UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
INSTITUTO UFC VIRTUAL

IANA KELLY VIEIRA BEZERRA

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE O NÚMERO π

QUIXADÁ – CEARÁ
2015

IANA KELLY VIEIRA BEZERRA

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE O NÚMERO π

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto UFC Virtual da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para à obtenção do grau de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador: Prof. Esp. Adailson Ramon Pinheiro de Oliveira.

Quixadá – CE

Dezembro de 2015

“Alguma coisa só é impossível, até que alguém duvide e resolva provar o contrário”.

(Albert Einstein)

Dedico este trabalho a Deus em primeiro lugar, porque sem ele não sou nada, a minha família, em especial minha mãe que sempre esteve ao meu lado e me deu forças quando eu quis fraquejar, ao meu noivo que me apoiou e incentiva em meus projetos e aos meus colegas de turma que confiaram em mim.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que é minha fortaleza e fonte inesgotável de valores, a minha família, especialmente minha mãe que nunca me deixou desistir e que se sou o que sou é porque a tenho como meu maior exemplo de vida, quando eu fraquejei foi ela quem me deu a mão e me segurou para não cair. Além de minha família, tenho os melhores amigos, em especial minhas duas melhores amigas a quem devo agradecer por estarem ao meu lado nos dias ruins e nos bons, e meus colegas de curso, hoje somos poucos, mas o que importa não é a quantidade é a qualidade. Minhas sinceras palavras também vão para todos os professores que passaram por mim, deixando-me mais forte para seguir em frente com meu sonho de lecionar. Por último e não menos importante agradeço meu noivo e futuro esposo, que sempre acreditou em mim e apoia todos os meus projetos de vida, e não contenho tamanha felicidade em saber que passarei minha vida com ele. Enfim, obrigada a todos que torceram por minha vitória, que espero almejar.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo tornar conhecida um pouco da história do número π, cujo contexto trata de como os antigos egípcios deram uma grande contribuição para o estudo do mesmo, assim como a de Arquimedes de Siracusa e dos chineses. Destacaremos ainda a abordagem do π durante a evolução dos séculos, especificamente por volta do século XVI até o século XX, onde neste último houve o avanço da computação. Para tanto, iremos tratar da demonstração de algumas fórmulas importantes de como calcular o π, bem como analisar quais estudiosos puderam ter maior aproximação de quantas casas decimais possui π, a serem citados: François Viète, John Machin e James Gregory. Dessa forma, notamos que π é muito importante para a matemática, sendo que os estudiosos o adoram, e desde os tempos antigos ele era sinônimo de estudo, visto que todos queriam descobrir os dígitos desconhecidos desse número, e hoje em dia já podemos saber muitos, mas antigamente quando não havia computador os matemáticos penaram para achar, e é uma história fascinante.

Palavras chaves: História do π, Fórmulas do π, Dígitos de π.

Abstract

This work aims to make known a little history of the π number, whosesoever context treat how the ancient Egyptians gave a great contribution to the study of It, like that of Archimedes of Syracuse and Chineses. Also highlight the π approach during the course of the centuries, specifically around the XVI Century to the XX Century, where in the latter was the advancement of computing. Therefore we will treat the statement of some important formulas to calculate π and analyze the scholars who had larger approximation of how many decimal places have π, are: François Viète, John Machin and James Gregory. Thus, we note that π is a very important number for mathematics, and scholars think is very useful, and since ancient times It was synonymous with study, once everyone wanted to discover the unknown digits of that number, and today we already know a lot, but back when there was no computer mathematicians needed many years to find so, It's history fascinating.

Keywords: History of **π**, **π** Formulas, Digits of **π**.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Falar de matemática é se aventurar num mundo diverso, importante e interessante, agora falar do π e de como ele é importante para todos é algo sensacional. Aqui estará mostrando uma breve história e os principais colaboradores para que essa história acontecesse, pois se fossemos falar do π ao todo, não estaríamos despertando a curiosidade para o leitor ir à busca e descobrir que além do que está escrito aqui, existe muito mais coisas que despertam total interesse.

Os povos antigos tiveram sua marca na história, assim como Arquimedes de Siracusa, Viète, Marchin e Gregory, dentre outros muito importantes para que toda essa história acontecesse.

Devemos também lembrar que o π se chama (pi) por algum motivo, e vamos conhecer o porquê desse nome, além de viajar pelos séculos XVI, XVII, XIX e XX, obviamente destacando apenas o que estamos estudando.

