UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
INSTITUTO UNIVERSIDADE VIRTUAL
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOANA DARC GOMES BRAGA

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO AUXÍLIO PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAU

MARANGUAPE
2015

JOANA DARC GOMES BRAGA

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO AUXÍLIO PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAU

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática Semipresencial do Instituto Universidade Virtual da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Hudson de Souza Felix.

MARANGUAPE

2015

JOANA DARC GOMES BRAGA

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO AUXÍLIO PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAU

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática Semipresencial do Instituto Universidade Virtual da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 11/12/2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Hudson de Souza Felix (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Diego de Sousa Rodrigues
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Helton Udenes Nascimento Pontes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me proporcionar forças necessárias para ultrapassar os obstáculos que surgiram durante o curso.

À minha família, de modo especial, a minha mãe Denise, meu pai João, e meus irmãos Anastácio e Braga, que estavam sempre ao meu lado, principalmente em momentos de fraqueza.

A todos os meus colegas de curso, pelos momentos de descontração e troca de conhecimentos, destacando minha amiga Neiliane, companheira de batalha em todo o andamento do curso.

Aos tutores presenciais, Cleiton Freire, Cézar Amário e Helton Udenes, pela disponibilidade em ajudar sempre que necessário.

A toda a coordenação do Polo de Maranguape, em especial as professoras, Juliana Campos e Betânia Andrade, que estavam sempre dispostas a ouvir, ajudar e dar a assistência necessária para que as aulas acontecessem da melhor forma possível.

Ao meu orientador Prof. Hudson de Souza Feliz, pelo apoio e confiança, para que este trabalho pudesse ser desenvolvido.

Ao Prof. Diego de Sousa Rodrigues, pela gentileza e disponibilidade em ajudar-me sempre que precisei.

Ao Professor Renivaldo Sodré de Sena, por me dar algumas dicas sobre o desenvolvimento do trabalho.

A todos os professores a distância, pela flexibilidade de poder partilhar seus conhecimentos tanto pelo ambiente Solar, quanto nas aulas presenciais.

Agradeço a coordenação da Escola Estadual de Educação Profissional Capelão Frei Orlando, pela gentileza e apoio durante meu estágio, em especial a Profª. Maria Taylana e o Prof. Assis Bento.

RESUMO

Este trabalho se constitui de um estudo sobre a tecnologia na educação, sendo direcionado ao uso do software Geogebra, como auxílio para o estudo dos conceitos de funções polinomiais de 1º e 2º grau, explorando seus elementos a partir das ferramentas disponibilizadas pelo software. Tem por objetivo mostrar aos professores de matemática, mais uma possibilidade didática interessante, que pode ser aplicada em sala, contribuindo para uma aprendizagem significativa dos discentes, já que tais funções servem como base para o estudo de outros assuntos desta disciplina. Onde a partir da pedagogia apresentada no desenvolvimento deste trabalho, acredita-se que a aula torne-se mais produtiva e dinâmica, com uma tecnologia bem acessível e de simples manuseio. A pesquisa discorre basicamente sobre as Tecnologias educacionais, e a importância de sua aplicação em sala; Conceito de função polinomial do primeiro e segundo grau, assim como de seus devidos elementos; Apresentação do software Geogebra, e Aplicação do Geogebra nas duas funções citadas. A metodologia utilizada para esta pesquisa, foi a partir da revisão da literatura disponível, ou seja, a partir de fontes primárias já existentes, como livros, artigos, monografias, dissertações entre outras fontes. Com o desenvolvimento deste trabalho, é possível perceber o quanto o software Geogebra é eficaz para o ensino de funções, tornando-se um excelente recurso tecnológico para o processo de ensino e aprendizado da matemática.

Palavras-chave: Função do 1º grau, Função do 2º grau, Software Geogebra, Matemática Dinâmica, Tecnologia educacional.

ABSTRACT

This work is a study of technology in education, and it is directed the use of the Geogebra software as an aid for studying the concepts of polynomial functions of 1st and 2nd degree, exploring its elements from the tools provided by the software. It aims to show the math teacher, another interesting possibility teaching, which can be applied in the classroom, contributing to a significant learning of the students, since such functions are used as a basis for studying other subjects of this discipline. Where from the pedagogics displayed on the development of this work, it is believed that the class become more productive and dynamic, with an easily accessible technology and simple handling. The research basically talks about educational technologies, and the importance of their implementation in the classroom; Concepst of polynomial function of the first and second degree, as well as their proper elements; Presentation of the Geogebra software, and Geogebra's application of the two cited functions. The methodology used for this research was from the review of the available literature, that is, from existing primary sources such as books, articles, monographs, dissertations and other sources. Through the development of this work, is possible to notice how far the GeoGebra software is effective for teaching functions, making it an excellent technological resource for the teaching and learning of mathematics.

Key-words: 1st degree function, 2nd degree function, Geogebra software, Dinamic mathematics, Educational technology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A tecnologia é um método prático do conhecimento científico, que está em constante desenvolvimento. Um recurso que desde o princípio resulta do querer humano em facilitar a sua vida, ou seja, tem origem da necessidade do homem em agilizar, aprimorar e facilitar suas ações diárias, sendo aperfeiçoada a cada momento, sempre por conta destes fatores, pois novas dificuldades vão surgindo, e paralelamente a esses desafios, torna-se necessário aperfeiçoar e criar ferramentas adequadas para encontrar as devidas soluções. Essa busca por resoluções de problemas está presente nos vários âmbitos, sejam eles sociais, políticos, econômicos, e principalmente educacionais. Onde a educação é a ferramenta fundamental para transformar a sociedade, desta forma, não poderia ficar alheia à era tecnológica, já que existem tantas barreiras nesta área a serem ultrapassadas.

No que refere-se à criação do software Geogebra, não foi diferente. Pois surgiu da necessidade que Markus Hohenwarter, sentia em encontrar um recurso tecnológico capaz de trabalhar com álgebra e cálculo em um só ambiente. Sendo este adequado para ser utilizado diretamente no ambiente educacional, ou seja, seria aplicado com o objetivo de estimular os alunos a colocarem em prática a teoria estudada, de forma a concretizar seu aprendizado. Obtendo portanto, este software espetacular de matemática dinâmica, o qual dispõe de ferramentas eficientes para o ensino de diferentes assuntos matemáticos, podendo ser criado gráficos geométricos e cartesianos, polígonos, tabelas, pontos, entre outras ilustrações interessantes. É um software multiplataforma, gratuito e com um nível de competência altíssimo, tornando-se um ótimo recurso para diversas soluções no ambiente escolar.

As problemáticas que referem-se à educação, mais especificamente ao processo de ensino-aprendizagem, encontram na tecnologia uma alternativa para melhorias, já que a partir desta é possível criar novos espaços de aprendizagem. A inserção dos recursos tecnológicos neste processo vem trazendo resultados satisfatórios, principalmente com o uso de softwares específicos para cada área de estudo.

Como de acordo com o matemático Elon Lages Lima, existem dois conceitos fundamentais para o ensino da matemática, que são “Teoria de Conjuntos” e as “Funções”, onde servem de base para os demais assuntos desta ciência, logo é indispensável o estudo destes, de maneira aprofundada e significativa.

Diante da problemática de que grande parte dos discentes apresenta aversão à disciplina de matemática, sobretudo em assuntos como funções de primeiro e segundo grau, por apresentar em seus conceitos a relação entre grandezas que variam, pode-se inferir que essa aversão está diretamente ligada à falta de prática e aplicabilidade dos conceitos estudados. Logo este trabalho pretende mostrar uma alternativa didática de ensino direcionada ao estudo destas funções, com o auxílio do software Geogebra, permitindo o estudo, a alteração e a dinamicidade dos objetos, mesmo após a construção ter sido finalizada.

O objetivo principal do trabalho é promover o estudo considerável de tais funções, de forma que ambos os envolvidos, professor e aluno, possa utilizar o software a favor da construção do conhecimento, já que aulas deste assunto, geralmente são tidas como monótonas, e o software por sua vez vem no intuito de dinamizar estas aulas, tornando-as produtivas e aceitáveis nos dias atuais.

2 AS TECNOLOGIAS EDUCACIONAIS, E A IMPORTÂNCIA DE SUA APLICAÇÃO EM SALA

Tecnologia educacional, como o próprio termo descreve, é a utilização da tecnologia a favor da educação, onde existem diversos recursos desta área com o objetivo de mudar e melhorar as práticas pedagógicas, tendo como consequência à eficiência no processo de ensino-aprendizagem. Estas podem ser adaptadas às carências existentes nos espaços educacionais, de forma que ajudem a desenvolver a capacidade do individuo, em tornar-se apto a conviver com a realidade de seu dia-a-dia, ou seja, tornando-se um cidadão informado, capacitado, critico e flexivo, assim como disposto a possíveis mudanças.

Valente (1993) opina sobre a Informática Educacional:

> A Informática Educacional é o processo que coloca o computador e sua tecnologia a serviço da educação. Portanto, todos os aspectos e as variáveis neste processo deverão estar subordinados à consideração de que a essência da IE é de natureza pedagógica, buscando assim melhorias dos processos de ensino-aprendizagem de forma a levar o aluno a aprender, e o professor a orientar e auxiliar esta aprendizagem, tornando-o apto a discernir sobre a realidade e nela atuar (VALENTE, 1993, p.26)

Com o avanço da tecnologia, e a facilidade de acesso à mesma desde a Segunda Guerra Mundial, tudo fica mais próximo e fácil, seja no sentido da comunicação, interação entre outros, isso gerou um impacto nas escolas brasileiras, onde logo no início dos anos 80, houve a influência de uma política, a qual tinha o objetivo de buscar mecanismos para melhorar a qualidade do ensino nas escolas, isso por meio da inserção de computadores no processo de ensino-aprendizagem, esta política chamou-se de Política de Informática Educativa (PIE). Houve diversas discussões sobre esta possibilidade, sendo que em 1996 tais ideias foram ao menos analisadas ainda de forma subentendida na Lei nº. 9394/96 das Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

Mas por ter sido algo ainda muito novo, e sem tantas preparações, certamente houve dificuldades para essa aceitação e desenvolvimento, pois alguns benefícios surgiram, mas gerou alguns conflitos também, pela falta de planejamentos, onde até nos dias atuais essa pedagogia vem sendo aprimorada, reformulada, adaptada e sempre tendo algo a ser consertado, assim como, ainda implantações também, pois não são todas as instituições que se beneficiam dessa realidade.

Ao inserir a tecnologia como ferramenta para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, é necessária muita atenção e planejamento, pois ela como todos sabem, assim como traz muitos benefícios para esta área, pode acontecer de ocasionar malefícios também, isso depende muito da forma de como será utilizada, necessitando sempre de um objetivo principal a ser alcançado no momento. É importante a inter-relação da matéria com o que o professor está almejando diante de sua pedagogia, fazendo com que não haja abusos sob a exploração dos recursos tecnológicos, não tornando as aulas como tradicionais, ou seja, é necessário sempre a uma alternância de aulas teóricas com práticas, assim como modificações na forma de como estes recursos são aplicados para determinados fins.

Conforme SANCHO (1998):

> [...] os profissionais do ensino, qualquer que seja sua função no sistema, necessitam conhecer e avaliar, para poder tomar decisões informadas, as tecnologias da informação e comunicação disponíveis, que já fazem parte do ambiente de socialização dos corpos discente e docente. Necessitam pensar em uma tecnologia que seja educacional, quer dizer, útil para educar. Precisam de um conhecimento que possibilite a organização de ambientes de aprendizagem (físicos, simbólicos e organizacionais) que situem os alunos e o corpo docente nas melhores condições possíveis para perseguirem metas educacionais consideradas pessoal e socialmente valiosas. Isso sem cair na ingenuidade de crer que com isso acabaremos com os problemas do ensino, nem no engano de pensar que, ignorando o que ocorre ao nosso redor, salvaguardaremos a escola dos perigos tecnológicos (p.13).

Muitas incertezas se têm quando surge a proposta de utilização das ferramentas tecnológicas em sala, pois são novos desafios, novas didáticas, novas alternativas de ensino, novos comportamentos e adaptações, em fim, sem dúvidas, uma nova cultura, cultura esta que já está presente em nosso meio, onde gera receio nos professores, mas estes não poderão ficar tímidos diante da realidade, pois ele terá que deixar a passividade do ser que “ensina”, e passará a buscar opções para aprendizagens significativas.

E incluso a estas tecnologias aparecem os softwares educacionais, os quais têm sido bastante úteis para o auxílio nas aulas dos profissionais da educação, levando ao aluno a possibilidade de obter um conhecimento mais concreto, visto que, ele poderá colocar a teoria em prática, assim observando a realidade do que estudou. Sendo de suma importância, que ambas as partes professor e aluno, tenham um conhecimento sobre o software (ou qualquer ferramenta tecnológica) que deseja utilizar, para que não haja desmotivações por não saberem manuseá-lo. Logo é importante que o professor esteja sempre em constante formação nesta área, para que possa planejar aulas mais interessantes a partir do uso da tecnologia, sendo realmente capaz de auxiliar os alunos nas atividades propostas.

3 ESTUDO DOS CONCEITOS DAS FUNÇÕES DE 1º E 2º GRAU

Neste capítulo será abordado de forma detalhada o estudo dos conceitos das funções polinomiais de 1º e 2º grau, que serão explorados posteriormente a partir do software Geogebra. A fim de uma leitura complementar é indicado [1], [4], [5].

Para ter uma iniciativa como esta, de utilizar um software educacional em sala de aula, é importante que os alunos, assim como o professor, saibam que a teoria do conteúdo, ou seja, os conceitos e elementos devem antes ser introduzidos. Onde de nada irá adiantar ir à prática sem o conhecimento da teoria, pois o aluno não desenvolverá seu aprendizado, visto que acumulará uma grande quantidade de informações em um só momento, sendo estudado o conteúdo e logo praticado no software. O auxílio do software é justamente para explorar, fixar e compreender ainda mais o que já foi visto previamente, uma vez que, a prática desenvolve esse papel de proporcionar o verdadeiro conhecimento a partir de uma teoria.

