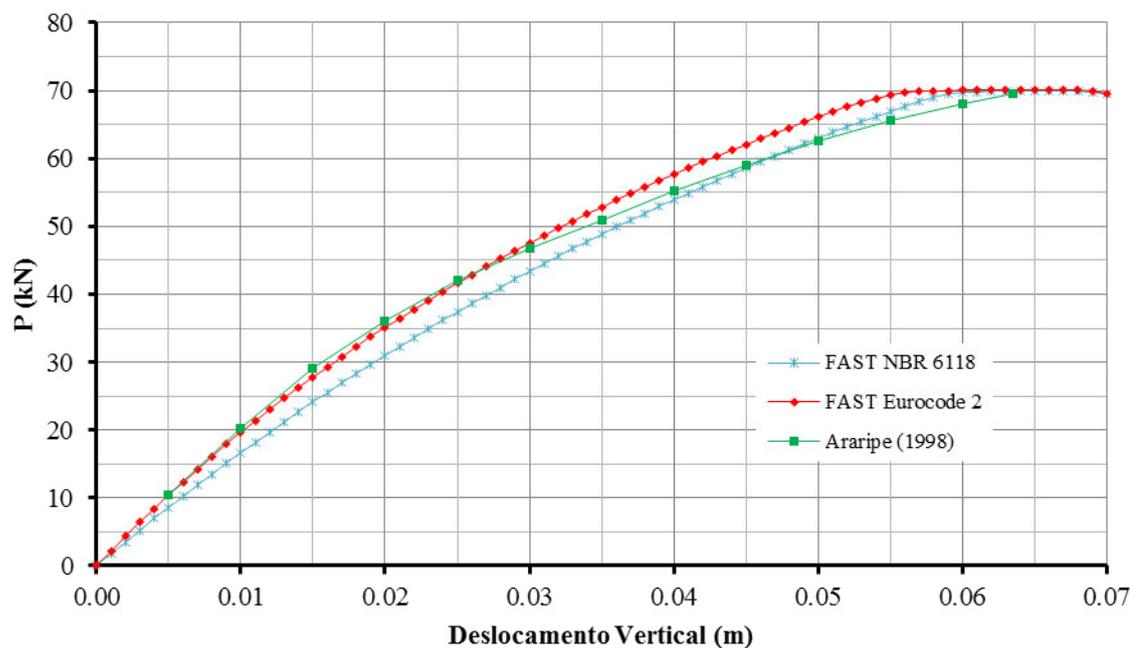
Os dados do problema são:

- $f_{ck} = 32,94$  MPa;
- $f_{ctk} = 0,0$  MPa;
- $E_c = 27,32$  GPa (NBR 6118: 2003);
- $E_c = 31,46$  GPa e  $\varepsilon_{cl} = - 2,07\%$  (Eurocode 2: 2004);
- $f_{yk} = 483$  MPa;
- $E_s = 210$  GPa;
- $A_s = 2 \times 15,1$  cm<sup>2</sup>;
- $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ ;
- $L = 4$  m,  $b = 0,40$  m,  $d = 0,04$  m;
- $F = 1280$  kN.

A barra foi modelada com 10 elementos de pórtico plano e a seção transversal foi discretizada com 100 fatias, diferente das 10 fatias adotadas por Araripe (1998). Na análise não linear da barra, adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos, com incremento de  $-1 \times 10^{-3}$  m para o deslocamento vertical da extremidade livre, com tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-6}$ .

A curva de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical da extremidade livre da barra está apresentada na figura abaixo:

Figura 52- Curva de equilíbrio da barra de concreto armado



Fonte: Próprio autor.

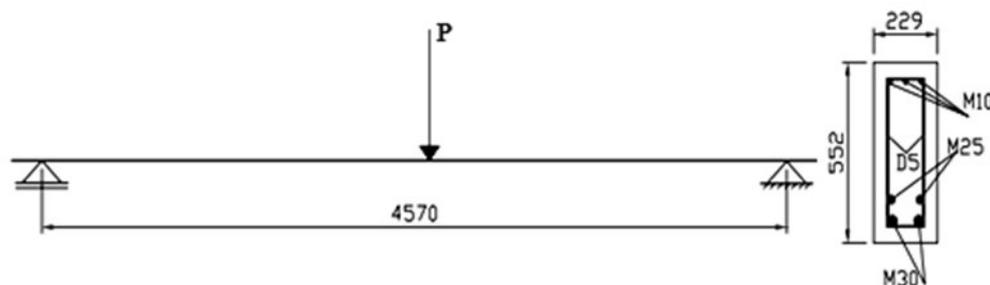
As curvas de equilíbrio de ambos os modelos constitutivos apresentaram resultados muito próximos à curva obtida por Araripe (1998), inclusive representando bem a carga de ruptura da barra, que é próxima a 70 kN.

### 6.2.3 Exemplo de validação: viga de concreto armado

Esta viga foi ensaiada por Vecchio e Shim (2004) com o objetivo de comparar e discutir o comportamento observado no ensaio (incluindo a curva carga-deslocamento) com os resultados obtidos nos ensaios de Bresler e Scordelis (1963 *apud* VECCHIO E SHIM, 2004), que são comumente utilizados para calibrar modelos de análise com elementos finitos.

Esta viga foi analisada com o modelo constitutivo da NBR 6118:2003, considerando a tração no concreto, e do Eurocode 2:2004, sem considerar a tração no concreto. Como os resultados a serem comparados são experimentais, a análise estrutural foi feita considerando a não linearidade geométrica e física. O aço foi representado pelo modelo elastoplástico sem endurecimento com alongamento limite de 10%. A viga analisada está representada na figura abaixo:

Figura 53- Viga de concreto armado, carregamento e geometria (dimensões em mm)



Fonte: Oliveira (2011).

