UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

INSTITUTO UFC VIRTUAL

FRANCISCO DE PAULO RODRIGUES FREITAS

PROCESSO DE APRENDIZAGEM NA COMPREENSÃO DO CÁLCULO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

QUIXADÁ – CE

2015

FRANCISCO DE PAULO RODRIGUES FREITAS

PROCESSO DE APRENDIZAGEM NA COMPREENSÃO DO CÁLCULO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientação: Prof. Me Leonardo Tavares de Oliveira

QUIXADÁ - CE

Dezembro de 2015

“Quando o matemático se depara com um problema insolúvel, tem duas saídas: passar o resto da vida em busca da solução (talvez sem sucesso) ou piorar o problema.”

(Walter Carnielli)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus que me proporcionou mais uma vitória, a minha família que esteve sempre presente em todos os momentos de minha caminhada e aos meus professores e colegas que sempre estiveram ao meu lado.

Agradecimentos

A Deus, que me guiou e protegeu durante todas as idas e vindas de Choró para Quixadá e pela realização de um sonho a ser concretizado.

A minha querida mãe, Maria Jacinta Rodrigues Freitas, que mesmo morando distante de mim, sempre me ligava para saber como eu estava, principalmente nas noites que tive os encontros presenciais na Universidade.

A minha querida irmã, Antonia Aurilene Rodrigues Freitas, pela paciência de conviver comigo e ceder espaço de sua rotina a ponto de me deixar ficar muitas noites em claro estudando para as provas ou resolvendo trabalhos.

A todos os meus colegas de turma, pela união, perseverança e confiança, onde sem sombra de dúvidas, farão parte de minha história de vida.

Aos meus amigos universitários, Bruno Braga e Priscila Lima, que sempre estiveram presentes comigo nos eventos da Feira das Profissões no Campus do Pici na UFC em Fortaleza.

A todos os meus professores, pela reciprocidade de conhecimento partilhada desde o início do Curso até o término dele.

Aos funcionários do Pólo da Universidade, Ed Naldo Santana e Verônica Moura, que sempre me disponibilizavam declaração de matrícula para fins diversos.

Em especial ao Professor e Tutor Presencial Adailson Ramon Pinheiro de Oliveira, pelas acolhidas em cada aula realizada, pela segurança em me ajudar nos estágios de observação e regência e pela referência acadêmica que o mesmo me reflete e serve de exemplo para muitos.

E mais ainda ao Professor Leonardo Tavares de Oliveira, pela compatibilidade ao me ajudar a escolher o tema proposto na Monografia, desde todo o desenvolvimento envolvido até a impressão de todo o material.

Enfim, agradeço a todos que tiveram participação na conclusão deste trabalho.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo tornar conhecidos alguns dos grandes percursores matemáticos que desenvolveram uma linha de raciocínio no estudo do cálculo algébrico. Para tanto, resolvemos tratar a evolução deste ramo do conhecimento partindo de sua forma mais primitiva até chegar ao nível mais complexo de abstração utilizado atualmente. Compreenderemos a atuação de seis importantes algebristas: Aristóteles, Euclides, Stifel, Cardano, Bombelli e Viète. Destacaremos ainda a relevância que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) representam dentro da Matemática no Ensino Fundamental, a ponto de analisar as dificuldades dos discentes frente à resolução de problemas; cabendo salientar as quatro concepções algébricas de Zalman Usiskin, procedimentos estes indispensáveis na educação algébrica. Escolhemos, também, a indicação de algumas demonstrações e aplicações que nos possibilitarão entender que a Álgebra é um campo bastante amplo nos conteúdos vistos nas disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática do Ensino Superior, bem como através da Análise Dimensional na Física. Em pauta, colocaremos o cálculo algébrico como uma área de grande atividade na pesquisa matemática, visto que estamos articulando informações valiosas para aprofundamento de momentos posteriores.

Palavras-chave: Precursores. Cálculo Algébrico. PCNs. Ensino Fundamental. Concepções Algébricas.

Abstract

This work aims to make known some of the great mathematician precursors who have developed a line of reasoning in the study of algebraic calculation. To this end, we decided to treat the evolution of this branch of knowledge starting from its most primitive form until it get to the most complex level of abstraction currently used. We will understand the role of six major algebraists: Aristotle, Euclid, Stifel, Cardano, Bombelli and Viète. We also highlight the relevance of Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) represent in Mathematic sin Primary Education as to analyze the difficulties of the students to solve problems; it should be emphasized the four Zalman Usiskin's algebraic concepts, these procedures are essential in algebraic education. We also chose, the provision of some demonstrations and applications that enables us to understand that Algebra is a rather wide field in the contents seen in the disciplines of Degree in Mathematics of Higher Education as well as by Dimensional Analysis in Physics. In question, we will place the algebraic calculation as an area of great activity in mathematical research as we are articulating valuable information forfurther development of later times.

Keywords: Precursors. Algebraic calculation. PCNs. Elementary School. Algebraic concepts.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Sabemos que a Álgebra é um ramo da Matemática muito presente na vida escolar do alunado, sendo ela uma das principais responsáveis em desenvolver a capacidade intelectual do indivíduo em seu processo de ensino e aprendizagem, principalmente quando o raciocínio começa a gerar outras ideias de como solucionar determinado tipo de problema específico. Partiremos deste princípio para justamente procurarmos argumentos indispensáveis sobre como o cálculo algébrico pode ser manipulado em diversos aspectos, cada um com sua reflexão a ser entendida.

Do ponto de vista histórico, veremos que a educação algébrica é considerada como um conteúdo em constante construção, e mais, significa dizer que a mesma trata-se de uma obra inacabada, que a qualquer momento, o homem poderá preencher alguma lacuna deixada por outros. Desta forma, faremos uma contextualização cronológica de como o cálculo algébrico se aperfeiçoou ao longo do tempo, ao qual será detalhada a contribuição de alguns precursores importantes, bem como o local de onde tais legados tiveram total inspiração, sendo citados: Aristóteles, Euclides, Stifel, Cardano, Bombelli e Viète.

Em sequência, procuraremos estabelecer as principais relações entre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para com a análise da Álgebra no Ensino Fundamental, de modo a visualizar as dificuldades que os alunos encontram frente à resolução de problemas envolvendo o tema em foco, bem como identificar estratégias que possam ser articuladas pelos professores a ponto de melhorar a sua metodologia em sala de aula. Assim, é fundamental que alunos e professores sintam-se desafiados em estudar o cálculo algébrico, visto que todo e qualquer aprendizado precisa ser construído passo a passo, logo o saber matemático não deve ser encarado como uma memorização de conceitos e fórmulas, mas que nos permita solucionar enunciados diversos através de um discurso simbólico, abstrato e compreensível.

Daí vale salientar que os PCNs da Matemática do Ensino Fundamental definem um problema como sendo "uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter resultado. Ou seja, a solução não está disponível no início, no entanto é possível construí-la". (BRASIL 1997, p. 44).

A partir disso, apresentaremos ainda algumas demonstrações e aplicações que reforçam toda a importância de se gerar um pensamento crítico diante de problemas que abordam a abstração de certo modo. Com isso, é imprescindível destacar que a Álgebra é um dos ramos mais antigos da Matemática, e continua a ser uma das áreas de maior atividade de pesquisa matemática.

Daremos também uma atenção significativa entre a interdisciplinaridade que existe entre a Matemática e a Física, pois ao mesmo tempo em que temos ciências exatas com diversificados conteúdos, deve-se notar que a Análise Dimensional procura utilizar equações para facilitar o entendimento de certos problemas, quer dizer, o cálculo algébrico provém mais do que a simbologia de letras e números, ele projeta maneiras de como achemos uma "saída" em determinados casos.

Outra questão muito interessante a ser tratada gira em torno da comparação que é feita entre o aluno do Ensino Fundamental e o do Ensino Superior, visto que o primeiro terá problemas com os tópicos iniciais da Álgebra, enquanto que o segundo apresentará os mesmos problemas frente à complexidade de disciplinas avançadas que exploram as variáveis sem entrar em pormenores. Ou seja, com as quatro concepções de Usiskin, os alunos começam a enxergar de perto os verdadeiros obstáculos que o Ensino da Álgebra tem a disponibilizá-los, porém nada se torna impossível quando há oportunidades de tentar.

Diante de todo o exposto, resolvemos neste trabalho propor uma sequência de tópicos que não priorizassem totalmente os impasses que o cálculo algébrico cria no Ensino Fundamental, mas que houvesse a construção do conhecimento algébrico organizado pelo próprio aluno em seu processo de ensino e aprendizagem, tentando assim obter sucesso mediante a forma como julga necessária aplicar tais informações em sua vida significativamente.

2 - Uma breve descrição sobre o contexto histórico da Álgebra

2.1 A Visão de Alguns Precursores Acerca do Cálculo Algébrico

A introdução do cálculo algébrico na Matemática é algo que vem sendo entendido com o passar do tempo, sendo que precisamos estar atentos a tudo que lemos e pesquisamos acerca deste tópico tão importante. A partir disso, é que começamos a compreender o quão se torna essencial traçar uma linha cronológica dos fatos que um dia ocorreram e hoje garantem um conhecimento lapidado que aprendemos e então pode ser transmitido à medida que temos a oportunidade de concretizar tal aplicação.

Em se tratando de datas, não podemos deixar de lado também as pessoas que tiveram enormes contribuições diante das descobertas realizadas, se bem que os feitos acontecem por intermédio de grandes mentalidades que se destacam pela forma como enxergam determinado ponto de vista. Assim, a curiosidade faz com que percebamos coisas que jamais podíamos ter a capacidade de interpretar, representar ou até mesmo demonstrar.

Desta feita, tentaremos estabelecer uma estreita ligação entre os números e as letras, de que forma a Álgebra pode ser analisada de acordo com os estudos que foram cruciais para este ramo se desenvolver ao longo dos anos, bem como as abordagens metodológicas dinamizadas por precursores que dedicaram parte de sua vida em prol de uma linguagem algébrica mais personalizada.

Outro ponto fundamental que assegura as nossas pesquisas é que o surgimento da Álgebra se dá em consequência ao modo como os homens primitivos se adequam no meio onde vivem para sobreviver. Logo, com o passar dos séculos, o ser humano da Antiguidade procura maneiras de representar "matematicamente" as diversas quantidades com o qual estar envolvido.

Por conseguinte, iremos propor de início uma investigação concisa dos legados deixados por algumas personalidades da época, a saber, dos filósofos gregos Aristóteles e Euclides, do alemão Stifel, dos italianos Cardano e Bombelli e do francês François Viète.

2.2 Na Grécia – Aristóteles e Euclides

A primeiro momento, temos que procurar observar o quanto o cálculo algébrico possa parecer longo, cansativo e complicado. Com isso, os povos da Antiguidade começavam a substituir os números pelas letras, de maneira que a ausência de símbolos matemáticos possibilitava a constante busca por valores desconhecidos, ou seja, as palavras eram recorridas para satisfazer essas necessidades quantitativas.

Dentro deste contexto, passamos a detalhar como as civilizações gregas lidavam com essa questão de empregar uma simbologia na indicação de números e também na resolução de soluções em problemas.

E então, os primeiros vestígios algébricos surgem com os estudos dos filósofos gregos Aristóteles (384-322 a. C.) e Euclides (século III a. C.), embora saibamos que existam outras ideias complementares nesse meio geográfico.

A história grega começa a ser articulada no momento em que a cultura da sociedade ganha inspiração na Europa, sendo que novos e vigorosos progressos se originam ao longo das margens de todo o litoral mediterrâneo.

O papel dos gregos na Álgebra não foi tão relevante se formos comparar a outros povos, porém trouxe certos impactos que necessitam aqui ser informados. Seguindo a linha de raciocínio, basta voltarmos no segundo milênio a. C., daí observa-se que a referida civilização contava com a participação de invasores analfabetos vindos do norte, que não tinham uma tradição literária e sequer matemática. E mesmo abrindo caminhos em alto mar, os mesmos tinham a vontade assídua em buscar aprender o que desconheciam, tanto é que a ansiedade em aprender favorecia o aperfeiçoamento das técnicas de tudo que faziam.

