



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

JAIR LINO SOARES JUNIOR

**A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE SIMETRIA: CONTRIBUIÇÕES DA
MATEMÁTICA E CULTURA E DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS**

FORTALEZA

2018

JAIR LINO SOARES JUNIOR

**A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE SIMETRIA: CONTRIBUIÇÕES DA
MATEMÁTICA E CULTURA E DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Brasileira. Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S654c Soares Junior, Jair Lino.

A construção do conceito de simetria: contribuições da matemática e cultura e das atividades didáticas / Jair Lino Soares Junior. – 2018.

103 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2018.

Orientação: Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos.

1. Matemática e Cultura. 2. Atividades Didáticas-AD. 3. Sequência Fedathi-SF. 4. Transformações Geométricas. 5. Simetria. I. Título.

CDD 370

JAIR LINO SOARES JUNIOR

**A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE SIMETRIA: CONTRIBUIÇÕES DA
MATEMÁTICA E CULTURA E DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Brasileira. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 31/07/2018.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Júlio Wilson Ribeiro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Marcília Chagas Barreto
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À minha avó Ana Rosa (*in memoriam*) e à
minha mãe Leinda.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha Fé, a Nossa Senhora Aparecida, mãe protetora e Iemanjá, mãe das águas do mar, que proporciona discernimento.

À minha mãe, a flor da minha vida, pela dedicação a minha educação, pelo apoio, amor, carinho e cuidado incondicional! E ao meu pai, pelos aprendizados da vida e por sempre ser um porto seguro.

Às minhas irmãs Mariana e Yara, pela força e auxílio durante o processo de mudança de estado, por me socorrerem nos momentos burocráticos e emocionais desse processo.

À minha orientadora, Professora Dra. Maria José Costa dos Santos, pela orientação neste trabalho, por mostrar e me guiar nos melhores caminhos, por acreditar e confiar em mim, por compreender minhas dificuldades, por me auxiliar em diversos momentos acadêmicos e profissionais, pelas lições e aprendizados que levarei para a vida, pelas preocupações, pelo carinho e, enfim, por ser um presente em minha vida!

Ao Professor Dr. Julio Wilson, por participar da Banca Examinadora deste trabalho, pelas contribuições, atenção e por sempre se fazer disponível em colaborar.

À Professora Dra Marcília Chagas Barreto, por participar da Banca Examinadora deste trabalho, pelas contribuições e atenção ao meu trabalho.

Ao Professor Dr. Iran Abreu Mendes, por participar da Banca Examinadora de apresentação do projeto de dissertação, pelas contribuições e atenção ao meu trabalho.

A Arnaldo Aivy, por fazer parte deste processo me amparando e auxiliando em diversos momentos.

Ao G-TERCOA, em especial, aos amigos, Delane Holanda, Elisângela Magalhães e Heitor Abreu, pela colaboração em diversos momentos e pela amizade. E à minha amiga, Cíntia Matos, pela parceria, pelo carinho, pelos momentos de estudos, descontração e pela amizade!

À Ângela do Laboratório de Pesquisa Multimeios da FACED – UFC, pelo carinho desde o primeiro momento em que nos conhecemos.

Ao 9.º A, sujeitos desta pesquisa, por contribuírem e participarem da construção deste trabalho, também à equipe da Escola e os profissionais da Universidade Aberta do Brasil (UAB) que fazem parte do polo que está sediado na Escola, pela colaboração durante esse processo.

À CAPES, pelo financiamento parcial, 18 meses, deste estudo. E ao Programa de

Pós-graduação em Educação Brasileira (PPGE), da Faculdade de Educação (FACED), da Universidade Federal do Ceará (UFC)

Por fim, a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a construção deste trabalho e ampliação de conhecimentos.

“Educação é um ato político. Se algum professor julga que a ação é politicamente neutra, não entendeu nada de sua profissão.”

(Ubiratan D’Ambrosio)

RESUMO

A matemática é uma ciência repleta de significados, também no cotidiano. As práticas culturais podem e devem ser utilizadas no ensino dessa disciplina. Entretanto, a inter-relação matemática e cultura ainda não é uma realidade nas escolas públicas, pois, na maioria dos casos, o principal recurso pedagógico é o livro didático e a apresentação dos conteúdos se dá de forma hierarquizada, ensinando primeiro os conteúdos *mais fáceis* que servirão de pré-requisito para a aprendizagem de conteúdos *mais complexos*. Objetivamos com esse estudo analisar o processo de aprendizagem de uma turma de alunos do 9.º ano do ensino fundamental dos anos finais, especialmente sobre os conceitos matemáticos que envolvem simetria e isometria a partir de Atividades Didáticas (AD) que relacionam as rendas de bilros e a matemática cultural elaboradas por Santos (2012). O estudo é de natureza qualitativa, do tipo indutivo, com fins exploratórios, visando a aproximação da aprendizagem matemática com a cultura. Delineamos o trabalho baseado na observação participante. Os sujeitos foram 30 alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental anos finais de uma escola da rede pública municipal de ensino de Caucaia-Ceará. Como fonte de coleta de dados, adotamos o registro a partir de fotografias e o diário de campo, para anotações das respostas produzidas pelos alunos nas AD, bem como comentários de fatos ocorridos durante o processo investigativo durante a Sessão Didática (SD), fundamentada nos pressupostos metodológicos da Sequência Fedathi (SF). Nossos resultados permitiram identificar lacunas conceituais dos estudantes com relação às transformações geométricas, principalmente com relação ao conceito de reflexão. Observamos, ainda, dificuldades primárias dos estudantes acerca do conceito de lateralidade. A partir das análises, verificamos que as AD propostas por Santos (2012) corroboram a aprendizagem dos conceitos de transformação geométrica, especificamente rotação, translação e reflexão, principalmente por evidenciar as habilidades de visualização e representação, fundamentais para aprendizagem desses conceitos.

Palavras-chave: Matemática e Cultura. Atividades Didáticas-AD. Sequência Fedathi-SF. Transformações Geométricas. Simetria.

ABSTRACT

The mathematics is a science with a lot of meanings, also in everyday life. The cultural practices can and should be used to the teaching of this discipline. However, the mathematics interrelationship and culture still not a reality in public schools, because in most cases the main pedagogical resource is the textbook and the presentation of content which is given in a hierarchical way, teaching first the easiest contents which will be a prerequisite to learning most complex content. The purpose of this study is to analyze the learning process of a class of students from the 9th grade of elementary school in the final years, especially on the mathematical concepts about symmetry and isometry from Didactic Activities (DA) which relate bobbin lace and the cultural mathematics elaborated by Santos (2012). The study has the qualitative nature, in an inductive type, with exploratory purposes, aiming at the approximation of the mathematical study with the culture. We outlined the work based on the participant observation. The subjects were 30 students of the 9th grade of elementary school final years in a municipal public school of Caucaia – Ceará. As a source of data collection, we adopted the record from photographs and a field diary, for annotations of the answers produced by the students in the Didactic Activities (DA), as well as comments of facts that happened during the investigative process on the Didactic Session (DS), based on the methodological assumptions of the Fedathi Sequence (SF). Our results allowed to identify conceptual gaps of the students about the geometric transformations, mainly those which are related to the concept of reflection. We also observed the students' primary difficulties regarding the concept of laterality. From the analysis we verified that the DA proposed by Santos (2012) corroborate the learning of the concepts of geometric transformation, specifically, rotation, translation and reflection, mainly for evidencing the visualization and representation skills, fundamental for learning these concepts.