O concreto apresenta resistência à compressão  $f_{ck} = 25,90$  MPa, resistência à tração  $f_{ct} = 3,37$  MPa e módulo de elasticidade  $E_c = 32,9$  GPa. As propriedades das barras de aço estão descritas na tabela abaixo:

Tabela 6 - Propriedades das barras de aço da viga

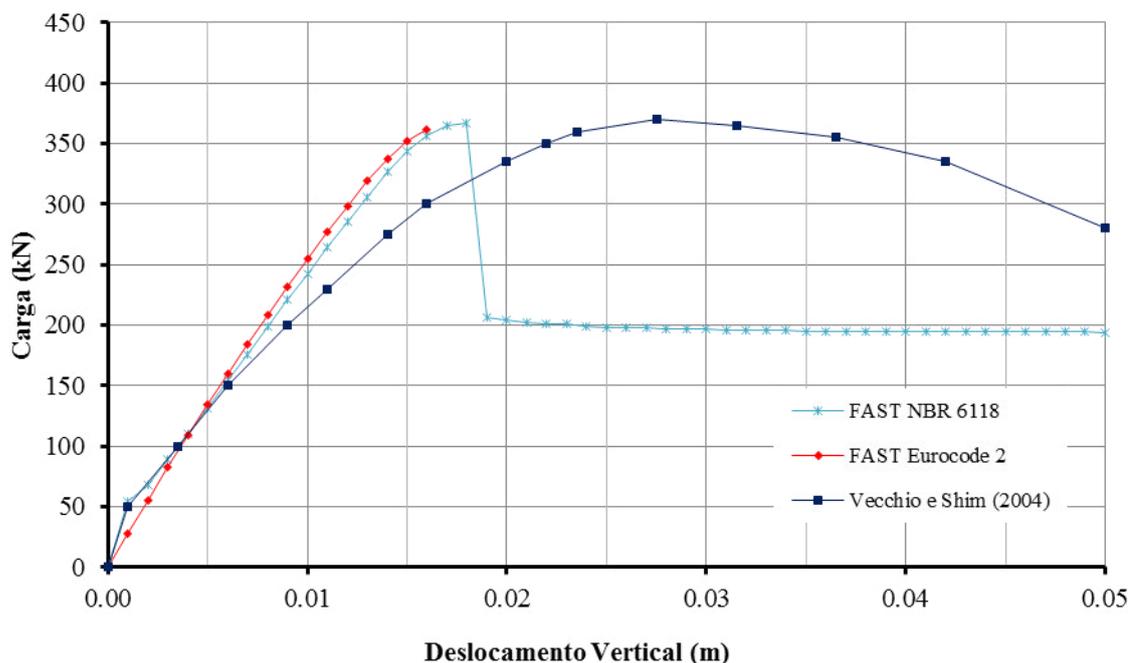
Aço	Área (mm <sup>2</sup> )	$f_{yk}$ (MPa)	$E_s$ (GPa)
M10	100	315	200
M25	500	440	210
M30	700	436	200

Fonte: Vecchio e Shim (2004).

A viga foi modelada com 20 elementos de pórtico plano e a seção transversal foi discretizada com 100 fatias. Na análise não linear, adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos, com incremento de  $-1 \times 10^{-3}$  m para o deslocamento vertical do meio da viga, com tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-3}$ .

A curva de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do meio da viga está apresentada na figura abaixo:

Figura 54- Curvas equilíbrio para a viga de concreto armado



Fonte: Próprio autor.

A partir das curvas de equilíbrio obtidas, vê-se que o comportamento da viga foi semelhante tanto com o modelo constitutivo do concreto da NBR 6118:2003 como o do Eurocode 2:2004. No entanto, o comportamento experimental mostrou uma ductilidade maior, pois apesar de a carga máxima ser praticamente igual ao das análises, em torno de 360 kN, os deslocamentos foram maiores e a queda da capacidade resistente da peça não foi brusca. Acredita-se que isso se deve ao fato de não ter sido levado em consideração a resistência ao cisalhamento, pois além da própria resistência do concreto ao cisalhamento a viga era armada com estribos de 6,4 mm de diâmetro a cada 19 cm. A desconsideração do cisalhamento também pode ter sido o provável responsável por um comportamento mais rígido nas análises realizadas.

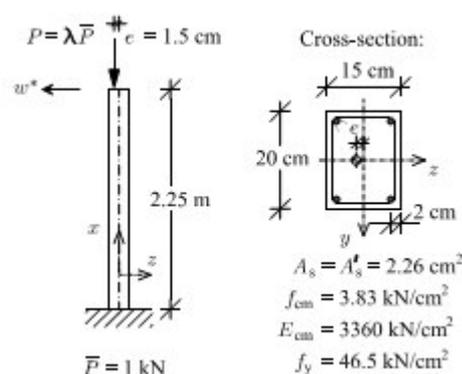
A capacidade resistente residual após a queda brusca observada na análise realizada com a curva da NBR 6118:2003 pode ser devida unicamente ao aço tracionado, pois este possui uma capacidade de deformação maior que a do concreto e igual a 10%.

#### 6.2.4 Exemplo de validação: pilar de concreto armado

O pilar foi submetido a uma carga excêntrica com um aumento da carga até o colapso. Os resultados experimentais foram documentados por Espion (1993 *apud*

BRATINA, 2004). Os dados de geometria, material e carregamento fornecidos por Espion (1993 *apud* BRATINA, 2004) estão ilustrados na Figura 55. O pilar foi analisado com o modelo constitutivo da NBR 6118:2003 e do Eurocode 2:2004. Como os resultados a serem comparados são experimentais, a análise estrutural foi feita considerando a não linearidade geométrica e física.

Figura 55- Pilar de concreto armado: geometria, material e carregamento



Fonte: Bratina (2004).

