UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
INSTITUTO UNIVERSIDADE VIRTUAL
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ ANTONIO FERREIRA DE LIMA

RAZÃO ÁUREA: HISTÓRIA E SUAS APLICAÇÕES MATEMÁTICAS

MARANGUAPE
2015

JOSÉ ANTONIO FERREIRA DE LIMA

RAZÃO ÁUREA: HISTÓRIA E SUAS APLICAÇÕES MATEMÁTICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática Semipresencial do Instituto Universidade Virtual da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Hudson de Souza Felix

MARANGUAPE
2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao mestre supremo. **Deus** por ter dado a sapiência e me dirigido pelo caminho do bem a da vitória.

Agradeço aos meus pais Luiz Ferreira Lima e Luiza Ferreira de Lima que mesmo nas dificuldades conseguiram cuidar e educar não só eu, mas uma família de sete filhos.

Agradeço a minha esposa Jacilma Nascimento da Silva e aos meus filhos Cintia da Silva Ferreira, Jaime Luis da Silva Lima e Jairo da Silva Lima que sempre me apoiaram e sem saber foram os principais responsáveis por eu ter me dedicado bastante durante o percurso desta jornada tão sacrificada.

Aos meus irmãos Maria Zulene Ferreira Lima, José Airton Ferreira de Lima, José Raimundo Ferreira de Lima, Maria Jucilene Ferreira Lima, José Jair Ferreira de Lima e Maria Josilene Ferreira Lima.

Agradeço a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste curso, professores e tutores da Universidade Federal do Ceará, os profissionais que trabalham no Polo de Maranguape e também os meus amigos alunos que começaram e que estão concluindo com êxito o curso.

“A ciência pode purificar a religião de erros e supertições. A religião pode purificar a ciência de idolatrias e erros absolutos.”

Papa João Paulo II

“A inteligência é feita por um terço de instinto - um terço de memória – e o último terço de vontade.”

Carlos Dossi

JOSÉ ANTONIO FERREIRA DE LIMA

RAZÃO ÁUREA: HISTÓRIA E SUAS APLICAÇÕES MATEMÁTICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática Semipresencial do Instituto Universidade Virtual da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Hudson de Souza Felix

Aprovado em ___/___/ _____.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Hudson de Souza Feliz (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Diego de Sousa Rodrigues
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Helton Udenes Nascimento Pontes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

RESUMO

O objetivo desde trabalho é mostrar uma parte da matemática que é fascinante, cercada de mistérios e poderia estar incluída no currículo escolar: A Razão Áurea. Foram realizadas pesquisas em torno do assunto desde as civilizações antigas até os dias atuais. Levando em conta os aspectos históricos e sociais, foram estudadas várias sociedades: egípcias, babilônicas, gregas, romanas, dentre outras. Abordaram-se também épocas em que pessoas renomadas buscaram aspirações para mostrar em suas artes a fórmula ideal na aplicação desta proporção em suas obras. Pitágoras, um grande filósofo e matemático, demonstrou uma propriedade notável dos diversos pentagramas que, se olhando os segmentos de linha em ordem crescente de comprimento, podem ser provados facilmente, por meio da geometria elementar, que cada segmento é maior que seu antecessor por um fator que é exatamente igual ao Número Áureo. Fibonacci, que ficou conhecido por sua obra Liber Abaci (Livro de Ábaco) escrito em 1202, criou uma sequência que ficou conhecida pelo seu nome e foi expressa em forma de problema envolvendo coelhos em que a expressão foi denotada por uma fórmula. Essa pesquisa mostrou também como essa razão é aplicada nas fórmulas matemáticas envolvendo operações de nível fundamental e médio até chegar o Número de Ouro.

Palavras-chave: Razão Áurea, História, Aplicações no cotidiano.

ABSTRACT

The objective of this work is to show a part of mathematics that is fascinating, surrounded by mysteries and could be included in the school curriculum: The Golden Ratio. Surveys were conducted around the subject from ancient civilizations to the present day. Taking into account the historical and social aspects, several companies were studied: Egyptian, Babylonian, Greek, Roman, among others. Is addressed also times when people sought renowned aspirations to display their art in the ideal formula of this proportion in his works. Pythagoras, a great philosopher and mathematician, demonstrated a remarkable property of many pentagrams, that looking at the line segments in order of increasing length, can be proved easily by elementary geometry, each segment is larger than its predecessor by a factor which is exactly equal to the Golden Number. Fibonacci, was known for his work Liber Abaci (Book of Abacus) written in 1202, created a sequence that has become known by his name and was expressed as a problem involving rabbits in which the expression was denoted by a formula. This research has also shown how this reasoning is applied in mathematical formulas involving primary and secondary level operations to get the number of Gold.

Keywords: Golden Ratio, History, Applications in everyday life

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre um assunto que vem sendo discutido desde as primeiras civilizações e que ainda pode ser considerado um mistério do ensino da matemática. O Número de Ouro, historicamente estudado por matemáticos importantes na historia das civilizações, se destaca nas mais diversas formas que podem ser percebidas pelo homem. Sua utilização nos remete a uma visão de que a natureza está sempre em harmonia com destaque as suas formas proporcionais que parece dar vida as coisas. Também pode ser percebido nas mais variadas formas arquitetônicas e de artes espalhadas pelo mundo.

Há percepção de que a história é muito importante para o ensino, e para a matemática não é diferente, uma vez que, podemos encontrar resposta para dúvidas dos alunos.

De acordo com PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2005):

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

O Número de Ouro ou Razão Áurea é uma constante irracional com valor igual a 1,618033..., representado pelo símbolo (phi). Ele surgiu a partir da ideia de dividir um seguimento AB em duas partes, partindo-se do conhecimento de que existem infinitas formas de fazê-las.

São várias pesquisas sobre Razão Áurea que envolve sua aplicabilidade em sala de aula visando aprimorar o ensino e motivar os alunos principalmente na disciplina de Geometria. Garcia et al (2004), por exemplo, fez algumas demonstrações na educação básica com o intuito de induzir os alunos, utilizando até mesmo alguns softwares (informática), o gosto pelas aulas de geometria.

Por isso, será abordada neste trabalho a Razão Áurea, história, matemática e aplicação, desde as civilizações antigas aos dias atuais. Destacando a importância para a matemática e consequentemente para sociedade; como a razão Áurea está presente no nosso cotidiano e no sistema de ensino. Com objetivo aproximar os alunos à matemática. Esse assunto foi o escolhido por apresentar uma grande aplicação em outras áreas, ou seja, possui uma grande variedade interdisciplinar, além de toda sua beleza e perfeição. Não é a toa que a razão áurea é considerada um símbolo de harmonia.

Como metodologia, foi utilizada uma pesquisa bibiográfica que segundo Gil (2007) é desenvolvido a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. A pesquisa consiste em uma técnica que possibilita ao pesquisador ultrapassar as incertezas e enriquecer a leitura dos dados coletados em seu estudo e evidenciar os fatos que marcaram e que podem ser relevantes para a sociedade.

2 HISTÓRIA DA RAZÃO ÁUREA

2.1 Origem da matemática

Com a necessidade do povo primitivo em encontrar solução para alguns problemas da época, tais como: contagem dos dias, da aferição do peso, das medidas nas colheitas de grãos, surgiram pessoas qualificadas que começaram organizar a economia utilizando símbolos. Devido o grande aumento da população e para obter um melhor controle de suas produções, grandes estudiosos desenvolveram medidas matemáticas para medir o quantitativo produzido durante o período. De acordo com Eves (2005):

> A *Matemática teve origem em alguns povos do Oriente Antigo, sendo utilizada como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Dentre os principais povos do Oriente Médio que influenciaram na evolução da matemática citam-se os babilônicos e os egípcios.*

2.2 As Grandes Civilizações

2.2.1 Os babilônicos

O povo babilônico ficou conhecido na história como grandes intelectuais da área de matemática. Por conta de muitos atos praticados em que eles conseguiam organizar toda a parte políticas de sua nação. De acordo com Eves (2005), os babilônicos são considerados como grandes matemáticos, sua matemática era mais avançada do que a dos povos que viveram no período, podendo ser justificado pelos cálculos de áreas, as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapeizodal. Na Álgebra, os babilônicos eram considerados como construtores de tábuas, calculistas extremamente hábeis, possuindo maior destaque nessa área que em geometria.