Keywords: Mathematics and Culture. Didactic Activities-AD. Fedathi Sequence-SF. Geometric Transformations. Symmetry

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Instrumento para Planejamento Anual Escola X estado do Ceará.....	18
Figura 2 – Páginas do livro de matemática do 8.º ano do ensino fundamental anos finais.	22
Figura 3 – Exemplos de simetria	35
Figura 4 – Movimento de translação identificado na renda de bilro	36
Figura 5 – Movimento de rotação identificado na renda de bilro	37
Figura 6 – Movimento de reflexão identificado na renda de bilro	38
Figura 7 – Resposta de um estudante sobre qual entendimento por retas paralelas.....	40
Figura 8 – Exemplo representação de um estudante sobre entendimento por retas paralelas ..	40
Figura 9 – Exemplo de representação dos estudantes sobre seus conhecimentos sobre simetria	40
Figura 10 – Apresentando os poliminós e a Situação desafiadora	44
Figura 11 – Tetraminó construído pelos alunos	46
Figura 12 – Solução da atividade 1	48
Figura 13 – Proposta de solução apresentada pelo grupo A.....	49
Figura 14 – Momento da solução da atividade.....	50
Figura 15 – Exemplo do movimento de translação	52
Figura 16 – Contado dos estudantes com a renda de bilro	53
Figura 17 – Pontos básicos das rendas de bilros	55
Figura 18 – Papelão pinicado	55
Figura 19 – Padrões observados nas rendas de bilros	57
Figura 20 – Formas geométricas: Retângulos	57
Figura 21 – Formas geométricas: Quadrados	58
Figura 22 – Padrões destacados pelos alunos e representação dos movimentos de translação e rotação	60
Figura 23 – Movimento de translação e rotação.....	61
Figura 24 – Padrões destacados pelos alunos e representação do movimento de reflexão	61
Figura 25 – Movimento de reflexão	Erro! Indicador não definido.
Figura 26 – Peças de Rendas de Bilros.....	63
Figura 27 – Faixa de Renda de Bilros	64
Figura 28 – Troca do movimento de translação pelo movimento de rotação.....	65
Figura 29 – Respostas dos estudantes: transformações isométricas no plano	66
Figura 30 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno A	67

Figura 31 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno B.....	67
Figura 32 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno C.....	68
Figura 33 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno D	68
Figura 34 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno E.....	69
Figura 35 – Cartaz produzido pelo grupo B	70
Figura 36 – Movimento de rotação apresentado pelos estudantes	72
Figura 37 – Etapas do processo de construção do conceito de simetria apresentado por Fainguelernt (1999)	75
Figura 38 – Etapas do processo de construção do conceito de simetria pelos estudantes do 9.º ano do ensino fundamental anos finais.....	75

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Análise do <i>plateau</i> com alunos do 8.º ano do ensino fundamental anos finais a partir dos pressupostos da Metodologia Sequência Fedathi-SF.	21
Quadro 2 – Análise do <i>plateau</i> com alunos do 9.º ano do ensino fundamental anos finais a partir dos pressupostos da Sequência Fedathi-SF.....	40
Quadro 3 – Cronograma das mediações-observações	42
Quadro 4 – Investigação sobre a renda de bilro	54
Quadro 5 – Quadro de análises – Aprendizagem do conceito de transformação geométrica, especificamente, Rotação, Translação e Reflexão.....	73

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	MATEMÁTICA E CULTURA: ATIVIDADES DIDÁTICAS-AD E AS RENDAS DE BILRO	28
2.1	As Transformações Geométricas: translação, rotação e reflexão	33
2.2	Isometria e Simetria nas Rendas de Bilros.....	35
3	TRANÇADOS DA PESQUISA	39
3.1	A Metodologia Sequência Fedathi-SF: Análise de <i>plateau</i>	39
3.2	Instrumentos de Coleta/ Análise de Dados.....	41
4	APRESENTAÇÃO DAS ANÁLISES DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS-AD	44
4.1	Atividade 1 – Poliminós.....	44
4.1.1	<i>Dificuldades iniciais</i>	45
4.1.2	<i>Caminhos e descaminhos da atividade</i>	46
4.2	Atividade 1.1 – Poliminós (material analógico)	49
4.3	Atividade 2 – Investigação Sobre a Renda de Bilro	53
4.3	Atividade 3 – Identificação e Conceitualização das Formas/ Padrões.....	56
4.4	Atividade 4 – Conceito de Simetria.....	59
4.5	Atividade 5 – Ampliando os Conceitos Construídos	62
4.6	Atividade 6 – Consolidação da aprendizagem	64
4.7	Culminância	69
5	CONSIDERAÇÕES	76
	REFERÊNCIAS.....	79
	APÊNDICE A – SESSÃO DIDÁTICA-SD	83
	APÊNDICE B – ROTEIRO DE INVESTIGAÇÃO	104

1 INTRODUÇÃO

No Brasil, a forma como se organiza a educação regular se expressa a partir de sistemas de ensino da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios. A atual estrutura do sistema educacional regular compreende a educação básica – formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio – e a educação superior. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDBEN 9394/96, legislação vigente, compete aos municípios atuar prioritariamente no ensino fundamental e na educação infantil e aos Estados e o Distrito Federal, no ensino fundamental e médio.

Os Currículos da Educação Básica no Brasil ainda são organizados em geral de forma disciplinar, e a Matemática, como disciplina curricular, é um dos maiores focos dos sistemas educacionais. Destinam a essa disciplina uma carga horária maior em relação às outras. A exemplo, no currículo das escolas públicas da rede municipal de ensino de Caucaia-Ceará, no Ensino Fundamental anos finais, a disciplina Matemática possui 4 horas/aulas (h/a) por semana. A única disciplina que recebe a mesma carga horária é a Língua Portuguesa, as demais concentram 2 h/a ou 1 h/a por semana.

Outro fator que evidencia o foco dos sistemas de ensino na Matemática são os resultados das avaliações externas, como a Prova Brasil, Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) e outros. Esse foco, porém, não tem apontado para uma maior qualidade nos processos de ensino e de aprendizagem. Os resultados dessas avaliações indicam uma baixa proficiência dos estudantes em Matemática (VIEIRA, 2017).

Obviamente quantidade não é inerente à qualidade, como aponta D'Ambrosio (1996) ao afirmar que focalizar esforços nos alunos a partir de uma maior frequência de aulas e exames tem apresentado poucos resultados. Bishop (1999) assinala que o currículo de matemática está totalmente orientado para a execução de técnicas, apresentando-se como um currículo de usuário, que pretende desenvolver uma caixa de ferramentas exaustiva e variada, em que o aluno é o usuário e deve dominar a caixa de ferramentas, e o domínio dessas técnicas se consolida como critério de avaliação desse currículo.

É necessário que se entenda que o conhecimento não é transmitido e, principalmente, que não é construído a partir da exaustiva repetição, isolada de significados, de exercícios e testes. “O conhecimento tem seu processo de construção ocasionado a partir da organização sistemática das nossas experiências, observações, interações sociais e

investigações realizadas no contexto da sociedade e da cultura, ao longo do desenvolvimento histórico das civilizações.” (MENDES, 2009a, p. 123).

Buscamos, com esse estudo, evidenciar que os conhecimentos matemáticos não são aprendidos de forma isolada, mas que ocorrem a partir da interação do homem com o meio que o cerca, sofrendo influência de características sociais e culturais, enfatizando a necessidade de valorizar e respeitar diversas culturas na produção desses, como exprime Gerdes (1991) ao relatar a constatação que dificuldades de aprendizagem dos Kpelle, povo indígena da Libéria – África, em relação à matemática não eram inerentes aos conteúdos matemáticos, mas sim na ausência de sentido desses conteúdos com a cultura Kpelle.

Sobre isso, Santos (2013) aponta que o ensino da Matemática significado pela Cultura ainda enfrenta barreiras, pois qualquer saber que se apresenta diferente do acadêmico é marginalizado. Chagas (2004) adverte que os conteúdos matemáticos ensinados nas escolas nacionais são, muitas vezes, determinados pelo livro didático e o método de ensino se restringe a aulas expositivas e exercícios de fixação.