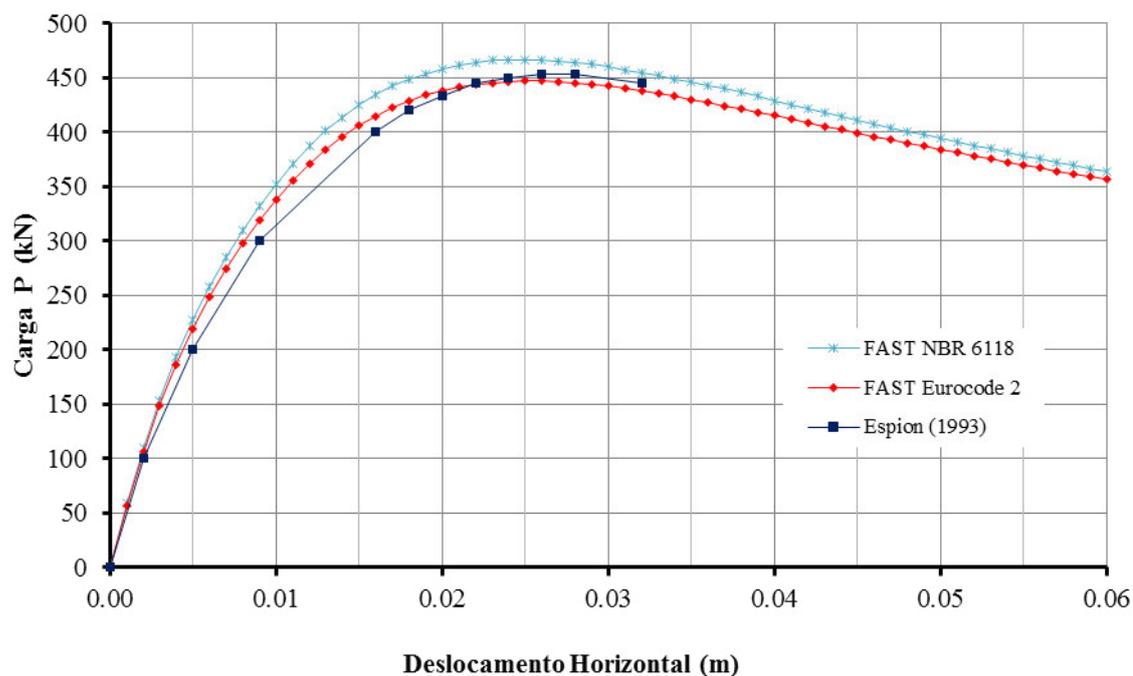
Para a análise empregando o modelo constitutivo da NBR 6118:2003, adotou-se para o concreto as seguintes características:  $f_c = 38,3 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 3,4 \text{ MPa}$  e  $E_c = 33,6 \text{ GPa}$ . Para a análise empregando o modelo constitutivo do Eurocode 2:2004, adotaram-se para o concreto as seguintes características:  $f_c = 38,3 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 0,0 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 33,6 \text{ GPa}$ ,  $\varepsilon_{c1} = - 2,2\%$  e  $\varepsilon_{cu1} = - 3,5\%$ .

O aço empregado possui tensão de escoamento  $f_y = 465 \text{ MPa}$ , módulo de elasticidade  $E_y = 200 \text{ GPa}$  e foi representado pelo modelo elastoplástico sem endurecimento com alongamento limite de 10%.

O pilar foi modelado com 4 elementos de pórtico plano e a seção transversal foi discretizada com 100 fatias. Na análise não linear, adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos, com incremento de  $-1 \times 10^{-3} \text{ m}$  para o deslocamento horizontal do topo do pilar, com tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-4}$ .

A curva de equilíbrio correspondente ao deslocamento horizontal do topo do pilar está apresentada na figura abaixo:

Figura 56- Curva de equilíbrio do pilar de concreto armado



Fonte: Próprio autor.

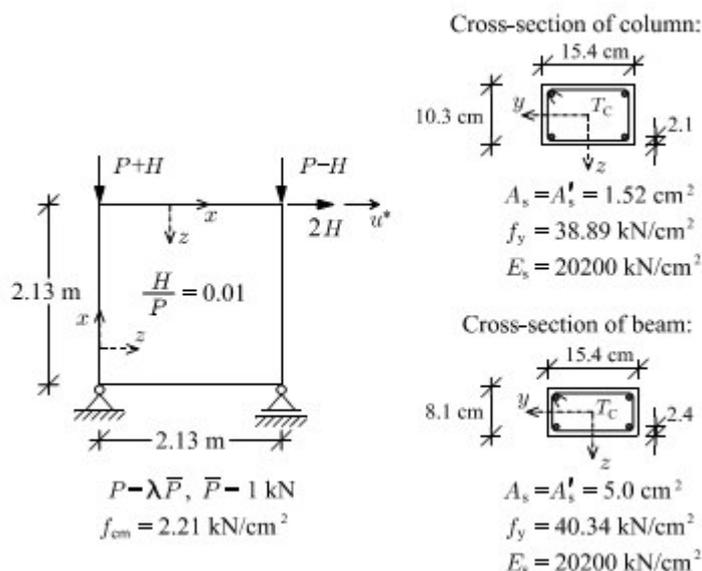
A partir das curvas de equilíbrio obtidas, observa-se que a análise estrutural com o modelo constitutivo da norma europeia representou o comportamento do pilar de forma mais próxima dos resultados experimentais obtidos por Espion (1993 *apud* BRATINA, 2004). No entanto, as duas curvas mostraram um comportamento estrutural coerente com o comportamento real. Neste caso não foram observadas rupturas bruscas, pois o esforço predominante é de compressão, não tendo tanta influência o comportamento na tração do concreto e do aço.

### 6.2.5 Exemplo de validação: quadro de concreto armado

Este exemplo foi testado por Ferguson e Breen (1966 *apud* BRATINA, 2004) e os resultados foram apresentados por Gunnin *et al* (1977 *apud* BRATINA, 2004). A geometria, a seção transversal dos pilares e das vigas e os dados do concreto e do aço estão representados na Figura 57. Os demais parâmetros dos materiais necessários para a análise foram estimados de acordo com as recomendações de cada modelo constitutivo. O quadro foi analisado com o modelo constitutivo da NBR 6118:2003 e do Eurocode 2:2004 e como os resultados a serem

comparados são experimentais, a análise estrutural foi feita considerando a não linearidade geométrica e física.

Figura 57- Quadro de concreto armado: geometria, material e carregamento



Fonte: Bratina (2004).

