



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:**  
**ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**DAVID SENA BALREIRA**

**OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL APROXIMADA DE ESTRUTURAS LAMINADAS DE**  
**MATERIAL COMPÓSITO**

**FORTALEZA**

**2018**

DAVID SENA BALREIRA

OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL APROXIMADA DE ESTRUTURAS LAMINADAS DE  
MATERIAL COMPÓSITO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Evandro Parente Junior, Dr.

Coorientador: Antônio Macário Cartaxo de Melo, Dr.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- B143o Balreira, David Sena.  
Otimização sequencial aproximada de estruturas laminadas de material compósito / David Sena Balreira. –  
2018.  
118 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.  
Coorientação: Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo.
1. Estruturas laminadas. 2. Algoritmos Genéticos. 3. Otimização por Nuvem de Partículas. 4. Funções de  
Base Radial. 5. Regressão por Vetores Suporte. I. Título.

CDD 624.1

---

DAVID SENA BALREIRA

OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL APROXIMADA DE ESTRUTURAS LAMINADAS DE  
MATERIAL COMPÓSITO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em: 28/06/2018.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Evandro Parente Junior, Dr. (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Antônio Macário Cartaxo de Melo, Dr. (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Anselmo Ramalho Pitombeira Neto, Dr.  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Profª. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva, Dra.  
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

A Deus.

Ao meu pai Tito Balreira e a minha irmã  
Rosamélia Balreira por todo o amor e  
dedicação que me deram durante toda a minha  
vida.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me concedido a oportunidade de realizar esse trabalho.

Aos meus sobrinhos Victor, Roberta, Nertan Filho e Tito Filho, pela grande amizade.

A meu orientador Evandro Parente Junior, pela amizade e exemplo de dedicação que testemunhei ao longo destes 2 anos de orientação.

A meu coorientador Antônio Macário Cartaxo de Melo, pelas contribuições realizadas em todos os trabalhos que fizemos em conjunto.

Aos professores Anselmo Cardoso de Paiva e Anselmo Ramalho Pitombeira Neto, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas Elias Barroso, Guilherme Anderson, Bergson Matias, Jorge Mendonça, Luana Andreza, Samir Auad e Luís Daniel Assulfi pela amizade, incentivo e valiosas colaborações dadas nos momentos mais difíceis que passei ao longo deste mestrado.

Aos colegas da turma de mestrado, Ézio Magalhães, Emmanuel Egito, Michell Ribeiro, Almircelio Marques, Rosendo Sobrinho, Daniel Lucas, Nertan Barroso, Hilda e Jamires Cordeiro, pela amizade e ajuda nos trabalhos e listas de exercícios das disciplinas deste mestrado.

Aos meus amigos Daniel Rodrigues, Gustavo e Felipe pelo apoio e ajuda durante os momentos difíceis.

À CAPES, UFC, DEECC e LMCV pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

## RESUMO

A otimização de estruturas de material compósito reforçados por fibras é um problema cuja solução tem alto custo computacional, principalmente quando são utilizados métodos meta-heurísticos, como Algoritmos Genéticos e Otimização por Nuvem de Partículas. Estes métodos requerem um grande número de avaliações da função objetivo e restrições, o que combinado ao elevado tempo de processamento das análises pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e Análise Isogeométrica (AIG), dificulta a aplicação de técnicas de otimização na solução de problemas práticos da engenharia estrutural. Uma alternativa para reduzir o tempo de processamento é a utilização da Otimização Sequencial Aproximada (SAO) usando modelos substitutos que representem de maneira aproximada, mas eficiente, os resultados do MEF e da AIG. A SAO é uma técnica que requer a criação de uma interface entre um programa de otimização e um programa de simulação numérica. Neste trabalho a interface foi realizada utilizando o *Biologically Inspired Optimization System* (BIOS) para otimização e o *Finite element Analysis Tool* (FAST) para simulação numérica. Utilizou-se as Funções de Base Radial (RBF) na SAO e a Regressão por Vetores Suporte (SVR) na Otimização Estática (OE) como modelos substitutos para aproximar as respostas das análises estruturais das estruturas laminadas. A Sequência de Hammersley foi utilizada para gerar as amostras de treinamento para construção do modelo substituto inicial. Na SAO o modelo RBF inicial foi sendo atualizado ao longo da otimização em uma sequência de gerações, na (OE) o modelo substituto não foi atualizado. A atualização foi realizada através da inserção de novos pontos na amostra de treinamento que foram obtidos através de duas abordagens diferentes: a primeira foi a inserção do melhor indivíduo de cada geração, na segunda, foram realizadas inserções de novos pontos localizados nas regiões esparsas do espaço das variáveis de projeto através da minimização da Função Densidade (FD). Na avaliação da SAO e da OE foram maximizados os desempenhos de estruturas laminadas do tipo placa e casca. Os resultados mostraram a viabilidade do uso da SAO com o RBF na otimização de estruturas laminadas devido a redução do custo computacional e aos valores admissíveis de erros quando foram comparadas as soluções aproximadas aos projetos ótimos. A OE, por sua vez, mostrou que o custo computacional foi reduzido ao extremo, mas que há necessidade de inserção de novos pontos para melhorar a qualidade das aproximações.

**Palavras-chave:** Estruturas laminadas, algoritmos genéticos, otimização por nuvem de partículas, funções de base radial, regressão por vetores suporte.

## ABSTRACT

The optimization of fiber reinforced composite structures is a problem whose solution has a high computational cost, especially when using metaheuristic methods such as Genetic Algorithms and Particle Swarm Optimization. These methods require a large number of evaluations of the objective function and constraints, which combined with the high processing time of the analysis by the Finite Element Method (MEF) and Isogeometric Analysis (AIG), makes it difficult to apply optimization techniques in solving a structural engineering problem. An alternative to reduce processing time is the use of Sequential Approximate Optimization (SAO) using surrogate models that approximate but efficiently represent the MEF and AIG results. The SAO is a technique that requires the creation of an interface between an optimization program and a numerical simulation program. In this work, the interface was performed using the Biologically Inspired Optimization System (BIOS) for optimization and the Finite element Analysis Tool (FAST) for numerical simulation. The Radial Base Functions (RBF) were used in SAO and the Support Vector Regression (SVR) were used in Static Optimization (SO) as surrogate models to approximate the structural analysis responses of the laminated structures. Initially, training samples were generated by the Hammersley Sequence to construct the initial surrogate model. In the SAO the initial RBF model was updated during the optimization in a sequence of generations, in the SO the surrogate model was not updated. The updating was accomplished through the insertion of new points in the training sample that were obtained through two different approaches: the first was the insertion of the best individual of each generation; in the second, insertions of new points located in the sparse regions of space of the design variables by minimizing the Density Function (DF). In the evaluation of SAO and SO, the performance of laminated plate and shell structures was maximized. The results showed the feasibility of using SAO with RBF in the optimization of laminated structures due to the reduction of computational cost and the admissible error values when the approximate solutions were compared to the optimal designs. The SO, in turn, showed that the computational cost was reduced to the extreme, but that there is a need to insert new points to improve the quality of the approaches.

**Keywords:** Laminated structures, genetic algorithm, particle swarm optimization, radial basis function, support vector regression.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Placa laminada formada pelo empilhamento de 4 lâminas. ....	21
Figura 2. Sistemas de eixos local (123) e global (xyz) de uma lâmina. ....	23
Figura 3. Esquema de laminação de uma placa com 8 lâminas [ $\pm 45$ ] <sub>s</sub> . ....	26
Figura 4. Parâmetros de resistência das lâminas. ....	27
Figura 5. Fluxograma do AG. ....	34
Figura 6. Codificação e decodificação de um laminado com 5 lâminas. ....	34
Figura 7. Valores replicados. ....	35
Figura 8. Detalhe da obtenção do valor da função aptidão de cada indivíduo. ....	36
Figura 9. Procedimento de geração de filhos. ....	37
Figura 10. Mutação em dois genes (espessura e material) de um laminado com 5 lâminas. ....	37
Figura 11. Operadores para laminados em um laminado com 5 lâminas. ....	38
Figura 12. Tipos de topologia. ....	40
Figura 13. Fluxograma do PSO. ....	42
Figura 14. Posição e Velocidade de uma partícula com 4 lâminas. ....	43
Figura 15. Mutação da espessura e do material. ....	44
Figura 16. Troca de posição entre duas lâminas. ....	44
Figura 17. Parte do fluxograma do PSO Híbrido modificada em relação ao PSO convencional. ....	45
Figura 18. Processo de construção do modelo substituto. ....	49
Figura 19. Influência da largura ( $\sigma$ ). ....	52
Figura 20. Ilustra o epsilon-tubo, linhas pontilhadas. ....	54
Figura 21. Mapeamento para um espaço de alta dimensão. ....	59
Figura 22. Exemplos de amostragem. ....	64
Figura 23. Comparação entre métodos de amostragem. ....	66
Figura 24. Gráficos dos modelos e da Função Densidade. ....	68
Figura 25. Placa laminada com 8 lâminas submetida a carregamento biaxial. ....	68
Figura 26. Curvas de nível da superfície da Função Densidade com 9 pontos da amostra. ....	69
Figura 27. Probabilidade de Melhoria (Probability of Improvement). ....	71
Figura 28. Modelo substituto atualizado. ....	71
Figura 29. Superfície de resposta da Probabilidade de Melhoria. ....	72
Figura 30. Probabilidade de Melhoria atualizada. ....	72
Figura 31. Melhoria Esperada ( <i>Expected Improvement</i> ). ....	73

Figura 32. Modelo substituto atualizado. ....	74
Figura 33. Superfície de Melhoria Esperada. ....	74
Figura 34. Melhoria Esperada atualizada. ....	75
Figura 35. Fluxograma do SAO-RBF.....	83
Figura 36. Exemplo 2 com $k = 0,125$ – AG-SAO(1+1) com 40 gerações. ....	92
Figura 37. Exemplo 2 com $k = 0,250$ – AG-SAO(1+1) com 100 gerações. ....	92
Figura 38. Exemplo 2 com $k = 0,500$ – AG-SAO(1+1) com 40 gerações. ....	93
Figura 39. Casca laminada cilíndrica. ....	94
Figura 40. Exemplo 3 - Resultados SAO-RBF usando o AG. ....	98
Figura 41. Placa laminada quadrada com furo. ....	99
Figura 42. Exemplo 4 - Resultados SAO-RBF usando o AG. ....	102

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Parâmetros PSO (Função Densidade).....	41
Tabela 2. Pontos do modelo RBF Regularizado.....	67
Tabela 3. Amostra de 9 pontos (Sequência de Hammersley).....	69
Tabela 4. Parâmetros de otimização comuns a todos os exemplos. ....	84
Tabela 5. Exemplo 1 – Geometria e propriedades do material. ....	85
Tabela 6. Exemplo 1 - Parâmetros.....	86
Tabela 7. Exemplo 1 - Resultados da otimização.....	86
Tabela 8. Exemplo 2 - Propriedades do material Grafite-Epóxi. ....	87
Tabela 9. Exemplo 2 - Parâmetros.....	88
Tabela 10. Exemplo 2 - Resultados Kogiso et al. (1994). ....	88
Tabela 11. Exemplo 2 - Resultados HFM, (BIOS), AG.....	88
Tabela 12. Exemplo 2 - Resultados HFM, (BIOS), PSO. ....	89
Tabela 13. Exemplo 2 - Resultados PSO e AG. ....	89
Tabela 14. Exemplo 2 - Erros percentuais (%) para RBF e SVR.....	89
Tabela 15. Exemplo 2 com $k = 0,125$ - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 1). ....	90
Tabela 16. Exemplo 2 com $k = 0,125$ - Medidas estatísticas do PSO-SAO(1 + 1).....	90
Tabela 17. Exemplo 2 com $k = 0,125$ - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 3). ....	90
Tabela 18. Exemplo 2 com $k = 0,125$ - Medidas estatísticas do PSO-SAO(1 + 3).....	90
Tabela 19. Exemplo 2 com $k = 0,125$ - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 6). ....	90
Tabela 20. Exemplo 2 com $k = 0,125$ - Medidas estatísticas PSO-SAO(1 + 6).....	91
Tabela 21. Exemplo 2 com $k = 0,250$ - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 1). ....	91
Tabela 22. Exemplo 2 com $k = 0,500$ - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 1). ....	93
Tabela 23. Exemplo 3 - Geometria da casca e propriedades do material.....	95
Tabela 24. Exemplo 3 - Parâmetros de otimização do exemplo 3. ....	95
Tabela 25. Exemplo 3 - Resultados com 30 gerações/iterações.....	96
Tabela 26. Exemplo 3 - Resultados das medidas estatísticas com 30 gerações/iterações.....	96
Tabela 27. Exemplo 3 - Laminação ótima.....	96
Tabela 28. Exemplo 3 - Resultados da otimização estática.....	96
Tabela 29. Exemplo 3 - Resultados para SAO(1 + 1) com 30 Ger/Iter.....	97
Tabela 30. Exemplo 3 - Resultados das medidas estatísticas (30), (1 + 1). ....	97
Tabela 31. Exemplo 4 - Resultados Placa com Furo.....	99
Tabela 32. Exemplo 4 - Resultados das medidas estatísticas.....	99

Tabela 33. Exemplo 4 - Resultados usando o modelo de alta fidelidade. ....	100
Tabela 34. Exemplo 4 - Resultados RBF e SVR. ....	100
Tabela 35. Exemplo 4 - Resultados Placa com Furo SAO(1 + 1). ....	101
Tabela 36. Exemplo 4 - Resultados das medidas estatísticas SAO(1 + 1). ....	101
Tabela 37. Exemplo 4 - Erros percentuais (%). ....	101
Tabela 38. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 1) com 30 Ger/Iter. ....	113
Tabela 39. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 1) com 40 Ger/Iter. ....	113
Tabela 40. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 1) com 50 Ger/Iter. ....	113
Tabela 41. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 1) com 100 Ger/Iter. ....	114
Tabela 42. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 3) com 30 Ger/Iter. ....	114
Tabela 43. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 3) com 40 Ger/Iter. ....	114
Tabela 44. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 3) com 50 Ger/Iter. ....	115
Tabela 45. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 3) com 100 Ger/Iter. ....	115
Tabela 46. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 6) com 30 Ger/Iter. ....	115
Tabela 47. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 6) com 40 Ger/Iter. ....	116
Tabela 48. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 6) com 50 Ger/Iter. ....	116
Tabela 49. Resultados $k = 0,125$ para SAO(1 + 6) com 100 Ger/Iter. ....	116
Tabela 50. Resultados $k = 0,250$ para SAO(1 + 1) com 30/40 Ger. ....	117
Tabela 51. Resultados $k = 0,250$ para SAO(1 + 1) com 50/100 Ger. ....	117
Tabela 52. Resultados $k = 0,500$ para SAO(1 + 1) com 30/40 Ger. ....	118
Tabela 53. Resultados $k = 0,500$ para SAO(1 + 1) com 50/100 Ger. ....	118

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
AIG	Análise Isogeométrica
RBF	Radial Basis Function
SVR	Support Vector Regression
SAO	Sequential Approximate Optimization
OE	Otimização Estática
AG	Algoritmos Genéticos
PSO	Particle Swarm Optimization
HLO	Hipercubo Latino Otimizado
HSS	Hammersley Sequence Sample
FD	Função Densidade
PI	Probability of Improvement
EI	Expected Improvement
FAST	Finite element Analysis Tool
BIOS	Biologically Inspired Optimization System
LMCV	Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\theta$	Ângulo de orientação das fibras de uma lâmina
$\varepsilon$	Deformação longitudinal
$\gamma$	Deformação transversal (cisalhamento)
$\sigma$	Tensão longitudinal
$\tau$	Tensão transversal (cisalhamento)
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$G$	Módulo da elasticidade transversal
$\kappa$	Curvatura
$z_k$	Coordenada ao longo da espessura da lâmina
$k$	Número da lâmina
$n_l$	Número total de lâminas
$F$	Parâmetro de resistência da lâmina
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$S_f$	Fator de segurança
$f$	Coefficientes do critério de falha de Tsai-Wu
$\mathbf{w}$	Pesos dos modelos substitutos
$h$	Funções de base radial
$m$	Número de pontos da amostra de treinamento
$n$	Número de variáveis de projeto
$\mathbf{x}$	Vetor das variáveis de projeto
$\mathbf{y}$	Vetor de valores observados ( <i>targets</i> )

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Organização do Texto .....</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>MATERIAL COMPÓSITO .....</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Comportamento Mecânico de uma Lâmina.....</b>	<b>22</b>
<b>2.2</b>	<b>Teoria Clássica de Laminação (TCL).....</b>	<b>24</b>
<b>2.3</b>	<b>Crítérios de falha .....</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS LAMINADAS .....</b>	<b>31</b>
<b>3.1</b>	<b>Algoritmos Genéticos .....</b>	<b>32</b>
<b>3.1.1</b>	<b><i>Codificação .....</i></b>	<b>33</b>
<b>3.1.2</b>	<b><i>Função Aptidão e Seleção .....</i></b>	<b>35</b>
<b>3.1.3</b>	<b><i>Cruzamento .....</i></b>	<b>36</b>
<b>3.1.4</b>	<b><i>Mutação .....</i></b>	<b>37</b>
<b>3.1.5</b>	<b><i>Operadores para Laminados .....</i></b>	<b>38</b>
<b>3.2</b>	<b>Otimização por Nuvem de Partículas .....</b>	<b>38</b>
<b>3.3</b>	<b>Otimização por Nuvem de Partículas para Laminados .....</b>	<b>41</b>
<b>3.4</b>	<b>Tratamento das restrições .....</b>	<b>45</b>
<b>3.4.1</b>	<b><i>Penalidade Constante .....</i></b>	<b>45</b>
<b>3.4.2</b>	<b><i>Método de Deb .....</i></b>	<b>46</b>
<b>3.4.3</b>	<b><i>Penalidade Adaptativa .....</i></b>	<b>46</b>
<b>4</b>	<b>MODELOS SUBSTITUTOS .....</b>	<b>48</b>
<b>4.1</b>	<b>Funções de Base Radial.....</b>	<b>50</b>
<b>4.2</b>	<b>Cálculo da largura da RBF .....</b>	<b>52</b>
<b>4.2.1</b>	<b><i>Técnica da escala adaptativa .....</i></b>	<b>53</b>
<b>4.3</b>	<b>Regressão por Vetores Suporte .....</b>	<b>54</b>
<b>4.3.1</b>	<b><i>Regressão por Vetores Suporte (<math>\epsilon</math>-SVR) .....</i></b>	<b>55</b>
<b>4.3.2</b>	<b><i>Método de Bunch e Kaufman .....</i></b>	<b>58</b>

4.3.3	<i>Funções do Kernel</i> .....	59
4.3.4	<i>Regressão por Vetores Suporte (v-SVR)</i> .....	60
5	<b>TÉCNICAS DE AMOSTRAGEM</b> .....	62
5.1	<b>Projeto de Experimentos</b> .....	63
5.1.1	<i>Hipercubo Latino</i> .....	64
5.1.2	<i>Hipercubo Latino Otimizado</i> .....	64
5.1.3	<i>Sequência de Hammersley</i> .....	65
5.2	<b>Função Densidade</b> .....	66
5.3	<b>Probabilidade de Melhoria</b> .....	70
5.4	<b>Melhoria Esperada</b> .....	72
5.5	<b>Indivíduo Ótimo da Superfície de Resposta</b> .....	74
6	<b>OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL APROXIMADA</b> .....	77
6.1	<b>Desenvolvimento da Otimização Sequencial Aproximada</b> .....	77
6.2	<b>Otimização Sequencial Aproximada usando RBF</b> .....	80
7	<b>EXEMPLOS</b> .....	84
7.1	<b>Maximização da Carga de Flambagem de uma Placa Quadrada</b> .....	85
7.2	<b>Maximização da Resistência de uma Placa Retangular</b> .....	87
7.3	<b>Maximização da Rigidez de uma Casca Cilíndrica</b> .....	94
7.4	<b>Maximização da Resistência de uma Placa com Furo</b> .....	98
8	<b>CONCLUSÃO</b> .....	103
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	106
	<b>ANEXO A – RESULTADOS <math>k = 0,125</math> KOGISO <i>et al.</i> (1994)</b> .....	113
	<b>ANEXO B – RESULTADOS <math>k = 0,250</math> KOGISO <i>et al.</i> (1994)</b> .....	117
	<b>ANEXO C – RESULTADOS <math>k = 0,500</math> KOGISO <i>et al.</i> (1994)</b> .....	118



## 1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos reforçados por fibras são formados pela combinação de dois materiais, uma matriz e fibras unidirecionais imersas na matriz, para formar um material com propriedades melhores do que a dos materiais considerados individualmente (JONES, 1999). Os materiais compósitos são utilizados em diversas aplicações de engenharia devido às suas características de elevada resistência, rigidez, resistência à corrosão e à fadiga, associada a um baixo peso específico (DANIEL; ISHAI, 1994).

Esses materiais são normalmente utilizados na forma de lâminas empilhadas formando uma estrutura laminada, onde o material e a orientação de cada lâmina são escolhidos de forma a obter um projeto estrutural mais eficiente. A escolha dessas orientações é um objeto de estudo desse trabalho. Devido à complexidade do comportamento das estruturas laminadas de materiais compósitos, a disponibilidade de soluções analíticas é limitada. Desta forma, a análise destas estruturas requer a utilização de métodos computacionais, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) (ROCHA, 2013) e a Análise Isométrica (AIG) (BARROSO, 2015).

Como as estruturas laminadas apresentam elevado número de variáveis, o projeto destas estruturas deve ser feito utilizando técnicas de otimização (HAFTKA; GÜRDAL, 1991; GÜRDAL; HAFTKA; HAJELA, 1999). Devido à presença de variáveis de projeto discretas, os algoritmos baseados em gradientes não podem ser aplicados. Assim, normalmente a otimização de estruturas laminadas é realizada utilizando métodos meta-heurísticos como Algoritmos Genéticos (AG) e Otimização por Nuvem de Partículas (PSO) (SILVA, 2012; ROCHA, 2014; BARROSO, 2015). Estes serão os métodos utilizados para a escolha das orientações das lâminas.

Estes métodos apresentam diversas vantagens em relação a métodos de Programação Matemática. Dentre elas podemos dizer que eles trabalham com um conjunto de potenciais soluções, sendo, portanto, menos suscetíveis a mínimos locais (ARORA, 2004). Outra vantagem é que eles são capazes de lidar com espaços de projeto descontínuos e não necessitam de informações de gradientes (BRATTON; KENNEDY, 2007). Isso justifica o uso de tais métodos para obter estruturas laminadas mais eficientes.

Infelizmente, os algoritmos meta-heurísticos requerem um grande número de avaliações da função objetivo e restrições, o que combinado ao elevado tempo de processamento das análises pelo Método dos Elementos Finitos (SIMPSON et al., 2001;

CARDOZO; GOMES; AWRUSH, 2011; ROCHA, 2013) e Análise Isogeométrica (BARROSO, 2015), dificultam a aplicação do uso das técnicas de otimização na solução de problemas práticos da engenharia estrutural. Assim, a otimização de estruturas reais utilizando modelos de análise de alta fidelidade é limitada pelo elevado custo computacional envolvido.

Uma alternativa para reduzir o tempo de processamento, proposta neste trabalho, é a utilização de modelos substitutos (*surrogate models*) que representem de maneira aproximada, mas eficiente, os resultados do modelo de análise (WANG; SHAN, 2006). Estes modelos substitutos são criados a partir dos resultados do MEF e da AIG gerados para um conjunto de amostras, onde cada amostra corresponde a um ponto no espaço das variáveis de projeto. Assim, a aplicação de modelos substitutos na otimização de laminados tem atraído um crescente interesse (BISAGNI; LANZI, 2002; LEE; LIN, 2003; GOMES; AWRUSH; LOPES, 2011; KOIDE; FERREIRA; LUERSEN, 2015; NIK *et al.*, 2014; MENDONÇA *et al.*, 2016).

Os modelos substitutos são criados a partir dos resultados do MEF e da AIG gerados para um conjunto de amostras, onde cada amostra corresponde a um ponto no espaço das variáveis de projeto. Essa forma de otimização pode ser denominada estática (OE) porque o tamanho da amostra de treinamento não muda ao longo da otimização. Assim, esta abordagem é mais simples, possui um custo computacional reduzido em relação ao modelo de alta fidelidade, mas necessita de uma amostra inicial com grande número de pontos de forma a produzir resultados precisos.

Outra alternativa é a utilização da Otimização Sequencial Aproximada (*Sequential Approximate Optimization – SAO*) usando modelos substitutos (*surrogate models*), principal foco deste trabalho. Esta é uma técnica sequencial de otimização que requer a criação de uma interface entre um programa de otimização e outro de simulação numérica (HAFTKA; GÜRDAL, 1991).

A interface é necessária porque novos pontos são inseridos na amostra de treinamento ao longo da otimização, sendo necessária a avaliação desses novos pontos através do MEF ou da AIG. A amostra atualizada é então utilizada para construção de um modelo substituto atualizado. Este processo se repete a cada geração/iteração fazendo com que o modelo substituto se torne mais preciso e a otimização caminhe para a solução ótima procurada.

Zein, Madhavan e Dumas (2017) utilizaram a atualização do modelo substituto através da inserção do ótimo na otimização de uma estrutura laminada usando Algoritmos Genéticos. Este critério de preenchimento é monofásico, pois melhora a aproximação apenas

na região local do espaço de projeto. Esta é uma boa estratégia desde que o ponto ótimo encontrado pelo modelo substituto esteja nas proximidades do ótimo global, caso contrário corre-se o risco de convergir para um ótimo local (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008).

Como problemas de otimização de laminados podem apresentar vários mínimos locais, o critério de preenchimento adotado neste trabalho possui duas fases, uma local e outra global. Assim a melhora da precisão do modelo substituto ocorre de forma local e global, aumentando as chances de convergência da otimização para o ótimo global. Esta abordagem requer uma quantidade menor de pontos na amostra inicial e gera mais pontos de amostragem nas regiões onde há uma melhora substancial do modelo substituto.

Baseado no trabalho de Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011), esta dissertação tem por objetivo estudar a aplicação da SAO utilizando o modelo substituto Funções de Base Radial (*Radial Basis Function* - RBF) em estruturas laminadas de material compósito. Os resultados obtidos serão comparados com os projetos ótimos obtidos através da otimização usando os modelos de alta fidelidade dos problemas propostos, considerando a precisão e o custo computacional envolvido. Também será realizada comparação com os modelos substitutos RBF e Regressão por Vetores Suporte (*Support Vector Regression* – SVR) utilizados de forma estática (OE) sem inserção de novos pontos na amostra, para mostrar que há uma necessidade de inserir novos pontos na amostra para melhorar as aproximações destes modelos.

Essas duas técnicas de construção de modelos substitutos, as Funções de Base Radial (RBF) e a Regressão por Vetores Suporte (SVR), tem como objetivo reduzir o tempo de processamento requerido pelo processo de otimização de estruturas laminadas. Por fim, serão otimizadas estruturas com diferentes geometrias e número de lâminas com objetivo de maximizar o seu desempenho, considerando flambagem, falha do material e deflexões.

## **1.1 Organização do Texto**

O presente trabalho foi dividido em oito capítulos. O Capítulo 2 discute os materiais compósitos reforçados por fibras, mostrando suas vantagens e desvantagens. Em seguida, apresenta-se o conceito de uma lâmina e apresenta-se a Teoria Clássica de Laminação que descreve o seu comportamento mecânico. O capítulo termina com a explicação dos critérios de falha desses materiais.

O Capítulo 3 apresenta uma discussão dos métodos de otimização de estruturas laminadas, com destaque para os Algoritmos Genéticos e a Otimização por Nuvem de Partículas que foram utilizados neste trabalho.

O Capítulo 4 inicia com uma revisão bibliográfica de trabalhos que utilizaram modelos substitutos. Em seguida, apresenta-se a formulação das funções de base radial e regressão por vetores suporte.

O Capítulo 5 aborda os métodos de geração de amostras, Hipercubo Latino Otimizado (HLO) e Sequência de Hammersley (HSS), bem como os critérios de preenchimento utilizados para enriquecimento das amostras.

O Capítulo 6 inicia com a linha do tempo de desenvolvimento da Otimização Sequencial Aproximada e traz trabalhos que aplicaram essa técnica. Em seguida, descreve a implementação da Otimização Sequencial Aproximada.

O Capítulo 7 apresenta exemplos de aplicação da Otimização Sequencial Aproximada a problemas de estruturas de material compósito laminados.

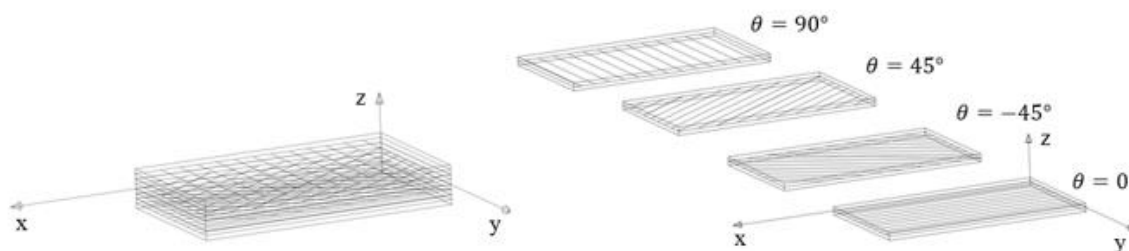
Os comentários finais do trabalho são apresentados no Capítulo 8.

## 2 MATERIAL COMPÓSITO

O material compósito é uma combinação de dois ou mais materiais em uma escala macroscópica de modo a formar um terceiro material com melhores propriedades de engenharia do que materiais convencionais, por exemplo, metais (REDDY, 2004).

Esse material pode ser classificado como fibroso, particulado e laminado (REDDY, 2004). Como exemplo pode-se citar a argamassa com adição de fibras, o concreto e a placa laminada, respectivamente. Neste trabalho será estudado o comportamento de estruturas laminadas (Figura 1). Alguns exemplos de estruturas laminadas são as placas e as cascas.

Figura 1. Placa laminada formada pelo empilhamento de 4 lâminas.



Fonte: elaborada pelo autor.

As principais desvantagens dos compósitos reforçados por fibras são comportamento mecânico complexo e custo elevado. O material é ortotrópico, com propriedades que variam de acordo com a direção, o que resulta em uma análise e um projeto mais complicados. O processo de fabricação requer mão de obra especializada e equipamentos caros, logo as aplicações desse material são em projetos que justifiquem o seu uso, geralmente estruturas sensíveis ao peso.

As vantagens dos compósitos reforçados por fibras são resistência e rigidez elevados, valores elevados das relações resistência/peso, rigidez/peso e da resistência à corrosão. Além do mais, possuem bom isolamento térmico, amortecimento estrutural e resistência à fadiga (JONES, 1999; BARBERO, 2011). Outra vantagem está relacionada a capacidade de se modelar o elemento estrutural para resistir aos esforços gerados pelos carregamentos aplicados.

Essa modelagem é denominada esquema de laminação (do Inglês *stacking sequence* ou *layup*). Ela consiste em empilhar as lâminas com as fibras orientadas de modo a gerar maior resistência e rigidez as solicitações. O termo material ortotrópico é devido a

orientação das fibras dentro da matriz, que influenciam a resistência, sendo maior na direção das fibras.