Podemos dizer que o computador hoje é algo que praticamente todas as pessoas têm, ou mesmo acesso à internet pelo celular, pois ele também teve grande importância para o avanço do nosso número, e com a ajuda do computador hoje podemos calcular o π mais rapidamente.

E sobre π ser um número racional e não poder ser escrito em forma de fração, isso mesmo, ele é um número transcendente, vamos saber um pouquinho do que significa e por último teremos algumas demonstrações de formulas importantes que foram construídas na base de muito conhecimento.

Agora vá em frente e se aventure no conhecimento de um número tão importante para a matemática.

2 Uma breve história de π

Figura 1: Aproximação de π

A letra π vem do grego, que significa perímetro, e foi popularizada por Leonhard Euler, como veremos mais a frente, podemos dizer que esse número já era conhecido por diversos povos antigos, que com sua inteligência e praticidade com razões sabiam que a razão dele era maior que 3 e que tinha como explicação a relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro.

π é um número irracional que, normalmente, arredondamos o valor para três casas, com o valor π=3,14. No entanto, o mistério da matemática que envolve o π, é que não é quase impossível saber e até hoje não sabemos qual seria a última casa desse número, que pode ser representado com várias casas após a vírgula, mas sempre terminando em reticências:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$$

Com o passar dos anos, os valores foram sendo melhorados e aproximados ao real. No entanto, foi a partir do século XX, com uso de computadores e dos algoritmos computacionais que se tornou mais precisa a definição do valor de π.

2.1 Os Antigos Egípcios

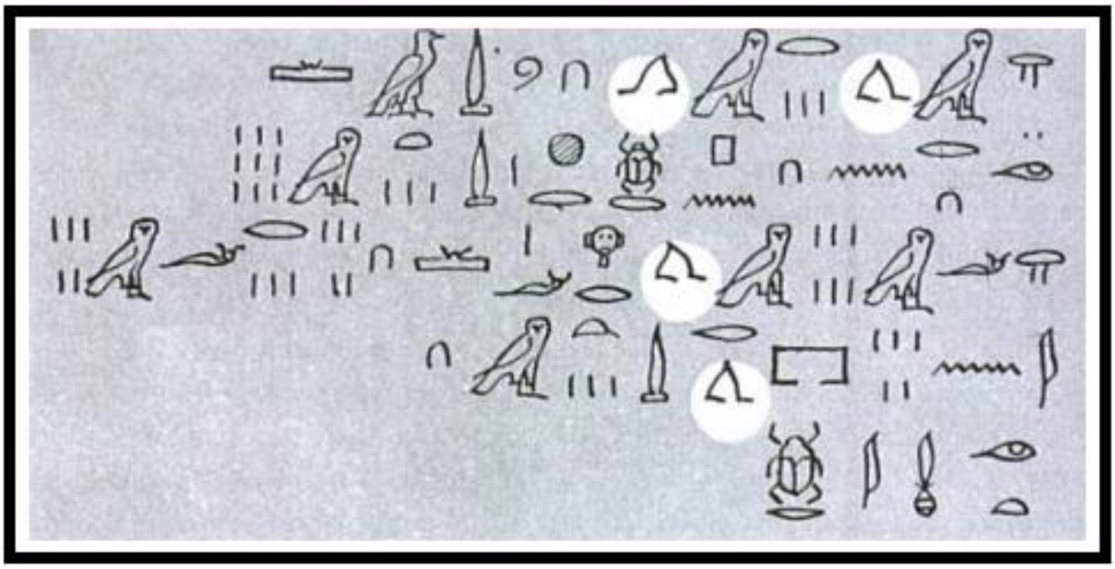

Figura 2: Aproximação de π pelos Egípcios

Os egípcios que descobriram o que foi citado logo acima, que “a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é a mesma para qualquer circunferência”, e o seu valor é um número "um pouquinho maior que 3". Considerando c o comprimento de uma circunferência e d o diâmetro, temos:

$$\frac{c}{d} = \pi$$

$$c = \pi . d$$

Há quase 4000 anos, o egípcio Ahmes (1680-1620) pegou um quadrado inscrito em uma circunferência, cujo lado media nove unidades. Fizeram uma dobra nos lados do quadrado para obter um polígono de oito lados e calcularam a razão entre os perímetros dos octógonos inscrito e circunscrito e o diâmetro da circunferência.