Um argumento que reflete esse desejo pode ser citado na captura do alfabeto fenício, cuja constituição era apenas de consoantes, havendo assim um acréscimo das vogais, segundo destaca o historiador da matemática norte-americano Boyer (1996):

> *O alfabeto parece ter-se originado entre os mundos babilônico e egípcio, talvez na região da Península do Sinai, por um processo de redução drástica do número de símbolos cuneiformes ou heráticos. Esse alfabeto chegou às novas colônias – gregas, romanas e cartaginesas – graças à atividade dos mercadores. Supõe-se que alguns rudimentos de cálculos viajaram pelas mesmas rotas, mas as partes mais exóticas da Matemática sacerdotal podem ter permanecido restritas a seu domínio de origem. Logo, porém, mercadores, negociantes e estudiosos gregos se dirigiram aos centros de cultura no Egito e Babilônia. Ali entraram em contato com a Matemática pré-helênica; mas não estavam dispostos a apenas receber antigas tradições, e se apropriaram tão completamente do assunto que logo ele tomou forma drasticamente diferente.* (BOYER, 1996, p.30).

Já sabemos que os gregos utilizavam letras de seu alfabeto para simbolizar números. Com certeza já ocorreu de algum momento de nossa vida termos nos deparado com algum exercício proposto contendo os símbolos: α, β e γ. Porém, o que imaginamos não é o que encontramos, pois mesmo que se assemelhem a três letrinhas quaisquer, cada uma delas representa um número (1, 2 e 3, respectivamente) que foi empregado por matemáticos gregos.

Na Grécia, o alfabeto compunha de vinte e sete letras, cuja representação identificava algumas quantidades específicas, são elas: nove para os inteiros menores do que dez, nove para os múltiplos de dez menores do que cem e nove para os múltiplos de cem menores do que mil.

Aristóteles (384-322 a. C.) foi um filósofo grego, seus estudos abrangem áreas diversas, podendo ser citadas as principais, física, ética, lógica, governo e biologia. É considerado como um dos fundadores da filosofia ocidental, juntamente com Platão e Sócrates.

FIGURA 1: Aristóteles (384-322 a. C.)

Teve uma contribuição importante tanto na Matemática quanto na Álgebra, visto que o mesmo foi o criador e sistematizador da Lógica, tão logo essa filosofia nos atrela algumas noções abstratas.

Para complementar, segundo Antonio A. P. (2004):

Todas as disciplinas têm um objeto de estudo. O objeto de estudo de uma disciplina é aquilo que essa disciplina estuda. Então, qual o objeto de estudo da lógica? O que é que a lógica estuda? A lógica estuda e sistematiza a validade ou invalidade da argumentação. Também se diz que estuda inferências ou raciocínios. Podes considerar que argumentos, inferências e raciocínios são termos equivalentes.

Agora, começamos a notar que a lógica aristotélica pode ser compreendida a partir de mecanismos que necessitam ser aplicados em raciocínios que não generalize nenhum tipo de matéria. O conhecimento deve ser fundamental e universal, sendo que deva existir um ponto de partida com opiniões, regras, princípios e leis, provenientes de um pensamento mais equilibrado, seja individual quanto coletivamente.

Por exemplo, quando nos referimos a frases do tipo: "É lógico que eu vou!", "É lógico que ela disse isso!" ou "Você não tem lógica!"; identificamos aí significados que fazem com que utilizemos letras para nos dirigir a algo, isto é, "visto que conheço *a*, disso posso concluir *b* como consequência", "visto que *p* é assim, então é preciso que *q* seja assim"...

Euclides de Alexandria (300 a. C) foi um matemático grego da Escola de Platão, nasceu na Síria e fez alguns estudos importantes em Atenas. É desde a Antiguidade até os dias de hoje como um dos estudiosos em Matemática mais fluentes, principalmente reconhecido na Grécia por seus feitos.

No século III a. C., formulou uma álgebra geométrica. Tal denominação caracterizava as qualidades dos gregos em serem geômetras (profissionais da Geometria), se bem que eles lidavam perfeitamente com os números inteiros e desconheciam por completo os números racionais. Desse modo, tornava-se impossível para os gregos compreenderem medidas ao qual não estavam adaptados, como referência citamos as raízes quadradas de dois e três ($\sqrt{2}$ e$\sqrt{3}$), portanto exigia-se desvendar outros métodos de calcular.

Além disso, Euclides é tido como o Pai da Geometria, considerado como um dos mais significativos estudiosos desta área, valendo salientar ainda a sua colaboração na introdução do cálculo algébrico.

FIGURA 2: Euclides de Alexandria (300 a. C)

Partindo das dificuldades encontradas, temos que analisar um exemplo para uma melhor análise das ideias, logo se tomarmos a soma e o produto de dois lados de um retângulo e seja feito o pedido das dimensões, isso para os gregos precisaria ser tratado de uma forma distinta pelo que se conhece até então. Ou seja, a álgebra geométrica descarta somas de segmentos com áreas ou áreas com volumes.

Vejamos essa representação na figura a seguir, e antes disso se considerarmos que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, perceberemos que na Grécia isso será visto como:

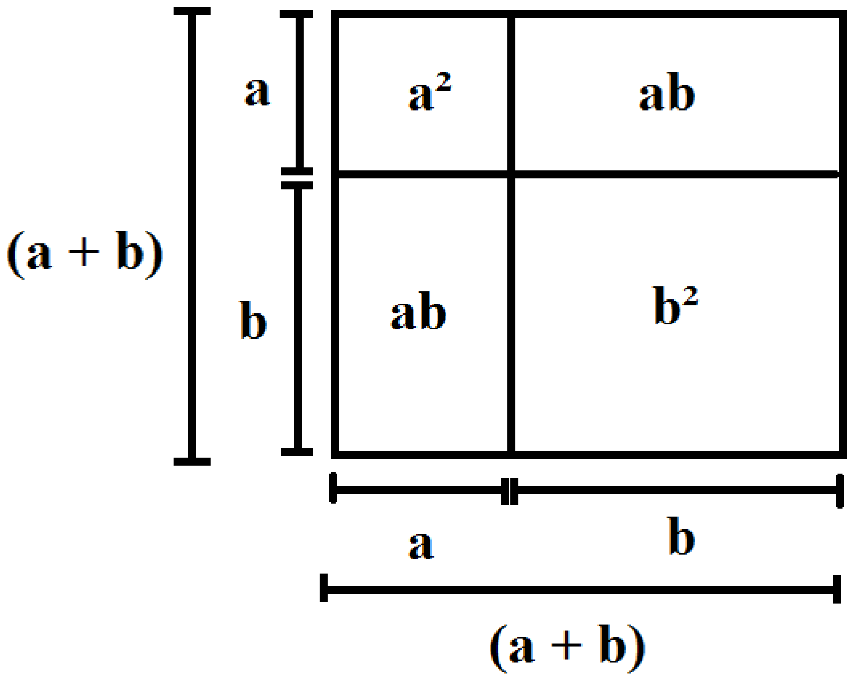

FIGURA 3: Representação da expressão $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ na visão dos gregos

O diagrama em evidência estar representado por Euclides em Elementos, livro II, proposição 4:

> *Se uma reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contém. [Isto é, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.]*

Enfim, a álgebra geométrica de Euclides é um mecanismo fantástico a ser entendido, uma vez que os gregos demonstravam soluções a partir de figuras geométricas, sendo estas responsáveis por resolver equações diversificadas e deduzir fórmulas importantes a serem aplicadas em problemas do mesmo tipo.

E, para que consigamos interpretar e compreender o diagrama acima, necessitamos ressaltar uma importantíssima obra de Euclides, intitulada *Os Elementos*, onde ele sintetizou todo o conhecimento matemático de sua época.

Diante do exposto, podemos tomar como base um exemplo da representação da Lei Distributiva:

$$a\,(b + c + d) \ = ab \ + ac + ad$$

Agora, esquematizamos geometricamente:

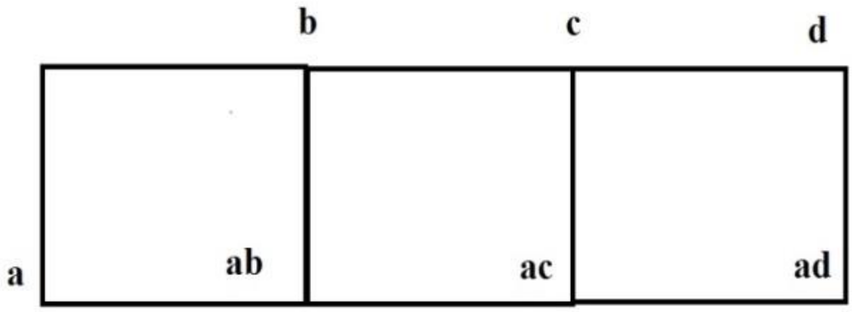

FIGURA 4: Lei Distributiva

Por conseguinte, a álgebra geométrica estar presente em múltiplas partes dos primeiros livros dos Elementos de Euclides, tanto é que há a explicação do esquema identificado anteriormente.

Conforme Boyer:

> *"A lei distributiva* $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ *era sem dúvida muito mais evidente para um estudioso grego que para o estudante que se inicia na álgebra hoje, pois o primeiro podia facilmente representar as áreas dos retângulos nesse teorema, que diz simplesmente que o retângulo sobre a e cada um dos segmentos b, c, d é igual à soma dos retângulos sobre a e cada um dos segmentos , b, c, d tomados separadamente. (Figura 4)"* (BOYER; 1996, p. 54)

Embora a álgebra grega persistisse na sociedade até então, entretanto não foi suficiente que ela perdurasse na época. O motivo para isso diz respeito ao fato de que a mesma não poderia sobreviver apenas de uma tradição escrita, já que era recomendada uma comunicação oral, enfim não se concretizou, mas os gregos provaram que tentativas existem e estão aí para serem arriscadas.

2.3 Na Alemanha – Stifel

Como pudemos verificar muito tempo iria se passar até que as letras pudessem ser amplamente utilizadas para representar quantidades desconhecidas, daí notamos que isso se deveu, principalmente, ao alemão Michael Stifel (1487-1567).

Este precursor, por sua vez, é considerado como o maior algebrista alemão do século XVI, logo aos poucos iremos conhecer parte de sua vida e sua contribuição para o cálculo algébrico.

Stifel foi um homem de grande porte religioso, sua criação é dada pela igreja e seus estudos se deram na Universidade de Wittenberg, fundada em 1502. Filho de Conrad Stifel, o alemão tem sua educação um tanto quanto desconhecida, mas sabe-se que ele entrou no monastério de Augustian, em Esslingen. Sendo ordenado em 1511, enquanto no mosteiro, não durou pouco mais de um ano para que fosse expulso mediante acusações de que a própria igreja retinha dinheiro das pessoas mais pobres da região.

FIGURA 5: Michael Stifel (1487-1567)

Um fato histórico marcante a ser destacado aqui se trata das 95 Teses contra a Venda de Indulgências na atuação de Martin Luther, ou simplesmente Lutero, sendo que o evento se dá em outubro de 1517. Stifel, por volta de 1520, se refugia com Luteranos, e a partir deste momento começa a tentar usar métodos de numerologia a ponto de deduzir significados religiosos ocultamente, ou seja, ele fazia previsões de nomes alheios fazendo a menção de números. Assim, o alemão tentou prever “o fim do mundo”, porém não demorou muito para que fosse contrariado, preso e expulso.

Com a mudança para uma paróquia de Holzdorf, em 1535, o algebrista permanece neste lugar por 12 anos e em 1547 vai para a Prússia. Nesta última, ele era professor de Matemática, e pouco mais de 10 anos, agora em 1559, consegue uma vaga na Universidade de Jena, e daí inicia um forte contato em pesquisas com a área da Álgebra e também na Aritmética.

Inventou os logaritmos, e ainda é autor de “Arithmetica Integra” (“Aritmética na Integra”), obra famosa publicada em 1544. Nela, temos que a primeira parte aborda as vantagens que podemos associar progressões aritméticas com progressões geométricas, além de entendermos o desenvolvimento binomial dos coeficientes indo até a ordem dezessete.