2.2.2 Os egípcios

Desde civilizações antigas que os grandes filósofos e matemáticos estudam a Razão Áurea. No Egito, por exemplo, são visíveis as grandes contribuições da razão áureas nas construções das pirâmides em que são utilizados os cálculos geométricos. De acordo com Eves (2005), os egípcios mediam a inclinação de uma face da pirâmide pela razão entre o percurso e a elevação, ou seja, o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura. Logo, percebe-se que é verdade a afirmação de que existe uma relação entre as pirâmides e o número de ouro (1,618). Podemos observar na pirâmide de Khéops, veja figura 1, onde apresenta uma razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base.

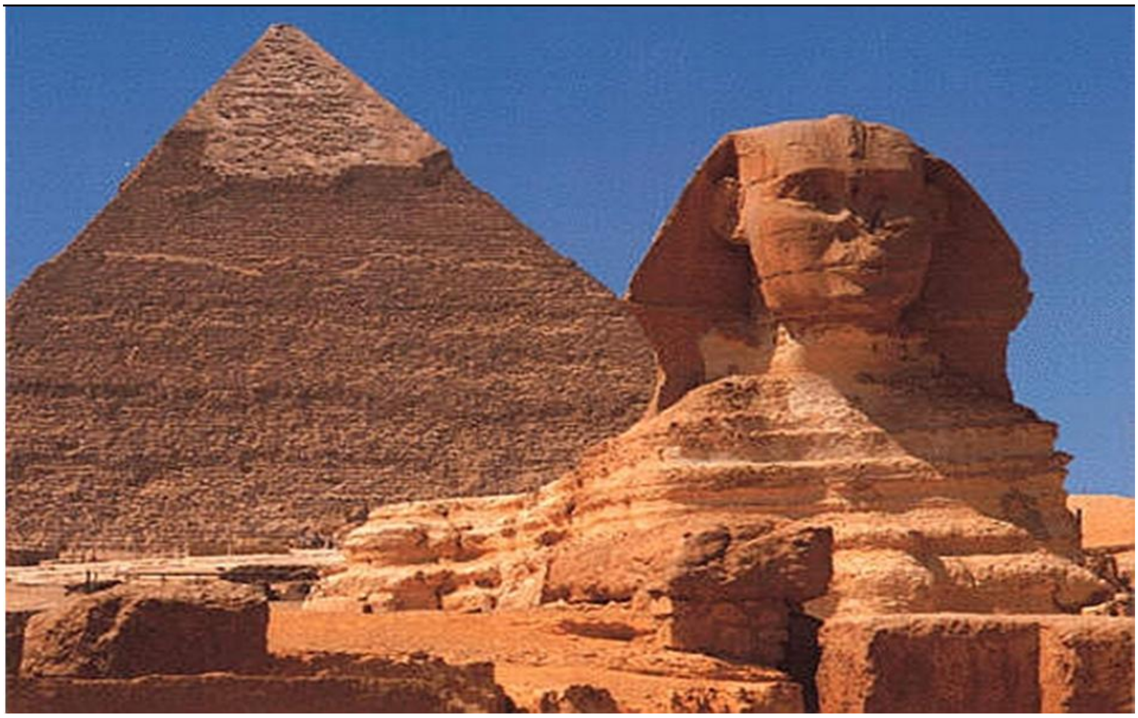

Figura 1 **-** A pirâmide de Khéops, em Gisé.
Fonte: riwersun-math.blogspot.com

Muitos autores publicaram livros sobre o surgimento da razão áurea e que essa foi a primeira civilização a utilizar nas suas mais variadas situações. Lívio (2011), a primeira definição acerca do número de ouro ocorreu por voltas de 300 a.C por Euclides de Alexandria que definiu uma proporção derivada da simples divisão de uma linha que chamou-se de “razão extrema e média”, em seu cálculo encontrou o número que nunca termina e nunca se repete: 1,6180339887... De acordo com Bez (1997), Euclides fez uma construção geométrica, em que determinou o ponto que o seguimento era seccionado na razão desejada. Destaca-se que Euclides propôs o número áureo contido em sua obra os elementos em seu livro II, Teorema11[3].

2.2.3 Os gregos

Um grande filósofo e matemático, em especial merece destaque, e ele é Pitágoras. Sua influência foi tão grande na época entre seus seguidores que foi formada uma sociedade secreta que passou a ser conhecido como pitagóricos. Para os pitagóricos, o número cinco era de suma importância. Prova disso é o fato do pentagrama, isto é, uma estrela de cinco pontas que virou símbolo dessa irmandade. Ele tem relação estreita com o pentágono regular, pois conectando todos seus vértices por diagonais é obtido o pentagrama. No pentágono regular ABCDE (figura 2), tem-se que suas diagonais determinam um pentagrama e, também, um pentágono regular menor no centro FGHIJ, cujas diagonais formam um pentágono e um pentagrama ainda menor. Essa progressão pode prosseguir infinitamente, criando pentágonos e pentagramas cada vez menores.

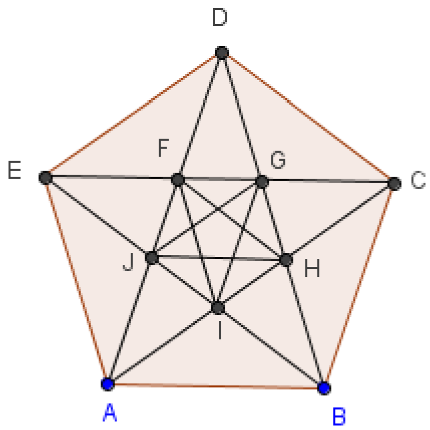

Figura 2 – Representação do pentagrama.

Uma propriedade notável dos diversos pentagramas representados na (FIG.2) é que se olharmos os segmentos de linha em ordem crescente de comprimento podemos provar facilmente, por meio da geometria elementar, que cada segmento é maior que seu antecessor por um fator que é exatamente igual ao Número Áureo.

Outro fato interessante dos pitagóricos é que em suas pesquisas elaborou várias formas até chegar a um determinado número chamado *phi* (ϕ). Mas tarde, a partir do século XX em homenagem a "(86, Contador)", um talentoso escultor grego que viveu por voltas de 490 a.C. a 430 a.C..", chegou-se a conclusão que ele era resultado da proporção áurea, razão áurea e geometricamente seção ou corte. Segundo Contador, caso não existissem os números irracionais descobertos pelos pitagóricos e que para a geometria grega significa um seguimento incomensurável, não existiria a proporção áurea. O estudo das proporções também foi alvo de análises e pesquisas pelos pitagóricos, proporções essas que variam segundo a quantidade de seus termos. Em seguida, verão como Pitágoras conseguiu chegar ao número de ouro, número obtido pelo retângulo áureo (figura 3), retângulo esse que os gregos utilizavam em sua arquitetura, como e visto, mas adiante nas aplicações do número phi, porém utilizaremos uma demonstração de melhor entendimento, mas que tem a mesma lógica da demonstração de Pitágoras. Por isso que tratamos os pitagóricos como notáveis em relação a história da matemática, pois naquela época eles já desempenhavam, de forma bastante agressiva, um papel de protagonista e trabalho em busca de desenvolver uma matemática capaz de atender os anseios da sociedade.