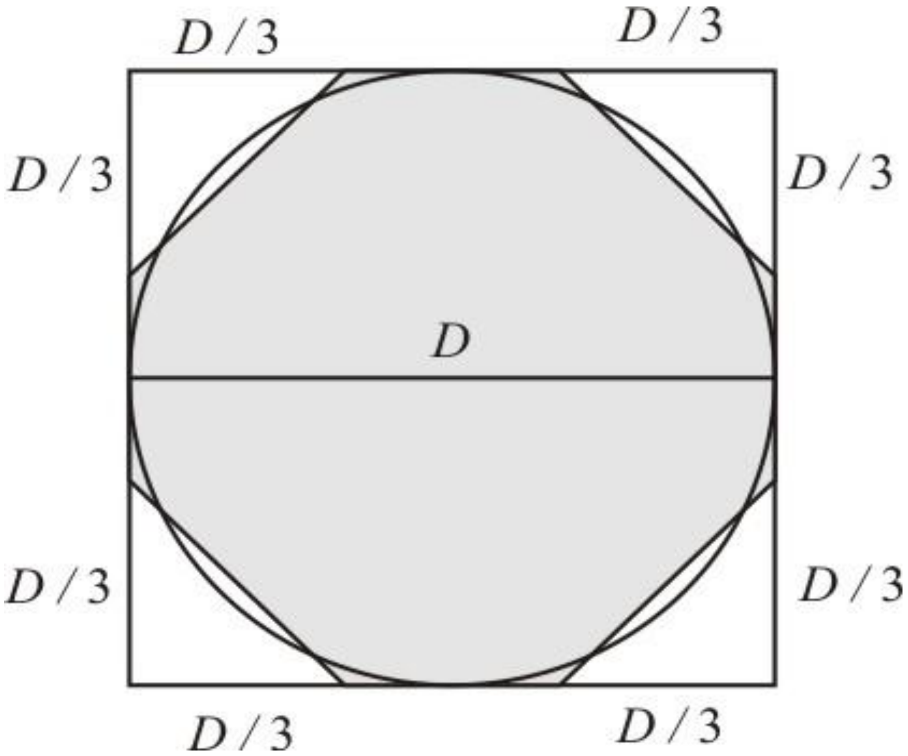

Figura 3: Figura que Ahmes utilizou para π

Segundo Beckman, 1971:

"Ahmes referiu sem o provar que um campo circular com um diâmetro de 9 unidades é igual em área à um quadrado com lados que medem 8 unidades. Em notação moderna:

$$\pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8^2$$

o que conduz à um valor para π aproximadamente igual à 3,16".

Eles conseguiram uma aproximação melhor que a dos babilônios, para os quais "o comprimento de qualquer circunferência era o triplo de seu diâmetro", o que indicava o valor 3 para π, como vemos a seguir.

Em 1936 os babilônios acharam um tablete em Susa, bem próximo a Babilônia que compara o perímetro de um hexágono regular com a circunferência de seu círculo circunscrito.

Enquanto os hebreus construíam o Templo de Salomão, por volta de 950 a.C., registravam suas especificações, incluindo a de uma grande fundição de bronze descrita em:

I Reis 7:23: *"Fez o Mar de metal fundido, com dez côvados de diâmetro. Era redondo, tinha cinco côvados de altura; sua circunferência media-se com um fio de trinta côvados"*.

Concluímos que 2pr = 30 e 2r = 10, logo p = 3. Nada extremamente preciso, mas nada mal, considerando que eles haviam saído do deserto apenas alguns séculos antes.

Ainda existe um documento antigo que demonstra a existência de π, que prova que círculos estão um para o outro assim como os quadrados de seus diâmetros, que é o resultado atribuído por Hipócrates. O livro é chamado de Elementos de Euclides e foi escrito em 300 a.C.

2.2 Contribuições de Arquimedes de Siracusa e dos Chineses

Figura 4: Arquimedes de Siracusa

Por volta do século III a.C., Arquimedes, o mais famoso matemático da Antiguidade, que viveu e morreu em Siracusa, na Grécia, também fez uma contribuição muito importante para a evolução do π.

Arquimedes calculou os perímetros dos polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados, começando com um hexágono regular, ele fez o cálculo do perímetro desse polígono e conseguiu para π um valor entre 3,1408 e 3,1428.

Os chineses também eram fascinados pelo cálculo do valor exato de π. No século III d.C., Liu Hui, um copiador de livros, conseguiu obter o valor 3,14159 com um polígono de 3.072 lados.

Porém no final do século V, o matemático Tsu Ch'ung-chih foi mais longe ainda: encontrou como valor de π um número entre 3,1415926 e 3,1415927. Nesta época, o grande matemático hindu Aryabhata deixou registrada esta afirmação num pequeno livro escrito em versos:

"Some-se 4 a 100, multiplique-se por 8 e some-se 62.000. O resultado é aproximadamente uma circunferência de diâmetro 20.000".

