UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

INSTITUTO UNIVERSIDADE VIRTUAL

PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANCISCO JURACI PEREIRA DANTAS

MATEMÁTICA E MECÂNICA: ENSINO E APLICAÇÕES

MARANGUAPE

2015

FRANCISCO JURACI PEREIRA DANTAS

MATEMÁTICA E MECÂNICA: ENSINO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática Semipresencial do Instituto Universidade Virtual da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Hudson de Souza Félix.

MARANGUAPE

2015

FRANCISCO JURACI PEREIRA DANTAS

MATEMÁTICA E MECÂNICA: ENSINO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática Semipresencial do Instituto Universidade Virtual da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Hudson de Souza Felix.

Aprovada em ____/____/_______.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Hudson de Souza Feliz (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Diego de Sousa Rodrigues

Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Helton Udenes Nascimento Pontes

Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as vitórias alcançadas em minha vida.

Agradeço àqueles que sempre me incentivaram, especialmente meus pais, Francisco Pereira Meneses Dantas e Dilma Pereira da Silva Dantas, meus irmãos, Moacir Pereira Dantas, Francisca Pereira Dantas, Francisco de Assis Pereira, Lucineide Pereira Dantas, Maria Luzenir Pereira Dantas, Maria Luzirene Pereira Dantas e Jucelino Pereira Dantas, minha esposa, Francisca Mirele Barros da Silva e minhas filhas, Maria Gabriele da Silva Dantas e Maria Giovana da Silva Dantas.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a realização e conclusão do curso, a toda equipe que faz parte do Pólo de Maranguape e a todos aqueles que fazem parte do Instituto UFC Virtual.

Agradeço também a todos os amigos do curso de licenciatura em matemática e aos amigos pessoais que de maneira direta ou indireta, contribuíram para a realização do curso.

“O temor do Senhor é o princípio do conhecimento.”

Provérbios 1:7

RESUMO

Neste trabalho são apresentados conteúdos matemáticos que são vistos em sala de aula, desde o início do ensino fundamental até o ensino superior que, demonstram sua importância e aplicabilidade no ramo da mecânica industrial. Permitindo assim que, o leitor conheça a utilidade e contribuições de tais conteúdos para o desenvolvimento da mecânica. Primeiramente apresentamos os conteúdos matemáticos que iremos utilizar, depois mostramos alguns conceitos utilizados na mecânica. Os conteúdos matemáticos apresentados são respectivamente: Frações, geometria e derivadas. Onde buscamos mostrar as principais características e conceitos. No final relacionamos os conteúdos apresentados com situações vistas na mecânica.

Palavras-chave: fração, geometria, derivada, fundamentos mecânicos, metrologia e desenho mecânico.

ABSTRACT

This paper presents mathematical contents that are seen in the classroom, from the beginning of elementary school to higher education that demonstrate their importance and applicability in industrial mechanical branch. Allowing the reader know the usefulness of such contributions and content development mechanics. First we present the mathematical content that we will use, then we show some concepts used in mechanics. The mathematical content presented are respectively: fractions, geometry and derivatives. Where we seek to show the main characteristics and concepts. At the end relate the contents presented with a view situations in mechanics.

Keywords: fraction, geometry, derivative, mechanics fundamentals, metrology and mechanical design.

SUMÁRIO

Capítulo 1

1 INTRODUÇÃO

Sabe-se que o conhecimento matemático foi de fundamental importância para o desenvolvimento da humanidade. Não é exagero afirmar que a matemática está presente em quase tudo que vemos hoje em dia. Dessa forma é necessário ao professor de matemática repassar ao aluno além do conhecimento teórico, também o conhecimento prático, mostrando de forma dinâmica a relação entre a matemática e as diversas situações cotidianas. É comum em sala de aula, quando se está repassando algum conteúdo matemático, o aluno se perguntar se aquilo que está sendo visto, algum dia lhe servirá na prática.

Dentre várias aplicações da matemática no cotidiano, daremos ênfase à importância da matemática na mecânica, levando em consideração a relevância desta ciência para o desenvolvimento da humanidade. Podemos afirmar que sem a matemática não teríamos o conhecimento da mecânica.

Mostraremos conteúdos matemáticos bem básicos apresentados no ensino fundamental como frações, por exemplo, conteúdos que exigem um pouco mais de conhecimento, como geometria e conteúdos apresentados no ensino superior, como derivadas, mostrando suas relações com a mecânica. Procurando apresentar de forma clara, a relevância de cada conteúdo matemático com princípios básicos da mecânica.

Como dito anteriormente, é necessário a relação entre o conhecimento teórico e o conhecimento prático do aluno afim de que se tenha um melhor resultado no processo ensino aprendizagem. Lembremos que está na Constituição Federal que a educação deve visar o pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. Dessa forma esperamos mostrar de uma maneira clara e simples a relação entre a matemática e a mecânica.

Capítulo 2

2 FRAÇÕES

2.1 Definição

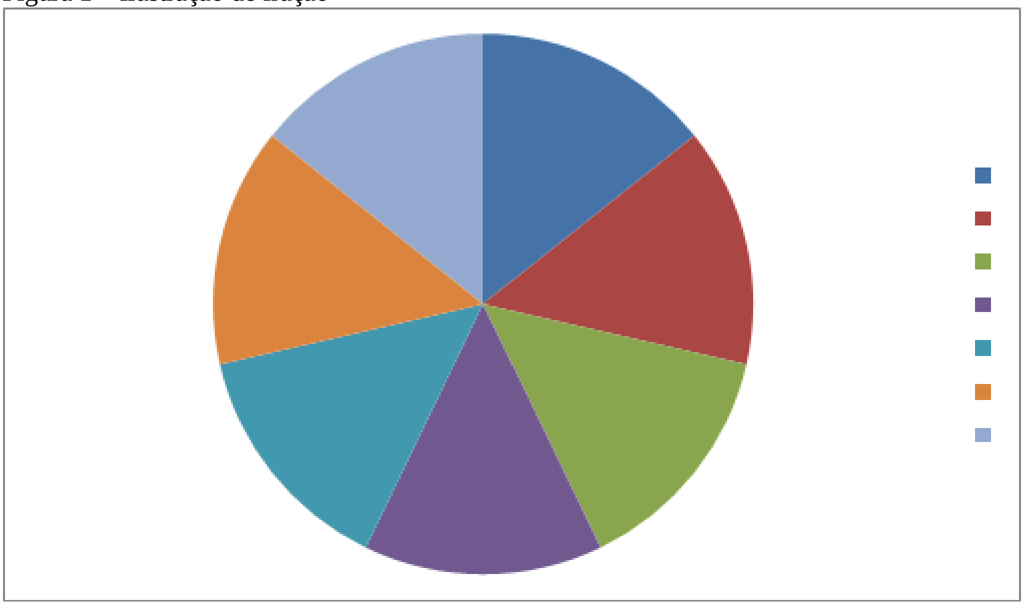
Consideremos dois números a e b pertencentes aos naturais, chama-se fração a divisão de “a” por “b”, onde “b” indica o número de partes iguais em que se divide um inteiro e “a” a quantidade de partes da fração. A fração é representada da seguinte forma: $\frac{a}{b}$. Onde “a” chama-se o numerador da fração e “b” o denominador.