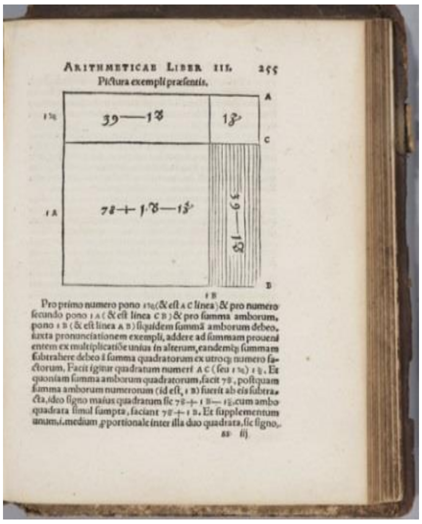

FIGURA 6: Arithmetica Integra (1544), p.225

Stifel também criou uma regra para o Binômio de Newton, ao qual se mencionava que “a soma de dois números binominais de mesmo numerador e denominadores consecutivos é um número binomial cujo numerador possui uma unidade a mais que os numeradores das parcelas e o denominador é o maior dos denominadores das parcelas”. Com isso, usava desde então os sinais e simboliza as incógnitas na maioria das vezes por letras.

Outro ponto interessante da publicação trata-se da ideia de propor pela primeira vez uma noção numérica a partir de um expoente. Estudos à parte, o matemático considerava que a escritura de um livro por completo não se baseava apenas em contar informações acerca de números, mas que tudo que ocorria a nossa volta necessita de impedimentos frente a tantas maravilhas que observamos.

Arithmetica Integra foi escrita em latim, porém com a publicação de Deutsche Aritmética, próxima publicação de Michael Stifel, vê-se a predominância do idioma alemão nesta última. Com isso, projetou-se a vontade de abordar a álgebra de uma maneira mais clara e objetiva, onde as pessoas começassem a relacionar letras e números.

Logo, ressaltamos aqui que Stifel revolucionou o estudo da Álgebra em sua época, ao qual introduziu uma notação mais particular no sentido de fazer com que os outros também se preocupem com a "perfeição" da boa notação.

Em outras palavras, ele expande uma compreensão altamente significativa no caminho que o cálculo algébrico é desenvolvido, embora saibamos que as dificuldades necessitam ser encaradas, da mesma forma que deva haver a busca por soluções.

Para Kurt Vogel (1888-1985), historiador matemático alemão:

"Era, de fato, o maior algebrista alemão do século XVI." (Vogel, 2010)

2.4 Itália – Cardano e Bombelli

No século XVI, o cálculo algébrico começa um progresso de intensa autonomia relativo à Geometria, com a abordagem de uma introdução simbólica mais concisa, a utilização de letras para representar coeficientes e incógnitas e o abandono do estudo geométrico de cunho homogêneo e dimensional.

Matemáticos italianos deram início à prática de simbolizar números desconhecidos através de letras, cujo intuito era indicar operações de um jeito mais simples e sintético.

Os italianos Cardano (1501-1576) e Bombelli (1526-1573) foram os responsáveis em ministrar tais contribuições para a Álgebra durante essa época. Com isso, iremos detalhar como eles puderam estar próximos acerca dessa construção, de modo a estabelecer a ligação que ambos tiveram frente à admiração de um pelo outro.

Girolamo Cardano nasceu na cidade de Pavia, na Lombardia, a 24 de setembro de 1501. Seus pais nunca casaram, e por isso, sofria atentados de morte mesmo ainda sendo embrião no ventre de sua mãe Clara Micheri. Quanto à seu pai Fazio Cardano, digamos que o matemático herdou vocações fundamentais para ser reconhecido em meio a seus legados.

Doutor matemático milanês e jurista, Fazio, que também era amigo de Leonardo da Vinci, foi referência para fazer com que o filho seguisse seus passos. Assim, Cardano estudou em Universidades de Padua e Pavia, tornando-se um doutor de renome na Medicina Italiana, mas por questão do destino se esforçou em áreas da Matemática, principalmente em tópicos envolvendo a probabilidade.

A notoriedade do algebrista italiano parte do momento em que ele publica, aos 44 anos de idade, o livro Ars Magna (a Grande Arte), trabalho este que trata fórmulas de resolução em equações cúbicas (3° grau) e quárticas (4° grau), até então nunca explanadas.

FIGURA 7: Girolamo Cardano (1501-1576)

Uma curiosidade sobre este material é que a divulgação teve lançamento em 1545, tanto é que o título legítimo era *Artis Magnae Sive* de *Regulis Algebraicis* (A Grande Arte, ou As Regras da Álgebra).

Foi o pioneiro em introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas.

Com um instinto competitivo de apostador, Cardano era um adepto participante de jogos, ao qual formulou regras importantes que caracterizam a teoria da probabilidade, como por exemplo, passava horas jogando xadrez e dados. Além disso, escreveu uma espécie de manual chamado Liber Ludo Aleae (O Livro dos Jogos de Azar), o que justifica principalmente a conexão dos jogos com a Matemática.

De acordo com MLODINOW (2009):

> *"O livro dos jogos de azar, além de trazer os primeiros estudos sistematizados sobre a teoria probabilística, também pode ler lido como manual para apostadores de jogos de azar, pois o livro não trata apenas de questões matemáticas, mas também de assuntos com perfil psicológico, como a personalidade dos jogadores."*

Em 1576, restando três dias para completar 75 anos, acaba falecendo em Roma.

FIGURA 8: *Artis Magnae Sive* de *Regulis Algebraicis* (A Grande Arte, ou As Regras da Álgebra)

Posteriormente, após termos conhecido a figura de Cardano, passamos agora a conhecer o mais importante algebrista italiano que se destacou na história da Matemática: Bombelli.

Rafael Bombelli nasceu na Itália, mais especificamente na cidade de Bolonha, em 1526. Filho mais velho de Antonio Mazzoli, vivia ajudando seu pai no comércio negociando a venda de lãs. Embora com muitas posses, a família não tinha uma boa relação com o governo da cidade na época, liderado por Giovanne II. Diante dessa polêmica, os Mazzoli manifestavam contra o poder político, e devido a isso sofreram exílio e confisco de propriedade, sendo que o perdão só ocorreu tempos depois.

Em paralelo, este fato serviu para que Rafael alterasse seu nome para Bombelli, uma vez que ele não tenha tido uma formação acadêmica em seu currículo. Tentando disfarçar a descendência, iniciou uns trabalhos para o romano Alessandro Rufini, futuro bispo de Melfi, daí já se estabelece os primeiros contatos com a Matemática, e consequentemente com o cálculo algébrico.

FIGURA 9: Rafael Bombelli (1526-1573)

Dentro deste período, sofreu influências fundamentais de Cardano, desafiando-se em resolver problemas através de equações cúbicas e quárticas. Logo, já vemos aí o relacionamento admirável entre os dois algebristas italianos, se bem que a colaboração do Professor Pier Francesco Clementi, que fazia estudos religiosos em cargo de Papa, também é motivo que mostra o quanto Bombelli se dedicou aos estudos abstratos.

Então, as coisas começam a mudar em 1549, quando o patrão de Bombelli exerce direitos acerca da região do Val di Chiana (Itália), onde este passa a pertencer aos Estados Papais. Consequentemente, o matemático ficou encarregado de demarcar fronteiras nesta região, porém teve que interromper os serviços a partir de reclamações da vizinhança fronteiriça.

Praticamente sem ter o que fazer em meio às demarcações suspensas, eis que escreveu a obra de ilustre interesse, chamada *L' Álgebra (Álgebra)*, cuja publicação se deu em 1572.

Com a liberação do trabalho, as escrituras do livro continuavam a todo vapor, mas foi com a chegada do professor Antonio Maria Pazzi à Universidade de Roma onde Rafael pôde se deparar com uns arquivos manuscritos sobre Aritmética do matemático grego Diofanto. Dessa maneira, fica apaixonado pelo que acabara de ver, e os dois, ele e o professor, resolvem traduzir tais informações encontradas.

Digamos que a influência de Diofanto sobre Bombelli significou o reconhecimento da obra Álgebra, pois dos 272 problemas matemáticos presentes no livro, 143 baseavam-se nas ideias diofantinas. O italiano se torna referência no cálculo algébrico ao utilizar pela primeira vez o jogo dos sinais.

Por exemplo, em sua álgebra, ele contextualizou:

- Mais vezes mais é igual a mais;
- Menos vezes menos é igual a mais;
- Mais vezes menos é igual a menos;
- Menos vezes mais é igual a menos;
- Mais raiz quadrada de menos n vezes mais raiz quadrada de menos n é igual a menos n;
- Mais raiz quadrada de menos n vezes menos raiz quadrada de menos n é igual a mais n;
- Menos raiz quadrada de menos n vezes mais raiz quadrada de menos n é igual a mais n;
- Mais raiz quadrada de menos n vezes mais raiz quadrada de menos n é igual a mais n.

Aliás, também foi pioneiro em apresentar métodos eficazes para resolver determinados problemas matemáticos, como por exemplo, em casos onde se deparava o uso do sinal negativo em raiz quadrada.

Vejamos algumas simbologias: $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$. Nestas condições, pode-se verificar que Bombelli determinou regras algébricas de números negativos, que com o passar do tempo, indicariam números complexos.

L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.
Nouamente posta in luce.
IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
M D L X X I I.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

FIGURA 10: *L' Álgebra* (Álgebra)

Dos cinco livros escritos em Álgebra, três deles estiveram presentes na vida e obra deste importantíssimo algebrista. Mesmo não dando os impagáveis créditos ao grego Diofante, acaba falecendo em 1573 em Roma, provavelmente aos 47 anos de idade, deixando assim dois livros ainda para serem lançados.

E diante de tudo que aconteceu, em 1923, o pesquisador italiano Etorre Bortolotti (1866-1947) encontra os arquivos manuscritos do italiano em uma Biblioteca de Bolonha, e seis anos depois (1929), republica todos os livros da coleção, ou seja, um marco histórico nesta caminhada frente ao desenvolvendo da Álgebra. Em suma, basta reforçar que Bombelli além de matemático, também exerceu arquitetura e engenharia, além do mais é um dos precursores notáveis para o progresso da Álgebra, principalmente por se tratar de sua área de estudo.

2.5 Na França – François Viète

À vista dos avanços que o cálculo algébrico sofreu ao longo dos séculos, não podemos deixar de lado a importância que os franceses tiveram neste panorama histórico. Nesse sentido, vale reforçar o quanto a álgebra simbólica persistiu da Antiguidade até os tempos mais remotos, tanto é que a mesma tomou outros rumos e hoje ocupa um lugar de destaque no desenvolvimento dos estudos matemáticos.

Por este motivo, trataremos de entender quem foi François Viète (1540-1603), conhecido como o Pai da Álgebra.

François Viète nasceu em 1540, na cidade francesa de Fontenay-le-Comte. Era um advogado formado pela Universidade de Poitiers, porém era fascinado por Matemática em seus horários vagos. Na época, a França era governada pelos reis Carlos IX, Henrique III e Henrique IV, e foi onde Viète serviu de membro no Parlamento da Bretanha e posterior como Conselho do Rei.

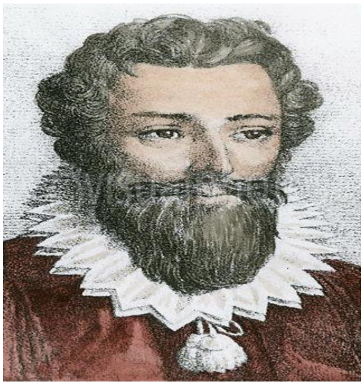

FIGURA 11: François Viète (1540-1603)

Durante tais reinados, os franceses viviam em guerra contra os espanhóis, já o algebrista demonstrava certa habilidade em ser um dos melhores especialistas em cifras da região, trabalho este capaz de decifrar as mensagens de código dos inimigos. O sistema de cifras compunha de mais de 500 caracteres, sendo estes símbolos alterados periodicamente. Diante da realidade que vivia, o advogado acabou recebendo acusações de ter pactos com demônios, mesmo sabendo que isso já refletia a sua relação com a Álgebra.

Viète permitiu a utilização pautada das letras para representar o desconhecimento de números e da simbologia adotada nos sinais das operações matemáticas. Tal abstração era baseada em um manual de instruções, onde se buscava a resolução de equações mediante uma incógnita, sistemas de duas equações com uma ou duas variáveis, sistemas de equações lineares, derivadas de enunciados comercial ou geométrico.