Se você recordar que o comprimento de uma circunferência é dado por c = π. d, fica fácil entender que a solução da equação de Aryabhata:

$$(4 + 100) . 8 + 62\ 000 = \pi . 20\ 000$$

$$104 . 8 + 62\ 000 = \pi . 20\ 000$$

$$832 + 62\ 000 = \pi . 20\ 000$$

$$62\ 832 = \pi . 20\ 000$$

$$\frac{62832}{20000} = \pi$$

indica como valor de π = 3,1416.

$$\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

Quanto maior o número de casas decimais, melhor é a aproximação que se obtém para π.

Até o século XV, o melhor valor para π havia sido encontrado pelo matemático árabe al-Kashi: 3,1415926534897932.

Mas o cálculo mais impressionante foi efetuado pelo matemático holandês Ludolph van Ceulen (1540-1610) no final do século XVI. Começando com um polígono de 15 lados e dobrando o número de lados 37 vezes, Ceulen obteve um valor para π com 20 casas decimais.

Logo em seguida, usando um número de lados ainda maior, ele conseguiu uma aproximação com 35 casas decimais!

Tamanha deve ter sido a emoção de Van Ceulen que, na sua morte, sua esposa mandou gravar no túmulo o valor de π com as 35 casas decimais.

Imagine como ele se sentiria se soubesse que no século XX computadores calculariam, em segundos, o valor de π com 100, 1000, 10.000 milhões de casas decimais!

π=3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664 82...

Muitos dos símbolos matemáticos que usamos atualmente devemos ao matemático suíço Leonhard Euller (1707-1783).

Foi Euller quem, em 1737, tornou conhecido o símbolo para o número π. Foi também nesta época que os matemáticos conseguiram demonstrar que é um número irracional.

Construída em uma base decimal de notação posicional por volta de 2000 a.C., a matemática chinesa já estava bastante desenvolvida no século III d.C., quando Liu Hui, que também desenvolveu uma forma primitiva do cálculo, criou um algoritmo para calcular π numa precisão de cinco casas decimais.

Duzentos anos depois, Zu Chongzhi calculou até a sexta casa decimal, demonstrando o seguinte:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

Figura 5: Zu Chongzi (429-500)

2.3 François Viète (século XVI)

François Viète, senhor do Bigotère publicou em 1593 a obra: Variorum de rebus mathematicis responsorum, líber VIII, que continha o produto infinito de radicais aninhadas que representam a constante matemática π , e que depois da publicação ficou conhecida como a formula de Viète.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots.$$

Na mesma época Viète publicou sua formula, métodos para aproximar π longa que tinha sido conhecido por precisão arbitrária.

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Figura 6: François Viète

2.4 Século XVII

Apesar dos 2000 anos de reflexão, teorias, cálculos e provas, ainda hoje não sabemos o valor exato do π. Por volta do século XVII a.C. os babilônios tinham um conhecimento matemático avançado, gravado em tábuas complicadas que representavam quadrados, frações, raízes cúbicas e quadradas, pares recíprocos e até mesmo equações algébricas, lineares e quadráticas.

Não é surpresa, então, que esses gênios da matemática tenham discriminado também uma estimativa do π:

$$3\,\frac{1}{8} = 3.125$$

É uma estimativa muito boa, considerando que eles calculavam com os dedos. Uma teoria para o desenvolvimento da matemática babilônica, que funcionava em um sistema numérico de base 60, é que eles usavam as 12 juntas dos dedos (sem contar o polegar) multiplicadas pelos cinco dedos da outra mão.

Contemporâneos dos babilônios, os egípcios também fizeram grandes avanços na matemática. Acredita-se que foram os responsáveis por desenvolver o primeiro sistema numérico decimal completo.

A mais antiga evidência do π no Egito foi achada no papiro de Rhindi, datado por volta de 1650 a.C. Junto às instruções de multiplicação e divisão, evidência de números primos, frações e até mesmo algumas equações lineares, o π egípcio era computado como:

$$4\text{x}\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.16$$

Uns 400 anos depois, outro grego, Ptolomeu, refinou a estimativa do π usando as cordas de uma circunferência com um polígono de 360 lados, obtendo:

$$\pi = 3\frac{17}{120} = 3{,}14166$$

Trabalhando durante o século IX d.C., Muhammad Al-Khwarizmi, amplamente creditado como criador de dois dos métodos mais fundamentais da álgebra (o balanceamento e a redução), pela adoção do sistema numérico hindu (de 1 a 9, com a adição do 0) acredita-se também que ele seja o responsável por calcular o π precisamente até sua quarta casa decimal.