Sobre o Livro Didático nas escolas públicas, vale lembrar que o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é o mais antigo dos programas voltados à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública brasileira de ensino, o qual teve início, em 1929 com outra denominação. Nesse percurso, o acesso ao livro didático pelos(as) professores(as) e alunos(as), nas escolas públicas, foi sendo realizado de forma gradativa e retomado em 1995 visando à universalização da distribuição do livro didático no ensino fundamental. Nesse período, as disciplinas contempladas foram as de matemática e língua portuguesa, e um ano depois, em 1996, as disciplinas de ciências e, em 1997, as de geografia e história. Nesse mesmo ano, iniciou-se o processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos para o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o qual vem sendo realizado até hoje.

Destacamos também que, em 1997, com a extinção da Fundação de Assistência ao Estudante-FAE, a responsabilidade pela política de execução do PNLD é transferida integralmente para o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

Com isso, o programa foi ampliado e o Ministério da Educação-MEC passou a adquirir, de forma continuada, livros didáticos de alfabetização, língua portuguesa, matemática, ciências, estudos sociais, história e geografia para todos os alunos de 1.º ao 9.º ano do ensino fundamental, o qual era denominado antes de 1.ª a 8.ª séries do ensino fundamental, que foi reformulado a partir da Lei nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006, que alterou a LDBEN (1996) ampliando o Ensino Fundamental para nove anos de duração, com a matrícula de crianças de seis anos de idade (BRASIL, 2009).


A partir desse contexto, relato a seguir, algumas observações e reflexões da minha prática como professor. Faço essa exposição em primeira pessoa do singular por se tratar de experiências vividas nas escolas que trabalhei.

Como professor de matemática, trabalhei com dois segmentos da Educação Básica – anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, além das modalidades Educação de Jovens e Adultos (EJA) e Centro de Medidas Socioeducativas (Fundação Casa de São Paulo). Essas vivências foram construídas em instituições públicas e privadas de ensino dos estados de São Paulo, onde me graduei em Licenciatura em Matemática, e do Ceará, onde escolhi cursar Pedagogia. Interrompi temporariamente essa graduação devido a aprovação no mestrado e pretendo retomá-la assim que concluir o mestrado.

Considero a mudança de São Paulo para o Ceará umas das maiores riquezas na constituição do meu perfil como profissional, principalmente devido ao ingresso no mestrado. Obviamente esse perfil não é estanque e permanecerá em constante (re)construção. Apesar das diferenças na organização dos sistemas de ensino, destaco um ponto que vivenciei em ambos os estados: o estreitamento do currículo a partir do uso do livro didático. Dante (1996) assinala que o livro didático em muitos casos é o único instrumento de auxílio ao trabalho docente e, em algumas situações, o conteúdo do livro didático torna-se o currículo de matemática. É possível inferir que a inserção do PNLD nas escolas públicas brasileiras tenha afetado a prática pedagógica dos professores da educação básica, pois em quase seis anos em que estou lecionando matemática na Educação Básica, o livro didático tem sido meu principal recurso pedagógico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNM) (BRASIL, 1998) para o Ensino Fundamental Anos Finais (nomenclatura atualizada), publicados em 1998, apontavam, entre os obstáculos para o Ensino da Matemática no Brasil, o apoio basicamente exclusivo nos livros didáticos. Com efeito, uma das escolas da rede pública estadual do Ceará onde trabalhei, para realizar o planejamento anual, era obrigatório indicar as páginas do livro que seriam abordadas a partir dos conteúdos a serem ensinados em sala de aula. A Figura 1 a seguir, ilustra essa narrativa.

Figura 1 – Instrumento para Planejamento Anual Escola X - Estado do Ceará



**GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ**
Secretaria da Educação

Planejamento aula/aula 2016
Ciências da Natureza e Matemática

Disciplina: Matemática 1

Professor(a): Jair Lino Soares Junior
Carga Horária: 80h/a

Etapa	Nº Aula	Conteúdos	Atividades	Páginas do Livro	Avaliação

Fonte: Ceará. Secretaria de Educação (2016?)

Na organização dessa escola, a disciplina Matemática 1¹, a qual ministrei nas três séries do Ensino Médio, corresponde aos conteúdos de Geometria, sendo destinada a carga horária de 2 h/a por semana. Essa experiência foi completamente nova para mim, pois em São Paulo, nas escolas onde trabalhei a disciplina matemática era atribuída para um único professor, não havia essa divisão, e o professor deveria organizar os conteúdos de acordo com a proposta do Estado e ministrá-los.

Ao iniciar o ensino de Geometria Analítica, com os estudantes na 3.^a série do ensino médio, minha primeira experiência com a 3.^a série do ensino médio, me deparei com dificuldades surpreendentes, pois os estudantes não conseguiam localizar pontos no plano cartesiano e apresentavam dificuldades com relação à lateralidade. Alguns alunos não haviam, ainda, formalizado os conceitos sobre transformações geométricas – reflexão, rotação e translação – e possuíam dificuldades em resolver as atividades que necessitavam desses conhecimentos.

Esse fato me chamou a atenção, pois no PCNM (BRASIL, 1998) os conceitos sobre coordenadas cartesianas e transformações geométricas estavam previstos tanto no terceiro ciclo – compreendia 5.^a e 6.^a séries do Ensino Fundamental atualmente 6.^o e 7.^o anos do Ensino Fundamental anos finais – quanto no quarto ciclo – 7.^a e 8.^a séries atualmente 8.^o e 9.^o anos do Ensino Fundamental anos finais. O PCNM (BRASIL, 1998) apresentava como objetivos para o ensino da Geometria, no terceiro ciclo:

¹ A disciplina Matemática 1, possui a mesma nomenclatura para as três séries do Ensino Médio, mas não os mesmos conteúdos, durante a disciplina são ministrados os conteúdos de geometria previstos para cada série.

Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento:

Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

* resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;

* resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução. (BRASIL, 1998, p. 64 – 65)

Para o quarto ciclo, o PCNM (BRASIL, 1998) recomendava a ampliação e aprofundamento dos conceitos estudados. Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), que se apresenta como um documento normativo e impositivo, ao contrário do PCNM que como o próprio nome diz era um parâmetro, enfatiza o estudo das transformações geométricas durante os anos finais do Ensino Fundamental – 6.º ao 9.º anos do Ensino Fundamental anos finais:

Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2017, p. 8)

De acordo com a BNCC, em relação aos conceitos de transformação geométrica os alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental anos finais devem “Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.” (BRASIL, 2017, p. 45).

As transformações geométricas aparecem na BNCC como conteúdos a serem aprofundados durante os quatro anos do Ensino Fundamental anos finais, frisando a inserção das tecnologias digitais, principalmente o uso de *softwares* de geometria dinâmica.

Entretanto, os Laboratórios de Informática (LI) ou outros recursos que possibilitem acesso às tecnologias digitais ainda não são realidade em todas as escolas brasileiras (KENSKI, 2015), contrariando, o que impõe a BNCC sobre o desenvolvimento das competências gerais, pois como competência geral, a orientação é para

Utilizar tecnologias digitais de comunicação e informação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas do cotidiano (incluindo as escolares) ao se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos e resolver problemas. (BRASIL, 2017, p. 18)

Essa e mais outras nove, somando dez competências gerais, são adotadas pela BNCC. O texto do documento destaca que essas competências devem perpassar todos os componentes curriculares ao longo da Educação Básica para a construção de conhecimentos e

habilidades, bem como, para a formação de atitudes e valores, contemplando o que diz a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN (9.394/1996). Mas não observei essas possibilidades nas escolas em que lecionei.

O Censo Escolar da Educação Básica de 2017, pesquisa realizada anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), constatou que apenas 46,8% das escolas da rede pública de ensino fundamental no Brasil possuem Laboratório de Informática e salienta que recursos tecnológicos ainda não são realidade para muitas escolas brasileiras de ensino fundamental (BRASIL, 2018).

Reafirmando a ausência das tecnologias, as escolas particulares em que trabalhei, tanto em São Paulo como no Ceará, não possuíam laboratório de informática. Já com relação às escolas públicas, quase todas possuíam o laboratório de informática, porém a maioria das máquinas não funcionavam e não havia manutenção. Sobre isso, Borba e Penteadó (2016) apontam a necessidade de um suporte constante para manutenção dos Laboratórios de Informática, pois em algumas escolas o uso deste recurso fica inviabilizado devido à ausência de verba para pagar a visita de um técnico.