As estruturas laminadas de material compósito são amplamente utilizadas na indústria aeroespacial, aeronáutica, naval, automotiva, em próteses médicas e em diversas outras aplicações (JONES, 1999; BARBERO, 2011). Pode-se dizer que suas aplicações são principalmente em estruturas sensíveis ao peso, que requerem alta resistência com baixo peso. Assim, o desafio é encontrar um projeto estrutural compósito que maximize a resistência, a rigidez ou minimize os custos e que atenda aos requisitos de uma aplicação específica.

Nesse caso, projetar não é somente dimensionar áreas de seção transversal e espessuras de elementos, mas também encontrar a orientação, o número e a sequência de empilhamento das camadas para formar o elemento estrutural laminado (GÜRDAL; HAFTKA; HAJELA, 1999). Durante a fase de projeto, os múltiplos mecanismos de falha também devem ser verificados como índices de confiabilidade (GÜRDAL; HAFTKA; HAJELA, 1999).

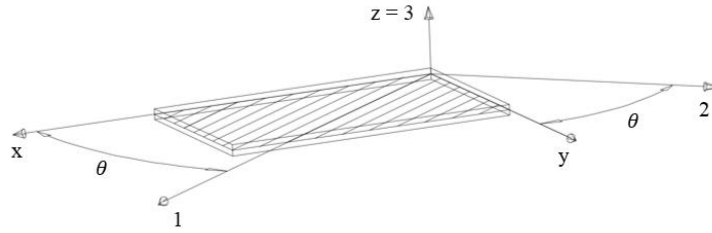
## 2.1 Comportamento Mecânico de uma Lâmina

O comportamento mecânico dos materiais compósitos pode ser estudado de duas maneiras a saber: do ponto de vista micromecânico ou macromecânico (JONES, 1999; DANIEL; ISHAI, 1994). O primeiro deles leva em conta a interação entre fibra e matriz. Outro aspecto é que a ruptura de fibras é incluída na formulação. Já o segundo, será apresentado neste trabalho. Nele, o comportamento dos materiais constituintes se dá através das propriedades aparentes médias. A hipótese fundamental é assumir a lâmina como um material homogêneo e ortotrópico.

Uma lâmina (do Inglês *ply*) é o bloco de construção básica em estruturas laminadas. Assim, conhecer o comportamento mecânico de uma lâmina é essencial para o entendimento de estruturas laminadas. Devido a sua pequena espessura, normalmente se considera que a lâmina está sob um estado plano de tensão.

A lâmina é considerada um material homogêneo, ortotrópico e suas relações constitutivas são escritas em termos das componentes de tensão e deformação em um sistema de eixos locais (123). O sistema de eixos global ( $xyz$ ) é usado na formulação do problema. A *Figura 2* ilustra uma lâmina com seus respectivos sistemas de eixo local e global.

Figura 2. Sistemas de eixos local (123) e global (xyz) de uma lâmina.



Fonte: elaborada pelo autor.

Devido a orientação das fibras de uma lâmina, pode-se calcular as deformações no sistema local do material em função das deformações no sistema global do laminado através de uma matriz de transformação  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

É usual considerar que os compósitos reforçados por fibras apresentam comportamento elástico linear até o início do processo de falha. Neste caso, a relação tensão deformação no sistema local é dada pela lei de Hooke para materiais ortotrópicos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (2)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é a matriz de rigidez reduzida do material compósito, cujos componentes são:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{66} = G_{12} \quad (3)$$

A tensão no sistema global do laminado é então escrita como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T\boldsymbol{\sigma}_1 \quad (4)$$

Utilizando as Equações (4), (2) e (1) pode-se escrever as tensões no sistema global como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T\mathbf{Q}\mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

onde  $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^T\mathbf{Q}\mathbf{T}$  é a matriz de rigidez reduzida transformada.

## 2.2 Teoria Clássica de Laminação (TCL)

As estruturas laminadas possuem espessura muito menor do que as outras duas dimensões. Frequentemente os laminados são usados em aplicações cujos requisitos são resistência de membrana e de flexão (REDDY, 2004). A Teoria Clássica de laminação estima o comportamento do laminado baseado nas hipóteses de Kirchhoff:

- 1) Linhas retas perpendiculares a superfície média antes da deformação permanecem retas após a deformação;
- 2) Não há deformação normal ao longo da espessura;
- 3) Linhas retas perpendiculares a superfície média permanecem perpendiculares a superfície média após a deformação.

Devido às hipóteses de Kirchhoff adotadas (REDDY, 2004), as deformações no laminado variam linearmente e são expressas pela soma das parcelas de deformações e curvaturas no plano médio:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

No entanto as tensões variam linearmente ao longo da espessura das lâminas, mas são descontínuas entre elas. Isto ocorre devido a diferença na matriz de rigidez das lâminas. Por causa da descontinuidade das tensões ao longo da espessura do laminado é mais conveniente trabalhar com suas resultantes.

As forças e momentos em um laminado são obtidas através da integração das tensões em cada lâmina ao longo da espessura do laminado:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (7)$$

e

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (8)$$

Substituindo Equações (5) e (6) nas Equações (7) e (8), temos que:



$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z dz \right] \quad (9)$$

e

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right] \quad (10)$$

Finalmente, as Equações (9) e (10) podem ser escritas na forma matricial enfatizando as matrizes **A**, **B** e **D** que tem a função de transformar deformações e curvaturas no plano médio em esforços generalizados na seção do laminado:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde

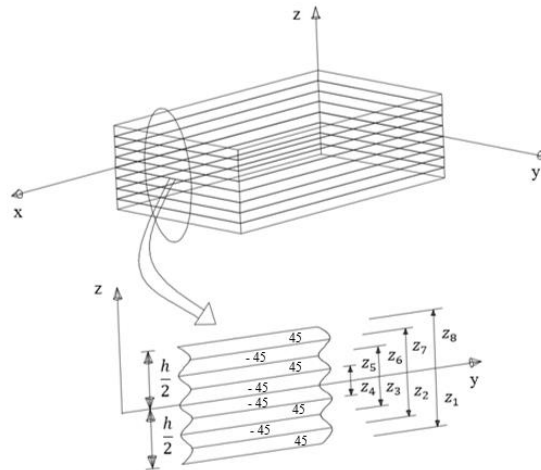
$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} dz = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \bar{Q}_{ij} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \bar{Q}_{ij} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (12)$$

A relação entre as forças e momentos e a deformação no laminado é expressa através das matrizes **A**, **B** e **D**. Os componentes da matriz **A** são as rigidezes extensionais, relacionam as cargas e deformações no plano. Os componentes da matriz **D** são as rigidezes à flexão do laminado, relacionam os momentos e curvaturas. E os componentes da matriz **B** são rigidezes de acoplamento, relacionam cargas no plano com curvaturas e momentos e deformações no plano.

Se a matriz **B** for nula não há acoplamento entre cargas no plano e deformação fora do plano (curvaturas) e entre momentos fletores e torçores e deformações no plano, como é o caso de laminados simétricos. Isso torna a análise menos complexa e durante o processo de resfriamento na fabricação do laminado não ocorrem deformações térmicas (BARBERO, 2011). A simetria ocorre quando o esquema de laminação abaixo do plano médio do laminado

é igual ao esquema de laminação acima desse plano. A *Figura 3* ilustra o esquema de laminação de uma placa com 8 lâminas.

Figura 3. Esquema de laminação de uma placa com 8 lâminas  $[\pm 45_2]_s$ .



Fonte: elaborada pelo autor.

A numeração das camadas é feita de baixo para cima. O eixo  $z$  é positivo para cima. A coordenada  $z_i$  de cada camada é a distância entre o plano médio do laminado e a face inferior ou superior das lâminas para as camadas inferiores e superiores. A espessura da camada é igual a diferença de coordenadas  $z_i$  de duas camadas contíguas.

As estruturas laminadas são classificadas de acordo com o esquema de laminação em *angle-ply* e *cross-ply*. No primeiro, o laminado pode apresentar lâminas com ângulos variando entre  $0$  e  $90^\circ$ . Já os laminados *cross-ply* apresentam apenas ângulos iguais a  $0$  ou  $90^\circ$ .

Uma característica importante dos laminados *cross-ply* é que os termos  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$  são iguais a zero. Isso implica em  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ . Resultando na eliminação dos acoplamentos extensão-cisalhamento e flexão-torção.

Os laminados podem ainda ser do tipo simétrico balanceado, neste trabalho todos os exemplos possuem essa característica. Isso significa que para cada lâmina de orientação  $\theta$  existe uma lâmina contígua a ela com orientação  $-\theta$ . Neste caso todos os elementos da matriz **B** são nulos e os acoplamentos decorrentes das matrizes **A** e **D** são eliminados.

Assim, pode-se concluir diante da teoria apresentada que devido à complexidade do comportamento de laminados, a maioria dos problemas práticos não possui solução analítica e precisa ser analisado utilizando métodos computacionais como o Método dos

Elementos Finitos (MEF) e a Análise Isogeométrica (AIG) (CARDOZO; GOMES; AWRUSH, 2011; SILVA, 2012; ROCHA, 2013; BARROSO, 2015).

### 2.3 Critérios de falha

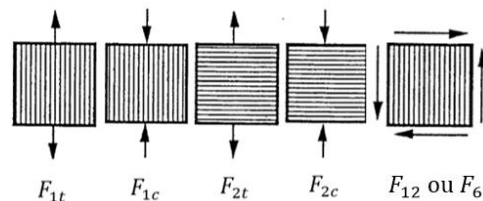
De acordo com Daniel e Ishai (1994), os critérios de falha para materiais homogêneos isotrópicos, tais como máxima tensão normal (Rankine), máxima tensão de cisalhamento (Tresca) e máxima energia distorcional (von Mises) são bem estabelecidos. Segundo estes autores, as teorias de falha macromecânicas para compósitos foram propostas através da extensão e adaptação das teorias de falha isotrópicas levando em conta a anisotropia na rigidez e resistência do laminado.

Os critérios de falha são utilizados para determinar a carga em que ocorre a falha do laminado. Os critérios de falha mais comuns são o da máxima tensão, máxima deformação, Tsai-Hill e Tsai-Wu (DANIEL; ISHAI, 1994). Neste trabalho iremos nos concentrar nas tensões no plano (EPT) e falhas resultantes delas.

A teoria da máxima tensão é bastante simples e intuitiva. Para que haja a ruptura ou a falha do material é necessário que a tensão em um dado ponto do material exceda a resistência do material. Em um ponto do material estão definidas três tensões,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$ . Os índices 1 e 2 se referem a direção longitudinal das fibras e transversal, respectivamente. São os eixos principais do material.

Essa teoria, assim como todas as outras podem ser expressas em termos dos parâmetros de resistência básicos referidos aos eixos principais do material (DANIEL; ISHAI, 1994). Esses parâmetros são resistência à tração longitudinal  $F_{1t}$ , à compressão longitudinal  $F_{1c}$ , à tração transversal  $F_{2t}$ , à compressão transversal  $F_{2c}$  e à resistência ao cisalhamento no plano  $F_{12}$ . A Figura 4 ilustra a obtenção desses parâmetros.

Figura 4. Parâmetros de resistência das lâminas.



Fonte: Daniel e Ishai (1994).

A teoria da máxima tensão por ser simples possui a desvantagem de não levar em consideração a interação entre os estados de tensão, como por exemplo, o estado de tensão biaxial. A condição de falha é expressa em forma de três subcritérios:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{cases} F_{1t} & \text{quando } \sigma_1 > 0 \\ -F_{1c} & \text{quando } \sigma_1 < 0 \end{cases} \\ \sigma_2 &= \begin{cases} F_{2t} & \text{quando } \sigma_2 > 0 \\ -F_{2c} & \text{quando } \sigma_2 < 0 \end{cases} \\ |\tau_{12}| &= F_{12} \end{aligned} \quad (13)$$

O fator de segurança da máxima tensão pode ser calculado como:

$$\lambda_s = \max\left(\frac{\sigma_1}{F_1}, \frac{\sigma_2}{F_2}, \frac{\tau_{12}}{F_{12}}\right) \quad (14)$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  dependem das tensões, que podem ser de tração ou de compressão.

A máxima deformação, um critério que também é simples e intuitivo, leva em consideração a interação entre as componentes de tensão devido ao coeficiente de Poisson. A partir da Teoria da Elasticidade pode-se escrever a relação tensão deformação para materiais ortotrópicos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1) \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \end{aligned} \quad (15)$$

A falha ocorre quando ao menos uma componente de deformação ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ ) ao longo do eixo material principal excede a deformação última naquela direção:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \begin{cases} \varepsilon_{1t}^u & \text{quando } \varepsilon_1 > 0 \\ \varepsilon_{1c}^u & \text{quando } \varepsilon_1 < 0 \end{cases} \\ \varepsilon_2 &= \begin{cases} \varepsilon_{2t}^u & \text{quando } \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_{2c}^u & \text{quando } \varepsilon_2 < 0 \end{cases} \\ |\gamma_{12}| &= 2|\varepsilon_{12}| = \gamma_{12}^u \end{aligned} \quad (16)$$

As deformações últimas ( $\varepsilon_{1t}^u, \varepsilon_{1c}^u, \varepsilon_{2t}^u, \varepsilon_{2c}^u, \gamma_{12}^u$ ) para uma lâmina são obtidas através dos parâmetros de resistência da lâmina citados na Figura 4 divididos pelos respectivos módulos de resistência do material.

$$\varepsilon_{1t}^u = \frac{F_{1t}}{E_1}; \quad \varepsilon_{1c}^u = -\frac{F_{1c}}{E_1}; \quad \varepsilon_{12}^u = \frac{F_{2t}}{E_2}; \quad \varepsilon_{2c}^u = -\frac{F_{2c}}{E_2}; \quad \gamma_{12}^u = \frac{F_{12}}{G_{12}} \quad (17)$$

O fator de segurança da máxima deformação pode ser calculado como:

$$\lambda_s = \min\left(\frac{\varepsilon_1^u}{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_2^u}{\varepsilon_2}, \frac{\gamma_{12}^u}{\gamma_{12}}\right) \quad (18)$$

onde os valores de  $\varepsilon_1^u$  e  $\varepsilon_2^u$  dependem dos sinais de  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ . Caso  $\varepsilon_1$  seja positivo, utiliza-se  $\varepsilon_{1t}^u$ . Caso seja negativo,  $\varepsilon_{1c}^u$ . O mesmo raciocínio é válido para  $\varepsilon_2$ .

O critério de falha de Tsai-Hill considera a interação entre os três parâmetros  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$  de resistência da lâmina unidirecional. Seu desenvolvimento nasceu da modificação do critério de von Mises para metais com anisotropia por Hill e pela adaptação deste para materiais compósitos ortotrópicos por Azzi e Tsai (DANIEL; ISHAI, 1994). Sua formulação é dada por:

$$\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{F_{12}^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2} = 1 \quad (19)$$

Esse critério descreve uma envoltória de falha no espaço tridimensional  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$ . Além do mais, ele é expresso em termos de um simples critério ao invés de três subcritérios como são os casos da máxima tensão e máxima deformação. Uma desvantagem é que ele não distingue entre resistência de tração e de compressão.

Já o critério de falha de Tsai-Wu leva em consideração a interação de tensões em direções diferentes, fazendo uso de tensores. Esse critério identifica o modo de falha e permite distinguir entre resistência à tração e à compressão (REDDY, 2004). Ele é baseado no conceito de tensores de resistência usado por Gol'denblat e Kopnov no desenvolvimento de uma teoria de falha geral para materiais anisotrópicos (DANIEL; ISHAI, 1994).

O critério de Tsai-Wu avisa que ocorre a falha quando o índice de falha em um laminado atinge o valor unitário:

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\tau_{12}^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (20)$$

onde parâmetros  $f$  são dados por:

$$f_1 = \frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}}; \quad f_{11} = \frac{1}{F_{1t}F_{1c}}; \quad f_2 = \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}}; \quad f_{22} = \frac{1}{F_{2t}F_{2c}}; \quad f_{12} = \frac{1}{F_{12}^2}; \quad f_{66} = \frac{1}{F_6^2} \quad (21)$$

O parâmetro de resistência  $F_{12}$  dado pela Figura 4 corresponde à resistência determinada experimentalmente sob um estado biaxial de tensão ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ). Esse ensaio é de difícil execução e em muitos casos o coeficiente de interação  $f_{12}$  não é crítico e uma aproximação é suficiente. Daniel e Ishai (1994) recomendam:

$$f_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{f_{11}f_{22}} \quad (22)$$

Os critérios da máxima deformação e de Tsai-Wu foram utilizados em alguns exemplos para determinar a resistência de placas e cascas laminadas analisadas neste trabalho. Em problemas de estruturas de material compósitos laminados esses critérios são geralmente aplicados como restrições que limitam as tensões admissíveis para garantir a segurança do projeto.

O fator de segurança de Tsai-Wu pode ser obtido através da expressão (DANIEL; ISHAI, 1994):

$$\lambda_s = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2a} \quad (23)$$

onde:

$$a = f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + f_{66}\tau_{12}^2 \quad (24)$$

$$b = f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 \quad (25)$$

Normalmente, a carga de falha da primeira lâmina (*first ply failure*) é utilizada para indicar que o laminado atingiu seu estado limite último. Este critério é simples e eficiente, além de ser consistente com o uso do modelo linear elástico para descrever o comportamento do material compósito.

Contudo, a falha de uma lâmina não significa necessariamente que o laminado perdeu sua capacidade resistente, pois pode haver redistribuição de tensões para lâminas ainda intactas. Assim, abordagens mais complexas baseadas no conceito de falha progressiva também podem ser utilizadas (ROCHA, 2013).

### 3 OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS LAMINADAS

A otimização consiste em atingir o melhor resultado de uma dada operação enquanto satisfaz certas restrições utilizando a menor quantidade de recursos possíveis (HAFTKA; GURDAL, 1991). No caso de estruturas, a otimização corresponde a achar o melhor projeto que atende aos requisitos de desempenho e fabricação.

Os métodos de otimização podem ser divididos em dois grupos, os métodos de critérios de otimalidade e os métodos de busca (ARORA, 2004). Dentro de cada um desses métodos há uma divisão entre problemas sem restrição e com restrição. Nos métodos de critérios de otimalidade a função deve satisfazer as condições no ponto mínimo. Nos métodos de busca, inicia-se com uma estimativa de projeto que pode ou não satisfazer as condições, então ele é melhorado iterativamente até satisfazer as condições.

Os métodos de busca são classificados em métodos baseados no gradiente, métodos de busca direta, métodos livres de gradientes e métodos de busca inspirados na natureza (ARORA, 2012). Os baseados no gradiente estão baseados na hipótese de que todas as funções são contínuas e diferenciáveis. Já os de busca direta não usam gradientes de funções. Os livres de gradientes não requerem o cálculo explícito de derivadas analíticas de funções e os inspirados na natureza se baseiam na observação de algum fenômeno natural.

A otimização global consiste em encontrar o projeto ótimo. Ela pode ser dividida em determinística ou estocástica (ARORA, 2012). O método é dito estocástico se ele possui qualquer elemento estocástico para resolver o problema de otimização global. Caso não possua, diz-se que o método é determinístico.

Os problemas de otimização consistem em determinar o vetor das variáveis de projeto que minimiza a função objetivo sujeita as restrições de desigualdade, de igualdade e de limites laterais. As restrições representam os requisitos de desempenho e de fabricação que o projeto deve satisfazer. As variáveis de projeto de um dado problema podem ser contínuas ou discretas.

No caso de estruturas laminadas, as e variáveis de projeto incluem o número de lâminas e a espessura do laminado, assim como a orientação das fibras, espessura e material de cada lâmina. A função objetivo pode ser o custo ou alguma medida de desempenho, enquanto as restrições incluem a resistência e a rigidez da estrutura, bem como restrições ligadas ao processo de fabricação.

Os problemas típicos de otimização de laminados são a minimização do custo (ou peso) submetida a restrições de resistência/rigidez e a maximização do desempenho do

laminado considerando o custo constante. Medidas de desempenho consideradas incluem a resistência à falha do material e à flambagem.

É importante notar que as variáveis de projeto de laminados geralmente são discretas devido à natureza do problema (material) e limitações dos processos de fabricação (espessura e orientação das fibras). Além disso, estes problemas possuem múltiplos mínimos locais, o que dificulta a utilização de métodos baseados em gradiente.

Assim, os métodos heurísticos inspirados na natureza tem sido bastante utilizados em problemas de otimização de estruturas laminadas (BISAGNI; LANZI, 2002; LEE; LIN, 2003; GOMES; AWRUSH; LOPES, 2011; NIK *et al.*, 2014). Neste trabalho, foram utilizados para otimização os Algoritmos Genéticos e a Otimização por Nuvem de Partículas. Estes métodos são discutidos à seguir.

### 3.1 Algoritmos Genéticos

Algoritmos Genéticos (AG) pertencem a classe dos métodos estocásticos de otimização de buscas e métodos inspirados na natureza (LINDEN, 2008). Conforme se conhece os conceitos básicos do algoritmo, se verá que as decisões tomadas na maioria das etapas computacionais dos algoritmos são baseadas na geração de números aleatórios. Portanto, executado em diferentes vezes, o algoritmo pode conduzir para diferentes sequencias de projetos e uma solução diferente do problema até mesmo com as mesmas condições iniciais (LINDEN, 2008; ARORA, 2012).

Os algoritmos genéticos usam somente os valores da função de avaliação no processo de busca para progredir em direção a uma solução sem considerar o modo como as funções são avaliadas. A continuidade ou diferenciação das funções do problema não é requerida nem usada nos cálculos dos algoritmos (LINDEN, 2008). Portanto, os algoritmos são muito gerais e podem ser aplicados a todos os tipos de problemas – discretos, contínuos e não diferenciáveis. Além disso, os métodos determinam soluções ótimas globais em oposição as soluções locais determinadas por um algoritmo de otimização baseado em derivada. Os métodos são fáceis de usar e programar uma vez que não requerem o uso de gradientes ou funções de restrição (ARORA, 2012).

No entanto, eles exigem uma grande quantidade de cálculos para problemas mesmo de tamanho razoável ou para problemas onde a avaliação de funções em si requer um cálculo maciço. Além disso, não há garantia absoluta de que uma solução global tenha sido



obtida (LINDEN, 2008). Contudo, pode-se utilizar computadores com processamento paralelos e executar o algoritmo várias vezes para superar tais desvantagens.

Os algoritmos genéticos são usados com muita frequência na solução de problemas de otimização de estruturas laminadas usando simulações numéricas (GÜRDAL; HAFTKA; HAJELA, 1999; PARK *et al.*, 2001; KOGISO *et al.*, 1994; ALMEIDA; AWRUSH, 2009; YANG; JIANG; LI, 2009).

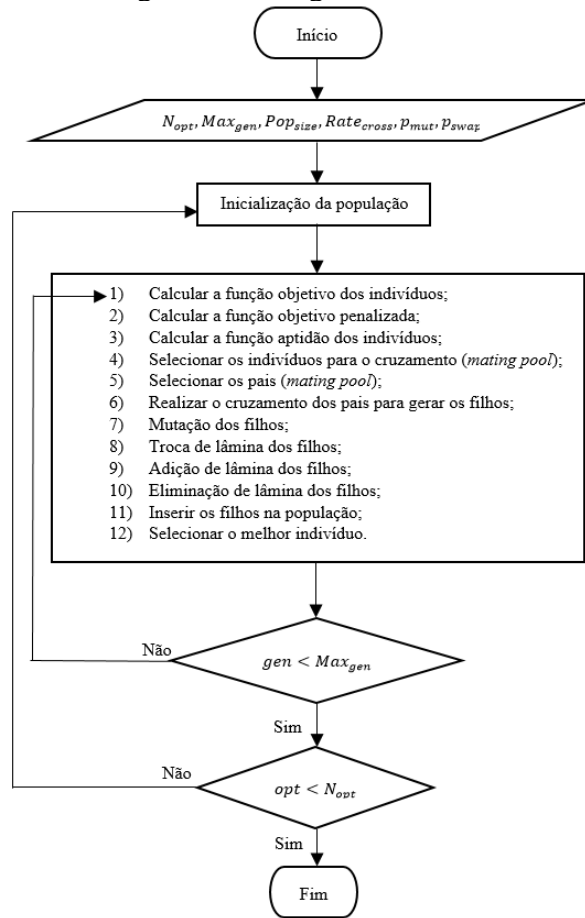
Os Algoritmos Genéticos também têm sido aplicados em problemas de otimização de laminados com modelos substitutos, apresentando bons resultados de aproximações e de redução do custo computacional (BISAGNI; LANZI, 2002; LEE; LIN, 2003; GOMES; AWRUSH, LOPES, 2011; NIK *et al.*, 2014).

A seguir discute-se o caso do AG implementado no programa BIOS para otimização de laminados, desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (ROCHA, 2013; ROCHA *et al.*, 2014). A Figura 5 ilustra o fluxograma deste Algoritmo Genético (AG), onde  $N_{opt}$  é o número de otimizações,  $Max_{gen}$  é o número de gerações,  $Pop_{size}$  é o tamanho da população,  $Rate_{cross}$  é a taxa de cruzamento,  $p_{mut}$  é a probabilidade de mutação e  $p_{swap}$  é a probabilidade de troca de lâminas.

### 3.1.1 Codificação

No Algoritmo Genético implementado por Rocha (2013) cada indivíduo (cada projeto) é representado por uma matriz de três linhas e um determinado número de colunas. A matriz é preenchida com números inteiros. A primeira linha corresponde à espessura da lâmina, a segunda à orientação das fibras e a terceira ao material da lâmina. Cada coluna da matriz corresponde a uma lâmina do laminado. O AG trabalha com esses números inteiros, que são códigos (genótipo) ao invés dos valores reais dessas variáveis (fenótipo). A Figura 6 mostra um exemplo de codificação e decodificação.

Figura 5. Fluxograma do AG.



Fonte: Adaptada de Barroso (2015).

Figura 6. Codificação e decodificação de um laminado com 5 lâminas.

Código	Espessura	Código	Ângulo
0	0.127 mm	0	0
1	0.157 mm	1	15
2	0.215 mm	2	30
		3	45
		4	60
		5	75
		6	90

Espessura	0 2 1 2 0	Decodificação	0.127 mm	0.215 mm	0.157 mm	0.215 mm	0.127 mm
Ângulo	1 6 3 4 2		15	90	45	60	30
Material	0 1 1 0 1		material 1	material 2	material 2	material 1	material 2

Fonte: Adaptada de Rocha (2013).

Tanto a representação fenotípica quanto a genotípica são importantes. Nas operações genéticas tais como cruzamento e mutação o genótipo é utilizado. Enquanto que na avaliação da função objetivo e cálculo da(s) penalidade(s) utiliza-se o valor real das variáveis (fenótipo).

Fazendo-se analogia a evolução dos indivíduos ao longo das gerações através da transmissão de suas características para seus descendentes pelo cruzamento (*crossover*), um indivíduo do AG possui três cromossomos. Cada um representa uma característica do indivíduo tal como espessura, orientação das fibras e material da lamina.

Um aspecto importante do AG é que o laminado pode ser classificado quanto à sua simetria em relação ao seu plano médio como sendo de dois tipos: simétrico ou não simétrico. O laminado simétrico, gerado pelo AG através da função que inicializa a população, inicializa apenas a metade do número total de laminas. Enquanto que a inicialização do laminado balanceado simétrico é realizada com apenas um quarto desse total. A matriz do indivíduo usada nos cálculos pelo AG é então preenchida de acordo com o tipo de laminado replicando os valores inicializados.

Figura 7. Valores replicados.

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\substack{\text{Laminado} \\ \text{simétrico}}} \left| \begin{array}{cccccc} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Fonte: Adaptada de Rocha (2013).

No BIOS, o programa usa como dado de entrada em um arquivo de leitura uma *string* com o nome do tipo de laminado (simétrico ou balanceado simétrico). Com essa informação o número de colunas da matriz de inicialização do indivíduo é definido. Então, uma função inicializa as informações codificadas através de uma função randômica. Dessa forma, a população inicial é inicializada aleatoriamente.

### 3.1.2 Função Aptidão e Seleção

Na natureza os indivíduos mais aptos sobrevivem e transmitem suas características para seus descendentes. Essa ideia foi implementada por Rocha (2013) no Algoritmo Genético do BIOS através da função aptidão. Quanto maior esse valor, maior será a probabilidade de um indivíduo participar do cruzamento e transmitir suas características para seus descendentes (denominados filhos).

Nessa abordagem, os valores da função objetivo dos indivíduos é plotada em um gráfico no plano, onde a abscissa corresponde ao número do indivíduo e a ordenada a seu respectivo valor da função objetivo. Os valores mínimo e máximo são identificados. Um coeficiente  $k_f$  é multiplicado pelo valor máximo para criar um limite superior. Então, a

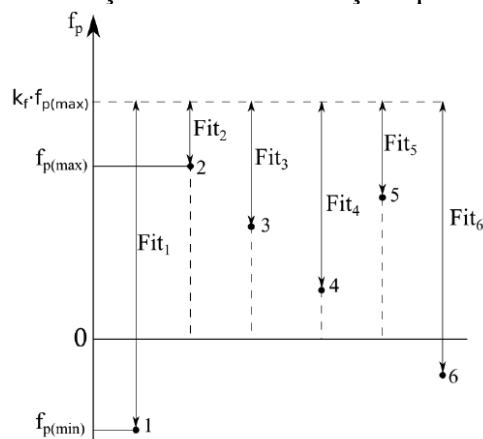
aptidão de cada indivíduo é igual a diferença entre o limite superior e o valor de sua função objetivo. A Figura 8 representa essa estratégia, denominada mapeamento da função objetivo.

Essa estratégia garante que a probabilidade de seleção de cada indivíduo seja sempre positiva. Ela também garante que os indivíduos mais aptos tenham maior probabilidade de serem selecionados. Dessa forma, neste trabalho utiliza-se a formulação proposta por Rocha (2013) denominada mapeamento linear:

$$Fit_i = k_f * \max(|f_{p(min)}|, |f_{p(max)}|) - f_{pi} \quad (26)$$

A seleção dos indivíduos para participarem do cruzamento (*mating pool*), consiste em selecionar indivíduos através de um sorteio que pode ser realizado por roleta ou ranking. Nesse sorteio, os indivíduos mais aptos possuem maiores chances de serem selecionados. Assim como o tipo do laminado, o método de seleção é um dado de entrada.

Figura 8. Detalhe da obtenção do valor da função aptidão de cada indivíduo.



Fonte: Rocha (2013).

Outra informação relevante utilizada no AG desenvolvido por Rocha (2013) é a passagem dos melhores indivíduos de uma geração para outra através do elitismo. A ideia por trás dessa estratégia é fazer com que a melhor solução nunca piore ao longo das gerações.

### 3.1.3 Cruzamento

O cruzamento é definido como uma combinação linear de dois vetores de pais  $x_1$  e  $x_2$  para gerar dois filhos (KE-LIN; SWAMY, 2016):

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \\ x'_2 = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1 \end{cases} \quad (27)$$

onde  $0 < \lambda < 1$ . A Figura 9 ilustra a geração de dois filhos a partir de dois pais contendo apenas uma lâmina cada.