Algumas centenas de anos depois, já no século XV d.C., Jamshid al-Kashi apresentou o seu *Tratado sobre a Circunferência*, que calculava o π até sua décima-sexta casa decimal.

Na era moderna, os tempos de al-Kashi até o século XVIII, avanços relacionados ao π se limitavam apenas a produzir aproximações cada vez mais precisas. Por volta de 1600, Ludolph Van Ceulen calculou até sua 35ª casa decimal, enquanto em 1701, John Machin, creditado por criar métodos melhores para aproximar o π, conseguiu calculá-lo até seu centésimo dígito.

Em 1768, Johann Heinrich Lambert provou que o π é um número irracional, o que significa que ele é um número real que não pode ser representado como o quociente de inteiros.Houve novamente um intervalo nos estudos do π até que duas coisas interessantes aconteceram: em 1873, William Shanks calculou corretamente 527 casas do π (na verdade ele produziu 707 casas, mas as últimas 180 estavam incorretas). Em

1882, Carl Louis Ferdinand von Lindemann provou, em *Über die Zahl*, que o π é transcendente, o que significa que:

O π transcende o poder da álgebra para que seja exibido em sua totalidade. Ele não pode ser expresso em nenhuma série finita de operações aritméticas ou algébricas.

Usando uma fonte de tamanho fixo, ele não poderia ser escrito em um pedaço de papel tão grande quanto o universo.

Por ter provado a transcendência do π, Lindemann também provou, de uma vez por todas, que não é possível calcular a quadratura da circunferência.

Os americanos no século XIX nem todo mundo estava atualizado nas novidades do mundo da matemática. Esse deve ter sido o caso do matemático amador de Indiana, Edwin J. Goodwin. Em 1896 ele estava tão convencido de que tinha, de fato, encontrado uma forma de achar a quadratura do círculo, que falou com um representante da Casa Estatal de Indiana, para apresentar um projeto de lei que formalizasse seu valor do π como o correto.

Por sorte, antes que a legislatura de Indiana seguisse por um caminho sem volta, um professor da Universidade de Purdue que visitava o estado informou ao estimado corpo legislativo que era impossível encontrar a quadratura da circunferência e que, na verdade, a “prova” de Goodwin era baseada em dois erros. Deles, o mais pertinente para esse artigo é:

$$\pi = \frac{32}{10}.$$

2.5 O π recebe seu nome (século XVIII)

O número π é uma proporção numérica que tem origem na relação entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro; por outras palavras, se uma circunferência tem perímetro p e diâmetro d, então aquele número é igual a $\frac{p}{d}$.

É representado pela letra grega π. A letra grega π (lê-se: *pi*), foi adotada para o número a partir da palavra grega para perímetro, "περίμετρος", provavelmente por William Jones em 1706, e popularizada por Leonhard Euler alguns anos mais tarde.

Outros nomes para esta constante são constante circular ou número de Ludolph.

Mas porque número de Ludolph? Na Holanda, o matemático Ludolph Van Celen (1539-1610) determinou primeiro 20 e depois 35 casas décimais para o número Pi. Quando morreu, na sua lápide foi gravado o número com 35 casas decimais, e até hoje na Alemanha o número é chamado de Número de Ludolph.