Em *In artem analyticam isagoge (Introdução às Artes Analíticas),*obra mais famosa do algebrista francês publicada em 1591, podemos analisar a presença de uma representação algébrica caracterizada pela utilização de simbolizar vogais em incógnitas e consoantes em constantes. Além disso, Viète inova na forma como aponta suas colocações, ou seja, utiliza símbolos bem escolhidos de um tipo (vogais) para incógnitas e de outro (consoantes) para quantidades desconhecidas.

Essas novidades surpreendentes não só possibilitaram a flexibilidade e a generalização na resolução de equações algébricas, principalmente quadráticas e lineares, todavia trouxe algo de produtivo nunca visto até então, a saber, uma análise clara e objetiva de traçar uma relação entre as múltiplas maneiras de solucionar um problema e identificar os coeficientes de uma equação original.

Em se tratando de revolucionar, temos que Viète foi pioneiro em mostrar que existem diferenças a serem estabelecidas entre uma variável e um coeficiente. Por exemplo, utilizava uma mesma letra para qualificar a quantidade de uma potência, sendo que expressava *A* (indica A), *A quadratum* (indica A^2), *A cubum* (indica A^3). Partindo desse mesmo princípio, o francês René Descartes (1596-1650) elaborou as atuais representações que identificam os termos integrantes de toda e qualquer equação.

Desta feita, nota-se como o cálculo algébrico se tornava contrário à álgebra geométrica, sendo ele encarado como um ramo da Matemática onde as pessoas não entendiam a sua linguagem, bem como havia uma mesclagem entre simbologia e sincopação (perda de ritmo) de ideias.

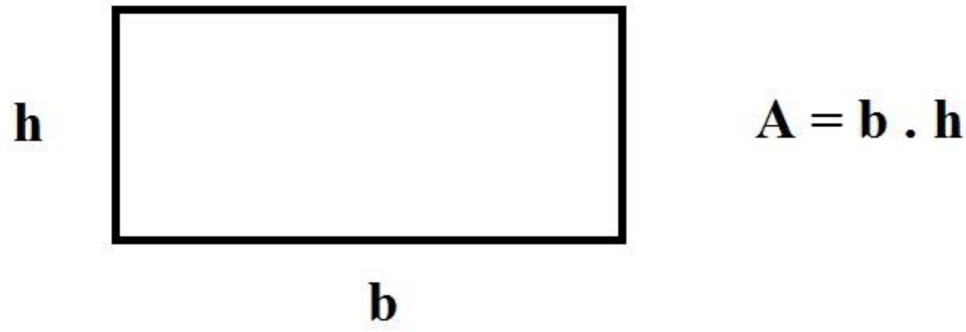

FIGURA 12: Relação entre o cálculo algébrico e a álgebra geométrica

A área de uma região limitada por uma figura geométrica pode ser expressa, de maneira geral, por uma expressão algébrica.

Enfim, graças à Viète, pai do moderno cálculo literal, percebe-se o quanto foi fundamental adotar uma maneira sistemática de pensar, levando assim às soluções gerais de determinados problemas, sendo que se deixasse de lado um “saco de truques” a ponto de resolver tais enunciados específicos. É o primeiro a trabalhar a Álgebra na Trigonometria, mas acaba falecendo em 1603, deixando um legado incrível para os leitores que apreciam uma boa abstração em Matemática.

O proveito que tiramos de todas essas informações é o que garante com que o cálculo algébrico nos permite diminuir a compreensão de exercícios propostos complexos ao passo de mostrar relações matemáticas simplificadas. Portanto, os processos algébricos nos levam, muitas vezes, a gerar um pensamento crítico de acordo com o contexto traçado historicamente, para que possamos depois aplicar em conceitos metodológicos e pedagógicos.

3 - Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) no Ensino Fundamental

Depois de termos compreendido o contexto histórico do cálculo algébrico, iremos a partir de agora traçar algumas relações pedagógicas deste tópico a ponto de nos aprofundar cada vez mais neste fantástico mundo da Matemática, principalmente tomando-se como base as informações teóricas até então disponibilizadas para com a forma que o trabalho docente administra na prática, seja dando ênfase às garantias educacionais vigentes quanto aos problemas que necessitam ser encarados.

Vale salientar que o estudo da Álgebra passou por várias dificuldades no passado, de modo a notar que os matemáticos foram aprendendo lentamente a trocar as palavras por letras, bem como também faziam a utilização de símbolos, por exemplo, +, -, :, =, dentre tantos outros. Surgem assim, as primeiras noções algébricas, cujo contexto didático tratava especialmente de expressões equacionais mencionadas através de símbolos, igualmente comparadas às que conhecemos nos dias de hoje.

Uma concepção capaz de fazer com que nos preocupemos em valorizar a aprendizagem a ser adquirida nas aulas de Álgebra, pode ser enfatizada neste fragmento proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs de Matemática), a saber:

> *"A ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas com Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da*

Educação Básica (SAEB), por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem um índice de 40% de acerto em muitas regiões do país." (Brasil, 1998, p. 115-116)

De acordo com a leitura acima, começamos a perceber que existe certo receio do alunado em tentar aprender tópicos relacionados ao cálculo algébrico, sendo que erros são repetidos de uma série estudantil para outra. Na Álgebra, os conteúdos didáticos aparecem no 8° ano do Ensino Fundamental, ao qual são perdurados até a conclusão do Ensino Médio, cabendo então ao aluno querer cursar Licenciatura em Matemática e se aventurar ainda mais neste ramo científico.

Por conseguinte, é extremamente fundamental que o discente procure buscar conceitos algébricos para interpretar e compreender, visto que o mesmo conseguirá aplicar tais conhecimentos em seu cotidiano, além de fazer pesquisas e ser diagnosticado pelo seu desempenho frente às avaliações feitas na escola onde estuda.

3.1 Definições Importantes

Em se tratando historicamente, a origem da palavra álgebra estar baseada em uma etimologia não já nítida como conhecemos de outros termos, mas o conceito necessita ser entendido numa melhor organização de nossas ideias.

No ano 825, em Bagdá, o matemático árabe Mohamed ibn Musa al-Khowarismi publicou o Livro *Hisabal-jabrw'al-muqabalah*. Foi a partir deste material, que passamos a compreender que a Álgebra provém de uma variante latina referente à palavra árabe *al-jabr*, sendo às vezes transliterada para *al-jebr*. Outro fator decorrente é que se costuma abreviar o termo Álgebra para a expressão *Al-jabr*.

E ainda, temos que o livro exposto trata-se das operações al-jabr e qabalah. O primeiro termo, al-jabr, indica a restauração (transposição dos termos para o outro lado da equação) e o segundo termo, qabalah, indica a redução (cancelamento dos termos semelhantes em lados contrários da equação).

Segundo Baumgart (1992), vejamos a seguinte equação fazendo a utilização da atual notação

$$x^2 + 5x + 4 = 4 - 2x + 5x^3,$$

onde, al-jabr descreve

$$x^2 + 7x + 4 = 4 + 5x^3,$$

e al-muqabalah descreve

$$x^2 + 7x = 5x^3.$$

Com isso, considera-se identificar a Álgebra como sendo o ramo da Matemática capaz de estudar as equações. Então, se torna essencial aprofundar os nossos conhecimentos e saber que o cálculo algébrico evoluiu ao longo do tempo, tanto é que tais estudos são amplos quando analisados de perto, principalmente em termos a compreensão satisfatória acerca de dois importantíssimos períodos:

- Álgebra Antiga (ou Elementar): estuda as equações e métodos para solucioná-las;
- Álgebra Moderna (ou Abstrata): estuda as estruturas algébricas, tais como grupos, anéis e corpos.

Diante disso, vemos o quanto às equações qualificam o estudo algébrico, uma vez que o homem começa a dominar o cálculo fazendo a utilização das letras, havendo assim regras a serem apropriadas, sem qualquer vínculo significativo. Ou seja, a curiosidade em usar números e letras, símbolos em geral, já começa a refletir a evolução de situações consideradas perceptíveis e elementares para ocasiões mais complexas que exigem uma aprendizagem mais além do que a esperada.

Portanto, progredimos aí para um mundo completamente abstrato.

"O estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização."(BRASIL, 98, p.15)

3.2 O Conceito de Cálculo Algébrico

Embora já tenhamos em mente a definição de Álgebra, precisamos detalhar um pouco mais as informações para que consigamos argumentos suficientes em busca de um conhecimento promissor que favoreça a inserção da teoria na prática em sala de aula, principalmente em se tratando dos conteúdos a serem aplicados no Ensino Fundamental.

A Álgebra é o ramo que estuda a manipulação formação formal de equações, operações matemáticas, polinômios e estruturas algébricas. Juntamente a este termo, outro merece aqui ser colocado em pauta: o cálculo algébrico. O cálculo algébrico é definido como sendo a reunião dos processos para efetuar as operações algébricas, ou seja, os processos para transformar uma expressão algébrica.

Da mesma forma que é importante entender os conceitos básicos de todo e qualquer tópico matemático, temos também que procurar pesquisar acerca dos assuntos que englobam determinada matéria.

Em Álgebra, evidencia-se inicialmente a introdução do cálculo algébrico, uma vez que há a utilização de letras para representar números, a forma como as expressões literais ou algébricas devem ser representadas e o cálculo do valor numérico em uma expressão algébrica. Seguindo esta linha de raciocínio, não podemos esquecer de outros itens metodológicos, tais como: monômios (ou termos algébricos), polinômios, produtos notáveis, fatoração de polinômios e frações algébricas.

Vamos observar um exemplo algébrico bem comum:

Consideremos x e y dois números reais quaisquer, daí podemos indicar as representações abaixo:

- $x + y$ (ou $y + x$) é a soma entre esses dois números;
- $x – y$ ou $y – x$ é a subtração entre esses dois números;
- xy (ou yx) é a multiplicação de x por y ou vice-versa;
- x / y ou y / x é a divisão de x por y ou vice-versa.

Para que saibamos detectar os principais objetivos do caso descrito, basta que sejamos capazes de relacionar números e/ou variáveis nas mais variadas operações, identificando e conhecendo assim as expressões algébricas. No entanto, mais do que isso, é necessário manifestar interesse em usar as distintas representações matemáticas, tanto é que facilita a nossa análise e compreensão, daí nota-se que a cada situação-problema existirá uma precisão ou uma funcionalidade a serem entendidas.

3.3 A Relação a ser Estabelecida entre o Ensino Algébrico no Brasil e a Álgebra do Ensino Fundamental

Com o passar do tempo, o ser humano começou a adquirir conhecimento expondo desde sempre a sua curiosidade em querer aprender o que desconhecia.

Em paralelo, a aprendizagem no ensino da Matemática vem sofrendo uma dicotomia, característica essa baseada pela forma como os educadores consideram a Matemática uma disciplina fundamental na formação do alunado, porém, em outro patamar, os alunos já encaram a mesma como sendo algo extremamente inútil e desnecessário para a sua vida após sair da escola.

Tal comparação diverge no sentido de que problemas possam estar presentes em meio a este fato, uma vez que as dificuldades para quem estuda são nítidas, principalmente quando levamos em conta o alto nível de retenção de discentes frente ao cálculo algébrico.

Todavia, fica evidente que a Matemática é uma área capaz de transformar o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes, pois, através dela desenvolvemos a capacidade de investigação, e mais, geramos a perseverança em buscar resultados, utilizamos estratégias de verificação e controlamos possíveis soluções.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p 37):

> *"Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas."*

Nesse contexto, verifica-se que os problemas a serem enfrentados atualmente no ensino da Álgebra no Brasil servem de base para que observemos o quanto o cálculo algébrico evoluiu em meio à sua inclusão no currículo até a sociedade contemporânea ao qual estamos inseridos nos dias de hoje.

Assim, com o advento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), o ensino da Matemática era analisado de uma maneira minuciosa através de debates e estudos, visto que a valorização do currículo escolar brasileiro possibilitava o aperfeiçoamento de práticas pedagógicas e a melhoria da aprendizagem na aquisição de novos conhecimentos.

O cálculo algébrico, hoje em dia, ocupa um lugar privilegiado nos livros didáticos, principalmente no Ensino Fundamental, entretanto fica-se a desejar a ocasião em que educadores não expõem suas reflexões acerca do ensino, e sequer talvez não haja argumentos registrados acerca desta questão.