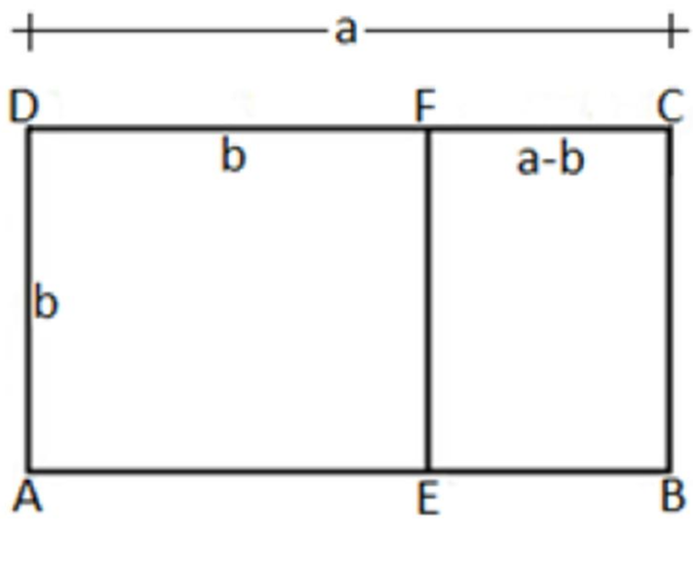

Figura 3 – representação do retângulo áureo

2.3 Como surgiu a razão áurea

Razão Áurea surgiu a partir de trabalho utilizando proporções matemáticas e determinadas através de sequências deduzindo algebricamente e geometricamente série de raízes e frações. As sequências infinitas divididas em série de frações e série de razões, Lanna (2013) elucida que o número áureo pode ser encontrado com o uso de frações sucessivas, normalmente representadas com a, b, c, d, e, tendo-se a aproximação do número áureo com a quantidade de número 1 em uma representação de série de frações. O valor varia em torno do número de ouro, sendo maior ou menor alternadamente, mas sempre se aproximando dele, conforme apresenta a expressão:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Câmara e Rodrigues (2008) para explicar a obtenção do número de ouro em série de frações denota o seu valor por **x**, explicando que ao observar a série de frações será possível notar que o denominador da segunda parcela é o próprio **x**, com isso tem-se a formação da seguinte equação de primeiro grau: $x = 1 + \frac{1}{x}$, multiplicando-se os dois lados por x obtém-se uma nova equação, dessa vez de segundo grau: $x^2 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$, encontrando-se aqui a equação que define a Razão Áurea.

Por série de raízes o Número de Ouro pode ser definido da seguinte forma: $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots}}}}}$, onde a resolução é processada da seguinte maneira: iguala à fração ou série a “x” e elevam os dois termos ao quadrado, como segue, $x^2 = \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots}}}}}\right)^2$, ficando $x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots}}}}}$, substituindo $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots}}}}}$ por (x), chega-se a equação

$x^2 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$, onde se encontra novamente a equação que define a Razão Áurea.

3 O NÚMERO DE OURO

Para ter ideia de como encontrar o número de ouro através de uma expressão matemática devemos observar que o número de ouro é um número irracional, misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão. Dizemos que um ponto divide um segmento em média e extrema razão significa que este fora seccionado de forma notável. Dando origem a dois segmentos desiguais. Partindo desses segmentos temos a razão áurea, ou seja, a relação que a define como: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, ver tabela:

Substituindo-se $AC = a, CB = b$ e $AB = a + b$ na relação $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, fica: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \rightarrow a^2 = ab + b^2$, com $a \neq 0$, segue que: $1 = \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2$.

Então definindo $m = \frac{b}{a}$ obtemos a seguinte equação do segundo grau: $m^2 + m - 1 = 0$, cujas soluções são: $m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mas como a e b são positivos, rejeitamos $m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e consideramos a outra solução $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398$ que é chamado de Número de Ouro.

4 FIBONACCI

Para completar a história da razão áurea neste trabalho, não podemos esquecer um dos estudiosos de matemática que trouxe grandes contribuições para o entendimento do número de ouro. Leonardo de Pisa, italiano que ganhou o apelido de Fibonacci por conta do nome de seu pai que tinha o nome de Bonaccio. O matemático ficou conhecido e famoso por sua obra *Liber Abaci* (*Livro de Ábaco*) escrito em 1202, que foi primordial e importante para o desenvolvimento da matemática, considerando que foi a partir dessa obra que os números indus-arábicos ficaram conhecido na Europa. (*BELUSSI et al., 2008*). Fibonacci criou uma sequência que ficou conhecida pelo seu nome e foi expressa em forma de problema envolvendo coelhos em que a expressão ficou da seguinte forma: $\mathbf{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$. Tal expressão representa o número de pares de coelhos em determinado mês, é a soma dos pares de coelhos existentes nos dois meses anteriores a este. (figura4)

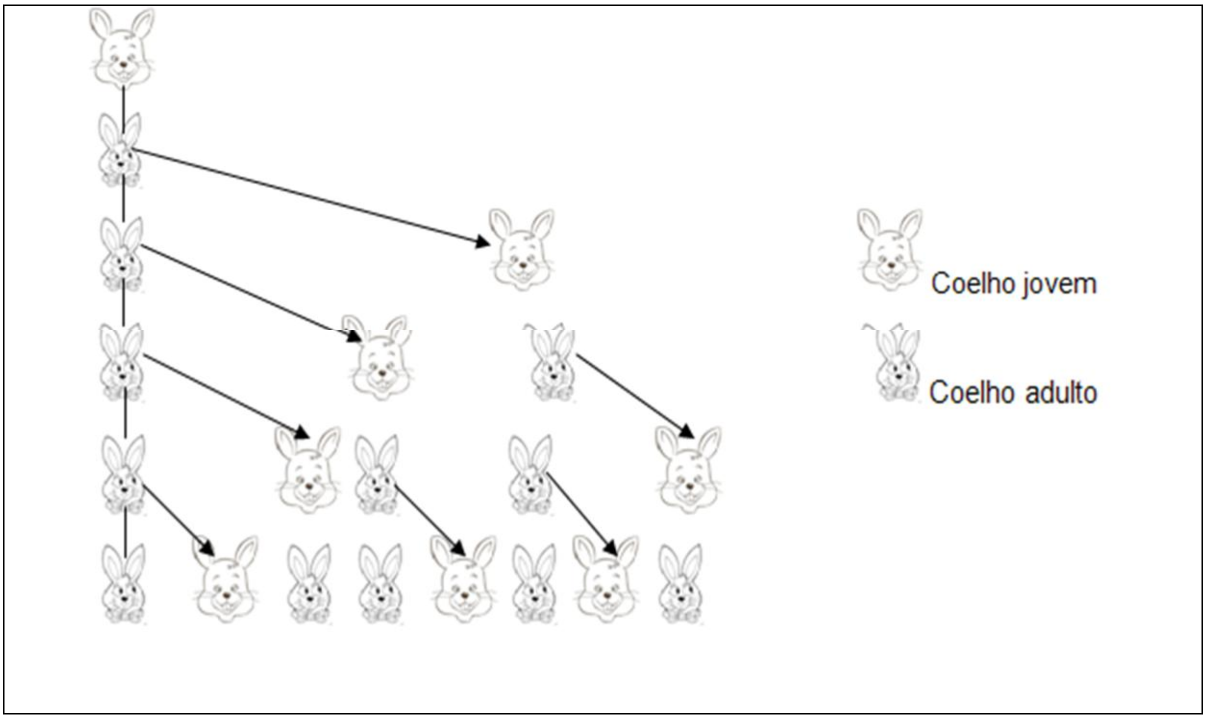

Figura 4 **–** Problema do coelho na sequência de Fibonacci

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando o esboço da figura 4, percebe-se que o número de pares de coelhos adultos segue a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,... sendo cada termo, a partir do terceiro, igual à soma dos dois termos anteriores. Ela foi denominada no século XIX, pelo matemático Frances Edouard Lucas (1842-1891) por sequência de Fibonacci. À medida que se avança nessa sequência, a razão entre dois números sucessivos de Fibonacci oscila em torno da Razão Áurea (figura 5), propriedade descoberta em 1611 pelo famoso astrônomo Johannes Kepler.