Exemplos de frações:

$\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{3}{8};\frac{4}{9}$

Afim de uma maior compreensão observe a seguinte figura:

Figura 1 – Ilustração de fração



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que a figura está dividida em oito partes iguais. Cada parte desta figura corresponde à seguinte fração:$\frac{1}{8}$ (lê-se: um oitavo).

2.2 Operações com frações

2.2.1 Adição

Na adição de frações, quando somamos duas frações com o mesmo denominador devemos proceder do seguinte modo: somamos os numeradores e conservamos o denominador, ou seja, considere a seguinte soma de frações: $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$, o resultado desta soma é: $\frac{(a+c)}{b}$.

Exemplos:

$$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}; \quad \frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}; \quad \frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}.$$

Quando os denominadores são diferentes devemos primeiramente encontrar o mmc entre os denominadores onde o mmc encontrado passará a ser o novo denominador da fração, em seguida dividimos o mmc pelo denominador da primeira fração e em seguida multiplicamos pelo numerador da respectiva fração, de maneira análoga fazemos o mesmo processo com a fração seguinte e depois somamos os denominadores. Dessa forma considere $\frac{a}{b}\ e\ \frac{c}{d}$ frações, e "k" o mmc de "b" e "d", então: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(k:b).a+(k:d).c}{k}$.

Exemplos:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{(6:3).2}{6}+\frac{(6:6).1}{6}=\frac{2.2+1.1}{6}=\frac{4+1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=\frac{(10:2).1}{10}+\frac{(10:5).4}{10}=\frac{5.1+2.4}{10}=\frac{5+8}{10}=\frac{13}{10}$$

2.2.2 Subtração

Na subtração de frações devemos proceder de forma análoga à adição, ou seja, se os denominadores forem iguais, conservamos o denominador e subtraímos os numeradores. E no caso em que os denominadores forem diferentes, encontramos o mmc e fazemos o mesmo processo utilizado na adição, mas obviamente subtraímos os numeradores obtidos.

Exemplos:

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4-2}{5}=\frac{2}{5};$$

$$\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{(8:8).5}{8}-\frac{(8:2).1}{8}=\frac{1.5-4.1}{8}=\frac{5-4}{8}=\frac{1}{8}$$

2.2.3 Multiplicação

Para obtermos o produto de frações, multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador. Ou seja, considere as seguintes frações: $\frac{a}{b}\ e\ \frac{c}{d}$ o produto destas duas frações é obtido através da seguinte expressão: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$.

Exemplos:

$$\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=\frac{2.4}{3.5}=\frac{8}{15};$$

$$\frac{8}{3}.\frac{4}{3}=\frac{8.4}{3.3}=\frac{32}{9}$$

2.2.4 Divisão

Para obtermos o quociente entre duas frações, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o denominador da primeira com o numerado da segunda. Consideremos $\frac{a}{b}\ e\ \frac{c}{d}$ duas frações, o quociente resultante da divisão entre estas duas frações é obtido através da seguinte expressão: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$.

Exemplos:

$$\frac{2}{3}:\frac{5}{4}=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=\frac{2.4}{3.5}=\frac{8}{15};$$

$$\frac{4}{7}:\frac{5}{6}=\frac{4}{7}.\frac{6}{5}=\frac{4.6}{7.5}=\frac{24}{35}$$

2.3 Frações decimais

2.3.1 Definição

Fração decimal é toda aquela onde o denominador é representado como potência de 10.

Um fato importante é que toda fração decimal pode ser representada em forma de números decimais, ou seja, um número que tem uma parte inteira e outra decimal, separada por uma vírgula

Exemplos:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1; \quad \frac{3}{100} = 0{,}03; \quad \frac{150}{1000} = 0{,}150$$

2.3.2 Transformando frações em números decimais

Para transformarmos frações decimais em números decimais, basta dividirmos o numerador pelo denominador da fração. Tomemos como exemplo, as frações com os respectivos números decimais acima.

E para transformarmos números decimais em frações decimais, repetimos no numerador o número decimal sem a vírgula e no denominador colocamos uma potência de 10, onde o expoente indica o número de casas decimais do número dado.

Exemplos:

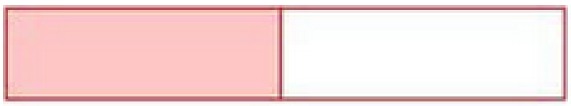
$$0{,}05 = \frac{5}{10^2} = \frac{5}{100}; \quad 0{,}2455 = \frac{2455}{10^4} = \frac{2455}{10000}; \quad 2{,}3 = \frac{23}{10}$$

2.4 Frações equivalentes

Chamamos de frações equivalentes àquelas que embora sejam diferentes, representam a mesma quantidade. Na prática, para que uma fração seja equivalente à outra, deve existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que k divide tanto o numerador quanto o denominador da primeira fração, e quando fazemos este processo obtemos uma nova fração equivalente. Neste caso dizemos que estamos simplificando uma fração.