3.1 Função polinomial do primeiro grau

Também conhecida como função afim, a função polinomial do segundo grau é uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow \mathbb{R}$ definida como, $f(x) = ax + b$, onde $a,b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, para todo $x \in R$, esta é denominada de primeiro grau pelo fato de que o maior expoente da variável x é 1, onde o número **a** é o coeficiente de x, enquanto o número **b** é o termo independente.

Obs.: Existem alguns casos particulares das funções afins, veja: A função identidade definida por $f(x) = x$, ou seja, $a = 1$e $b = 0$; A função linear dada por $f(x) = ax$, ou seja, $a \neq 0$ e $b = 0$; E também tem a função constante definida por $f(x) = b$, ou seja, $a = 0$ e $b \neq 0$.

Exemplos: $f(x) = 2x + 2 \rightarrow a = 2; b = 2$

$f(x) = x \rightarrow a = 1; b = 0$ (Função identidade)

$f(x) = 4x \rightarrow a = 4; b = 0$ (Função linear)

$f(x) = 5 \rightarrow a = 0; b = 5$ (Função constante)

Exemplo no cotidiano: Para fabricação de pneus de bicicleta, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 21,00, mais um custo variável de R$ 2,20 por unidade produzida. Onde x é o número de peças unitárias produzidas.

Neste caso temos uma função afim dada pela seguinte lei de formação: $\mathbf{F(x) = 2{,}20x + 21}$. Ou seja, tem-se que o custo (y ou F(x)) depende da quantidade de pneus produzidos.

3.1.1 Gráfico da função do primeiro grau

A representação gráfica desta função, é uma reta não-paralela aos eixos OX ou OY. Este pode ser construído a partir da atribuição de valores reais a **x**, obtendo-se assim **y** ou **f(x)** (os dois representam a mesma notação), logo encontrando pontos formados por pares ordenados do tipo **(x,y)**, sendo estes localizados no plano cartesiano e assim traçando a reta que passa por eles.

Exemplo: Construir o gráfico da função f(x) = 2x + 2:

É interessante construir de início, uma tabela contendo os valores atribuídos a **x**, e os valores encontrados para **y**, formando os pontos, para depois traçar o gráfico, veja:

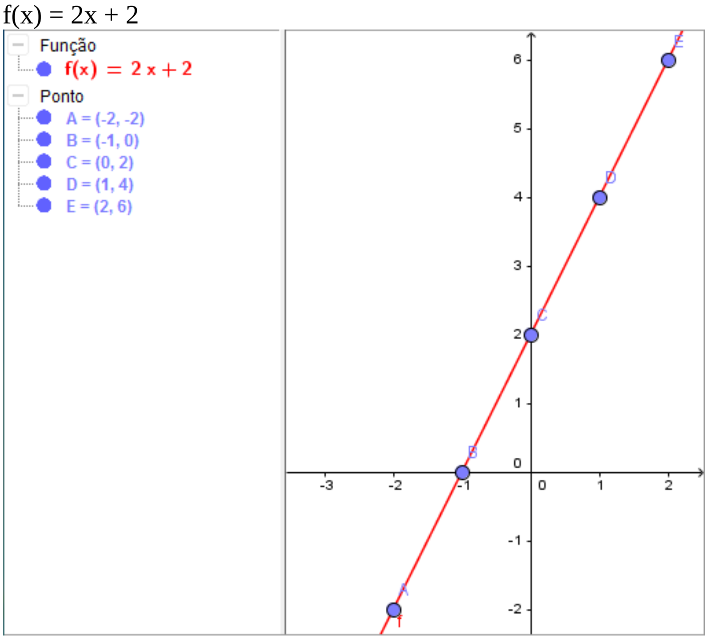
Tabela 1 – Obtenção das coordenadas dos pontos: y = 2x+2

x	y = 2x + 2	Ponto (x, y)
-2	2. (-2) + 2 = - 2	A (-2, -2)
-1	2. (-1) + 2 = 0	B (-1, 0)
0	2. (0) + 2 = 2	C (0, 2)
1	2. (1) + 2 = 4	D (1, 4)
2	2. (2) + 2 = 6	E (2, 6)

Fonte: Elaborada pelo autor

Agora traçando a reta que passa pelos pontos encontrados na tabela acima, é possível observar o seguinte gráfico formado:

Figura 1 – Construção do gráfico da função do 1º grau dada por f(x) = 2x + 2



Fonte: Elaborada pelo autor

3.1.2 Zero ou raiz da função

É conhecido como raiz ou zero desta função, um número real **x** do seu domínio cuja imagem é zero, ou seja, **f(x) = 0**, sendo basicamente a abscissa do ponto a qual a reta intercepta o eixo OX. Logo podemos obter a raiz ou zero desta função a partir da seguinte notação:

f(x) = 0 → ax + b = 0 → **x = -b/a**

Exemplo: Raiz ou zero da função f(x) = x + 3:

Tem-se que a = 1 e b = 3, logo x = -3/1 → x = -3, portanto **x = -3**, é a raiz desta função.

3.1.3 Coeficientes numéricos

Os coeficientes numéricos apresentam importante papel para o entendimento e até construção do gráfico de uma função, ou seja, cada um deles possui sua característica no gráfico, logo na função do primeiro grau, tem-se dois, sendo eles, o Coeficiente angular e o Coeficiente linear.

3.1.3.1 Coeficiente angular

Dada f:IR→ IR definida por f(x) = **a**x + b uma função polinomial do primeiro grau, é denominado como coeficiente angular, o coeficiente **a**, o qual está sempre acompanhado pela variável **x**. Este está relacionado à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas (OX), ou seja, indica a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo horizontal. Também informa se a função é crescente ou decrescente, sendo que quando **a > 0**, a função é crescente, onde se **x** aumenta, **y** também tende a aumentar, e quando **a < 0**, a função é decrescente, ou seja, se o valor de **x** aumenta o de **y** diminui.

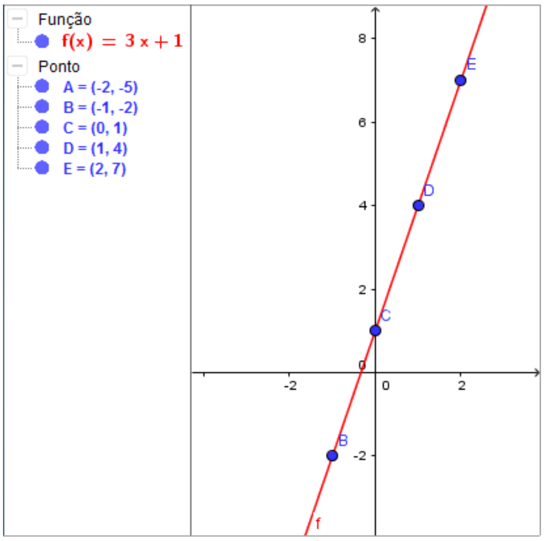
Exemplos:

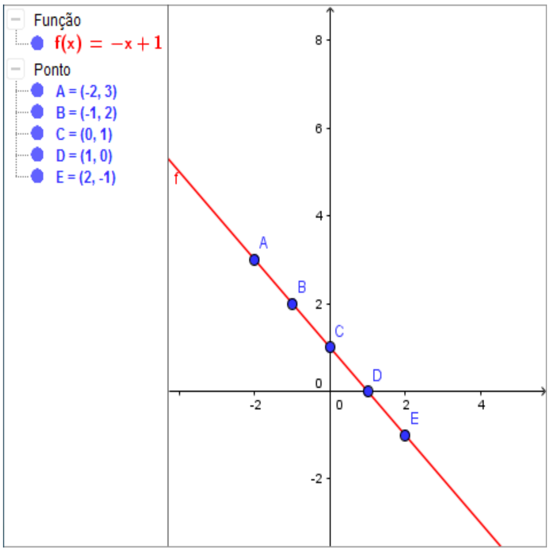
Figura 2 – Função Crescente e Função Decrescente

A função **f(x) = 3x + 1**, é **crescente**, pois **a = 3**, logo **a > 0**, perceba que quanto maior o valor atribuído a x, maior é o valor obtido em y:	Já a função **f(x) = -x + 1** é **decrescente**, pois **a = -1**, logo **a < 0**, onde quanto maior o valor atribuído a x, menor é o valor obtido em y:

x	y = 3x + 1	Ponto (x, y)
-2	3.(-2) + 1 = -5	A (-2, -5)
-1	3.(-1) + 1 = -2	B (-1, -2)
0	3.(0) + 1 = 1	C (0, 1)
1	3.(1) + 1 = 4	D (1, 4)
2	3.(2) + 1 = 7	E (2, 7)

x	y = -x + 1	Ponto (x, y)
-2	- (-2) + 1 = 3	A (-2, 3)
-1	- (-1) + 1 = 2	B (-1, 2)
0	- (0) + 1 = 1	C (0, 1)
1	- (1) + 1 = 0	D (1, 0)
2	- (2) + 1 = -1	E (2, -1)





Fonte: Elaborada pelo autor

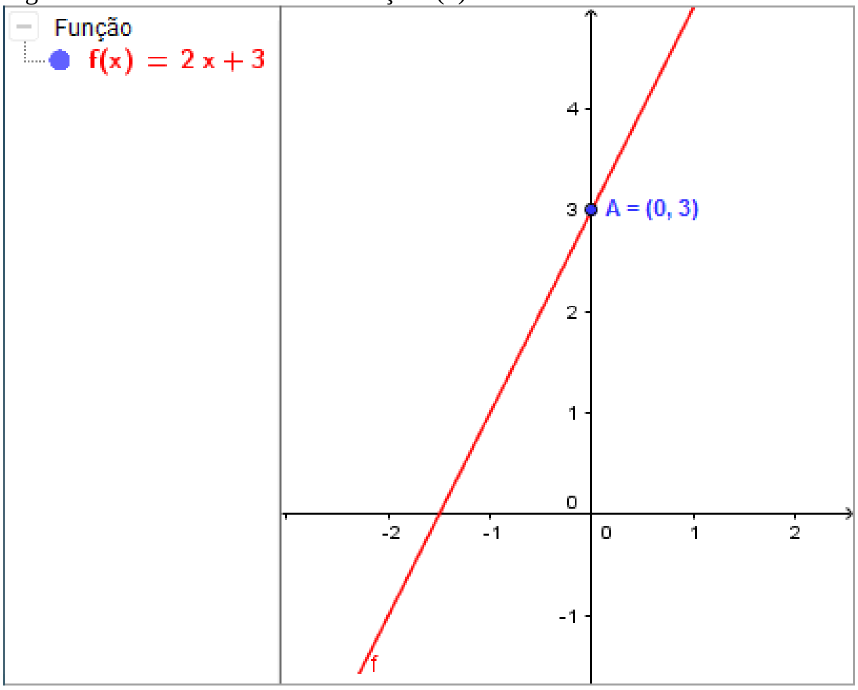
3.1.3.2 Coeficiente Linear

Dada f:IR→ IR definida por f(x) = ax + **b** uma função polinomial do primeiro grau, é denominado como coeficiente linear, o coeficiente **b,** este é o termo independente, caracterizado pela ordenada do ponto em que a reta corta o eixo vertical (OY), pois tem-se que:

Para x = 0, y = a.0 + b → y = b, obtendo-se o ponto **(0,b)**.

Exemplo: Na função **f(x) = 2x + 3**, observa-se que o coeficiente linear é igual a **3**, logo analisando no gráfico abaixo, de fato o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo OY.

Figura 3 – Coeficiente linear da função f(x) = 2x + 3



Fonte: Elaborada pelo autor

3.2 Função polinomial do segundo grau

Também conhecida por função quadrática, a função polinomial do segundo grau é uma função f:IR→ IR definida como $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a,b,c ∈ IR com a ≠ 0, para todo x ∈ R, sendo **c** o termo independente.

Exemplos: $f(x) = x^2 + 2x + 5 \rightarrow a = 1$; $b = 2$ e $c = 5$.

$f(x) = -5x^2 + 3x \rightarrow a = -5$; $b = 3$ e $c = 0$.

$f(x) = 8x^2 + 9 \rightarrow a = 8$; $b = 0$ e $c = 9$.

$f(x) = x^2 \rightarrow a = 1$; $b = 0$ e $c = 0$.

Exemplo no cotidiano: Uma pessoa ao chutar fortemente uma bola que estava possivelmente parada, esta irá atingir uma altura máxima, e logo começará a descer formando uma curva, sendo esta conhecida como parábola, ou seja, a representação gráfica de uma função quadrática.

Obs.: A partir de movimentos como este, o físico Italiano Galileu Galilei chegou a concluir, que qualquer corpo ao ser lançado no campo de gravidade da Terra, apresentaria o mesmo movimento, desde que a resistência do ar seja desprezada.

3.2.1 Gráfico da função do segundo grau

A representação gráfica da função quadrática é dada por uma curva, sendo esta chamada de parábola. Ao fazer esta representação, a parábola pode apresentar a abertura(concavidade) voltada para cima ou para baixo. Assim como o da função do primeiro grau, este também pode ser construído a partir de atribuição de valores a **x** obtendo assim valores de **y**.