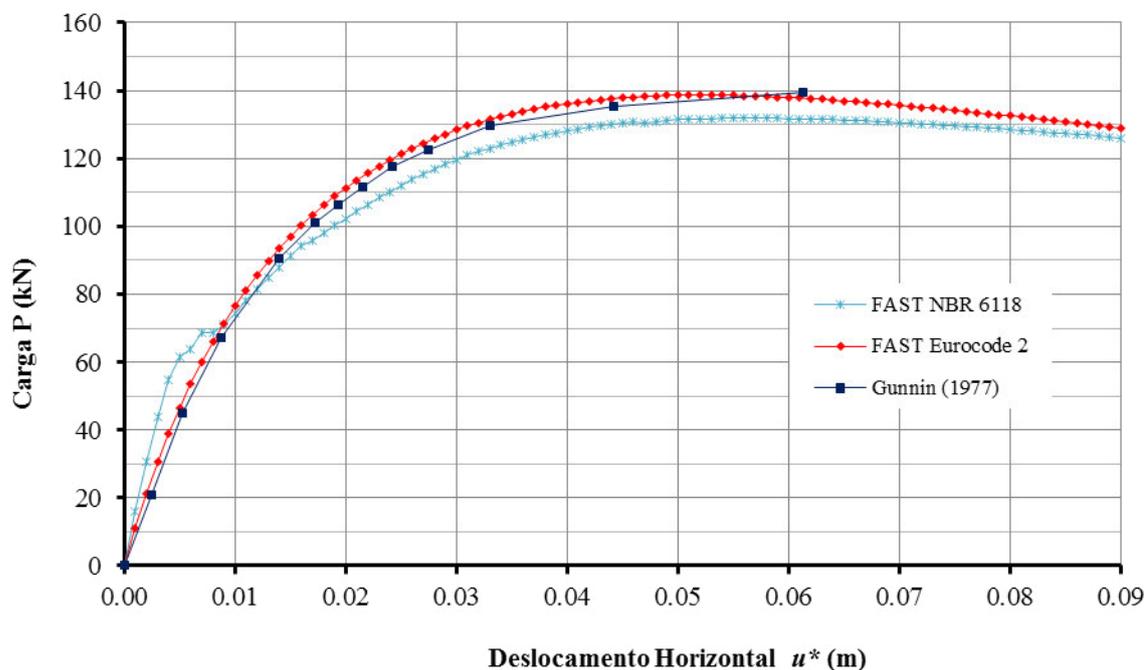
Para a análise empregando o modelo constitutivo da NBR 6118:2003, adotou-se para o concreto as seguintes características:  $f_c = 22,1 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 2,36 \text{ MPa}$  e  $E_c = 26,33 \text{ GPa}$ . Para a análise empregando o modelo constitutivo do Eurocode 2:2004, adotaram-se para o concreto as seguintes características:  $f_c = 22,1 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 0,0 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 27,91 \text{ GPa}$ ,  $\varepsilon_{cl} = -1,83\%$  e  $\varepsilon_{cu1} = -3,5\%$ .

Os aços empregados possuem tensão de escoamento  $f_y = 388,9 \text{ MPa}$  e  $f_y = 403,4 \text{ MPa}$  para os pilares e vigas, respectivamente. O módulo de elasticidade é de  $E_y = 202 \text{ GPa}$  e o modelo constitutivo adotado foi o elastoplástico sem endurecimento com alongamento limite de 10%.

O quadro foi modelado com 16 elementos de pórtico plano (4 elementos por barra) e a seção transversal foi discretizada com 100 fatias. Na análise não linear, adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos, com incremento de  $-1 \times 10^{-3} \text{ m}$  para o deslocamento horizontal do topo do pilar, com tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-6}$ .

A curva de equilíbrio correspondente ao deslocamento horizontal do canto superior direito do quadro está apresentada na figura abaixo:

Figura 58 - Curva de equilíbrio do quadro de concreto armado



Fonte: Próprio autor.

A partir das curvas de equilíbrio obtidas, observa-se que a análise estrutural com o modelo constitutivo da norma europeia representou o comportamento do quadro de forma mais próxima dos resultados experimentais obtidos por Ferguson e Breen (1966 *apud* BRATINA, 2004) e apresentados por Gunnin *et al* (1977 *apud* BRATINA, 2004). A curva obtida com o modelo constitutivo da norma brasileira apresentou capacidade resistente menor, mas também apresentou resultados muito próximos do comportamento experimental.

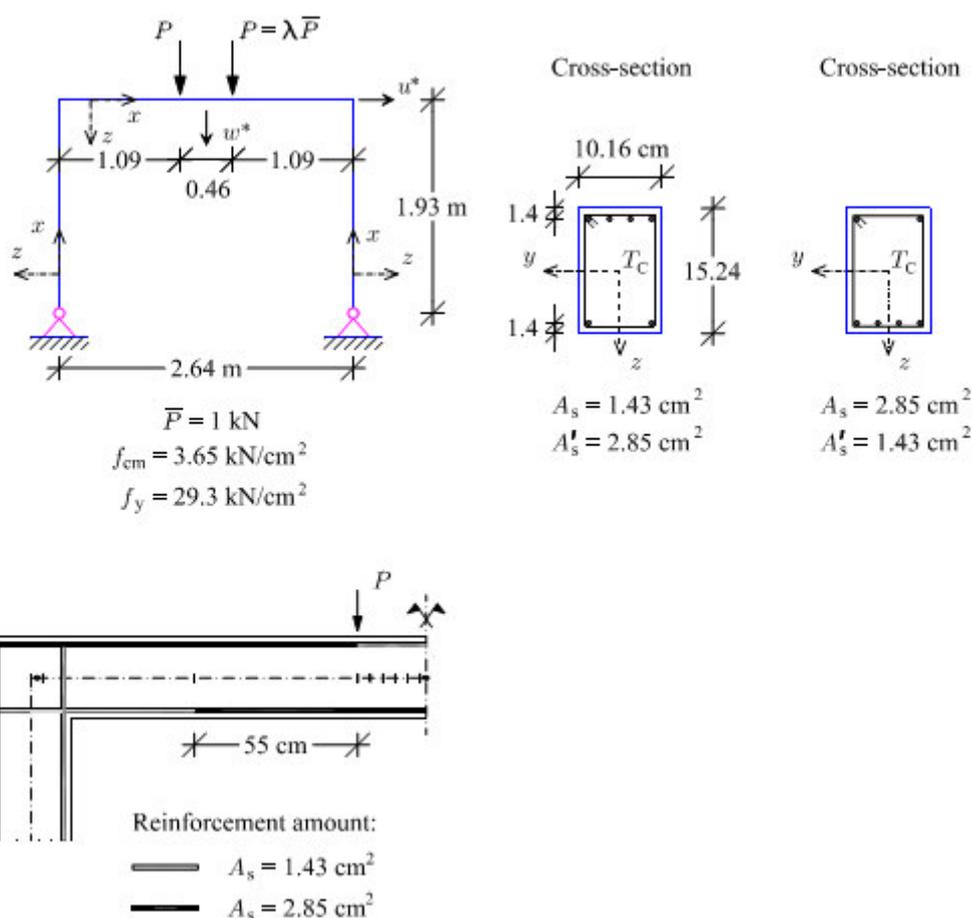
Observa-se que o comportamento mais rígido inicial na curva da NBR 6118:2003 se deveu provavelmente ao fato de ter sido considerado a resistência à tração do concreto, que foi desprezada na curva do Eurocode 2:2004.