Observemos as seguintes figuras:

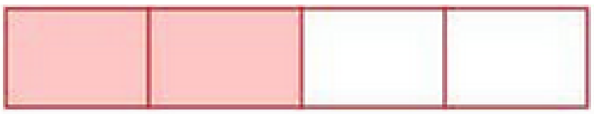
Figura 2 –Representação da fração 1/2



Fonte: Elaborada pelo autor

No caso da figura acima, a área colorida representa a metade de um inteiro, ou seja, $\frac{1}{2}$.

Figura 3 – Representação da figura 2/4



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora na figura 3, pegamos o mesmo inteiro e dividimos em quatro partes iguais, onde a área colorida representa $\frac{2}{4}$ que é exatamente a metade deste inteiro.

Vejamos os seguintes exemplos:

$$\frac{4}{8} = \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2};\ \frac{32}{64} = \frac{32:32}{64:32} = \frac{1}{2};\ \frac{128}{256} = \frac{128:128}{256:128} = \frac{1}{2}$$

Neste caso as frações $\frac{128}{256}, \frac{32}{64}, \frac{4}{8}\ e\ \frac{1}{2}$ são todas equivalentes.

Capítulo 3

3 GEOMETRIA PLANA

Os conceitos primitivos da geometria como ponto, reta e plano são basicamente intuitivos. Diante disso, veremos suas principais características.

3.1 Postulado da existência

Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos;
Num plano há infinitos pontos.

3.2 Postulado da determinação

a) da reta

Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

b) do plano

Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

3.3 Postulado da inclusão

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então esta reta está contida no mesmo plano.

3.4 Segmento de reta – Definição

Dados dois pontos distintos, a reunião desses pontos com o conjunto de pontos que está entre eles, chama-se segmento de reta.

3.4.1 Ponto médio de um segmento de reta

Um ponto M é ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, M está entre A e B, e $\overline{AM} = \overline{MB}$.

3.5 Semi-reta - Definição

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tal que B está entre A e X é a semi reta $\overrightarrow{AB}$.

3.6 Ângulo

Chama-se ângulo, a abertura que duas semi-retas de mesma origem fazem num plano.

3.6.1 Medida de um ângulo

A medida de um ângulo é um número real positivo e, geralmente utilizamos o grau como unidade de medida. Onde temos o minuto e o segundo como submúltiplos do grau.

Um grau corresponde a sessenta minutos (60'), e um minuto corresponde a sessenta segundos (60").

3.6.2 Ângulos: reto, agudo e obtuso

Ângulo reto é aquele que possui medida igual a 90°.

Ângulo agudo é aquele que possui medida menor que 90°.

Ângulo obtuso é aquele que possui medida superior a 90°.

3.7 Triângulo

Dados três pontos A, B e C não colineares, chamamos de triângulo a região do plano limitada pelos segmentos de reta: $\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{CA}$.

Classificamos os triângulos conforme seus lados e ângulos. Quanto aos lados: *Equilátero* é aquele cujo seus lados são todos iguais; *Isósceles* é aquele que possui dois lados iguais; *Escaleno* é aquele que possui todos os lados com medidas diferentes. Quanto aos ângulos: *Equiângulo* é aquele que todos os ângulos possuem a mesma medida; *Acutângulo* é aquele que tem todos os ângulos internos agudos; *Obtusângulo* é aquele onde um de seus ângulos internos é obtuso; Retângulo é aquele que possui um de seu ângulos internos reto. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo corresponde a 180° (cento e oitenta graus), concluímos entre outras coisas que num triângulo eqüiângulo cada ângulo corresponde a 60°.

3.7.1 Congruência de triângulos

1° caso - Lado Ângulo Lado (LAL)- Postulado

"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes."

2° caso - Ângulo Lado Ângulo (ALA)

"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado compreendido, então eles são congruentes."

3° caso - Lado Lado Lado (LLL)

"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes."

4° caso - Lado Ângulo Ângulo oposto (LAAo)

"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes."

5° caso - Ângulo reto Lado Lado (ArLL)

"Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um de seus catetos e a hipotenusa, então eles são congruentes."

3.7.2 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos congruentes e os lados homólogos são iguais. Sendo K a razão de semelhança entre os lados homólogos obtemos a seguinte relação:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K$, onde a, b e c são as medidas dos lados do primeiro triângulo e a', b' e c' são as medidas dos lados do segundo triângulo.

1º caso de semelhança de triângulos:

"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."

2º caso de semelhança de triângulos:

"Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes."

3º caso de semelhança de triângulos:

"Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes."

3.8 Polígonos

Chamamos de polígono a região do plano limitada por n segmentos de reta, onde dois segmentos consecutivos nunca são colineares e dois segmentos não consecutivos nunca se interceptam. O polígono onde o segmento de reta que une dois pontos distintos quaisquer pertencentes a este polígono e está totalmente contido nele é chamado de polígono convexo. Se o polígono não Possui esta propriedade é chamado de côncavo. Se um polígono convexo é ao mesmo tempo eqüilátero e eqüiângulo, dizemos que este polígono é regular.

3.8.1 Diagonais, ângulos internos e ângulos externos de um polígono convexo

A diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são os vértices não consecutivos de um polígono. A soma das diagonais de um polígono convexo é dada através da seguinte expressão: $d = \frac{n(n-3)}{2}$ onde n representa o número de lados deste polígono.

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por: $S_i = (n-2).180°$. E a soma dos ângulos externos de um polígono convexo é dada por: $S_e = (n-2).360°$

3.9 Quadriláteros notáveis

Um polígono com quatro lados chama-se quadrilátero. Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os quadrados e os losangos.

3.9.1 Propriedades dos trapézios

- Em um trapézio qualquer ABCD de bases AB e CD temos que:

$$\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

- Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.
- As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

3.9.2 Propriedades do paralelogramo

- Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.
- Todo quadrilátero convexo que possui ângulos opostos congruentes é paralelogramo.
- Todo quadrilátero convexo que possui lados opostos congruentes é paralelogramo.
- Em todo paralelogramo as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

3.9.3 Propriedades dos retângulos

Além das propriedades dos paralelogramos, os retângulos possuem as seguintes propriedades:

- Em todo retângulo as diagonais são congruentes.
- Todo paralelogramo que possui diagonais congruentes é um retângulo.