O trabalho realizado no Ensino Médio me possibilitou desenvolver algumas atividades utilizando dispositivo eletrônico – o celular ou até mesmo o laboratório de informática dividindo o espaço da aula entre a sala e/ou entre outras estratégias pedagógicas. Atualmente ministro aulas de matemática no Ensino Fundamental anos finais em uma escola da Rede Municipal de Ensino de Caucaia – cidade localizada na região metropolitana de Fortaleza. A realidade é diferente e nem todos os estudantes dispõem desse artefato digital.

Instigado pelas dificuldades que me deparei na 3.^a série do ensino médio, constatei a necessidade de trabalhar com maior rigor didático-pedagógico os conteúdos sobre transformações geométricas, especificamente translação, rotação e reflexão. A fim de identificar os conhecimentos dos estudantes sobre esses conceitos, realizei uma análise do *plateau* com uma turma de 30 alunos matriculados, em 2017, no 8.º ano do Ensino Fundamental anos finais. De acordo com a metodologia de ensino, Sequência Fedathi (SF) é a análise dos conhecimentos e experiência dos educandos (SANTOS, 2017).

As dificuldades dos estudantes, sujeitos desta pesquisa, e a forma como se dá a abordagem do conteúdo proposto pelo livro didático me instigaram ainda mais a buscar maneiras diferenciadas para construção do conceito de simetria.

Informo que, a partir desse parágrafo, não utilizarei mais a primeira pessoa do singular. As reflexões acima dizem respeito às minhas percepções a partir da prática como professor, porém devido as colaborações e discussões com autores, minha orientadora e

membros da banca volto a utilizar a primeira pessoa do plural.

No intuito de coletar dados iniciais e justificar a relevância do tema e a necessidade de uma abordagem do conceito de transformação geométrica para além do livro didático, realizamos uma análise do *plateau* (VER APÊNDICE A) a partir de um roteiro de investigação o qual é apresentado adiante, com os alunos – 30 sujeitos de uma turma do 8.º ano do ensino fundamental anos finais, devidamente matriculados e cursando o ano letivo de 2017. Informamos que para responder o roteiro, os alunos se organizaram em grupos de discussão de 3 ou 4 integrantes, formando 8 grupos. Eles puderam consultar o livro didático, o que justifica em algumas respostas a apresentação de exemplos de simetria, ou citações a respeito de um eixo de simetria, seguindo os modelos do livro didático.

Vejamos o Quadro 1 a seguir o qual sintetiza as respostas fornecidas pelos estudantes.

Quadro 1 – Análise do *plateau* com alunos do 8.º ano do ensino fundamental anos finais a partir dos pressupostos da Metodologia Sequência Fedathi-SF.

I. O que você entende por paralelismo? E retas paralelas?
16 alunos afirmaram que paralelismo e retas paralelas são a mesma coisa, mas sem argumentar ou justificar a resposta.
8 alunos responderam que paralelismo é um quadrilátero e que retas paralelas são retas que não possuem pontos em comum.
3 alunos apresentaram a ideia de retas contidas no mesmo plano, porém sem explicar ou argumentar o porquê.
3 alunos informaram não conhecer sobre o assunto.
II. Quais suas noções sobre simetria? Recorda se já estudou esse assunto? O que você lembra?
8 alunos citaram simetria axial e simetria radial, mas não explicaram do que se trata
8 alunos informaram se tratar de algo ou alguma coisa parecida.
8 alunos citaram exemplo de atividades realizadas na disciplina de Arte, em que tinham que pintar a metade de um desenho numa folha e dobrá-la a fim de completar o desenho, mas não complementaram o exemplo.
3 alunos afirmaram que simetria é uma figura geométrica.
3 alunos citaram que simetria necessita de um eixo de simetria, mas não argumentaram o porquê.
III. Para você o que é translação, rotação e reflexão? Já estudou sobre esse assunto? Diga o que você lembra.
16 alunos não responderam sobre translação e rotação e afirmaram que reflexão está relacionado ao ato de pensar, meditar ou relaxar.
8 alunos afirmaram não conhecer sobre.
3 alunos afirmaram que translação e rotação são os movimentos da Terra e não apresentaram ideias sobre reflexão.
3 alunos não responderam sobre translação, afirmaram que rotação é o ato de girar, e reflexão diz respeito a algo que está refletido.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Sobre nossas impressões iniciais, observamos que os estudantes apresentaram dificuldades para responder o roteiro sobre os conceitos de translação, rotação e reflexão. Eles expuseram os exemplos presentes no livro, mas não conseguiram explicar o significado. Também fizeram analogias dos conceitos aos movimentos de rotação e translação da Terra estudados nas disciplinas geografia e ciências, mas não citaram se já estudaram os conceitos

anteriormente em matemática.

O livro didático de Silveira (2015) que utilizamos durante as aulas não traz muitas contextualizações sobre esse conteúdo. Vejamos a Figura 2 a seguir.

Figura 2 – Páginas do livro de matemática do 8.º ano do ensino fundamental anos finais.

4 Simetria

Simetria axial

Reconhecemos a simetria **axial** pela presença de um eixo de simetria.

Vamos representar esse eixo pela reta r . Podemos determinar, em relação a esse eixo, a figura simétrica de um ponto, de um segmento de reta, de uma reta ou de uma figura plana qualquer.

Axial
Palavra derivada de *axis*, termo latino que significa "eixo".

Simetria de um ponto

Dois pontos distintos A e A' são simétricos em relação a uma reta r se esta divide o segmento $\overline{AA'}$ perpendicularmente no seu ponto médio.

Explicar aos alunos que é usual usar tracinhos para indicar segmentos ou ângulos com medidas iguais.

A' é o ponto simétrico de A em relação à reta r .

$$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$$

Simetria de um segmento de reta

Na figura, note que os pontos A' e B' são, respectivamente, simétricos de A e B , em relação à reta r . Dizemos que os segmentos \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ são simétricos em relação à reta r .

$\overline{A'B'}$ é o segmento de reta simétrico de \overline{AB} em relação à reta r .

$$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$$

$$\overline{BN} \cong \overline{B'N}$$

Simetria de uma reta

Os pontos A , B e C estão alinhados, assim como seus simétricos A' , B' e C' em relação à reta r .

$\overline{A'B'}$ é a reta simétrica de \overline{AB} em relação à reta r .

$$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$$

$$\overline{BN} \cong \overline{B'N}$$

Simetria de um círculo

Os centros O e O' são simétricos em relação à reta r , e os círculos têm o mesmo raio.

O círculo de centro O' e raio medindo $O'A'$ é simétrico do círculo de centro O e raio medindo OA , em relação à reta r .

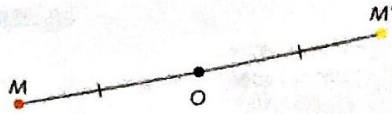
$$\overline{OM} \cong \overline{O'M}$$

$$\overline{AN} \cong \overline{A'N}$$

$$\overline{OA} \cong \overline{O'A'}$$

Simetria de um ponto

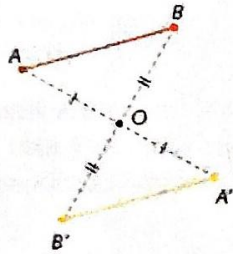
O simétrico de um ponto M em relação a um ponto O é o ponto M' tal que O é o ponto médio do segmento MM' .