Vejamos a melhoria que os PCNs apresentam sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra:

> *Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações* .(BRASIL, 1998, p. 116)

Além disso, os PCN de Matemática no Ensino Fundamental reforçam que “para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico, o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra”.

Para complementar, notemos o quadro a seguir, que aborda sinteticamente as diferentes concepções do cálculo algébrico, ou dimensões da Álgebra, se bem que há ainda a funcionalidade das letras em cada uma delas.

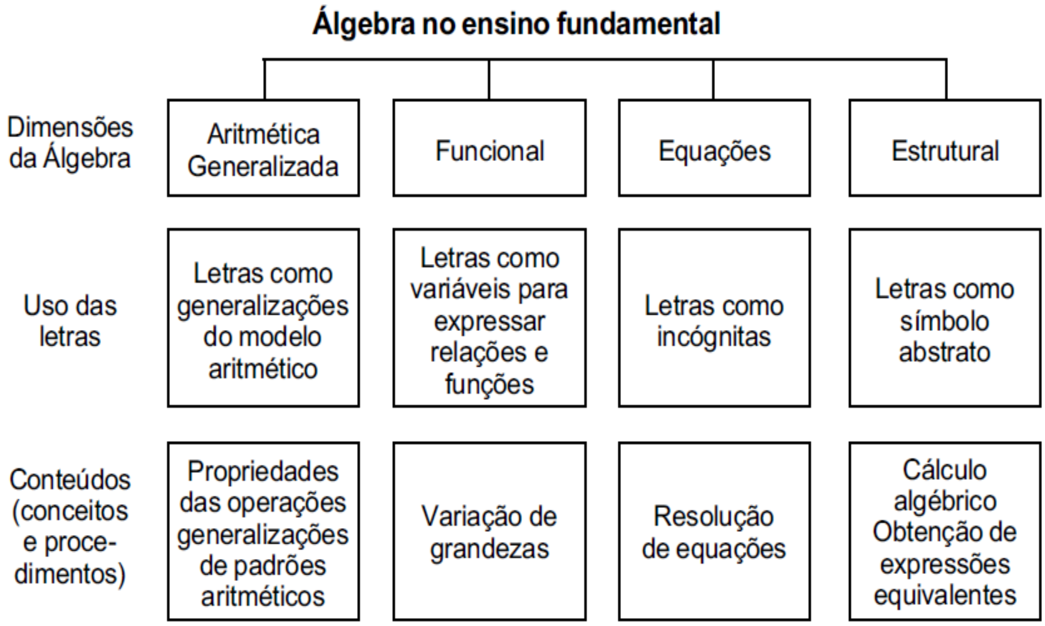

FIGURA 13: A Álgebra no Ensino Fundamental

FONTE: Brasil, 1998. P. 116

Por conseguinte, consideraremos os Parâmetros Curriculares Nacionais como uma forma de favorecer a construção de novos modelos de noções algébricas, ao passo de fortalecer a observação dos alunos a ponto de estabelecer tais relações na constante busca de resolver determinadas situações-problema.

Logo, temos que os conceitos algébricos iniciais se tornam bases sólidas para a elaboração de determinados conceitos algébricos posteriores, mas para que isso se concretize, é necessário que se tente trabalhar adequadamente, até porque convivemos com o déficit no ensino do cálculo algébrico nas escolas, contribuindo, portanto para os obstáculos que repercutem a insegurança em aprender conceitos matemáticos em geral.

3.4 Concepções Algébricas de Zalman Usiskin (1994)

Outro tópico fundamental a ser ressaltado aqui em nossa abordagem acerca do cálculo algébrico são as quatro concepções existentes que caracterizam o ensino da Álgebra e da Educação Algébrica, sendo todas elas ministradas pelo professor norte-americano Zalman Usiskin (1994).

FIGURA 14: Zalman Usiskin (1994).

Mas, antes de detalharmos os objetivos de cada concepção, iremos compreender um pouco da ligação de Usiskin com a Álgebra, até que ponto o embasamento teórico deste estudioso pôde contribuir de certa forma para o avanço abstrato ao longo do tempo, bem como se deve analisar sucintamente o propósito de cada ideia veiculada. Assim, faremos uma observação ao artigo de Zalman Usiskin, intitulado "Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização de variáveis", complemento do livro As ideias da álgebra, cuja publicação ocorreu pela Editora Atual em 1994 no Brasil.

Foi um educador muito experiente e prestigiado nos Estados Unidos, onde fez parte do grupo docente desde 1969 a 2007. Reconhecido como diretor da Universidade de Chicago Escola de Matemática Projeto (ECSMP) participou deste importantíssimo projeto que tem como base fortalecer o ensino de Matemática no país. Sua pesquisa trata-se do ensino e aprendizagem da aritmética, álgebra e geometria, tendo foco em aplicações matemáticas de todos os níveis, bem como se atrela à utilização de conceitos associados ao currículo, instrução e testes.

De acordo com o americano, temos que o uso de variáveis, as concepções algébricas da educação básica e as finalidades do ensino em Álgebra são pontos intrinsecamente associados.

Vejamos:

> *As finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis.(USISKIN, 1995, p. 13)*

Logo, Usiskin detalha quatro distintas concepções em Álgebra, cada uma delas identificadas por seu diferente uso no estudo de variáveis, as quais serão apresentadas a seguir.

3.5 O Cálculo Algébrico como Aritmética Generalizada

Nesta primeira concepção, iniciamos nossas reflexões destacando que as variáveis são tidas como generalizadoras de modelos.

Por exemplo, existe-se uma generalização (estratégia de raciocínio, e não uma realidade comprovada) frente às igualdades$2 + 3 = 3 + 2, 4 + 6 = 6 + 4, 9 + 5 = 5 + 9$, sendo que a ordem das parcelas não altera a adição. Algebricamente, representamos: $a + b = b + a$.

Percebemos aí que a Álgebra é entendida a partir de conhecimentos aritméticos, ou seja, os objetos algébricos passam a ser compreendidos mediante resultado da ampliação de ideias da aritmética.

Seguem-se mais exemplos:

- Temos que os números pares positivos, $2 = 2.1, 4 = 2.2, 6 = 2.3, 8 = 2.4$, são representados por $2.n$, ou $2n$, sendo que n é qualquer número inteiro positivo.
- Temos que o produto de qualquer número por zero é zero, assim nesta proposição aritmética escrevemos $x.0 = 0$, para todo valor que x possa assumir, daí a letra x indica um número genérico qualquer, uma vez que não simboliza o significado de variável e/ou incógnita.

Num sentido mais avançado, notamos que o cálculo algébrico sobre generalizações aritméticas reflete muito bem na aplicação em modelagem matemática. Logo, nesta concepção, as instruções-chave importantes para o estudante da escola básica são traduzir e generalizar.

3.6 O Cálculo Algébrico como Estudo de Procedimentos para Resolver Certos Tipos de Problemas

Para esta segunda concepção, iremos perceber que a manifestação em destaque se adequa basicamente nas experiências didáticas que os alunos vivenciam nas aulas de Matemática em se tratando de cálculo algébrico.

Como não existem incógnitas na concepção da Álgebra como generalizadora de modelos aritméticos, mas relações conhecidas através de números, vejamos então agora a presença das variáveis como incógnitas ou constantes no estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.

Com isso, o aluno necessita dominar a capacidade de formular equações sobre determinado tipo de problema, ou seja, deverá traduzi-los para a linguagem algébrica mediante a análise de equações.

Além disso, o objetivo continua quando o alunado precisa dispor de certas habilidades a ponto de manejar matematicamente as equações até encontrar a solução da mesma. Assim, as letras não são mais algo que variam, porém funcionam como incógnitas, quer dizer, um valor desconhecido que deverá ser achado. Anteriormente, as palavras-chave eram traduzir e generalizar, depois disso, são simplificar e resolver.

Nesse contexto, o cálculo algébrico apresenta problemas que quando solucionados são traduzidos algebricamente, daí encontramos o modelo geral a partir da obtenção da resposta. Se levarmos em conta a primeira concepção, veremos que ao fazer a devida tradução, estaremos apenas começando a ideia abordada.

Para fixar melhor, consideremos os exemplos abaixo:

- O dobro de um número, aumentado de 15, é igual a 47. Qual é esse número?

Para solucionar o problema, temos inicialmente que notar que ele é traduzido para a linguagem algébrica da seguinte maneira: $2\mathrm{x} + 15 = 47$. A equação obtida representa a tradução algébrica da situação envolvida no enunciado, conforme aprendemos na concepção 1. Mas, na concepção 2, continuaremos realizando os procedimentos necessários, de modo a resolver a equação dada e determinar o seu valor. Uma saída seria somar -15 a ambos os membros da igualdade, ao qual teremos:

$$2\mathrm{x} + 15 + (-15) = 47 + (-15),$$

$$2\mathrm{x} + 15 - 15 = 47 - 15,$$

feita a simplificação, obtemos:

$$2\mathrm{x} = 32$$

$$\mathrm{x} = \frac{32}{2}$$

e encontramos o valor:

$$\mathrm{x} = 16$$

Daí, temos que o número desconhecido do exemplo é 16. E caso queiramos testar o resultado, poderemos provar com o cálculo:

$$2 \,.\, 16 + 15 = 47,$$

$$32 + 15 = 47,$$

$$47 = 47.$$

Logo, quando os alunos resolvem exercícios propostos desse tipo, há dificuldades a serem captadas na passagem da aritmética para a álgebra.

Ou seja, se empregamos o cálculo de “cabeça”, aritmeticamente falando, devemos subtrair 15 de 47 e dividir o resultado por 2, já a expressão algébrica $2\mathrm{x} + 15 = 47$ toma como base a multiplicação por 2 e a adição com 15, sendo estas operações inversas da subtração $47 - 15$ e da divisão $32 : 2$. Concluindo, a primeira concepção modifica o raciocínio frente ao da segunda, visto que o emprego do cálculo algébrico depende da forma como interpretamos tal enunciado.

- A soma das idades de Kaio e Ygor é 30 anos. Descubra as idades de cada um deles, sabendo-se que Kaio é 10 anos mais novo do que Ygor.

O primeiro passo é sabermos a relação entre a idade de Kaio e Ygor, ao qual necessitamos fazer a tradução algébrica do caso descrito. Assim: $\mathrm{K} + \mathrm{Y} = 30$.

Como Kaio é 10 anos mais novo que Ygor, logo: $\mathrm{Y} = \mathrm{K} - 10$. Então, realizamos a substituição na equação, e tentamos resolvê-la de alguma forma.

Vejamos que:

$$\mathrm{K} + (\mathrm{K} - 10) = 30,$$

$$2\mathrm{K} - 10 = 30,$$

$$2\mathrm{K} = 40,$$

$$\mathrm{K} = \frac{40}{2},$$

$$\mathrm{K} = 20.$$

Já sabemos sobre a idade de Kaio, e para descobrirmos a de Ygor, vem que:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{K} - 10$$

$$\mathrm{Y} = 20 - 10$$

$$\mathrm{Y} = 10$$

Portanto, Kaiotem 20 anos e Ygor tem 10 anos.

Em síntese, o cálculo algébrico como estudo de procedimentos para solucionar certos tipos de problemas se baseia na simplificação e resolução de estratégias.

3.7 O Cálculo Algébrico como Estudo de Relações entre Grandezas

Em se tratando da terceira concepção da Álgebra, iremos detalhar a relação entre grandezas.

Basta analisar quando escrevemos a fórmula que calcula a área de um retângulo, $A = b.h$, ao qual estamos expressando uma relação a ser estabelecida entre as três grandezas citadas. No caso, temos que A indica a medida da área do retângulo, b indica a base do retângulo e h indica a medida da altura do retângulo.

Quando observamos a fórmula acima, não temos a impressão de estarmos lidando com incógnitas, até porque não precisamos resolver absolutamente nada. Assim sendo, começamos a nos orientar acerca da diferença entre esta concepção e a anterior, uma vez que as variáveis passam a mudar de uma para a outra.

Podemos compreender tal distinção se levarmos em conta a maneira como os alunos respondem determinadas perguntas específicas, de modo a ressaltar que geralmente cometem erros devido à constante falta de atenção pelo que se propõem a desenvolver.