### 6.2.6 Exemplo de validação: pórtico de concreto armado

Este exemplo foi testado por Cranston (1965 *apud* BRATINA, 2004). A geometria, a seção transversal dos pilares e das vigas e os dados do concreto e do aço estão representados na Figura 59. Os demais parâmetros dos materiais necessários para a análise foram estimados de acordo com as recomendações de cada modelo constitutivo. O pórtico foi analisado com o modelo constitutivo da NBR 6118:2003 e do Eurocode 2:2004 e como os

resultados a serem comparados são experimentais, a análise estrutural foi feita considerando a não linearidade geométrica e física.

Figura 59- Pórtico de concreto armado: geometria, material e carregamento



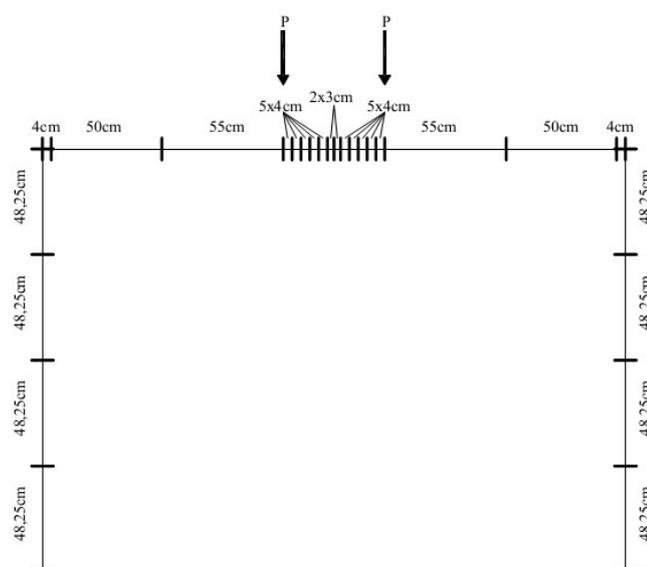
Fonte: Bratina (2004).

Para a análise empregando o modelo constitutivo da NBR 6118:2003, adotou-se para o concreto as seguintes características:  $f_c = 36,5 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 3,3 \text{ MPa}$  e  $E_c = 33,83 \text{ GPa}$ . Para a análise empregando o modelo constitutivo do Eurocode 2:2004, adotaram-se para o concreto as seguintes características:  $f_c = 36,5 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 0,0 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 32,44 \text{ GPa}$ ,  $\varepsilon_{c1} = -2,14\%$  e  $\varepsilon_{cu1} = -3,5\%$ .

O aço empregado possui tensão de escoamento  $f_y = 293 \text{ MPa}$ . O módulo de elasticidade é de  $E_y = 200 \text{ GPa}$  e o modelo constitutivo adotado foi o elastoplástico sem endurecimento com alongamento limite de 10%.

O pórtico foi modelado com 26 elementos de pórtico plano conforme mostra a Figura 60 e a seção transversal foi discretizada com 100 fatias. Na análise não linear, adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos, com incremento de  $-1 \times 10^{-3}$  m para o deslocamento horizontal do topo do pilar, com tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-6}$ .

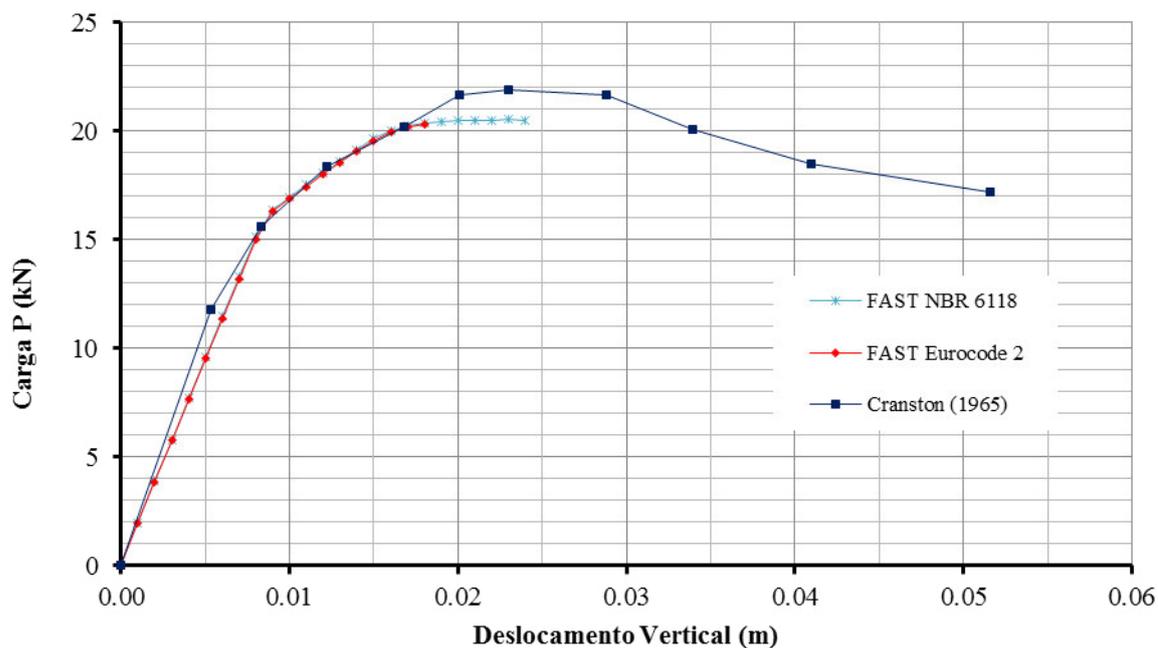
Figura 60- Malha de elementos finitos do pórtico de concreto armado



Fonte: Próprio autor.

A curva de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto localizado no eixo de simetria do pórtico está apresentada na figura abaixo:

Figura 61- Curvas de equilíbrio do pórtico de concreto armado



Fonte: Próprio autor.

A partir das curvas de equilíbrio obtidas, observa-se que a análise estrutural não conseguiu representar o comportamento do pórtico completamente, no entanto o trecho inicial da curva de equilíbrio praticamente coincidiu com os resultados experimentais.