Figura 9. Procedimento de geração de filhos.

$$\begin{array}{c} \text{Pai 1} \begin{array}{|c|} \hline T1 \\ \hline A1 \\ \hline M1 \\ \hline \end{array} \quad \text{Filho 1} \begin{array}{|c|} \hline \lambda * T1 + (1 - \lambda) * T4 \\ \hline \lambda * A1 + (1 - \lambda) * A4 \\ \hline \lambda * M1 + (1 - \lambda) * M4 \\ \hline \end{array} \\ \text{Vetor randômico } |\lambda| \\ \text{Pai 2} \begin{array}{|c|} \hline T4 \\ \hline A4 \\ \hline M4 \\ \hline \end{array} \quad \text{Filho 2} \begin{array}{|c|} \hline \lambda * T4 + (1 - \lambda) * T1 \\ \hline \lambda * A4 + (1 - \lambda) * A1 \\ \hline \lambda * M4 + (1 - \lambda) * M1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Fonte: KE-LIN e SWAMY (2016).

### 3.1.4 Mutação

A mutação no Algoritmo Genético é um operador que pode alterar os genes dos filhos gerados pelos pais no cruzamento para evitar uma convergência prematura em um mínimo local. Os genes são as informações genéticas contidas nos cromossomos tais como valores de espessura, orientação e material da lâmina. Ela se faz necessária mesmo sendo o AG menos susceptível a mínimos locais porque torna o algoritmo mais eficiente. Essa estratégia é uma forma de fazer a busca sair de uma região onde existe um mínimo local e ser lançada em outra região onde pode estar o mínimo global.

Figura 10. Mutação em dois genes (espessura e material) de um laminado com 5 lâminas.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Mutação}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Fonte: Adaptada de Rocha (2013).

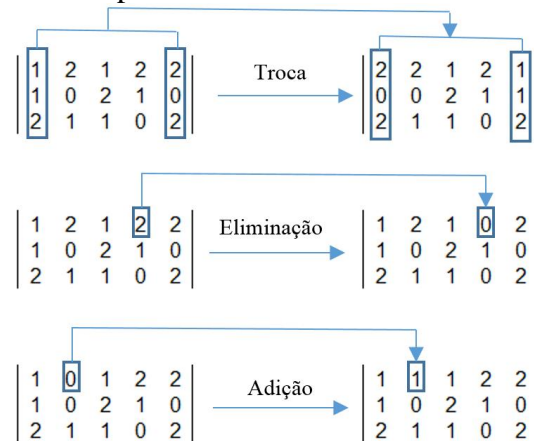
Ela se refere a variabilidade da população, um fator importante para sobrevivência da espécie. A mutação ocorre se um número gerado aleatoriamente entre 0 e 1 para cada linha da matriz for menor do que a probabilidade de mutação ( $p_{mut}$ ). O valor da probabilidade de mutação geralmente é baixo. Então, em caso de haver mutação, um número inteiro dentro dos limites do cromossomo é gerado. Esse número irá substituir o valor original do gene. A Figura 10 mostra um exemplo de mutação de 2 genes.

### 3.1.5 Operadores para Laminados

Os operadores troca ( $p_{swap}$ ), eliminação ( $p_{del}$ ) e adição ( $p_{add}$ ) de lâminas atuam no laminado e assim como a mutação também possuem uma probabilidade muito baixa de ocorrer. Um número randômico é selecionado e comparado as probabilidades desses operadores, se for menor ocorre a operação (ROCHA, 2013; BARROSO, 2015).

Quando o operador troca de lâminas é aplicado, duas lâminas são sorteadas aleatoriamente e trocadas de posição na matriz do laminado. Na eliminação, o código da espessura recebe valor 0, que corresponde a espessura zero. A adição pode ocorrer ou não nas lâminas eliminadas. Para isso um número randômico entre 0 e 1 é gerado e comparado com a probabilidade de adição, se menor uma nova espessura é sorteada e a lâmina acrescentada ao laminado. A Figura 11 exemplifica.

Figura 11. Operadores para laminados em um laminado com 5 lâminas.



Fonte: Adaptada de Rocha (2013).

O operador troca de lâminas possui um papel importante em problemas de flambagem porque ao mudar lâminas de posição no laminado alteram a matriz  $\mathbf{D}$  (matriz de rigidez à flexão) enquanto que a matriz  $\mathbf{A}$  (matriz de rigidez de membrana) permanece constante. Em problemas de minimização de custo e peso os operadores de adição e eliminação tem sua importância justificada.

## 3.2 Otimização por Nuvem de Partículas

Otimização por Nuvem de Partículas (*Particle Swarm Optimization* - PSO), outro método inspirado na natureza, imita o comportamento social de um bando de pássaros ou

cardume de peixes na busca por alimentos. Está dentro da meta heurística e classe de métodos de inteligência de grupos (*swarm*). Ele é uma técnica de otimização estocástica, introduzida por Kennedy e Eberhart em 1995 (MARWALA, 2010; ARORA, 2012).

O PSO partilha muitas similaridades com técnicas de computação evolucionárias tais como Algoritmos Genéticos. Assim como essas abordagens, o PSO começa com um conjunto de soluções gerado randomicamente chamado de população inicial. Uma solução ótima é então buscada pela atualização das iterações.

Um recurso atraente do PSO é que ele tem menos parâmetros no algoritmo para especificar comparado com os Algoritmos Genéticos. O PSO tem sido aplicado com sucesso em muitas classes de problemas, tais como otimização mecânica e estrutural e otimização de multiobjetivo e treinamento de redes neurais artificiais (MARWALA, 2010).

Para resolver problemas de otimização usando otimização por nuvem de partículas, uma função aptidão é construída para descrever uma medida do resultado desejado. Para atingir o ótimo uma população aleatória é gerada, posições e velocidades de cada partícula são geradas aleatoriamente.

A cada iteração  $k$ , a posição de cada partícula ( $p$ ) é atualizada a partir de sua velocidade ( $v$ ) como:

$$p_i(k + 1) = p_i(k) + v_i(k + 1) \quad (28)$$

onde  $i$  é o índice da variável de projeto. O processo de movimentação no espaço de busca é guiado pelas melhores posições já obtidas pela partícula e sua vizinhança, fazendo com que o grupo convirja para a solução ótima.

No PSO as partículas se movem no espaço das variáveis de projeto, em busca do projeto ótimo, com velocidades que são influenciadas pela melhor posição que cada partícula já encontrou ( $pbest$ ) e pela melhor posição já encontrada pela vizinhança ( $gbest$ ):

$$v_i(k + 1) = wv_i(k) + c_1r_1(pbest_i - p_i(k)) + c_2r_2(gbest(k) - p_i(k)) \quad (29)$$

onde  $w$  é a inércia da partícula,  $c_1$  e  $c_2$  são o fator cognitivo e o fator social, e  $r_1$  e  $r_2$  são números randômicos entre 0 e 1. Nesta equação o primeiro termo é o movimento atual, o segundo é a influência da memória da partícula e o terceiro é a influência da vizinhança.

O valor de  $w$  no primeiro termo controla o impacto da velocidade anterior da partícula em sua velocidade atual. Ele está relacionado ao tipo de exploração do espaço de

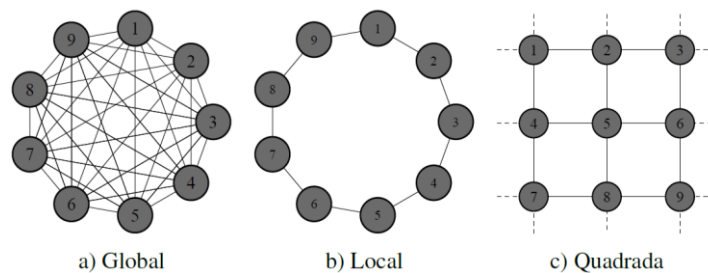
busca. Para altos valores ocorre uma exploração global e para baixos valores uma exploração local. O primeiro parâmetro de confiança  $c_1$  indica a confiança que a partícula tem nela mesma e o parâmetro  $c_2$  indica a confiança que a partícula tem no sucesso da população. Os parâmetros  $r_1$  e  $r_2$  determinam o grau no qual a simulação deveria explorar o espaço (HU; SHI; EBERHART, 2004; BRATTON; KENNEDY, 2007).

Na otimização por nuvem de partículas o objetivo é encontrar um equilíbrio entre procurar uma boa solução e explorar o sucesso de outros indivíduos. Se a pesquisa por uma solução é muito limitada, a simulação irá convergir para a primeira solução encontrada, que pode ser uma posição de ótimo local. Se os sucessos dos outros indivíduos não são explorados então a simulação nunca irá convergir.

Na versão inicial do PSO (KENNEDY; EBERHART, 1995) todas as partículas se comunicam entre si. Neste caso, a vizinhança de uma partícula corresponde a todo o bando (topologia global). Esta topologia leva a uma convergência rápida, porém aumenta a chance de convergência prematura para mínimos locais.

Uma alternativa é a topologia local (ou topologia de anel), na qual as partículas se comunicam com apenas duas partículas vizinhas (BRATTON; KENNEDY, 2007). Esse tipo de topologia reduz as chances de convergência prematura que pode ocorrer na topologia global. Existe ainda a topologia quadrada ou de von Neumann, em que a vizinhança da partícula é definida em cada direção na matriz de partículas (KENNEDY; MENDES, 2006). Estas topologias são ilustradas na Figura 12.

Figura 12. Tipos de topologia.



Fonte: Barroso (2015).

A otimização por nuvem de partículas consiste em um processo estocástico que pode ser sumarizado da seguinte forma:



- a) inicializar a população de partículas, posições e velocidades. A posição das partículas deve ser randomicamente distribuída no espaço de parâmetro de atualização;
- b) calcular a velocidade para cada partícula no enxame;
- c) atualizar a posição de cada partícula; e
- d) repetir os passos (b) e (c) até a convergência.

Esse processo é representado na Figura 13.

Esse algoritmo foi aplicado na minimização da Função Densidade de todos os exemplos numéricos desta dissertação. A Tabela 1 ilustra os valores dos parâmetros utilizados. Os parâmetros foram escolhidos de um benchmark do BIOS e por apresentaram bons resultados nos problemas de laminados desta dissertação eles foram selecionados.

Tabela 1. Parâmetros PSO (Função Densidade)

<b>Tipo</b>	<b>Valor</b>
<i>SwarmSize</i>	100
<i>MaxIter</i>	100
<i>N<sub>opt</sub></i>	30
<i>w</i>	0,7
<i>c<sub>1</sub></i>	2,5
<i>c<sub>2</sub></i>	2,5

Fonte: elaborada pelo autor.

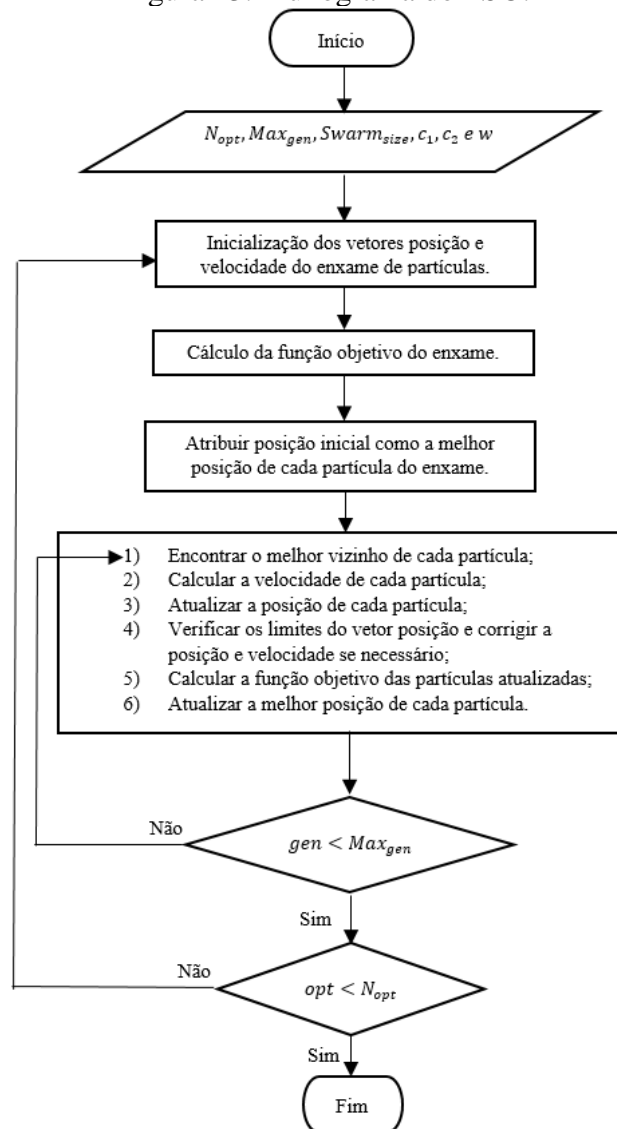
### 3.3 Otimização por Nuvem de Partículas para Laminados

O PSO tem sido utilizado com sucesso na solução do problema de otimização de estruturas laminadas (KOVÁCS *et al.* 2004; CHANG *et al.*, 2010; GHASHOCHI; SADR, 2012; LAKSHMI; RAO, 2013, BARROSO *et al.* 2016).

Barroso (2015) desenvolveu um algoritmo híbrido para otimização de laminados, no qual o operador genético de mutação e os operadores troca, adição e subtração de lâminas foram introduzidos na forma padrão do PSO. O algoritmo está dividido em três partes a saber, a inicialização, o processamento e a apresentação dos resultados.

A inicialização é realizada através da inicialização das posições e velocidades das partículas, onde cada partícula corresponde a um projeto no espaço das variáveis de projeto. Cada partícula possui duas matrizes, uma de posição e outra de velocidade.

Figura 13. Fluxograma do PSO.



Fonte: Barroso (2015).

As matrizes possuem três linhas, onde a primeira linha corresponde a espessura da camada do laminado, a segunda ao ângulo de orientação das fibras e a terceira ao tipo de material da lâmina. O número de colunas das matrizes é igual ao número de lâminas que o laminado possui (Figura 14). Nos casos de laminados balanceados simétricos, o número de colunas das matrizes é igual a  $\frac{1}{4}$  do número total de lâminas.

A matriz de velocidade de uma partícula é o resultado da multiplicação de um número randômico entre -1 e 1 pela matriz codificada. O resultado são números reais. Ainda na fase de inicialização são inicializadas a inércia da partícula  $w$ , o fator cognitivo  $c_1$  e o fator social  $c_2$ , bem como o tamanho do enxame de partículas ( $SwarmSize$ ), a probabilidade de mutação ( $p_{mut}$ ) e a probabilidade de troca de lâmina ( $p_{swap}$ ).

Figura 14. Posição e Velocidade de uma partícula com 4 lâminas.

código	espessura	código	ângulo
0	0	0	0
1	0.127 mm	1	15
2	0.300 mm	2	30
		3	45
		4	60
código	matrial	5	75
0	carbon-epoxy	6	90
1	glass-epoxy		

$$\text{Posição} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Velocidade} = \text{rand}(-1;1) * \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Fonte: Adaptada de Barroso (2015).

A fase de processamento é caracterizada pelo avanço das gerações/iterações, que pode ser entendida pelo deslocamento das partículas no espaço de projeto, ou seja, da revoada dos pássaros em busca de comida. Esse movimento é realizado através da atualização das posições das partículas. É importante notar que o PSO foi desenvolvido para variáveis contínuas, mas pode ser utilizado para variáveis discretas apenas arredondando para o valor mais próximo. Assim, a atualização da posição das partículas é realizada utilizando a expressão:

$$p_i(k+1) = p_i(k) + \text{round}(v_i(k+1)) \quad (30)$$

Após a atualização da posição das partículas é necessário verificar se os limites do espaço de projeto não foram excedidos. Caso algum limite seja excedido, faz-se a correção da posição da partícula trazendo a mesma para o limite que foi excedido (Barroso, 2015; Barroso et al., 2017):

$$\begin{aligned} & \text{se } (p_i(k+1) < \text{limite}_{inf}) \\ & \quad p_i(k+1) = \text{limite}_{inf}; \\ & \quad v_i(k+1) = v_i(k+1) * (-0,5); \\ & \text{se } (p_i(k+1) > \text{limite}_{sup}) \\ & \quad p_i(k+1) = \text{limite}_{sup}; \\ & \quad v_i(k+1) = v_i(k+1) * (-0,5); \end{aligned} \quad (31)$$

Em seguida, o operador de mutação é aplicado ao enxame de partículas. Nesse procedimento, a matriz de cada partícula é submetida a um processo de sorteio de um número randômico entre 0 e 1 para cada elemento da matriz. Quando o número sorteado for menor do que a probabilidade de mutação ( $p_{mut}$ ), um novo valor codificado é sorteado para substituir o valor existente.

Figura 15. Mutaç o da espessura e do material.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Fonte: Adaptada de Rocha (2013).

A troca de lâmina   um processo similar ao processo de muta o. Sendo que na troca de posi o entre duas lâminas   realizada atrav s da troca de posi o entre duas colunas da matriz de posi o das part culas.

Figura 16. Troca de posi o entre duas lâminas.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Fonte: Adaptada de Rocha (2013).

Pode-se dizer que o operador de muta o pode modificar as part culas durante a otimiza o e fazer com que a busca saia de um m nimo local evitando uma poss vel converg ncia prematura. Os operadores adi o, elimina o e troca de lâminas ajudam a acelerar a converg ncia do algoritmo.

Ap s a aplica o do operador gen tico e dos operadores de laminados sobre as part culas, elas s o avaliadas atrav s do c lculo da fun o objetivo, das restri es e da fun o objetivo penalizada. Ent o   feita a atualiza o da melhor posi o que a part cula j  atingiu e da melhor posi o de todo o enxame. O processo   repetido at  o n mero m ximo de gera es/itera es ser atingido. A fase final   a apresenta o da melhor part cula (melhor projeto) encontrado durante a otimiza o.

A implementa o ent o segue id ntica   da Figura 13. A mudan a ocorre pela introdu o dos operadores de muta o das part culas, de troca, de adi o e de elimina o de lâminas ap s a verifica o dos vetores posi o e corre o da posi o e velocidade. A Figura 17 ilustra a parte modificada no fluxograma do algoritmo.

Figura 17. Parte do fluxograma do PSO Híbrido modificada em relação ao PSO convencional.

- |   |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Encontrar o melhor vizinho de cada partícula;</li> <li>2) Calcular a velocidade de cada partícula;</li> <li>3) Atualizar a posição de cada partícula;</li> <li>4) Verificar os limites do vetor posição e corrigir a posição e velocidade se necessário;</li> <li>5) Mutação das partículas;</li> <li>6) Troca de lâmina das partículas;</li> <li>7) Adição de lâmina das partículas;</li> <li>8) Eliminação de lâmina das partículas.</li> <li>9) Calcular a função objetivo das partículas atualizadas;</li> <li>10) Atualizar a melhor posição de cada partícula.</li> </ol> |
|---|

Fonte: Barroso (2015).

### 3.4 Tratamento das restrições

Um caminho de lidar com indivíduos que violam as restrições, ou alguma delas, é gerar soluções potenciais sem considerar as restrições e então penalizar estas soluções, diminuindo a aptidão no cálculo da função de avaliação. Essas penalidades são incluídas no cálculo da função de avaliação. Existe uma variedade de possíveis funções de penalidade que podem ser aplicadas. Algumas funções de penalidade acrescentam um valor constante como uma medida de penalidade. Outras funções de penalidade dependem do grau de violação das restrições: para uma grande violação, uma grande penalidade é imposta.

A Pena de Morte é uma técnica que elimina o indivíduo não viável podendo causar a perda de características similares a do indivíduo ótimo contidas no indivíduo inviável. Essa técnica foi usada com sucesso em estratégias de evolução para problemas de otimização numérica. Contudo, para alguns problemas a probabilidade de gerar uma solução viável é relativamente pequena e o algoritmo gasta uma quantidade significativa de tempo calculando indivíduos inviáveis.

Os métodos indiretos (ou externos) permitem a presença de indivíduos inviáveis na população, mas a função objetivo deles é penalizada fazendo eles menos aptos e assim menos capazes de transmitir genes para as próximas gerações.

#### 3.4.1 Penalidade Constante

É o método indireto mais simples de tratar restrições. Ele consiste em definir um fator de penalidade constante  $k$ , usualmente um número muito grande fornecido pelo usuário, e usá-lo para penalizar indivíduos inviáveis com base em suas violações de restrições. Usando

esse método, a função objetivo penalizada para um problema de minimização em que todas as restrições são escritas na forma  $g_i(x) \leq 0$  é dada por:

$$f_p = f(x) + \sum_{i=1}^l k * \max(g_i(x), 0) \quad (32)$$

Na expressão acima, todas as restrições são tratadas usando o mesmo  $k$ . Assim, é sempre recomendado usar restrições normalizadas, como elas podem ser de diferentes ordens de magnitude.

### 3.4.2 Método de Deb

No método proposto por Deb (2000), indivíduos inviáveis são penalizados pela primeira vez até que tenham a mesma função objetivo que o pior indivíduo da população ( $f_{max}$ ). Então, a soma da violação da restrição é adicionada:

$$f_p = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ é viável} \\ f_{max} + \sum_{i=1}^l g_i(x) & \text{se } x \text{ é inviável} \end{cases} \quad (33)$$

Neste método nenhum parâmetro de penalidade é requerido. Também, o método é de fácil implementação computacional. É importante notar, contudo, que a eficiência do método também depende do método de seleção e do tipo de representação do genótipo.

### 3.4.3 Penalidade Adaptativa

O método de penalidade adaptativa proposto por Barbosa e Lemonge (2004) envolve fatores de penalidade separados para cada restrição. Tais fatores ( $k_j$ ) tem valores diferentes em cada geração.

Primeiro, a função objetivo de todos os indivíduos inviáveis são tomadas pelo menos para o valor médio da população. Assim, definindo  $f_{med}$  como a média da função objetivo da população,  $\bar{f}$  é definido como:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > f_{med}(x) \\ f_{med}(x) & \text{se } f(x) < f_{med}(x) \end{cases} \quad (34)$$

Para definir cada coeficiente de restrição  $k_j$ , a violação da média  $g_{med}$  de cada restrição é definida, tanto quanto a soma quadrática de todas as violações da média. Cada  $k_j$  é então definido como:

$$k_j = |f_{med}| \frac{g_{med(j)}}{\sum_{l=1}^m g_{med(l)}^2} \quad (35)$$

Para aquelas restrições com maior violação da média, os correspondentes coeficientes  $k_j$  são maiores. Com a definição de  $\bar{f}$  dada em (4) e  $k_j$  dada em (5), a função objetivo penalizada pode ser definida:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ é viável} \\ \bar{f}(x) + \sum_{j=1}^l k_j * \max(g_j(x), 0) & \text{se } x \text{ é inviável} \end{cases} \quad (36)$$

Esse método não requer qualquer entrada do usuário, e a penalidade é ajustada com as gerações. Comparando o método com o de Deb, o último parece mais duro com indivíduos inviáveis. Espera-se que, para a maioria dos problemas, o fator de penalidade máxima obtido adaptativamente seja menor do que o maior valor de  $k$  usado no método de penalidade constante.

## 4 MODELOS SUBSTITUTOS

Atualmente, o projeto de sistemas de engenharia demanda o uso de modelos de simulação complexos e de alto custo computacional. Assim, programas de análise por elementos finitos são utilizados para avaliar as respostas da estrutura, como deslocamentos e tensões causados pelas ações externas.

Os modelos substitutos (*surrogate models*) são aproximações matemáticas de modelos de simulação e têm sido frequentemente usados para reduzir o custo computacional associado à execução destes modelos de simulação (WANG; SHAN, 2007; LEE; OH; CHOI, 2008; LI et al. 2010). O processo de modelagem de um modelo substituto pode ser dividido em três etapas (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008).

A primeira etapa consiste na preparação das amostras e na escolha do modelo substituto. Existem técnicas para geração de amostras tais como a Sequência de Hammersley (BURKARDT, 2016; AMOUZGAR; STRÖMBERG, 2016), que será apresentada no capítulo 5. Essas amostras devem ser avaliadas para obtenção da resposta estrutural que se deseja avaliar (*target*). Ao final obtém-se um conjunto de amostras e seus respectivos *targets*,  $\{(\mathbf{x}^{(1)}, y^{(1)}), (\mathbf{x}^{(2)}, y^{(2)}), \dots, (\mathbf{x}^{(n)}, y^{(n)})\}$ . É importante que as amostras estejam normalizadas no intervalo [0,1].

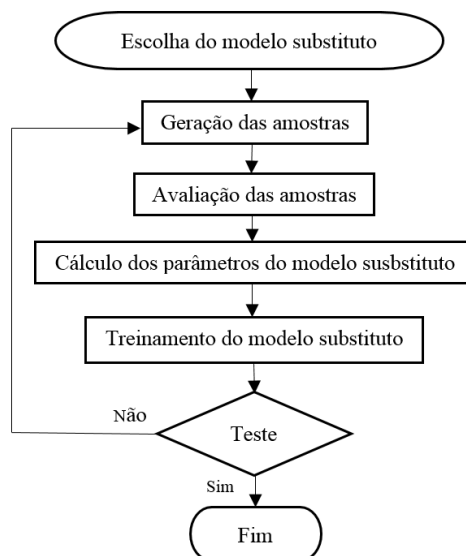
A segunda etapa consiste na determinação dos parâmetros e no treinamento do modelo substituto. A obtenção dos parâmetros pode ser realizada através da validação cruzada ou de uma expressão analítica. A validação cruzada pode levar a melhores resultados, mas possui alto custo computacional, enquanto que a expressão analítica possui baixo custo computacional.

A terceira etapa consiste no teste do modelo substituto. O teste pode ser realizado em um conjunto de amostras diferente das amostras de treinamento. As aproximações obtidas pelo modelo substituto são comparadas aos valores do modelo de alta fidelidade através do cálculo de erros tais como *Normalized Root Mean Square Error* (NRMSE). O modelo é considerado de boa aproximação se o NRMSE for menor do que 0,1 (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008). A Figura 18 ilustra esse processo.

Na literatura pode-se encontrar modelos de Regressão Polinomial (*Polynomial Regression* – PR), Redes Neurais Artificiais (RNA), de Funções de Base Radial (*Radial Basis Function* – RBF), de Regressão por Vetores de Suporte (*Support Vector Regression* – SVR), Kriging, Splines de Regressão Adaptativa Multivariada (*Multivariate Adaptive Regression Splines* - MARS) e *Moving Least Squares* (MLS).



Figura 18. Processo de construção do modelo substituto.



Fonte: elaborada pelo autor.

Segundo Jin, Chen e Simpson (2001), o RBF se destaca em termos de precisão e robustez quando comparado ao PR, Splines de Regressão Adaptativa Multivariada e Kriging. De acordo com Byeong-Soo, Yong-Bing e Dong-Hoon (2009), os resultados de um estudo mostraram que o Kriging, baseado em informações dos pontos da amostra com a soma do modelo global e do desvio local, e o MLS podem criar um modelo substituto mais preciso do que o SVR e o RBF com as funções matemáticas testadas.

Jurecka (2007) recomenda o uso adequado para aplicações específicas a partir da comparação das vantagens e desvantagens específicas de cada modelo substituto (PR, MLS, Kriging, RBF e RNA). Segundo Wang e Shan (2007) o SVR foi usado e testado e alcançou alta precisão sobre os demais modelos substitutos Kriging, PR, MARS e RBF sobre um grande número de problemas de teste.

Backlund, Shahan e Seepersad (2010) comparou a velocidade, precisão e o número de pontos de amostra utilizados para problemas de teste de variada complexidade e dimensionalidade usando os modelos substitutos Kriging, RBF e SVR. Ele afirma que o SVR é o mais rápido.

Segundo Li *et al.* (2010), uma comparação sistemática foi conduzida para comparar vantagens e desvantagens de cinco técnicas: RNA, RBF, SVR, Kriging e MARS para problemas estocásticos de simulação. Os resultados mostraram que o SVR obteve o melhor desempenho em termos de precisão e robustez.

O conceito de aproximações foi introduzido na otimização estrutural no meio dos anos 1970 e pode ser dividido em aproximação local, de médio alcance e global (BARTHELEMY; HAFTKA, 1993). No estudo de dois exemplos numéricos de otimização estrutural estocástica usando PSO realizado por Im e Park (2013) o custo computacional foi reduzido através do uso dos modelos substitutos de Superfície de Resposta e Kriging na otimização sequencial aproximada usando região de confiança. Eles afirmam que os erros obtidos pelos valores aproximados diminuem a confiabilidade dos valores ótimos e uma alternativa é utilizar métodos estatísticos bayesianos para obter resultados mais confiáveis.

Cardozo, Gomes e Awrush (2011) estudaram o uso de RNA para substituir a análise por Elementos Finitos durante a otimização. Foram utilizados três problemas de estruturas laminadas, duas placas e uma casca abatida. Os resultados por eles obtidos mostraram que há uma redução de aproximadamente 50% do tempo de otimização e os erros obtidos são admissíveis. Outros trabalhos também aplicaram modelos substitutos na otimização de estruturas laminadas (BISAGNI; LANZI, 2002; LEE; LIN, 2003; GOMES; AWRUSH; LOPES, 2011; KOIDE; FERREIRA; LUERSEN, 2015; NIK *et al.*, 2014; MENDONÇA *et al.*, 2016).

#### 4.1 Funções de Base Radial

O surgimento do modelo substituto de Funções de Base Radial (*Radial Basis Functions* - RBF) ocorreu quando Hardy (1971) utilizou funções multiquadráticas para interpolação de dados geográficos. Desde então, surgiram outros trabalhos utilizando essa técnica (KANSA, 1990; KITAYAMA; ARAKAWA; YAMAZAKI, 2011; AMOUZGAR; STRÖMBERG, 2016).

A técnica das Funções de Base Radial (RBF) consiste em construir um modelo aproximado, denominado  $\hat{f}$ , que possui a seguinte forma:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i h_i(|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|) \quad (37)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o ponto onde se deseja calcular a aproximação,  $w_i$  são escalares conhecidos como pesos e

$$h_i(|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (38)$$

é um conjunto  $m$  de funções arbitrárias, conhecidas como Funções de Base Radial. O módulo  $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|$  denota uma norma que é usualmente Euclidiana. Os pontos conhecidos  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, m$  são tomados como os centros das Funções de Base Radial (HAYKIN, 2008; AMOUZGAR; STRÖMBERG, 2016). Em problemas de otimização,  $n$  corresponde ao número de variáveis de projeto.

Várias funções de base radial podem ser utilizadas (AMOUZGAR; STRÖMBERG, 2016). Sendo a função Gaussiana a mais utilizada:

$$h_i(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_i^2}\right) \quad (39)$$

onde  $\sigma_j$  (*width*) é um parâmetro escalar que controla a forma da RBF e  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|$  é a distância radial.

A forma mais simples de construção de modelos substitutos utilizando RBF é por meio da interpolação dos pontos de amostragem  $f(\mathbf{x}_i) = y_i$ . Inserindo as condições de interpolação  $\hat{f}(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i)$  na Equação (37), obtém-se um conjunto de equações lineares simultâneas para cálculo dos pesos:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H} \mathbf{w} = \mathbf{y} \quad (40)$$

onde  $h_{ij} = h_j(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ . Essa condição garante a existência de uma matriz positiva definida, resultando em um sistema linear com uma única solução, desde que todos os pontos de amostragem ( $\mathbf{x}_i$ ) sejam distintos (RIPPA, 1999; FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008).

A matriz de interpolação tende a ficar mal condicionada quando os pontos de amostragem ficam próximos entre si (HAYKIN, 2008). Adicionalmente, se muitos pontos de amostragem forem utilizados, isto pode levar ao *overfitting*, onde o modelo substituto representa muito bem a amostra de treinamento, mas não generaliza de forma adequada para pontos fora da amostra (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008).