Segue o exemplo:

- O que ocorre com o valor de $\frac{1}{x}$ quando x se torna cada vez maior?

O enunciado proposto aparenta ser bastante simples, porém é suficiente para confundir as ideias que os alunos possam gerar frente à leitura. Se prestarmos atenção, veremos que o valor de x não importa, logo x não será identificado como uma incógnita. A tradução algébrica, neste caso, também será descartada, sendo que há um modelo a ser generalizado, mas que difere do modelo empregado na aritmética.

Trata-se, portanto, de um modelo fundamentalmente articulado pelo cálculo algébrico.

E ainda, nesta terceira concepção, a abstração se suporta frente às leis que descrevem relações entre duas ou mais grandezas variáveis. Daí, as variáveis podem ser argumentos (valores de domínio de determinadas funções) ou parâmetros (números que dependem de outros números).

Conforme outro exemplo tem-se:

- Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(1{,}2)$ e tem inclinaçãoigual a 9.

Para que resolvamos a questão em destaque, é fundamental lembrar que os pontos de uma reta se relacionam por meio de uma equação do tipo $y = mx + b$, que pode ser identificada tanto como um modelo dentre variáveis quanto uma fórmula matemática.

Temos que m é a inclinação da reta, logo $m = 9$, o que implica $y = 9x + b$. Então, segue que m é uma constante, não um parâmetro. Mas, vemos que b é uma incógnita e não um parâmetro, tornando-se necessário determinar o seu valor.

Ora, se pegarmos o ponto dado, veremos que $x = 1$ e $y = 2$. Calculemos b:

$$2 = 9 \,.\, 1 + b$$

$$2 = 9 + b$$

$$b = 2 - 9$$

$$b = -7$$

Embora tenhamos atribuído valores para x e y, de fato não achamos os resultados para cada um, pois são incógnitas. Como $b = -7$, que é uma incógnita, portanto podemos determinar a solução do problema, assim:

$$y = 9x - 7$$

Em suma, argumenta-se que as instruções-chave para a concepção pautada são relacionar e graficar.

3.8 O Cálculo Algébrico como Estudo das Estruturas

O cálculo algébrico na visão de Zalman Usiskin é compreendido em múltiplas concepções que buscam um entendimento claro e objetivo mediante o embasamento do conteúdo em si.

Nesta quarta e última concepção, faremos uma analogia avançada entre o aluno da educação básica para com o universitário acadêmico que cursa Licenciatura em Matemática. Tal comparação é tida a partir do momento que começamos a reforçar que a Álgebra do Ensino Superior envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. E mesmo que hajam diferenças na forma de ensino de um tópico para outro, temos que saber que tais estruturas algébricas fundamentam a base da resolução de problemas que estamos acostumados a desenvolver nesse nível de estudo.

Entretanto, para que o cálculo algébrico funcione como um estudo das estruturas na educação básica, frisaremos a importância de aprender as propriedades das operações com números reais e polinômios.

Vejamos os exemplos propostos:

- Determine $(a + x)(b - 1)$.
- Fatore a expressão $ax + ay - bx - by$.

De modo a solucionar os exercícios, façamos uma análise sucinta das concepções vistas até agora em relação às variáveis:

i) Sobre a concepção 1, não temos um modelo aritmético a ser generalizado;

ii) Sobre a concepção 2, não temos que resolver uma equação, então a variável não é uma incógnita;

iii) Sobre a concepção 3, não dispomos de uma relação ou função, daí a variável não funciona como um argumento.

Desprezadas as três primeiras concepções, notemos a resolução dos exemplos:

- $(a + x)(b - 1) = ab - a + bx - x$;
- $ax + ay - bx - by = a(x + y) - b(x + y) = (a - b)(x + y)$.

Observando os itens acima, vemos que não constam referências numéricas nas variáveis, mas há sinais que identificam as mesmas. Desta feita, as variáveis são caracterizadas por um símbolo arbitrário no papel perante a concepção do cálculo algébrico como estudo das estruturas.

Consideremos mais um exemplo:

- Descubra o valor de $a^2 + b^2$, sabendo que $a + b = 10$ e $ab = 21$.

Sabemos que as variáveis tornaram-se objetos arbitrários, logo nos remeteremos aos produtos notáveis para solucionar o caso destacado.

Vem que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$10^2 = a^2 + 2 . 21 + b^2$$

$$100 = a^2 + 42 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = 100 - 42$$

$$a^2 + b^2 = 58$$

Portanto, é bem frequente lidarmos com tópicos do cálculo algébrico nesta quarta concepção, a saber dos produtos notáveis, fatorações, operações com polinômios, polinômios, dentre tantos outros. Logo, no âmbito dessa concepção, as instruções-chave que os alunos devem buscar são manipular e justificar.

Em síntese, temos um resumo sobre as quatro concepções da álgebra por Usiskin (1994):

Concepções do cálculo algébrico	**Abordagem das variáveis**
O cálculo algébrico como aritmética generalizada	Variáveis generalizadoras de modelos / Traduzir e generalizar
O cálculo algébrico como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas	Variáveis como incógnitas ou constantes / Simplificar e resolver
O cálculo algébrico como estudo de relações entre grandezas	Variáveis como argumentos ou parâmetros / Relacionar e graficar
O cálculo algébrico como estudo das estruturas	Variáveis como sinais arbitrários no papel / Manipular e justificar

FIGURA 15: Quadro sintético sobre as quatro concepções discutidas por Usiskin (1994).

3.9 As Concepções da Educação Algébrica na Visão de Fiorentini, Miorim e Miguel

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), temos que existem três concepções sobre a educação algébrica, que ao longo da história matemática, vem influenciando boa parte dos conceitos elementares até então importantes. São elas:

1. Linguístico-pragmática: se dá do século XIX até a metade do século XX;

2. Fundamentalista-estrutural: predominante nas décadas de 1970 e 1980;

3. Fundamentalista-analógica: aparece depois dos anos 80.

Aprofundando-se um pouco mais sobre tais concepções, iremos conhecer a importância de cada uma dentro do contexto que aborda os PCNs para com o cálculo algébrico.

Inicialmente, a concepção linguístico-pragmática frisava a atuação de um instrumental técnico que se objetivasse em solucionar equações e/ou problemas equacionáveis em Álgebra. Por isso, o currículo de ensino da álgebra já se baseava em capacitar alunos no que tange as operações de adição, subtração, multiplicação/fatoração e divisão de expressões algébricas, gerando então o raciocínio a ser introduzido em futuras aplicações.

Seguindo adiante, a concepção fundamentalista-estrutural interessava-se em fornecer princípios lógico-matemáticos para serem trabalhados no âmbito escolar, tais como o cálculo algébrico e o estudo de equações. Com isso, temos que a utilização das propriedades estruturais algébricas de determinadas relações e funções servia para argumentar logicamente os procedimentos a serem transformados algebricamente.

Agora, a concepção fundamentalista-analógica busca associar as duas interpretações anteriores, se bem que promove uma síntese de como o cálculo algébrico possa recuperar o seu valor instrumental. Ou seja, a Álgebra não deve se atrelar aos tópicos fundamentalistas metodológicos, porém deve se atualizar por meio de modelos analógicos geométricos ou físicos, de modo a representar a visualização da mudança abstrata. A Álgebra ocupa um lugar privilegiado nos livros didáticos, porém parece ainda não haver reflexões sobre educadores acerca deste ensino. Notemos:

> *Mas se, por um lado, na proposta da CENP (Coordenadoria de Estados e Normas Pedagógicas) a Geometria passa a dar sustentação à metodologia do ensino de Aritmética e da Álgebra, por outro lado, o próprio ensino de Álgebra não apenas perde aquelas características que a Matemática moderna lhe havia atribuído, como também parece retornar – sem, é claro, aquelas regras e aqueles excessos injustificáveis do algebrismo – o papel que ele desempenhava no currículo tradicional, qual seja o de um estudo introdutório – descontextualizado e estático – necessário a resolução de problemas e equações. (MIGUEL, FIORENTINI E MIORIM, 1992, p. 51).*

Enfim, não importa quantas concepções estudamos, teremos que valorizar a todo o momento a introdução do cálculo algébrico dentro do Ensino Fundamental, mesmo que paralelamente a isso tracemos uma relação dos obstáculos a serem encarados no processo de ensino e aprendizagem, bem como a análise de conteúdos abrangentes que dificultam ainda mais o entendimento do alunado.

Por conseguinte, veremos que a educação algébrica nos traz informações valiosas, tanto é que precisamos estar a par de algumas demonstrações e aplicações sobre este fantástico ramo do conhecimento.

4 - Algumas demonstrações e aplicações envolvendo o cálculo algébrico

A educação algébrica é um campo bastante inovador dentro da Matemática, ao qual precisamos conhecer a forma como poderemos calcular determinados exercícios propostos, de que maneira se torna fundamental demonstrar tais sentenças, bem como argumentar quais tipos de aplicações são desenvolvidas em meio ao estudo do cálculo algébrico.

Neste último capítulo, faremos uma analogia a tudo que já vimos até então, de modo a tentar compreender como o contexto histórico da Álgebra pôde se relacionar com a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) no Ensino Fundamental até gerar ideias importantíssimas para muitas demonstrações e aplicações que veremos mais adiante. Ou seja, começamos a notar a sequência do conhecimento algébrico que é construído ao longo do processo de ensino do aluno, onde ele já inicia um contato direto com as letras na Matemática do 8° Ano, inclusive expandirá este aprendizado nas disciplinas de Álgebra do Ensino Superior, caso pretenda cursar Licenciatura.

A abordagem de demonstrações e aplicações matemáticas no cálculo algébrico é fundamental para que os discentes possam por em prática a sua aquisição de conhecimentos frente à resolução de problemas e à escolha de estratégias que pretenda usar, além claro de verificar em quais ramos do conhecimento essas informações possam estar inclusas, como por exemplo, exploraremos o cálculo algébrico da Física no que se refere a análise dimensional de grandezas e notação de fórmulas ao isolar grandezas.

Logo, vamos complicar um pouco mais os nossos entendimentos...

4.1 Demonstrações Através do Cálculo Algébrico

Feitos os embasamentos teóricos acerca do contexto histórico e da análise dos PCNs afrente do cálculo algébrico, temos que compreender ainda algumas demonstrações sobre este tópico tão importante na Matemática. Com isso, aprendemos desde já a operar com polinômios, fazer a sua fatoração e determinar o seu mínimo múltiplo comum (m.m.c.), como também saber manusear com as expressões algébricas em geral.

Sobre tais informações, é possível que façamos algumas demonstrações curiosas a partir de determinados enunciados que se baseiam no conhecimento algébrico numa melhor organização das ideias. E mesmo que existam dificuldades e erros comuns nesta caminhada, precisa-se ter o comprometimento de buscar sempre melhorias para o processo de ensino e aprendizagem, fortalecendo então a constante prática do conhecimento.

De acordo com D. Moreira (2009), vejamos a adaptação de alguns exercícios demonstrativos sobre o cálculo algébrico:

- **Demonstração 1:** A soma de dois números consecutivos será sempre a diferença de seus quadrados.

Solução:

Chamemos x como sendo um número inteiro qualquer. Temos que o seu sucessor será representado pelo polinômio $x + 1$. Fazendo a soma entre ambos os polinômios dados, obteremos a expressão algébrica a seguir:

$$x + (x + 1) = x + x + 1 = 2x + 1$$

Para a diferença dos quadrados dos dois números consecutivos, vejamos a representação da expressão algébrica:

$$(x+1)^2 - x^2 = (x^2 + 2x + 1) - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$$

Logo, notamos que as duas expressões algébricas obtidas são iguais, se bem que podemos comparar assim:

$$x + (x+1) = (x+1)^2 - x^2$$

Portanto, temos o que queríamos demonstrar.

- **Demonstração 2:** A soma de cinco números inteiros consecutivos será sempre múltiplo de 5.

Solução:

Consideraremos cinco números inteiros consecutivos, ao qual poderemos representar pelos seguintes polinômios:

$$x-2; x-1; x; x+1; x+2$$

Sabemos que para um número ser múltiplo de cinco ele precisa ser escrito da forma: 5x, onde x indica um número inteiro qualquer, tanto é que todo número multiplicado por 5seráautomaticamente um múltiplo de 5.

