UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELANE MARIA MOREIRA NOGUEIRA

# APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PTOLOMEU EM TEORIA DOS NÚMEROS

ARACOIABA
2015

**APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PTOLOMEU EM TEORIA DOS NÚMEROS**

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito para a obtenção do título de Licenciada no ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Rui Brasileiro Paiva

**ARACOIABA**

**2015**

**APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PTOLOMEU EM TEORIA DOS NÚMEROS**

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito para a obtenção do título de Licenciada no ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Rui Brasileiro Paiva

Defendida em: 12/12/15

________________________________________

Elane Maria Moreira Nogueira

(Acadêmico)

____________________________________ ____________________________________

________________________________________

Rui Eduardo Brasileiro Paiva

(Professor Orientador)

**AGRADECIMENTOS**

Agradeço a meu amado Pai Celestial e meu Salvador Jesus Cristo, pela misericórdia e bondade.

Aos meus pais (Enézio e Fátima) e irmão (Edson), por sempre estarem na torcida pelo meu sucesso.

Ao meu esposo (Hildegarton), pelo apoio, paciência e por nunca duvidar que eu concluiria essa atribulada jornada.

Aos meus filhos (Hiago, Higo e Eduarda) por demonstrar tão grande compreensão. Mesmo nos inumeráveis momentos de minha ausência, pude sentir o carinho e alegria de todos a cada retorno meu. Muito obrigada, (Vida, Hiahia, Gui e Florzinha), por estarem sempre ao meu lado, amo muito, muito vocês.

Ao meu sogro Sr. Eugênio (em memória), pelas diversas vezes que acordou de madrugada para me acompanhar na parada de ônibus, ele esperava ansioso pela minha formatura, espero que de onde estiver possa ver essa conquista. A minha sogra (D. Fátima) que tão dedicadamente cuidava de mim, no final de um dia exaustivo de estudo.

Não poderia deixar de mencionar meus amigos Isaac e Egídio, que me estenderam a mão nas incontáveis vezes que precisei de ajuda, nesta caminhada.

Aos meus queridos tios, Ednilza Moreira e Elielder Moreira, pelo auxilio que foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

E por fim, mas não menos importante, ao meu orientador Rui Brasileiro, por sua solicitude e paciência ao me orientar.

*"Só há duas maneiras de aprender matemática, uma é pelo talento e a outra é pelo esforço."*

*(Ailton Feitosa)*

# RESUMO

A Matemática tem uma elegância irresistível e uma utilidade indispensável em nossas vidas. Porém, muitas vezes problemas matemáticos simples exigem estratégias complexas para a resolução. Então, o encanto é tomado pelo desapontamento ou pela persistência da busca de soluções simples, que nem sempre são encontradas com maestria. O fato é que podemos relacionar as técnicas de uma área particular da Matemática com problemas de outras áreas. É sobre isso que versa nosso trabalho. Utilizaremos alguns resultados geométricos relacionados ao Teorema de Ptolomeu, afim de simplificarmos as soluções de alguns problemas em teoria dos números. Teoria dos números é um ramo da Matemática que tem suas “famosas” particularidades na busca de demonstrações de problemas que levaram anos para serem resolvidos e outros que, apesar do esforço de muitos estudiosos, não chegaram a conclusão alguma. Alguns problemas não levaram tantos anos para serem solucionados, porém suas soluções foram apresentadas de forma complexa. Com o emprego de estratégias do âmbito da geometria até mesmo alunos de ensino médio tem maturidade para compreender o que está sendo apresentado. Se esses mesmos problemas fossem resolvidos com argumentos simplesmente da teoria dos números, sua compreensão poderia tornar-se mais difícil até mesmo para muitos graduandos.

**Palavras-Chave**: Teorema de Ptolomeu, Teoria dos Números, ensino de matemática, geometria.

# ABSTRACT

Mathematics has an irresistible elegance and an essential utility in our lives. However, not rarely, simple mathematical problems require complex strategies for resolution. Then charm is taken by disappointment or by a persistent search for simple solutions that are not always found masterfully. The fact is that we can relate the techniques of a particular area in mathematics to problems in other areas, and this is what our work consists in. We will use some geometric results related to Ptolemy's theorem, in order to simplify the solutions of some problems in number theory. Number theory is a branch of mathematics that has its well-known particularities  in the search for problem demonstrations that took years to solve, and others that have not come to any conclusion despite many scholars' efforts. Some problems have not taken so many years to be solved, but their solutions were presented in a complex way. With the use of strategies of the geometry milieu even high school students are mature enough to understand what is being presented. If those problems were simply solved with arguments of the number theory, their understanding could become even more difficult for many under graduating students.

Keywords: Ptolemy's Theorem, Number Theory, math teaching, geometry

## LISTA DE FIGURAS

**SUMÁRIO**

## 1. INTRODUÇÃO

Transmitir conhecimento não é uma tarefa difícil para quem tem prazer em compartilhar o que sabe. Por isso, o convencimento do que é apresentado e a percepção da aprendizagem do aluno são importantes e necessários. Há de se entender que esse momento atual, de acesso a informação tão fácil, tem causado no corpo discente certa preguiça em pensar, para então produzir, fazendo-o querer fórmulas prontas. Assim, faz-se indispensável tornar mais atrativa a abordagem de certos conteúdos matemáticos.

A utilização de ideias geométricas em teoria dos números, por exemplo, fornece uma nova perspectiva na resolução de problemas matemáticos com alto nível de dificuldade. O Teorema de Ptolomeu é muito utilizado para esse fim.

Ptolomeu teve um papel significativo não só na Matemática. Ele revolucionou o sistema cartográfico mundial. Hoje, graças a Ptolomeu podemos facilmente visualizar e compreender rapidamente, mapas que indicam posições de cidades, países e até mesmo continentes. Sua influência na Astronomia não ficou muito atrás, por 14 séculos suas pesquisas orientaram vários povos, que acreditavam e ensinavam para seus filhos por exemplo, o modelo geocêntrico, que afirma ser a Terra o centro do sistema planetário. Teve ainda significativa participação em estudos da física no ramo da ótica (refração) e na música, que são de grande valia nos dias de hoje.

Com a Geometria estudada no ensino médio, conteúdo que fascina a maioria dos alunos, soluções para problemas complexos podem ser apresentadas com uma clareza que é de rápida compreensão, até mesmo para adolescentes, que, em geral, carregam uma certa imaturidade para assimilar os algoritmos de questões que exigem maior esforço cognitivo. Seguindo tal meio, o que temos, de fato, é a possibilidade de resolver problemas com conteúdo que se adequa ao ensino médio, e que pode ser focalizado em breves explicações, precisando de poucos recursos para desenvolvê-los.

A proposta que se apresenta é bastante produtiva, e abre horizontes para uma prática pedagógica condizente com a geração contemporânea. Muitas perguntas, que antes não tinham respostas, ou quando tinham, não eram tão simples de ser compreendidas, foram ecoando com a utilização de técnicas elementares dentro do contexto da geometria.

Embora tenhamos presenciado uma grande maioria de alunos desinteressados em criar, questionar ou simplesmente em aprender algo, vale a pena mergulhar em uma proposta de ensino que desperte a sensibilidade do alunado. Só assim estaremos contribuindo para a construção de uma sociedade melhor e mais consciente.

Espero que você leitor, mergulhe nessas descobertas e se encante, assim como eu me encantei.

## 2. CONHECENDO A GENIALIDADE DE PTOLOMEU E O ENCANTO DA TEORIA DOS NÚMEROS

Neste capítulo apresentaremos um pouco da história de Ptolomeu, que com seus feitos, causou um grande impacto positivamente, não só na matemática, mas na geografia e astronomia, dentre outros segmentos. Influência que marcou não só época, mas continua nos beneficiando em nosso dias atuais.