M' é simétrico de M em relação ao ponto O .

$$\overline{MO} \cong \overline{M'O}$$

Simetria de um segmento de reta

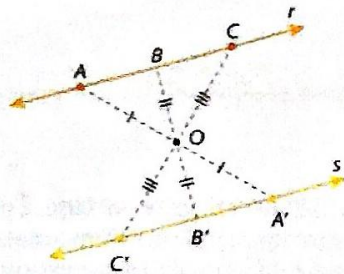


$\overline{A'B'}$ é o segmento de reta simétrico de AB em relação ao ponto O .

$$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$$

$$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$$

Simetria de uma reta



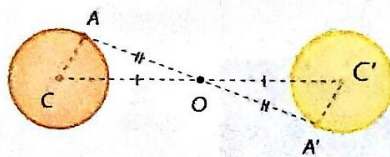
A reta s é simétrica da reta r em relação ao ponto O .

$$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$$

$$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$$

$$\overline{CO} \cong \overline{C'O}$$

Simetria de um círculo

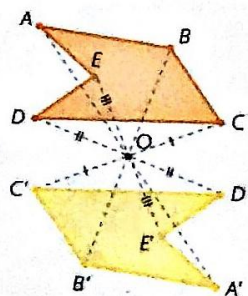


Os centros C e C' são simétricos em relação ao ponto O , e os círculos têm raio de mesma medida.

$$\overline{CO} \cong \overline{C'O}$$

$$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$$

Simetria de um polígono



O polígono $A'B'C'D'E'$ é simétrico do polígono $ABCDE$ em relação ao ponto O .

$$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$$

$$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$$

$$\overline{CO} \cong \overline{C'O}$$

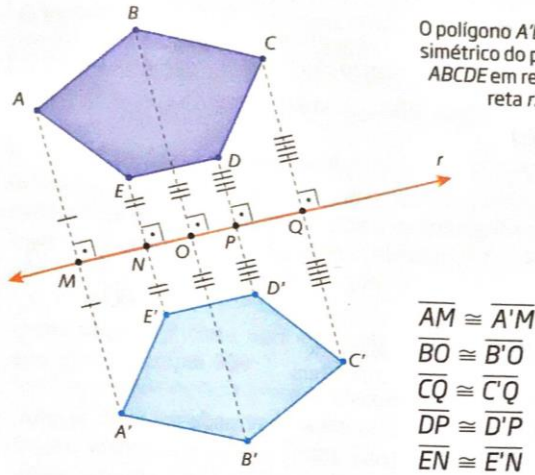
$$\overline{DO} \cong \overline{D'O}$$

$$\overline{EO} \cong \overline{E'O}$$

A simetria preserva a forma e o tamanho do polígono.

Simetria de um polígono

Na figura, note que os pontos A' , B' , C' , D' e E' são, respectivamente, simétricos de A , B , C , D e E , em relação à reta r . Dizemos que os polígonos $ABCDE$ e $A'B'D'E'$ são simétricos em relação à reta r .



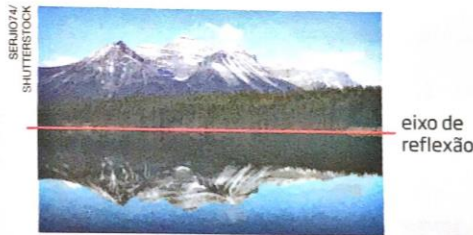
GUILHERME CASAGRANDE



Lendo e aprendendo

Uma imagem simétrica

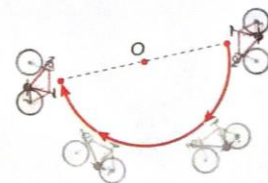
Na foto abaixo, vemos o reflexo de uma paisagem na superfície de um lago. É possível identificar um eixo de simetria ou eixo de reflexão, pois a imagem refletida tem a mesma forma e o mesmo tamanho que a original, mas está invertida em relação a ela. Observe que, se essa foto fosse dobrada na linha do eixo de simetria, as partes correspondentes ficariam sobrepostas.



Simetria central

A simetria central é determinada em relação a um ponto denominado centro de simetria.

Duas figuras são simétricas em relação a um ponto quando, após um giro de meia-volta de uma delas em torno desse ponto, esta fica sobreposta à outra.



O ponto O é o centro de simetria.

GUILHERME CASAGRANDE

Fonte: Adaptada SILVEIRA, 2015, p. 134-136.

Vimos que são apenas três páginas para abordar os conceitos de simetria e a exposição é feita de maneira muito técnica. Como podemos observar na Figura 2, falta contextualização das situações matemáticas apresentadas. A BNCC (BRASIL, 2017) prevê

para o 8.º ano do ensino fundamental anos finais, na habilidade 18, que aborda o conceito de simetria, “reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica” (BRASIL, 2017, p. 313). Vale enfatizar que a aprendizagem e o desenvolvimento das habilidades em matemática estão relacionados à apreensão de significados dos objetos matemáticos, que resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano. A abordagem do livro didático, como observamos na Figura 2, não pode se restringir a orientações se configurando como um instrumental de normas. O cotidiano está repleto de exemplos de simetria, na arquitetura, na natureza, na arte, no artesanato. Não faltam exemplos para contextualizar de maneira mais efetiva esse conceito, bem como permitir que os estudantes tenham a oportunidade experimentar, investigar ao invés de simplesmente apresentar definições.

A partir das reflexões feitas com base nos resultados do *plateau* dos 30 alunos do 8.º ano dos anos finais do ensino fundamental, elaboramos uma Sessão Didática (SD) fundamentada em cinco Atividades Didáticas (AD) propostas por Santos (2012), em sua tese de doutorado, acerca da construção dos conceitos de transformações geométricas utilizando rendas de bilros, uma prática histórico-cultural presente no estado do Ceará. Esclarecemos que para as análises finais da pesquisa, os sujeitos investigados foram 30 alunos devidamente matriculados no 9.º ano do ensino fundamental anos finais da turma do ano letivo de 2018.

As AD foram desenvolvidas durante 8 momentos da SD em sala de aula com os educandos. Cada momento da SD possuía 50 minutos, totalizando 6h40min, abrangendo um período de 5 semanas. De acordo com a metodologia de ensino SF, a SD inclui também o momento do planejamento e de avaliação (SANTOS, 2016). Para a SF, na sala de aula, o ponto de partida consiste na apresentação de uma situação desafiadora que pode ser na forma verbal, escrita, a partir de jogos ou outras formas, que podem ser realizadas em grupo ou individualmente. A situação desafiadora deve ser compreendida pelos discentes. Para isso, tomamos como referência a análise do *plateau* (SANTOS, 2016).

Organizamos as situações desafiadoras de acordo com a SF a partir das Atividades Didáticas-AD na visão de Mendes (2009a), elaboradas por Santos (2012). De acordo com Mendes (2009a) as AD oportunizam ao educando uma dinâmica experimental colocando-o como investigador e sujeito ativo no processo de construção do conhecimento. Para o autor, o ensino baseado em atividades possibilita ao aprendiz uma construção constante das noções matemáticas presentes em cada atividade.

Metodologicamente, apoiamos esse estudo também nas ideias de Minayo (1994,

p. 18), quando afirma que “Toda investigação se inicia por um problema com uma questão, com uma dúvida ou com uma pergunta articuladas a conhecimentos anteriores, mas que também podem demandar a criação de novos referenciais.” Assim, a questão desta pesquisa emerge das reflexões sobre a problemática que envolve: (a) as condições de recurso pedagógico; (b) as fragilidades observadas no livro didático, e ainda, (c) na ausência de conhecimentos dos sujeitos – alunos – sobre o conceito de simetria.

Em atendimento a esses pressupostos, nós almejamos responder o seguinte questionamento: as Atividades Didáticas elaboradas por Santos (2012) contribuem para desenvolvimento do processo de aprendizagem de geometria e simetria?

Nessa direção, objetivamos, de modo geral, analisar o processo de aprendizagem dos alunos do 9.º ano do ensino fundamental anos finais, especialmente sobre os conceitos matemáticos que envolvem simetria e isometria a partir das premissas das AD que relacionam as rendas de bilros e a matemática cultural. Já de modo específico, objetivamos, utilizar as AD propostas por Santos (2012) considerando as várias interpretações, resoluções e ampliações na construção dos conceitos de transformação geométrica – translação, reflexão e rotação; identificar a proficiência dos alunos no desenvolvimento das atividades propostas sobre rotação, translação e reflexão; Por fim, avaliar se os alunos ao final das AD construíram o conceito de transformação geométrica – translação, reflexão e rotação, com vistas ao uso desse conceito em outras situações e contextos.