Uma forma de se evitar os dois problemas é determinar os pesos pela minimização do erro quadrático considerando parâmetros de regularização ( $\lambda_j$ ) (KITAYAMA; ARAKAWA; YAMAZAKI, 2012):

$$E = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{f}(\mathbf{x}_i))^2 + \sum_{j=1}^M \lambda_j w_j^2 \quad (41)$$

onde  $m$  é o número de pontos de amostragem e  $M$  o número de bases radiais, adotando-se normalmente  $M = m$ . A minimização desta função resulta no sistema linear:

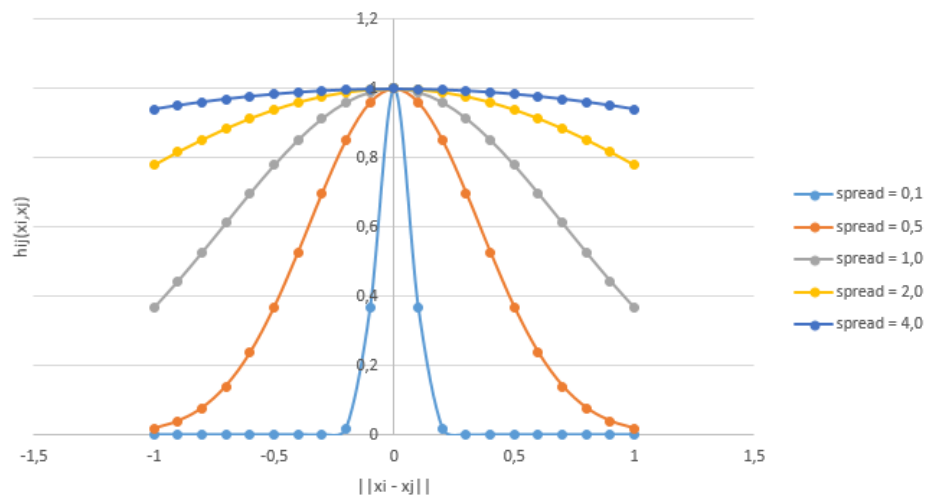
$$\mathbf{w} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \boldsymbol{\lambda})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (42)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é uma matriz diagonal.

## 4.2 Cálculo da largura da RBF

A largura ( $\sigma$ ) é um parâmetro escalar que controla a forma da RBF e a determinação de seu valor é um fator chave para a qualidade das aproximações do modelo substituto. O significado físico da largura da RBF pode ser atribuído a extensão da influência desta sobre um ponto no espaço de projeto distante de seu centro  $\mathbf{c}$ . A Figura 19 mostra que quanto maior o valor de  $\sigma$  maior será a área de influência da RBF sobre pontos distantes do seu centro  $\mathbf{c}$ , considerado na origem. Na Equação (39) o valor de  $r$  é dado pela norma  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$  que é a distância entre o centro da função de base radial  $\mathbf{c}$  e o ponto onde se deseja avaliar.

Figura 19. Influência da largura ( $\sigma$ ).



Fonte: elaborada pelo autor.

Neste trabalho, utilizou-se duas formas de calculá-lo. As expressões utilizadas dependem da distância máxima entre os pontos da amostra ( $d_{max}$ ), do número de pontos da amostra ( $m$ ) e do número de variáveis de projeto ( $n$ ).

A primeira foi obtida por Nakayama, Arakawa e Sasaki (2002):

$$\sigma = \frac{d_{max}}{\sqrt[n]{nm}} \quad (43)$$

A segunda foi desenvolvida por Kitayama e Yamazaki (2011):

$$\sigma_j = \frac{d_{j,max}}{\sqrt[n]{n}\sqrt[m]{m} - 1} \quad (44)$$

Segundo Kitayama e Yamazaki (2011), a fórmula de Nakayama, dada pela Equação (43) não leva em consideração se a amostra de treinamento é distribuída de forma não uniforme. Isso ocorre porque como a distância máxima é igual para toda a amostra o valor de  $\sigma$  será constante, enquanto que na formula proposta pela Equação (44), a distância máxima de cada centro da função de base radial da amostra é calculada, gerando um valor de  $\sigma$  diferente para cada centro.

#### 4.2.1 Técnica da escala adaptativa

A técnica da escala adaptativa (*adaptative scaling technique*) foi inicialmente proposta por Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011). A ideia chave desta técnica é fazer com que os *widths* calculados pela Equação (44) sejam todos maiores do que 1. O efeito causado por esta técnica é causar uma regressão suave da superfície de resposta (WU *et al.*, 2016). Isto ocorre porque a área de influência de cada ponto no espaço de projeto se torna maior e influencia em pontos mais distantes.

Nesta técnica, o espaço das variáveis de projeto é modificado para  $[0, s]$ , onde  $s$  é o valor da escala adaptativa obtida de forma incremental até que o menor valor do vetor dos *widths* dado pela Equação (44) seja maior do que 1.

$$s = s * \delta \quad (45)$$

Na Equação (45) o valor de  $s$  inicial utilizado é igual a 1. Nos problemas desta dissertação foram utilizados dois valores de  $\delta$  ( $\delta = 1,1$  e  $\delta = 1,2$ ) propostos por Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011). O espaço das variáveis de projeto utilizado para calcular os *widths* é dado pela Equação (46).

$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{inf}}{\mathbf{x}_{sup} - \mathbf{x}_{inf}} * s \quad (46)$$

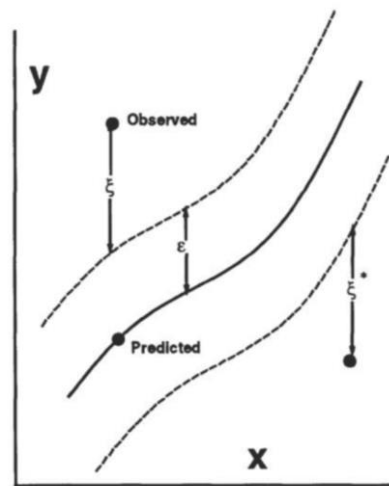
### 4.3 Regressão por Vetores Suporte

A Regressão por Vetores Suporte (do Inglês *Support Vector Regression* - SVR) surgiu em 1996 devido ao trabalho conjunto de Harris Drucker, Chris Burges, Linda Kaufman, Alex Smola e Vladimir Vapnik. Ela foi considerada uma nova técnica de regressão baseada no conceito de vetores suporte de Vapnik, denominada  $\varepsilon$ -SVR.

A denominação  $\varepsilon$ -SVR faz referência a existência de um tubo de raio  $\varepsilon$  que envolve a curva gerada pelo modelo substituto. Ela significa que os pontos da amostra de treinamento que caírem dentro desse tubo possuirão valor da função de perda  $L$  (*loss function*) nulo (DRUCKER *et al.*, 1996). Enquanto que aqueles que caírem fora terão seu valor calculado pela Equação (47). A Figura 20 serve de ilustração para o caso unidimensional.

$$L = \begin{cases} 0 & \text{se } |y_i - f(\mathbf{x})| < \varepsilon \\ |y_i - f(\mathbf{x})| - \varepsilon & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (47)$$

Figura 20. Ilustra o epsilon-tubo, linhas pontilhadas.



Fonte: Drucker *et al.* (1996).

Isso significa que erros menores que  $\varepsilon$  não são penalizados no processo de otimização para obtenção dos valores dos parâmetros do modelo substituto. Dessa forma o  $\varepsilon$  pode ser útil se a precisão desejada da aproximação puder ser especificada antecipadamente. Em alguns casos, contudo, deseja-se que a estimativa seja tão precisa quanto possível. Daí surgiu a versão modificada do  $\varepsilon$ -SVR denominada  $\nu$ -SVR.

O  $\nu$ -SVR foi desenvolvido por Scholkopf et al (1998). Essa versão do SVR consiste em um algoritmo que minimiza automaticamente o valor de  $\varepsilon$  (SCHOLKOPF et al, 1998). Maiores detalhes da teoria envolvida na construção desses dois modelos substitutos serão descritos na próxima seção deste trabalho.

Os primeiros trabalhos que utilizaram SVR foram publicados ainda na década de 90. Vapnik et al. (1996) utilizaram o SVR para estimação de função em problemas multidimensionais. Muller et al. (1997) utilizaram dois tipos de funções custo na aproximação de séries temporais com SVR:  *$\varepsilon$ -insensitive loss function* e *Huber's robust loss function*. Mukherjee, Osuna e Girosi (1997) testaram o SVR em séries temporais caóticas de Casdagli (1989) e afirmam que o desempenho deste foi melhor do que Funções de Base Radial (RBF) e Redes Neurais Artificiais (RNA).

#### 4.3.1 Regressão por Vetores Suporte ( $\varepsilon$ -SVR)

Suponha que tenhamos uma função desconhecida  $G(\mathbf{x})$  que é uma função de um vetor  $\mathbf{x}$  (denominado espaço de entrada). A dimensionalidade do espaço de entrada é medida pelo número de componentes do vetor  $\mathbf{x}$ . Seja  $F(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  uma família de funções parametrizadas por  $\mathbf{w}$ . Onde  $\hat{\mathbf{w}}$  é o vetor de valores de  $\mathbf{w}$  que minimiza o erro entre  $G(\mathbf{x})$  e  $F(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ . Nosso objetivo é estimar  $\mathbf{w}$  com  $\hat{\mathbf{w}}$  pela observação de  $m$  pontos de treinamento  $\mathbf{x}_j, j = 1, \dots, m$ .

Utilizando-se a representação de Regressão por Vetores Suporte (SVR) desenvolvida por Vapnik (1996) para aproximar a função verdadeira  $G(\mathbf{x})$  temos que:

$$F(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{w}}) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}) + b \quad (48)$$

onde  $\hat{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) \mathbf{x}_i$  e pode-se escrever  $F(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{w}}) = \hat{\mathbf{w}} \mathbf{x} + b$ .

Para resolver esse problema é necessário determinar  $2m + 1$  valores de parâmetros, que representam o total da soma de valores dos parâmetros  $\alpha_i^*$ ,  $\alpha_i$  e  $b$ . Deixemos  $\boldsymbol{\alpha}$  representar um vetor de tamanho  $2m$  de  $\alpha_i$  e  $\alpha_i^*$ . Os valores ótimos para as componentes de  $\hat{\mathbf{w}}$  ou  $\boldsymbol{\alpha}$  dependem da nossa definição de função de perda  $L$  (*loss function*) e da função objetivo. Usando a função de perda  $L$ , temos que a função objetivo original do nosso problema é dada por:

$$F_{obj} = C \sum_{j=1}^m L[y_j - F(\mathbf{x}_j, \hat{\mathbf{w}})] + \|\hat{\mathbf{w}}\|^2 \quad (49)$$

onde  $y_j$  é o valor observado, obtido de  $G(\mathbf{x})$  e o último termo é um regularizador.  $C$  é a constante de penalização. Nosso objetivo é minimizar a Equação (49). Usando a definição de função de perda  $L$  (*loss function*) da Equação (47), denominada  $\varepsilon$ -insensitive loss function (VAPNIK, 1996), na Equação (48) temos que:

$$F_{obj} = C \left( \sum_{j=1}^m \xi_j^* + \sum_{j=1}^m \xi_j \right) + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T \mathbf{w}) \quad (50)$$

onde  $\xi_i$  ou  $\xi_i^*$  é zero se o ponto da amostra estiver dentro do  $\varepsilon$ -tubo. No caso unidimensional, dependendo se o ponto analisado estiver acima ou abaixo da curva (Figura 20), ou  $\alpha_i$  ou  $\alpha_i^*$  será não nulo, caso o ponto esteja dentro do  $\varepsilon$ -tubo, ambos serão nulos. Um valor alto de  $C$  significa dar ênfase ao erro enquanto um valor pequeno de  $C$  dá ênfase aos valores de  $\alpha$ , melhorando a aproximação (DRUCKER *et al.*, 1997).

As restrições para todos os pontos  $i = 1, \dots, m$ , são:

$$\begin{aligned} y_i - (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) - b &\leq \varepsilon + \xi_i \\ (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) + b - y_i &\leq \varepsilon + \xi_i^* \\ \xi_i^* &\geq 0 \\ \xi_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (51)$$

A primeira e a segunda restrições significam que a aproximação obtida pelo modelo SVR para os pontos da amostra de treinamento deve apresentar erros menores do que  $\varepsilon + \xi$  em relação aos seus valores avaliados pelo modelo de alta fidelidade. A terceira e quarta restrições são os erros de treinamento inferior e superior.

Escrevendo o problema com os multiplicadores de Lagrange ( $\gamma_i, \gamma_i^*, \alpha_i, \alpha_i^*$ ) temos que o Lagrangeano correspondente é:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T \mathbf{w}) + C \left( \sum_{j=1}^m \xi_j^* + \sum_{j=1}^m \xi_j \right) - \sum_{i=1}^m \alpha_i^* [y_i - (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) - b + \varepsilon + \xi_i^*] \\ - \sum_{i=1}^m \alpha_i [(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) + b - y_i + \varepsilon + \xi_i] - \sum_{i=1}^m (\gamma_i^* \xi_i^* + \gamma_i \xi_i) \end{aligned} \quad (52)$$

Através da teoria Lagrangeana as condições necessárias para  $\alpha$  uma solução para o problema de otimização original são:



$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{w} - \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) \mathbf{x}_i = 0 \quad (53)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i} = C - \alpha_i - \gamma_i = 0 \quad (55)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i^*} = C - \alpha_i^* - \gamma_i^* = 0 \quad (56)$$

Substituindo as Equações (53)-(56) na Equação (52) resulta no problema de otimização na forma dual. Esse procedimento transforma o problema de otimização primal em um problema de otimização dual:

$$W(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^*) = -\varepsilon \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* + \alpha_i) + \sum_{i=1}^m y_i (\alpha_i^* - \alpha_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) (\alpha_j^* - \alpha_j) (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \quad (57)$$

com as seguintes restrições:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_i \leq C \quad 0 \leq \alpha_i^* \leq C \quad i = 1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i^* = \sum_{i=1}^m \alpha_i \end{array} \right. \quad (58)$$

A solução deste problema consiste em maximizar  $W$ . Este é um problema de programação quadrática. Uma vez resolvido, resulta no modelo substituto construído, ao encontrar  $m$  pares de multiplicadores de Lagrange  $(\alpha_i, \alpha_i^*)$ . Note que o produto de  $\alpha_i$  e  $\alpha_i^*$  é nulo porque ao menos um desses termos é zero.

Um ponto cujo  $\alpha_i$  ou  $\alpha_i^*$  é diferente de zero é denominado vetor suporte (*support vector*). Note que podem existir no máximo  $m$  vetores suporte. Supondo então que nós temos um novo vetor  $\mathbf{x}$ , seu valor aproximado pelo modelo substituto é dado pela Equação (59):

$$\hat{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}) + b \quad (59)$$

### 4.3.2 Método de Bunch e Kaufman

O método de Bunch e Kaufman foi desenvolvido em 1980 e foi utilizado por (DRUCKER *et al.*, 1996) para maximizar  $W$  dado pela Equação (57). Ele consiste em um algoritmo para determinar o mínimo local de um problema de programação quadrático cuja matriz  $\mathbf{Q}$  simétrica pode não ser positiva definida (BUNCH e KAUFMAN, 1980).

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{aligned} \quad (60)$$

Onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz simétrica  $m \times m$ ,  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $l \times m$ ,  $\mathbf{c}$  é um vetor  $l \times 1$  e  $\mathbf{b}$  é um vetor  $m \times 1$ . O passo a passo do desenvolvimento do algoritmo com um exemplo de aplicação pode ser encontrado em (BUNCH e KAUFMAN, 1980).

Para resolver o problema de maximização dado pelas Equações (57) e (58), utilizando-se o método de Bunch e Kaufman, antes é necessário colocar  $W$  em uma forma padrão, possibilitando assim a minimização. Para isto, se nós tomarmos

$$\mathbf{x}_i = \alpha_i^* \quad \mathbf{x}_{i+m} = \alpha_i \quad i = 1, \dots, m \quad (61)$$

então nós podemos minimizar

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (62)$$

sujeito as restrições

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i = \sum_{m+1}^{2m} \mathbf{x}_i \quad e \quad 0 \leq \mathbf{x}_i \leq C \quad i = 1, \dots, 2m \quad (63)$$

onde

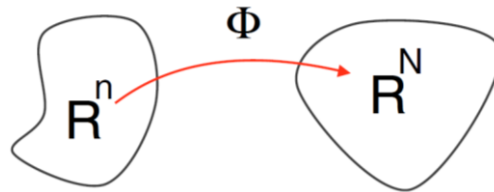
$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T &= [\varepsilon - y_1, \varepsilon - y_2, \dots, \varepsilon - y_m, \varepsilon + y_1, \varepsilon + y_2, \dots, \varepsilon + y_m] \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \\ d_{ij} &= \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (64)$$

### 4.3.3 Funções do Kernel

O uso de funções do Kernel foi primeiro publicado por Aizerman, Braverman e Rozonoer em 1964 (SEWELL, 2007). O teorema de Mercer estabelece que qualquer função kernel positiva semi-definida, simétrica e contínua  $K(x,y)$  pode ser expressa como um produto escalar em um espaço dimensional elevado. A dimensão do espaço é caracterizada pelo número de termos contidos em um vetor  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Logo um espaço dimensional elevado significa o vetor ter um valor de  $n$  elevado.

O problema do modelo de regressão discutido até agora é que ele é somente linear, ver Equação (59). Logo, pretende-se encontrar um caminho geral de representar funções não lineares em um número arbitrário de dimensões eficientemente. Isso pode ser atingido pelo mapeamento  $\Phi$  dentro de um espaço de alta dimensão e construindo uma função de regressão linear nesse espaço (SMOLA, 1996). A Figura 21 ilustra esse processo.

Figura 21. Mapeamento para um espaço de alta dimensão.



Fonte: Smola (1996).

Para exemplificar, seja  $\Phi$  um mapeamento que transforma um espaço bidimensional em um espaço tridimensional.

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mapsto (\mathbf{x}_1^2, \sqrt{2}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2^2) \end{aligned} \quad (65)$$

A única modificação devido a esse procedimento é trocar o produto escalar  $(\mathbf{x}_i^T \mathbf{x})$  na Equação (59) por  $(\Phi(\mathbf{x}_i), \Phi(\mathbf{x}))$ . Representando as funções do Kernel, como funções que realizam esse mapeamento, temos que  $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = (\Phi(\mathbf{x}_i), \Phi(\mathbf{x}))$ . Substituindo, temos que:

$$\hat{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b \quad (66)$$

Dentre os tipos de Kernel podemos citar a polinomial homogênea, a polinomial não homogênea, a tangente hiperbólica, a função de base radial dentre outras. Neste trabalho,

utilizou-se a função de base radial como função do Kernel porque ela tem sido amplamente utilizada em muitos problemas (CLARKE; GRIEBSCH; SIMPSON, 2005; PAN; ZHU; ZHAN, 2010; KOIDE; FERREIRA; LUERSEN, 2015; NIK *et al.*, 2014). A Equação (67) ilustra sua formulação.

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = e^{-\gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|^2} \quad (67)$$

onde  $\gamma = 1/\sigma^2$ .

#### 4.3.4 Regressão por Vetores Suporte (v-SVR)

Em 1998, um novo algoritmo para a Regressão por Vetores Suporte (SVR) foi proposto por Scholkopf, Bartlett, Smola e Williamson. Sua proposta é ajustar automaticamente um  $\varepsilon$ -tubo flexível de raio mínimo para os dados, de modo que no máximo uma fração  $\nu$  desses pontos da amostra caia fora desse tubo (SCHÖLKOPF; BARTLETT; SMOLA, 1998).

No  $\nu$ -SVR o parâmetro  $\varepsilon$  é negociado contra a complexidade do modelo e variáveis de folga usando uma constante  $\nu \in [0, 1]$ . O problema de otimização quadrático convexo restrito é dado por

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \left( \nu \varepsilon + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m (\xi_i + \xi_i^*) \right) \\ & ((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - y_i \leq \varepsilon + \xi_i \\ \text{sujeito a} \quad & y_i - ((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \leq \varepsilon + \xi_i^* \\ & \xi_i, \xi_i^*, \varepsilon \geq 0 \end{aligned} \quad (68)$$

Da mesma forma como foi usado para o  $\varepsilon$ -SVR (também considerado SVR padrão), introduz-se os multiplicadores de Lagrange  $(\alpha_i, \alpha_i^*, \beta, \eta_i, \eta_i^*)$  para obter-se o Lagrangiano:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C\nu\varepsilon + \frac{C}{m} \sum_{i=1}^m (\xi_i + \xi_i^*) - \sum_{i=1}^m \alpha_i (\xi_i + y_i - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) - b + \varepsilon) \\ - \sum_{i=1}^m \alpha_i^* (\xi_i^* + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b - y_i + \varepsilon) - \beta\varepsilon - \sum_{i=1}^m (\eta_i \xi_i + \eta_i^* \xi_i^*) \end{aligned} \quad (69)$$

Tomando derivadas em relação a  $\mathbf{w}$  e substituindo em  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b$ , resulta na aproximação v-SVR, que é a mesma dada pela Equação (59).

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) \mathbf{x}_i - \mathbf{w} = 0 \quad (70)$$

Com a variável primal adicional,  $\varepsilon$ , existe uma derivada adicional que desaparece no ponto de sela:

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = Cv - \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \alpha_i^*) - \beta = 0 \quad (71)$$

Tomando as derivadas em relação a  $b$ ,  $\xi_i$  e  $\xi_i^*$  junto com as Equações (70) e (71), e substituindo dentro da Equação (69) isso nos permite eliminar  $\varepsilon$  do problema dual de otimização.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b} &= \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_i} &= \frac{C}{m} - \alpha_i - \eta_i = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_i^*} &= \frac{C}{m} - \alpha_i^* - \eta_i^* = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

O qual é agora dado por

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\alpha_i - \alpha_i^*) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) (\alpha_j - \alpha_j^*) - \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \alpha_i^*) y_i \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 \\ 0 \leq \alpha_i^* \leq \frac{C}{m} \\ \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \alpha_i^*) \leq Cv \end{cases} \end{aligned} \quad (73)$$

## 5 TÉCNICAS DE AMOSTRAGEM

A construção de um modelo substituto utiliza métodos de Projeto de Experimentos (*Design of Experiments* – DoE) que são usados para determinar as localizações dos pontos de uma amostra no espaço de projeto. Eles podem ser determinísticos ou estocásticos. O projeto de experimentos é um procedimento com o objetivo geral de maximizar a qualidade do modelo substituto utilizando um número limitado de pontos na amostra (STEPONAVICE *et al.*, 2015).

Uma característica dos modelos de aproximação é que eles são mais precisos na proximidade de pontos onde a função objetivo foi avaliada (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008). O objetivo da geração da amostra inicial é preencher de uma forma uniforme o espaço das variáveis de projeto. Ela pode ser realizada através de métodos determinísticos, como a Sequência de Hammersley (BURKARDT, 2016; AMOUZGAR; STRÖMBERG, 2016), ou métodos não determinísticos, como o Hipercubo Latino (MCKAY; BACKMAN; CONOVER, 1979).

Os critérios de preenchimento (*infill criteria*) definem o local no espaço das variáveis de projeto onde deve ser inserido novos pontos para melhorar a precisão do modelo substituto. Eles são utilizados na Otimização Sequencial Aproximada, caracterizando esta como de critério de preenchimento de uma fase ou de múltiplas fases.

A Otimização Sequencial Aproximada com critério de preenchimento de uma fase consiste em um critério que insere novo(s) ponto(s) através uma única abordagem, como a Probabilidade de Melhoria (*Probability of Improvement*) e a Melhoria Esperada (*Expected Improvement*) (JONES; SCHONLAU; WILLIAM, 1998; FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008).

Já o critério de preenchimento de múltiplas fases consiste na inserção de novos pontos através de duas ou mais abordagens (NAKAYAMA; ARAKAWA; SASAKI, 2002; KITAYAMA; ARAKAWA; YAMAZAKI, 2011). Como exemplo de critério de preenchimento de múltiplas fases pode-se citar a metodologia utilizada neste trabalho: a primeira fase consiste na inserção do ótimo encontrado pela superfície de resposta durante a otimização, e a segunda fase é representada pela adição do mínimo global da função densidade.

É importante notar que o custo computacional é diretamente proporcional ao tamanho da amostra, uma vez que cada ponto da amostra precisa ter suas respostas avaliadas utilizando o modelo computacional de alta fidelidade. Portanto, tanto as técnicas de

amostragem inicial quanto as técnicas de preenchimento devem buscar minimizar o tamanho da amostra utilizada na construção do modelo substituto.

Neste capítulo apresentam-se alguns dos critérios de preenchimento utilizados na literatura, são eles: Função Densidade (FD), Probabilidade de Melhoria (*Probability of Improvement*) e a Melhoria Esperada (*Expected Improvement*). Quanto maior for o desempenho destes critérios, melhor serão os modelos substitutos e mais precisos serão os ótimos globais obtidos através da otimização, sem aumentar de forma excessiva o tamanho da amostra (e portanto o custo computacional envolvido).

Outro aspecto importante que está relacionado aos critérios de preenchimento é a quantidade de novos pontos a serem inseridos na amostra a cada geração ou iteração. Quanto maior a quantidade de pontos (amostras), mais robusto é o método e maior será o tempo de análise desses pontos (amostras) por métodos numéricos. Contudo, maior também será o tempo de otimização.

Portanto, o estudo realizado sobre qual critério adotar deve levar em conta a simplicidade de implementação, o tempo de otimização e a precisão obtida. Estes por sua vez devem ser confrontados com o tempo disponível para solução dos problemas de otimização e com a precisão requerida na solução destes.

## 5.1 Projeto de Experimentos

A definição do tamanho da amostra necessária para obtenção do modelo substituto adequado ao problema analisado é um fator importante para obtenção do ótimo aproximado procurado. O tamanho da amostra de treinamento pode ser escrito em função do parâmetro  $k$  que corresponde ao número mínimo de pontos para interpolar um polinômio quadrático (AMOUZGAR; STRÖMBERG, 2016):

$$k = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \quad (74)$$

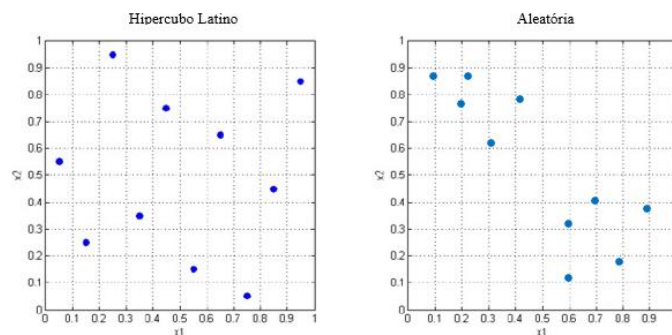
onde  $n$  é o número de variáveis de projeto do problema (dimensão do problema). No caso de problemas de pequena dimensão, Amouzgar e Strömberg (2016) classificam o tamanho da amostra como pequeno ( $1,5k$ ), médio ( $3,5k$ ) e grande ( $6k$ ), enquanto que para problemas de dimensão elevada, estes valores seriam: amostra pequena ( $1,5k$ ), média ( $2,5k$ ) e grande ( $5k$ ). Segundo Amouzgar e Strömberg (2016) quando o problema possui no máximo 4 variáveis de projeto ele é considerado pequeno, quando possui mais do que 4 é considerado grande.

Os métodos de projetos de experimentos utilizados neste trabalho foram o Hipercubo Latino Otimizado - HLO (FORRESTER; SÓBESTER; KENAE, 2008) e a Sequência de Hammersley - SH (BURKARDT, 2016; AMOUZGAR; STRÖMBERG, 2016). A seguir são descritas as ideias fundamentais de cada um desses métodos.

### 5.1.1 Hipercubo Latino

A técnica de amostragem do Hipercubo Latino consiste em dividir o espaço das variáveis de projeto em  $N$  estratos de igual probabilidade  $1/N$  e amostrar uma vez de cada estrato (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979). Consiste em um método não determinístico que garante que cada um de seus componentes é representado de uma maneira estratificada. A Figura 22 ilustra uma distribuição do Hipercubo Latino e outra aleatória.

Figura 22.Exemplos de amostragem.



Fonte: Mendonça (2017).

### 5.1.2 Hipercubo Latino Otimizado

Segundo Forrester, Sóbester e Keane (2008), o Hipercubo Latino Otimizado (HLO) é uma variação da técnica do hipercubo latino que busca maximizar a distância entre os pontos de amostragem de forma a cobrir melhor o espaço de projeto utilizando um pequeno número de amostras.

Esse processo consiste em: (i) gerar as amostras através do hipercubo latino como um ponto de partida para o processo de otimização; (ii) calcular um coeficiente que mede a uniformidade da amostra a otimizar para encontrar a amostra mais uniforme.



No estudo apresentado por Forrester, Sóbester e Keane (2008), o coeficiente que mede a uniformidade é usado para classificar as amostras quanto a uniformidade. Quanto menor o valor desse coeficiente mais uniforme será a amostra. Ele é definido como:

$$\Phi_q(\mathbf{X}) = \left( \sum_{j=1}^m J_j d_j^{-q} \right)^{1/q} \quad (75)$$

onde  $J$  é o número de pares de pontos da amostra que possuem a mesma distância  $d$ , e  $q$  é um escalar adotado cujos valores recomendados são  $q = 1, 2, 5, 10, 20, 50$  e  $100$  (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008).

### 5.1.3 Sequência de Hammersley

A Sequência de Hammersley (SH) por sua vez é obtida a partir da expressão:

$$\left( \frac{k}{m}, \Phi_{p_1}(k), \Phi_{p_2}(k), \dots, \Phi_{p_{d-1}}(k) \right) \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, m - 1. \quad (76)$$

onde  $m$  é o número de pontos da amostra,  $d$  é a dimensão do espaço amostral e  $p_1, p_2, \dots, p_{d-1}$  é a sequência de números primos (WONG; LUK; HENG, 1997). Essa sequência parte do princípio de que um inteiro não negativo  $k$  pode ser expandido usando um número primo  $p$ :

$$k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_r p^r \quad (77)$$

onde cada  $a_i$  é um inteiro em  $[0, p-1]$ . A função  $\Phi_p$  de  $k$  é dada por:

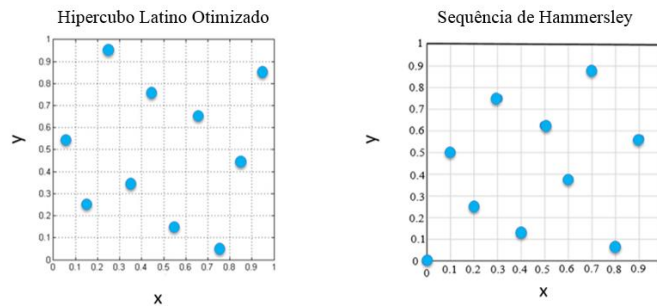
$$\Phi_p(k) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \dots + \frac{a_r}{p^{r+1}} \quad (78)$$

A principal vantagem da Sequência de Hammersley (SH) é que ela pode gerar pontos mais bem distribuídos no espaço de projeto com grande rapidez. No entanto, ela nem sempre é melhor do que um método de escolha aleatória, como é o caso do hipercubo latino. Para os exemplos numéricos avaliados nesse trabalho a velocidade de geração das amostras não foi superior a 5s em todos os casos.

A maior desvantagem desse método é que ele é determinístico, logo, se uma dada amostra gerada não resultar em um modelo substituto de qualidade, não é possível usar os mesmos parâmetros para gerar uma amostra mais uniforme que resulte em um modelo

substituto de melhor qualidade. A Figura 23 compara o Hipercubo Latino e a Sequência de Hammersley.