Exemplo: Construir o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2$:

Inicialmente construindo uma tabela para obter os pontos, temos:

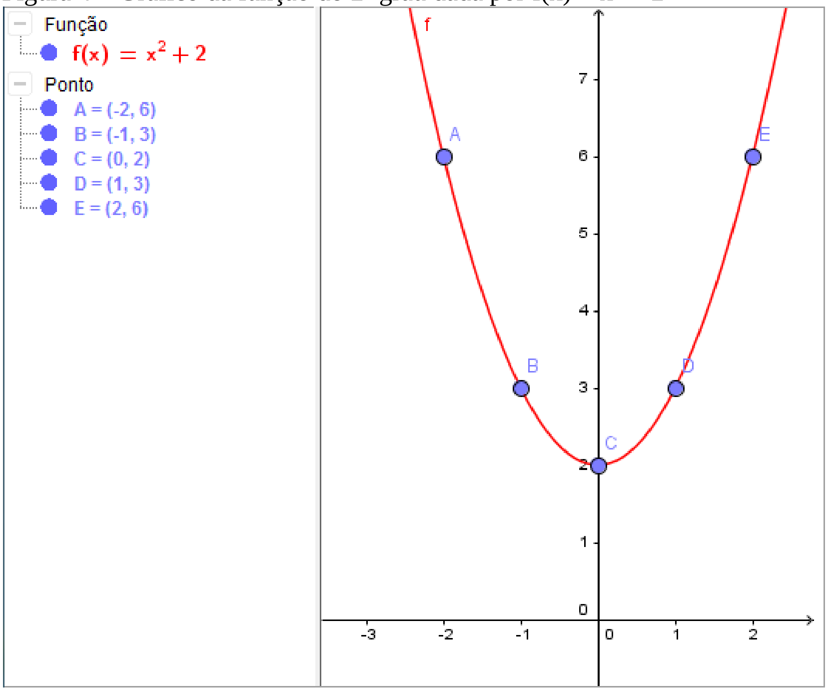
Tabela 2 – Obtenção das coordenadas dos pontos: $y = x^2+2$

x	$y = x^2 + 2$	**Ponto (x, y)**
-2	$(-2)^2 + 2 = 6$	A (-2, 6)
-1	$(-1)^2 + 2 = 3$	B (-1, 3)
0	$(0)^2 + 2 = 2$	C (0, 2)
1	$(1)^2 + 2 = 3$	D (1, 3)
2	$(2)^2 + 2 = 6$	E (2, 6)

Fonte: Elaborada pelo autor

Agora traçando a curva que passa pelos pontos encontrados na tabela acima, é possível obter a seguinte representação gráfica:

Figura 4 – Gráfico da função do 2º grau dada por $f(x) = x^2 + 2$



Fonte: Elaborada pelo autor

3.2.2 Relação entre a concavidade da parábola e o coeficiente a

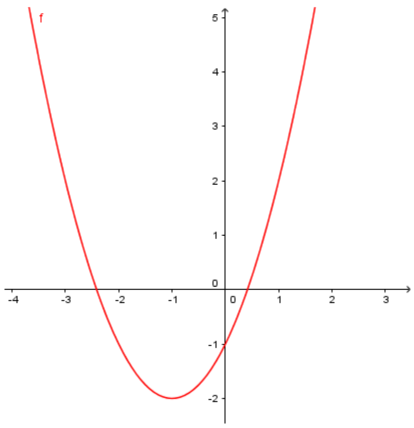
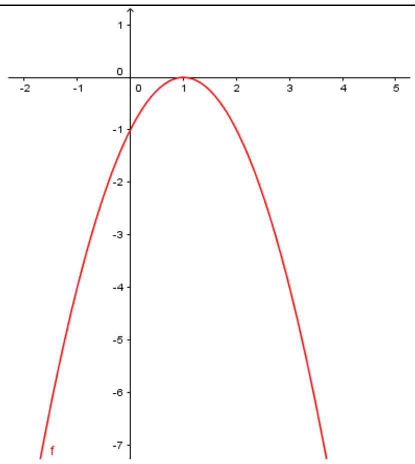
O coeficiente **a** desta função ($f(x) = ax^2 + bx + c$), está relacionado ao estudo da concavidade da parábola, indicando se a mesma possui concavidade voltada para cima ou para baixo, considerando o seguinte:

a) se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

b) se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Exemplos:

Figura 5 – Concavidade de uma Parábola

Gráfico da função $f(x) = \mathbf{x^2} + 2x - 1$: **a > 0**	Gráfico da função $f(x) = \mathbf{-x^2} + 2x - 1$: **a < 0**
	

Fonte: Elaborada pelo autor

3.2.3 Zeros ou raízes da função

Sabe-se que os zeros de uma função f, são os números reais **x** para os quais obtém-se $\mathbf{f(x) = 0}$, logo é possível perceber que os zeros da função quadrática, são os resultados da equação do segundo grau definida por, $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. Sendo que tais raízes podem ser encontradas a partir da fórmula de Bhaskara, dada por:

$$x = \frac{\left(-b \pm \sqrt{\Delta}\right)}{2a}, \text{onde } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

Demonstração 1: Abaixo segue a demonstração desta fórmula, bem como o porquê de ser conhecida como fórmula de Bhaskara.

Esta fórmula pode ser demonstrada a partir da forma canônica da função quadrática veja:

Considerando f(x) = $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, logo é possível colocar **a** em evidencia, fazendo isso obtemos,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \to f(x) = a\left[\mathbf{x^2} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x} + \frac{c}{a}\right]$$

Observe que a parte em negrito na função acima, corresponde a parte em negrito destacada no desenvolvimento baixo,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \mathbf{x^2} + \mathbf{2.}\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}.\mathbf{x} + \frac{b^2}{4a^2}$$

A partir da observação das parcelas destacadas em negrito, podemos reescrever a função, e logo completando o quadrado temos,

$$f(x) = a\left[\mathbf{x^2} + \mathbf{2.}\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}.\mathbf{x} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \Leftrightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c \Rightarrow$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\text{, sendo esta portanto, a forma canônica de } f(x).$$

Então a partir desta, iremos chegar à fórmula para encontrar as raízes desta função. Como para encontrarmos as raízes fazemos f(x) = 0, logo:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = 0$$

Colocando a parcela que contém **x**, em evidência, temos,

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Assim, como $b^2 - 4ac$ é representado pela a letra grega Δ, sendo o discriminante do trinômio do 2º grau, logo obtemos a seguinte fórmula final, sendo esta a fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Curiosidade: A fórmula de Bhaskara possui esta denominação, por considerarem que o matemático indiano Bhaskara foi quem a desenvolveu, mas somente aqui no Brasil esta foi atribuída ao indiano, pois segundo estudiosos tal método de resolução, já era utilizado bem antes pelos Babilônios.

Exemplo: Encontre as raízes da função dada por, f(x) = $x^2 + 3x + 2$.

Temos a equação $x^2 + 3x + 2 = 0$, observe que: **a = 1**, **b = 3** e **c = 2**, logo,

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \to \Delta = 3^2 - 4.1.2 \to \Delta = 9 - 8 \to \Delta = \mathbf{1}$$

$$x = \frac{\left(-b \pm \sqrt{\Delta}\right)}{2a} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\left(-3 + \sqrt{1}\right)}{2.1} \rightarrow x_1 = \dfrac{-3+1}{2} \rightarrow \mathbf{x_1 = -1} \\ x_2 = \dfrac{\left(-3 - \sqrt{1}\right)}{2.1} \rightarrow x_2 = \dfrac{-3-1}{2} \rightarrow \mathbf{x_2 = -2} \end{cases}$$

Portanto as raízes da função f**(x) =** $\mathbf{x^2}$ **+ 3x + 2**, são $\mathbf{x_1}$ **= -1 e** $\mathbf{x_2}$ **= -2**.

Obs.: Considerando o gráfico da função, estas raízes podem ser facilmente detectadas, pois são dadas pelas abscissas dos pontos em que a parábola (curva) intercepta o eixo OX, podendo perceber isso nas figuras da seção 5.3.

3.2.3.1 Relação entre a quantidade de raízes reais e o valor do discriminante

A quantidade de raízes reais da função quadrática irá depender do valor encontrado para o discriminante (Δ), onde tem-se que:

a) se $\Delta > 0$, há duas raízes reais e distintas;
b) se $\Delta = 0$, há somente uma raiz real (deixando mais claro, há duas raízes reais sendo estas iguais);
c) se $\Delta < 0$, não há raiz real.

Obs.: Isso se deve ao fato de que, como a fórmula para encontrar as raízes da função, é dada por:

$$x = \frac{\left(-b \pm \sqrt{\Delta}\right)}{2a}, \text{onde } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

Logo observa-se que há a necessidade de extrair a raiz quadrada do delta, onde $\sqrt{\Delta} \in R$, então se:

a) $\Delta > 0$, é possível extrair a raiz, obtendo um número real, onde ao ser substituído na fórmula de Bhaskara, será possível encontrar dois números reais e distintos, logo a função possui duas raízes reais e distintas;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

b) $\Delta = 0$, temos que raiz quadrada de zero, é o próprio zero, e por ser um número considerado nulo, este não influenciará no cálculo, ou seja, ao somar ou subtrair o zero na fórmula, o resultado será o mesmo, logo obteremos somente um ponto que interceptará o eixo OX, e, portanto obtendo somente uma raiz real (deixando mais claro, há duas raízes reais sendo estas iguais);

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

c) $\Delta < 0$, ao extrair a raiz de um número negativo, não é possível obter um número pertencente ao conjunto dos Reais, ou seja, $\sqrt{\Delta} \notin R$, mas sim ao conjunto dos complexos, portanto não há raiz real, onde o gráfico não intercepta o eixo das abscissas.

3.2.4 Vértice da parábola e o eixo de simetria

O vértice da parábola representa o ponto em que a curva atinge seu ponto de máximo ou de mínimo, quando **a** > $\mathbf{0}$ (parábola com concavidade voltada para cima), logo atinge um ponto de mínimo, quando **a** < $\mathbf{0}$ (parábola com concavidade voltada para baixo), logo atinge um ponto de máximo. As coordenadas desse ponto podem ser obtidas a partir das seguintes fórmulas.

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \text{obtendo o ponto } V(x_v, y_v)$$

O eixo de simetria é caracterizado pela reta **x =** $\mathbf{x_v}$, sendo esta paralela ao eixo das ordenadas, passando pelo vértice e dividindo a parábola em duas partes simétricas, daí seu nome.

Demonstração 2: Abaixo segue as demonstrações destas fórmulas, de forma que possa entender qual a ideia para chegar a esta conclusão.

Considerando que o eixo de simetria da parábola é dado pela reta x = x_v, a qual divide a parábola em duas partes simétricas, logo as raízes são equidistantes de x_v, podendo inferir que x_v é a média aritmética das raízes da equação do segundo grau, logo temos que,

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_v = \frac{\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}{2} \Rightarrow x_v = \frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Pronto, foi encontrada a abscissa do vértice(x_v), agora fica fácil encontrar a ordenada do vértice(y_v), pois $y_v = f(x_v)$, logo,

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_v = a\left(\frac{b^2}{2a}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Como visto na Demonstração 1, $b^2 + 4ac = \Delta$, então,

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow \mathbf{y_v} = \frac{-\Delta}{\mathbf{4a}}$$

Portanto ficam demonstradas as fórmulas para encontrar as coordenadas do vértice de uma parábola.

3.2.5 Elementos importantes para a construção da parábola

- A partir do valor do **coeficiente a**, é definido a concavidade da parábola;
- O **coeficiente b** está ligado à inclinação que a curva apresenta após passar pelo eixo OY, ou seja, o movimento de translação da parábola vertical e horizontal;
- **Coeficiente c**: O ponto em que a parábola intercepta o eixo das ordenadas **(OY)**, é dado por (0,c), pois sendo $x = 0$, obtém-se $y = a.0^2 + b.0 + c = \mathbf{c}$;
- As **raízes ou zeros**, determinam os pontos em que a parábola intercepta o eixo das abscissas **(OX)**;
- Com o **vértice** tem-se o ponto de mínimo (quando $a > 0$), ou de máximo (quando $a < 0$);
- A reta que é paralela ao eixo das ordenadas e passa pelo vértice é chamado de eixo de simetria da parábola.

4 CONHECENDO O SOFTWARE GEOGEBRA

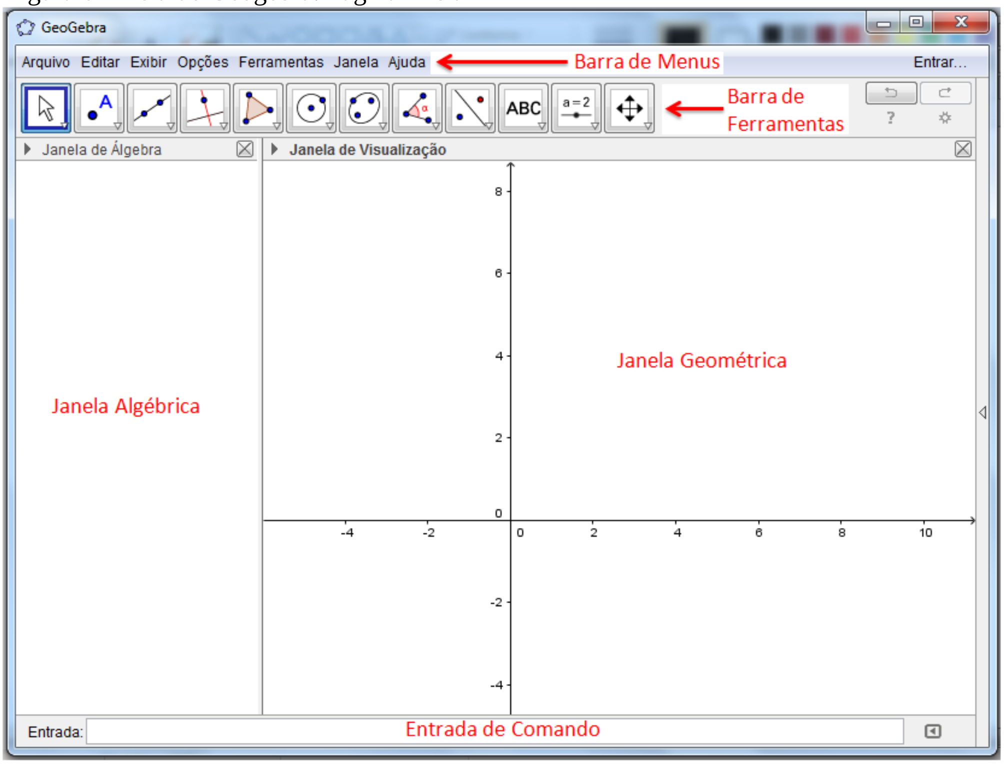
A palavra Geogebra vem da junção de duas outras palavras, Geometria e Álgebra, sendo um software que possui uma diversidade de características, capaz de reunir estudos sobre diferentes assuntos, como, cálculo, álgebra, estatística, entre outros, isso em uma única interface, o que o torna um aplicativo bastante útil no ambiente escolar, já que contribui para a dinamicidade e criatividade no estudo da matemática.