Essa pesquisa se caracteriza pela abordagem qualitativa e iniciamos nossos estudos a partir do levantamento da literatura sobre a inter-relação matemática e cultura, bem como, o ensino da Geometria, em especial transformações geométricas. Delineamos o estudo a partir da observação participante, que consiste na participação real do pesquisador com a comunidade ou grupo, ficando próximo ao grupo que está estudando e participando das atividades normais deste (MARCONI e LAKATOS, 2003).

Vale ressaltar que o pesquisador é também professor dos sujeitos da pesquisa, 30 alunos de uma turma do 9.º ano do ensino fundamental anos finais, de uma escola da rede pública municipal de ensino de Caucaia-Ceará. E sobre isso, Marconi e Lakatos (2003) alertam para as dificuldades de se manter a objetividade. Nesse sentido, a fim de assegurar maior qualidade das observações, contamos com a participação de duas observadoras externas que, assim como o pesquisador, fazem parte do Grupo de Pesquisa Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (G-TERCOA/CNPq)². A escolha dessas observadoras externas se justifica

² Endereço eletrônico do grupo: <<http://www.gtercoa.ufc.br/>>.

também por suas inserções nas ações do grupo que realiza estudos sobre a formação inicial e continuada do professor que ensina matemática, e dos processos de ensino e aprendizagem da matemática, bem como a integração, a colaboração e a partilha das pesquisas entre estudantes da graduação, da pós-graduação e professores, em especial os professores da Educação Básica, da Rede Pública de Ensino.

Como instrumento de coleta de dados, utilizamos o questionário da análise do *plateau*, o diário de campo, e as respostas produzidas pelos alunos durante a SD que foram os objetos de análises, bem como, o desempenho dos sujeitos a partir das respostas nas AD envolvendo o conceito de simetria propostas por Santos (2012).

O trabalho está estruturado da seguinte maneira: o primeiro capítulo é este, no qual apresentamos na introdução - problemática, justificativa, objetivos, metodologia e estrutura da pesquisa. No segundo capítulo, aprofundamos as discussões sobre a relação intrínseca entre matemática e cultura e a necessidade de valorizar diversas práticas culturais no ensino da Matemática, mais especificamente apresentamos experiências exitosas sobre a temática, para além do livro didático, bem como, apresentamos os conceitos de transformação geométrica – translação, rotação e reflexão – e as perspectivas e concepções para o ensino desse conteúdo de acordo com o PCNM (BRASIL, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2017).

No terceiro capítulo, discutimos os caminhos metodológicos para a condução da pesquisa, apresentamos e analisamos o método que conduziu nosso percurso, o lócus e os sujeitos. No quarto capítulo destacamos o desenvolvimento das AD, os resultados obtidos e sua análise. E, no quinto capítulo, expomos nossas considerações sobre este estudo relacionando com os objetivos delimitados, principais contribuições e perspectivas para novas pesquisas sobre a temática abordada.

No capítulo a seguir, tecemos discussões entre a Matemática e Cultura evidenciando as AD que relacionam a aprendizagem do conceito de transformação Isométrica à prática cultural das rendas de bilros, propostas por Santos (2012).

2 MATEMÁTICA E CULTURA: ATIVIDADES DIDÁTICAS-AD E AS RENDAS DE BILRO

D'Ambrosio (1993) aponta que os congressos e as conferências internacionais, os quais datam do final da década de 1960 e durante a década de 1970, colaboraram para mudanças qualitativas nos debates sobre os objetivos da Educação Matemática, pois para além da grande ênfase na discussão sobre conteúdos programáticos e teorias da aprendizagem, nota-se a maior presença de discussões de cunho social e político.

De acordo com o autor, durante a Terceira Conferência Internacional de Educação Matemática (ICME-3), em Karlsruhe, Alemanha, em 1976, na sessão “Objetivos e metas da educação matemática. Por que estudar matemática?” encaminharam-se discussões sobre os objetivos da educação matemática em direção às reflexões socioculturais e políticas, e salienta que possivelmente essa tenha sido a primeira vez que foram discutidas em uma reunião internacional. Sobre isso, Mendes (2008) afirma que, no final da década de 1970, a relação entre cultura e educação foi um ponto recorrente nas discussões ocorridas nos meios acadêmicos sobre educação e, principalmente, sobre o ensino de matemática. Ademais, salienta dentre as discussões o termo Etnomatemática.

D'Ambrosio é o precursor dos estudos sobre Etnomatemática e o termo aparece pela primeira vez em 1985 em seu livro “*Etnomathematics and its Place in the History of Mathematics*.”³ A Etnomatemática é polêmica, tanto quanto a sua definição, quanto a sua aceitação no meio acadêmico.

Ao longo dos últimos 20 anos, muita coisa sobre etnomatemática vem sendo dita e discutida nos meios acadêmicos; escrita, publicada, criticada, experimentada e reelaborada por vários grupos de estudiosos em todo o mundo, a busca é por um referencial teórico cada vez mais sólido acerca desse assunto. A cada encontro de Educação Matemática e/ou áreas afins, observamos alguns pesquisadores buscando participar de discussões sobre esse tema, visando atualizar-se sobre o assunto, além de tentar colher novos subsídios para o seu trabalho acadêmico. Isso nos mostra a importância dada ao assunto, assim como a validade atribuída aos resultados de estudos e pesquisas realizadas por pesquisadores e educadores, no sentido de ver reconhecida a etnomatemática como um paradigma emergente da Educação Matemática. O que não se obtém nesse entremeio todo é uma resposta para a seguinte pergunta: O que é etnomatemática? (MENDES, 2008, p. 19).

Diversas são as definições acerca da Etnomatemática e muitas pesquisas são realizadas no Brasil e nos demais países nessa área da Educação Matemática. De acordo com Mendes (2008), essas pesquisas possuem principalmente duas vertentes: a primeira busca por

³ Universidade Federal do Rio de Janeiro, texto sem autor e sem data. Disponível no link: <<http://www.ufrj.br/leprans/arquivos/etno.pdf>>. Acesso em: 28/04/2018.

subsídios metodológicos para auxiliar na experiência com estudantes em sala de aula, e a segunda visa contribuir para que as comunidades alcancem um nível mais elevado de conscientização social e política, na qual a matemática contribua para a autonomia de um grupo.

Neste sentido, apresentamos sucintamente, a seguir, definições e pesquisas de três estudiosos com destaque no campo da Etnomatemática. São eles: Paulus Gerdes, Gelsa Knijnik e Ubiratan D’Ambrosio. Seguimos respectivamente esta ordem de exposição.

Gerdes (1991), ao se referir ao “nível baixo” de aproveitamento em educação matemática de países africanos, aponta como um desafio a necessidade de integrar ao currículo as tradições e as práticas matemáticas da África, enfatizando que se deve “multiculturalizar” o currículo de matemática a fim de melhorar a qualidade do ensino e de aumentar a autoconfiança social e cultural de todos os alunos. Afirmando que é nesse contexto de procurar uma resposta a este desafio que se iniciou a investigação etnomatemática em Moçambique, assim:

Estudos etnomatemáticos analisam:

- * tradições matemáticas que sobreviveram à colonização e atividades matemáticas na vida diária das populações, procurando possibilidades de as incorporar no currículo;
- * elementos culturais que podem servir como ponto de partida para fazer e elaborar matemática dentro e fora da escola. (GERDES, 1991, p. 18)

Dessa forma, Gerdes (1991) sinaliza que a maioria das tradições ‘matemáticas’ que sobreviveram à colonização e das atividades ‘matemáticas’ na vida diária do povo moçambicano não é a matemática formalizada academicamente, isto é, a matemática está ‘escondida’. Sendo assim, o principal objetivo do Projeto de Investigação Etnomatemática consiste em ‘descobrir’ esta matemática ‘escondida’.