Figura 23. Comparação entre métodos de amostragem.



Fonte: elaborada pelo autor.

## 5.2 Função Densidade

A função densidade proposta por Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011) foi implementada nesta dissertação. Seu objetivo é descobrir a região do espaço das variáveis de projeto onde a amostragem é mais esparsa, de forma que a adição de novos pontos melhore a precisão do modelo substituto de forma global.

A ideia básica é substituir os outputs da amostra de treinamento por 1. Isso faz com que todos os valores observados (*targets*) assumam o valor normalizado máximo possível. Desta forma, a superfície de resposta criada apresentará regiões esparsas representadas por pequenos valores se comparados à unidade.

A forma utilizada por Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011) para construir a superfície de resposta utilizando Funções de Base Radial foi assumir o vetor  $\mathbf{y}^{\text{FD}}$  como:

$$\mathbf{y}^{\text{FD}} = (1, 1, 1, \dots, 1)_{m \times 1}^T \quad (79)$$

e calcular os pesos ( $\mathbf{w}^{\text{FD}}$ ) da RBF regularizada correspondente:

$$\mathbf{w}^{\text{FD}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda) \mathbf{H}^T \mathbf{y}^{\text{FD}} \quad (80)$$

Desta forma, a função densidade (FD) é avaliada como:

$$\text{FD}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i^{\text{FD}} h_i(\mathbf{x}) \quad (81)$$

O novo ponto pode ser inserido na amostra corresponde ao mínimo da função densidade. Este ponto pode ser obtido por qualquer algoritmo de otimização. Neste trabalho, foi utilizado o PSO convencional.

A seguir utilizou-se um exemplo unidimensional (1D) para localizar o ponto que deve ser inserido no espaço de projeto através da Função Densidade para melhorar a precisão do modelo substituto. Será considerado um modelo de alta fidelidade definido por:

$$f(x) = (6x - 2)^2 \text{sen}(12x - 4) \quad (82)$$

A título de ilustração, utilizou-se o modelo substituto de Funções de Base Radiais em sua forma regularizada. Na construção do modelo, três pontos aproximadamente equidistantes dentro do espaço da variável de projeto (*Tabela 2*), foram utilizados para gerar o modelo RBF Regularizado inicial.

Tabela 2. Pontos do modelo RBF Regularizado.

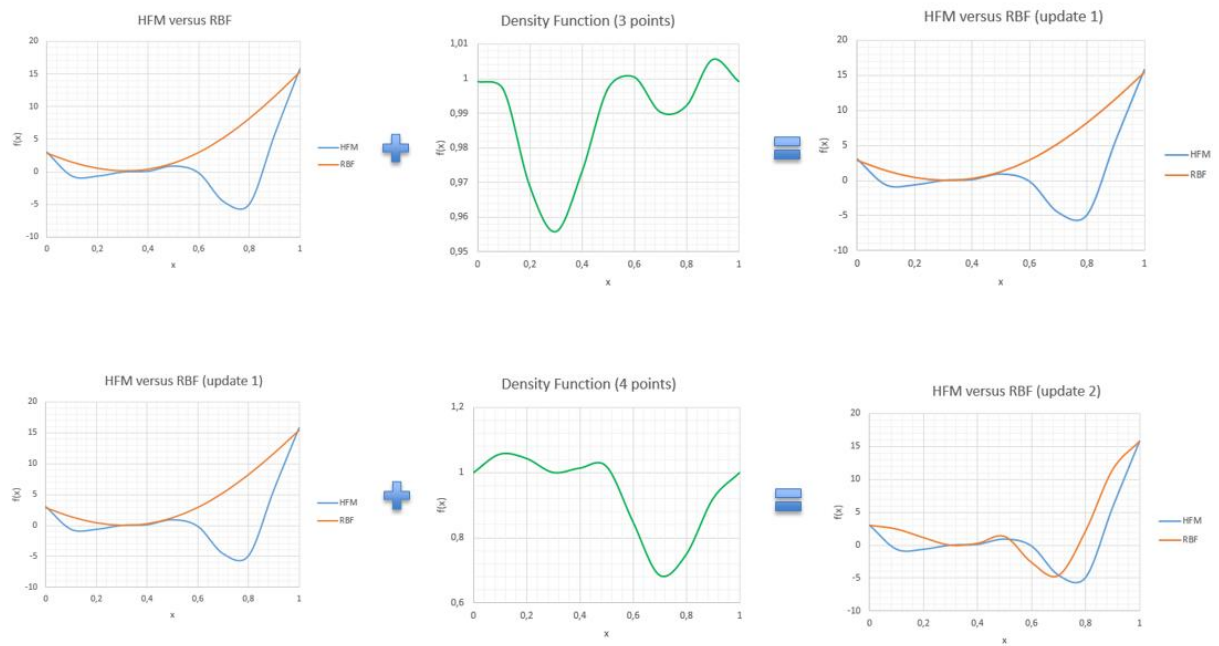
$\mathbf{x(1)}$	$\mathbf{x(2)}$	$\mathbf{x(3)}$
0	0,52	1

Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 24 mostra as curvas do modelo substituto e do modelo de alta fidelidade e Função Densidade. Percebe-se que três pontos não são suficientes para gerar uma boa aproximação com o RBF Regularizado. Percebe-se que a inserção de dois novos pontos através da minimização da Função Densidade fará o modelo substituto se aproximar da forma do modelo de alta fidelidade.

Inserindo o primeiro ponto na amostra de treinamento através da minimização da Função Densidade, tem-se agora uma amostra atualizada com quatro pontos. Treinando e repetindo-se o processo de construção do modelo RBF Regularizado e plotando seu gráfico ainda não se percebe uma melhoria. Construindo novamente a Função Densidade e inserindo o seu mínimo na amostra de treinamento, tem-se agora uma amostra atualizada com cinco pontos. Treinando o modelo e construindo-o novamente se percebe que este está aproximando-se do ótimo global. A ideia chave deste critério de preenchimento é adicionar novos pontos até que a aproximação assuma erros admissíveis em relação ao ótimo global.

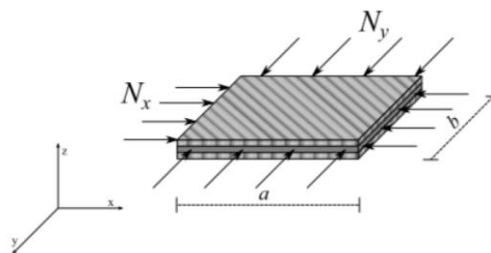
Figura 24. Gráficos dos modelos e da Função Densidade.



Fonte: elaborada pelo autor.

Outro exemplo de aplicação da Função Densidade foi realizado em um problema em duas dimensões (2D). Consistiu na determinação da carga de flambagem de uma placa laminada quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento biaxial. A placa possui 8 lâminas, sendo seu esquema de laminação balanceado simétrico, o que resulta em duas variáveis de projeto. A Figura 25 a seguir ilustra o problema.

Figura 25. Placa laminada com 8 lâminas submetida a carregamento biaxial.



Fonte: Barroso (2015).

Os ângulos de laminação utilizados para gerar a amostra de treinamento do modelo RBF Regularizado são  $\theta_1, \theta_2 \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots, 90\}$ . O número de pontos da mostra utilizada foi determinado pela Equação (74), utilizando-se  $n = 2$  e uma amostra pequena. A amostra resultante possui tamanho 9 e foi gerada pela Sequência de Hammersley.

Tabela 3. Amostra de 9 pontos (Sequência de Hammersley).

Amostra	$x_1$	$x_2$	Amostra	$x_1$	$x_2$
1	56,25	56,25	6	78,75	78,75
2	22,50	0,00	7	45,00	90,00
3	33,75	33,75	8	0,00	22,50
4	90,00	45,00	9	67,50	11,25
5	11,25	67,50			

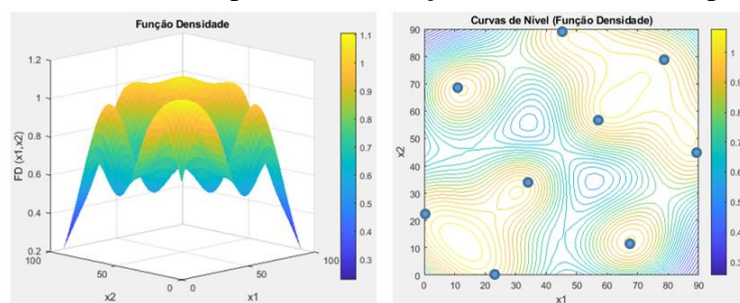
Fonte: elaborada pelo autor.

De posse da amostra de treinamento com 9 pontos, utilizou-se um vetor  $\mathbf{y}^{\text{FD}}$  de tamanho 9 e calculou-se os pesos  $\mathbf{w}^{\text{FD}}$  conforme as Equações (79) e (80). A matriz  $\mathbf{H}$  foi obtida através das Equações (39) e (44). A matriz  $\lambda$  utilizada possui os termos da diagonal principal todos iguais a  $1e-3$ .

Em seguida, utilizou-se um grid de pontos em duas dimensões para plotar a superfície de resposta da Função Densidade, utilizando-se a Equação (81), conforme ilustra a Figura 26. As curvas de nível com os pontos da amostra confirmam que os pontos mínimos da Função Densidade ( $\mathbf{x} = [90, 0]$  e  $\mathbf{x} = [0, 90]$ ) representam as regiões esparsas do espaço de projeto.

A ideia deste exemplo em duas dimensões é ilustrar a aplicação da técnica da superfície de resposta da Função Densidade mostrando que sua minimização conduz a inserção de pontos na região esparsa das variáveis de projeto. Em problemas com mais de duas variáveis de projeto não são possíveis de visualizar a Função Densidade.

Figura 26. Curvas de nível da superfície da Função Densidade com 9 pontos da amostra.



Fonte: elaborada pelo autor.

Com a inserção de novos pontos a partir da minimização da Função Densidade, a forma da superfície vai se modificando e indicando novas regiões esparsas. Esse processo se repete ao longo das gerações (Algoritmo Genético) ou iterações (Otimização por Nuvem de Partículas).

### 5.3 Probabilidade de Melhoria

O próximo critério de preenchimento que foi objeto de estudo desta dissertação é a Probabilidade de Melhoria (*Probability of Improvement*). Ela surgiu inicialmente dos trabalhos realizados por Kushner (1964), e teve sua aplicação ampliada por Stuckman, Perttunen, Elder e Mockus. Cada novo ponto inserido conduzirá a uma melhora do melhor valor observado até então,  $y_{\min}$ .

As expressões da Probabilidade de Melhoria foram obtidas em Forrester, Sóbester e Keane (2008) e foram implementadas no problema de flambagem 2D utilizando-se o modelo substituto RBF. A Probabilidade de Melhoria (*Probability of Improvement*) é dada pela expressão:

$$P[I(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{y_{\min} - \hat{y}(\mathbf{x})}{\hat{\sigma}(\mathbf{x})\sqrt{2}} \right) \right] \quad (83)$$

onde o Erro Médio Quadrático (*Mean Square Error – MSE*) é calculado em função da média e do desvio padrão. As Equações (84), (85) e (86) ilustram como obter o MSE de um determinado ponto. Onde  $\Psi$  é a matriz  $\mathbf{H}$ ,  $\psi$  é um vetor dado pela Equação (39),  $\mathbf{y}$  é o vetor dos *targets*,  $n$  é o número de pontos da amostra e  $\hat{y}(\mathbf{x})$  é o valor do aproximado obtido pelo modelo substituto RBF.

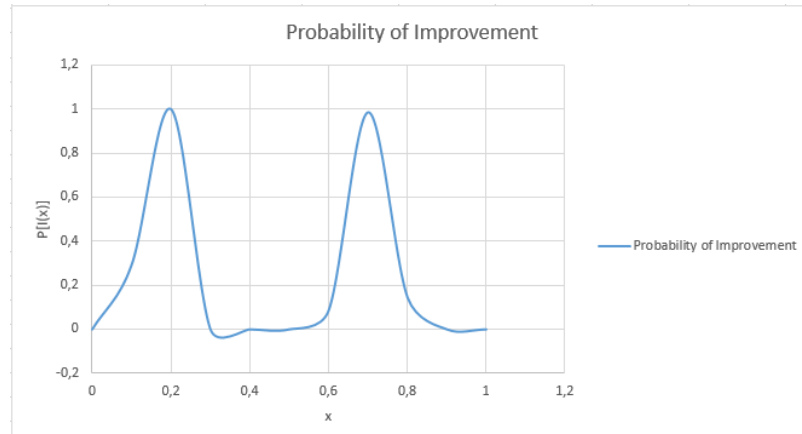
$$\hat{\sigma}^2(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}^2(\mathbf{x}) \left[ 1 - \psi^T \Psi^{-1} \psi + \frac{1 - \mathbf{1}^T \Psi^{-1} \psi}{\mathbf{1}^T \Psi^{-1} \mathbf{1}} \right] \quad (84)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mathbf{1}^T \Psi^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{1}^T \Psi^{-1} \mathbf{1}} \quad (85)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{1}\hat{\mu})^T \Psi^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1}\hat{\mu})}{n} \quad (86)$$

Novamente, utilizando o exemplo unidimensional (1D) dado pela Equação (82), temos que o máximo valor da Probabilidade de Melhoria (*Probability of Improvement*) de melhorar o modelo RBF Regularizado ocorre simultaneamente em dois pontos (0,2 e 0,7) conforme ilustra a Figura 27 a seguir. Esses pontos foram obtidos por inspeção visual do gráfico por se tratar de um exemplo simples.

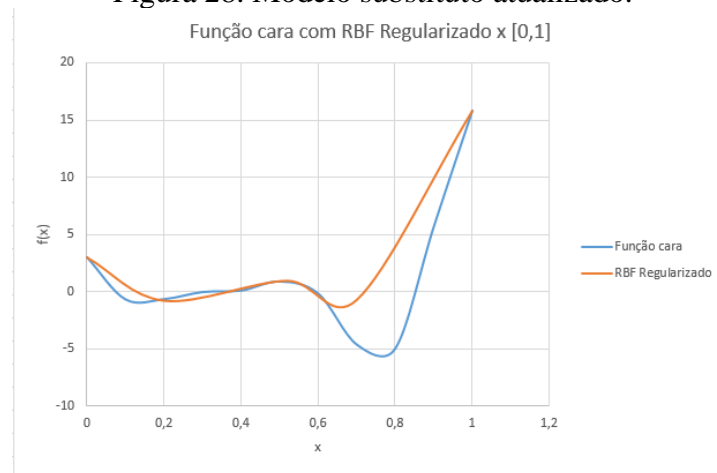
Figura 27. Probabilidade de Melhoria (Probability of Improvement).



Fonte: elaborada pelo autor.

Acrescentando esses dois pontos na amostra inicial de três pontos dada pela Tabela 2 utilizada para construir o modelo substituto, observa-se uma melhoria na precisão do modelo conforme ilustra a Figura 28 a seguir.

Figura 28. Modelo substituto atualizado.



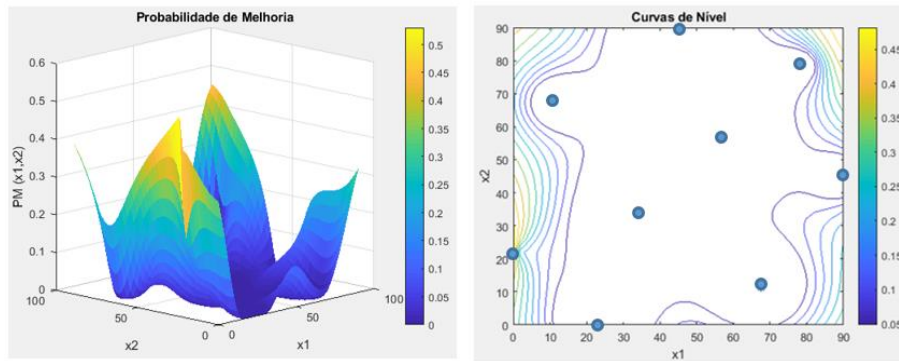
Fonte: elaborada pelo autor.

O mesmo exemplo da Figura 25, de uma placa com 8 lâminas e duas variáveis de projeto, também foi utilizado com a Probabilidade de Melhoria. Os resultados obtidos mostram que a maximização da Probabilidade de Melhoria conduz a inserção do ponto  $\mathbf{x} = [0, 24]$ . A Figura 29 ilustra a superfície de resposta da Equação (83) com as respectivas curvas de nível e os pontos da amostra.

Após a inserção do ponto  $\mathbf{x} = [0, 24]$  a superfície de resposta da Probabilidade de Melhoria é atualizada. Na Figura 30 é possível perceber que a probabilidade de melhoria é

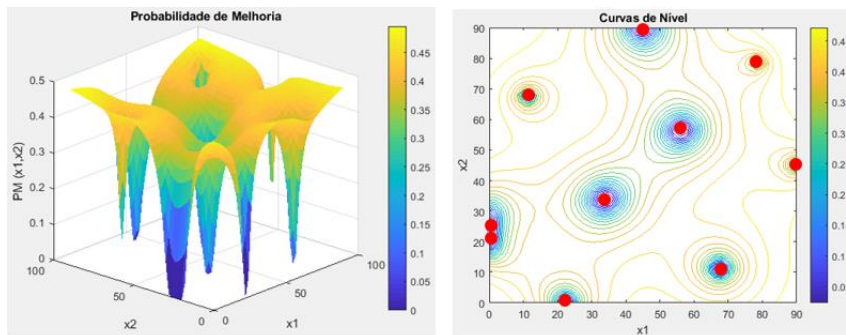
nula nos pontos da amostra. Enquanto existem outras regiões em que a inserção de novos pontos irá melhorar a precisão do modelo substituto.

Figura 29. Superfície de resposta da Probabilidade de Melhoria.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 30. Probabilidade de Melhoria atualizada.



Fonte: elaborada pelo autor.

#### 5.4 Melhoria Esperada

O último critério de preenchimento estudado foi o da Melhoria Esperada (*Expected Improvement*), surgido na literatura em 1978 no trabalho de Mockus, Tiesis e Zilinskas (1978). Trata-se de um método que balanceia a busca local e a global através de inserção de novos pontos na amostra de treinamento.

Na literatura encontrou-se o trabalho de Sóbester, Leary e Keane (2005) utilizando o RBF na Melhoria Esperada que possibilitou sua aplicação ao problema de flambagem 2D. O procedimento de inserção de novos pontos (amostras) foi realizado através da maximização da melhoria esperada no espaço das variáveis de projeto:



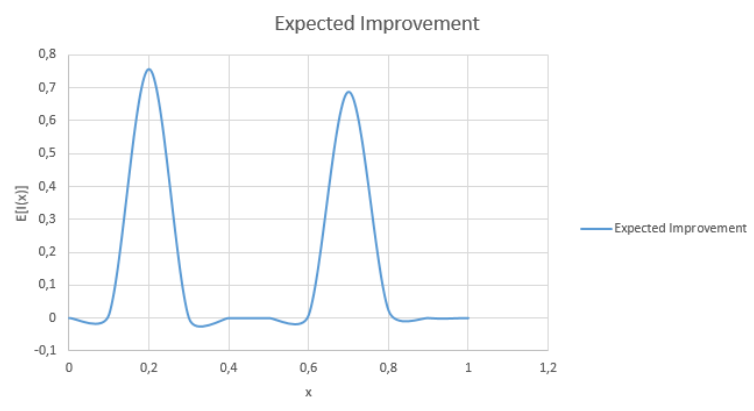
$$E[I(x)] = (y_{min} - \hat{y}(x)) \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{y_{min} - \hat{y}(x)}{\hat{s}(x)\sqrt{2}} \right) \right] + \frac{\hat{s}(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ \frac{-(y_{min} - \hat{y}(x))^2}{2(\hat{s}(x))^2} \right] \quad (87)$$

Esta equação indica a quantidade de melhoramento esperada com a adição de um novo ponto na amostra de treinamento (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008).

A Figura 31 ilustra a aplicação desse critério de preenchimento ao exemplo unidimensional (1D) dado pela Equação (82). Utilizando-se o mesmo modelo substituto RBF Regularizado e a amostra de três pontos para construí-lo (Tabela 2), foi possível plotar o gráfico da Equação (87) ilustrado abaixo.

Maximizando a Melhoria Esperada (*Expected of Improvement*) dada pela Equação (87) pode-se perceber visualmente que devemos adicionar o ponto 0,2, cuja melhoria esperada é de aproximadamente 0,75. Isso fará com que o modelo substituto melhore sua aproximação. A Figura 32 mostra que houve uma melhoria do modelo substituto se comparado ao modelo inicial ilustrado na Figura 24.

Figura 31. Melhoria Esperada (*Expected Improvement*).



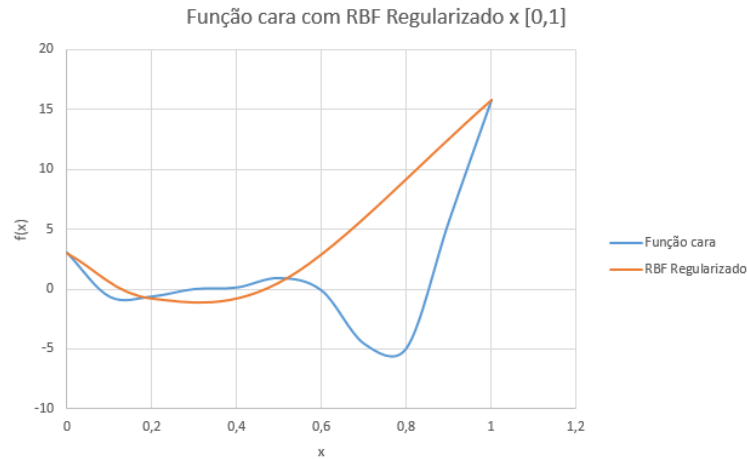
Fonte: elaborada pelo autor.

A reconstrução e maximização da Equação (87) fará com que novos pontos sejam inseridos na amostra de treinamento do modelo substituto melhorando assim a aproximação e fazendo com que a probabilidade de encontrar o ótimo global aumente. Contudo, segundo Forrester, Sóbester e Keane (2008) essa técnica pode convergir lentamente ou até mesmo não convergir.

A Melhoria Esperada (*Expected Improvement*) dada pela Equação (87) foi aplicada ao exemplo bidimensional dado pela Figura 25, de uma placa com 8 lâminas e duas

variáveis de projeto. A Figura 33 ilustra a superfície de resposta gerada no espaço das variáveis de projeto pela Equação (87).

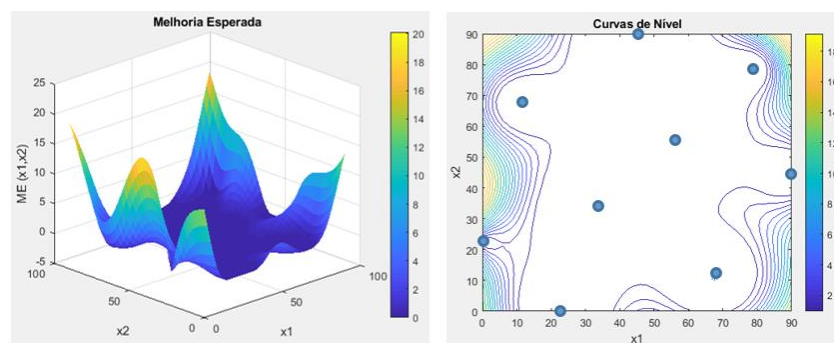
Figura 32. Modelo substituto atualizado.



Fonte: elaborada pelo autor.

Observando-se a Figura 33, onde estão plotadas as curvas de nível da superfície e os pontos da amostra inicial de treinamento, pode-se perceber que a maximização da Melhoria Esperada (*Expected Improvement*) indica a inserção dos pontos  $x = [90, 90]$  e  $x = [0, 90]$ . Percebe-se através da Figura 34 que a melhoria esperada atualizada indica novas regiões onde pode-se inserir novos pontos para melhorar a precisão do modelo substituto.

Figura 33. Superfície de Melhoria Esperada.



Fonte: elaborada pelo autor.

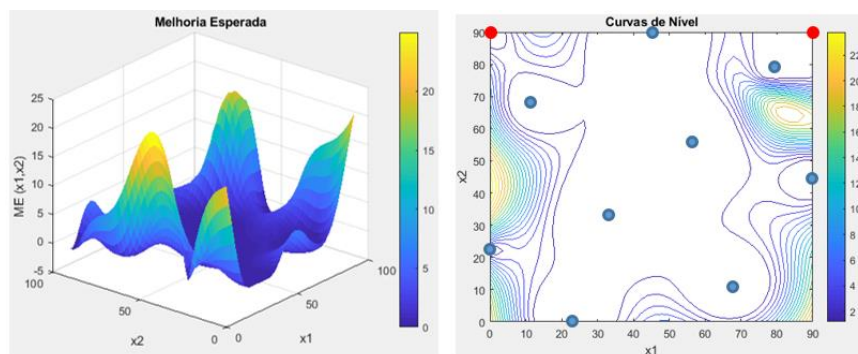
## 5.5 Indivíduo Ótimo da Superfície de Resposta

Outra estratégia de critério de preenchimento é a inserção do indivíduo ótimo não repetido da Superfície de Resposta a cada geração/iteração na amostra de treinamento. Essa

estratégia melhora a resposta do modelo substituto no mínimo local, que pode ser também o mínimo global.

Como não podemos ter certeza de que a busca encontrou o ótimo global, essa estratégia foi utilizada neste trabalho juntamente com a Função Densidade porque está baseada no estudo realizado por Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011), por apresentar bons resultados e ser de implementação não muito complexa. Esta abordagem proporciona a melhoria da resposta global do modelo substituto. Desta forma os critérios de preenchimento utilizados melhoraram a resposta do modelo substituto durante a otimização fazendo com que a probabilidade de convergência para o ótimo global aumente.

Figura 34. Melhoria Esperada atualizada.



Fonte: elaborada pelo autor.

O algoritmo utilizado na inserção de pontos através desses dois critérios de preenchimento se embasa na metodologia utilizada por Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011). No entanto, a proposta utilizada neste trabalho apresenta modificações em relação a de Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011).

A primeira modificação está relacionada ao cálculo do *width* que é realizada de duas formas diferentes. Na primeira os *widths* são calculados através da Equação (44) utilizando-se a técnica de escala adaptativa proposta por Kityama *et al.* (2011) para construção do modelo substituto. Na segunda utiliza-se a Equação (44) sem a técnica de escala adaptativa para cálculo dos *widths* para construção da Função Densidade. A técnica da escala adaptativa não foi utilizada na Função Densidade porque a sua aplicação deixava a superfície muito suave, quase constante, impossibilitando encontrar os seus mínimos.

A segunda modificação é a inserção do ótimo não repetido. Nesta estratégia ocorre que os indivíduos (AG) ou partículas (PSO) são ordenados do melhor até o pior. A cada geração/iteração o melhor indivíduo/partícula é comparado com os pontos da amostra de treinamento. Caso seja igual a algum dos pontos da amostra, a inserção não será mais do

melhor, mas sim do segundo melhor. E assim sucessivamente até que se encontre um indivíduo/partícula que não esteja na amostra. Se todos já estiverem na amostra não ocorre inserção, já que não haveria como melhorar o modelo substituto com esta abordagem.

A terceira modificação é a atualização da função objetivo de todos os indivíduos (AG) ou partículas (PSO) da população no início de cada geração/iteração com o modelo substituto atualizado. Esta estratégia melhora a otimização porque a atualização é realizada com um modelo substituto mais preciso. Contudo, em Kitayama, Arakawa e Yamazaki. (2011) não fica claro que todos os indivíduos são atualizados com o modelo substituto atualizado.

A quarta modificação consistiu em testar a Otimização Sequencial Aproximada reduzindo o número de pontos adicionados a amostra através da minimização da função densidade, que inicialmente foi testada com  $n/2$ , sendo  $n$  o número de variáveis de projeto do problema (KITAYAMA; ARAKAWA; YAMAZAKI, 2011). Os resultados obtidos mostraram que esse valor pode ser selecionado pelo usuário, porque quando foi inserido apenas um ponto foi possível encontrar as soluções ótimas em todos os problemas conforme ilustrado no capítulo 7. Outro aspecto relevante é que quanto maior o número de pontos inseridos maior será o custo computacional podendo inviabilizar a técnica.

## 6 OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL APROXIMADA

A Otimização Sequencial Aproximada (*Sequential Approximate Optimization – SAO*) é uma técnica de otimização proposta por Schmit e Farshi (1974). Inicialmente a técnica utilizava métodos de programação matemática para realizar a otimização dentro de uma região de confiança (*trust region*), que trilhava o caminho dentro do espaço de projeto através da atualização destas regiões até chegar-se no ótimo procurado.

Com o passar dos anos, a técnica de otimização inicial foi substituída pela otimização sem informações do gradiente através do uso de modelos aproximados. Depois o Método da Superfície de Resposta (*Response Surface Methodology – RSM*) foi utilizado com o emprego de um modelo substituto, também sem informações do gradiente.

A Otimização Sequencial Aproximada pode ser aplicada na solução de problemas onde o modelo de simulação é utilizado como uma caixa preta (*black-box*). Esses problemas têm essa característica porque avaliam a amostra (o projeto) através de Métodos Numéricos tais como o Método dos Elementos Finitos ou Análise Isogeométrica, e retornam resultados da análise estrutural sem que se possa estabelecer uma formulação explícita do problema. Neste caso não são necessárias informações do gradiente.

Neste trabalho, a Otimização Sequencial Aproximada é realizada por modelos substitutos com critérios de preenchimento que tendem a melhorar o modelo de forma local e global numa sequência de otimizações em busca do ótimo global. Ao contrário da região de confiança, a inserção de novos pontos é feita em todo o espaço das variáveis de projeto, de forma a evitar que a convergência para ótimos locais.

### 6.1 Desenvolvimento da Otimização Sequencial Aproximada

A solução de problemas de estruturas de material compósito laminado requer o uso de otimização devido ao grande número de variáveis de projeto envolvidas. Neste trabalho os números mínimo e máximo de variáveis de projeto foram 2 e 12. Por sua vez, a otimização precisa de um programa de análise estrutural para avaliar os projetos e fornecer informações para calcular a função objetivo e as restrições. Essa tarefa apresenta duas dificuldades: o processo de interface de um programa de análise estrutural com o programa de otimização e o alto custo computacional requerido (HAFTKA; GÜRDAL, 1991).

A Otimização Sequencial Aproximada sugerida por Schmit e Farshi (1974), para problemas de otimização estrutural com uso de métodos de programação matemática

baseados em informações do gradiente, é uma abordagem que faz a interface de um programa de otimização com um programa de análise estrutural e resolve os dois problemas citados. No trabalho de Schmit e Farshi (1974) o problema do alto custo computacional foi tratado através do emprego de conceitos de aproximação (*Approximations Concepts*).

No trabalho de Schmit e Farshi (1974) houve uma redução do número de variáveis de projeto e do número de restrições, ficando apenas aquelas que eram críticas para o problema. O número de análises estrutural foi reduzido utilizando-se o método dos centros ou das hiperesferas inscritas, que é uma técnica de programação sequencial linear (*Sequential Linear Programming – SLP*). Ela substituiu a função objetivo e as restrições por aproximações lineares obtidas de séries de Taylor.