### 2.1. CONTRIBUIÇÕES DE PTOLOMEU

Claudio Ptolomeu, nasceu provavelmente em Ptolemaida Hérmia no Egito, 90 d.C e faleceu em 168 d.C, na cidade de Canopo no Egito. Ele contribuiu de forma significativa em várias áreas do conhecimento, tais como Física, Matemática, Astronomia e Geografia. Muitos de seus feitos, continuam sendo de grande contribuição nos dias atuais.


Figura 1: Cláudio Ptolomeu.

Sabemos muito pouco da vida de Ptolomeu, sobre seus magníficos estudos e trabalhos realizados, apenas do período em que viveu e trabalhou em Alexandria, de 120 a 160 d.C, que só foi possível graças as suas observações astronômicas por ele mesmo registradas nesse período. Na Astronomia, Ptolomeu deu um acabamento final (nomeado "*A grande síntese*") à teoria geocêntrica de Platão e Aristóteles, que diziam ser as orbitas dos astros círculos perfeitos, porém em observações astronômicas perceberam elementos incompatíveis com esse esquema. Foi então, que Ptolomeu inventou um sistema de oitenta epiciclos (órbita circular descrita por um planeta, enquanto o centro dessa órbita descreve outra, igualmente circular ao redor da Terra) em que se movimentariam esses astros. O resultado disso, seria a Terra como centro do Universo e a sua volta por ordem de proximidade teríamos a Lua, Mercúrio, Vênus, o Sol, Marte, Júpiter e Saturno.

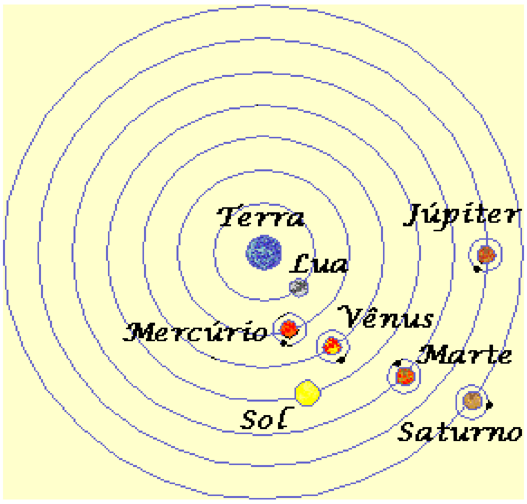


Figura 2: Modelo geocêntrico proposto por Ptolomeu.

Foi essa teoria de Ptolomeu, validada por longos 1400 anos, que deu oportunidade a civilização medieval de ter o primeiro contato com a ciência grega. Seus feitos foram registrados, em uma coletânea de 13 volumes, a obra como o todo foi intitulada *He Mathematiké Syntaxis*, um tratado de astronomia, mas foi traduzido pelos árabes, que também foram responsáveis pela preservação do *Almagesto***,** que significa, *O maior* (sua mais conhecida obra).

Ainda neste livro, Ptolomeu deu sequência à pesquisa de Hiparco[1], ao catalogar 1022 estrelas, dentre elas, 172 foram descobertas por Ptolomeu. É encontrado também, as explicações para a construção de um astrolábio (utilizado para determinar a altura de um corpo celeste acima da linha do horizonte).

Após 14 séculos, teoria geocêntrica de Ptolomeu foi derrubada pelo cientista Copérnico[2] no século XVI, apresentando um outro posicionamento dos astros, chamado, sistema heliocêntrico, no qual, o sol seria o centro do universo, porém se mantinha a ideia de movimentos circulares. Essa teoria ganhou mais força, quando foi confirmado por Galileu[3].

---

[1] Hiparco, nasceu em Nicéia, foi astrónomo, construtor, cartógrafo e matemático grego da escola de Alexandria, é considerado o fundador da astronomia científica e também chamado "o pai da trigonometria", pois na segunda metade do século II a.C., foi o pioneiro na elaboração de uma tabela trigonométrica, isto é, uma tábua de cordas, com os valores dos seus arcos para uma série de ângulos. Estes cálculos teriam sido usados nos seus estudos em astronomia.

[2] Nicolau Copérnico foi um astrônomo e matemático polaco que desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar. Foi também cónego da Igreja Católica, governador e administrador, jurista, astrólogo e médico.

[3] Galileu foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano que teve um papel ímpar na revolução científica. Sua obra mais citada e uma das mais revolucionárias para a época na qual viveu é a proposição da teoria Heliocêntrica, foi também responsável pelo desenvolvimento dos

Foi somente no início do século XVII, que outro renomado cientista chamado Kepler[4], retirou as últimas dúvidas, provando que os planetas não giram em círculos, mas em elipses.

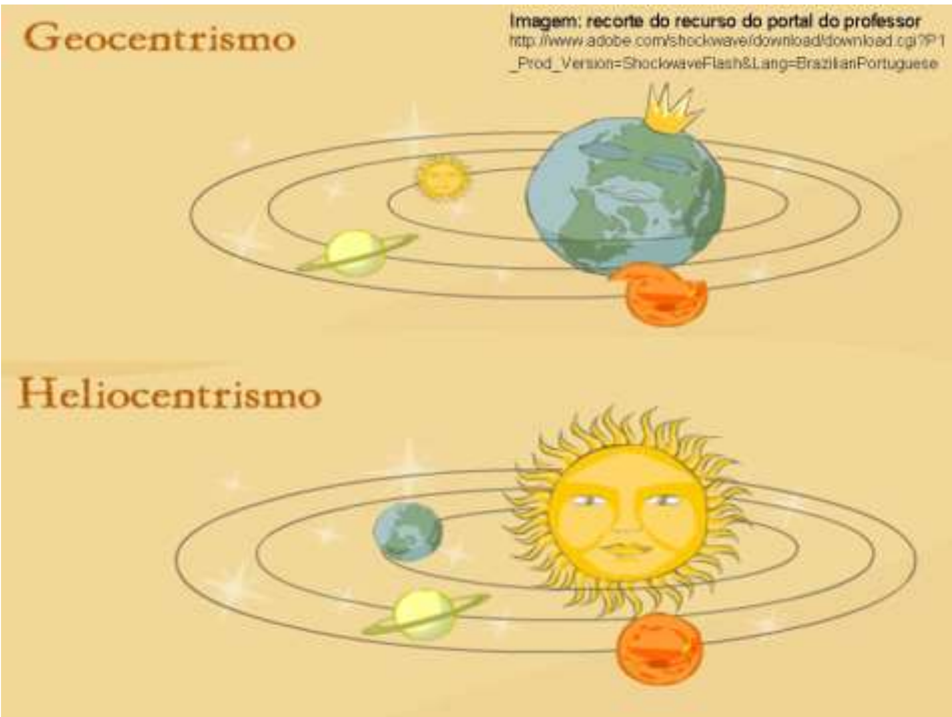


Figura 3: Geocentrismo versus Heliocentrismo.

Claudio Ptolomeu teve grande contribuição na Geografia. Foi o responsável por apresentar a primeira técnica de projeção de mapas, melhor dizendo, a representação de superfícies curvas em mapa plano.

---

primeiros estudos consistentes do movimento uniformemente acelerado e do movimento do pêndulo. Enunciou a lei dos corpos e o princípio da inércia e o conceito de referencial inercial, ideias precursoras da mecânica.

[4] Johannes Kepler foi um astrônomo e matemático alemão. Considerado figura-chave da revolução científica do século XVII. É mais conhecido por ter formulado as três leis fundamentais da mecânica celeste, conhecidas como Leis de Kepler.