### 6.3 Cálculo de flechas em vigas utilizando a rigidez equivalente de Branson (1968) e através da análise não linear física

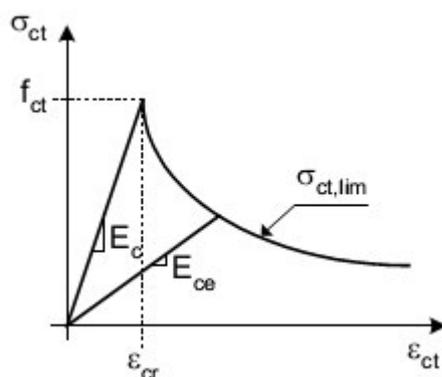
Uma aplicação prática que está diretamente relacionada a não linearidade física do concreto é o caso do cálculo da flecha inicial em vigas, nas quais as cargas atuantes são as de serviço e é importante ser levado em consideração para um cálculo mais preciso a fissuração do concreto, bem como a sua resistência à tração.

Um exemplo de viga biapoiada teve as flechas calculadas por três maneiras:

- a) utilizando a rigidez equivalente obtida com a fórmula de Branson;
- b) através da análise não linear física com o modelo constitutivo do concreto na compressão e na tração da NBR 6118:2003;
- c) através da análise não linear física com o modelo constitutivo do concreto na compressão do Eurocode 2:2004 e na tração, com o diagrama bilinear da NBR 6118:2003.

Este exemplo foi extraído do trabalho de Araújo (2004) em que são calculadas as flechas de 10 vigas biapoiadas, tanto através da rigidez equivalente utilizando a fórmula de Branson como através de uma análise não linear física. O modelo constitutivo do concreto comprimido adotado por Araújo (2004) foi o do Eurocode 2:2004 e o do concreto tracionado o indicado na figura abaixo:

Figura 62- Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado



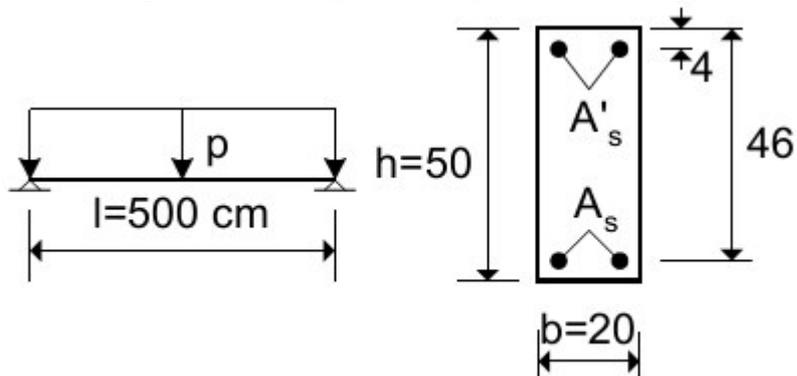
Fonte: Araújo (2004).

Nesse diagrama, as tensões de tração são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{ct} &= E_c \varepsilon_{ct} \quad , \quad \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_{cr} \\ \sigma_{ct} &= f_{ct} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{ct}} \right)^{0.6} \quad , \quad \varepsilon_{ct} > \varepsilon_{cr} \end{aligned} \quad (123)$$

onde  $\varepsilon_{cr} = f_{ct}/E_c$ ,  $E_c = 22(f_c/10)^{0.3}$  e  $f_{ct} = 0,3f_c^{2/3}$ . A viga deste exemplo está representada pela figura abaixo:

Figura 63- Carregamento e geometria da viga



Fonte: Araújo (2004).

O carregamento  $p$  e as armaduras das 10 vigas analisadas estão descritas na tabela abaixo:

Tabela 7- Cargas e armaduras das vigas

Viga	Carga $p$ (kN/m)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )
V1	4,5	1,50	0,62
V2	9,0	2,29	0,62
V3	13,5	3,52	0,62
V4	18,0	4,83	0,62
V5	22,5	6,22	0,62
V6	27,0	7,72	0,62
V7	31,5	9,36	0,62
V8	36,0	11,18	0,62
V9	40,5	13,00	0,62
V10	45,0	14,20	1,52

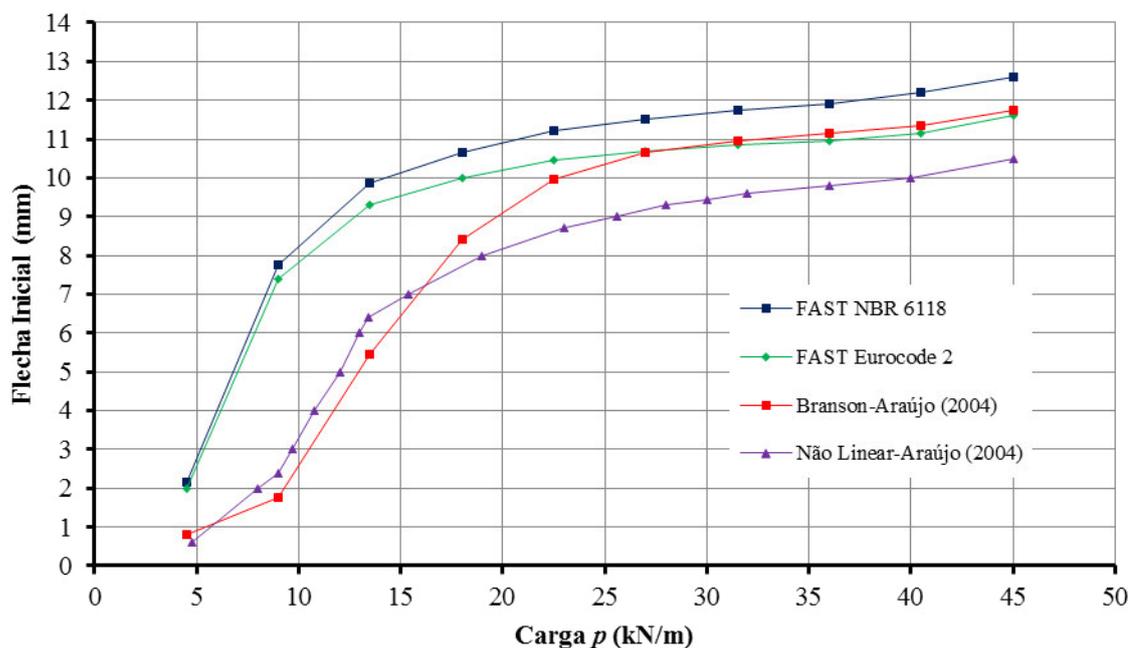
Fonte: Araújo (2004).