Knijnik (2003) relata uma pesquisa na qual observou conexões entre a Etnomatemática e a Educação Popular especificamente. O estudo analisou repercussões de um projeto pedagógico centrado em uma das atividades produtivas de um assentamento do Movimento dos Trabalhadores Sem Terra (MTST). Nesse relato, a autora afirma:

[...] a Etnomatemática abrange um vasto e heterogêneo conjunto de abordagens, muitas das quais estão estreitamente vinculadas com a Educação que se realiza nos movimentos sociais no Brasil (Ferreira, 1993, 1998; Knijnik, 1997a, 1998b; Lucas de Oliveira, 1997; Monteiro, 1998; Oliveira, 1998). O projeto de pesquisa que analiso no presente ensaio, por suas estreitas vinculações com os a Educação que se realiza no Movimento Sem-Terra (Knijnik, 1997b; 1998c), situa-se neste contexto onde a Etnomatemática se encontra com as tradições da Educação Popular, em particular com a Educação do MST (KANIJNIK, 2003, p. 106).

D’Ambrosio (2001) assinala que a Etnomatemática é um programa de pesquisa

em história e filosofia da matemática, com implicações pedagógicas e um indiscutível foco político. Dessa forma, o autor complementa que a Etnomatemática é embebida de ética e focalizada na recuperação da dignidade cultural do ser humano.

Evidenciando o foco político, D'Ambrosio (2001) afirma que a disciplina denominada matemática é uma Etnomatemática que se originou e se desenvolveu na Europa, recebendo contribuições das civilizações indiana e islâmica, chegando à forma atual entre os séculos XVI e XVII, e, a partir de então, foi levada e imposta a todo o mundo. Dessa forma, assumiu uma posição de universalidade, bem como um caráter de dominação.

Na verdade, são raízes culturais de um processo “civilizatório” que tem no máximo cinco séculos, duração muito curta na história cultural da humanidade. São raízes culturais associadas às mesmas raízes que estão identificadas com a expansão da civilização ocidental, e assim associadas a um sistema de dominação política e econômica que resultou desse processo de expansão (D'AMBROSIO, 1993, p. 14).

Sobre isso, D'Ambrosio (2001) ressalta que a estratégia do dominador está na eliminação da historicidade do dominado, ou seja, na eliminação das raízes culturais. O autor afirma que um sujeito sem raízes se agarra a outro e entra num processo de dependência manifestando a perversa relação de poder de um indivíduo sobre o outro. Alerta ainda que esse processo está presente nos sistemas escolares e na sociedade. “É o poder dos que sabem mais, dos que têm mais, dos que podem mais.” (D'AMBROSIO, 2001, p. 42).

O autor complementa afirmando que na sociedade moderna, inteligência e racionalidade privilegiam a matemática. Esta tem sido um instrumento selecionador de elites e não se pode ignorar o importante componente político nessas reflexões. Ninguém pode negar a distinção de classes existentes, tanto nos países centrais quanto nos periféricos. Dessa forma, podemos nos referir a uma “matemática dominante”, essa matemática e os que a dominam se apresentam com postura de superioridade, com o poder de deslocar e mesmo de eliminar a “matemática do dia a dia” (D'AMBROSIO, 2001).

Destacamos que D'Ambrosio não faz críticas à matemática. O autor afirma que a matemática é um dos fatores mais fortes do progresso social e suas proposições são referentes à ausência de questionamento que “coloca-se a serviço da estrutura de poder dominante, mantendo e reforçando as desigualdades e injustiças sociais [...]” (D'AMBROSIO, 1993, p. 15).

A partir desse contexto, podemos observar que a Etnomatemática possui múltiplas dimensões. Entretanto, há congruências nos estudos dos três autores e podemos destacar a dimensão histórica, a política e a cultural. Obviamente não é a intenção desta pesquisa definir um conceito para Etnomatemática, mas fundamentados nas reflexões acima, podemos inferir

que a inter-relação Matemática e Cultura constitui um importante componente para o ensino e a aprendizagem desta disciplina. Nenhuma das discussões ou definições sobre o programa de pesquisa Etnomatemática refuta a importância da relação entre Matemática e Cultura. Há um reconhecimento de que os conhecimentos matemáticos não se originaram e, ou desenvolveram de forma isolada, mas foram construídos ao longo do desenvolvimento histórico a partir de um contexto social e cultural.

Identificamos pesquisas que relacionam principalmente a Etnomatemática à Educação Diferenciada – Educação dos povos Indígenas, Educação Quilombola e Educação do Campo. Entretanto, as pesquisas com relação à Educação não Diferenciada e as conexões com a Cultura representam menor número. Sobre isso, Santos (2012) aponta que o ensino mediado pela cultura ainda sofre barreira social.

A este apontamento, acrescentamos que as relações Interculturais da Educação Básica no Brasil estão previstas também na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) n.º 9.394/96, o Art. 26–A, alterado pela Lei n.º 11.645/08 aponta que, “Nos estabelecimentos de ensino fundamental e de ensino médio, públicos e privados, torna-se obrigatório o estudo da história e cultura afro-brasileira e indígena” (BRASIL, 2008). O parágrafo segundo desta Lei prevê que os conteúdos referentes à história e à cultura afro-brasileira e dos povos indígenas brasileiros devem abranger todo o currículo escolar (BRASIL, 2008).

Dessa forma, a relação entre Matemática e Cultura não se apresenta apenas como uma estratégia de ensino ou de aprendizagem, mas também porque “[...] é necessário um currículo com bases multiculturais e interdisciplinares, para a transformação social, apresentando a escola, como o espaço em que se *aprende a aprender, a conviver e a ser com e para os outros*, contrariando um tipo de currículo que segrega” (SANTOS, 2018, p. 138).

Cabe esclarecer que essas exposições sobre a Etnomatemática fundamentam nossos estudos, mas não entrelaçam a prática das *rendas de bilros* a esse programa de pesquisa, uma vez que a Etnomatemática possui múltiplas dimensões e não as discutiremos a partir das AD propostas por Santos (2012).

É necessário trabalharmos com rigor didático-pedagógico o ensino da Matemática significado pela Cultura. Assim, procuramos encaminhar que a inter-relação Matemática-Cultura, seja pelos pressupostos da Etnomatemática ou pela significação de atividades a partir de práticas culturais – *rendas de bilros* e aprendizagem de *Isometria* – tem a contribuir na Educação Matemática, tanto com a Educação Diferenciada – Educação do Campo, Educação Indígena, Educação Quilombola e entre outras – como explicitado nas pesquisas de Gerdes

(1991) e Knijnik (2002) – quanto na Educação não Diferenciada, como em nossa pesquisa.

Com relação às AD, Mendes (2009a), assinala que a aprendizagem deve ser alcançada a partir das experiências e reflexões dos próprios estudantes. Dessa forma, a pesquisa (processo investigatório) deve estar no cerne da aprendizagem. As atividades devem possibilitar aos educandos a (re)descoberta do conhecimento a partir da elaboração e da verificação de hipóteses e da exploração do problema proposto. Pois é a partir do contato com situações-problema, quer sejam materiais ou não, que os estudantes podem ampliar o seu domínio cognitivo. Assim, “Os Estudantes devem participar da construção do seu próprio conhecimento de forma mais ativa, reflexiva e crítica possível, relacionando cada saber construído com as necessidades históricas, sociais e culturais existentes nele” (MENDES, 2009a, p. 116).

Neste contexto, Santos (2012) aponta que

As atividades didáticas elaboradas na tese podem ser usadas pelos professores nas salas de aula de Matemática para o ensino de Geometria e simetria, possibilitando uma reflexão de que a Matemática não se encerra em si mesma, mas ela deve ser vista como uma ciência dinâmica que pode ser ‘descoberta’ ou ‘descongelada’ nas relações com as práticas socioculturais, aqui especificamente nas relações com a prática das rendas de bilro. (SANTOS, 2012, p. 178).