Seqüência de Fibonacci	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Razão		1	2	1,5	1,666...	1,6	1,625	1,615...	1,619...	1,618...	1,618...

Figura 5 - Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea

Segundo Lívio (2011, P.117), o nome de fibonacci é tão famoso hoje porque a sequência de Fibonacci está longe de ficar limitada á reprodução de coelhos, [...].

Logo, a sequência é encontrada em vários fenômenos, como também em muitas relações expostas no dia a dia. Esta exposição detalhada da razão áurea encontra-se ligada diretamente à sequência de Fibonacci, que de acordo com Lívio (2011, p. 115):

> O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo, mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações. As contribuições diretas de Fibonacci para a literatura da Razão Áurea aparecem no livro pequeno sobre Geometria, Práctica Geometriae “Prática de Geometria”, que foi publicado em 1223, ele apresentou novos métodos para o cálculo da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do decágono a partir do diâmetro do círculo inscrito e do circunscrito, e computações de volumes e do dodecaedro e do icosaedro, todos os quais estão intimamente ligados à Razão Áurea. (LIVIO, 2011, p. 115)

A partir da sequência de Fibonacci é possível construir um retângulo e dele um espiral que ficou conhecido como espiral áureo, conhecidos por estarem presentes em trabalhos de artistas como Leonardo da Vinci que será mais bem abordado no tópico a seguir. Na Figura 6, demonstra-se o retângulo e o espiral áureo formado a partir da sequência de Fibonacci:

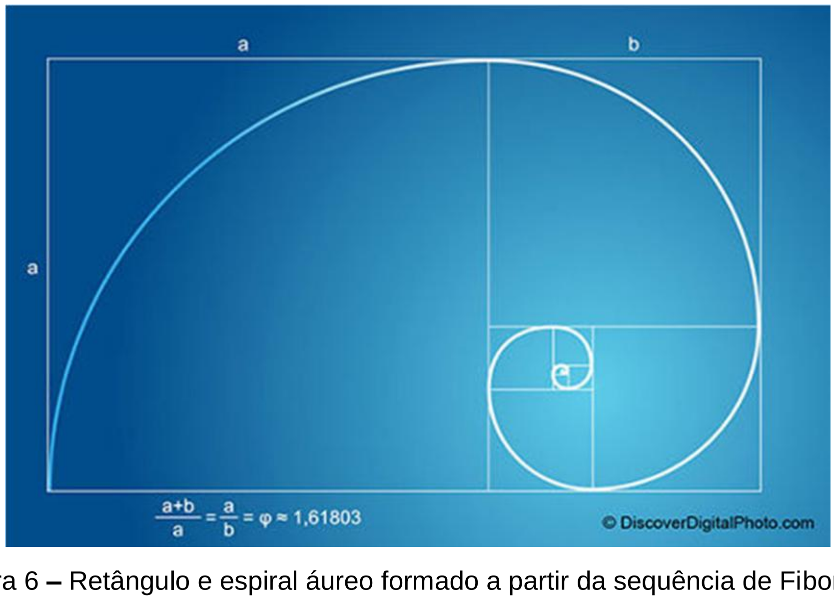

Figura 6 – Retângulo e espiral áureo formado a partir da sequência de Fibonacci

Fonte: Silva (2013)

No Retângulo de Ouro, em que a razão entre o lado maior e o lado menor é o número Phi, a razão entre a largura e o comprimento do retângulo de ouro foi considerada a mais agradável visão para construirmos um retângulo que apresente entre os seus lados a razão de ouro. Logo, de modo claro, percebemos a contribuição de Fibonacci na construção do número de ouro e principalmente através desta Espiral de Fibonacci formada por um retângulo que até hoje inspira o homem e dá forma a diversas máquinas da atualidade.

Nos dias de hoje, podemos perceber que a sequência de Fibinacci também é muito utilizada. Grandes empresas utilizam a razão áurea para fabricar os mais variados tipos de produtos. A figura 7 ilustra uma TV, que é um dos objetos mais vendidos do mundo e consequentemente um dos mais utilizados pela população mundial. E ela é mostrada de forma em que podemos perceber a proporção áurea em sua formatação. E essa forma de retângulo áureo demonstra proporções harmônicas para o ambiente e conforto visual do telespectador.

Figura 7 – Retângulo áureo em um televisor
Fonte: Gomes (2014)

5 APLICAÇÕES DA RAZÃO ÁUREA

5.1 Na natureza

5.1.1 Nas folhas e talos das plantas

Uma perfeição natural percebido nos mais diversos lugares demonstra que a Razão Áurea está presente na natureza. Nas plantas, nas flores, ou até mesmo em um molusco encontramos as proporções harmônicas entre a natureza e a razão áurea. Como disse Bez (1997), esse fator indica que a natureza foi matematicamente definida, o que justifica ser tão bela. O mundo completamente dependente da natureza faz com que os homens possam estudá-la e a matemática pode demonstrar que existe uma ligação perfeita ou por não dizer divina. De acordo com Alencar (2004), o número áureo pode aparecer em diferentes situações no mundo vegetal como, por exemplo, o arranjo dos galhos nos troncos das árvores costuma seguir uma sequência de Fibonacci, conforme percebido na figura 8.

Lívio (2011, p. 129) descreve*:*

> As folhas ao longo do galho de uma planta ou os talos ao longo de um ramo tendem a crescer em posições que otimizariam sua exposição ao sol, à chuva e ao ar. À medida que um talo vertical cresce, ele produz folhas em pontos com um espaçamento bem regular. No entanto, as folhas não crescem diretamente uma sobre a outra, pois isso impediria que as folhas de baixo recebessem a umidade e a luz do sol de que eles necessitam. Em vez disso a passagem de uma folha para a seguinte (ou de um talo para o seguinte ao longo dos ramos é caracterizada por espaçamento do tipo parafuso em volta do ramo). (LIVIO, 2011)

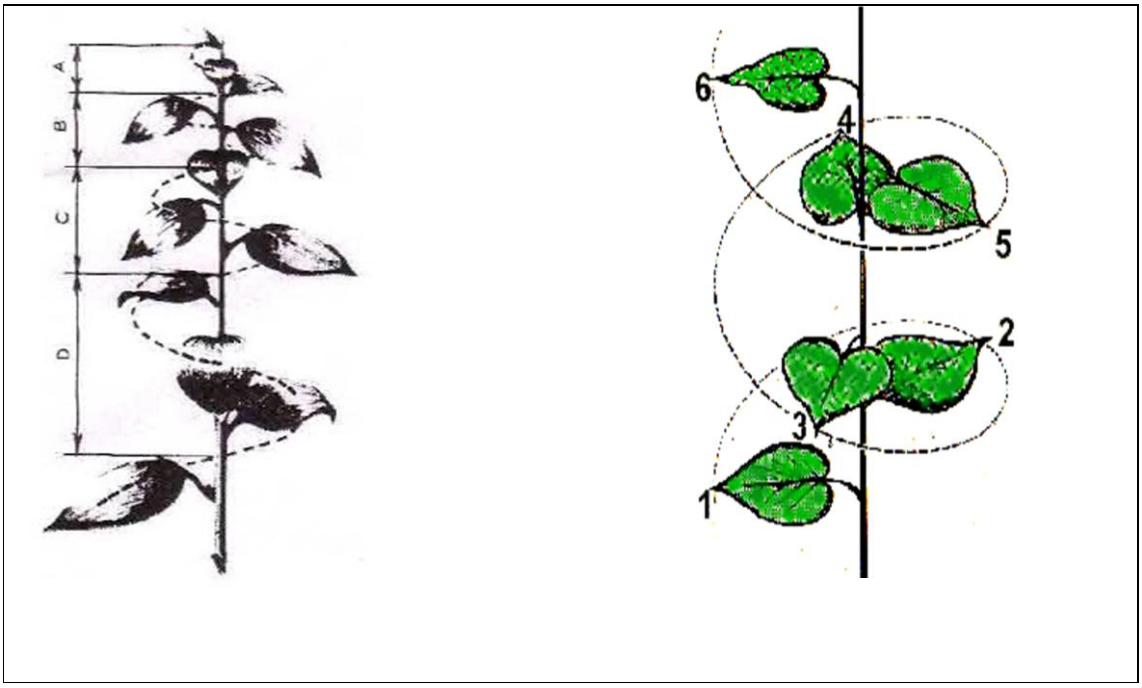

Figura 8 **–** Razão Áurea na distância entre folhas e talos de uma planta
Fonte: artematematica.blogs.sapo.p

Assim, tem-se um padrão existente nas plantas em relação a essa distância que se calculada resulta em uma Razão Áurea. A Figura 8 ilustra a distância entre as folhas e os talos de uma planta.