Para a análise empregando o modelo constitutivo da NBR 6118:2003, adotou-se para o concreto as seguintes características:  $f_c = 20$  MPa,  $f_{ct} = 2,21$  MPa e  $E_c = 25,04$  GPa. Para a análise empregando o modelo constitutivo do Eurocode 2:2004, adotaram-se para o concreto as seguintes características:  $f_c = 20$  MPa,  $f_{ct} = 2,21$  MPa,  $E_c = 27,09$  GPa,  $\varepsilon_{c1} = -1,77\%$  e  $\varepsilon_{cu1} = -3,5\%$ .

O aço empregado possui tensão de escoamento  $f_y = 500$  MPa. O módulo de elasticidade é de  $E_y = 200$  GPa e o modelo constitutivo adotado foi o elastoplástico sem endurecimento com alongamento limite de 10%.

A viga foi modelada com 20 elementos de pórtico plano e a seção transversal foi discretizada com 100 fatias. Na análise não linear, considerou-se somente a não linearidade física e adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos, com incremento de  $-1 \times 10^{-4}$  m para o deslocamento vertical do meio da viga, com tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-3}$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 64. Observa-se que esse gráfico não representa uma curva de equilíbrio, pois cada ponto corresponde a uma viga com uma armadura diferente.

Figura 64- Flecha inicial para as 10 vigas biapoiadas



Fonte: Próprio autor.

Dos resultados mostrados no gráfico, observa-se que as primeiras 4 vigas que estão sujeitas a carregamentos mais baixos apresentaram uma diferença acentuada na flecha em relação aos valores obtidos através do cálculo com a rigidez equivalente de Branson (1968) e da análise não linear realizada por Araújo (2004). Isso ocorreu provavelmente porque para as cargas mais baixas a resistência à tração no concreto tem muita influência para a flecha e o modelo bilinear do concreto na tração não representa bem o comportamento da viga entre os Estádios I e II, além de não considerar a contribuição do concreto entre fissuras. Para cargas mais elevadas, os resultados das análises foram satisfatórios na previsão das flechas, pois se aproximaram bastante do valor obtido com a rigidez equivalente de Branson (1968). Dessa forma, o diagrama tensão-deformação empregado por Araújo (2004) e mostrado na Figura 62 se mostra mais adequado para representar o comportamento do concreto na tração.

## 7 CONCLUSÃO

Os métodos de integração das tensões na seção transversal foram resumidos e suas características foram avaliadas com relação à eficiência, precisão, simplicidade e generalidade. Viu-se que o Método das Fatias tem como principais vantagens sua elevada simplicidade e grande generalidade. Este método, no entanto, exige um número mínimo elevado de fatias na discretização da seção transversal para que os resultados sejam precisos e com erros aceitáveis, como pode ser observado no exemplo de avaliação do método. Nesse exemplo, constatou-se que para o diagrama tensão-deformação da NBR 6118:2003 e para uma seção retangular de concreto armado são necessários no mínimo 100 fatias na discretização da seção transversal para que a integração das tensões apresente resultados satisfatórios. Isso leva o Método das Fatias a exigir um custo computacional mais elevado. Esse método, portanto, possui baixa eficiência.

Apesar disso, observou-se que o Método das Fatias em conjunto com sua formulação para problemas de flexão oblíqua, conhecido como Método das Fibras, são os métodos mais empregados na literatura para avaliação das tensões na seção transversal em problemas de análise estrutural que consideram a não linearidade física.

O Método das Fatias pode ter sua eficiência melhorada quando a discretização é feita nos trechos da curva tensão-deformação desenvolvidos na seção transversal. Dessa forma, para a curva tensão-deformação do concreto da NBR 6118:2003, somente as fatias no trecho parabólico da curva apresentariam erros na integração. O que precisa ser avaliado é se o ganho de eficiência é inviabilizado pelo aumento do custo computacional relacionado à tarefa de identificação dos trechos da curva tensão-deformação.

Outra ideia para melhorar a eficiência do Método das Fatias é associá-lo à quadratura de Gauss. Em cada fatia, a integração seria feita numericamente com o emprego de dois pontos de Gauss, que integram exatamente até um polinômio de terceiro grau. No cálculo dos esforços internos e dos termos da matriz constitutiva tangente, esse é o maior grau a ser integrado. Assim, somente as fatias localizadas na interseção entre dois trechos da curva tensão-deformação apresentariam erros numéricos. Fica como sugestão para outros trabalhos avaliar o ganho de eficiência com essa associação.

A formulação computacional do Método das Fatias foi implementada no programa FAST. Para verificar e validar a formulação, vários exemplos foram analisados e comparados com os resultados numéricos e experimentais obtidos por outros autores.

Considera-se satisfatório, os resultados obtidos. Observou-se que as divergências encontradas em relação aos resultados de outros autores estão relacionadas à formulação do elemento finito empregado na análise e principalmente à lei constitutiva empregada para o concreto e para o aço. Isso ficou claro a partir dos resultados obtidos com a lei constitutiva do Eurocode 2:2004, que ficaram mais próximos aos resultados experimentais dos exemplos analisados. Assim, é importante, na análise estrutural não linear física, empregar modelos constitutivos mais adequados que o diagrama parábola-retângulo sugerido pela NBR 6118:2003, bem como calibrar os modelos constitutivos adotados a partir de resultados experimentais obtidos em estruturas semelhantes às estruturas reais a serem analisadas.

Por fim, as flechas iniciais numa viga biapoiada foram obtidas através da análise não linear física utilizando tanto a curva tensão-deformação do concreto da NBR 6118:2003 como a do Eurocode 2:2004. Os resultados foram comparados às flechas obtidas com o emprego da rigidez equivalente calculada com a fórmula de Branson (1968) e também com os resultados da análise não linear realizada por Araújo (2004). Verificou-se que as flechas obtidas com a curva tensão-deformação do Eurocode 2:2004 se aproximaram mais das flechas obtidas com Branson (1968). Viu-se, também, que o diagrama bilinear da tração no concreto não representa bem o comportamento do concreto na tração, pois para baixos carregamentos, em que a resistência à tração no concreto tem grande relevância, as flechas obtidas com a análise não linear foram bem superiores aos valores obtidos com Branson (1968).