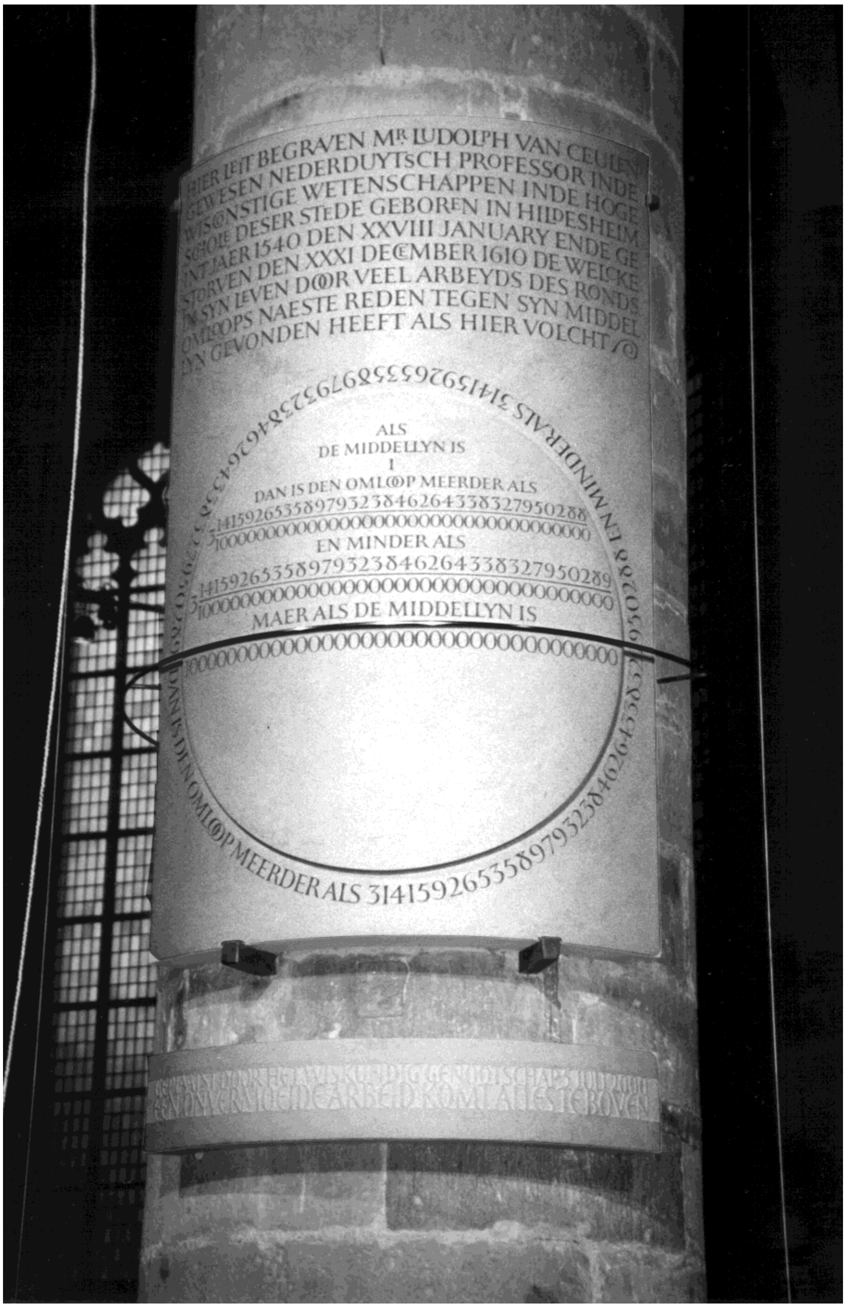

Figura 7: Réplica da lápide de Ludolph Van Ceulen

2.6 Aproximando do século XIX e início do XX

Vejamos a tabela a seguir :

Pessoas/Povo	Ano	Valor
Babilónia	~2000 B.C.	3 1/8
Egípcios	~2000 B.C.	$(16/9)^2$= 3.1605
Chineses	~1200 B.C.	3
Antigo Testamento	~550 B.C.	3
Arquimedes	~300 B.C.	encontra $3\ 10/71<\pi<3\ 1/7$ usa 211875/67441=3.14163
Ptolomeu	~200 A.D.	377/120=3.14166...
Chung Huing	~300 A.D.	$\sqrt{(10)}$=3.16...
Wang Fau	263 A.D.	157/50=3.14
Tsu Chung-Chi	~500 A.D.	$3.1415926<\pi<3.1415929$
Aryabhatta	~500	3.1416
Brahmagupta	~600	$\sqrt{(10)}$
Al-Khwarizmi	820	3.1416
Fibonacci	1220	3.141818
Ludolph van Ceulen	1596	Calcula π até 35 casas decimais
Machin	1706	100 casas decimais
Lambert	1766	Prova que π é irracional
Richter	1855	500 casas decimais
Lindeman	1882	Prova que π é transcendental
Ferguson	1947	808 casas decimais
Computador Pegasus	1957	7,840 casas decimais
IBM 7090	1961	100,000 casas decimais
CDC 6600	1967	500,000 casas decimais

Figura 8: Tabela de Valores do π

No sec. XIX, demonstrou-se que π é um número transcendental, isto é, não pode ser expresso por uma equação algébrica com coeficientes racionais. Como corolário, deve dizer-se que é impossível fazer a “quadratura do círculo”, isto é, desenhar um quadrado com o mesmo perímetro de determinado círculo.