5.1.2 Nas rosas

Percebemos também a sequência na presença da espiral de Fibonacci e os seus números correspondentes, como por exemplo: uma crescente a partir das medidas Áureas sucessivas em algumas pétalas de rosas, conforme figura 9.

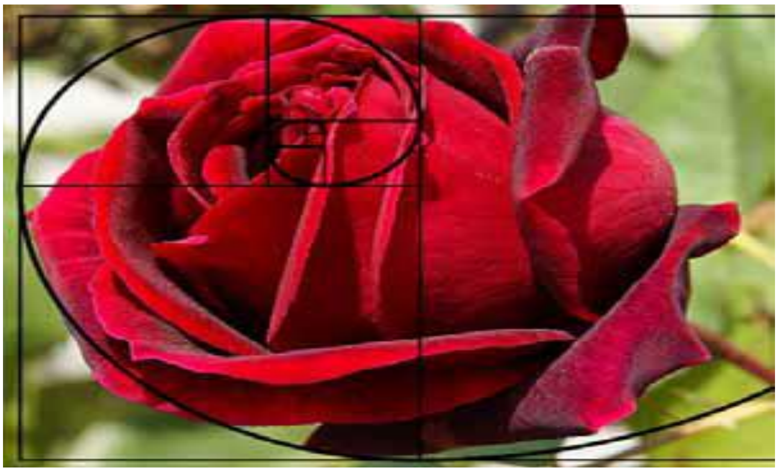

Figura 9 **–** Razão Áurea nas rasas
Fonte: artematematica.blogs.sapo.pt

5.1.3 Nas sementes de um girassol

Lauro (2005) cita a Razão Áurea nas flores, segundo o autor se um pentágono estrelado for traçado a frente de suas pétalas se obterá a Razão Áurea: Nas flores, destaca-se o girassol, de acordo com Belussi *et alli* (2008), a forma como suas sementes estão dispostas formam espirais logarítmicos que tanto curvam para a direta quanto para a esquerda, conforme pode-se perceber na Figura 10:

Figura 10 **–** Razão Áurea nas sementes do girassol
Fonte:pegasus.portal.nom.br

5.1.4 *No enxame de abelhas*

Observamos, então, que a Razão Áurea é vista de forma bastante contundente na natureza. O número de ouro poder ser encontrado também em vários locais e em muitas situações. Além da já exposta, ele pode ser percebido na fauna, como por exemplo, na concha de um molusco *nautillus*, em uma população de abelhas e até mesmo em um peixe. Um fato interessante é visto na criação de abelhas em que podemos calcular o número de fêmea com o número de machos como sendo uma razão áurea. Segundo Bez (1997, p. 58): “os totais de todos os machos, todas as fêmeas e todas as abelhas de ambos os sexos os quais constituem cada geração, poderemos verificar a presença da sequência de Fibonacci em cada uma das situações”. Para demonstrar, Bez (1997) desenhou a genealogia do zangão, informando que para entendimento deve-se conhecer que o zangão somente nasce de ovos não fecundados, conforme figura 11.

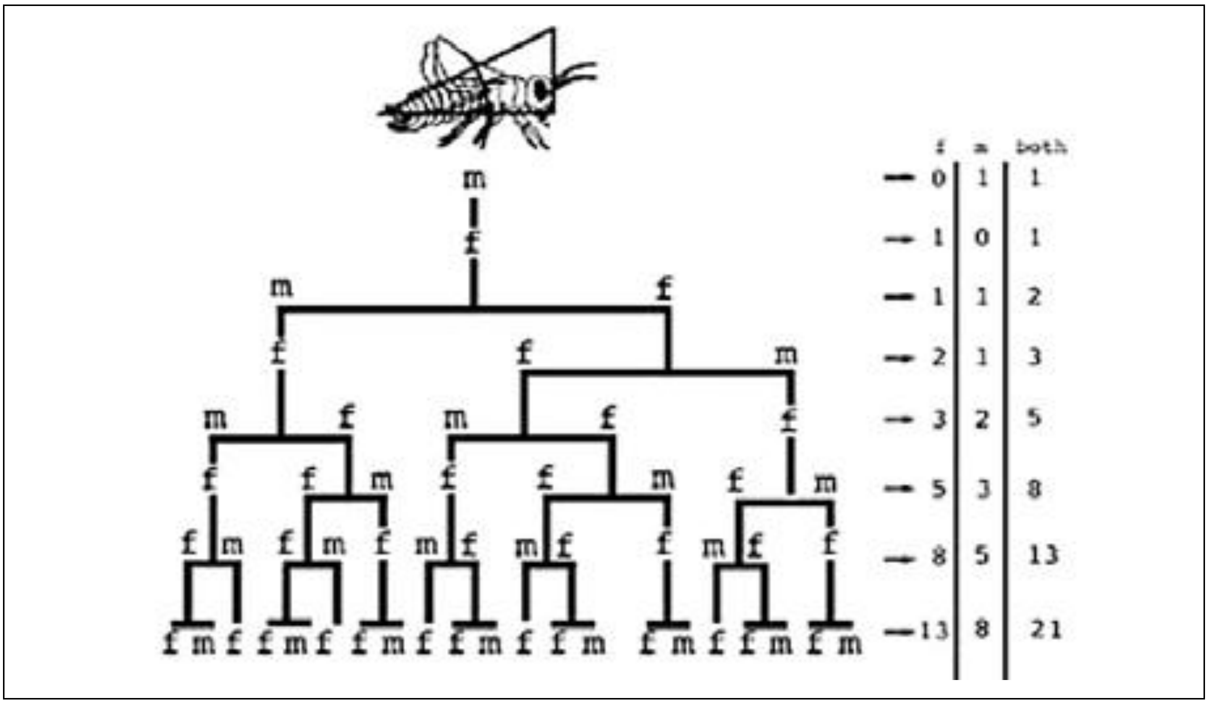

Figura 11 – Razão Áurea na genealogia do zangão
Fonte: Bez (1997).

5.1.5 *Nos peixes*

Nos peixes também iremos encontrar os valores de Fibonacci e Phi, tanto nas medidas de articulações, número de ossos, diferenças nas proporções simétricas ou no número de escamas, conforme figura 12.