O Geogebra foi criado no ano de 2001, por Markus Hohenwarter, sendo o objeto de estudo para que ele pudesse adquirir seu título de doutorado, o objetivo da criação e desenvolvimento deste software era obter um instrumento, o qual pudesse combinar artifícios algébricos e geométricos, capaz de contribuir diretamente no processo de ensino e aprendizagem, visto que, os alunos em geral sempre apresentam dificuldades nestas áreas, e principalmente em relacioná-las.

Uma característica interessante a ser destacada, é que este programa é gratuito, sendo disponibilizado em diversas línguas, entre elas o português, e poderá ser adquirido no seguinte endereço http://www.geogebra.org/download, ressaltando também que este tem a capacidade de colaborar desde o ensino fundamental até o superior.

Acessando o software temos o seguinte *layout:*

Figura 6 – Tela do Geogebra: Página inicial



Fonte: Elaborada pelo autor

4.1 Abrangendo cada área apresentada na Figura 6

Barra de menus

Aqui ficam disponíveis 7 menus, contendo nestes outros sub-menus, possibilitando ao usuário criar um novo documento, salvar, alterar, editar, encontrar tutoriais sobre o Geogebra, requisitando ajuda sobre como manusear o software, enfim é onde se pode encontrar opções colaborativas com diversas funcionalidades para possíveis necessidades do usuário.

Barra de ferramentas

Nesta área ficam disponíveis as ferramentas que basicamente usamos na geometria dinâmica, onde em cada ferramenta há uma pequena seta no canto inferior direito, que ao clicar nesta encontra-se outras variações de tal ferramenta, sendo possível criar pontos, retas, ângulos, secções cônicas, entre outras possibilidades.

Entrada de comando

Nesta zona se insere os comandos, seja funções, equações e até mesmo coordenadas dos pontos, onde ao teclar *enter* permite a "criação" do objeto desejado, que aparecerá na zona gráfica, e a representação algébrica a qual foi solicitada aparecerá na zona algébrica, a partir desta área de entrada de comandos, é possível tanto criar objetos como alterar também. Geralmente as pessoas que já são acostumadas com os comandos do geogebra, costumam usar bastante esta área, pois é uma forma mais direta e rápida de obter o resultado do que se deseja.

Zona Algébrica

Nesta ficam disponibilizados algebricamente de forma detalhada os elementos que podem ser visualizados na zona gráfica, como por exemplo digitando a função f(x) = x^2+2 na entrada de comando e teclando *enter*, aparecerá esta devida função na zona algébrica e seu devido gráfico na zona gráfica. Poderá ser visto com mais detalhes casos como este exemplo, a partir da seção 5, quando será aplicado o geogebra no estudo de funções do primeiro e segundo grau.

Zona Gráfica

Conhecida também como tela de visualização, pois como o próprio nome já destaca, será apresentado às construções gráficas inseridas, tanto por parte da entrada de comando, como a partir do uso das ferramentas que são utilizadas para "desenhar" o que deseja, sejam polígonos, pontos, retas e etc, ou seja, é a janela que dá retorno ao usuário de poder visualizar o que está sendo construído.

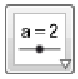
5 EXPLORANDO AS FUNÇÕES DE 1º E 2º GRAU COM O GEOGEBRA

O objetivo deste capítulo é utilizar o software de modo a praticar os conceitos das funções de 1º e 2º grau, que foram introduzidos no decorrer do capítulo 3. Será mostrado o passo-a-passo de como construir o gráfico de cada função, bem como, encontrar e detectar cada elemento que foi estudado, também perceber o comportamento destes gráficos a partir das variações de seus coeficientes, de modo que o aluno possa fixar o que foi introduzido. Neste momento é recomendado que o professor torne-se um mediador entre o aluno e o software, ou seja, fazer perguntas sobre o que acontece ao variar o valor de cada coeficiente, entre outras indagações, com intuito do aluno construir suas próprias conclusões. Assim consolidando os conceitos já explicados, pois dar respostas prontas não desenvolverá a capacidade do aluno de pensar, observar e investigar, tornando a aula sempre monótona e sem produção de conhecimentos.

5.1 Aplicações do Geogebra na função Polinomial do Primeiro grau

Praticando: Obter o gráfico da função desta natureza no software;

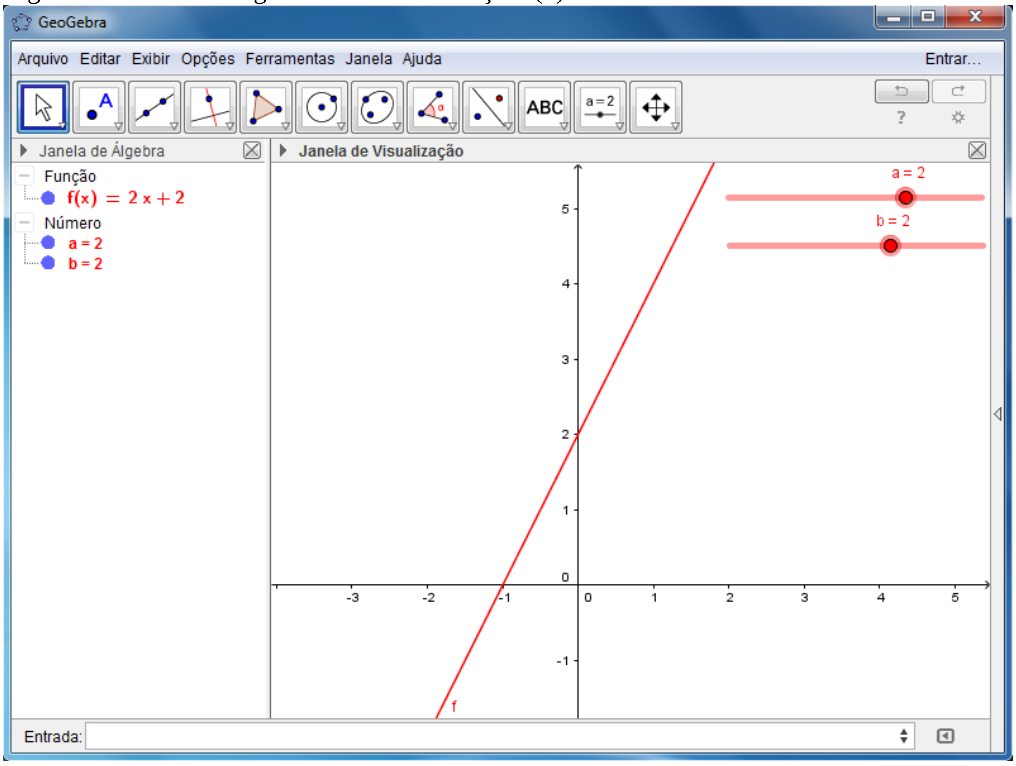
Para isso segue os comandos:

a) Inicialmente criando dois seletores ***a*** e ***b***, para isso na barra de ferramentas dê um clique duplo na penúltima ferramenta, da esquerda para direita, 

e escolha a opção *controle deslizante*, em seguida clique na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante; Abrirá outra janela, nesta é possível alterar algumas configurações do seletor, logo em *nome* digite ***a = 2***, e no intervalo, já vem de padrão **-5** para mínimo e **5** para máximo, assim será mantido, e clique em *aplicar*, onde será criado o seletor ***a***, e para criação do ***b***, segue os mesmos passos, mudando somente o *nome*, digitando ***b = 2;***

b) Agora na entrada de comando, digite a lei de formação da função do primeiro grau, dada por, ***f(x) = ax + b***, e logo clique *enter*, onde será apresentado na janela gráfica, a construção do gráfico da função **f(x) = 2x + 2**, formada a partir dos valores atribuídos para os dois seletores criados anteriormente, ***a*** e ***b***. Observe esta representação na Figura 7;

Figura 7 – Tela do Geogebra: Gráfico da função f(x) = 2x + 2



Fonte: Elaborada pelo autor

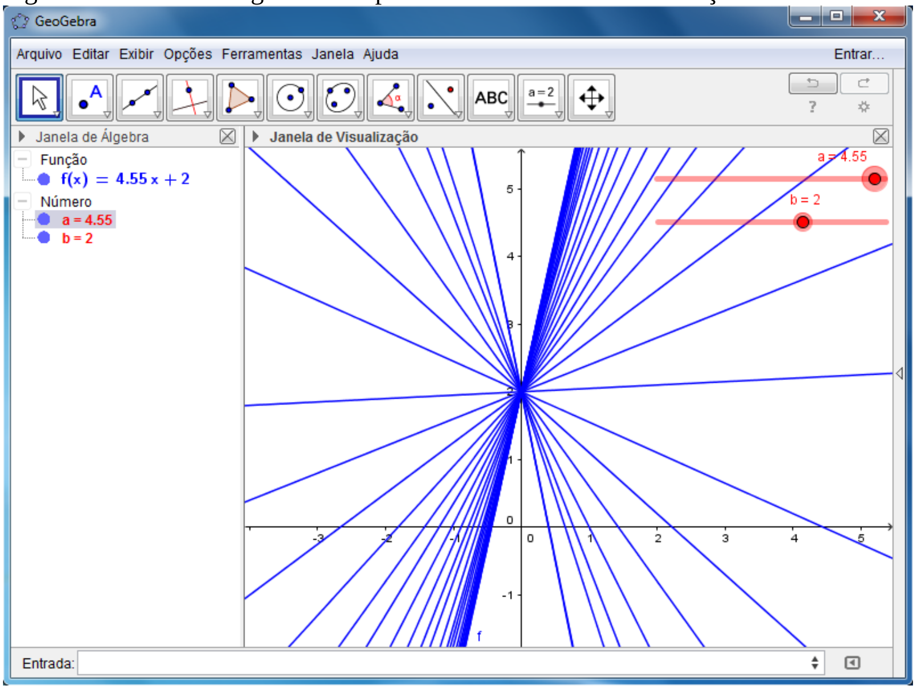
c) Finalmente agora será possível estudar o comportamento do gráfico, de acordo com a variação dos coeficientes da função, para melhor visualização do movimento gerado, se desejar habilite a função *rastro* no software, para isso proceda da seguinte forma: clique com o botão direito do *mouse* em cima da função na janela algébrica e clique em *habilitar rastro*, para desfazer segue os mesmos passos.

5.1.1 Variação do coeficiente angular

Movimentando o seletor ***a***, ou seja, variando os valores para o coeficiente angular, estudado na seção 3.1.3.1, pode-se perceber que há uma variação na inclinação da reta em torno do coeficiente **b**, ou seja, a reta apresenta variações no ângulo de inclinação, por isso que o coeficiente de **x**, neste caso o **a**, fica conhecido como coeficiente angular da reta, observe isso na Figura 8.

Obtemos o seguinte comportamento do gráfico:

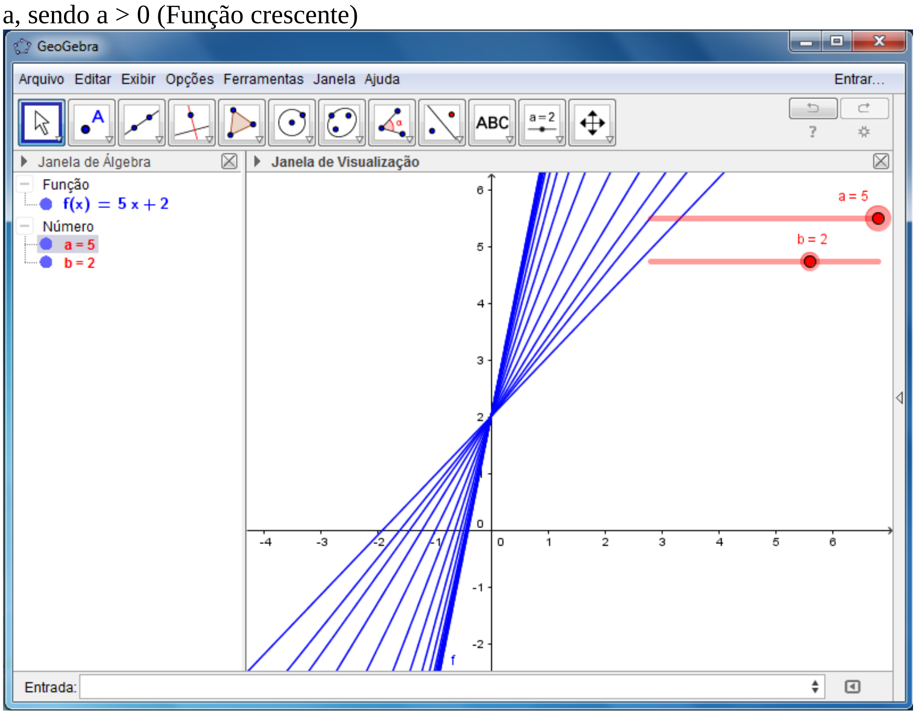
Figura 8 – Tela do Geogebra: Comportamento da reta com a variação do coeficiente a



Fonte: Elaborada pelo autor

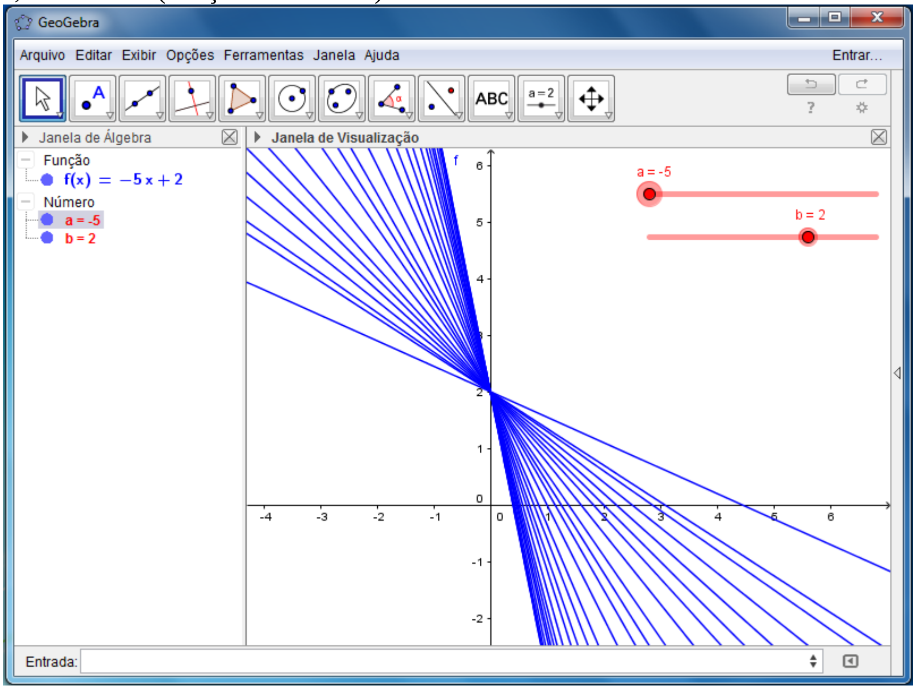
Aqui também é possível perceber que variando o valor de **a**, enquanto **a** < **0**, a reta é decrescente, e quando **a** > **0** a reta é crescente. Observe a seguir estes dois casos, para melhor visualizar o movimento gerado, se desejar habilite o *rastro* na função, para isso, clique com o botão esquerdo do *mouse* em cima da função na janela algébrica e clique em *habilitar rastro*, para desfazer segue os mesmos passos.