3.9.4 Propriedades dos losangos

Além das propriedades dos paralelogramos, os losangos possuem as seguintes propriedades:

- Todo losango tem diagonais perpendiculares.
- Todo paralelogramo que possui diagonais perpendiculares é um losango.

3.9.5 Propriedades do quadrado

Pelas definições todo quadrado, é também um retângulo e um losango. Portanto, um quadrado possui além das propriedades dos paralelogramos, as propriedades dos retângulos e dos losangos.

3.10 Teorema de Pitágoras e relações métricas no triângulo retângulo

3.10.1 Teorema de Pitágoras:

Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Consideremos b e c as medidas dos respectivos catetos e a, a medida da hipotenusa, do teorema de Pitágoras obtemos a seguinte relação: $a^2 = b^2 + c^2$

3.10.2 Relações métricas no triângulo retângulo

Considerando um triângulo retângulo e fixando um ângulo agudo α, temos:

- Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa: $sen\, \alpha = \frac{b}{a}$
- Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa: $\cos \alpha = \frac{c}{a}$
- Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo: $tg\ \alpha = \frac{b}{c}$
- Cotangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto ao ângulo: $cotg\ \alpha = \frac{c}{b}$

Na tabela a seguir vemos os valores das razões trigonométricas dos ângulos de 30, 45 e 60 graus:

Tabela 1 – Valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

Ângulo	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor

3.11 Circunferência

3.11.1 Definição

Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância, não nula, dada. Onde o ponto dado é o centro da circunferência e a distância é o raio.

3.11.2 Raio, corda e diâmetro

O raio de uma circunferência é o segmento com uma extremidade no centro da circunferência e outra num ponto da circunferência.

A corda de uma circunferência é o segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.

O diâmetro de uma circunferência é uma corda que passa pelo centro da circunferência. É o equivalente a duas vezes o raio.

3.11.3 ângulo central e ângulo inscrito

Ângulo central relativo à circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

O ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela. A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.

Capítulo 4

4 DERIVADAS

4.1 Derivadas de uma função

A derivada primeira de uma função f é a função indicada por f' (lê-se, f linha) e definida num valor x pertencente ao domínio de f por: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se este limite existir. Além do símbolo f'(x), utiliza-se também as seguintes notações para indicar a derivada de f num valor x onde ela existe: $D_x f(x)$ e $D_x y$ se y = f(x). Vejamos um exemplo: calcular f'(x) onde f(x) = x^2

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Derivando-se uma função f pela segunda vez, obtemos a derivada segunda de f que é indicada por f'' (lê-se f duas linhas) e definida por: $f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ para todo x no domínio de f', onde este limite existe. De um modo geral, se n é um número inteiro maior ou igual a 2, a derivada n-ésima ou a derivada de ordem n de f, é a derivada primeira de $f^{(n-1)}$, e é indicada por f^n. Utilizamos ainda as seguintes notações: $D_x^n f(x)$ e $D_x^n y$ se y=f(x). Observemos o seguinte exemplo: calcular a derivada segunda de f(x)=x^2. Do exemplo acima temos que f'(x)=2x, logo:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

4.2 Fórmulas de derivação

Se a e b são constantes, r é racional e f(x) = $ax^r + b$ é derivável, então f'(x) = arx^{r-1}.

Sejam f e g são funções deriváveis num valor x, então a derivada:

- Da soma de f com g é dada por $D_x[f(x) \pm g(x)] = D_x f(x) \pm D_x g(x)$
- Do produto de f por g é dada por $D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$
- Do quociente de f por g é dada por

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_xf(x) - f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2} \; se\; g(x) \neq 0$$

O teorema seguinte permite encontrar a derivada da composta de duas funções a partir da derivada das funções. “Sejam f e g funções deriváveis e definidas por y=f(u) e u=g(x), então fog é derivável, além disso, (fog)’=f’(g(x))g’(x).” A fórmula estabelecida pelo teorema é conhecida como “regra da cadeia”.

O teorema a seguir é também uma aplicação da regra da cadeia. “Sejam r um número racional, f e g deriváveis tal que g(x) = $[f(x)]^r$, então: $D_x[f(x)]^r = r[f(x)]^{r-1}D_xf(x)$”.

Veremos a seguir as derivadas de outras funções:

$D_xsenu = cosuD_xu$; $D_xcosu = -senuD_xu$; $D_xtgu = sec^2uD_xu$;

$D_xctgu = -csec^2uD_xu$; $D_xsecu = secu\, tguD_xu$; $D_xcsecu = -csecu\, ctguD_xu$

$D_xarcsenu = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}D_xu$; $D_xarccosu = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}D_xu$; $D_xarctgu = \frac{1}{1+u^2}D_xu$;

$$D_xarcctgu = \frac{-1}{1+u^2}D_xu; \quad D_xarcsecu = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}D_xu;$$

$$D_xarccsecu = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}D_xu;\; D_x\ln|u| = \frac{1}{x}D_xu;\; D_xe^u = e^uD_xu;$$

$$D_xa^u = (lna)uD_xu;\; D_xu^v = u^v\left(\frac{v}{u}D_xu + lnuD_xv\right)$$

4.3 Valores extremos

Sejam f uma função com domínio D(f) e m pertencente ao domínio de f: diz-se que f tem valor mínimo local em m, se existe um intervalo aberto I contido no domínio de f com m pertencente a I tal que f(m)≤f(x) para todo x ∈ I: e que f tem um valor máximo local em m, se existe um intervalo aberto I⊂D(f) com m∈ I tal que f(m) ≥ f(x) para todo x ∈ I. Um valor mínimo ou máximo local de uma função é chamado de valor extremo local da função e um ponto correspondente a um desses valores é dito um ponto extremo local do gráfico da função.

O seguinte teorema mostra como determinar os possíveis valores de m, onde uma função derivável em m tem um extremo local. “Seja f uma função determinada num intervalo aberto contendo m e derivável em m. Se f tem um valor extremo local em m, então f’(m) = 0.”

Um valor de m no domínio de uma função f, onde f'(m) se anula ou não existe, chama-se um valor crítico de f. E estes valores críticos são os possíveis valores onde a função pode ter um extremo local. Observemos também o teorema de Weirstrass que nos afirma: "Se f é uma função contínua num intervalo fechado [a,b], então f tem valores mínimo e máximo absolutos em [a,b]." Estas informações são bastante úteis para resolvermos problemas de otimização. Veremos a seguir um exemplo.