Agora, façamos a soma entre os números consecutivos em destaque:

$$(x-2) + (x-1) + (x) + (x+1) + (x+2) =$$

$$= x + x + x + x + x - 2 - 1 + 1 + 2 = 5x.$$

Por conseguinte, de fato, temos que é válido dizer que a soma de cinco números inteiros consecutivos tem como resultado um número múltiplo de 5.

Portanto, temos o que queríamos demonstrar.

- **Demonstração 3:** A soma de dois números inteiros ímpares será sempre um número par.

Solução:

Vale salientar que um número par é representado pela forma: 2x, onde x indica um número inteiro qualquer. Assim sendo, um número ímpar, por sua vez, é denotado por $2x + 1$.

Daí, se somarmos dois números ímpares seria:

$$(2x + 1) + (2x + 1) = 2.(2x + 1)$$

Temos que a expressão algébrica $(2x + 1)$ terá um valor numérico igual a um número inteiro qualquer, logo quando é multiplicado por $2(2x + 1)$, o resultado será um número par.

Portanto, temos o que queríamos demonstrar.

Agora, veremos uma demonstração bem interessante sobre a área do retângulo que relaciona o legado que os gregos deixaram para o cálculo algébrico, conforme analisamos no início de nossa pesquisa. Vale salientar que alguns produtos aparecem com bastante frequência quando o assunto é a Álgebra, assim temos que os mesmos possuem uma enorme importância, sendo que iremos dar ênfase ao quadrado da soma de dois termos.

Daí, por todo o embasamento teórico e prático desenvolvidos até o presente momento, sabe-se que esses produtos representam dentro do cálculo algébrico a denominação de produtos notáveis.

Seguimos com a última demonstração:

- **Demonstração 4:** Faremos a demonstração da área do retângulo a partir do quadrado da soma de dois termos.

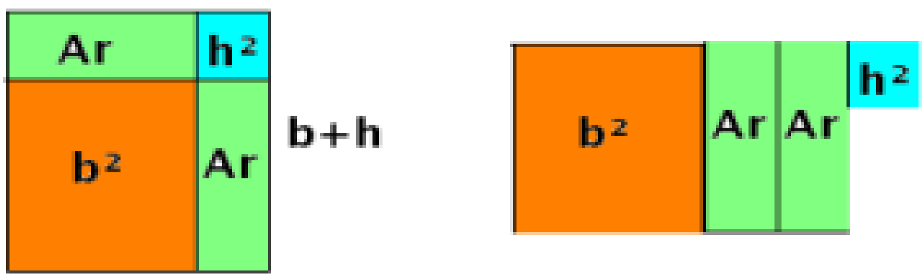

FIGURA 16: Demonstração da área do retângulo

Das gravuras acima, temos que:

Notemos que a área do quadrado maior é igual a: $(b + h)^2$.

Da mesma forma que a área da figura é: $b^2 + 2.Ar + h^2$.

Como ambos os polígonos têm a mesma área, vem que:

$$(b + h)^2 = b^2 + 2.Ar + h^2$$

$$b^2 + 2.b.h + h^2 = b^2 + 2.Ar + h^2$$

$$2.b.h = 2.Ar$$

$$b.h = Ar$$

Então, a área de um retângulo pode ser expressa da seguinte forma:

$$Ar = b.h$$

Portanto, demonstramos o cálculo algébrico da área do retângulo.

4.2 Aplicações Sobre o Cálculo Algébrico

Como forma de gerar um aprendizado mais consistente em relação às demonstrações envolvendo o cálculo algébrico, iremos agora tratar de algumas aplicações bem interessantes que nos promoverão um olhar mais detalhado acerca de quais estratégias podemos utilizar para resolver determinados problemas de Álgebra.

Nesse contexto, colocaremos em prática as colocações a serem aperfeiçoadas na atenção da análise dos problemas algébricos, sendo este um dos ramos mais antigos da Matemática enquanto disciplina, tanto é que muitas pesquisas ainda hoje são feitas nesta área do conhecimento, tornando-a ativa em suas atividades científicas.

Para começo de conversa, temos que salientar que as aplicações aqui citadas envolvem identidades algébricas e fatoração de polinômios, bem como todo o aprendizado lapidado construído ao longo de todas as aprovações das disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática.

As identidades algébricas são tidas como expressões matemáticas que se baseiam com as operações fundamentais e outras funções adicionais, às quais são úteis para quaisquer conjuntos de números.

Como veremos aplicações de algumas identidades algébricas a partir das fórmulas de fatoração mais básicas, seguem-se:

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

3. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

4. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

5. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

6. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

7. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

8. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

9. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

10. $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$

11. $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$

Observemos:

- **Aplicação 1:** Se x e y são inteiros consecutivos, mostre que $x^2 + y^2 + (xy)^2$éum quadrado perfeito.

Solução:

Temos que:

Utilizando as identidades algébricas para resolver o seguinte problema, vem:

Como temos a e b sendo números inteiros consecutivos, faremos $y = x + 1$.

Daí, iremos substituir:

$$P(x) = x^2 + y^2 + (xy)^2$$

$$P(x) = x^2 + (x + y)^2 + [x(x + 1)]^2$$

$$P(x) = x^2 + x^2 + 2x + 1 + [x(x + 1)]^2$$

$$P(x) = 1 + 2x^2 + 2x + [x(x + 1)]^2$$

$$P(x) = 1 + 2x(x + 1) + [x(x + 1)]^2$$

$$P(a) = [1 + x(x + 1)]^2,$$

que é um quadrado perfeito.

Então, notamos que a expressão obtida é um quadrado perfeito.

Portanto, a aplicação é válida.

- **Aplicação 2:** Fatore a expressão $x^4 + x^2 + 1$.

Solução:

Temos que:

$$x^4 + x^2 + 1 =?$$

Inicialmente devemos notar que $x^4 = (x^2)^2$.

Assim, devemos adicionar e subtrair $2 . (x^2). (1)$para fazermos um quadrado perfeito.

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^2 - 2.(x^2).(1) + 2.(x^2).(1) + (1)^2 + x^2$$

$$= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 + x^2$$

$$= (x^2 + 1)^2 - x^2$$

$$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2$$

Logo, poderemos fatorar como diferença de dois quadrados, ou seja,

$$(x - y)^2 = (x + y)(x - y)$$

Então,

$$(x^2 + 1)^2 - (x)^2 = [(x^2 + 1) + (x)][(x^2 + 1) - (x)]$$

$$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Por conseguinte,

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Portanto, a aplicação é válida.

Já a identidade de polinômios é um campo mais amplo e vasto a ser entendido, uma vez que podem ser somados, subtraídos, multiplicados e até divididos, logo existem inúmeros teoremas que garantem múltiplas aplicações em geral.

Podemos citar alguns teoremas acerca dos aspectos dos polinômios: algoritmo da divisão para polinômios, teorema do fator, teorema da identidade, teorema das raízes racionais, lema de Gauss, critérios de irredutibilidade, dentre tantos outros.

Mas, continuemos com nossas aplicações acerca do cálculo algébrico:

- **Aplicação 3:** Sejam $x, y\ , z$ números reais tais que

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7. \end{cases}$$

Determine o valor de $x^4 + y^4 + z^4$.

Solução:

Temos que:

Utilizando a identidade de polinômios para resolver o seguinte problema, vem:

Iremos trabalhar com as seguintes identidades:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz) \\ x^3+y^3+z^3=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-(xy+xz+yz)\right]+3xyz \\ x^4+y^4+z^4=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left[(xy+xz+yz)^2-2xyz(x+y+z)\right] \end{cases}$$

De acordo com as identidades listadas acima e com as hipóteses que temos no enunciado, vem:

$$x^2+y^2+z^2=\underbrace{(x+y+z)^2}_{3}-2(xy+xz+yz)=5$$

$$(3)^2-2(xy+xz+yz)=5$$

$$9-2(xy+xz+yz)=5$$

$$-2(xy+xz+yz)=5-9$$

$$-2(xy+xz+yz)=-4.(-1)$$

$$2(xy+xz+yz)=4$$

$$xy+xz+yz=\frac{4}{2}$$

$$xy+xz+yz=2$$

$$x^3+y^3+z^3=\underbrace{(x+y+z)}_{3}\left[\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{5}-\underbrace{(xy+xz+yz)}_{2}\right]+3xyz=7$$

$$3.(5-2)+3xyz=7$$

$$3\,.\,3+3xyz=7$$

$$9+3xyz=7$$

$$3xyz=7-9$$

$$3xyz=-2$$

$$xyz=-\frac{2}{3}$$

$$x^4+y^4+z^4=\underbrace{(x^2+y^2+z^2)^2}_{5}-2\left[\underbrace{(xy+xz+yz)^2}_{2}-2\underbrace{xyz}_{-\frac{2}{3}}\underbrace{(x+y+z)}_{3}\right]$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = (5)^2 - 2.\left[(2)^2 - 2\,.\left(-\frac{2}{3}\right).(3)\right]$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 25 - 2.\left[4 + 2\,.\frac{2}{3}\,.3\right]$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 25 - 2.(4 + 4)$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 25 - 2\,.8$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 25 - 16$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 9$$

Portanto, a aplicação é válida.

- **Aplicação 4:** Verifique se o Polinômio $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$éirredutível sobre Q.

Solução:

Para verificarmos se o polinômio $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ é irredutível sobre Q, basta fatorar essa expressão por um procedimento simples feito na fatoração de polinômios.

Como primeiro passo, iremos organizar/arrumar os termos desse polinômio:

$$x^4 + 2x^3 + x + 2 = x^4 + x + 2x^3 + 2$$

Agora, iremos colocar os termos em evidência e montar o produto:

$$x^4 + x + 2x^3 + 2 = x(x^3 + 1) + 2(x^3 + 1)$$

Daí percebe-se que os termos entre parênteses são iguais e comuns, então fazemos o agrupamento:

$$x(x^3 + 1) + 2\,(x^3 + \;1) = (x^3 + 1)(x + 2).$$

Por conseguinte,

$$x^4 + 2x^3 + x + 2 = (x^3 + 1)(x + 2),$$

o que torna a questão verdadeira.

Portanto, a aplicação é válida.

Adiante, finalizaremos as nossas aplicações do cálculo algébrico expandindo o nosso olhar para um método bem interessante que relaciona Matemática e Física, trata-se da análise dimensional, bem como um exemplo a ser abordado no Eletromagnetismo.

Mesmo que nos refiramos ao Ensino Fundamental, incluindo as séries finais de 8° e 9° anos, já vale reforçar que a disciplina de Ciências começa a dar noções de Física nesta etapa escolar até expandir para o Ensino Médio, bem como se percebe a maneira que podemos responder um exercício acerca do cálculo algébrico dispondo de procedimentos que executamos em todas as ciências exatas, além claro no Ensino Superior, como por exemplo, ler o enunciado, coletar os dados, verificar o modo de resolução e argumentar sobre o resultado encontrado. Ou seja, notamos já de imediato a interdisciplinaridade que o estudo do cálculo algébrico vem a nos possibilitar às múltiplas formas de aplicar tudo que aprendemos até hoje.

Na Análise Dimensional, poderemos compreender as unidades de medida das grandezas físicas, ao qual notaremos a utilização de equações algébricas para resolver exercícios propostos. Ou seja, através deste procedimento conferimos se a solução de um problema está correta apenas pela lógica das unidades. Então, o objetivo a ser posto em prática é apenas adicionar ou subtrair grandezas nas equações quando elas têm a mesma dimensão.

Procuremos imaginar que estejamos resolvendo um exercício onde precisemos calcular a velocidade de um corpo, móvel ou objeto. Em lógica, temos que a solução deverá ser dada em km/h ou m/sou ainda cm/s, pois estamos tratando de velocidade. E caso, encontremos uma unidade de medida em m, ou km ou cm, com certeza um equívoco foi cometido.

Vale salientar que as três grandezas fundamentais comprimento, massa e tempo estão intimamente relacionadas à noção de dimensão, sendo que há dimensão de comprimento [L], dimensão de massa [M] e dimensão de tempo [T]. Em cálculo algébrico, já vemos que este procedimento matemático utiliza letras em sua aplicação, além do mais mostra argumentos capazes de resolver determinado exercício.

Analisaremos, por exemplo, a velocidade como grandeza física, sendo que a mesma expressa a distância percorrida por unidade de tempo.