Figura 9 – Tela do Geogebra: Comportamento da reta com a variação do coeficiente a, sendo a > 0 (Função crescente)



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 10 – Tela do Geogebra: Comportamento da reta com a variação do coeficiente a, sendo a < 0 (Função decrescente)

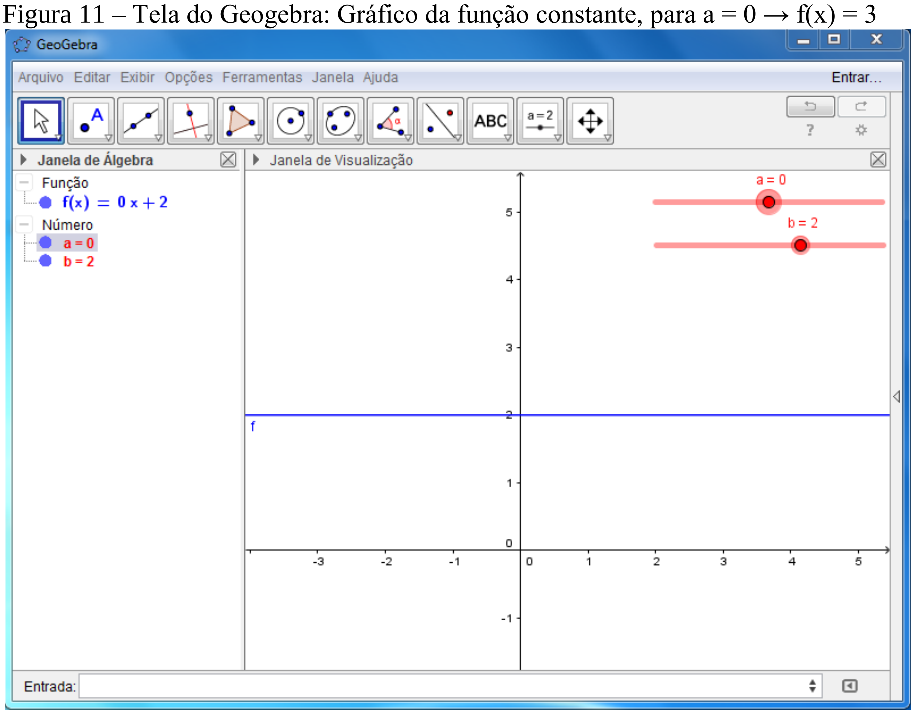


Fonte: Elaborada pelo autor

E quando deixa-se o seletor em a = 0?

Daí já não se tem mais uma função polinomial do primeiro grau, mas sim uma **função constante**, pois tem-se que, f(x) = 0.x + b → **f(x) = b**, sendo portanto uma reta paralela ao eixo OX, que passa pelo ponto (0,b), neste caso pelo ponto (0,2), observe:

Figura 11 – Tela do Geogebra: Gráfico da função constante, para a = 0 ⟶ f(x) = 3



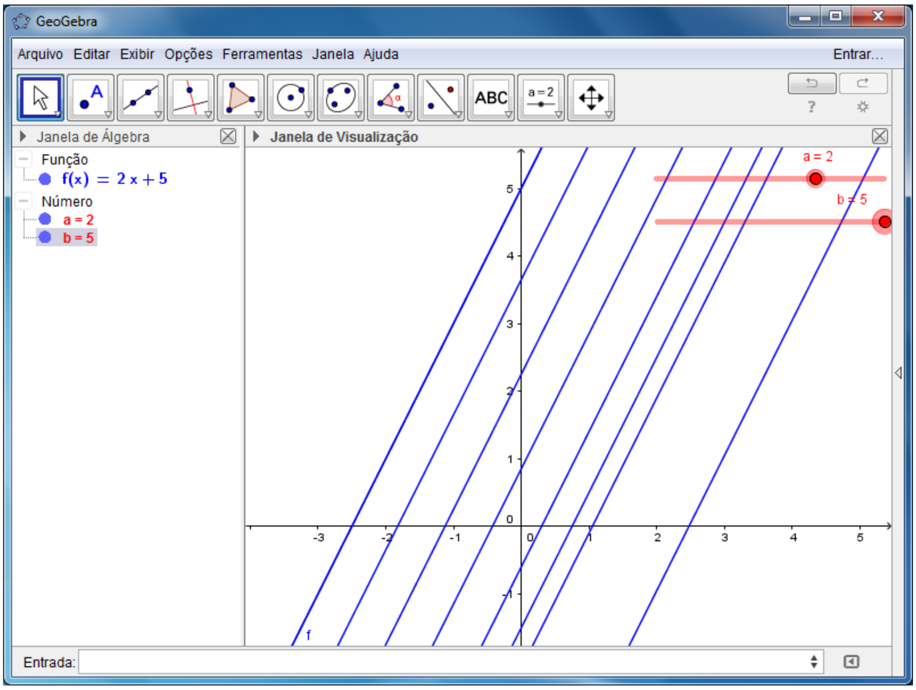
Fonte: Elaborada pelo autor

5.1.2 Variação do coeficiente linear

Movimentando o seletor ***b***, ou seja, variando os valores do coeficiente linear, estudado na seção 3.1.3.2, pode-se perceber que o gráfico apresenta uma movimentação com relação ao eixo das ordenadas, de modo que, **b** é sempre a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo OY, observe isso na Figura 12.

Obtemos o seguinte comportamento do gráfico:

Figura 12 – Tela do Geogebra: Comportamento geral da reta com a variação do coeficiente b

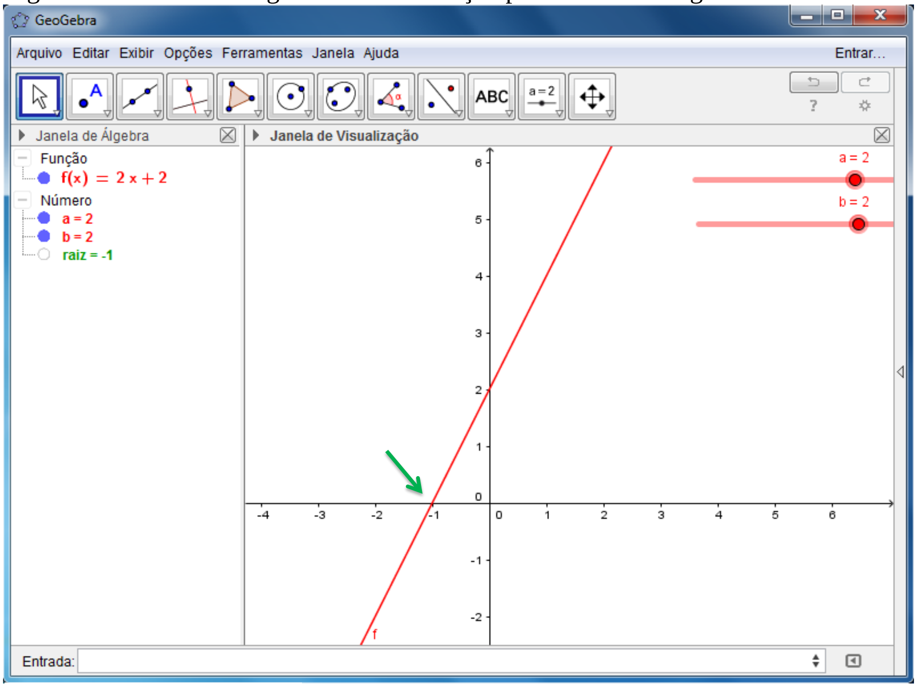


Fonte: Elaborada pelo autor

5.1.3 Raiz ou zero da função no gráfico

A raiz de uma função do primeiro grau, é obtida pela abscissa do ponto a qual a reta intercepta o eixo OX, pois, para f(x) = 0 → ax + b = 0 → $x = -\frac{b}{a}$, então para observar o valor da raiz a partir da utilização do software, após seguir os passos da seção 5.1, digite na entrada de comando o seguinte: ***raiz = -b/a***, e clique *enter*, obtendo a seguinte representação na Figura 13. Observe na janela algébrica o valor da raiz destacado na cor verde, equivalente ao valor onde a reta corta o eixo OX, sendo apontado pela seta.

Figura 13 – Tela do Geogebra: Raiz da função polinomial do 1º grau



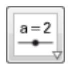
Fonte: Elaborada pelo autor

E de fato neste caso como a função f(x) = 2x + 2, temos que a = 2 e b = 2, a raiz é **x = -2/2 = -1**. Aqui é interessante que o aluno perceba que variando tanto o seletor ***a***, como o seletor ***b***, ele irá obter novas funções, e consequentemente novas raízes.

5.2 Aplicações do Geogebra na função Polinomial do Segundo grau

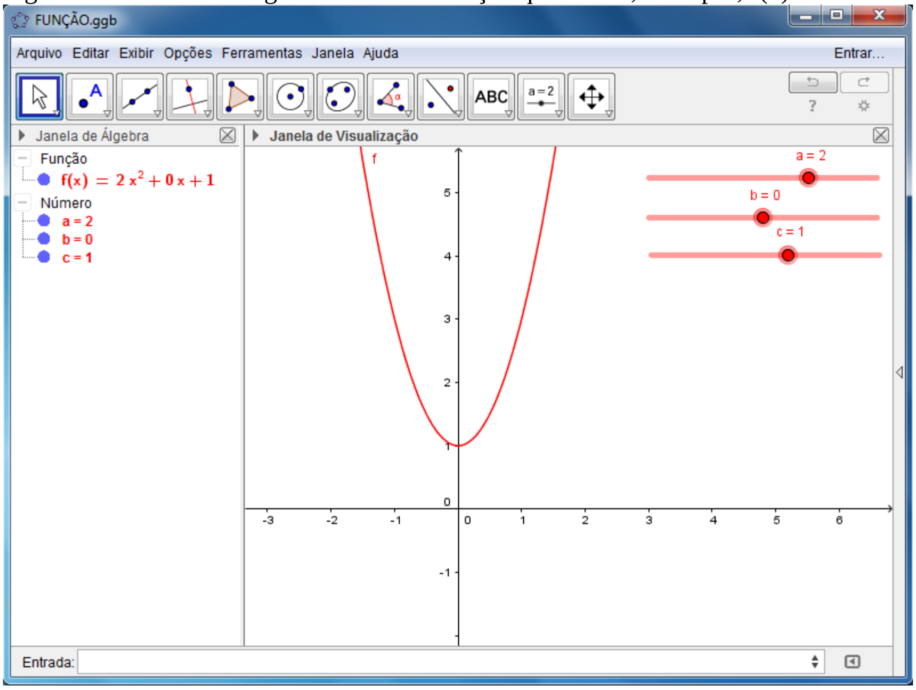
Praticando: Obter o gráfico da função desta natureza no software;

Para isso segue os comandos:

a) Inicialmente criando três seletores ***a, b*** e ***c***, para isso na barra de ferramentas dê um clique duplo na penúltima ferramenta, da esquerda para direita,  e escolha a opção *controle deslizante*, em seguida clique na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante; Abrirá outra janela, nesta é possível alterar algumas configurações do seletor, logo em nome digite ***a* = *2***, e no intervalo, já vem de padrão **-5** para mínimo e **5** para máximo, assim será mantido, e clique em *aplicar*, onde será criado o seletor ***a***, e para criação do ***b*** e ***c***, segue os mesmos passos, mudando somente o nome, digitando ***b = 0*** e ***c = 1***;

b) Agora na entrada de comando digite ***f(x) = a(x)^2 + bx + c,*** que equivale à lei de formação da função quadrática, e logo clique *enter*, onde será apresentado na janela gráfica a construção do gráfico da função **f(x) = 2x² + 1**, formada a partir dos valores atribuídos para os três seletores criados anteriormente, conforme a figura abaixo;

Figura 14 – Tela do Geogebra: Curva da função quadrática, dada por, $f(x) = 2x^2 + 1$



Fonte: Elaborada pelo autor

c) Então agora é possível estudar o comportamento do gráfico, de acordo com a variação dos coeficientes da função, para melhor visualizar o movimento gerado, se desejar habilite o *rastro* na função, para isso clique com o botão esquerdo do *mouse* em cima da função na janela algébrica e clique em *habilitar rastro*, para desfazer segue os mesmos passos.