Determinar as dimensões do retângulo de maior área, que pode ser inscrito no círculo de raio r. Afim de resolvermos este problema, consideraremos o círculo com centro na origem. Logo a equação da circunferência é dada por $x^2+y^2=r^2$. A área do retângulo procurado divide-se em quatro retângulos iguais com dimensões x e y, onde a área de cada retângulo é dada por xy. Com isso, a área procurada pode ser expressada da seguinte forma: A=4xy. Da equação da circunferência temos que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e a função que expressa a área é: $A(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$ e D(A)=$0 < x < r$. Calculemos a derivada de A: $A'(x) = \frac{4x.(-2x)}{2\sqrt{r^2-x^2}} + 4\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{-4x^2+4r^2-4x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{4r^2-8x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$

Para encontrarmos o valor crítico de A, temos:$A'(x) = 0$; $\frac{4r^2-8x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0; x = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}$. Para que A(x) seja a área de algum retângulo inscrito no círculo, $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ é o único valor crítico de A, o qual dá o máximo absoluto de A. Substituindo $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ na equação $x^2+y^2=r^2$ encontra-se $y = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Logo o retângulo procurado é um quadrado de lados iguais a $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Capítulo 5

5 FUNDAMENTOS MECÂNICOS

5.1 Metrologia

A metrologia é vista como a ciência das medidas e medições. E aplica-se a todas as grandezas determinadas e, em particular, as dimensões lineares e angulares das peças mecânicas. Deste modo veremos alguns conceitos e instrumentos de medidas.

Antigamente, cerca de 4000 anos atrás, as unidades de medidas estavam baseadas em partes do corpo humano que eram referências universais. Dessa forma surgiram medidas padrão como a polegada, o palmo, o pé, a jarda, a braça e o passo. Algumas dessas medidas-padrão continuam sendo empregadas até hoje. Como por exemplo, a polegada, o pé e a jarda. No entanto havia uma necessidade de uma unidade que pudesse ser encontrada na natureza e fosse facilmente copiada, constituindo uma unidade padrão. Essa nova unidade passou a ser chamada metro, que é a unidade de medida padrão aceita universalmente hoje em dia. Vejamos a tabela abaixo, baseada no Sistema Internacional de Medidas (SI) que nos mostra alguns múltiplos e submúltiplos do metro.

Figura 4 – Múltiplos e submúltiplos do metro

Nome	Símbolo	Fator pela qual a unidade é múltipla
Exametro	Em	1000000000000000000m
Peptametro	Pm	1000000000000000m
Terametro	Tm	1000000000000m
Gigametro	Gm	1000000000m
Megametro	Mm	1000000m
Quilômetro	Km	1000m
Hectômetro	ham	100m
Decâmetro	dam	10m
Metro	m	1m
Decímetro	dm	0,1m
Centímetro	cm	0,01m
Milímetro	mm	0,001m
Micrômetro	µm	0,000001m
Nanômetro	nm	0,000000001m

Picometro	pm	0,000000000001m
Fentometro	fm	0,000000000000001m
Attometro	am	0,000000000000000001m

Fonte: Fundamentos mecânico- Metrologia- SENAI

Apesar de termos o metro como unidade de medida, ainda são usadas outras unidades. Na mecânica é comum usar o milímetro e a polegada, onde uma polegada corresponde a 25,4 mm. A polegada divide-se em frações ordinárias com denominadores iguais a potências de 2, e os numeradores devem ser números ímpares. Quando o numerador for par, deve-se proceder à simplificação da fração.

Exemplo: $\frac{6"}{8} = \frac{3"}{4}$ (três quartos de polegada).

A fim de facilitar os cálculos na indústria, criou-se a divisão decimal da polegada. Na prática, a polegada subdivide-se em milésimos e décimos de milésimos.

Exemplos: 1,003” = 1 polegada e 3 milésimos; 1,1247 = 1 polegada e 1247 décimos de milésimos.

Sempre que uma medida estiver em uma unidade diferente da dos equipamentos utilizados, deve-se convertê-la, ou seja, mudar a unidade de medida. Para convertermos polegada fracionária em milímetro, devemos multiplicar o valor em polegada fracionária por 25,4.

Exemplo: $\frac{1"}{2} = \frac{1.25,4}{2} = 12,7mm.$

Para convertermos milímetro em polegada fracionária, dividimos o valor em milímetro por 25,4 e multiplicamos por 128. O resultado deve ser escrito como numerador de uma fração cujo denominador é 128, não se esquecendo de simplificar a fração sempre que possível.

Exemplo: $12,7mm = \frac{\left(\frac{12,7}{25,4}\right).128}{128} = \frac{64"}{128} = \frac{1"}{2}.$

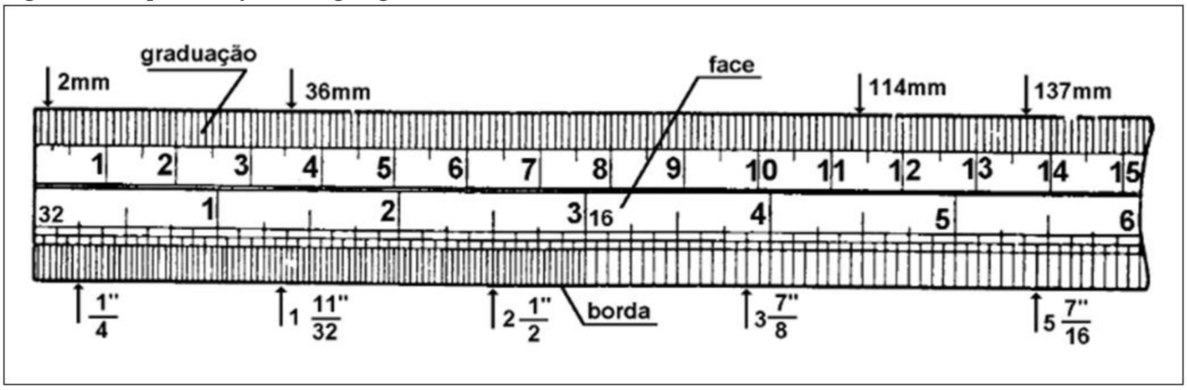
Para convertermos polegada fracionária em polegada milesimal, dividimos o numerador da fração pelo denominador. Exemplo: $\frac{3"}{8} = 0,375"$. Para fazermos o inverso, multiplicamos a medida expressa em milésimo por uma das divisões da polegada, que passa a ser o denominador da fração. Exemplo: $0,125".128 = \frac{16}{128} = \frac{1"}{8}$. Se quisermos converter polegada milesimal em milímetro, basta multiplicar o valor por 25,4.