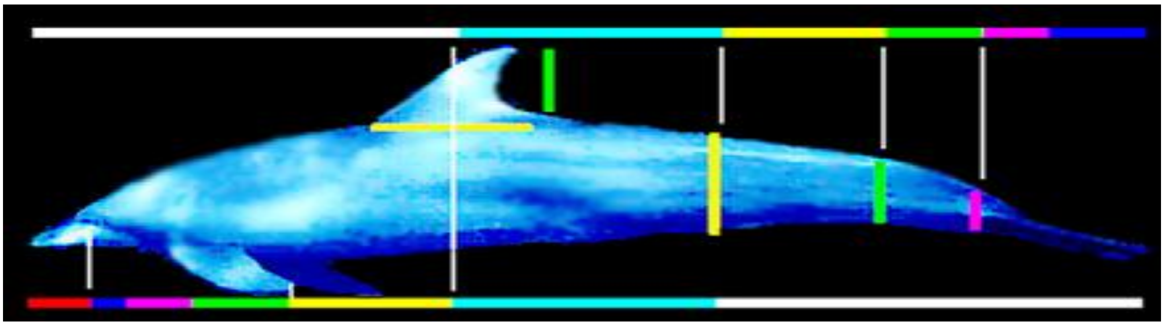

Figura 12 – Razão Áurea na anatomia dos peixes
Fonte: Bez (1997).

5.2 Na arquitetura

5.2.1 Na construção de templos

Exemplos arquitetônicos que utilizavam a proporção áurea usando grandes projetos foram as pirâmides feitas no Império egípcio. O número áureo na arquitetura foi bastante usado no período da Renascença, segundo Proença (2003, p. 79), a principal característica das obras desse período era criar espaços proporcionais, com o intuito de permitir que “o observador possa compreender a lei que o organiza”, de qualquer ângulo que esteja. Como obra arquitetônica desse período em que se pode encontrar a Razão Áurea cita-se a Basílica de São Pedro, figura 13.

Figura 13 **–** Razão Áurea na Basílica de São Pedro
Fonte: www.nasentrelinhas.com.br

5.2.2 Nos formatos das cidades

Fala-se que até hoje as grandes construções são montadas em medidas sucessivas de séries de Fibonacci. As formas áureas sempre foram utilizadas e adoradas por grandes artistas, e podemos encontrá-las desde grandes monumentos. Nos Estados Unidos da América, a cidade de Nova Orleães apresenta uma forma de Fibonacci na sua planta metropolitana, como visto na figura 14.

Figura 14 **–** Razão Áurea na cidade de nova Orleães
Fonte: www.nasentrelinhas.com.br

5.3 Nas artes

Vários artistas renomados utilizaram a razão áurea em suas obras de artes. Auto-retracto de Leonardo Da Vinci é um exemplo. Conforme destaca *Lívio* (2011), os artistas também perceberam a beleza dos espirais logarítmicos. *Lívio* (2011) destaca a obra de Leonardo da Vinci como exemplo da Razão Áurea na arte, em sua obra Mona Lisa. Particularmente, na Mona Lisa, o pintor conseguiu colocar os traçados com maiores conceitos de beleza e perfeição, estabelecendo o retângulo áureo, conforme descreve Martins (2008). Já, Lauro (2005) destaca que se um retângulo áureo for desenhado em torno de seu rosto, é possível perceber que está dentro das proporções da Razão Áurea, após isso, pode-se subdividir esse retângulo usando a linha dos olhos para traçar uma reta horizontal, encontrando-se novamente a Razão Áurea, essa mesma exploração pode ser feita em outras partes do rosto na pintura, conforme demonstra a Figura 15,

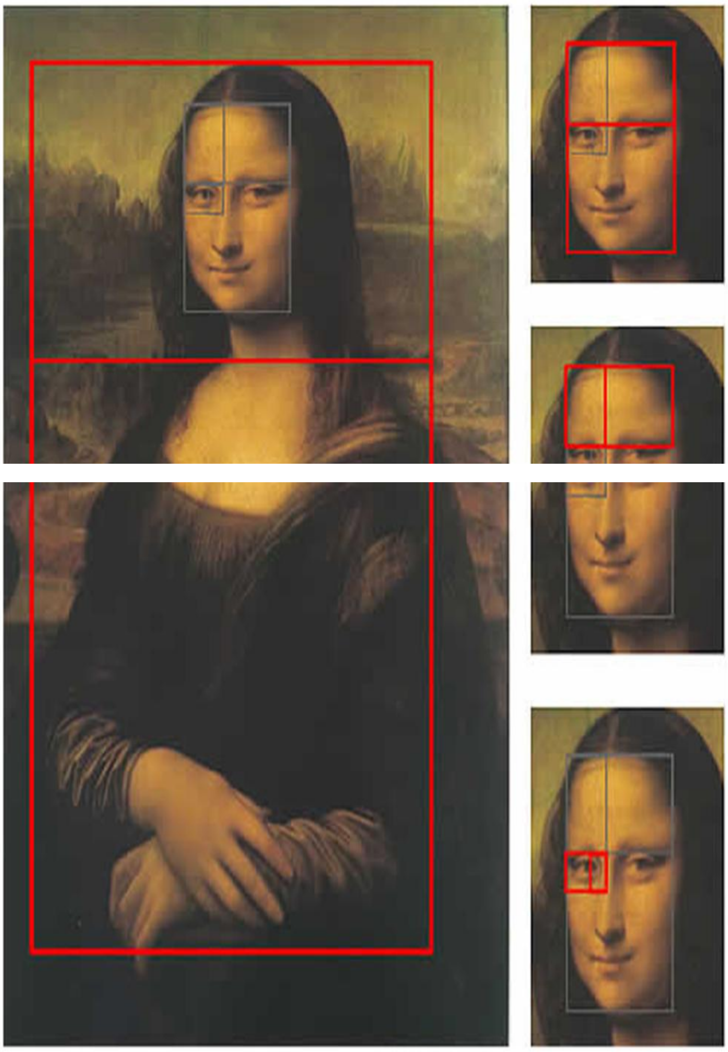

Figura 15 – Razão Áurea no quadro a Mona Lisa
Fonte: kopa.com.br

Além de Leonardo da Vinci outros artistas também pintaram outras obras que demonstram estarem em proporções áureas. Na obra “O Nascimento de Vênus” de Botticelli, Afrodite está na perfeição áurea. De acordo com Sousa Neto (2013), a proporção estaria ali pelo motivo de o autor ser um legítimo representante da beleza e da perfeição, conforme figura 16.

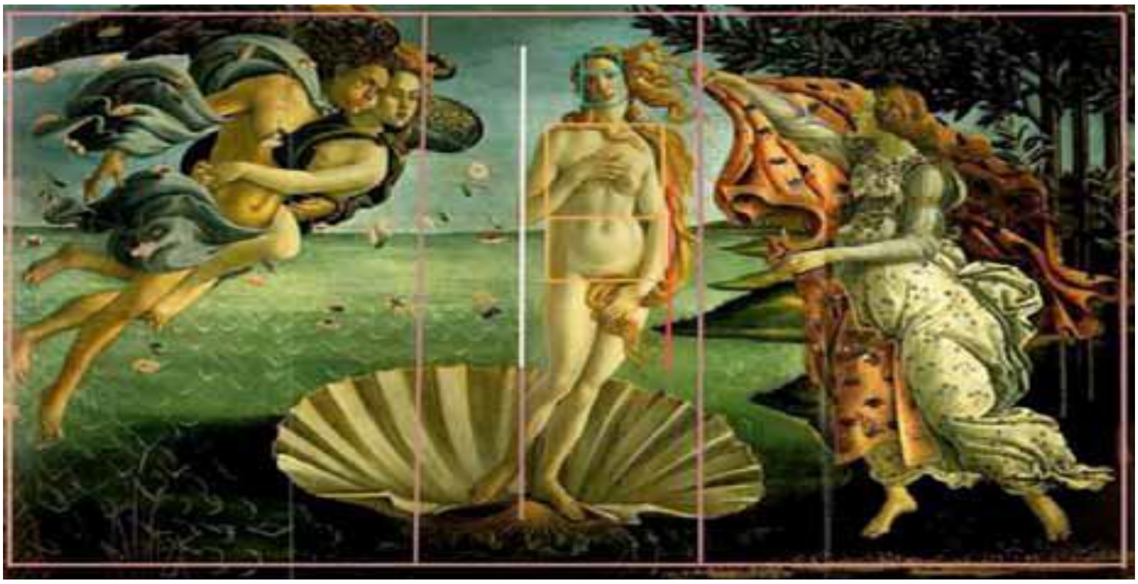

Figura 16 – Razão Áurea em O Nascimento de Vênus
Fonte: Wikipédia (2012).