Figura 4: Representação de superfícies curvas em mapa plano.

Sua obra *Introdução à geografia* exerceu profunda influência nas gerações seguintes. Dividida em oito livros, a *Introdução* contém 27 mapas. Apesar de inúmeros erros foi considerada obra clássica até o século XVI.

Outra obra importante escrita por Ptolomeu foi *Geographile Hyphegesis*, onde descreveu as terras até então conhecidas, no mundo ocidental, embora com imprecisões de cálculo. Ptolomeu foi muito criticado por essas imprecisões em seus cálculos, um deles, fez com que nos mapas, a Ásia se estendesse mais a leste (ficando mais próxima da Europa), outro erro de cálculo, senão o maior deles, foi ter adotado um valor incorreto para a circunferência da Terra, calculado por Posidônio[5], ao invés de utilizar a medida de Eratóstenes[6], muito mais acurado.

Apesar desses erros de cálculos, o saldo foi extremamente positivo de suas contribuições, que serviram de apoio e orientação para grandes descobertas, por causa de suas técnicas nos estudos geográficos, nos é permitido, acesso a tabelas de lugares, mapas e informações sobre países e seus habitantes, seus estudos sobre latitudes e longitudes constituem os alicerces do sistema de coordenadas utilizados hoje em dia.

Na Física teve sua contribuição com as obras: *Óptica*, em que trata da refração, e *Harmonias*, na qual se refere à acústica e à teoria matemática dos sons empregados na música grega. Outras obras, como *Peri Ropon* (em que abordava a Física mecânica), mencionada pelos cronistas antigos, é atribuída a Ptolomeu e encontra-se atualmente desaparecida.

[5] O filósofo grego Possidônio de Apaméia calculou a circunferência da Terra usando, para isso, a posição da estrela Canopo em lugar do Sol. Contudo, talvez por não levar em consideração o deslocamento da posição da estrela devido à refração atmosférica, encontrou o valor aproximado de 30.000 km. Possidônio também calculou a distância Terra-Sol como sendo aproximadamente 64.000.000 km.

[6] Eratóstenes de Cirene foi um matemático, gramático, poeta, geógrafo, bibliotecário e astrônomo da Grécia Antiga, conhecido por calcular a circunferência da Terra. Nasceu em Cirene, Grécia, e morreu em Alexandria.

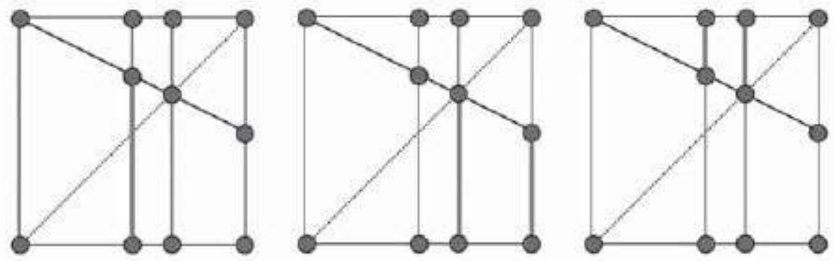

Figura 5: Intervalos musicais demonstrados no *helicon*[7]: quartas. A relação entre as cordas em destaque produz o som de intervalos de quarta em três oitavas diferentes, à saber: mais grave, média e mais aguda. (Fonte: www.scielo.br/pdf/ss/v11n4/v11n4a02.pdf)

Ptolomeu não ficou atrás em suas contribuições na matemática. Ele desenvolveu vários trabalhos matemáticos e foi um formidável geômetra. Infelizmente algumas de suas obras, segundo os cronistas antigos, encontram-se desaparecidas como, *Peri Diastaseos* (na qual ele procura provar que só pode haver espaço tridimensional) ou *Analemma* (em que discute detalhes da projeção ortogonal dos pontos da esfera celeste sobre três planos e propõe nova demonstração para o postulado das paralelas de Euclides). Contudo, sua maior influência matemática que perdura até os dias de hoje, foi na trigonometria, onde ele propõe um teorema que leva o seu nome: o famoso *Teorema de Ptolomeu.* E esse, é o assunto abordado a seguir e que será de grande relevância no desenvolver deste trabalho.

## 2.2. O TEOREMA DE PTOLOMEU

O Teorema de Ptolomeu nos diz que num quadrilátero qualquer inscrito numa circunferência, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Recordamos que um quadrilátero está inscrito (ou é inscritível) numa circunferência se seus vértices são pontos desta circunferência. Vale salientar que se um quadrilátero está inscrito em uma circunferência então os ângulos opostos são suplementares, isto é, a soma dos ângulos opostos é 180 graus.

Para mais detalhes sobre as propriedades de quadriláteros inscritíveis sugerimos a leitura de [5] e [6]. Quanto ao Teorema de Ptolomeu, podemos enunciá-lo e demonstrá-lo da seguinte forma.

[7] Helicon é uma família de instrumentos musicais graves de sopro e transpositores, do grupo das tubas, em seis tamanhos e várias transposições, para abranger as necessidades de notas graves ou agudas.

**LEMA 1**: *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.*

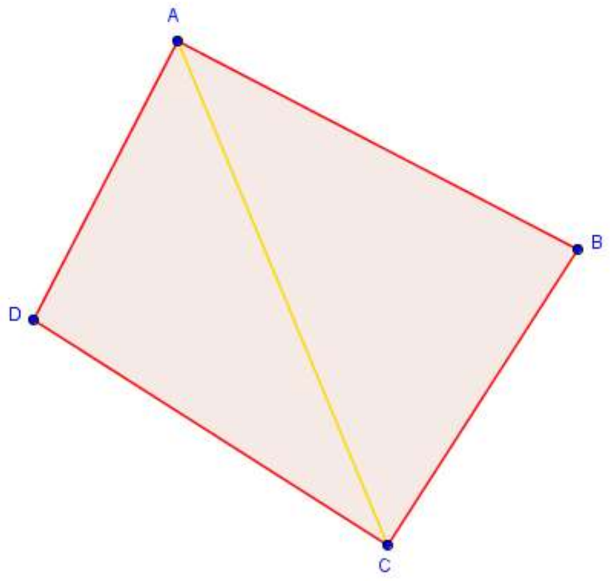


Figura 6: Quadrilátero inscritível $ABCD$.

Então:

$$I)\ AC^2 = \frac{(AB.CD + AD.BC)(AB.AD + BC.CD)}{AB.BC + AD.CD};$$

$$II)\ BD^2 = \frac{(AB.CD + AD.BC)(AB.BC + AD.CD)}{AB.AD + BC.CD}.$$

**Prova**. Daremos a prova de ***I)*** (a prova de ***II)*** é análoga). Denotemos, inicialmente, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ por $\alpha$ e $\beta$, respectivamente. Aplicando a *Lei dos cossenos* no triângulo $ABC$, obtemos

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.cos\alpha\ (I).$$

Agora, aplicando novamente a *Lei dos Cossenos* no triângulo $ACD$, vem

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2.AD.CD.cos\beta\ (II).$$

Como $cos\beta = -cos\alpha$ (pois $\alpha$ e $\beta$ são *suplementares*), segue-se, de $(II)$, que

$$cos\alpha = \frac{AC^2 - (AD^2 + CD^2)}{2.AD.CD}\ (III).$$

Substituindo $(III)$ em $(I)$, temos

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC.\left(\frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{AD.CD}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB.BC + AD.CD)AC^2 = (AB^2 + BC^2)AD.CD + AB.BC(AD^2 + CD^2)$$

$$= (AB^2.AD.CD + AB.BC.CD^2) + (AD.BC^2.CD + AB.AD^2.BC)$$

$$= AB.CD(AB.AD + BC.CD) + AD.BC(BC.CD + AB.AD)$$

$$= (AB.CD + AD.BC)(AB.AD + BC.CD)$$

$$\Rightarrow AC^2 = \frac{(AB.CD + AD.BC)(AB.AD + BC.CD)}{AB.BC + AD.CD}.$$

Observemos que o *Teorema de Ptolomeu* é uma consequência imediata do **LEMA 1** acima. De fato, multiplicando ***I)*** por ***II)***, membro a membro, obtemos $AC^2.BD^2 = (AB.CD + AD.BC)^2$, e o resultado segue. ■

Vejamos a seguir dois exemplos de aplicação do teorema de Ptolomeu em trigonometria.