Exemplo: 0,375”. 25,4 = 9,525mm.

Para conseguirmos uma boa medição é necessário conhecer o instrumento de medição mais adequado. Os instrumentos de medidas lineares são: Régua graduada; Paquímetro; Micrômetro; Relógio comparador; Relógio apalpador; Traçador de altura. Destes instrumentos daremos ênfase a régua graduada e ao paquímetro.

A régua graduada é um dos mais simples entre os instrumentos de medida linear. Apresenta-se normalmente em forma de lâmina de aço-carbono ou de aço inoxidável. Nessa lâmina estão gravadas as medidas em centímetro e milímetro, conforme o sistema métrico, ou em polegada e suas frações conforme o sistema inglês. As réguas graduadas mais usadas nas oficinas são as que possuem tamanhos de 152,4 mm (6") e de 304,8 mm (12"). Cada centímetro na escala encontra-se dividido em 10 partes iguais, onde cada parte equivale a 1 mm. Assim a leitura no sistema métrico pode ser feita em milímetro. No sistema inglês encontramos as escalas de precisão que dividem a polegada em 2, 4, 8, 16 e até 32 partes iguais. A figura seguinte mostra um esboço da régua graduada.

Figura 5 – Representação da régua graduada



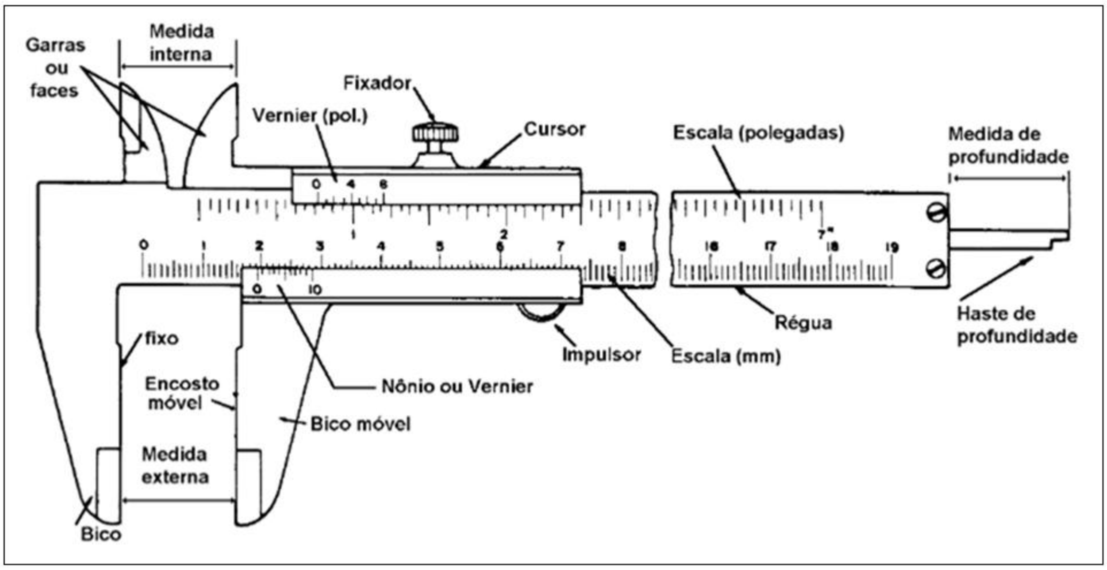
Fonte: Fundamentos mecânico- Metrologia- SENAI

O paquímetro é um instrumento usado para medir as dimensões lineares internas, externas e de profundidade de uma peça. Consiste em uma régua graduada, com encosto fixo, sobre a qual desliza o cursor. Este cursor ajusta-se a régua e permite sua livre movimentação, com um mínimo de folga. Ele é dotado de uma escala auxiliar, chamada nônio ou vernier.

No sistema métrico, existem paquímetros em que o nônio possui dez divisões equivalentes a nove milímetros. Portanto, há uma diferença de 0,1 mm entre o primeiro traço da escala fixa e o primeiro traço da escala móvel. Essa diferença pode ser calculada pela sua resolução. A resolução é a menor medida que o instrumento oferece, e é calculada através da seguinte fórmula: Resolução = $\frac{UEF}{NDN}$, onde UEF = unidade da escala fixa e NDN = número de divisões do nônio. Exemplo: No nônio com dez divisões, temos que a resolução é igual a $\frac{1\,mm}{10} = 0{,}1\,mm.$

Para efetuarmos a leitura da medida utilizando o paquímetro devemos proceder da seguinte maneira: primeiramente encontramos a resolução, em seguida contamos os traços do nônio até o ponto em que um deles coincidir com o traço da escala fixa, depois somamos o número que lemos na escala fixa ao número que lemos no nônio. Por exemplo, consideremos um nônio com dez divisões que, a resolução corresponde a 0,1 mm como já foi visto. Consideremos ainda que a leitura na escala fixa tenha sido igual a 1mm e no nônio o traço coincidente seja o terceiro. A leitura final será 1mm mais 0,3mm que é igual a 1,3mm. A figura a seguir mostra um esboço do paquímetro.