Podem apreciar-se na tabela a seguir os progressos feitos no cálculo do valor de π. Só no sec. XX., nos anos 50, é que se começaram a utilizar computadores para o cálculo das casas decimais de π.

2.7 A transcendência do Número π e o Avanço da Computação

Um número transcendente é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial a coeficientes racionais. Um número real ou complexo é assim transcendente somente se ele não for algébrico. Esses números são irracionais e não podem ser escritos na forma de fração, **π** é irracional, ou seja, **π** não pode ser expresso através de uma fração.

O valor de π com 10 000 casas decimais pode ser visto aqui. Hoje é possível calculá-lo com mais de dez mil milhões de casas decimais (para quê?) Eis algumas das fórmulas utilizadas para calcular o valor de π em computador:

François Viète (1540-1603) determinou que:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \cdots}$$

John Wallis (1616-1703) mostrou que:

$$\pi = 2\,\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots}$$

Euler (1707-1783) construiu esta fórmula:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Em 1973 Jean Guilloud e M. Bauyer descobriram, num CDC 7600, um milionésimo dígito de π. Um algoritmo, da autoria de Brent e Salamin, foi utilizado pelos japoneses Y. Kanada, Y. Tamura, S. Yoshino, Y. Ushiro que o implantaram 1983, obtendo-se assim 16 milhões de algarismos. Estas contas foram posteriormente verificadas por meio da relação de Gauss, o que mostrou que as primeiras 10.013.395 casas decimais estavam corretas.

Em 1981, dois matemáticos japoneses Kazunori Miyoshi e Nakayama, da Universidade de Tsukuba, calcularam π com 2.000.038 algarismos em 137,30 horas, num computador FACOM M-200. Com o passar dos anos os matemáticos continuaram por essa busca. Em 24 novembro de 2002 Yasumasa Kanada e sua equipe, usando um computador por 600 horas, do Departamento de Ciência da Informação da Universidade de Tóquio, e calcularam o π com mais de um trilhão de casas decimais exatas. Mas não parou por aí. Foram várias vezes que esse record foi quebrado. Atualmente, em dezembro de 2013, a maior aproximação de π encontrasse em 12 trilhões de dígitos pela The Santa Clara University.

3 Demonstração de algumas fórmulas que dão π

O número π é realmente fascinante, e claro que os matemáticos não iriam descansar até conseguir fazer um método de calculá-lo, dentre eles temos Viète, Macchin e Gregory que são os três que iremos ver a fórmula.

Além desses métodos, temos até um método engraçado, que é com salsichas, O que acontece é que, se a distância entre as linhas for a mesma que o comprimento dos objetos lançados, o número de vezes que eles cairão sobre as linhas durante vários lançamentos pode ser usado para calcular π, e é chamado de método da Agulha de Buffon.

3.1 Fórmula de Viète

Na formula de Viète O cálculo termina quando dois resultados consecutivos são os mesmos e precisão de π melhora, aumentando o número de dígitos para o cálculo.

Observemos:

Temos a seguinte relação trigonométrica

$$\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Aplicaremos n- vezes a formula dada, daí obtemos para n= 1,

$$1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)$$

Para n = 2

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \text{então}$$

$$1 = 2.2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)$$

Para n = 3

$$1 = 2^2.2\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2^3\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2^4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right)$$

O raciocínio indica também que n vezes podemos escrever:

$$1 = 2^{n-1}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{\pi}{16}.\cdots.\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Para todo natural n ≥ 2. A equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$1 = \left(2^{n-1}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{8}}{2}\right).\cdots.\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}\right)$$

Considerando outra relação trigonométrica

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\theta}$$

Dizemos com essa identidade que

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{8}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$$

Substituindo n vezes teremos:

$$1 = 2^{n-1}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\;\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\;\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}.\cdots.\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}$$

$$1 = 2^{n-1}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\;\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}.\cdots.\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}{2}$$

Onde encontraremos n-1 sinais encaixados no último fator. Dividindo todos os membros por $2^{n-1}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, teremos:

$$\frac{2}{2^n}\;\frac{1}{\mathrm{sen}\frac{\pi}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\;\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}\;\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{2}.\cdots.\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}}{2}$$

Multiplicando e dividindo por π o primeiro membro temos:

$$\frac{2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\cdots.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\cdots}}}}{2}$$

$$\frac{2}{\pi}=\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{2^n}{\frac{\pi}{2^n}}}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\cdots.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}{2}$$

Aplicaremos o limite para $n\to\infty$

$$\frac{2}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\cdots.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\cdots}}}}{2}$$

Não esquecendo que o limite fundamental é

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1,$$

Teremos então a fórmula de Viète

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}}}{2}.$$

3.2 Fórmula de John Machin

Figura 9 – John Machin (1680 – 1751)

A Fórmula de Machin foi formulada por John Machin (1680-1751), que calculou 100 casas decimais do número π. Posteriormente, foi usada por William Shanks (1812-1882) para o cálculo de π com 707 casas decimais.