Diante de todos os estudos realizados, pode-se concluir que para uma análise não linear física de pórticos planos de concreto armado com seção retangular é adequado empregar a curva tensão-deformação do concreto na compressão sugerido pelo Eurocode 2:2004 e na tração, uma curva diferente da bilinear sugerida pela NBR 6118:2003. Além disso, a seção transversal deve ser discretizada com no mínimo 100 fatias.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. L. **Elementos finitos paramétricos implementados em Java**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2005.
- ALTOQI. O Canal de e-Learning da Engenharia. **Curso Conceitos de Estabilidade Global para Projetos de Edifícios**. Disponível em: <<http://www.qisat.com.br/index2.asp?browser=Ch>>. Acesso em: 07 dez. 2012.
- ARARIPE, Marcus Antonio Ferreira. **A não linearidade física e geométrica em pórticos planos de concreto armado**. 1998. Dissertação (Mestrado em Ciência na Área de Infra-Estrutura de Transportes) – Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo, 1998.
- ARAÚJO, José Milton. Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, Rio Grande do Sul, n. 5, p. 1-10, Ago. 2004.
- ASSAN, Aloisio Ernesto. **Método dos elementos finitos: Primeiros Passos**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos**. Rio de Janeiro, 2003.
- BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- BECK, H; KÖNIG, G. **Restraining forces in the analysis of tall buildings**. Symposium on tall buildings, Oxford, Proceedings, p.513-536, 1966.
- BONET, J. L. *et al.* A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending. **Computers and Structures**, Valencia, v. 82, p. 213-225, Jan. 2004. Disponível em: < <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794903004425>>. Acesso em: 2 jan. 2013.
- BRANSON, D. E. **Procedures for computing deflections**. ACI Journal, New York, n. 65, 1968.
- BRATINA, M. Saje S.; PLANINC, I. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. **International Journal of Solids and Structures**, Ljubljana, Slovenia, v. 41, p. 7181-7207, Dec. 2004. Disponível em: < <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768304003191>>. Acesso em: 2 jan. 2013.
- CAMPOS FILHO, Américo. **Dimensionamento e verificação de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

CARMO, R. M. S. **Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: segundo a NBR 6118:2003 . 3. ed. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2010.

CHIOREAN, C. G. Computerised interaction diagrams and moment capacity contours for composite steel–concrete cross-sections. **Computers and Structures**, Cluj-Napoca, Romania, v. 32, n. 11, p. 3734-3757, Nov. 2010. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029610003081>>. Acesso em: 2 jan. 2013.

COOK, Robert D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. New York: John Wiley & Sons, 1991. v.1.

DUMONT, N.A.; MUSSO JR., F. **Dimensionamento e verificação de seções de concreto armado e protendido e verificações da estabilidade de vigas-colunas no estado limite último com o uso de microcomputadores**. Rio de Janeiro: Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ, 1987.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings**. EN 1992-1-1. Brussels. 2004

FAFITIS, A. Interaction surfaces of reinforced-concrete sections in biaxial bending. **Journal of Structural Engineering**, Arizona, v. 127, n. 7, p. 840-846, July, 2001. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290733-9445%282001%29127%3A7%28840%29>>. Acesso em: 2 jan. 2013.

FONSECA, Marcos Torres. **Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

FRANCO, M; VASCONCELOS, A. C. Pratical assessment of second order effects in tall buildings. **COLLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC90**, Rio de Janeiro, Proceedings. p. 307-324, 1991.

INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO. **Comentários técnicos e exemplos de aplicação da NB - 1 NBR 6118:2003 Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. São Paulo, 2006.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v.1.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v.2.

MARTHA, Luiz Fernando. **Método dos Elementos Finitos**: Notas de Aula. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 1994.

MELO, Antônio Macário Cartaxo de. **Projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado**. 2000. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.

MEIRELES NETO, Marcelo. **Estabilidade de edifícios de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

OLIVEIRA, Ricardo. **Análise teórica e experimental de estruturas planas de concreto armado com a consideração da fluência**. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

PAPANIKOLAOU, Vassilis K. Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load. **Computers and Structures**, Thessaloniki, Greece, v. 98-99, p. 33-54, May, 2012. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794912000338>>. Acesso em: 2 jan. 2013.

PARENTE JUNIOR, E. **Curso de Análise Não-Linear de Estruturas**: Notas de Aula. Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Fortaleza, 2012.

PIMENTA, Paulo de Mattos. **Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.

PITANGUEIRA, R. L. **Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade**. 1998. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

PITANGUEIRA, R. L. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**: Notas de Aula. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte, 2000.

SFAKIANAKIS, M. G. Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics. **Advances in Engineering Software**, Patras, Greece, v. 33, p. 227-242, Apr. 2002. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997802000029>>. Acesso em: 2 jan. 2013.

SOUSA JR., João Batista de; CALDAS, Rodrigo Barreto. Numerical Analysis of Composite Steel-Concrete Columns of Arbitrary Cross Section. **Journal of Structural Engineering**, Minas Gerais, v. 131, n. 11, p. 1721-1730, Nov. 2005. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290733-9445%282005%29131%3A11%281721%29>>. Acesso em: 2 jan. 2013.

SOUSA JR., João Batista de; MUNIZ, Cereno F. D. G. Analytical integration of cross section properties for numerical analysis of reinforced concrete, steel and composite frames. **Engineering Structural**, Minas Gerais, v. 29, p. 618-625, July. 2006. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/engstruct](http://www.elsevier.com/locate/engstruct)>. Acesso em: 23 nov. 2011.

SPACONE, Enrico; FILIPPOU, Filip C.; TAUCER, Fabio F. Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 25, p. 711-725, Jan., 1996.

VECCHIO, F. J.; SHIM, W. Experimental and Analytical Reexamination of Classic Concrete Beam Tests. **Journal of Structural Engineering**, Toronto, v. 130, n. 3, Mar. 2004. Disponível em: <<http://www.asce.org/>>. Acesso em: 25 jan. 2013.

WERNER, H. Schiefe Biegung polygonal umrandeter Stahl-beton-Qwerschnitte. **Beton-und Stahlbetonbau**, Berlin. v. 69, n. 4, p. 92-97, Apr. 1974.

WIKIPEDIA. **Gaussian quadrature**. Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussian\\_quadrature&oldid=524657162](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussian_quadrature&oldid=524657162)>. Acesso em: 24 nov. 2012.

WIKIPEDIA. **Numerical integration**. Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_integration](http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration)>. Acesso em: 24 nov. 2012.

WIKIPEDIA. **Trapezoidal rule**. Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal\\_Rule](http://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_Rule)>. Acesso em: 24 nov. 2012.

WIKIPEDIA. **Simpson's rule**. Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Simpson%27s\\_rule](http://en.wikipedia.org/wiki/Simpson%27s_rule)>. Acesso em: 24 nov. 2012.