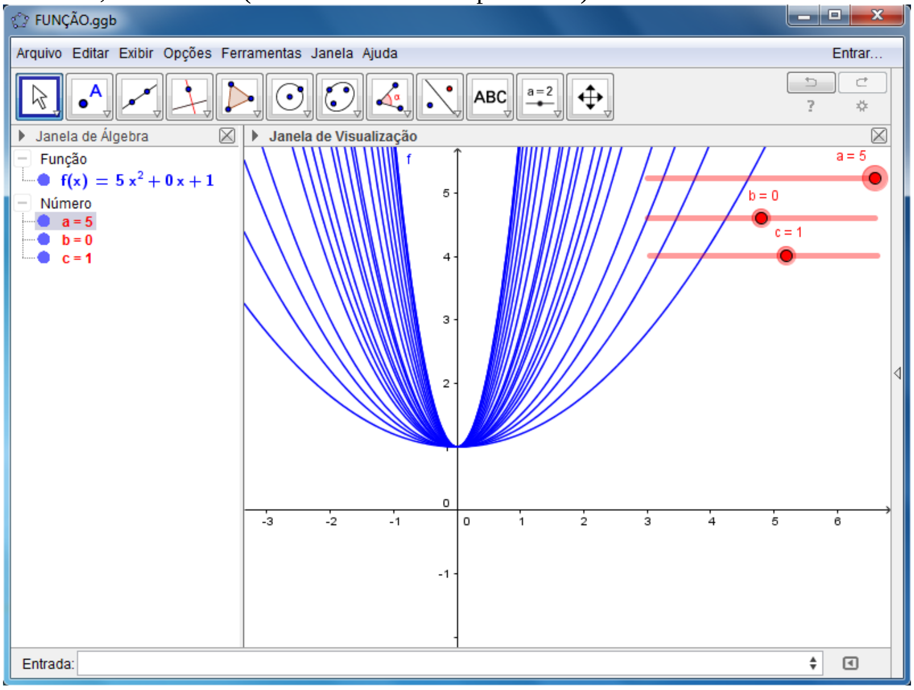
5.2.1 Coeficiente a, e a concavidade da parábola

A concavidade da parábola, depende do valor do coeficiente **a** da função, podendo ser obtido os seguintes casos:

a) Quando **a > 0**:

Movimentando o seletor ***a***, de forma que ele fique sempre com valor maior que zero, é possível perceber que a parábola sempre terá **concavidade voltada para cima**, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 15 – Tela do Geogebra: Comportamento da parábola, com a variação do coe - ficiente a, sendo a > 0 (concavidade voltada para cima)

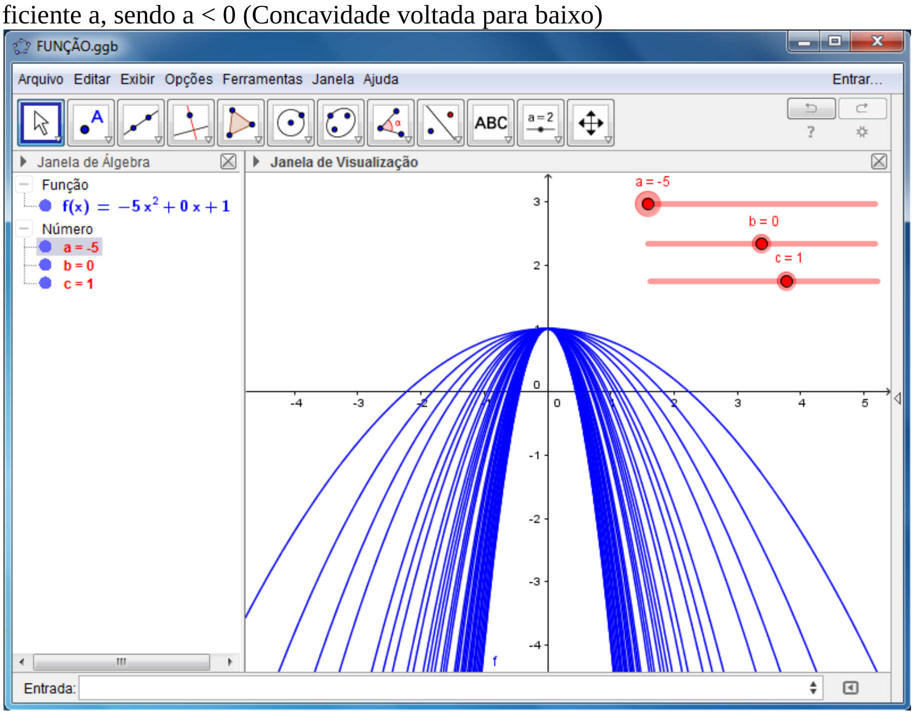


Fonte: Elaborada pelo autor

b) Quando **a** < **0**:

Agora movimentando o seletor ***a***, de forma que ele fique com valor sempre menor que zero, é possível perceber que a parábola terá sempre **concavidade voltada para baixo**, observe esse caso na figura a seguir.

Figura 16 – Tela do Geogebra: Comportamento da parábola, com a variação do coe - ficiente a, sendo a < 0 (Concavidade voltada para baixo)

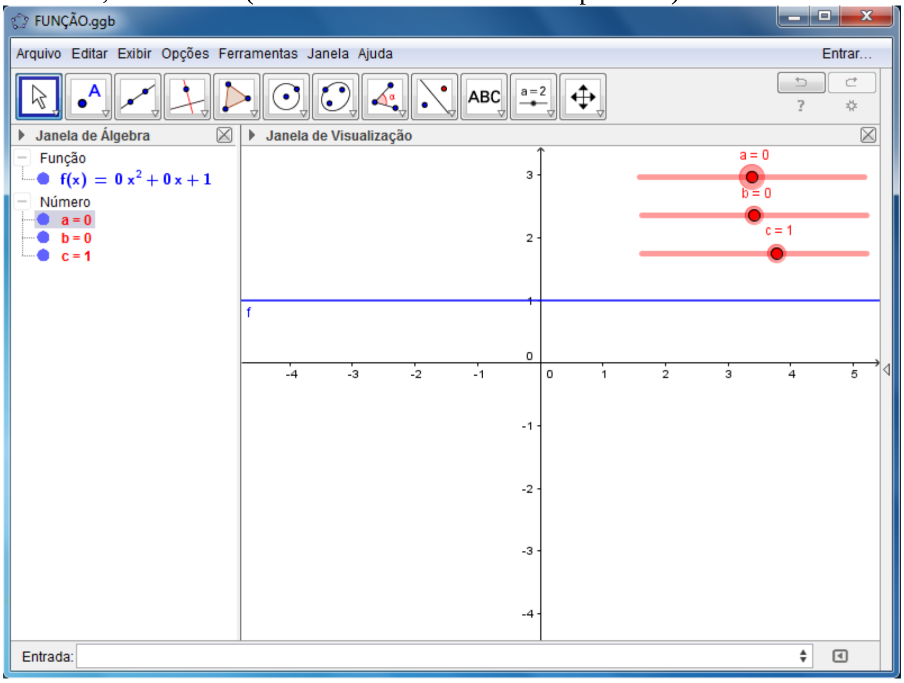


Fonte: Elaborada pelo autor

c) E quando deixa-se o seletor em **a** = **0**?

Daí não tem-se mais uma função quadrática, mas sim uma função do primeiro grau, da forma $f(x) = \mathbf{0.x^2} + bx + c \rightarrow f(x) = bx + c$, onde o gráfico será uma reta, veja:

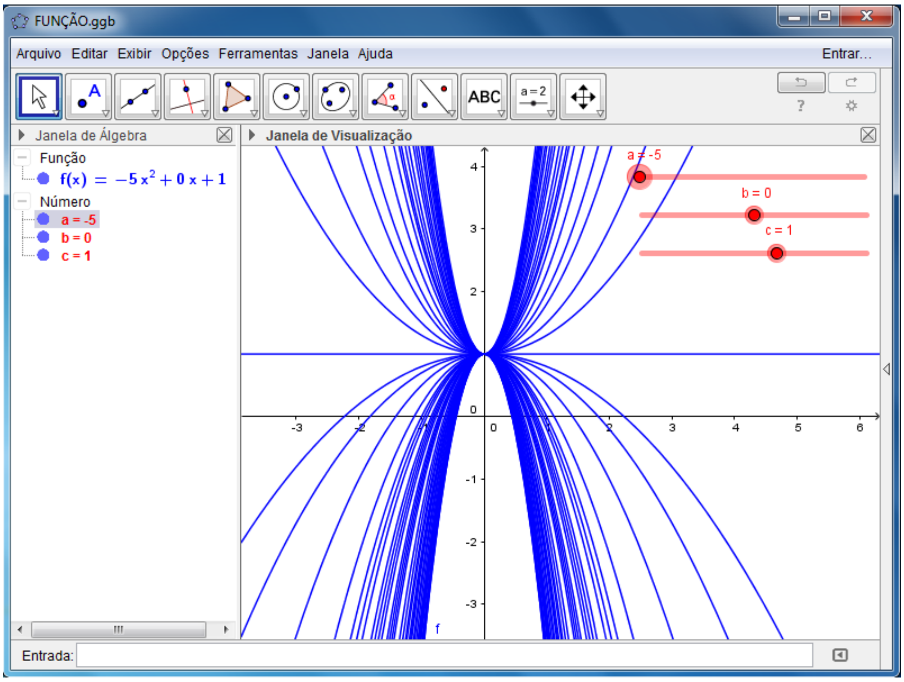
Figura 17 – Tela do Geogebra: Comportamento da parábola, com a variação do coeficiente a, sendo a = 0 (Obtém-se uma reta e não uma parábola)



Fonte: Elaborada pelo autor

Logo pode-se perceber que ao movimentar o seletor ***a***, o gráfico da função apresenta o seguinte comportamento geral:

Figura 18 – Tela do Geogebra: Comportamento geral da parábola, com a variação do coeficiente a



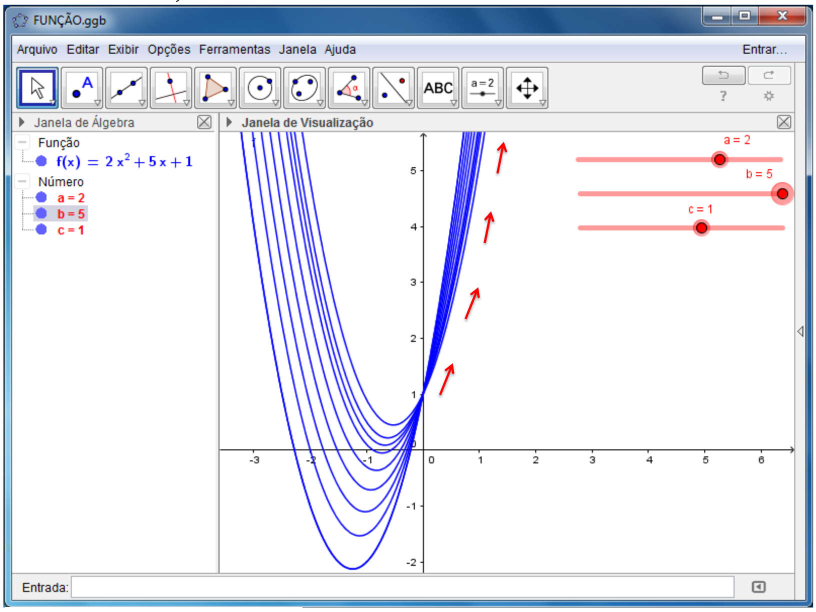
Fonte: Elaborada pelo autor

5.2.2 Coeficiente b, e o movimento gerado pelo do vértice da parábola

O coeficiente **b,** informa basicamente a inclinação que a curva apresenta após passar pelo eixo OY, ou seja, mostra o movimento de translação vertical e horizontal da parábola, onde movimentando o seletor ***b***, é possível perceber os seguintes casos:

a) enquanto **b** > **0**, a parábola intercepta o eixo OY com sua parte crescente;

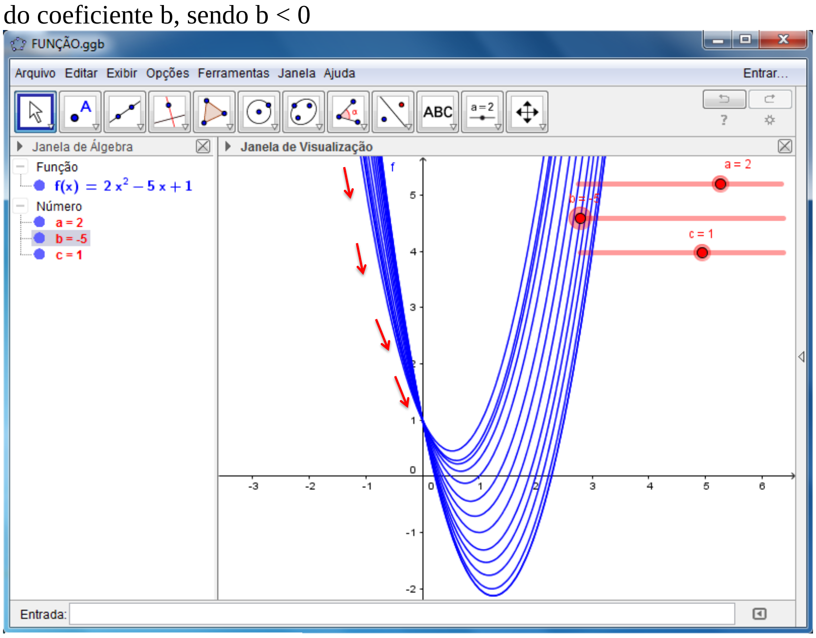
Figura 19 – Tela do Geogebra: Comportamento da parábola, com a variação do coeficiente b, sendo b > 0