Outra consideração importante na programação sequencial linear é que ela utiliza o conceito de limites móveis (*move limits*) ou região de confiança (*trust region*) (Rodriguez *et al.*, 1998). Uma série de subproblemas de otimização aproximada são construídos iterativamente e resolvidos em cada nova região de confiança, traçando um caminho até o ótimo procurado.

A programação sequencial linear pode ser generalizada utilizando-se aproximações não lineares para algumas das restrições e funções objetivo (HAFTKA; GÜRDAL, 1991). O resultado é a programação sequencial quadrática, um método poderoso para programação não linear em larga escala que também usa região de confiança.

Etman, Groenwold e Rooda (2006) utilizaram o método de programação não linear para substituir a função penalidade como um critério de aceitação ou rejeição da solução de um subproblema na região de confiança. Essa abordagem foi utilizada em programação sequencial quadrática aplicada em três problemas de engenharia: uma treliça com duas barras, uma viga em balanço e uma treliça de dez barras.

Um novo método de otimização sequencial aproximada envolvendo problemas com restrições utilizando um modelo aproximado para encontrar o ponto ótimo dentro da região de confiança foi desenvolvido por Brekelmans *et al.* (2005). Esse método foi diferente das abordagens anteriores porque não necessitou o uso de informações do gradiente. Trata-se de um algoritmo de otimização iterativo implementado dentro do algoritmo sequencial SEQUEM, que é uma variante do método da região de confiança.

Outro tipo de otimização sequencial aproximada, que vem ganhando grande atenção atualmente devido ao uso crescente de métodos numéricos tais como o Método dos Elementos Finitos e a Análise Isogeométrica, é a baseada no método da superfície de resposta.

Neste tipo de otimização utilizam-se modelos substitutos para representar a função objetivo e as restrições durante a otimização. A análise estrutural é usada no início, através de métodos numéricos, para avaliar os projetos da amostra de treinamento que serão usadas na construção dos modelos substitutos e também durante a inserção de novos pontos na amostra de treinamento utilizando critérios de preenchimento (*infill criteria*). Muitos estudos têm despertado atenção a essa técnica nas últimas décadas.

Um estudo realizado por Lee, Oh e Choi (2008) afirma que o SVR é o melhor modelo substituto para ser utilizado na Otimização Sequencial Aproximada (*Sequential Approximate Optimization – SAO*) quando comparado com RBF, Kriging e PR. Em três problemas matemáticos e dois problemas de projeto de engenharia, o SVR apresentou precisão e eficiência superior, além do menor número de chamadas da função de avaliação.

Diversos estudos realizados mostraram que a Otimização Sequencial Aproximada utilizando o modelo RBF é uma solução que atende aos requisitos de projeto para problemas de otimização que necessitam de simulação numérica e possuem alto custo computacional (KITAYAMA e NATSUME, 2014; KITAYAMA; ARAKAWA; YAMAZAKI, 2011; KITAYAMA; ARAKAWA; YAMAZAKI, 2012; KITAYAMA; HUANG; YAMAZAKI, 2013; KITAYAMA; ONUKI; YAMAZAKI, 2014; KITAYAMA *et al.*, 2015).

Dong *et al.* (2018) apresentaram um algoritmo de otimização global baseado em modelos substitutos (Kriging e Superfície de Resposta Quadrática) para resolver problemas de otimização multimodal com restrições e alto custo computacional. Eles utilizaram os algoritmos de otimização *Grey Wolf Optimization (GWO)* e o *mult-start optimization algorithm*. A ideia utilizada por eles é fazer com que o algoritmo salte de um ótimo local e encontre regiões não exploradas na busca pelo ótimo global.

Chung, Park e Choi (2018) desenvolveram um algoritmo para Otimização Sequencial Aproximada com duas fases, exploração local e global. A técnica de preenchimento de inserção de pontos próximo e longe do ótimo utilizada por eles impactou na eficiência e robustez do algoritmo. Eles testaram 9 funções matemáticas sem restrição e 5 problemas com restrição. Fizeram ainda uma aplicação de engenharia de projeto de uma peça de máquina de lavar roupa para demonstrar a validade do algoritmo para problemas voltados para indústria. Os resultados mostraram uma redução do número de avaliações da função para encontrar o ótimo.

A literatura mostra um crescimento significativo de estudos na área de Otimização Sequencial Aproximada. Tanto devido a capacidade de modelos substitutos representarem satisfatoriamente os problemas de caixa preta (*black-box*), onde a relação entre as amostras de

dados e os valores observados não são conhecidos analiticamente, como pela redução do tempo de otimização dos problemas e precisão obtida nos projetos ótimos.

Neste trabalho, a Otimização Sequencial Aproximada foi realizada utilizando-se o programa de otimização *Biologically Inspired Optimization System* (BIOS) e o programa de simulação numérica *Finite element Analysis Tool* (FAST). Ambos os programas são desenvolvidos em linguagem de programação C++ adotando o paradigma de Programação Orientada a Objetos. A interface entre eles foi realizada através de leitura de arquivos de texto utilizando-se a função *system* para executar o FAST de dentro do BIOS.

As análises estruturais aproximadas são realizadas através de modelos substitutos. Inicialmente utilizou-se o modelo RBF na solução dos problemas de otimização desta dissertação. Depois o modelo SVR do LIBSVM desenvolvido por Chang e Lin (2011) em C++ foi utilizado nos mesmos problemas, mas em uma forma de otimização estática, sem inserção de novos pontos na amostra e atualização do modelo substituto. Uma comparação dos resultados obtidos quanto à precisão e robustez dos modelos foi realizada, bem como a redução de tempo em relação as otimizações rodadas com os modelos de alta fidelidade através da redução do número de avaliações das funções.

## 6.2 Otimização Sequencial Aproximada usando RBF

A Otimização Sequencial Aproximada utilizando o RBF como modelo substituto para aproximar as análises numéricas (Método dos Elementos Finitos e Análise Isogeométrica) adotadas neste trabalho se baseia no estudo e desenvolvimento realizado por Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011) com modificações já citadas no capítulo de critérios de preenchimento.

Os resultados obtidos pelos autores (KITAYAMA; ARAKAWA; YAMAZAKI, 2011) mostraram que essa técnica é bastante promissora. Dentre os fatores pode-se dizer que ela foi superior no que se refere as comparações feitas com outros algoritmos de Otimização Sequencial Aproximada. Outro fator importante é a técnica de ajuste do *width* da função Gaussiana para levar em consideração a não uniformidade da amostra de treinamento.

A reunião de todas essas características se adequam aos problemas de estruturas laminadas de material compósito, uma vez que o projeto através da tentativa e erro não é uma opção viável, sendo assim necessária a otimização. A Otimização Sequencial Aproximada é uma alternativa que reduz o tempo de otimização porque requer uma quantidade pequena de amostras iniciais (simulações numéricas) e acrescenta novos pontos (novas simulações



numéricas) de forma criteriosa de maneira melhorar a precisão do modelo substituto na busca pelo ótimo global.

Outro aspecto relevante é que na literatura existem poucos trabalhos de laminados que utilizam a Otimização Sequencial Aproximada e nenhum deles usa o algoritmo proposto por Kitayama, Arakawa e Yamazaki (2011). O único trabalho encontrado utilizou Algoritmos Genéticos e a inserção do melhor indivíduo na amostra inicial para atualização do modelo RBF (ZEIN; MADHAVAN; DUMAS, 2017). O fluxograma a seguir ilustra as etapas implementadas em C++, dentro do BIOS, da metodologia proposta neste trabalho. O executável do FAST foi colocado dentro da pasta do BIOS para quando invocado pela função *system* realizar a simulação numérica das amostras.

O algoritmo inicia com a geração de uma amostra contendo  $m$  projetos através de uma técnica de amostragem. Aqui foram usadas a Sequência de Hammersley (Burkardt, 2016) e o Hipercubo Latino Otimizado (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008). As amostras são analisadas pelo FAST resultando no vetor dos valores observados (*targets*).

Em seguida, o cálculo do vetor dos *widths* é realizado utilizando a técnica da escala adaptativa até que o valor mínimo desse vetor seja maior do que 1. Utilizando-se o vetor de *widths* e a amostra de treinamento, a matriz  $\mathbf{H}$  das funções de base radial é calculada. A matriz lambda  $\lambda$  é assumida como uma matriz diagonal cujos valores são iguais a  $10^{-3}$  (KITAYAMA; ARAKAWA; YAMAZAKI, 2011). O próximo passo é então calcular os pesos das superfícies de resposta tanto para função objetivo quanto para as restrições. Isso finaliza a construção das superfícies de resposta utilizando-se o RBF.

Para concluir a primeira fase, realiza-se a otimização utilizando um algoritmo de otimização (AG ou PSO). A análise estrutural é aproximada com os modelos substitutos. Obtém-se a solução através da minimização da função objetivo penalizada de forma a incluir o valor das restrições. Em seguida, os indivíduos são ordenados do melhor até o pior. Então o melhor indivíduo não repetido é adicionado a amostra de treinamento. Entende-se por repetido, o indivíduo que já está na amostra de treinamento.

A segunda fase é executada até que um contador (*cont*) seja menor do que o valor arredondado de  $n/2$ , sendo  $n$  o número de variáveis de projeto do problema. Como a amostra mudou de tamanho pela inserção do ótimo local, o vetor de *widths* deverá ser calculado novamente.

Com o vetor de *widths* e a amostra de treinamento calcula-se a matriz  $\mathbf{H}$  através das funções de base radial. Fazendo-se com que todos os valores observados sejam iguais a 1 e assumindo a matriz  $\lambda$  uma matriz diagonal com todos os valores iguais a  $10^{-3}$

(KITAYAMA; ARAKAWA; YAMAZAKI, 2011), calcula-se os pesos da função densidade. Temos assim a construção da função densidade.

Após, utiliza-se a Otimização por Nuvem de Partículas (PSO), em sua forma convencional para variáveis contínuas, para minimizar a função densidade. Este mínimo global da função densidade é inserido na amostra de treinamento. O processo é repetido até que o critério de parada seja satisfeito. É importante notar que a função densidade precisa ser redefinida após a inserção de cada novo ponto.

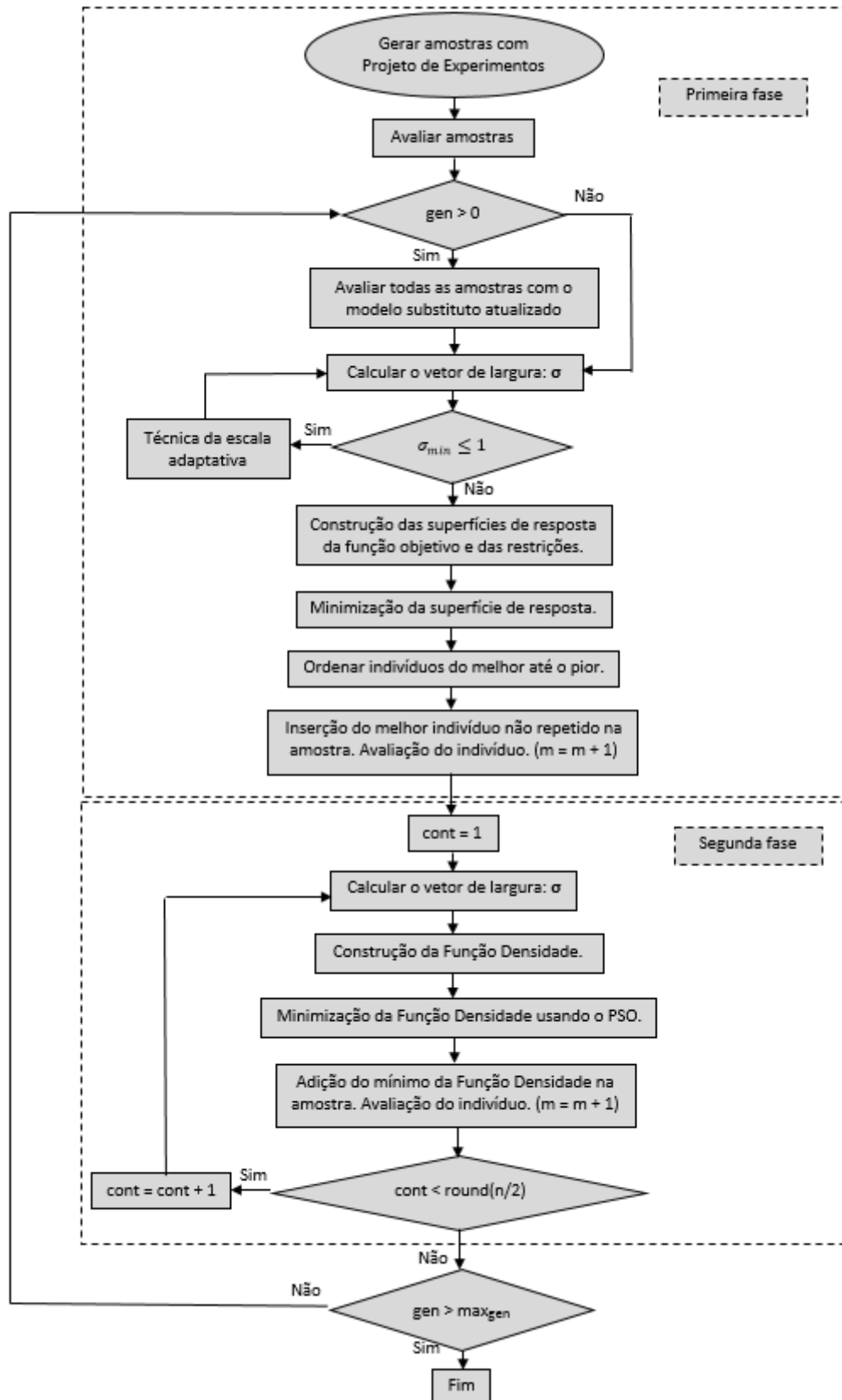
Finalizadas as duas etapas - (i) inserção do indivíduo ótimo da superfície de resposta não repetido (modelo substituto); e (ii) inserção de novos pontos da região esparsa da amostra de treinamento – realiza-se o treinamento dos modelos substitutos da função objetivo e restrições com a amostra atualizada após a inserção dos novos pontos (amostras) e valores observados (*targets*).

Então repete-se o processo a cada nova geração ou iteração. No início de cada nova geração ou iteração o valor da função objetivo e das restrições dos indivíduos é atualizado com os modelos substitutos atualizados.

Para finalizar a otimização, o critério adotado utilizado é o número máximo de gerações/iterações. Este número multiplicado pelo número de pontos inseridos a cada geração ou iteração somado ao tamanho inicial da amostra resulta no tamanho final da amostra utilizada.

A amostra final é resultado das inserções de pontos ao longo de todas as gerações durante a otimização. Os modelos da função objetivo e das restrições gerados com a amostra final são as últimas configurações obtidas na otimização.

Figura 35. Fluxograma do SAO-RBF.



Fonte: elaborada pelo autor.

## 7 EXEMPLOS

Neste capítulo serão utilizados quatro estruturas laminadas, três placas e uma casca, para avaliação da otimização baseada no uso de modelos substitutos. Inicialmente, o modelo substituto  $\nu$ -SVR e o modelo RBF serão utilizados na forma estática durante a otimização. Posteriormente, será avaliada a metodologia de Otimização Sequencial Aproximada (*Sequential Approximate Optimization* – SAO) utilizando o modelo substituto RBF. Considerou-se que o ótimo foi encontrado quando as soluções obtidas com o modelo substituto possuíam erros de até 1% em relação a solução ótima obtida com o modelo de alta fidelidade.

Dois dos quatro problemas possuem solução analítica. Eles são utilizados para verificar inicialmente a precisão da técnica de otimização sequencial aproximada usando o RBF e a otimização usando os modelos substitutos SVR e RBF de forma estática (OE).

Os dois últimos problemas são aplicações que não possuem solução analítica e requerem o uso de um programa de simulação numérica para avaliar as amostras de treinamento dos modelos substitutos. Nesses problemas, além de verificar a precisão das técnicas, são verificadas as reduções do número de avaliações das funções e o funcionamento da interface entre o programa de otimização (BIOS) e o de simulação numérica (FAST).

Os exemplos numéricos foram implementados no sistema operacional Linux 64-bits, Ubuntu 16.04 LTS, processador Intel® Xeon(R) CPU E5-2680 v2 @ 2.80GHz x 40. Em todos os exemplos numéricos a minimização da Função Densidade foi realizada com o PSO ilustrado na Figura 13.

A Tabela 4 apresenta os parâmetros que mantiveram seus valores constantes em todos os exemplos.

Tabela 4. Parâmetros de otimização comuns a todos os exemplos.

<b>Tipo</b>	<b>Valor</b>
<b>Penalidade</b>	<i>Estática</i>
<b>Fator de penalidade</b>	1,0e5
<b>Seleção</b>	<i>Ranking</i>
<b>Taxa de cruzamento</b>	0,80
<b>Probabilidade de mutação</b>	0,05
<b>Topologia</b>	<i>Quadrada</i>

Fonte: elaborada pelo autor.

## 7.1 Maximização da Carga de Flambagem de uma Placa Quadrada

O primeiro exemplo consiste em uma placa laminada quadrada, com 8 lâminas, simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento biaxial (Figura 25). A Tabela 5 apresenta as dimensões da placa e as propriedades do material.

Tabela 5. Exemplo 1 – Geometria e propriedades do material.

Geometria (m)			Material: Carbono-Epóxi			
$a$	$b$	espessura	$E_1(GPa)$	$E_2(GPa)$	$G_{12}(GPa)$	$\nu_{12}$
0,508	0,508	1,272e-4	130,71	6,36	4,18	0,32

Fonte: elaborada pelo autor.

As variáveis de projeto são as orientações das fibras de cada lâmina. Como a laminação é simétrica e balanceada, existem somente duas variáveis de projeto ( $\theta_1, \theta_2$ ). Estas orientações são discretas variando entre 0 e 90 graus com incrementos de 5 graus. O objetivo é encontrar as orientações das lâminas que maximizam a carga de flambagem ( $\lambda_b$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{Encontrar} & \mathbf{x} = [\theta_1, \theta_2] \text{ que} \\ \text{maximize} & \lambda_b \\ \text{com} & \theta_1, \theta_2 \in \{0, 5, 10, 15, \dots, 90\} \end{array} \quad (88)$$

Reddy (2004) apresenta uma solução analítica para carga de flambagem baseada na Teoria Clássica da Laminação:

$$\lambda_b = \frac{D_{11} \left(\frac{p}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{p}{a}\right)^2 \left(\frac{q}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{q}{b}\right)^4}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 N_x + \left(\frac{q}{b}\right)^2 N_y} \quad (89)$$

onde  $p$  e  $q$  são os números de meias ondas utilizadas para descrever os deslocamentos da placa. Os valores de  $p$  e  $q$  foram definidos dentro de dois *loops* variando de 1 a 20, resultando em 400 valores de  $\lambda_b$ . O menor valor de  $\lambda_b$  foi então selecionado como sendo a carga de flambagem.

Esta expressão é exata para laminados *cross-ply* e dá resultados precisos para laminados *angly-ply* com várias lâminas. Assim, ela foi adotada como resposta estrutural de alta fidelidade (*High Fidelity Model* – HFM) para construção do modelo substituto.

Tabela 6. Exemplo 1 - Parâmetros.

Parâmetro	AG	PSO
População	100	100
Gerações	5	5
Probabilidade de troca	0,01	0,01
Inércia da partícula	-	0,7
Fator cognitivo	-	1,5
Fator social	-	1,5

Fonte: elaborada pelo autor.

Uma amostra inicial com 9 pontos foi gerada usando a Sequência de Hammersley. Esta amostra foi utilizada para construção de modelos substitutos RBF e SVR. A otimização usando o modelo de alta fidelidade (HFM) e os modelos substitutos fixos (OE) foi realizada utilizando o AG e o PSO, com os parâmetros apresentados na Tabela 6. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 7. É importante notar que neste exemplo o AG e o PSO levaram a resultados idênticos em todos os casos.

Tabela 7. Exemplo 1 - Resultados da otimização.

Método	Laminação	$\lambda_b$	Erro (%)
HFM	$[\pm 45 \pm 45]_s$	462,63	-
RBF	$[\pm 55 \pm 60]_s$	436,39	5,67
SVR	$[\pm 45 \pm 65]_s$	452,48	2,19
SAO-RBF	$[\pm 45 \pm 45]_s$	462,63	0

Fonte: elaborada pelo autor.

Verifica-se que o RBF não encontrou a laminação ótima e o erro obtido foi de 5,67%. No caso do SVR, a laminação ótima também não foi encontrada, mas o erro obtido foi de apenas 2,19%.

A otimização sequencial aproximada foi realizada usando 5 gerações/iterações e um enxame composto por 100 indivíduos/partículas. A amostra final tem 19 pontos devido a adição de dois pontos a cada iteração. Os resultados apresentados na Tabela 7 mostram que a laminação ótima obtida pelo SAO-RBF foi idêntica com a obtida com o uso do HFM. Contudo, enquanto que a SAO-RBF requer 19 análises estruturais (avaliações da função) o uso direto do HFM requer 500 análises estruturais.

## 7.2 Maximização da Resistência de uma Placa Retangular

Esse exemplo trata da maximização da resistência de uma placa laminada retangular simplesmente apoiada sob compressão biaxial (Figura 25). Serão considerados três carregamentos diferentes ( $k = 0,125$ ;  $k = 0,250$  e  $k = 0,500$ ), onde  $k$  é a razão entre as cargas de compressão nas direções  $y$  e  $x$  ( $k = N_y/N_x$ ). A placa possui as seguintes dimensões:  $a = 0,508$  m e  $b = 0,127$  m. As propriedades do material utilizado são apresentadas na Tabela 8. A espessura de cada lâmina é 0,127 mm.

Tabela 8. Exemplo 2 - Propriedades do material Grafite-Epóxi.

Módulos de elasticidade (GPa)			Poisson	Deformação última		
$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\varepsilon_1^u$	$\varepsilon_2^u$	$\gamma_{12}^u$
138	9,0	7,1	0,3	0,008	0,029	0,015

Fonte: elaborada pelo autor.

O objetivo é maximizar a carga de falha considerando os fatores de carga de flambagem e de falha do material, pelo Critério da Máxima Deformação. Este problema foi estudado por diversos pesquisadores (KOGISO *et al.* 1994; AYMERICH e SERRA, 2008; KOIDE *et al.*, 2013; BARROSO, 2015). Desta forma, ele serve como um *benchmark* para validação da estratégia de Otimização Sequencial Aproximada (SAO).

A falha do material ocorre quando ele atinge a fronteira da envoltória de resistência. Para laminados de parede fina sujeitos à cargas compressivas, essa envoltória pode ser obtida através dos limites de deformação  $\varepsilon_1^u$ ,  $\varepsilon_2^u$  e  $\gamma_{12}^u$ . Neste problema, um fator de segurança  $S_f = 1,5$  é usado para definir uma região segura em que o material não irá falhar. O fator de carga de resistência é calculado através da expressão:

$$\lambda_s = \min_k \left( \min \left( \frac{\varepsilon_1^u}{S_f |\varepsilon_1^k|}, \frac{\varepsilon_2^u}{S_f |\varepsilon_2^k|}, \frac{\gamma_{12}^u}{S_f |\gamma_{12}^k|} \right) \right) \quad (90)$$

O fator de carga de flambagem de uma placa simplesmente apoiada pode ser obtido pela Equação (89). É importante ressaltar que esta equação é exata apenas para laminados *cross-ply*. No entanto, em testes realizados, comprovou-se que para um número de lâminas acima de 20, os erros obtidos em laminados *angle-ply* são desprezíveis. Neste exemplo, a placa possui 48 lâminas, o que torna viável a utilização desta solução. A Tabela 9 ilustra os valores dos parâmetros utilizados neste problema.

Esse problema de otimização pode ser escrito em forma matemática como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Encontrar} & \mathbf{x} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{12}] \text{ que} \\
 \text{maximize} & \lambda = \min(\lambda_s, \lambda_b) \\
 \text{com} & \theta_i \in \{0, 45, 90\} \quad i = 1, 2, \dots, 12.
 \end{array} \tag{91}$$

Tabela 9. Exemplo 2 - Parâmetros.

Parâmetro	AG	PSO
$N_{opt}$	10	10
População	100	100
Gerações	30, 40, 50 e 100	30, 40, 50 e 100
Probabilidade de troca	0,03	0,03
Inércia da partícula	-	Linear 0,9 0,4
Fator cognitivo	-	Linear 2,5 0,0
Fator social	-	Linear 0,0 2,5

Fonte: elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos neste trabalho serão comparados com os obtidos por Kogiso *et al.* (1994) utilizando um AG. Estes resultados são apresentados na Tabela 10.

Tabela 10. Exemplo 2 - Resultados Kogiso *et al.* (1994).

$N_y/N_x$	Layup	$\lambda_s$	$\lambda_b$	$\lambda_s(\text{BIOS})$	$\lambda_b(\text{BIOS})$
0.125	$[\pm 45_5 0_4 \pm 45 0_4 90_2 0_2]_s$	13518,7	14659,6	13531,5	14673,6
0.250	$[\pm 45_2 90_2 \pm 45_3 0_2 \pm 45 0_4 \pm 45 0_2]_s$	12678,7	12743,4	12690,7	12755,6
0.500	$[90_2 \pm 45_2 (90_2 \pm 45)_2 \pm 45_5]_s$	10398,1	9998,1	10405,4	10007,8

Fonte: elaborada pelo autor.

A Tabela 11 apresenta o melhor resultado obtido de 10 otimizações usando os modelos de alta fidelidade (HFM) com o AG para  $k = 0,125$ , sendo a Taxa de Sucesso (TS) definindo pelo número de otimizações que obtiveram o ótimo dividido pelo número total de otimizações ( $N_{opt}$ ).

Tabela 11. Exemplo 2 - Resultados HFM, (BIOS), AG.

Gen	Layup	$\lambda_s$	$\lambda_b$	TS (%)
30	$[\pm 45_4 0_4 \pm 45 0_2 90_2 0_2 \pm 45 0_2]_s$	13531,5	14106,3	100
40	$[\pm 45_4 0_4 \pm 45 0_2 90_2 0_4 \pm 45]_s$	13531,5	14074,6	100
50	$[\pm 45_3 90_2 (0_2 \pm 45)_2 0_4 \pm 45 0_2]_s$	13531,5	14261,4	100
100	$[\pm 45_4 0_4 90_2 0_4 \pm 45 0_2 \pm 45]_s$	13531,5	13930,4	100

Fonte: elaborada pelo autor.

A Tabela 12 apresenta o melhor resultado obtido de 10 otimizações usando os modelos de alta fidelidade (HFM) com o PSO para  $k = 0,125$ .



Tabela 12. Exemplo 2 - Resultados HFM, (BIOS), PSO.

Iter	Layup	$\lambda_s$	$\lambda_b$	TS (%)
30	$[\pm 45_4 0_4 \pm 45 0_2 90_2 0_4 \pm 45]_s$	13531,5	14074,6	100
40	$[\pm 45_4 0_4 \pm 45 0_2 90_2 0_4 \pm 45]_s$	13531,5	14074,6	100
50	$[\pm 45_4 0_4 \pm 45 0_4 \pm 45 0_2 90_2]_s$	13531,5	14011,8	100
100	$[\pm 45_4 0_4 90_2 0_4 \pm 45 0_2 \pm 45]_s$	13531,5	13930,4	100

Fonte: elaborada pelo autor.

A Tabela 13 apresenta os resultados obtidos utilizando os modelos substitutos estáticos (OE) RBF e SVR. A amostra dos modelos estáticos possui 137 pontos obtidos pela Equação (74).

Tabela 13. Exemplo 2 - Resultados PSO e AG.

$N_y/N_x$	Layup	$\lambda_s^{RBF}$	$\lambda_b^{RBF}$	$\lambda^{RBF}$
0.125	$[\pm 45_6 0_4 \pm 45 0_4 \pm 45]_s$	<b>11686,9</b>	15193,6	11686,9
0.250	$[\pm 45_6 0_2 \pm 45_3 0_2 \pm 45]_s$	<b>8933,0</b>	11405,1	8933,0
0.500	$[90_4 \pm 45_8 0_4 \pm 45]_s$	<b>8371,2</b>	9963,6	8371,2
$N_y/N_x$	Layup	$\lambda_s^{SVR}$	$\lambda_b^{SVR}$	$\lambda^{SVR}$
0.125	$[\pm 45_6 0_4 \pm 45 0_4 \pm 45]_s$	<b>11686,9</b>	15193,6	11686,9
0.250	$[90_2 \pm 45_5 0_2 \pm 45_2 0_4 \pm 45]_s$	<b>10926,6</b>	12825,9	10926,6
0.500	$[90_2 \pm 45 90_2 \pm 45_3 (0_2 \pm 45)_2]_s$	<b>9232,7</b>	9294,6	9232,7

Fonte: elaborada pelo autor.

Os erros percentuais (%) da otimização estática usando o RBF e o SVR são apresentados na Tabela 14. Os resultados mostram que os resultados usando SVR foram melhores que os resultados usando RBF, mas que as soluções ótimas não foram obtidas utilizando a otimização estática (OE).

Tabela 14. Exemplo 2 - Erros percentuais (%) para RBF e SVR.

$N_y/N_x$	$\lambda^{RBF}$	$\lambda^{SVR}$
0.125	13,63	13,63
0.250	29,60	13,90
0.500	16,35	7,74

Fonte: elaborada pelo autor.

A próxima etapa é utilizar a otimização sequencial aproximada. Os resultados apresentados na Tabela 15 até a Tabela 20 mostram as medidas estatísticas dos resultados obtidos. Os resultados completos são apresentados no Anexo A.

Tabela 15. Exemplo 2 com  $k = 0,125$  - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 1).

Medidas	30 ger	40 ger	50 ger	100 ger
Mínimo	13458,3	13458,3	11871,1	13380,7
Máximo	13531,5	13531,5	13531,5	13531,5
Diferença/Máximo	0,54%	0,54%	12,27%	1,11%
Média	13494,9	13524,2	13364,8	13516,4
Desvio Padrão	0,29%	0,17%	3,93%	0,35%
Taxa de Sucesso	100,00%	100,00%	90,00%	100,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 16. Exemplo 2 com  $k = 0,125$  - Medidas estatísticas do PSO-SAO(1 + 1).

Medidas	30 ger	40 ger	50 ger	100 ger
Mínimo	11686,9	9898,7	11686,9	11686,9
Máximo	13531,5	13531,5	13531,5	13531,5
Diferença/Máximo	13,63%	26,85%	13,63%	13,63%
Média	12775,5	12224,0	12771,7	12817,0
Desvio Padrão	7,04%	9,88%	7,31%	6,68%
Taxa de Sucesso	60,00%	40,00%	60,00%	60,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 17. Exemplo 2 com  $k = 0,125$  - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 3).

Medidas	30 ger	40 ger	50 ger	100 ger
Mínimo	13458,3	13458,3	13458,3	13458,3
Máximo	13531,5	13531,5	13531,5	13531,5
Diferença/Máximo	0,54%	0,54%	0,54%	0,54%
Média	13524,2	13516,9	13524,2	13524,2
Desvio Padrão	0,17%	0,23%	0,17%	0,17%
Taxa de Sucesso	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 18. Exemplo 2 com  $k = 0,125$  - Medidas estatísticas do PSO-SAO(1 + 3).