**Exemplo 2.2.1. (seno da soma de dois ângulos).** Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível em um círculo cujo diâmetro é unitário e tal que uma de suas diagonais coincide com um diâmetro (Figura 7). Suponha que AC seja esta diagonal e denote por $\alpha$ e $\beta$ os ângulos $\angle BAC$ e $\angle CAD$, respectivamente.

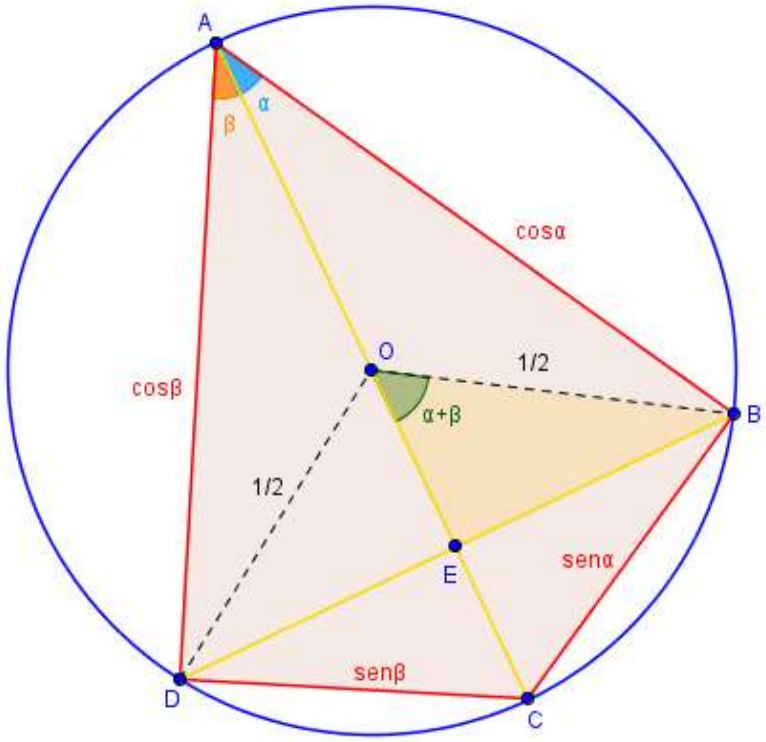


**Figura** 7: seno da soma de dois ângulos.

Observe que $\angle ABC$ e $\angle ADC$ são ângulos reto, visto que subtendem o diâmetro $\mathrm{AC}$. É imediato dos triângulos $\Delta ABD$ e $\Delta ACD$ as seguintes igualdades

(i) $BC = \operatorname{sen} \alpha$

(ii) $AB = \cos \alpha$

(iii) $CD = \operatorname{sen} \beta$

(iv) $AD = \cos \beta$

Vamos mostrar que $BD = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. Com efeito, note que o triângulo $\Delta BOD$ é isósceles de base $\mathrm{BD}$. Seja $\mathrm{E}$ o pé da perpendicular bissetriz baixada de O sobre $\mathrm{BD}$. Obtemos o triângulo $\Delta OBE$ que é retângulo de hipotenusa $OB = \frac{1}{2}$, como aparece destacado na figura 7. Daí, tem-se que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{EB}{\frac{1}{2}}$. Ora, mas $EB = \frac{BD}{2}$, logo resulta que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = BD$.

Além disso, segue das identidades (i) a (iv) e do teorema de Ptolomeu aplicado ao quadrilátero ABCD, o seguinte resultado

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha,$$

que é a equação da adição de arcos para a função seno.

**Exemplo 2.2.2. (seno da diferença de dois ângulos).** Veremos agora o caso em que um dos lados do quadrilátero ABCD, o lado AB, coincide com um diâmetro do círculo (ver Figura 8).

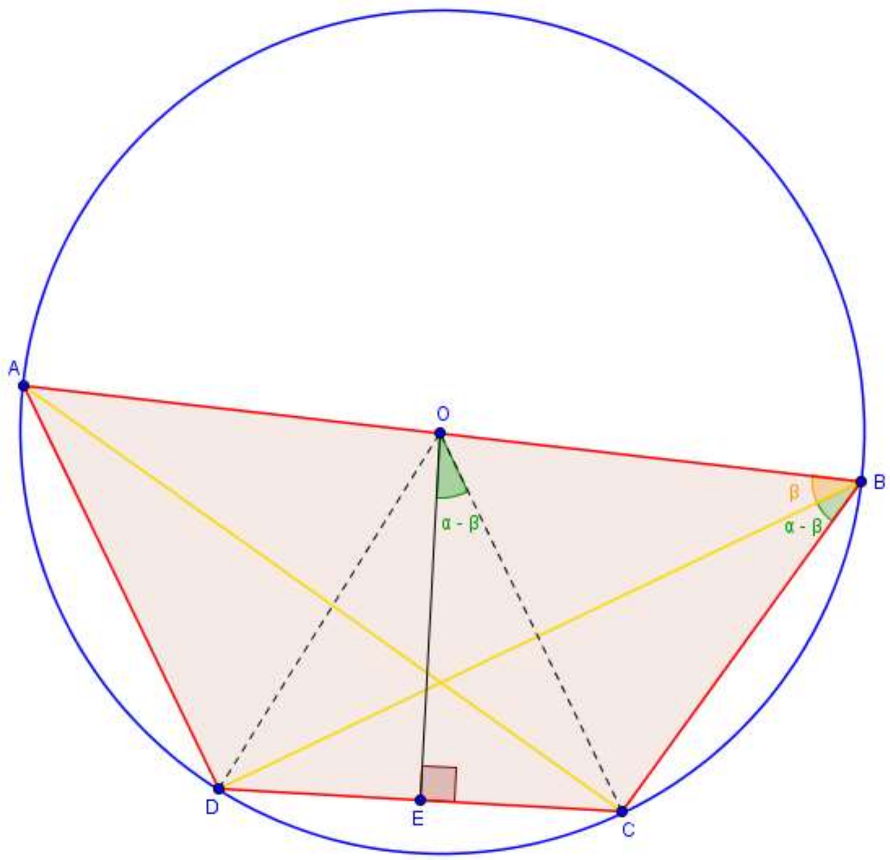


**Figura** 8: seno da diferença de dois ângulos.

Veja que os triângulos $\Delta ADB$ e $\Delta ACB$ são retângulo em D e C, respectivamente, já que o lado comum $AB$ é um diâmetro unitário do círculo que circunscreve o quadrilátero $ABCD$. De tais triângulos obtemos as seguintes relações

(iv) $\quad \mathrm{AD} = \text{sen}\,\beta$

(v) $BD = \cos \beta$

(vi) $AC = \operatorname{sen} \alpha$

(vii) $BC = \cos \alpha$

Vamos mostrar que $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = DC$. Com efeito, considere o triângulo DOC, isosceles de base DC, cujo ângulo $\angle COD$ é o dobro do ângulo inscrito $\angle CBD$, ou seja, $\angle COD = 2(\alpha - \beta)$. Agora, trace a perpendicular bissetriz de O sobre DC, no ponto E. Note que $\angle COE = \frac{\angle COD}{2} = \alpha - \beta$. Daí, segue do triângulo $\Delta COE$ a seguinte igualdade

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{EC}{OC} = \frac{\frac{DC}{2}}{\frac{1}{2}} = DC.$$

Por fim, utilizando os resultados de (iv) a (vii) e aplicando novamente o teorema de Ptolomeu, obtemos

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha,$$

que é a equação do seno da diferença de dois ângulos.