Figura 6 – Representação do paquímetro



Fonte: Fundamentos mecânico- Metrologia- SENAI

5.2- Desenho mecânico

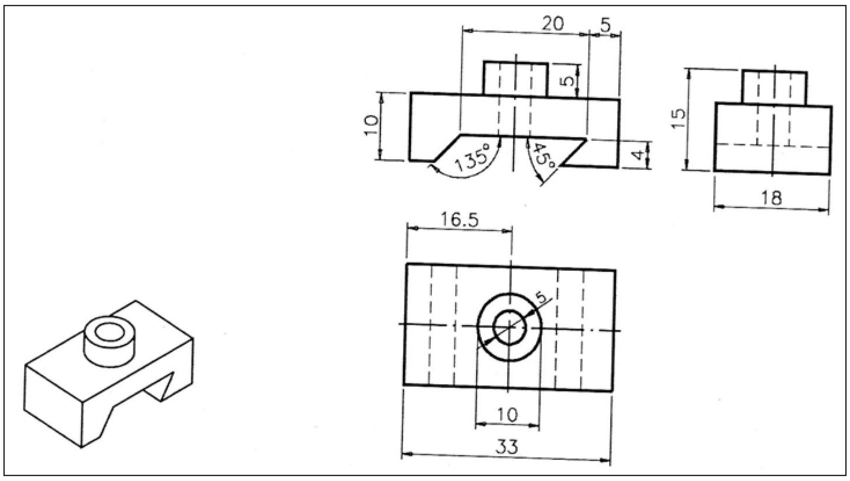
O desenho técnico deve transmitir com exatidão todas as características do objeto que representa. Para que isso ocorra é necessário que o desenhista siga regras previamente estabelecidas, chamadas de normas técnicas. Cada área ocupacional tem seu próprio desenho técnico. A seguir apresentaremos alguns conceitos relacionados ao desenho mecânico.

O desenho técnico mecânico chega pronto às mãos do profissional que vai executar a peça. Portanto, é necessário que este profissional saiba ler e interpretar o desenho técnico que chega até ele.

É comum observarmos em peças mecânicas, traços de figuras geométricas. Inclusive nos processos industriais, o prisma retangular é o ponto de partida para a obtenção de um grande número de peças e objetos.

Para que um desenho possa transmitir uma idéia de comprimento, largura e altura, é necessário recorrer a um modo de representação gráfica: a perspectiva. No caso do desenho mecânico, utiliza-se a perspectiva isométrica. Pois mantém as mesmas proporções do comprimento, da largura e da altura do objeto representado. Para executar qualquer objeto é necessário também que se tenha informações exatas sobre suas dimensões. As dimensões do objeto devem ser indicadas, no desenho técnico, sob a forma de medidas. A indicação destas medidas recebe o nome de cotagem. Estas medidas nos dão o tamanho real do objeto. As cotas são os números que indicam as medidas da peça, e a unidade de medida utilizada é o milímetro. Para uma melhor compreensão, observemos o exemplo abaixo onde é mostrada a perspectiva da peça com elementos angulares e ao lado suas vistas ortográficas cotadas.

Figura 7 – Representação das dimensões de uma peça



Fonte: Fundamentos mecânicos- Desenho mecânico- SENAI

Vejamos a interpretação da cotagem da peça e de seus elementos angulares:

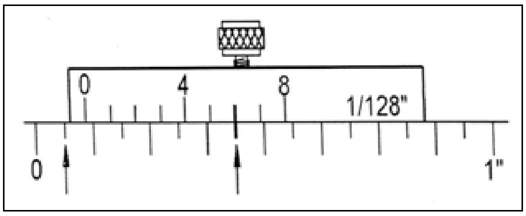
- As cotas básicas dessa peça são: comprimento=33mm, largura=18mm, altura=15mm;
- As aberturas dos ângulos dos elementos angulares são: 135° e 45°;
- O tamanho do elemento angular da esquerda é definido pelas cotas: 135° e 18mm, enquanto o da direita é definido pelas cotas: 45°, 4mm e 18mm;
- O tamanho do rasgo passante é 20mm, 18mm e 4mm;
- A cota 5 indica a localização do rasgo passante em relação a lateral direita da peça;
- A espiga redonda mede 5mm de altura e 10mm de diâmetro;
- O furo redondo mede 5mm de diâmetro e 11mm de altura.

Capítulo 6

6 RELACIONANDO A MATEMÁTICA COM CONCEITOS MECÂNICOS

Vimos até agora, conceitos que são de fundamental importância para a mecânica. E como podemos observar a matemática está presente em todos estes conceitos. Notemos que na metrologia, um dos conhecimentos básicos utilizados foram os conceitos de fração. Observamos isso, por exemplo, na conversão das unidades de medidas, onde foram utilizadas as operações com frações e simplificação de fração. Outro exemplo, onde utilizamos os conhecimentos de fração pode ser visto na leitura das medidas utilizando o paquímetro que possui escala fixa graduada em polegada e fração de polegada. Neste instrumento de medida é necessário utilizar o nônio. Para isso devemos saber calcular sua resolução. Como já foi visto, a resolução é obtida pela divisão da unidade da escala fixa pelo número de divisões do nônio. Sabendo que a unidade da escala fixa é 1"/16 e número de divisões do nônio é 8, sua resolução será: $\frac{\frac{1}{16}}{8} = \frac{1}{128}$, notemos que neste caso utilizamos a divisão de frações. A medida deve ser feita de maneira similar a que foi mostrada no paquímetro que utiliza o milímetro como unidade de medida. Vejamos a figura abaixo:

Figura 8 – Representação da escala fixa e do nônio



Fonte: Fundamentos mecânico- Metrologia- SENAI

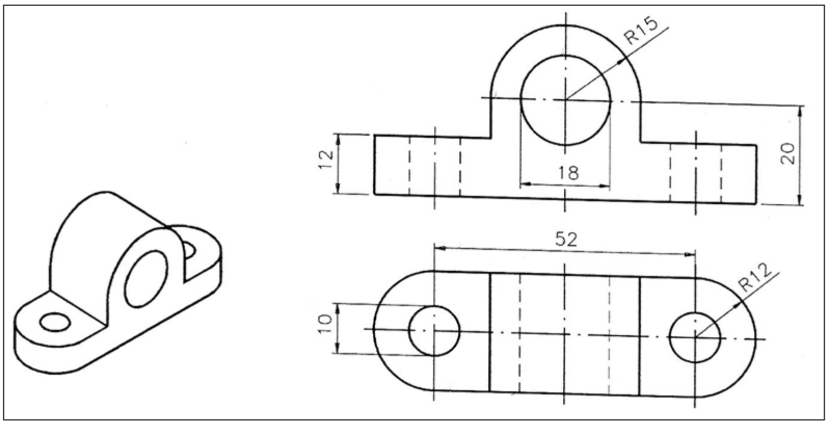
A leitura na escala fixa é igual a 1"/16 e no nônio é 6"/128, logo a leitura total é: $\frac{1"}{16} + \frac{6"}{128} = \frac{8+6}{128} = \frac{14}{128} = \frac{7}{64}$.