Fonte: Elaborada pelo autor

b) enquanto **b** < **0**, a parábola intercepta o eixo OY com sua parte decrescente;

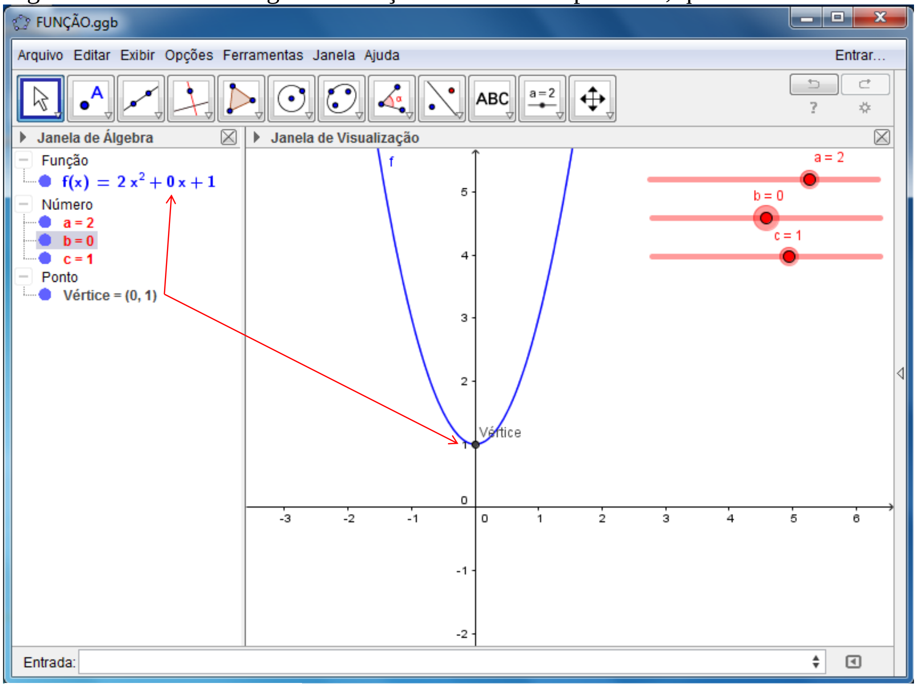
Figura 20 – Tela do Geogebra: Comportamento da parábola, com a variação do coeficiente b, sendo b < 0



Fonte: Elaborada pelo autor

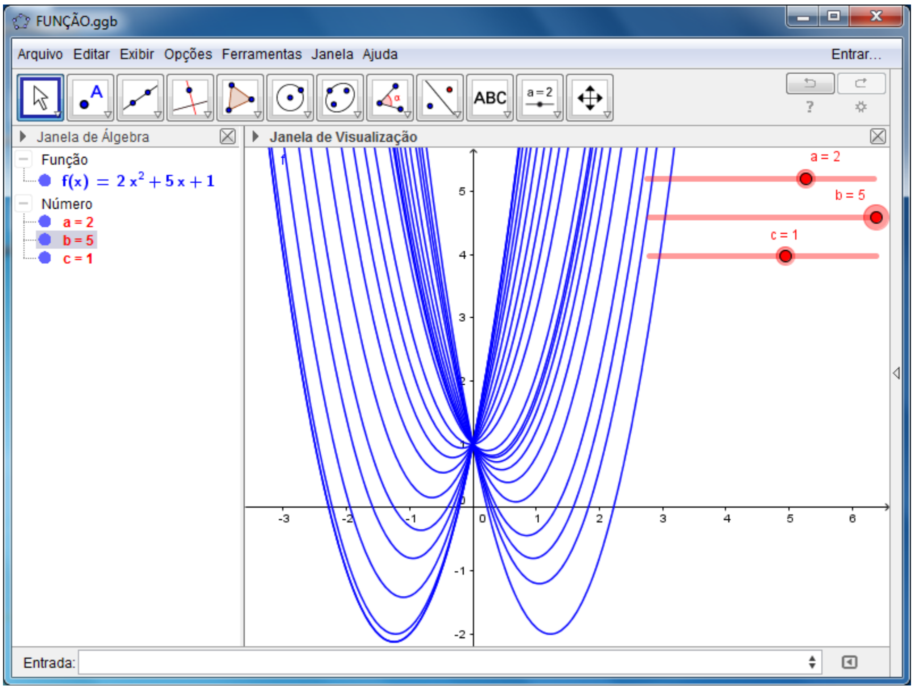
c) e quando **b = 0**, a parábola intercepta o eixo OY no vértice, que representa seu ponto de máximo ou de mínimo. Para obter o vértice da parábola após o gráfico pronto, digite na entrada de comando o seguinte: ***vértice = extremo[f(x)]***, e aparecerá o ponto formado pelo x_v e y_v, como destacado na figura abaixo.

Figura 21 – Tela do Geogebra: Posição do vértice da parábola, quando b = 0



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 22 – Tela do Geogebra: Comportamento geral da parábola, com a variação do coeficiente b

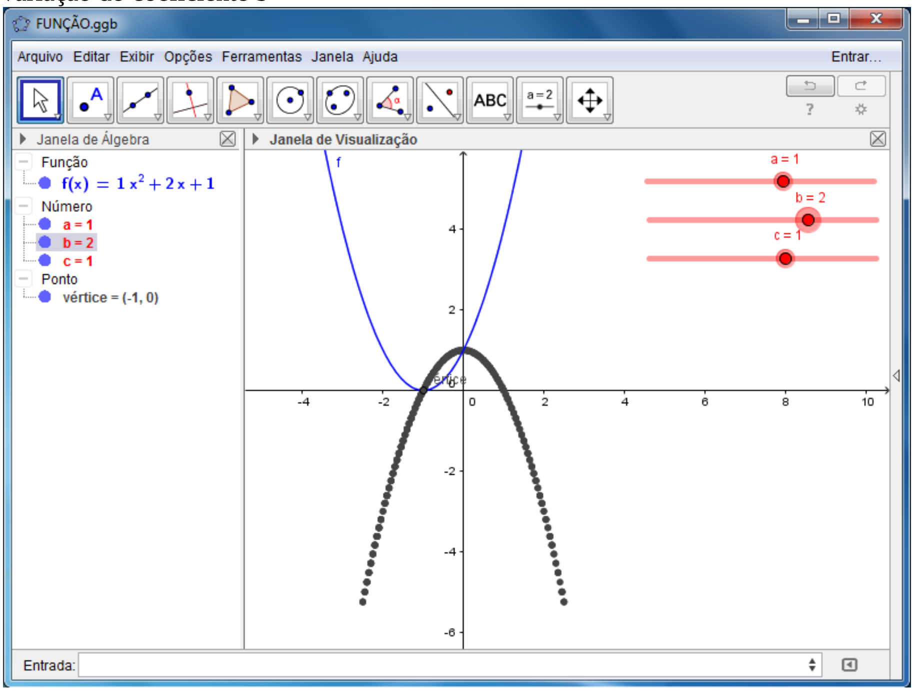


Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto de fato a variação do coeficiente **b**, identifica a translação vertical e horizontal da parábola, observe isso na Figura 22, onde as parábolas vão se movimentando horizontalmente e ao mesmo tempo verticalmente. Caso deseje visualizar melhor esta movimentação, habilite o *rastro* na função, clicando com o botão esquerdo do *mouse* em cima da função na janela algébrica e clique em *habilitar rastro*.

Obs.: Uma curiosidade bem interessante, é que ao movimentar o seletor ***b***, o vértice da parábola apresenta um movimento de uma nova parábola, para visualizar tal movimento, basta habilitar a função *rastro* no software, proceda da seguinte forma: clique com o botão direito do *mouse* em cima do ponto do vértice e clique em *habilitar rastro*. Logo movimentando o seletor ***b*** obtém-se a seguinte ilustração:

Figura 23 – Tela do Geogebra: Movimento gerado pelo vértice da parábola, com a variação do coeficiente b



Fonte: Elaborada pelo autor

Essa curiosidade se deve ao fato de que, como tem-se uma função definida por $y = ax^2 + bx + c$, ou seja um função do segundo grau como já estudado, sendo seu gráfico representado por uma parábola, e seu vértice dado pelo ponto $V(x_v, y_v)$, temos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4.a.c)}{4.a}$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4.a.c}{4.a}$$

$$y_v = -\frac{b^2}{4.a} + c, \text{como b está variando, logo torna} - \text{se uma variável.}$$

$$y_v(b) = -\frac{b^2}{4.a} + c, \text{fazendo } b = k.$$

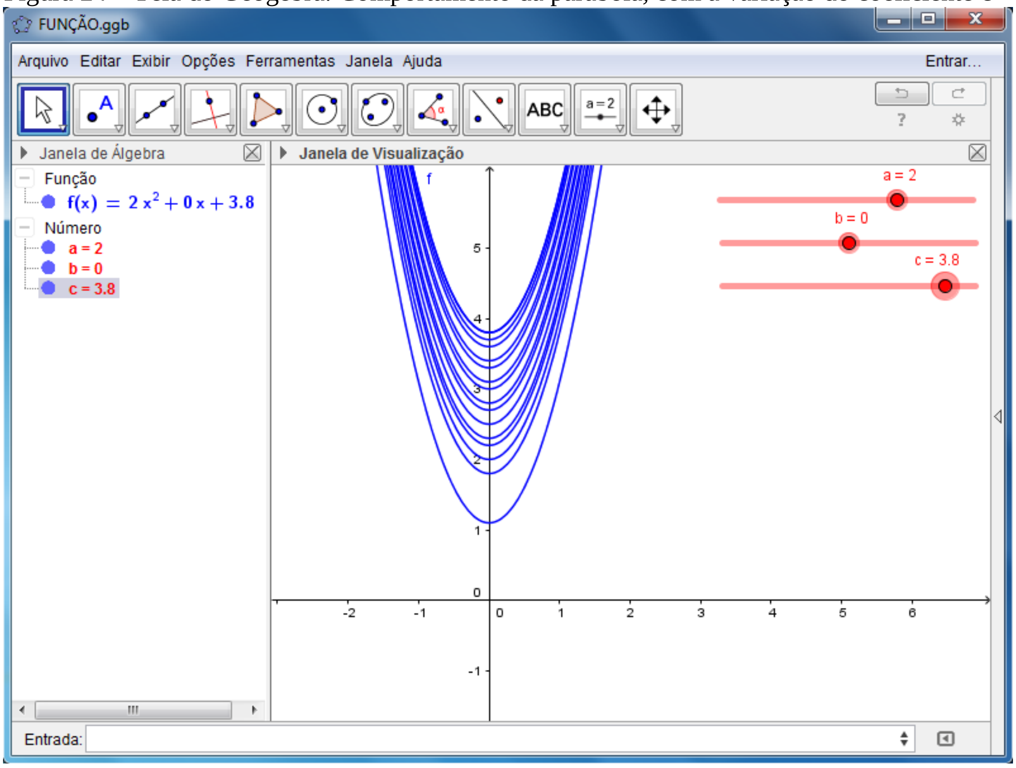
$$y_v = -\frac{k^2}{4.a} + c$$

Portanto observa-se que $\mathbf{y_v}$ resulta em uma equação do segundo grau, sendo **b** variável, logo ao variar o valor de **b**, o vértice da parábola fará o movimento de uma nova parábola, de modo que acontece uma translação vertical e horizontal ao mesmo tempo, conforme foi visto na Figura 23.

5.2.3 Coeficiente c, e o eixo das ordenadas

Como visto na seção 3.2.5, este coeficiente representa a ordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo OY, ou seja, a parábola sempre intercepta o eixo vertical no ponto **(0,c)**. No caso da função criada na seção 5.2, f(x) = $2x^2$ + 1, temos que **c = 1**, logo observe na Figura 14, que de fato a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto **(0,1)**. Por isso ao movimentar o seletor ***c***, realmente a parábola apresenta um movimento em torno somente do eixo OY, observe:

Figura 24 – Tela do Geogebra: Comportamento da parábola, com a variação do coeficiente c



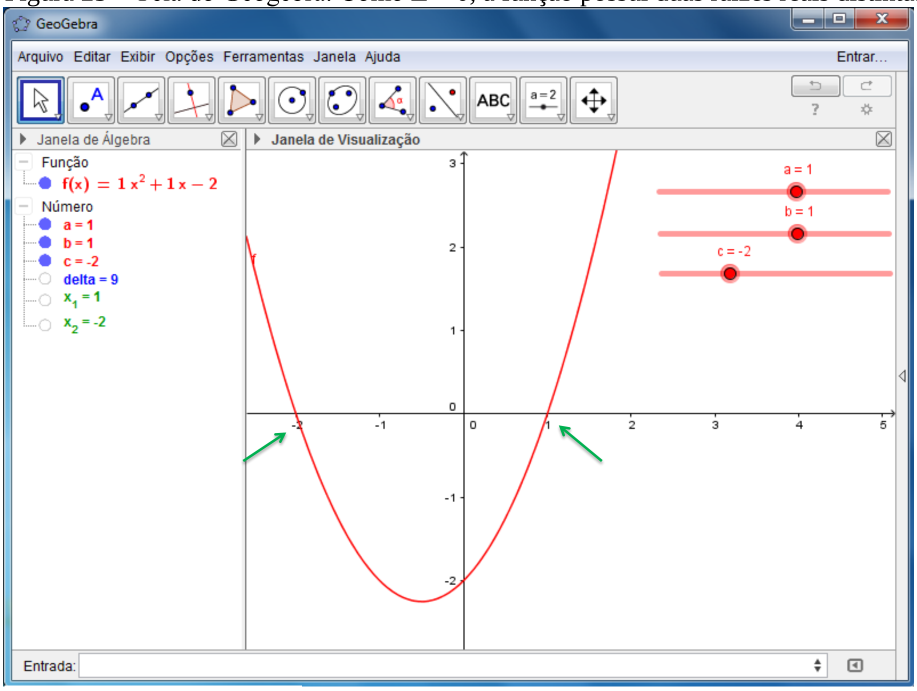
Fonte: Elaborada pelo autor

5.2.4 Relação entre o discriminante (delta), e a quantidade de raízes reais

Colocando em prática a teoria estudada na seção 3.2.3.1, onde dependendo do valor do discriminante delta, teremos uma quantidade de raízes reais. O delta poderá ser obtido a partir do software, para isso após a criação do gráfico de uma função qualquer detalhado no item 5.2, sendo estudada neste caso a função, **f(x) =** $\mathbf{x^2 + x - 2}$, basta clicar na entrada de comando e digitar: ***delta = b^2 - 4ac,*** teclando *enter* o resultado aparecerá na janela algébrica.