Vejamos mais um exemplo de aplicação do teorema de Polomeu, desta vez na própria geometria plana.

**Exemplo 2.2.3.** Seja $ABC$ um triângulo tal que a medida do ângulo $A$ é 120° e $AD$ sua bissetriz. Mostre que

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

**Solução.** Considere o círculo $\gamma$ circunscrito ao triângulo $\Delta\mathrm{ABC}$ e prolongue a bissetriz AD até intersectar $\gamma$ no ponto E (Figura 9).

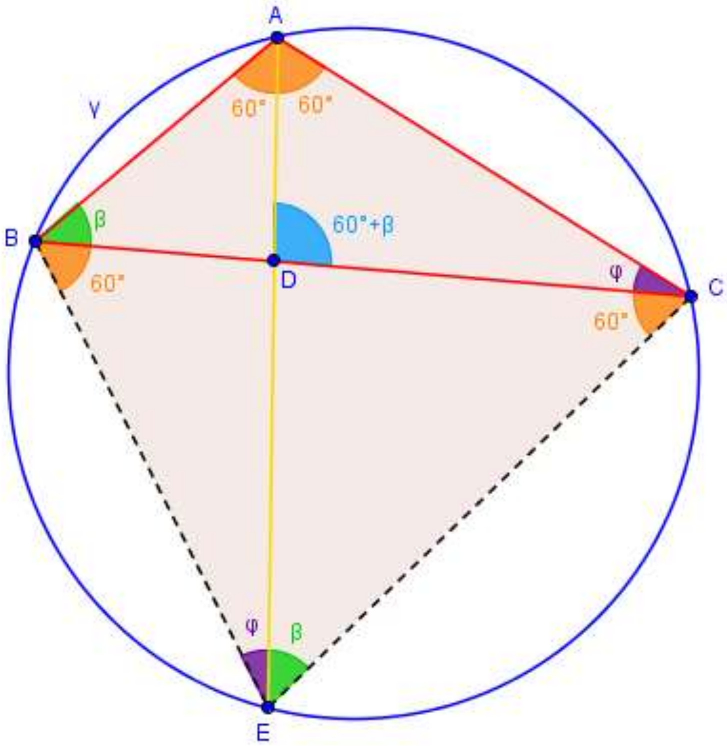


**Figura** 9: Círculo $\gamma$ circunscrito ao triângulo $ABC$.

Note, pela propriedade do ângulo inscrito, que $\angle ACB = \angle AEB = \varphi$ e $\angle EAB = \angle ECB = \angle EBC = 60°$. Além disso, $\angle ADC = 60° + \beta$, por ser ângulo externo ao triângulo $\Delta ADB$. Portanto, os triângulos $\Delta \mathrm{ABE}$ e $\Delta \mathrm{ADC}$ são semelhantes. Assim, podemos estabelecer a seguinte igualdade

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \qquad (3)$$

Outro fato importante é que o triângulo $\Delta \mathrm{BCE}$ é equilátero, visto que no quadrilátero inscritível $ABCE$ a soma dos ângulos opostos é igual a 180°. Então

$$BE = EC = BC \qquad (4)$$

Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCE$ obtemos

$$AB.EC + BE.AC = AE.BC \qquad (5)$$

Como em (4) $BE$, $BC$ e $EC$ são iguais, vamos escrevê-los em (5) todos como sendo $BE$. Assim obtemos

$$AB.BE + BE.AC = AE.BE \Leftrightarrow BE.(AB + AC) = AE.BE$$

Donde efetuamos o cancelamento de $BE$ e chegamos a igualdade

$$(AB + AC) = AE \qquad (6)$$

Além disso, da igualdade (3) obtemos a expressão

$$AE = \frac{AB.AC}{AD},$$

a qual substituímos em (6) para escrever

$$AB + AC = \frac{AB.AC}{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{AD} = \frac{AB + AC}{AB.AC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB},$$

como queríamos mostrar. ■

# 3. UM PASSEIO PELA TEORIA DOS NÚMEROS

Quando se estuda Teoria dos Números, é impossível não se deparar com problemas e indagações simples, aparentemente óbvias num primeiro momento, mas que se tornam difíceis, porque não é fácil explicar o que parece óbvio. Por esses motivos, a Teoria dos Números é considerada um ramo desafiador e instigante.

Mas, o que de fato trata a Teoria dos Números? De forma direta, podemos dizer, que Teoria dos Números estuda propriedades dos números em geral, e em particular dos números inteiros, bem como a larga classe de problemas que surge no seu estudo. Nos dias de hoje, esses problemas estão presentes em diferentes práticas sociais, por exemplo, problemas relacionados com o uso de cartão de crédito, uso de senhas para abrir o computador, armazenamento de dados dentro do computador, etc.

Outro tema central em Teoria dos Números é estudo dos números primos. Desde o seu surgimento, os números primos sempre têm desafiado a curiosidade e a engenhosidade dos matemáticos, levantando uma série aparentemente inesgotável de questões a seu respeito. No próximo tópico vamos recordar alguns fatos importantes acerca dos números primos.

## 3.1. NÚMEROS PRIMOS

Dado um número inteiro positivo $p > 1$, ele será, um número primo ou apenas primo, se e somente 1 e $p$ forem os únicos divisores positivos. Se um inteiro positivo é maior que 1 e não é primo, ou seja, possui outros divisores além de 1 e $p$, chamaremos esse inteiro de composto.

Então, como exemplo, os inteiros positivos 2,3,5 e 7 são primos enquanto que os inteiros 6, 8, 10 e 12 são compostos. Mas podemos nos perguntar sobre o inteiro positivo 1, onde se enquadra, haja vista ele ser divisível por si próprio? Será ele primo ou composto?

A resposta é: Nem é primo e nem é composto. Chamaremos de número especial, pois se temos $a$ um inteiro positivo qualquer, então ou $a$ é primo, ou $a$ é composto ou $a = 1$.

**Teorema 3.1.** *Todo inteiro composto possui um divisor primo*.

**Demonstração.** Seja $a$ um inteiro composto. Consideremos o conjunto A de todos os divisores positivos de $a$, exceto os divisores triviais 1 e $a$, isto é:

$$A = \{x|a; 1 < x < a\}$$

$A \neq \emptyset$, visto que $a$ é composto. Logo, pelo princípio da boa ordenação[8] existe o elemento mínimo $p$ de A, que vamos mostrar ser primo. Com efeito, se $p$ fosse composto admitiria pelo menos um divisor $d$ tal que $1 < d < p$, e então $d|p$ e $p|a$, o que implica $d|a$, isto é, $p$ não seria o elemento mínimo de A. Logo, $p$ é primo. ■

**Teorema 3.2. (Teorema Fundamental da Aritmética).** *Todo inteiro positivo* $n > 1$ *é igual a um produto de fatores primos.*