5.4 No corpo humano

A razão áurea no corpo humano é demonstrada em torno de um padrão simétrico em toda sua natureza. O número de ouro segue um padrão de série de Fibonacci. As medidas das articulações segue proporcionalmente a ordem de um número que é o número de ouro. Enquanto o número de ossos segue proporcional ao número de Fibonacci. Se medirmos a medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo e dividirmos esses valores, o número será Phi. Segundo Sousa Neto (2013, p. 49):

> Na razão entre a altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão, na razão entre a medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo, na razão entre a altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça, na razão entre a medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax, na razão entre a medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho até o chão, na razão entre a medida do ombro à ponta do dedo e a medida central até a ponta, na razão entre a medida do cotovelo até o pulso e a medida do seu pé, entre outros. Segundo especialistas da área da beleza estética, uma orelha perfeita seria aquela que se encaixaria em uma espiral logarítmica, mas precisamente a espiral áurea, que é um caso particular. (Sousa Neto, 2013)

De acordo com Sousa Neto (2013), em seus estudos sobre anatomia, trabalhou com o homem vitruviano, um cânone das proporções do corpo humano nas proporções da figura humana de Da Vinci, pode-se encontrar a Razão Áurea, conforme figura 17 e 18.

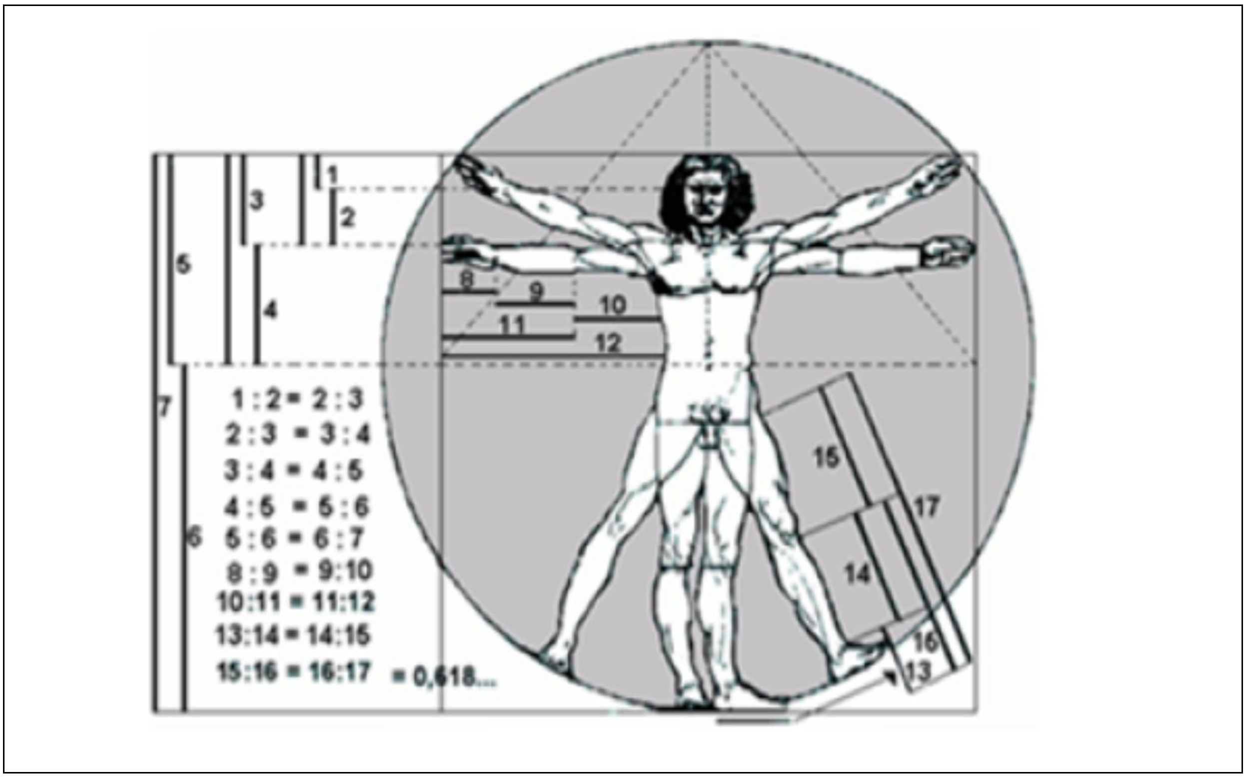

Figura 17 – Figura Humana de Da Vinci
Fonte: Sousa

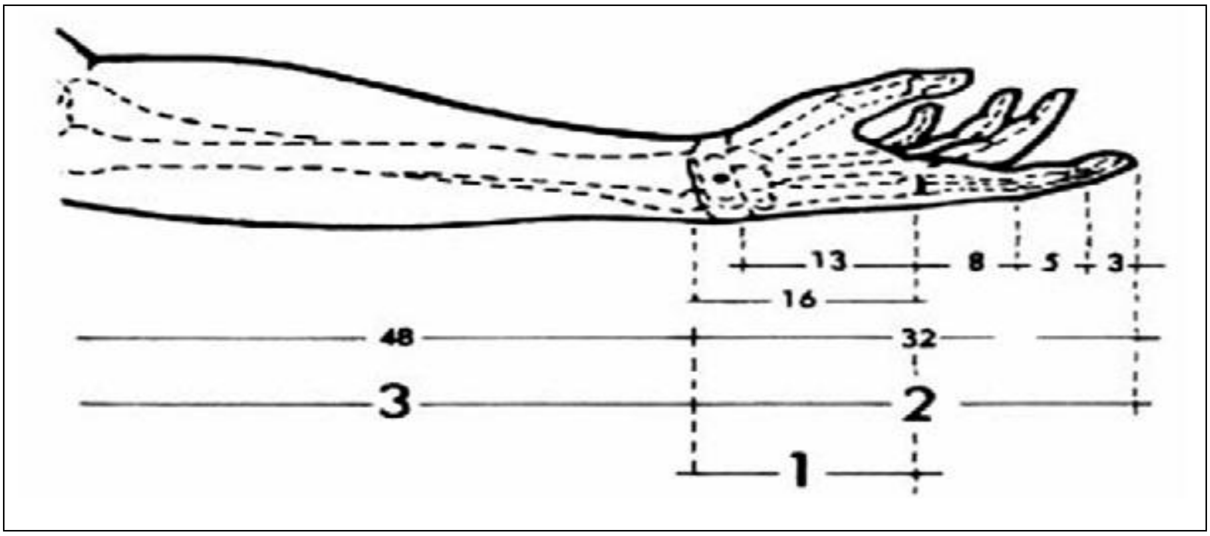

Figura 18 – Figura antebraço humano
Fonte: Wikipédia

Com isso, percebemos que o corpo humano indica proporção de estética e harmonia com a beleza. No Homem Vitruviano de Leonardo Da Vinci é o Modelo base para compreendermos todos estes mecanismos. Qualquer diferença comparável de um mecanismo móvel no nosso corpo terá sempre presente o Número de Ouro inserido. Tanto em visualização frontal ou de perfil os modelos podem alternar, mas as medidas médias serão correspondentes aos números de Ouro. Os elementos faciais estão enquadrados na Proporção Áurea, se medirmos o eixo horizontal de um olho comparado com o espaço da zona superior do nariz ou até à orelha, o número será o número de ouro, como segue figura 19.