As raízes também podem ser obtidas, após ter encontrado o delta, novamente na entrada de comando digite: ***x_1 = (-b + sqrt(delta)) / (2*a)***, tecla *enter*, em seguida, digita, ***x_2 = (-b - sqrt(delta)) / (2*a),*** e novamente tecla *enter*, obtendo os seguintes resultados conforme apresenta destacado da cor verde nas figuras abaixo.

Figura 25 – Tela do Geogebra: Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais distintas

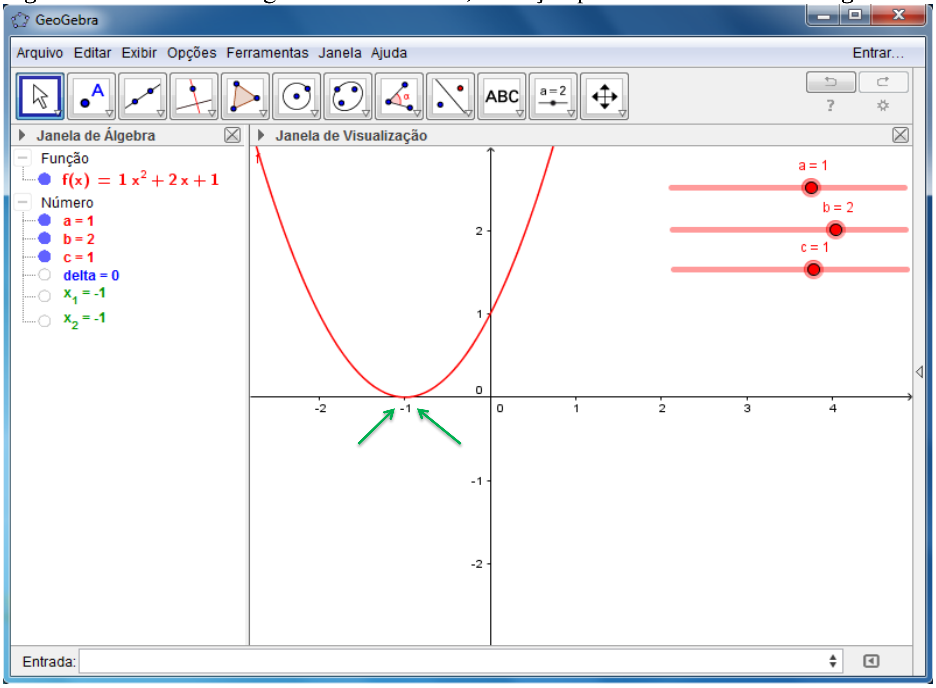


Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 25, observa-se na janela algébrica que **delta = 9**, ou seja, $\Delta > \mathbf{0}$, logo a função possui duas raízes reais e distintas, sendo elas $\mathbf{x_1 = 1}$ e $\mathbf{x_2 = -2}$, ou seja, $x_1 \neq x_2$, onde de fato a parábola intercepta o eixo das abscissas nestes dois pontos (**1**, 0) e (**-2**, 0).

Agora deslizando os seletores criados, deixando-os da seguinte maneira: o seletor ***a = 1***, ***b = 2*** e ***c = 1***, ou seja, a função **f(x) =** $\mathbf{x^2 + 2x + 1}$, obtendo a seguinte representação gráfica:

Figura 26 – Tela do Geogebra: Como Δ = 0, a função possui duas raízes reais iguais

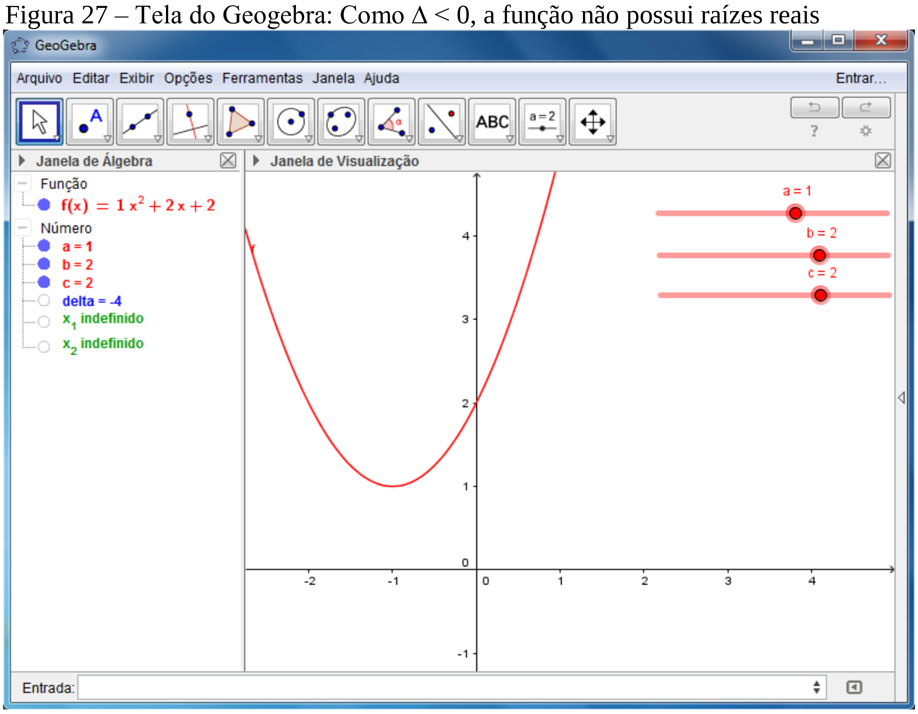


Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando a Figura 26, é possível perceber na janela algébrica que o **delta = 0**, logo a função possui duas raízes reais iguais, ou seja, $x_1 = x_2$, que são $\mathbf{x_1 = x_2 = -1}$, e de fato a parábola intercepta o eixo das abscissas em somente um ponto (**-1**, 0).

Novamente deslizando os seletores criados, deixando-os da seguinte maneira: o seletor ***a* = *1***, ***b* = *2*** e ***c* = *2***, ou seja, a função $\mathbf{f(x) = x^2 + 2x + 2}$, obtém-se o seguinte gráfico:

Figura 27 – Tela do Geogebra: Como Δ < 0, a função não possui raízes reais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora na Figura 27, na janela algébrica temos **delta = -4**, ou seja, $\Delta < 0$**,** logo a função não possui raiz real, de fato a parábola não intercepta o eixo das abscissas em nenhum ponto, por isso aparece $\mathbf{x_1 = x_2 =}$ **indefinido**.

5.2.5 Relação entre o vértice da parábola e o eixo de simetria

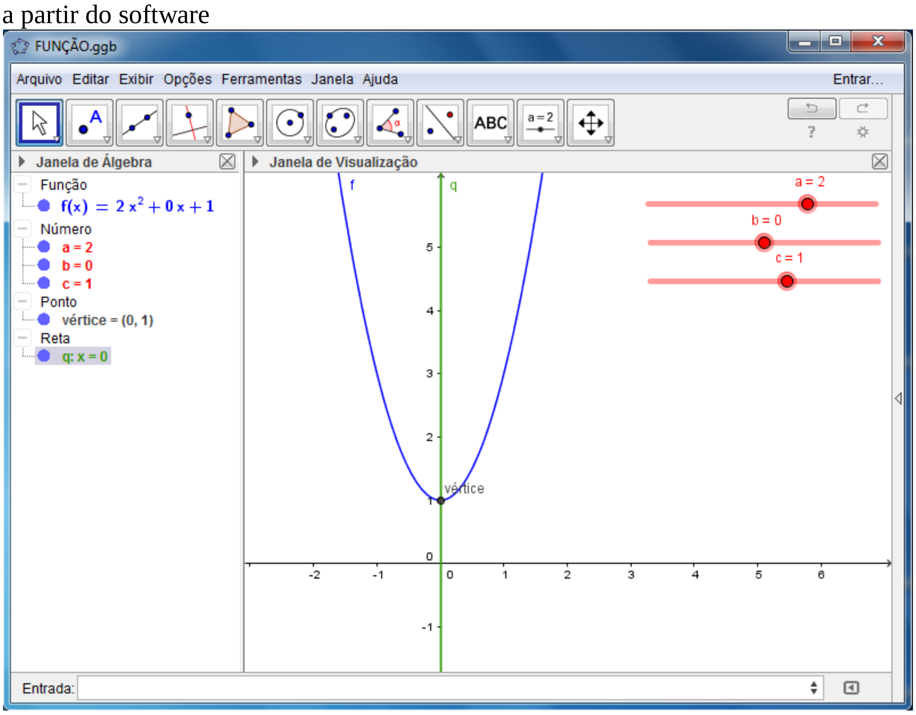
O vértice como já estudado, é dado por, $\mathbf{x_v = -b/2a}$ e $\mathbf{y_v = -\Delta/4a}$, ou seja, o ponto $V(x_v, y_v)$, sendo o eixo de simetria a reta dada pela equação $\mathbf{x = x_v}$. Tais elementos podem ser obtidos no software, para isso, após criado o gráfico de acordo com os comandos da seção 5.2, tem-se que para obtenção do:

a) vértice: Na entrada de comando digite: ***vértice = extremo[f(x)]***, e tecle *enter;*

b) eixo de simetria: Na entrada de comando digite: ***q:x = -b/(2a)***, e tecle *enter*.

Obtendo a seguinte representação:

Figura 28 – Tela do Geogebra: Obtenção do vértice da parábola e do eixo de simetria a partir do software



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que a reta **q** dada por $\mathbf{x = x_v}$ destacada na cor verde, a qual representa o eixo de simetria, coincide com o eixo das ordenadas, isso pelo fato de que na função, temos **b = 0**, logo como $\mathbf{x_v = -b/2a}$, obtemos $\mathbf{x = x_v = 0}$, onde o vértice é dado pelo ponto **(0,1)**, ou seja, temos que $x_v = 0$ e $y_v = 1$. Para que possa entender ainda mais estes conceitos, basta variar o valor do coeficiente **b**, a partir da ferramenta *controle deslizante* e perceberá que a reta **q**, assim como o **vértice** obterão outros valores.

6 CONCLUSÃO

Os softwares matemáticos tem sido nestes últimos tempos, uma das principais ferramentas que tem contribuído diretamente no ensino e aprendizado da matemática, sendo possível perceber resultados satisfatórios quando utilizados em sala. Pois ao por em prática uma didática como esta, a aula torna-se cada vez mais próxima da realidade dos alunos nos dias atuais, já que é usada uma linguagem acessível e atraente para eles.

Acredita-se, que com essa proposta de prática pedagógica, uma aula sobre funções polinomiais de primeiro e segundo grau, torna-se mais eficaz e produtiva, onde certamente é possível atingir níveis de aprendizados significativos, beneficiando assim, ambos os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem. Como os alunos de um modo geral apresentam dificuldades em entender conteúdos como estes, por apresentarem em seus conceitos letras e números, a partir do uso do software Geogebra, tais conceitos podem ser explorados de forma individual, criativa e expressiva, fazendo com o que o aluno concretize seus conhecimentos.

Com a utilização de um software como este, o professor a partir do momento em que aborda a aula teórica, e passa para a prática, é interessante que torne-se, um mediador entre o software e os alunos, de modo que faça perguntas, com o intuito de fazer com que o aluno pense, observe, experimente e investigue, estabelecendo assim suas próprias conclusões. Pois com isso, o aluno desenvolve seu raciocínio lógico, suas habilidades e compreensões sobre o que está sendo estudado, encontrando assim estratégias para resolução de problemas. Uma vez que eles aprendem também com seus erros, não é conveniente que eles obtenham conclusões já prontas.

Tendo em vista que alguns desafios provavelmente irão surgir ao utilizar uma didática como esta, é aconselhada a busca por formações continuadas, voltadas para esta área, também tornar-se um pouco mais autodidata e tentar interagir com esse meio tecnológico, pois tais desafios devem ser ultrapassados, principalmente quando trata-se de uma busca por um aprendizado mais significativo e prazeroso.

REFERÊNCIAS

[1] BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática Aula por Aula**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003.

[2] GEOGEBRA. **Página Oficial**. Disponível em: <http://wiki.geogebra.org/pt/Manual>. Acesso em: 13 set. 2015

[3] HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. **Ajuda GeoGebra:** Manual Oficial da Versão 3.2. Tradução e adaptação para português (de Portugal) de António Ribeiro. 2009. Disponível em: <https://static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 29 set. 2015.

[4] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 3. ed. São Paulo: Atual Editora, v.1, p. 93-155, 1977.

[5] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 1, p.78-145, 2006.

[6] OKADA, Satiro. **Explorando gráficos das funções elementares por meio do software Geogebra.** 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.

[7] OLIVEIRA, Angela Maria Santos de. **O uso do Geogebra no ensino de funções do primeiro e segundo grau.** 2014. 52 f. TCC (Graduação em Licenciatura Plena em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Abaetetuba, 2014.

[8] SANCHO, Juana Maria (org). **Para uma tecnologia educacional**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

[9] VALENTE, José A. Por quê o computador na educação? In: José A. Valente (org.). **Computadores e Conhecimento: repensando a educação**. Campinas: Unicamp/Nied, 1993.