**Demonstração.** Com efeito, se $n$ é primo, nada há o que demonstrar, e se $n$ é composto, então pelo teorema 2.3.2, possui um divisor primo $p_1$, e temos

$$n = p_1 n_1, \qquad 1 < n_1 < n.$$

Se $n_1$ é primo, então esta igualdade representa $n$ como produto de fatores primos, e se, ao invés, $n_1$ é composto, então pelo teorema 2.3.2, possui um divisor primo $p_2$, isto é, $n_1 = p_2 n_2$, e temos

$$n = p_1 p_2 n_2, \qquad 1 < n_2 < n_1.$$

Se $n_2$ é primo, então esta igualdade representa $n$ como produto de fatores primos e se, ao invés, $n_2$ é composto, então pelo teorema 2.3.2, possui um divisor primo $p_3$, isto é, $n_2 = p_3 n_3$, e temos:

---

[8] O princípio da boa ordenação afirma que todo conjunto não vazio A de inteiros não negativos possui o elemento mínimo.

$$n = p_1 p_2 p_3 n_3, \qquad 1 < n_3 < n_2.$$

E assim por diante. Assim sendo, temos a seguinte sequencia decrescente

$$n > n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > 1$$

E como só existe um número finito de inteiros positivos menores que $n$ e maiores que 1, existe necessariamente um $n_k$ que é um primo $p_k$ $(n_k = p_k)$ e por conseguinte teremos

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$$

Igualdade que representa o inteiro positivo $n > 1$ como produto de fatores primos. ■

**Corolário 3.1.** *Todo inteiro positivo $n > 1$ admite uma única decomposição da forma*

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \cdots p_r^{k_r}$$

*Onde, para $i = 1, 2, \cdots, r$, cada $k_i$ é um inteiro positivo e cada $p_i$ é um primo com $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$, denominada decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$.*

**Teorema 3.3. (de Euclides).** *Há infinitos números primos.*

**Demonstração.** Suponhamos que existe um primo $p_n$ maior que todos os demais primos $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \cdots$, e consideremos o inteiro positivo $P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ . Como $P > 1$, o teorema fundamental da aritmética permite afirmar que $P$ tem pelo menos um divisor primo $p$. Mas $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ são os únicos primos, de modo que $p$ deve, necessariamente, igual a um desses $n$ primos. Assim, $p$ divide $P$ e $p$ divide $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n$. Logo, $p$ divide $(P - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n)$, ou seja, $p$ divide 1. O que é absurdo, pois $P > 1$. Portanto há primos é infinitos.

## 3.2. CONGRUÊNCIA MODULAR

Uma das ferramentas mais importantes na Teoria dos Números é a aritmética modular (ou congruência modular). Em última análise, congruência é a relação entre dois números inteiros que, divididos por um terceiro, chamado módulo de congruência, deixam o mesmo resto. Por exemplo, 20 é congruente a 14 módulo 6, pois 20 dividido por 6 é igual a 3 com resto 2 e 14 dividido por 6 é igual a 2 com resto 2. Vejamos mais formalmente.

**Definição 3.2.1.** *Seja $m$ um inteiro positivo fixo. Dois inteiros quaisquer $a$ e $b$ são congruentes módulo $m$,* se a diferença $a - b$ é um múltiplo de $m$, ou seja, se $m|(a-b)$. Representamos essa congruência como $a \equiv b \ (mod\, m)$.

**Exemplo 3.2.1.** $10 \equiv 1 \ (mod\, 9)$, pois 9|(10 – 1). Da mesma forma, $21 \equiv 3 \ (mod\, 6)$, já que 6 divide a diferença 21 – 3.

Encontramos congruências em todos os cantos. Por exemplo, os relógios trabalham com módulos 12 ou 24 para as horas e módulo 60 para os minutos e segundos. Calendários usam módulo 7 para os dias da semana e módulo 12 para os meses.

**Exemplo 3.2.2.** A "aritmética do relógio" é um exemplo de aritmética módulo *n*, neste caso n = 12. Se forem 7:00 horas e passarem 10 horas, então serão 5:00 horas (7 + 10 é igual a 5 módulo 12). Se passarem 89 horas, serão 0:00 (7 + 89 é igual a 0 módulo 12).

Pela definição 2.3.1, podemos concluir que $a \equiv b \ (mod\, m)$ se, e somente se, existe um inteiro $q$ de modo que $a - b = qm$. Desta forma, as congruências podem ser transformadas em igualdades com a adição de uma incógnita.

As três propriedades mais importantes das congruências são:

- Reflexividade: Se $a$ é qualquer inteiro, então $a \equiv a \ (mod\, m)$.
- Simetria: Se $a \equiv b \ (mod\, m)$, então $b \equiv a \ (mod\, m)$.
- Transitividade: Se $a \equiv b \ (mod\, m)$ e $b \equiv c \ (mod\, m)$, então $a \equiv c \ (mod\, m)$.

Devido a estas três propriedades dizemos que o conjunto dos números inteiros é dividido em $m$ diferentes classes de congruência módulo $m$.

**Lema 3.2.1.** *Se $a, b, c$ e $d$ são inteiros quaisquer com $a \equiv b \ (mod\, m)$ e $c \equiv d \ (mod\, m)$, então vale o seguinte:*

*(i)* $a + c \equiv b + d \ (mod\, m)$
*(ii)* $a - c \equiv b - d \ (mod\, m)$
*(iii)* $ac \equiv bd \ (mod\, m)$
*(iv)* $ak \equiv bk \ (mod\, m)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$
(v) *Se $mdc\,(c, m) = 1$ e $ac \equiv bc \ (mod\, m)$, então $a \equiv b \ (mod\, m)$.*

**Demonstração:** (i) e (iii)

Com efeito, se $a \equiv b \ \ (mód. m)$ e se $c \equiv d \ \ (mod. m)$, então existem inteiros $h$ $e$ $k$ tais que $a - b = hm$ e $c - d = km$. Portanto:

$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) = hm + km = (h + k)m$ *e*

$$ac - bd = (b + hm)(d + km) - bd = (bk + dh + hkm)m$$

*o que implica:*

$a + c \equiv b + d \ \ (mod. m)$ *e* $ac \equiv bd \ \ (mod. m)$

**Teorema 3.2.1.** *Seja $m$ um inteiro positivo fixo e $a$ e $b$ inteiros quaisquer.* Se $a \equiv b \ (mod\, m)$, então $a^n \equiv b^n \ (mod\, m)$ para todo inteiro positivo n.

**Demonstração.**

Usando o “Teorema da indução matemática”, a proposição é verdadeira para $n = 1$, e suposta verdadeira para um inteiro positivo k, temos:

$a^k \equiv b^k \ \ (mod. m)$ e $a \equiv b \ \ (mod. m)$

Portanto, pela propriedade (i):

$a^k. a \equiv b^k. b \ \ (mod. m)$ ou $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \ \ (mod. m)$

Isto é, a proposição é verdadeira para o inteiro positivo $k + 1$. Logo, a proposição é verdadeira para todo inteiro positivo n.

# 4. APLICAÇÕES EM TEORIA DOS NÚMEROS

Neste capítulo alguns problemas relativos à Teoria dos Números recebem uma abordagem geométrica por meio do Teorema de Ptolomeu.

## 4.1. Inteiros escritos como soma de dois quadrados

Os inteiros $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots$ são quadrados de outros inteiros. Porém, há inteiros que não são quadrados de nenhum inteiro, por exemplo o número 13 ou o número 5. Observando aqueles que não são quadrados de inteiros, constatamos que alguns podem ser escritos como somas de dois quadrados: $2 = 1^2 + 1^2,\ \ 5 = 1^2 + 2^2,\ \ 13 = 2^2 + 3^2$.

Um fato interessante é que se $m$ e $n$ são inteiros que resultam de uma soma de dois quadrados, então seu produto também resulta de um soma de dois quadrados. De fato, se $m = a^2 + b^2$ e $n = c^2 + d^2$, para $a, b, c$ e $d$ inteiros então

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Outro fato que chama atenção é que nem todo primo pode ser escrito como uma soma de dois quadrados, por exemplo, não existe inteiros $a$ e $b$ tais que $a^2 + b^2 = 19$. O próximo lema ajuda a entender isto.