Medidas	30 ger	40 ger	50 ger	100 ger
Mínimo	11686,9	11686,9	11686,9	11871,1
Máximo	13531,5	13531,5	13531,5	13531,5
Diferença/Máximo	13,63%	13,63%	13,63%	12,27%
Média	12775,5	12971,9	12978,4	12694,0
Desvio Padrão	7,04%	6,31%	6,23%	6,84%
Taxa de Sucesso	60,00%	70,00%	70,00%	50,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

A melhor resultado obtido foi com 40 gerações utilizando o AG e adição de dois pontos (1 + 1), com um ponto correspondendo ao melhor indivíduo não repetido e ou outro ao mínimo a função densidade. Este resultado foi selecionada como o mais vantajoso porque apresentou o menor número de avaliação de função (217 avaliações) e o desvio padrão de

0,17%, com todas as 10 otimizações obtendo a solução (Figura 36). Outros resultados também atingiram 100% de taxa de sucesso, porém com maior número de avaliação de função.

Tabela 19. Exemplo 2 com  $k = 0,125$  - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 6).

Medidas	30 ger	40 ger	50 ger	100 ger
Mínimo	13531,5	13380,7	13531,5	13458,3
Máximo	13531,5	13531,5	13531,5	13531,5
Diferença/Máximo	0,00%	1,11%	0,00%	0,54%
Média	13531,5	13516,4	13531,5	13516,9
Desvio Padrão	0,00%	0,35%	0,00%	0,23%
Taxa de Sucesso	100,00%	90,00%	100,00%	100,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 20. Exemplo 2 com  $k = 0,125$  - Medidas estatísticas PSO-SAO(1 + 6).

Medidas	30 ger	40 ger	50 ger	100 ger
Mínimo	9898,7	11686,9	11686,9	11686,9
Máximo	13531,5	13531,5	13531,5	13531,5
Diferença/Máximo	26,85%	13,63%	13,63%	13,63%
Média	12286,5	13151,7	12941,5	13159,0
Desvio Padrão	9,70%	5,52%	6,69%	5,54%
Taxa de Sucesso	40,00%	80,00%	70,00%	80,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

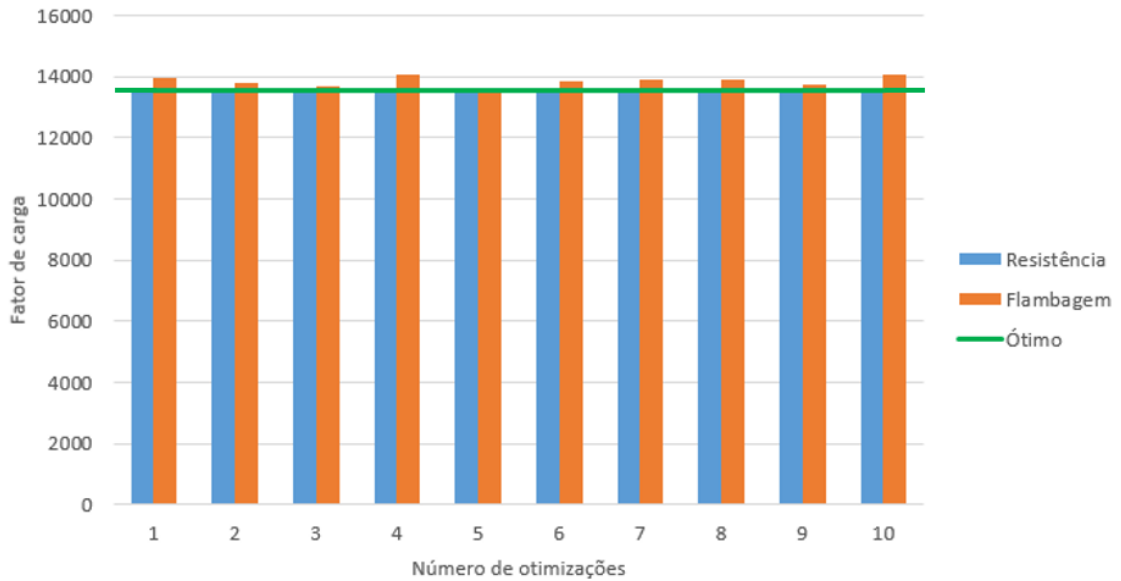
A fim de analisar o problema o caso de carregamento  $k = 0,250$  a otimização sequencial aproximada foi utilizada. Os resultados apresentados na Tabela 21 mostram as medidas estatísticas dos resultados obtidos. Os resultados completos são apresentados no Anexo B. Percebe-se através da Figura 37 que a solução ótima foi obtida com 100 gerações usando o AG e inserção de dois pontos por geração, o ótimo mais um ponto obtido através da minimização da função densidade.

Tabela 21. Exemplo 2 com  $k = 0,250$  - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 1).

Medidas	30 ger	40 ger	50 ger	100 ger
Mínimo	10119,8	11950,7	12174,8	12401,5
Máximo	12604,2	12603,0	12687,0	12690,7
Diferença/Máximo	19,71%	5,18%	4,04%	2,28%
Média	12220,9	12466,8	12491,3	12582,0
Desvio Padrão	6,41%	1,61%	1,53%	0,72%
Taxa de Sucesso	50,00%	30,00%	40,00%	80,00%

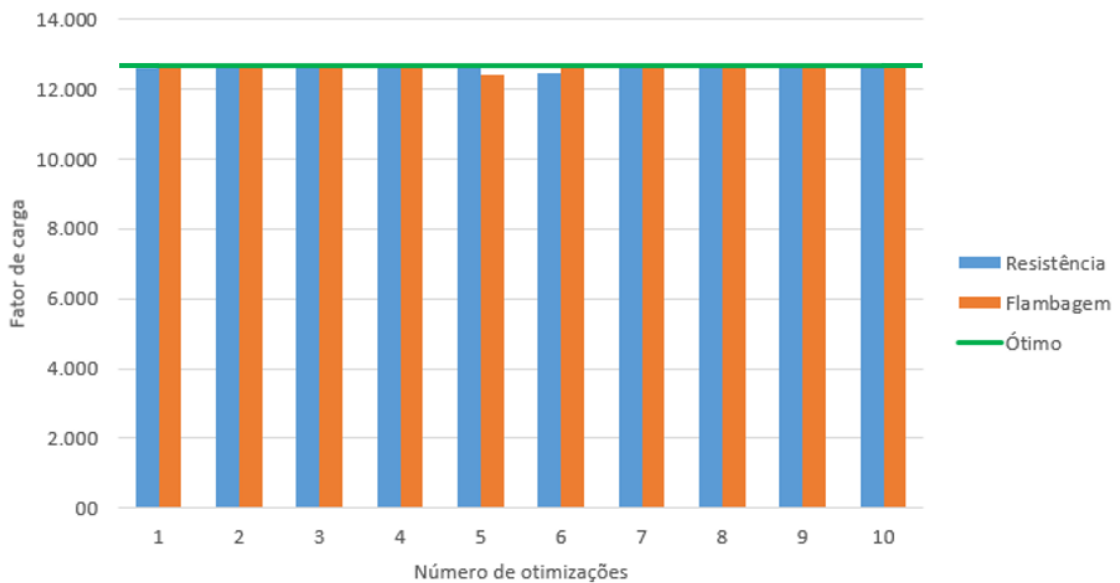
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 36. Exemplo 2 com  $k = 0,125$  – AG-SAO(1+1) com 40 gerações.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 37. Exemplo 2 com  $k = 0,250$  – AG-SAO(1+1) com 100 gerações.



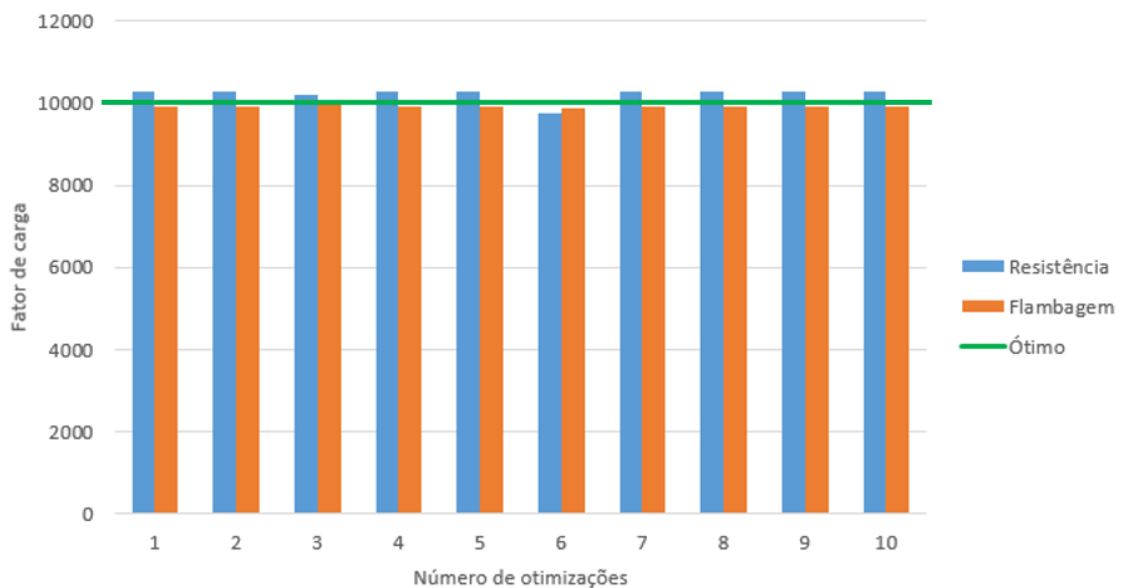
Fonte : elaborada pelo autor.

A fim de analisar o problema o caso de carregamento  $k = 0,500$  a otimização sequencial aproximada foi utilizada novamente. Os resultados apresentados na Tabela 22 mostram as medidas estatísticas dos resultados obtidos. Os resultados completos são apresentados no Anexo C. A Tabela 22 mostra que a solução ótima foi obtida e a maior taxa de sucesso foi igual a 90%. A Figura 38 mostra que a solução ótima foi obtida em 9 de 10 tentativas com 40 gerações usando o AG e inserindo dois pontos por geração, o indivíduo ótimo e mais um ponto obtido pela minimização da função densidade.

Tabela 22. Exemplo 2 com  $k = 0,500$  - Medidas estatísticas do AG-SAO(1 + 1).

Medidas	30 ger	40 ger	50 ger	100 ger
Mínimo	9748,5	9748,5	9745,7	9778,6
Máximo	9919,9	9947,5	9919,9	9991,5
Diferença/Máximo	1,73%	2,00%	1,76%	2,13%
Média	9843,4	9905,5	9888,4	9910,9
Desvio Padrão	0,79%	0,56%	0,57%	0,53%
Taxa de Sucesso	40,00%	90,00%	60,00%	80,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 38. Exemplo 2 com  $k = 0,500$  – AG-SAO(1+1) com 40 gerações.

Fonte : elaborada pelo autor.

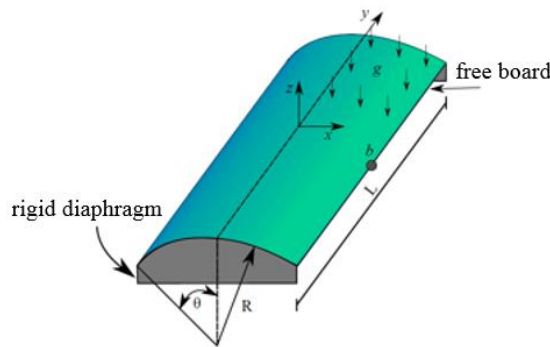
De maneira geral, a estratégia SAO-RBF gerou excelentes resultados como pode-se observar o estudo realizado para condição de carregamento  $k = 0,125$  porque a solução ótima de resistência  $\lambda = 13531,5$  N foi obtida em todas as combinações de inserção de pontos (1 + 1), (1 + 3) e (1 + 6) com todas as quantidades máximas de gerações/iterações utilizadas (30, 40, 50 e 100). Excelentes resultados também foram obtidos para os casos de carregamento  $k = 0,250$  e  $k = 0,500$  conforme pôde-se observar.

A comparação com a otimização estática, usando o RBF e o SVR, mostrou que nesse problema, com 12 variáveis de projeto, houve necessidade de inserção de novos pontos na amostra de treinamento para melhorar a precisão do modelo substituto.

### 7.3 Maximização da Rigidez de uma Casca Cilíndrica

Este exemplo consiste na maximização da rigidez de uma casca cilíndrica laminada (Figura 39) com 40 lâminas (BARROSO, 2015). A Tabela 23 apresenta as propriedades da casca laminada. Como não existe solução analítica para avaliar os deslocamentos dessa estrutura, a Análise Isogeométrica (AIG) com elementos sólidos laminados foi utilizada como modelo de alta fidelidade (HFM) para analisar a estrutura. O critério de Tsai-Wu 3D foi adotado para avaliar o fator de segurança contra a falha do material ( $S_{TW}$ ).

Figura 39. Casca laminada cilíndrica.



Fonte: Barroso (2015).

O problema tem 10 variáveis de projeto, uma vez que uma laminação simétrica e balanceada foi adotada. A rigidez da casca pode ser maximizada pela minimização do deslocamento vertical ( $w$ ) do ponto  $b$ , situado no meio do vão. Em adição, o fator de segurança ( $SF$ ) requerido para falha do material é igual a 1,5. O número de lâminas contíguas ( $N_{cp}$ ) é limitado a 4. O problema de otimização é escrito como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Encontrar} & \mathbf{x} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{10}] \quad \text{que} \\
 \text{minimiza} & w_b \\
 \text{sujeito a} & \frac{N_{cp}}{cp_{max}} - 1 \leq 0 \\
 & 1 - \frac{S_{TW}}{SF} \leq 0 \\
 \text{com} & \theta_i \in \{0, 45, 90\} \quad i = 1, 2, \dots, 10.
 \end{array} \tag{92}$$

A otimização foi realizada usando 49 indivíduos/partículas, 30 gerações/iterações e  $N_{opt} = 10$ . Utilizou-se os algoritmos de otimização AG e PSO para laminados. A amostra inicial possui 99 pontos. Como o problema tem 10 variáveis, pela estratégia de Kitayama et al. (2011) 6 pontos devem ser adicionados a amostra a cada geração/iteração, o indivíduo ótimo e mais cinco pontos obtidos através da minimização da função densidade.

Tabela 23. Exemplo 3 - Geometria da casca e propriedades do material.

$g$ (kN/m <sup>2</sup> )	$R$ (m)	$L$ (m)	$\theta$ (°)	$t$ (cm)	$N_{lam}$	$t_{lam}$ (cm)	$E_1$ (GPa)
45	3,0	6,0	40	3,0	40	0,075	147
$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)
10,3	10,3	0,27	0,27	0,54	7,0	7,0	3,7

Fonte: elaborada pelo autor.

Neste trabalho, optou-se por avaliar a redução de número de pontos inseridos através da minimização da função densidade. Então outra abordagem foi testada: a inserção de apenas dois pontos, o indivíduo ótimo e apenas um ponto obtido pela minimização da função densidade. Usando essa abordagem a amostra final ficou com 159 pontos, 99 da amostra inicial mais 60 pontos inseridos ao final de 30 gerações/iterações. Este é o número de avaliações da função pela Análise Isogeométrica através do FAST. A Tabela 24 mostra os valores dos parâmetros utilizados.

Tabela 24. Exemplo 3 - Parâmetros de otimização do exemplo 3.

Parâmetro	AG	PSO
$N_{opt}$	10	10
População	49	49
Gerações	30	30
Probabilidade de troca	0,12	0,12
Inércia da partícula	-	0,14
Fator cognitivo	-	1,22
Fator social	-	1,28

Fonte: elaborada pelo autor.

A Tabela 25 ilustra os resultados obtidos com o modelo de alta fidelidade utilizando simulação numérica através de Análise Isogeométrica, com 30 gerações/iterações. A Tabela 26 ilustra as medidas estatísticas e a Tabela 27 a laminação ótima obtida.

Inicialmente foi realizada a otimização estática utilizando os modelos RBF e SVR fixos, com  $N_{opt} = 1$ . Os resultados obtidos com seus respectivos erros percentuais são apresentados na Tabela 28. Eles mostram que a solução ótima não foi obtida utilizando a otimização estática.

Tabela 25. Exemplo 3 - Resultados com 30 gerações/iterações.

$N_{opt}$	AG		PSO	
	$w$	$S_{TW}$	$w$	$S_{TW}$
1	11,58	2,12	11,58	2,12
2	11,58	2,12	11,58	2,12
3	11,58	2,12	11,58	2,12
4	11,58	2,12	11,61	2,23
5	11,58	2,12	11,58	2,12
6	11,58	2,12	11,58	2,12
7	11,58	2,12	11,58	2,12
8	11,58	2,12	11,61	2,23
9	11,58	2,12	11,58	2,12
10	11,58	2,12	11,58	2,12

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 26. Exemplo 3 - Resultados das medidas estatísticas com 30 gerações/iterações.

Medidas	AG	PSO
	Valor	Valor
Mínimo	11,58	11,58
Máximo	11,58	11,61
Diferença/Máximo	0,00%	0,26%
Média	11,58	11,59
Desvio Padrão	0,00%	0,11%
Taxa de Sucesso	100,00%	80,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 27. Exemplo 3 - Laminação ótima.

Método	Laminação	$w_b$	$S_{TW}$
HFM	$[(90_4 \pm 45)_2 0_4 \pm 45 0_2]_s$	11,58	2,12

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 28. Exemplo 3 - Resultados da otimização estática.

Método	Laminação	$w_b$	$S_{TW}$	Erro $w_b$	Erro $S_{TW}$
RBF	$[90_4 \pm 45_3 0_4 \pm 45 0_2 \pm 45]_s$	12,09	2,00	-4,4	5,6
SVR	$[90_4 \pm 45_4 0_4 \pm 45 0_2]_s$	11,83	2,03	-2.1	4.2

Fonte: elaborada pelo autor.

A Tabela 29 ilustra os resultados obtidos nas 10 otimizações utilizando a SAO com inserção do indivíduo ótimo e mais um ponto obtido através da minimização da função densidade. A Tabela 30 mostra os resultados dos cálculos das medidas estatísticas em relação aos resultados obtidos na Tabela 29.



Tabela 29. Exemplo 3 - Resultados para SAO(1 + 1) com 30 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 1)		PSO (1 + 1)	
	30 Gen		30 Iter	
	w	S <sub>TW</sub>	w	S <sub>TW</sub>
1	11,58	2,12	11,74	2,08
2	12,11	2,00	11,63	2,09
3	11,58	2,12	11,71	2,08
4	11,58	2,12	11,58	2,12
5	11,63	2,09	12,09	2,00
6	11,66	2,24	11,73	2,10
7	11,73	2,21	11,83	2,03
8	11,74	2,08	11,63	2,09
9	11,61	2,23	11,58	2,12
10	11,82	2,09	12,20	2,03

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 30. Exemplo 3 - Resultados das medidas estatísticas (30), (1 + 1).

Medidas	AG (1 + 1)	PSO (1 + 1)
	Valor	Valor
Mínimo	11,58	11,58
Máximo	12,11	12,2
Diferença/Máximo	4,38%	5,08%
Média	11,7	11,8
Desvio Padrão	1,40%	1,81%
Taxa de Sucesso	60,00%	40,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

A laminação ótima foi encontrada através da SAO-RBF usando tanto o algoritmo de otimização AG quanto o PSO. Isso mostra que o número de pontos inseridos na amostra através da minimização da função densidade pôde ser reduzido para apenas um ponto sem comprometer a qualidade dos resultados obtidos conforme ilustra a Figura 40. Esta figura mostra que se encontrou a solução ótima seis vezes, em outras duas vezes obteve-se erros inferiores a 1,40% e nas outras duas últimas vezes os erros foram de 2,07 e 4,57%.

A solução exata foi obtida com 49 partículas e 30 iterações usando a Análise Isogeométrica, com um total de 1470 avaliações e um tempo total de 171,37 minutos por otimização. As soluções ótimas usando SAO-RBF possibilitaram uma redução de 89,18% de avaliações, com um total de apenas 159 avaliações de função. O tempo total por otimização utilizando a SAO-RBF foi de apenas 9,47 minutos, uma redução de 94,47%. Portanto, a estratégia sequencial aproximada obteve excelentes resultados para o problema da estrutura de casca laminada.

Figura 40. Exemplo 3 - Resultados SAO-RBF usando o AG.



Fonte: elaborada pelo autor.

#### 7.4 Maximização da Resistência de uma Placa com Furo

O último exemplo trata da maximização da resistência de uma placa laminada quadrada (lado = 720 mm) com um furo circular (raio = 72 mm) na região central, submetida a um carregamento compressivo na direção do eixo  $x$ . As condições de contorno adotadas são  $w = 0$  em todos os lados,  $\theta_x = 0$  nos lados AB e CD,  $u = v = 0$  no ponto C situado no canto inferior esquerdo e  $v = 0$  no ponto D no canto inferior direito. A placa possui 40 lâminas e um esquema de laminação balanceado simétrico, resultando em 10 variáveis de projeto.

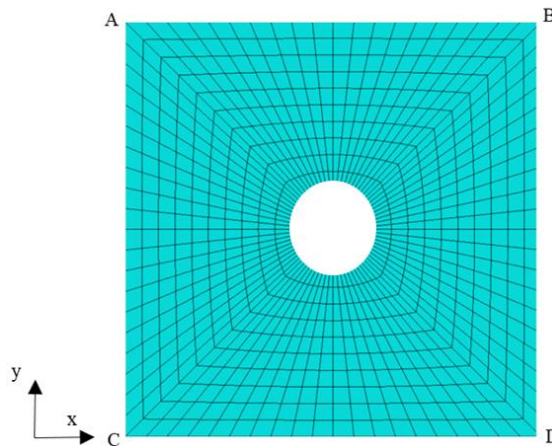
O problema de otimização pode ser escrito em sua forma matemática a seguir:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Encontrar} & \mathbf{x} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{10}] \text{ que} \\
 \text{maximize} & \lambda = \min(\lambda_s, \lambda_b) \\
 \text{com} & \theta_i \in \{0, 45, 90\} \quad i = 1, 2, \dots, 10.
 \end{array} \tag{93}$$

Esse problema não possui solução analítica. A obtenção do projeto ótimo foi realizada através da otimização usando os dois algoritmos de otimização global, o PSO e o AG, juntamente com as análises realizadas pelo Método dos Elementos Finitos através do FAST. Foram utilizadas 100 iterações/gerações e 49 partículas/indivíduos, totalizando 4900 avaliações pelo MEF. A Tabela 31 ilustra os resultados obtidos e a

Tabela 33 mostra a laminação ótima. Verifica-se que os dois algoritmos obtiveram a solução ótima, com taxas de sucesso iguais a 90% e 100%, para PSO e AG, respectivamente. A Tabela 32 mostra os resultados dos cálculos das medidas estatísticas em relação aos resultados obtidos na Tabela 31.

Figura 41. Placa laminada quadrada com furo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 31. Exemplo 4 - Resultados Placa com Furo.

$N_{opt}$	AG		PSO	
	100 Gen		100 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	1275,1	1493,7	1275,1	1491,8
2	1275,1	1491,8	1275,1	1491,8
3	1275,1	1491,8	1275,1	1493,7
4	1275,1	1493,7	1275,1	1273,6
5	1275,1	1493,7	1275,1	1491,8
6	1275,1	1491,8	1275,1	1493,7
7	1275,1	1491,8	1275,1	1491,8
8	1275,1	1491,8	1275,1	1491,8
9	1275,1	1491,8	1275,1	1493,7
10	1275,1	1491,8	1275,1	1491,8

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 32. Exemplo 4 - Resultados das medidas estatísticas.

Medidas	AG	PSO
	Valor	Valor
Mínimo	1275,1	1273,6
Máximo	1275,1	1275,1
Diferença/Máximo	0,00%	0,12%
Média	1275,1	1275,0
Desvio Padrão	0,00%	0,04%
Taxa de Sucesso	100,00%	90,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 33. Exemplo 4 - Resultados usando o modelo de alta fidelidade.

Algoritmo	Layup	$\lambda_b$	$\lambda_s$	$\lambda = \min(\lambda_s, \lambda_b)$
AG/PSO	$[90_4(\pm 45\ 0_2)_4]_s$	1491,8	1275,1	1275,1

Fonte: elaborada pelo autor.

Inicialmente, foram realizadas otimizações com os modelos substitutos estáticos RBF e SVR. A amostra de treinamento possui 99 pontos. Os mesmos resultados foram obtidos para o SVR usando os algoritmos de otimização AG e PSO. A Tabela 34 ilustra os resultados obtidos. Pode-se perceber que os modelos estáticos não conseguiram encontrar a solução ótima havendo necessidade de inserção de novos pontos na amostra para melhorar as aproximações.

Tabela 34. Exemplo 4 - Resultados RBF e SVR.

Algoritmo	Layup	$\lambda_s^{RBF}$	$\lambda_b^{RBF}$	$\lambda^{RBF}$
AG	$[\pm 45\ 90_2 \pm 45_4\ 0_2 \pm 45_2\ 0_2]_s$	1006,0	1269,3	1006,0
PSO	$[\pm 45\ 90_4 \pm 45\ 0_4 \pm 45_3\ 0_2]_s$	1155,0	1279,7	1155,0
	Layup	$\lambda_s^{SVR}$	$\lambda_b^{SVR}$	$\lambda^{SVR}$
AG/PSO	$[0_2 \pm 45_3\ 0_2 (0_2 \pm 45)_2\ 0_2]_s$	1382,5	930,9	930,9

Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, realizou-se a Otimização Sequencial Aproximada usando o SAO-RBF, com os dois algoritmos de otimização, AG e PSO. Uma população de 49 indivíduos/partículas também foi utilizada. As iterações/gerações também foram iguais a 100 e um estudo foi realizado para verificar se era possível diminuir a quantidade de pontos inseridos através da minimização da função densidade.

Segundo Kitayama *et al.* (2011) deveriam ser inseridos  $n/2$  pontos, um total de 5 pontos ( $n = 10$ ) devido a minimização da função densidade. Com a finalidade de reduzir o número de pontos inseridos através da minimização da função densidade, apenas um ponto foi inserido. Essa abordagem foi denominada SAO(1 + 1), que significa inserção do indivíduo ótimo mais outro ponto obtido pela minimização da função densidade. A Tabela 35 ilustra os resultados obtidos com esta abordagem. A Tabela 36 mostra os resultados dos cálculos das medidas estatísticas em relação aos resultados obtidos na Tabela 35.

A laminação ótima foi encontrada através da SAO-RBF-AG todas as 10 tentativas. Avaliando o gráfico de barras dos resultados obtidos percebe-se que resultados excelentes foram alcançados (Figura 42). Além do mais houve redução significativa do número de avaliações de função, apenas 299 foram necessárias, uma redução de 93,89%. O

tempo por otimização usando o modelo de alta fidelidade foi de 124,89 minutos, enquanto que na SAO-RBF-AG foi igual a 7,26 minutos, uma redução de 94,18%.

Tabela 35. Exemplo 4 - Resultados Placa com Furo SAO(1 + 1).

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 1)		PSO (1 + 1)	
	100 Gen		100 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	1275,1	1491,8	1237,8	1253,6
2	1275,1	1264,5	1275,1	1265,5
3	1275,1	1268,6	1154,3	1176,8
4	1275,1	1269,7	1275,1	1251,8
5	1275,1	1268,8	1275,1	1262,8
6	1275,1	1493,7	1275,1	1250,2
7	1275,1	1268,8	1275,1	1227,3
8	1275,1	1272,3	1275,1	1252,8
9	1275,1	1270,4	1275,1	1268,8
10	1275,1	1270,3	1376,7	1217,9

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 36. Exemplo 4 - Resultados das medidas estatísticas SAO(1 + 1).

Medidas	AG (1 + 1)	PSO (1 + 1)
	Valor	Valor
Mínimo	1264,56	1154,3
Máximo	1275,17	1268,8
Diferença/Máximo	0,83%	9,02%
Média	1270,41	1238,9
Desvio Padrão	0,25%	2,74%
Taxa de Sucesso	100,00%	30,00%

Fonte: elaborada pelo autor.

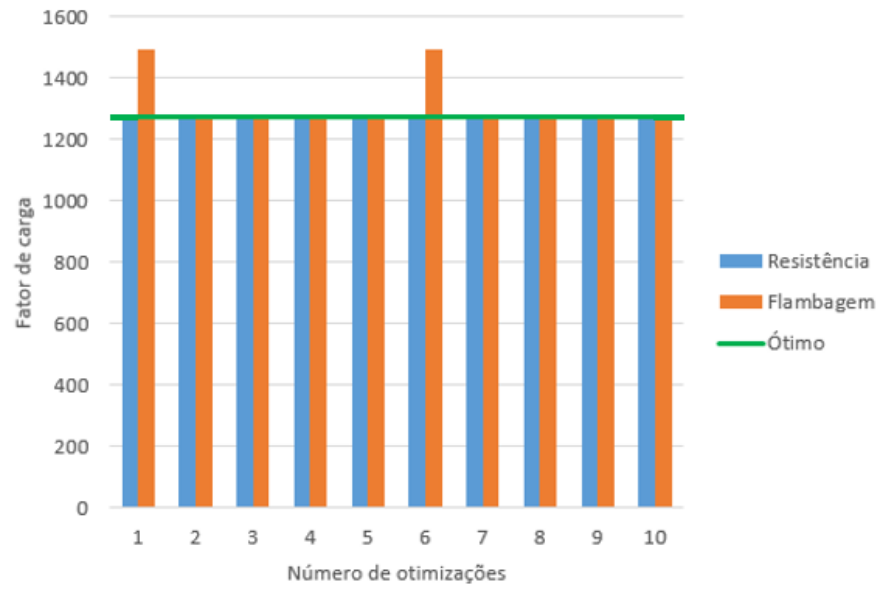
As otimizações utilizando modelos substitutos estáticos apresentaram erros entre 9% e 27%, mostrando a necessidade de uma técnica sequencial para melhorar a precisão dos modelos. Assim, pode-se concluir que a SAO-RBF tornou viável o uso de técnicas de otimização no projeto de estruturas laminadas com maior grau de complexidade como é o caso da placa com furo analisada.

Tabela 37. Exemplo 4 - Erros percentuais (%).

Método	Alg	Inserção	$\lambda$
HFM	AG/PSO	-	-
RBF	AG	-	21,12
RBF	PSO	-	9,44
SVR	AG/PSO	-	27,01
SAO-RBF	AG	(1 + 1)	0,00
SAO-RBF	PSO	(1 + 1)	0,49

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 42. Exemplo 4 - Resultados SAO-RBF usando o AG.



Fonte: elaborada pelo autor

## 8 CONCLUSÃO

A Otimização Sequencial Aproximada de estruturas laminadas de material compósito usando o modelo substituto baseado em Funções de Base Radial apresentou resultados excelentes. Esta abordagem permitiu uma redução significativa do custo computacional devido a uma redução de mais do que 90% do número de avaliações usando os modelos de alta fidelidade através de simulações numéricas.

O uso de modelos substitutos estáticos na otimização estática (OE) mostrou que são necessárias inserções de novos pontos na amostra inicial para melhorar as aproximações desses modelos na otimização. O critério de preenchimento de duas fases utilizado neste trabalho, inserção do ótimo e pontos que minimizam a função densidade, possibilitou escapar de mínimos locais e encontrar os ótimos globais.

Este estudo também mostrou que a quantidade de pontos inseridos através da minimização da função densidade pode ser uma escolha do usuário de acordo com o problema a ser otimizado. Nos três últimos exemplos mostrou-se que, com apenas um ponto adicionado através da minimização da função densidade, a solução ótima foi obtida.