Em matemática, as fórmulas de Machin são uma classe de identidades envolvendo os = 3,14159 e que generaliza a fórmula original de John Machin, 1706: π.

Temos aqui as seguintes identidades que Machin desenvolveu:

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Demonstraremos aqui a 3° fórmula:

Dizemos que $\tan\left(\frac{1}{3}\right) = \beta$ onde $\alpha + \beta = \theta$.

Onde,

$$\tan\theta = \tan(\alpha + \beta) = \frac{[\tan\alpha + \tan\beta]}{[1 - \tan\alpha\tan\beta]} = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right]} = \frac{[3+2]}{[6-1]} = 1$$

Ângulos α e β são ambos agudos de modos que $\alpha + \beta < \pi, \theta < \pi$, isso significa que eu devo estar no quadrante 1 ou 2.

Sendo assim:

$$\tan\theta = 1 \to \theta = \frac{\pi}{4} \to \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3.3 Fórmula de James Gregory

Em matemática, a fórmula de Leibniz para π, que leva o nome de Gottfried Wilhelm Leibniz, estabelece que

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Usando a notação de somatório:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

A série infinita acima é denominada série de Leibniz. É também denominada série de Gregory-Leibniz, reconhecendo o trabalho de James Gregory.

Provando

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1^{n+1}x^{2n+2})}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$$

Considerando somente a integral na última linha temos:

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx < \int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{2n+3} \to 0 \text{ com } n \to \infty$$

Portanto, com $n \to \infty$ obtemos a série de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Figura 10– James Gregory (1638-1675)

4 Considerações Finais

Com base na pesquisa realizada sobre o estudo do número π, compreendemos que é essencial na formação do futuro professor de matemática ter em mente não só o contexto histórico como também várias curiosidades que abordam a utilização do mesmo dentro de outras áreas do conhecimento. A partir disso, começamos a entender a real importância deste tópico para a análise do aprofundamento de um tema tão desafiador.

Neste contexto, tive a oportunidade de conhecer e estudar três demonstrações que levam resultados de aproximações das casas decimais de π, e ver que alguns estudiosos sem a tecnologia de hoje, conseguiram informações tão precisas através de cálculos que levaram anos para serem aceitos. Logo, é necessário que saibamos argumentar sobre como o π pode ser aplicado em determinadas situações-problema, de modo a favorecer o processo de ensino aprendizagem do aluno na aquisição de seus conhecimentos sobre o referido assunto.

Devemos salientar que nenhum número mobilizou tanto a atenção e a imaginação das pessoas como o π. Portanto a curiosidade do ser humano ajuda a despertar o interesse na pesquisa de informações que só vem a complementar as nossas ideias sobre a educação matemática.

Referências

[1] BORWEIN Jonathan , David Bailey & Roland Girgensohn, ***Experimentation in Mathematics - Computational Paths to Discovery,*** A K Peters 2003, ISBN 1-56881-136-5, pages 28–30.

[2] BOYER, C. B. ***História da Matemática***. 2nd ed. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1996.

[3] DA SILVA, Uziel. ***A transcendência do número _*** FAMAT em Revista, No. 04, p. 69, Universidade Federal de Uberlândia, 2005.

[4] EVES, H. ***Introdução à História da Matemática***. Tradução por Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. Da UNICAMP, 1995

[5] FIGUEIREDO, D. G. ***Números Irracionais e Transcendentes***. 3nd ed. Rio de Janeiro:SBM, 2011. 9 p.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. ***Um Curso de Cálculo,*** vol. 4. 3ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1999

[7] Herman C. Schepler, ***The Chronology of PI, in Mathematics Magazine,*** Vol. 23, No. 4 (Mar. - Apr., 1950), pp. 216-228 e Vol. 23, No. 5 (May - Jun., 1950), pp. 279-283

[8] LIMA, Elon Lages. ***O que é o número π?*** Revista do Professor de Matemática. Nº 6, p. 18-20. 1º semestre de 1985.

[9] SILVEIRA, J.F P. da. ***Cálculo das constantes elementares clássicas: o caso do pi.*** Disponível em: Acesso em: 09/11/2015.