**Lema 4.1.1.** *Nenhum primo $p$ da forma $4k + 3$ pode ser escrito como soma de dois quadrados.*

**Demonstração.** Dado um inteiro $a$ qualquer, temos que $a \equiv 0, 1,2, 3\ (mod\ 4)$. Consequentemente, $a^2 \equiv 0, 1\ (mod\ 4)$. Então, para quaisquer $a$ e $b$ inteiros,

$$a^2 + b^2 \equiv 0,1, 2\ (mod\ 4)$$

E como $p \equiv 3\ (mod\ 4)$, segue-se que $p = a^2 + b^2$ é impossível. ■

Neste ponto levantamos a seguinte questão: Quando um primo $p$ pode ser escrito como soma de dois quadrados? O próximo lema responde a esta questão.

**Lema 4.1.2.** *Se $p$ é um primo ímpar e $p = a^2 + b^2$, então $p$ é da forma $4k + 1$, com $k$ inteiro positivo.*

**Demonstração.** A prova resume-se ao caso em que os inteiros positivos $a$ e $b$ possuem paridades opostas, pois caso contrário, $a^2 + b^2$ sempre resulta em um número par, o que contraria a hipótese. Portanto, se $a$ e $b$ tem paridades opostas, podemos supor sem perda de generalidade $a = 2q$ um número par e $b = 2t + 1$ um número ímpar. Assim $a^2 = 4q^2$ e $b^2 = 4t^2 + 4t + 1$, o que nos dá $a^2 + b^2 = 4(q^2 + t^2 + t) + 1$, ou seja, $a^2 + b^2 = 4k + 1$. ■

De outro modo, o lema anterior afirma que todo primo que é expresso como a soma de dois quadrados é congruente a 1 módulo 4.

Como vimos, os lemas 4.1.1 e 4.1.2 estabelecem condições que um número primo qualquer deve satisfazer para ser ou não escrito como uma soma de dois quadrados. Neste momento surge uma outra questão, qual seja, a unicidade. O próximo teorema, além de sintetizar os lemas 4.1.1 e 4.1.2, responde a essa última questão.

***Teorema 4.1.1***: Todo primo $p$ pode ser escrito, no máximo, de uma maneira como soma de dois quadrados.

Chegou o momento de explorar a interdisciplinaridade entre os conteúdos de Geometria Plana e Teoria dos Números! O teorema de Ptolomeu fornece uma maneira puramente geométrica para demonstrar o teorema acima. Vejamos.

***Prova***. Sejam $p$ um primo e $a, b, c, d$ naturais não nulos tais que $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Como $\left(\sqrt{p}\right)^2 = p$, os triângulos de lados $a, b, \sqrt{p}$ e $c, d, \sqrt{p}$ são triângulos retângulos de hipotenusa $\sqrt{p}$. Consideremos o quadrilátero $ABCD$ abaixo (Figura 10).

Claramente, $ABCD$ é inscritível, uma vez que $med\left(A\hat{B}C\right) + med\left(A\hat{D}C\right) = 180^\circ$. Pelo ***LEMA 1*** acima, obtemos $p(ab + cd) = (ac + bd)(ad + bc)(*)$, de modo que, pelo *Lema de Euclides*, $p \mid (ac + bd)$ ou $p \mid (ad + bc)$. Se $p \mid (ac + bd)$, temos, em particular, $p \leq ac + bd$. Por outro lado, $ac + bd < 2(\sqrt{p})^2 = 2p$. Daí, a única possibilidade é $p = ac + bd$. De $(*)$, segue-se que $ab + cd = ad + bc \Rightarrow a(b - d) - c(b - d) = (a - c)(b - d) = 0$. Agora, se $a = c$, temos $b^2 = d^2$, isto é, $b = d$. Se $b = d$, a conclusão é similar. Finalmente, se $p \mid ad + bc$, o desenvolvimento é análogo.

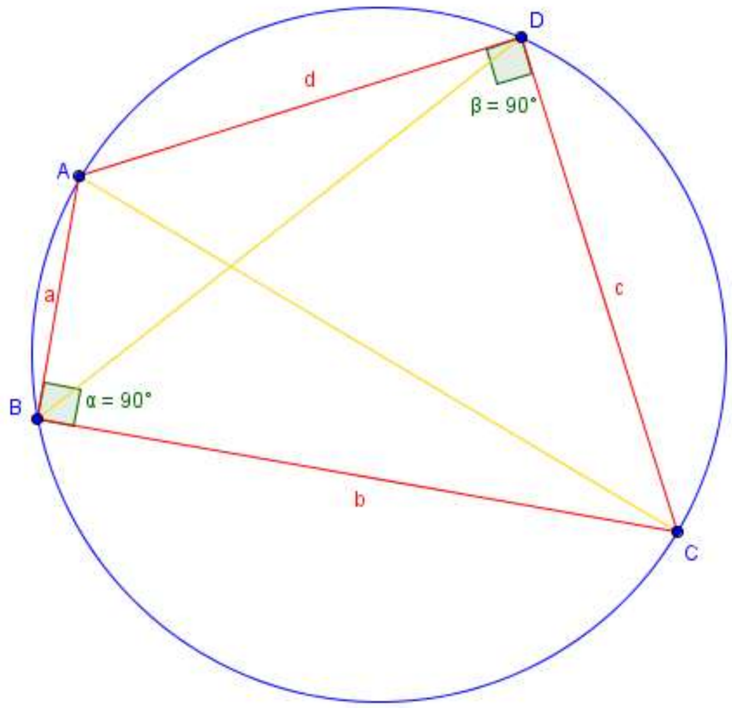


**Figura** 10: Triângulos $ABC$ e $ADC$.

***LEMA 2***: Sejam $a$ e $c$ inteiros. O triângulo de lados $a, c$ e $\sqrt{a^2 - ac + c^2}$ tem um ângulo de $60^\circ$.

***Prova***. Verifiquemos se tal triângulo existe. Inicialmente, observemos que $a^2 - ac + c^2 > 0$. De fato, pela *Desigualdade das Médias*, temos $a^2 + c^2 \geq 2ac > ac$, e a desigualdade requerida é imediata. Suponhamos, sem perda de generalidade, $a \geq c$. É fácil ver que $a \geq \sqrt{a^2 - ac + c^2} \Leftrightarrow a^2 \geq a^2 - ac + c^2 \Leftrightarrow ac \geq c^2$, e esta última desigualdade é válida, tendo em vista a hipótese acima. Agora, é suficiente mostrar que $a < c + \sqrt{a^2 - ac + c^2}$. De fato,

$$a < c + \sqrt{a^2 - ac + c^2} \Leftrightarrow (a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2 < a^2 - ac + c^2.$$

Agora, seja $\alpha$ o ângulo oposto ao lado de medida $\sqrt{a^2 - ac + c^2}$. Pela *Lei dos Cossenos*,

$$a^2 + c^2 - 2ac.cos\alpha = \left(\sqrt{a^2 - ac + c^2}\right)^2 = a^2 - ac + c^2 \Rightarrow cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

De modo análogo, prova-se que, se $b$ e $d$ são inteiros, então o triângulo de lados $b, d$ e $\sqrt{b^2 + bd + d^2}$ tem um ângulo de $120^\circ$.

## 4.2. OBTENDO UMA FATORAÇÃO INACREDITÁVEL COM GEOMETRIA

***Problema IMO (2001)***: Sejam $a, b, c, d$ inteiros, com $a > b > c > d > 0$, e tais que $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$. Prove que $ab + cd$ não é um número primo.