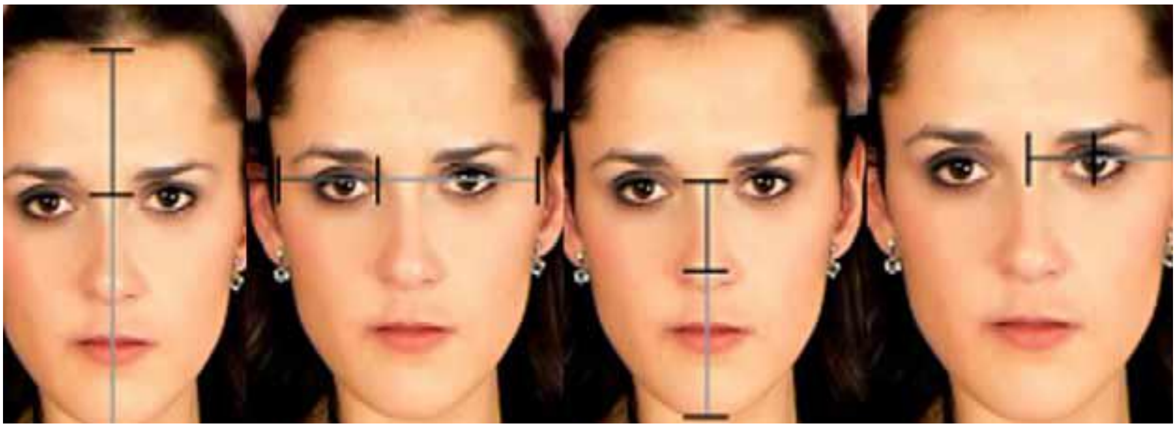

Figura 19 – Figura de faces humanas
Fonte: Wikipédia

6 RAZÃO ÁUREA E MATEMÁTICA

6.1 Definições

6.1.1 Geométrica

Dizemos que um segmento está dividido pela Razão Áurea, quando colocamos sobre este segmento um ponto C entre os pontos A e B, sendo AC>BC de tal forma que AC dividido por BC seja igual a AB dividido por AC, Como mostra a figura abaixo:

Da definição acima chegamos a seguinte relação $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC}$.

6.1.2 Algébrica

Fazendo $AC = a$ e $BC = b$ e substituindo na relação $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC}$, temos**:**

$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Se fixarmos o **b**, encontraremos o valor de **a** em função de **b**, para que possamos encontra o valor de $\frac{a}{b}$. Aí, temos: $a^2 = ab + b^2 \rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$.

Como fixamos o b temos na equação: $a^2 - ab - b^2 = 0$, $a = 1, b = -b$ e $c = -b^2$.

Agora utilizando Báscara, temos**:** $a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-b)^2 - 4.1.(-b^2)$$
$$\Delta = b^2 + 4b^2$$
$$\Delta = 5b^2$$

Daí, concluímos que: $a = \frac{-(-b) \pm \sqrt{5b^2}}{2.1}$

$$a = \frac{(b) \pm b\sqrt{5}}{2}$$
$$a = \frac{b(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Como a e b são seguimento de reta em que não pedem assumir valores negativos, $\frac{a}{b} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1{,}6180339887.. = \text{nÚmero de ouro}$, temos que invertendo os números também encontramos a razão áurea, veja: $\frac{b}{a} = 0{,}6180339887.. = \text{nÚmero de ouro}$.

7 CONCLUSÃO

Cercado de mistério a Razão Áurea ou Número de Ouro ou também Proporção Divina foi escolhida para ser abordado neste trabalho, pois quando pesquisado foi percebido que uma parte tão misteriosa que envolve a matemática não faz parte do currículo do sistema de ensino. Contudo, existem trabalhos bem elaborados que mostram o Número de Ouro presente na natureza, na arquitetura, na música, entre outros. Também se observou que esta razão está envolvida de curiosidade matemáticas, onde poderia ser estudado no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. A sequência de Fibonacci apresentada indica que se pode desenvolver trabalho em várias áreas de matemática e no desenvolvimento da criatividade ao explorar sequência de razão, divisão, proporção, números irracionais, equação de 2º grau e até mesmo compreensão de problemas.

Historicamente as civilizações buscaram formas para desenvolver a Razão Áurea por grandes estudiosos, tais como: Pitágoras e Fibonacci. Justamente pelo número de ouro estar envolvido por tantos mistérios e curiosidades que este trabalho tomou esta proporção, visto que poderia se apresentar como uma forma de atrair e motivar aos alunos para o ensino de matemática no cotidiano.

8 REFERÊNCIAS

ALENCAR, Maria Efigênia Gomes de. **O número φ e a sequência de Fibonacci. Física na Escola,** v. 5, n. 2, 2004.

ÁVILA, Geraldo. Retângulo Áureo, **Divisão Áurea e Sequência de Fibonacci**. Revista do Professor de Matemática. – São Paulo, v. 6, p. 9-14, 1985.

AZEVEDO, A. **Sequências de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática**. – São Paulo, v. 45, p. 44-47, 2001.

BELUSSI, Giuliano Miyaishi; GERALDINI, Daniel Aparecido; PRADO, Enéias de Almeida; BARISON, Maria Bernadete. **Número de Ouro.** Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, 2008.

BEZ, Edson Tadeu. **Relacionando padrões entre sequência de Fibonacci, seção áurea e termos pitagóricos.** [Monografia] Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

CÂMARA, Marcos Antônio da; RODRIGUES, Melissa da Silva. **O número φ**. **FAMAT em Revista**, n. 11, outubro de 2008.

CARVALHO, Jurandir Jacques de**. Razão Áurea** Universidade Federal de Minas Gerais Departamento de Ciências Exatas. 2008.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática.** Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2005.

FERNANDES, Diogo José Matos de**. Série de Fibonacci e o Número de ouro**.

GARCIA, Vera Clotilde; SERRES, Fabiana Fattore; MAGRO, Juliana Zys;, Taís Bruno de. **O número de ouro como instrumento de aprendizagem significativa no estudo dos números irracionais.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, 2004.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa** / Antonio Carlos Gil. São Paulo: Atlas, 2007

LANNA, Valéria. **Raciocínio lógico e Matemática:** Para técnica e analista dos tribunais e do MPU. 2.ed. Bahia: Editora *Jus*Podivm, 2013.

LANDIM, Nilo Pinheiro- **Razão Áurea expressando a beleza desse número para o ensino médio** – Universidade Federal Rural do Semi Árido Pro reitoria de pesquisa e Pós-Graduação Programa de Pós-Graduação em Matemática. Mossoró-RN 2014.

LAURO, Maira Mendias. A Razão Áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Revista Exacta**, São Paulo, p. 35-48, 2005.

PROENÇA, Graça. **História da arte.** São Paulo: Ática, 2003.

LÍVIO, Mário. **Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente.** Tradução: Marco Shinobu Matsumura. – 6. ed. – Rio de Janeiro: Record, 2011.

MARTINS, Leocádia Figueiredo. **Motivando o ensino de Geometria.** [Monografia] Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC. 2008

MORAIS DA SILVA, Luiz Henrique. **O Número de Ouro no ensino da matemática na educação básica** - Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto 2013.

OLIVEIRA, E.; FERREIRA, T. E. **O Número de Ouro e suas manifestações na Natureza e na Arte.** Revista Complexus. – Instituto Superior de Engenharia Arquitetura e Design – Ceunsp, Salto-SP, Ano. 1, n_ 2, p. 64-81, Janeiro/2014.

PARÃMETROS CURRICULARES NACIONAIS**: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Secretaria de Educação Fundamental.** – Brasília: MEC/SEF,1997.(2005).

RODNEI ALVES MARQUES – RAZÃO ÁUREA: **Uma proposta para o ensino de números irracionais** UFL – Universidade Federal de Lavras - MG. 2013.

SOUSA NETO, Pablo Roberto. **A aplicação do número de ouro como recurso metodológico no processo ensino-aprendizagem.** [Dissertação de Mestrado], 2013