No desenho técnico mecânico a presença da geometria é imprescindível. Uma das contribuições da geometria para o desenho técnico, é um método criado pelo matemático francês Gaspar Monge (1746-1818), que permite representar com precisão os objetos que têm três dimensões (comprimento, largura e altura) em superfícies planas. Este método é usado na geometria descritiva. E os princípios da geometria descritiva constituem a base do desenho técnico.

Além disso, como podemos observar, nas peças mecânicas e nas partes que as compõem podemos enxergar diversas formas geométricas, onde várias dessas formas são bastante conhecidas da geometria plana. Diante disso é necessário que o profissional que trabalha com o desenho mecânico conheça as formas e conceitos geométricos.

Os conceitos geométricos nos ajudam a entender as dimensões reais da peça que foi esboçada através do desenho técnico. Em alguns casos as três cotas básicas da peça que são: comprimento, largura e altura não aparecem. No entanto, quando isso acontece, as medidas dos elementos já determinam essas cotas. Para um melhor entendimento, analisemos o exemplo a seguir:

Figura 9 – Representação das dimensões de uma peça



Fonte: Fundamentos mecânicos- Desenho mecânico- SENAI

Notemos que as três cotas básicas não estão indicadas de uma forma explícita. Mas podemos determiná-las analisando os elementos que estão indicados no desenho técnico. As medidas indicadas neste desenho técnico são: raio (R) da parte arredondada representado na vista frontal, 15mm; localização do centro da parte arredondada em relação à base (x), 20mm; diâmetro do furo maior, 18mm; altura da base, 12mm; distância entre os centros dos furos menores (y), 52mm; diâmetro (d) dos furos menores, 10mm; raio (r) das partes arredondadas representadas na vista superior, 12mm. Neste caso, podemos determinar as três cotas utilizando conhecimentos básicos de geometria. A altura (h) é determinada através da seguinte expressão: $h = R + x$, logo $h = 15mm + 20mm = 35mm$. A largura (l) é obtida através da seguinte expressão: $l = 2r$, ou seja, $l = 2.12mm = 24mm$. Por fim, obtemos o comprimento (c) através da seguinte expressão: $c = y + 2r$, ou seja, $c = 52mm + 2.12mm = 52mm + 24mm = 76mm$.

As cotas básicas não aparecem indicadas porque apresentam menor interesse para interpretação do desenho. Porém, é necessário saber encontrá-las para dimensionar corretamente a matéria prima que será empregada na execução da peça.

A aplicação da matemática na mecânica vai além de conhecimentos matemáticos básicos. A seguir mostraremos um exemplo que envolve a aplicabilidade da derivada na mecânica. Este conteúdo geralmente é apresentado no ensino superior, e é bastante utilizado na matemática aplicada.

Vejamos, portanto, o seguinte problema:

Uma indústria deseja fazer embalagens na forma de caixa: Se as partes laterais e o fundo serão feitos com uma lâmina quadrada de 30cm de lados, cortando quadrados iguais nos cantos e dobrando os lados, ache o comprimento do lado do quadrado que deve ser cortado, para que seja obtido uma embalagem de maior volume possível.

Para resolvermos este problema, inicialmente devemos encontrar uma função que represente o que é pedido. Chamemos de x a medida dos lados do quadrado que será cortado. Logo, cada lado da lâmina passará a medir (30 - 2x)cm. Da geometria sabemos que o volume é dado pela área da base vezes a altura. Com isso, temos que, a função que representa nosso problema é: $v = (30 - 2x)^2.x$ e seu domínio é: $0 < x < 15$. Devemos encontrar a derivada de v, onde encontraremos os pontos críticos de v e consequentemente seu ponto de máximo.

$$v = (900 - 120x + 4x^2).x = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

$$v' = 12x^2 - 240x + 900 \leftrightarrow v' = x^2 - 20x + 75$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4.1.75}}{2.1} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{2} \leftrightarrow x_1 = 15 \; e \; x_2 = 5$$

Notemos que 15 não pertence ao domínio de v. Logo, o ponto de máximo da função é x = 5. Então o comprimento dos lados do quadrado cortado deve ser igual a 5cm para que tenhamos o maior volume possível.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram abordados alguns assuntos matemáticos que, fazem parte do programa de ensino no âmbito fundamental, médio e superior. Mostrando a aplicação de determinados assuntos no desenvolvimento da mecânica, já que, sem o conhecimento matemático não teríamos o desenvolvimento da mecânica. Obviamente, não estamos afirmando que a matemática é a única responsável por isso, mas é inegável a importância dessa ciência.

Mostramos ainda de forma resumida alguns conceitos utilizados na mecânica, como a metrologia e o desenho mecânico. Propiciando ao leitor o conhecimento de tais conceitos buscando relacionar estes conceitos com os conteúdos matemáticos abordados.

Dessa forma, esperamos mostrar a presença da matemática aplicada na mecânica. Não que esta seja a única aplicabilidade destes conteúdos, mas estes desempenham papéis fundamentais para o desenvolvimento de tal ciência.

REFERÊNCIAS

Ensino Fundamental: Frações e Números Decimais. Disponível em <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/fracoes/fracdec.htm >. Acesso em: 02 out. 2015

Fração equivalente. Disponível em <http://www.brasilescola.com/matematica/fracao-equivalente.htm>. Acesso em: 03 out. 2015

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar, vol.9**. 7. ed . São Paulo: Atual Editora LTDA, 1997.

BARBOSA, Celso A. Silva. **Cálculo Diferencial e Integral I**. 7. ed. Ceará: Realce Editora e Ind. Gráfica LTDA, 2007.

Fundamentos mecânicos- Metrologia- SENAI

Fundamentos Mecânico- Desenho Mecânico- SENAI