***Solução***. Notemos, inicialmente, que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c) =$$

$$= [(b + d) + (a - c)][(b + d) - (a - c)] = (b + d)^2 - (a - c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2.$$

Considere o quadrilátero $ABCD$ abaixo, no qual $AB = a$, $BC = c$, $CD = b$, $AD = d$ e $AC = a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$. Em virtude do ***LEMA 2***, $med(A\hat{B}C) = 60°$ e $med(A\hat{D}C) = 120°$. Assim, $ABCD$ é inscritível.

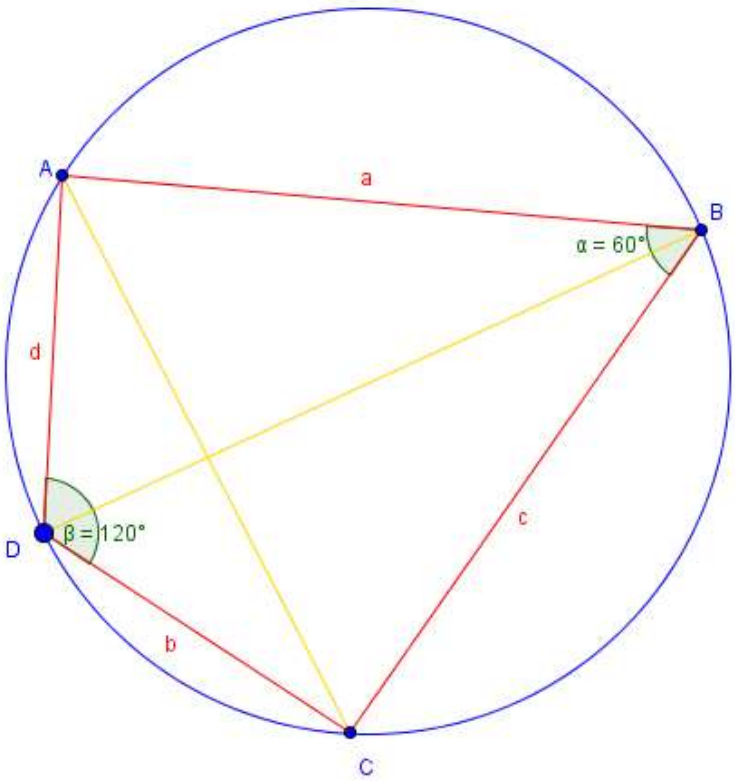


**Figura** 11: quadrilátero inscritível $ABCD$.

Pelo ***LEMA 1***, podemos escrever $(a^2 - ac + c^2)(ac + bd) = (ab + cd)(ad + bc)$. Agora, suponha que $ab + cd$ é primo. Nesse caso, $mdc(ac + bd, ab + cd) = 1$. Com efeito, se $(ab + cd) \mid (ac + bd)$, teríamos $ab + cd \leq ac + bd \Leftrightarrow (a -$

$d)(b-c) \leq 0$, o que é absurdo. Daí, pelo *Lema de Euclides*, $(ac+bd) \mid (ad+bc)$, e, analogamente, obtemos $ac+bd \leq ad+bc \Leftrightarrow (a-b)(c-d) \leq 0$, novamente uma impossibilidade.

***Proposição***: Nenhum primo da forma $4k+3$ é uma soma de dois quadrados.

***Prova***. Seja $p$ um primo da forma $4k+3$. Como todo *quadrado perfeito* é $0$ ou $1$ módulo $4$, se $p = a^2 + b^2$, então $a^2$ e $b^2$ não podem deixar mesmo resto quando divididos por $4$. Assim, teríamos $p \equiv 1 \ (mod\ 4)$, o que não é possível.

## 5. CONCLUSÃO

Tem sido um desafio entrar em sala de aula, onde a maioria dos alunos estão apáticos, sem o menor interesse de aprender matemática. Levar uma proposta que motive os educandos e melhore a transposição didática do professor, tem sido uma necessidade básica. Apresentar algo, que os encham de ânimo e dê a eles uma nova perspectiva na obtenção de resultados de problemas matemáticos, está provado que é bastante válido.

Propostas como as apresentadas, no corpo do trabalho, referente à utilização de ideias específicas de uma área para resolver problemas de outras, vêm trazer um novo olhar para o ensino de matemática. Podemos considerar algumas iniciativas a partir de experiências observadas como discente.

Com a utilização do Teorema de Ptolomeu, é possível sim ter muita vantagem na resolução de problemas complexos, pois, adotando outros algoritmos, seria bem mais trabalhoso e o público que conseguiria entender por outros métodos seria menor. Por exemplo, poucos alunos do ensino médio conseguiria resolver o problema da IMO (2001), pois a maioria não tem acesso a Teoria dos números, e muitos não alcançariam a proposta. Com as ferramentas apresentadas, os alunos teriam melhores condições de resolver esse problema, e foi essa resolução que disponibilizamos _ sem falar que o tempo e o tamanho da apresentação das soluções são bem menores. As sugestões propostas, além de despertar nos alunos o poder de reflexão, mostram que eles têm outros horizontes a explorar. E isso é de fato o que fascina na Matemática.

# 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1]. ALENCAR FILHO, Edgard de. ***Teoria Elementar dos números***. São Paulo: Nobel, 1981.

[2]. HEFEZ, Abramo. ***Elementos de Aritmética***. Rio de Janeiro: SBM – Coleção textos universitários, 1995.

[3]. SANTOS, José Plínio. ***Introdução à Teoria dos Números***. São Paulo: SBM – coleção matemática universitária, 1998.

[4]. ‘EVES, Harword. ***Introdução a história da matemática.*** 4ª edição. São Paulo: Unicamp, 2004.

[5]. BARBOSA, João Lucas Marques. ***Geometria Euclidiana Plana***. 4ª edição. São Paulo: SBM – Coleção do professor de matemática,1995.

[6]. DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. ***Fundamentos de Matemática Elementar*** - Vol. 9. São Paulo: Atual, 1993.

[7]. BOYER, Carl B. ***História da Matemática***. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

[8]. OBM. Aplicações de combinatória e teoria dos números. Disponível em: http://www.obm.org.br/export/sites/default/semana_olimpica/docs/2007/combinatoria_geometria_tn.pdf. Acesso em: 13 Ago. 2015.

[9]. GUSMÂO, Cyntia. O Ateliê musical de Claudio Ptolomeu. Disponível em: <*www.scielo.br/pdf/ss/v11n4/v11n4a02.pdf*>. Acesso em: 22 ago. 2015.

[10]. SOBERON, Pablo. Teoria dos números e geometria. Disponível em: <*http://psoberon.com/2010/04/04/teoria-de-numeros-ygeometria*>. Acesso em: 22 ago.2015.

[11]. NASCIMENTO, Sebastião Vieira do. Curiosidades sobre os números primos e teoremas. Disponível em: <*http://www.ebah.com.br/content/ABAAAATxAAE/curiosidades-sobre-numeros-primos-teoremas*>. Acesso em: 28 set 2015.

[12]. SANTIAGO, Emerson. Ptolomeu. Disponível em: <*www.infoescola.com/biografias/claudio-ptolomeu/*>. Acesso em: 15 out. 2015.

[13]. UOL Educação. Cientista grego-egípcio – Claudio Ptolomeu. Disponível em: <*educacao.uol.com.br/biografias/ptolomeu.jhtm*>. Acesso em: 15 out. 2015.

[14]. PATRICK, Francisco. Claudio Ptolomeu – Biografia – Vida e Obra. Disponível em: <*www.siteastronomia.com/claudio-ptolomeu-biografia-vida-obra*>. Acesso em: 29 out. 2015.