A criação da interface entre os programas de otimização (BIOS) e de simulação numérica (FAST) foi realizada através da linguagem de programação C++ através da leitura de arquivos de textos baseando-se em trabalhos anteriores de Rocha (2013) e Barroso (2015).

O modelo substituto RBF usado na SAO iniciou com o tamanho mínimo de amostra recomendado por Amouzgar (2016) em todos os exemplos estudados. As duas estratégias de critério de preenchimento utilizadas, inserção do indivíduo ótimo não repetido e pontos que minimizam a função densidade, melhoraram a precisão do modelo substituto, de forma local e global respectivamente, com o avançar das iterações/gerações, possibilitando a otimização caminhar em direção ao ótimo global. As mesmas amostras iniciais utilizadas na SAO-RBF também foram utilizadas nos modelos substitutos na otimização estática (OE).

A Sequência de Hammersley apresentou uma distribuição uniforme das amostras iniciais de treinamento no espaço das variáveis de projeto, antes da adição de novos pontos pelo critério de preenchimento, no entanto, não possibilitou encontrar a solução ótima sendo necessário inserir novos pontos. O tempo de geração das amostras não superou 5 segundos, contribuindo de forma positiva para redução do custo computacional. O Hipercubo Latino Otimizado apresentou alto custo computacional para geração das amostras dos exemplos com número grande de variáveis de projeto, não houve tempo hábil para realizar as otimizações com essas amostras e verificar os resultados obtidos.

A técnica da escala adaptativa, utilizada somente na construção da superfície de resposta dos modelos substitutos da função objetivo e restrições, possibilitou a formação de uma superfície mais suave, gerando uma melhor aproximação do ponto ótimo procurado. Para função densidade esta técnica não foi utilizada, sendo a presença dos vales nesta função uma forma mais propícia a encontrar os mínimos na otimização. Assim, pode-se afirmar que as duas técnicas com escala adaptativa e sem escala adaptativa possibilitaram a obtenção de excelentes resultados aumentando a precisão do modelo substituto RBF usado na SAO.

As otimizações estáticas (OE) usando os modelos substitutos RBF e SVR apresentaram resultados com boa aproximação em dois exemplos, mas também apresentaram resultados com aproximações ruins nos outros dois exemplos usando as mesmas amostras iniciais da SAO e expressões em todos os exemplos para calcular os três parâmetros do SVR (*width*,  $C$  e  $\nu$ ) e os *widths* do RBF. Isso confirma a hipótese inicial de que a SAO é uma alternativa que possibilita a obtenção de melhores resultados em problemas de estruturas laminadas.

Portanto, a Otimização Sequencial Aproximada usando o modelo substituto RBF aplicada a problemas de estruturas laminadas de material compósito mostrou-se uma alternativa viável devido a possibilidade de redução do custo computacional, estável porque alcançou as soluções ótimas ou próximas das ótimas com erros admissíveis, e pode ser desenvolvida através de estudos e pesquisas para atender aos requisitos em aplicações de projetos de engenharia que necessitam de redução do custo computacional devido a sua complexidade.

## SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Estudar os parâmetros  $\epsilon$ ,  $\nu$ ,  $C$  e  $\sigma$  do SVR para encontrar uma forma adequada de determina-los de modo que o custo computacional envolvido não comprometa o tempo de otimização.
- Estudar a implementação computacional do seu código fornecido pela LIBSVM de modo a acrescentar as alterações necessárias para possibilitar sua utilização na Otimização Sequencial Aproximada (SAO) com a atualização do modelo.
- Estudar a influência do tamanho das amostras iniciais para construção do modelo substituto utilizado na SAO de modo a reduzir o custo computacional utilizando o número mínimo de pontos necessários.



- Estudar outros métodos de geração de amostras iniciais e métodos que possam medir o índice de qualidade das amostras geradas possibilitando a seleção da melhor amostra dentre um número preestabelecido de amostras geradas. Então utilizar a melhor amostra na Otimização Sequencial Aproximada.
- Investigar a aplicação de outros métodos de critério de preenchimento para melhorar as aproximações dos modelos substitutos na SAO em problemas de laminados. Comparar os resultados obtidos de modo a se poder tomar conclusões sobre quais estratégias de preenchimento funcionaram melhor para determinados tipos de problemas.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. S.; AWRUCH, A. M. Design optimization of composite laminated structures using genetic algorithms and finite element analysis. **Composite Structures**, v. 88, p. 443-454, 2009.
- AMOUZGAR, K.; STRÖMBERG, N., 2016. Radial basis functions as surrogate models with a priori bias in comparison with a posteriori bias. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 55, n. 4, p. 1453-1469.
- ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 2nd ed. Iowa: Elsevier, 2004.
- BACKLUND, P. B.; SHAHAN, D.; SEEPERSAD, C. C. Metamodeling Techniques for Multidimensional Ship Design Problems. **Ship Science and Technology**, v. 4, p. 43-54, 2010.
- BARBERO, E. J. **Introduction Composite Materials Design**. 2nd ed. New York: CRC Press, 2011.
- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, p. 703–736, 2004.
- BARROSO, E. S. **Análise e Otimização de Estruturas Laminadas Utilizando a Formulação Isogeométrica**. 2015. 163p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.
- BISAGNI, C.; LANZI, L. Post-buckling optimization of composite stiffened panels using neural networks. **Composite Structures**, v. 58, n. 2, p. 237-247, 2002.
- BRATTON, D.; KENNEDY, J.. Defining a Standard for Particle Swarm Optimization. *In: Proceedings of the 2007 IEEE Swarm Intelligence Symposium, 2007, Honolulu. Conference...* Honolulu: 2007. p. 120-127.
- BREKELMANS, R.; DRIESSEN, L.; HAMERS, H.; DEN HERTOOG, D. Constrained optimization involving expensive function evaluations: A sequential approach. **European Journal of Operational Research**, v. 160, n. 1, p. 121-138, 2005.
- BUNCH, J. R.; KAUFMAN, L. A Computational Method for the Indefinite Quadratic Programming Problem. **Linear Algebra and its Applications**, v. 34, p. 341-370, 1980.
- BURKARDT, J. John Hammersley, Monte Carlo methods for solving multivariable problems. *Proceedings of the New York Academy of Science*, v. 86, p. 844-874, 1960. Disponível em: <[http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f\\_src/hammersley/hammersley.html](http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f_src/hammersley/hammersley.html)>. Acesso em: 11 set. 2017.
- BYEONG-SOO, K.; YONG-BING, L.; DONG-HOON, C. Comparison study on the accuracy of metamodeling technique for non-convex functions. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 23, n. 4, p. 1175-1181, 2009.

- CARDOZO, S. D.; GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M. Optimization of laminated composite plates and shells using genetic algorithms, neural networks and finite elements. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 8, n. 4, p. 413-427, 2011.
- CASDAGLI, M. Nonlinear prediction of chaotic time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 35, n. 3, p. 335-356, 1989.
- CHANG, C; LIN, C. LIBSVM: a library for support vector machines. **ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology**, v. 2, n. 3, 2011.
- CHANG, N; WANG, W; YANG, W; WANG, J. Ply stacking sequence optimization of composite laminate by permutation discrete particle swarm optimization. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v. 41, n. 2, p. 179-187, 2010.
- CHUNG, I.; PARK, D.; CHOI, D. Surrogate-based global optimization using an adaptive switching infill sampling criterion for expensive black-box functions. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 57, n. 4, p. 1443-1459, 2018.
- CLARKE, S. M.; GRIEBSCHE, J. H.; SIMPSON, T. W. Analysis of Support Vector Regression for Approximation of Complex Engineering Analyses. **Journal of Mechanical Design**, v. 127, n. 6, p. 1077-1087, 2005.
- DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials**. New York: OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1994.
- DEB, K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 186, p. 311–338, 2000.
- DONG, H.; SONG, B.; WANG, P.; DONG, Z. Surrogate-based optimization with clustering-based space exploration for expensive multimodal problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 57, n. 4, p. 1553-1577, 2018.
- DRUCKER, H.; BURGESS, C. J. C.; KAUFMAN, L.; SMOLA, A.; VAPNIK, V. Support Vector Regression Machines. **Advances in Neural Information Processing Systems**, v.9, p. 155-161, 1997.
- ETMAN, L. F. P; GROENWOLD, A.; ROODA, J. Sequential Approximate Optimization in an NLP Filter Framework. **11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Multidisciplinary Analysis Optimization Conferences**, Portsmouth, Virginia, 2006.
- FORRESTER, A. I. J.; SÓBESTER, A.; KEANE, A. J. **Engineering Design via Surrogate Modelling: A Practical Guide**. Southampton: Wiley, 2008.
- GHASHOCHI, B. H.; SADR, M. Stacking sequence optimization of composite plates for maximum fundamental frequency using particle swarm optimization algorithm. **Meccanica**, v. 47, n. 3, p. 719-730, 2012.

GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M.; LOPES, P. A. M. Reliability based optimization of laminated composite structures using genetic algorithms and Artificial Neural Networks. **Structural Safety**, v. 33, n. 3, p. 186-195, 2011.

GÜRDAL, Z; HAFTKA, R. T.; HAJELA, P. **Design and Optimization of Laminated Composite Materials**. Canadá: Wiley, 1999.

HAFTKA, R. T; GURDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. 3rd. ed. Virgínia: Kluwer Academic Publishers, 1991.

HARDY, R. L. Multiquadratic equations of topography and other irregular surfaces. **Journal of geophysical research**, v. 76, p. 1905-1915, 1971.

HAYKIN, S. **Neural Networks and Learning Machines**. 3rd. ed. Ontario: Prentice Hall, 2008.

HU, X.; SHI, Y.; EBERHART, R. Recent advances in particle swarm. **Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No. 04TH8753)**, Portland, OR, USA, v. 1, p. 90-97, 2004.

JIN, R.; CHEN, W.; SIMPSON, T. W. Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 23, n. 1, p. 1-13, 2001.

JIN, R.; DU, X.; CHEN, W. The Use of Metamodeling Techniques for Optimization Under Uncertainty. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 25, n. 2, p. 99-116, 2003.

JONES, Donald R.; SCHONLAU, Matthias; WILLIAM J., 1998. Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions. **Journal of Global Optimization**, v. 13, n. 4, p. 455-492, 1998.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2nd ed. Virgínia: Taylor & Francis, 1999.

JURECKA, F. **Robust Design Optimization Based on Metamodeling Techniques**. Aachen: Shaker, 2007.

KANSA, E. J. Multiquadratics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – ii solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. **Computers & mathematics with applications**, Elsevier, v. 19, n. 8-9, p. 147-161, 1990.

KE-LIN, D; SWAMY, M. N. S. **Search and Optimization by Metaheuristics: Techniques and Algorithms Inspired by Nature**. Switzerland: Birkhäuser, 2016.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle Swarm Optimization. **Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks**, Perth, WA, Australia, v. 4, p. 1942-1948, 1995.

KITAYAMA, S.; ARAKAWA, M.; YAMAZAKI, K. Sequential Approximate Optimization using Radial Basis Function network for engineering optimization. **Optimization and Engineering**, v. 12, n. 4, p. 535-557, 2011.

KITAYAMA, S.; ARAKAWA, M.; YAMAZAKI, K. Sequential approximate optimization for discrete design variable problems using radial basis function network. **Applied Mathematics and Computation**, v. 219, n. 8, p. 4143-4156, 2012.

KITAYAMA, S.; HUANG, S.; YAMAZAKI, K. Optimization of variable blank holder force trajectory for springback reduction via sequential approximate optimization with radial basis function network. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 47, n. 2, p. 289-300, 2013.

KITAYAMA, S.; KITA, K.; YAMAZAKI, K. Optimization of variable blank holder force trajectory by sequential approximate optimization with RBF network. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 61, n. 9-12, p. 1067-1083, 2012.

KITAYAMA, S.; NATSUME, S. Multi-objective optimization of volume shrinkage and clamping force for plastic injection molding via sequential approximate optimization. **Simulation Modelling Practice and Theory**, v. 48, p. 35-44, 2014.

KITAYAMA, S.; ONUKI, R.; YAMAZAKI, K. Warpage reduction with variable pressure profile in plastic injection molding via sequential approximate optimization. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 72, n. 5-8, p. 827-838, 2014.

KITAYAMA, S.; SAIKYO, M.; KAWAMOTO, K.; YAMAMICHI, K. Multi-objective optimization of blank shape for deep drawing with variable blank holder force via sequential approximate optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 52, n. 5, p. 1001-1012, 2015.

KITAYAMA, S.; YAMAZAKI, K. Simple estimate of the width in Gaussian kernel with adaptive scaling technique. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 11, n. 8, p. 4726-4737, 2011.

KOIDE, R. M.; FERREIRA, A. P. C. S.; LUERSEN, M. A. Laminated Composites Buckling Analysis Using Lamination Parameters, Neural Networks and Support Vector Regression. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, n. 2, p. 271-294, 2015.

KOGISO, N.; WATSON, L.; GÜRDAL, Z.; HAFTKA, R. Genetic algorithms with local improvement for composite laminate design. **Structural Optimization**, v. 7, n. 4, p. 207-218, 1994.

KOVÁCS, G.; GROENWOLD, A.; JÁRMAI, K.; FARKAS, J. Analysis and optimization design of fibre-reinforced composite structures. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v. 28, n. 2-3, p. 170-179, 2004.

KUSHNER, H. J. A new method of locating the maximum point of an arbitrary multipeak curve in the presence of noise. **Journal of Fluids Engineering**, v. 86, n. 1, p.97-106, 1964.

LAKSHMI, K; RAMA MOHAN RAO, O. Hybrid shuffled frog leaping optimization algorithm for multi-objective optimal design of laminate composites. **Computers & Structures**, v. 125, p. 200-216, 2013.

LEE, Y.; LIN, C. Regression of the response surface of laminated composite structures. **Composite Structures**, v. 62, n. 1, p. 91-105, 2003.

LEE, Y.; OH, S.; CHOI, D. Design optimization using support vector regression. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 22, p. 213-220, 2008.

LI, Y. F.; NG, S. H; XIE, M; GOH, T. N. A systematic comparison of metamodeling techniques for simulation optimization in Decision Support Systems. **Applied Soft Computing**, v. 10, p. 1257-1273, 2010.

LINDEN, R. **Algoritmos Genéticos: Uma Importante Ferramenta da Inteligência Computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: BRASPORT, 2008.

MARWALA, T. **Finite-element-model Updating Using Computational Intelligence Techniques: Applications to Structural Dynamics**. New York: Springer, 2010.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. **Technometrics**, v. 21, n. 2, p. 239-245, 1979.

MENDONÇA, J. A. F. **Aplicação de Modelos Substitutos Baseados em Redes Neurais Artificiais na Otimização de Estruturas Laminadas**. 2017. 96p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

MENDONÇA, Jorge. A. F. *et al.* Aplicação de Redes Neurais Artificiais na Otimização de Placas Laminadas. *In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING*, 37, 2016, Brasília. **CILAMCE**. Brasília: UnB, 2016. 16p.

MOCKUS, J.; TIESIS, V.; ZILINSKAS, A. The application of Bayesian methods for seeking the extremum. *In: Towards Global Optimisation 2*. North-Holland, 1978. p. 117-129.

MUKHERJEE, S.; OSUNA, E.; GIROSI, F. Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series Using Support Vector Machines. **Neural Networks for Signal Processing. Proceedings of the 1997 IEEE Signal Processing Society Workshop**, Amelia Island, FL, USA, p. 511-520, 1997.

MÜLLER, K. R.; SMOLA, A. J.; RÄTSCH, G.; SCHÖLKOPF, B.; KOHLMORGEN, J.; VAPINIK, V. Predicting Time Series with Support Vector Machines. **Artificial Neural Networks**, v. 1327, p. 999-1004, 1997.

NAKAYAMA, H; ARAKAWA, M; SASAKI, R. Simulation-Based Optimization Using Computational Intelligence. **Optimization and Engineering**, v. 3, n. 2, p. 201-214, 2002.

NIK, M. A.; FAYAZBAKHS, K.; PASINI, D.; LESSARD, L. A comparative study of metamodeling methods for the design optimization of variable stiffness composites. **Composite Structures**, v. 107, p. 494-501, 2014.

PAN, F.; ZHU, P.; ZHANG, Y. Metamodel-based lightweight design of B-pillar with TWB structure via support vector regression. **Computers and Structures**, v. 88, n. 1-2, p. 36-44, 2010.

PARK, J. H.; HWANG, J. H.; LEE, C. S.; HWANG, W. Stacking sequence design of composite laminates for maximum strength using genetic algorithms. **Composite Structures**, v. 52, n. 2, p. 217-231, 2001.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis**. 2nd ed. New York: CRC PRESS, 2004.

RIPPA, S. An algorithm for selecting a good value for the parameter  $c$  in radial basis function interpolation. **Advances in Computational Mathematics**, Springer, v. 11, n. 2-3, p. 193-210, 1999.

ROCHA, I. B. C. M. da. **Análise e Otimização de Cascas Laminadas Considerando Não-Linearidade Geométrica e Falha Progressiva**. 2013. 165p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

ROCHA, I. B. C. M.; PARENTE JR., E.; MELO, A. M. C. A hybrid shared/distributed memory parallel genetic algorithm for optimization of laminate composites. **Composite Structures**, v. 107, p. 288-297, 2014.

RODRÍGUEZ, J. F.; RENAUD, J. E.; WATSON, L. T. Trust Region Augmented Lagrangian Methods for Sequential Response Surface Approximation and Optimization. **Journal of Mechanical Design**, v. 120, n. 1, p. 58-66, 1998.

SCHMIT JR., L. A.; FARSHI, B. Some Approximation Concepts for Structural Synthesis. **AIAA Journal**, v. 12, n. 5, p. 692-699, 1974.

SCHÖLKOPF, B.; BARTLETT, P.; SMOLA, A.; Williamson, R. Support Vector Regression with Automatic Accuracy Control. In: Niklasson L., Bodén M., Ziemke T. (eds) ICANN 98. **Perspectives in Neural Computing**. Springer, London, 1998.

SEWELL, M. **Kernel Methods**. London: University College London, Department of Computer Science, 2007.

SILVA, R. F. da. **Otimização de Risers de Materiais Compósitos**. 2012. 96p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

SIMPSON, T. W.; PEPLINSKI, J. D.; KOCH, P. N.; ALLEN, J. K. Metamodels for Computer-based Engineering Design: Survey and recommendations. **Engineering with Computers**, v. 17, n. 2, p. 129-150, 2001.

SMOLA, A. J. **Regression estimation with support vector learning machines**. 1996. 78p. Master's thesis, Technische Universität München, München, Alemanha, 1996.

STEPONAVICE, Ingrida *et al.* On Sampling Methods for Costly Multi-objective Black-box Optimization. *In*: Pardalos P., Zhigljavsky A., Žilinskas J. (eds) **Advances in Stochastic and Deterministic Global Optimization**. **Springer Optimization and Its Applications**. Springer: Cham, 2015. v. 107. p. 273-296.

SÓBESTER, A; LEARY, S. J; KEANE, A. J. On the Design of Optimization Strategies Based on Global Response Surface Approximation Models. **Journal of Global Optimization**, v. 33, p. 31-59, 2005.

VAPINIK, V.; GOLOWICH, S. E.; SMOLA, A. Support Vector Method for Function Approximation, Regression Estimation, and Signal Processing. **Advances in Neural Information Processing Systems**, v. 9, p. 281-287, 1996.

WANG, G. G.; SHAN, S. Review of Metamodeling Techniques in Support of Engineering Design Optimization. **Journal of Mechanical Design**, v. 129, n. 4, p. 370-380, 2006.

WONG, T.; LUK, W.; HENG, P. Sampling with Hammersley and Halton Points. **Journal of Graphics Tools**, v. 2, n. 2, p. 9-24, 1997.

WU, Z; WANG, D; PATRICK OKOLO, N; JIANG, Z; ZHANG, W. Unified estimate of Gaussian kernel width for surrogate models. **Neurocomputing**, v. 203, p. 41-51, 2016.

YANG, H; JIANG, R.; LI, H. Optimization Design of Deepwater Steel Catenary Risers Using Genetic Algorithm. *In*: Yuan Y., Cui J., Mang H.A. (eds) **Computational Structural Engineering**. Dordrecht: Springer, 2009. p. 901-908.

ZEIN, S.; MADHAVAN, V. DUMAS, D. A repair operator for the preliminary design of a composite structure using genetic algorithms. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v. 55, n. 6, p. 2099-2110, 2017.



**ANEXO A – RESULTADOS  $k = 0,125$  KOGISO *et al.* (1994)**

Tabela 38. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 1) com 30 Ger/Iter.

$N_{opt}$	AG (1 + 1)		PSO (1 + 1)	
	30 Gen		30 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	13802,6	13458,3	13885,6
2	13458,3	14203,3	11686,9	15003,0
3	13531,5	13757,6	13458,3	14108,1
4	13458,3	14203,3	11686,9	14939,4
5	13458,3	13726,7	13458,3	14298,7
6	13458,3	14330,4	11686,9	14780,6
7	13531,5	13820,4	11871,1	14969,5
8	13531,5	14297,7	13531,5	14133,5
9	13458,3	13790,3	13458,3	14680,0
10	13531,5	14040,7	13458,3	14457,6

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 39. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 1) com 40 Ger/Iter.

$N_{opt}$	AG (1 + 1)		PSO (1 + 1)	
	40 Gen		40 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	13958,4	13531,5	14527,2
2	13531,5	13799,5	11686,9	14780,6
3	13531,5	13671,6	13458,3	14203,4
4	13531,5	14070,7	11686,9	15034,8
5	13531,5	13562,4	11686,9	15225,4
6	13531,5	13862,2	11686,9	15225,4
7	13531,5	13916,5	13458,3	14139,8
8	13531,5	13891,7	9898,72	15453,1
9	13531,5	13757,6	13458,3	14330,5
10	13458,3	14076,2	11686,9	15352,5

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 40. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 1) com 50 Ger/Iter.

$N_{opt}$	AG (1 + 1)		PSO (1 + 1)	
	50 Gen		50 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	15160,4	13524,5	11686,9	15225,4
2	11871,1	15029,2	13458,3	14044,5
3	13531,5	14181,5	13531,5	14324,1
4	13531,5	14148,2	13458,3	14076,3
5	13531,5	13701,1	13531,5	13911,9
6	13531,5	13713,5	11686,9	14812,3
7	13531,5	14053,7	13531,5	14342,8
8	13531,5	13848,3	11686,9	15225,4
9	13531,5	14148,2	13458,3	14330,5
10	13531,5	14158,4	11686,9	15034,8

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 41. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 1) com 100 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 1)		PSO (1 + 1)	
	100 Gen		100 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	13802,6	13458,3	13885,6
2	13458,3	14203,3	11686,9	15003,0
3	13531,5	13757,6	13458,3	14108,1
4	13458,3	14203,3	11686,9	14939,4
5	13458,3	13726,7	13458,3	14298,7
6	13458,3	14330,4	11686,9	14780,6
7	13531,5	13820,4	11871,1	14969,5
8	13531,5	14297,7	13531,5	14133,5
9	13458,3	13790,3	13458,3	14680,0
10	13531,5	14040,7	13458,3	14457,6

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 42. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 3) com 30 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 3)		PSO (1 + 3)	
	30 Gen		30 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	14053,7	13458,3	14679,9
2	13531,5	14451,2	13531,5	14197,0
3	13531,5	14043,6	11686,9	15002,9
4	13531,5	14435,0	11686,9	15034,7
5	13531,5	14527,2	11871,1	15346,1
6	13531,5	13916,5	13458,3	14679,9
7	13531,5	14050,6	13458,3	14679,9
8	13531,5	14158,4	13458,3	14679,9
9	13531,5	13764,6	11686,9	15034,7
10	13458,3	14139,8	13458,3	14457,5

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 43. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 3) com 40 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 3)		PSO (1 + 3)	
	40 Gen		40 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	13816,6	13458,3	14330,4
2	13531,5	14053,7	13458,3	14679,9
3	13458,3	14266,9	11806,7	14582,7
4	13531,5	13562,4	13458,3	14679,9
5	13531,5	14673,6	11686,9	14812,3
6	13531,5	13694,1	13458,3	14679,9
7	13458,3	13853,8	11871,1	14778,9
8	13531,5	13708,0	13531,5	14133,4
9	13531,5	13799,5	13531,5	14197,0
10	13531,5	14527,2	13458,3	14139,8

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 44. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 3) com 50 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 3)		PSO (1 + 3)	
	50 Gen		50 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	14324,1	13458,3	14457,5
2	13531,5	14451,2	13458,3	14679,9
3	13531,5	14211,7	13458,3	14679,9
4	13531,5	13618,2	13458,3	14139,8
5	13531,5	14402,4	13458,3	14330,4
6	13531,5	13957,6	11686,9	14780,5
7	13531,5	13781,0	13531,5	13961,5
8	13531,5	14050,6	11871,1	15002,0
9	13531,5	13863,1	13531,5	14183,9
10	13458,3	14330,4	11871,1	14778,9

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 45. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 3) com 100 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 3)		PSO (1 + 3)	
	100 Gen		100 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	13593,3	13458,3	14679,9
2	13531,5	13767,8	13531,5	14624,8
3	13531,5	13721,2	13531,5	14134,3
4	13531,5	14342,7	11871,1	15110,6
5	13531,5	14673,6	11871,1	14806,0
6	13531,5	13859,9	11871,1	15001,3
7	13531,5	13961,5	13531,5	14483,8
8	13458,3	14012,7	13531,5	14483,8
9	13531,5	13608,9	11871,1	14532,5
10	13531,5	14050,6	11871,1	14778,9

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 46. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 6) com 30 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 6)		PSO (1 + 6)	
	30 Gen		30 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	13862,2	13531,5	14324,1
2	13531,5	13840,6	13531,5	14134,3
3	13531,5	14435,0	13458,3	14679,9
4	13531,5	13820,4	11871,1	14778,9
5	13531,5	14102,5	13458,3	14679,9
6	13531,5	14074,6	11871,1	15219,0
7	13531,5	13938,6	9898,7	15611,9
8	13531,5	14107,1	11686,9	15193,6
9	13531,5	13816,6	11686,9	14145,1
10	13531,5	14148,2	11871,1	14616,2

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 47. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 6) com 40 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 6)		PSO (1 + 6)	
	40 Gen		40 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	13799,5	13458,3	14108,0
2	13531,5	14011,0	11686,9	15225,3
3	13531,5	14070,7	13531,5	14265,2
4	13380,7	13804,8	11871,1	14778,9
5	13531,5	13593,3	13458,3	14679,9
6	13531,5	13958,4	13531,5	13943,7
7	13531,5	13958,4	13531,5	14069,9
8	13531,5	13891,7	13458,3	14139,8
9	13531,5	14070,7	13458,3	14679,9
10	13531,5	13720,4	13531,5	14324,1

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 48. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 6) com 50 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 6)		PSO (1 + 6)	
	50 Gen		50 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13531,5	13721,2	11686,9	15161,8
2	13531,5	14042,8	11686,9	15225,3
3	13531,5	14085,5	13531,5	14624,8
4	13531,5	13995,5	13458,3	14679,9
5	13531,5	13783,9	13458,3	14679,9
6	13531,5	13904,2	13458,3	14139,8
7	13531,5	13749,2	13458,3	14679,9
8	13531,5	14053,7	11686,9	15225,3
9	13531,5	13995,5	13458,3	14679,9
10	13531,5	13831,3	13531,5	14451,2

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 49. Resultados  $k = 0,125$  para SAO(1 + 6) com 100 Ger/Iter.

N <sub>opt</sub>	AG (1 + 6)		PSO (1 + 6)	
	100 Gen		100 Iter	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	13458,3	13885,6	13531,5	14483,8
2	13458,3	14330,4	13531,5	14324,1
3	13531,5	13764,6	11871,1	14806,0
4	13531,5	13767,8	13531,5	14265,2
5	13531,5	13891,7	13531,5	14451,2
6	13531,5	13644,5	13531,5	14451,2
7	13531,5	14483,8	13458,3	14679,9
8	13531,5	13958,4	13458,3	14298,6
9	13531,5	14085,5	11686,9	15002,9
10	13531,5	13685,7	13458,3	14330,4

Fonte: elaborada pelo autor.

**ANEXO B – RESULTADOS  $k = 0,250$  KOGISO *et al.* (1994)**

Tabela 50. Resultados  $k = 0,250$  para SAO(1 + 1) com 30/40 Ger.

$N_{opt}$	AG (1 + 1)		AG (1 + 1)	
	30 Gen		40 Gen	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	12690,7	12604,2	12401,6	12346,5
2	12401,6	11754,4	12690,7	12552,5
3	12690,7	12361,1	12401,6	12608,2
4	12690,7	12604,2	12030,0	11950,7
5	10119,8	12333,8	12690,7	12525,7
6	12690,7	12604,2	12690,7	12603,0
7	12690,7	12604,2	12690,7	12579,4
8	12690,7	12552,5	12690,7	12552,5
9	12401,6	12551,8	12690,7	12603,0
10	12690,7	12603,0	12690,7	12552,5

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 51. Resultados  $k = 0,250$  para SAO(1 + 1) com 50/100 Ger.

$N_{opt}$	AG (1 + 1)		AG (1 + 1)	
	50 Gen		100 Gen	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	12690,7	12687,0	12690,6	12603,0
2	12401,6	12589,9	12690,6	12634,4
3	12690,7	12552,5	12690,6	12687,0
4	12690,7	12687,0	12690,6	12579,4
5	12690,7	12552,5	12401,5	12608,2
6	12690,7	12603,0	12690,6	12459,7
7	12690,7	12310,6	12690,6	12579,4
8	12690,7	12256,8	12690,6	12580,8
9	12401,6	12174,8	12690,7	12755,5
10	12690,7	12687,0	12690,6	12604,1

Fonte: elaborada pelo autor.

**ANEXO C – RESULTADOS  $k = 0,500$  KOGISO *et al.* (1994)**

Tabela 52. Resultados  $k = 0,500$  para SAO(1 + 1) com 30/40 Ger.

$N_{opt}$	AG (1 + 1)		AG (1 + 1)	
	30 Gen		40 Gen	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	9748,5	9921,6	10260,4	9919,9
2	9748,5	9791,3	10260,4	9919,9
3	10260,4	9919,9	10195,3	9947,5
4	10260,4	9919,9	10260,4	9919,9
5	10260,4	9919,9	10260,4	9919,9
6	10260,4	9919,9	9748,5	9874,4
7	9748,5	9921,6	10260,4	9919,9
8	10260,4	9859,3	10260,4	9919,9
9	10260,4	9790,5	10260,4	9919,9
10	10260,4	9859,3	10260,4	9919,9

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 53. Resultados  $k = 0,500$  para SAO(1 + 1) com 50/100 Ger.

$N_{opt}$	AG (1 + 1)		AG (1 + 1)	
	50 Gen		100 Gen	
	Resistência	Flambagem	Resistência	Flambagem
1	10260,4	9919,9	10260,4	9919,9
2	10260,4	9919,9	10260,4	9919,9
3	10260,4	9919,9	10260,4	9919,9
4	10260,4	9899,7	10195,3	9991,5
5	10260,4	9919,9	10260,4	9919,9
6	11415,1	9745,7	10260,4	9899,7
7	10260,4	9919,9	10260,4	9919,9
8	10260,4	9859,3	10260,4	9919,9
9	10260,4	9859,3	10260,4	9778,6
10	10260,4	9919,9	10260,4	9919,4

Fonte: elaborada pelo autor.