Segue que:

$$\mathrm{Velocidade} = \frac{\mathrm{distância}}{\mathrm{tempo}}$$

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta \mathrm{S}}{\Delta \mathrm{t}}$$

Onde,

$$[\Delta \mathrm{S}] = [\mathrm{L}](\mathrm{comprimento})$$

$$[\Delta \mathrm{t}] = [\mathrm{T}](\mathrm{tempo})$$

$$[\mathrm{v}] = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]} = \mathrm{LT^{-1}} = \mathrm{M^0LT^{-1}}$$

Logo, chegamos a equação dimensional da velocidade, ao qual concluímos que a unidade de medida no SI é $\mathrm{m/s}$.

Mais exemplos:

i) $\mathrm{Aceleração} = \frac{\mathrm{velocidade}}{\mathrm{tempo}^2} \rightarrow [\mathrm{a}] = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2} = \mathrm{LT^{-2}} = \mathrm{M^0LT^{-2}}$;

ii) $\mathrm{Força} = \mathrm{massa.\,aceleração} \rightarrow [\mathrm{F}] = [\mathrm{M}].\frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2} = \mathrm{MLT^{-2}}$;

iii) $\mathrm{Energia} = \mathrm{trabalho} = \mathrm{força.\,massa} \rightarrow [\mathrm{E}] = [\mathrm{M}].\frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2}.[\mathrm{L}] = \mathrm{MLT^{-2}.L}$

$= \mathrm{ML^2T^{-2}}$;

iv) $\mathrm{Área} = \mathrm{comprimento.\,largura} \rightarrow [\mathrm{S}] = [\mathrm{L}].[\mathrm{L}] = \mathrm{L^2} = \mathrm{M^0L^2T^0}$;

v) $\mathrm{Pressão} = \frac{\mathrm{força}}{\mathrm{área}} \rightarrow [\mathrm{P}] = \frac{[\mathrm{M}].\frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2}}{[\mathrm{L}].[\mathrm{L}]} = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$.

Então, já notamos imediatamente a abstração na Análise Dimensional frente às precisões das informações aqui argumentadas.

Partimos para as últimas aplicações:

- **Aplicação 5:** Para manter um objeto em movimento circular uniforme com velocidade constante é necessário aplicar uma força denominada "força centrípeta". Faça uma análise dimensional da força centrípeta, sabendo que a $F_c \propto m^a v^b r^c$ (m = massa, v = velocidade, r = raio) e $F_R = m.a$ (F_R = MLT^2).

Solução:

Sendo $[F] = [m^a][v^b][r^c]$, temos:

$$F^R = F^c$$

$$F = M^a \left(\frac{L}{T}\right)^b L^c$$

$$MLT^{-2} = M^a \left(\frac{L^2}{T^2}\right)^b L^c$$

$$MLT^{-2} = M^a L^{b+c} T^c.$$

Sabendo que é necessário que ambos os membros da equação tenham as mesmas dimensões, para que a equação seja dimensionalmente correta, precisamos que os expoentes sejam:

Expoente de M: $a = 1$;

Expoente de T: $c = -2$;

Expoente de L: $b + c = 1$, então $b = 3$.

Assim,

$$MLT^{-2} = MLT^{-2}.$$

Portanto, a aplicação é válida.

- **Aplicação 6:** (CEFET-2006) De acordo com a teoria gravitacional de Isaac Newton, duas partículas de massas M_1 e M_2, separadas por uma distância d, atraem-se mutuamente com forças de intensidade dada por $F = \frac{M_1.M_2}{d^2}$, onde

G é a Constante da Gravitação Universal. Neste caso, a equação dimensional de $[G]$ é:

a) $[\mathrm{G}] = \mathrm{MLT}^{2}$

b) $[\mathrm{G}] = \mathrm{M}^{2}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$

c) $[\mathrm{G}] = \mathrm{MLT}^{-1}$

d) $[\mathrm{G}] = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{3}\mathrm{T}^{-2}$

e) $[\mathrm{G}] = \mathrm{M}^{-2}\mathrm{L}^{-3}\mathrm{T}$

Solução:

Inicialmente vamos isolar G na equação dada:

$$\mathrm{F} = \mathrm{G}\frac{\mathrm{M}_1.\mathrm{M}_2}{\mathrm{d}^2}$$

$$\mathrm{G}.\mathrm{M}_1.\mathrm{M}_2 = \mathrm{F}.\mathrm{d}^2$$

$$\mathrm{G} = \frac{\mathrm{F}.\mathrm{d}^2}{\mathrm{M}_1.\mathrm{M}_2}$$

Analisando as dimensões das grandezas, tem-se:

$$[\mathrm{F}] = \mathrm{MLT}^{-2};$$

$$[\mathrm{d}] = \mathrm{L};$$

$$[\mathrm{M}_1] = [\mathrm{M}_2] = \mathrm{M}.$$

Daí, substituímos:

$$[\mathrm{G}] = \frac{[\mathrm{F}].[\mathrm{d}]^2}{[\mathrm{M}_1].[\mathrm{M}_2]} =$$

$$= \frac{\mathrm{M}.\mathrm{LT}^{-2}.\mathrm{L}^2}{\mathrm{M}.\mathrm{M}} =$$

$$= \mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{3}\mathrm{T}^{-2}$$

$$\therefore [\mathrm{G}] = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{3}\mathrm{T}^{-2}$$

Item correto: (d).

Portanto, a aplicação é válida.

- **Aplicação 7:** Faremos uma aplicação da Física no Eletromagnetismo utilizando o cálculo algébrico no intuito de encontrar o raio da trajetória descrita por uma carga na força magnética.
  Vejamos:

Podemos calcular facilmente o raio R da trajetória circular que a partícula eletrizada descreve dentro de um campo magnético uniforme. Para isto, basta observar que a força magnética $\vec{F}$ proporciona a força centrípeta necessária para a partícula descrever o movimento circular. Então, podemos escrever:

$$F_{cp} = m.\frac{v^2}{R},$$

onde m é a massa da partícula.

Por outro lado, sabemos que a força magnética é dadapor$F_m = |q|.v.B.sen\,\theta$ e, neste caso tem-se $\theta = 90°$(pois $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{B}$), virá

$$sen\,90° = 1$$

$$F_m = q.v.B$$

Igualando estas duas expressões de F, teremos:

$$F_{cp} = F_m$$

$$m.\frac{v^2}{R} = q.v.B$$

$$q.v.B.R = m.v^2$$

$$R = \frac{m.v^2}{q.v.B}$$

donde,

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Este estudo que acabamos de fazer encontra uma importante aplicação na Física Moderna, que é descrita nos livros de Física do Ensino Médio, se bem que aborda a utilização do cálculo algébrico na criação de fórmulas matemáticas, gerando portanto a inteira ligação entre letras e números.

A partir de todas as aplicações apresentadas, principalmente as últimas em destaque, quero aqui salientar a minha fascinação por associar Matemática e Física, tanto é que busquei tratar do cálculo algébrico no Trabalho de Conclusão do Curso simultaneamente para estabelecer totais relações entre ambas as ciências exatas. E mais, juntamente com a graduação em Matemática, já sou Professor de Física atualmente e estou me especializando num Curso de Pós-Graduação em Metodologia de Matemática e Física, enfim o proveito diante de tudo isso é a “fome” pelo conhecimento que me desperta a cada oportunidade.

5 - Considerações Finais

Tendo base a pesquisa desenvolvida acerca do cálculo algébrico, pude compreender que a simbologia empregada na Matemática é fundamental para que haja a aquisição de novos conhecimentos, pois a prática docente nos possibilita relacionar letras e números a ponto de verificar até onde vai o nosso desempenho em sala de aula frente à abstração que é bem comum nesta ciência exata. Assim, creio que a graduação em licenciatura me trará uma experiência fundamental no modo como irei enxergar educandos de diferentes faixas etárias, cujo propósito maior será a construção de meu crescimento profissional frente ao que analisei consideravelmente.

Nesse sentido, basta tentarmos refletir sobre como anda o âmbito educacional atualmente, se bem que os alunos do Ensino Fundamental dependem de uma série de fatores para que consigam assimilar os conteúdos trabalhados na escola, principalmente os referentes à Álgebra. Por isso, algumas questões necessitam ser entendidas a todo custo, no que tange os principais motivos que contribuem para essa dificuldade discente, tais como: a imaturidade dos alunos para aprender algo abstrato, a falta de planejamento do professor, a precariedade da estrutura da escola, a redução do número de aulas durante a semana, dentre outros problemas.

O estudo algébrico vem sendo explorado ao longo dos anos, tanto é que envolve uma interpretação que deve ser traduzida mediante o exposto da linguagem escrita para com a matemática, ou seja, à medida que muitos precursores deixaram o seu legado, temos que notar que cada um deles merece ser reconhecido por suas ideias, sendo que isso nos possibilita sermos testemunhas de nossas próprias ações. Sobre tal comparação, temos que se não somos capazes de interpretar algo algebricamente, logo não conseguiremos representar formalmente eventuais situações.

Por exemplo, admiro muito a leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), porém acho que tudo que é colocado no papel realmente se precisa comprovar na prática, ou seja, não que a teoria educacional retrate fatos ditos "articulados", mas que embora algo precisa ser observado e então opinado por pessoas que entendam bastante do assunto. Quanto ao cálculo algébrico, torna-se interessante notar que os tópicos estudados no Ensino Fundamental, e possivelmente avançados no Ensino Superior, se baseiam bastante na resolução de problemas, tanto é que as equações são utilizadas em enunciados e exercícios propostos, fator esse que garante a análise de determinadas demonstrações e aplicações que darão uma abrangência complementar ao referido tema.

Por meio de tais estratégias, ressalto que consegui argumentos importantíssimos para detalhar o começo, meio e fim de minha pesquisa, até porque houve uma ampliação do conhecimento pelo que eu já sabia e quanto ao que aprendi a cada leitura realizada. Além disso, quero destacar que todos os objetivos indispensáveis foram efetivados com sucesso, então espero com tremendo entusiasmo iniciar uma nova etapa frente à minha formação acadêmica, sendo que quando lograr a concretização deste trabalho e desfrutar de ideias partilhadas com tantos profissionais docentes e autores, sigamos sempre em frente, refletindo na medida do possível acerca de nossas aulas, cabendo, portanto, sermos eternos pesquisadores de nossos atos, seja pelo que façamos ou deixamos de fazer.

Pode-se inferir que, as informações e colocações identificadas neste trabalho, serão de extrema importância na construção de uma sociedade mais ativa no que tange a qualificação da educação, ao qual sejam puramente atuantes os obstáculos a se enfrentar.

Referências

[1] BAUMGART, JOHN K. **Tópicos de História da Matemática: História da Álgebra**. Disponível em <http://www.somatematica.com.br/cgibin/busca/search.pl?lang=en&q=historia+da+% 1lgebra>. Acesso em: 17 de outubro de 2015.

[2] BOYER, Carl B., **História da Matemática**. Tradução de Elza Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

[3] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR., José Ruy. **Pensar & Descobrir - Matemática - 7º ano**, Ed. FTD, São Paulo, 2011, 304 p

[5] LARSON, Loren C. **PROBLEM-SOLVING THROUGH PROBLEMS**. (Problem Books in Mathematicus) Springer-Verlag New York Inc. 1983

[6] Marcus V. **Matematicando** [Internet]. Sobradinho, DF, Brasil: Marcus Vinicius.2010 Mar – [citado em 2012 Jan 12].Disponível em:http://matcalc.blogspot.com.br/2010/03/stifel.html

[7] MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 19 – 39, 1993.

[8] MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

[9] Murcho, D. (2004). **Epistemologia da Argumentação.** In *Crítica: Revista de filosofia e ensino.* (24.07.2004)

[10] **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. 3ª ed. Brasília; MEC/SEF, 1997.

[11] RAMOS, Danielle De Miranda. **"Demonstrações através do cálculo algébrico"**; *Brasil Escola*. Disponível em<http://www.brasilescola.com/matematica/demonstracoes-atraves-calculo-algebrico.htm>. Acesso em 28 de setembro de 2015.

[12] USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola media e utilizações das variáveis**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.) As ideias da álgebra. Trad. DOMINGUES, H. H. São Paulo: Atual, 1995.