A autora complementa que as conexões realizadas entre a Matemática e a criação de rendas de bilro nas AD possibilitam “construir um pensamento matemático imaginativo, contemplativo e mais complexo, capaz de perceber as matemáticas ‘escondidas’ em outras práticas socioculturais” (SANTOS, 2012, p. 179).

Sobre isso, D’Ambrosio (2011) aponta para a necessidade de abriremos as portas das “gaiolas epistemológicas” em busca de um conhecimento não compartimentado, mas sim a partir de uma visão transdisciplinar, uma vez que o conhecimento tem como fonte primeira a realidade na qual estamos imersos e não seguindo uma estruturação disciplinar. Dessa forma, o currículo de matemática deve partir de uma visão holística, levando em consideração o todo, favorecendo a transdisciplinaridade, que se apresenta como uma condição relevante para a construção do conhecimento. Santos (2012) corrobora o exposto ao afirmar que devemos trazer à tona uma Matemática viva, significativa e transversalizante, retomando por meio da transdisciplinaridade, a relação do saber científico com os saberes periféricos, no caso de nossa pesquisa, a aprendizagem dos conceitos de rotação, de translação e de reflexão significados pela prática histórico-cultural das rendas de bilros.

Com isso, as AD devem envolver saberes diversos favorecendo a transdisciplinaridade, como a percepção de padrões abstratos presentes nas rendas de bilros,

propondo uma releitura dos fenômenos da realidade a fim de desenvolver uma Matemática com base na prática sociocultural e histórica (SANTOS, 2012).

No tópico a seguir, discutimos sobre as transformações geométricas, especificamente translação, rotação e reflexão, apresentando definições e, ou conceitos matemáticos, bem como argumentando sobre o ensino da geometria, em especial sobre essas transformações.

2.1 As Transformações Geométricas: translação, rotação e reflexão

Fainguelernt (1999) enaltece que o estudo da Geometria é importante para o desenvolvimento do pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades fundamentais para leitura do mundo e para uma visão não distorcida da matemática. E ressalta que a visualização e a representação são habilidades essenciais nos processos de ensino e aprendizagem de Geometria. Citando Hershkowitz (1994), a autora assinala que

[...] o ensino de Geometria parte da visão da mesma como exploração e descrição do espaço, trabalhando concretamente no espaço real e realizando diferentes atividades que desenvolvem a visualização, a intuição, a percepção e a representação, além de permitir que o aprendiz realize a passagem do espaço real para o espaço teórico, chegando à visão da Geometria como uma estrutura lógica. (HERSHKOWITZ, 1994 *apud* FAINGUELERNT, 1999, p. 51).

Sobre a visualização, a autora afirma que se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais. Dessa forma, a visualização leva à representação do espaço e, utilizando o apoio verbal, aumenta a possibilidade de construir a prova em Geometria (FAINGUELERNT, 1999).

A fim de ilustrar e reforçar a importância da visualização na aprendizagem em Geometria, Fainguelernt (1999) aponta a teoria de Van Hiele, que é discutida em diversos estudos, na qual o primeiro nível é a visualização, que é um nível necessário para se desenvolver o pensamento geométrico.

Vieira (2017) assinala que na teoria de Van Hiele a visualização é uma das habilidades fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico, pois os educandos se apropriam das suas observações para identificarem os objetos que estão ao seu redor e para estabelecer os espaços que ocupam no seu todo.

A respeito da representação, Fainguelernt (1999) diz que essa representa

importante papel na aprendizagem da Geometria para o desenvolvimento do pensamento matemático, na construção de conceitos, nas habilidades fundamentais em Matemática e na elaboração de sistemas de representação. É fundamental, na construção de um conceito, partir da visualização e da intuição de dados concretos e experimentais, explorar as representações e as aplicações para, só então, chegar aos processos de abstração e generalização.

Corroborando com esse contexto, a BNCC (BRASIL, 2017) aponta que a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e de métodos fundamentais para resolver problemas do mundo físico e de distintas áreas de conhecimento. Dessa forma, prevê que o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais auxiliem o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos.

Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2017, p. 227).

Observamos no trecho supracitado um destaque para a simetria e, com relação ao estudo desse conceito nos anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2017) aponta a necessidade de aprofundar o trabalho realizado nos anos iniciais desse segmento de ensino. Dessa forma, a simetria deve ser relacionada aos conceitos de congruência.

Esses conceitos devem ser trabalhados, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes, e que utilizem esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético dedutivo (BRASIL, 2017).

Sobre isso, Santos (2012) aponta que

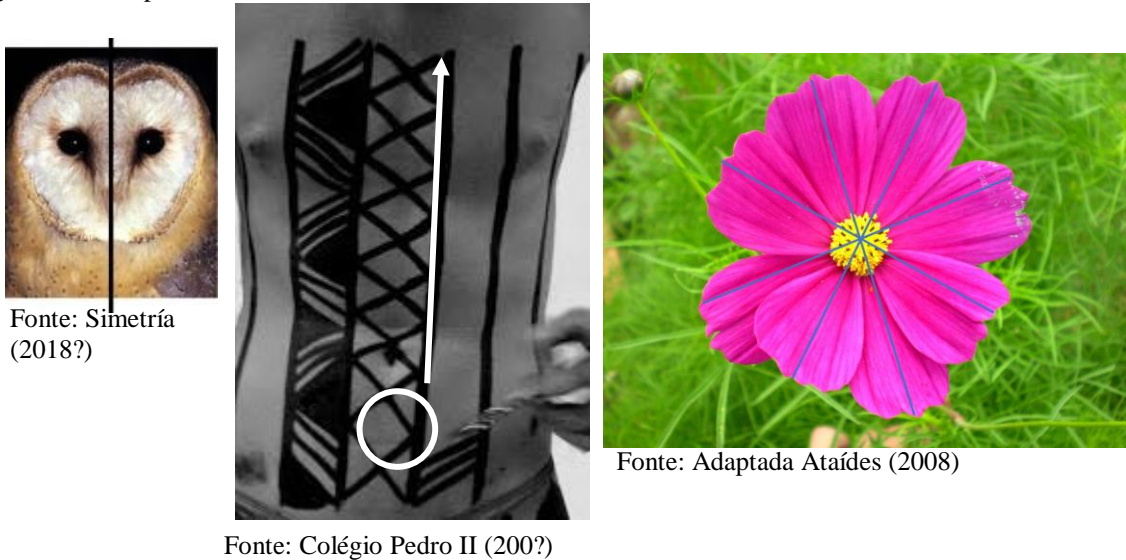
As atividades partiram da observação e identificação dessas transformações nas rendas de bilro. Assim, o estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) se constituiu no ponto de partida para a construção das noções de congruência, simetrias (SANTOS, 2012, p. 93).

De acordo com Alvarenga (2009), existem quatro tipos básicos de simetria: rotação, translação, reflexão e reflexão de escorregamento (ou inversão, também aparece em outros textos como reflexão deslizante). Nesta pesquisa, tratamos especificamente dos conceitos de rotação, translação e reflexão em relação a uma reta: simetria bilateral ou

simetria axial.

O conceito de simetria está intimamente relacionado aos padrões existentes na natureza, estética e arte. Historicamente a simetria está relacionada ao equilíbrio e a harmonia. Os variados padrões de simetria constituem uma forma de construção estética em fachadas, em esquadrias, em motivos decorativos na cerâmica, em rendas, em pavimentos, em portões, na azulejaria, na tapeçaria, em mobílias, no design gráfico e na arte em geral (ALVARENGA, 2009). Vejamos a Figura 3 a seguir.

Figura 3 – exemplos de simetria



Fonte: Simetria (2018?)

Fonte: Adaptada Ataídes (2008)

Fonte: Colégio Pedro II (200?)

Na Figura 3, à esquerda, podemos observar a simetria de reflexão presente na natureza: a linha preta que divide as partes refletidas da coruja representa o eixo de simetria, “funciona como um espelho”. No centro, o motivo destacado a partir da circunferência em branco se repete, como orienta a seta também em branco. Dessa forma, temos um exemplo de translação. Já à direita, podemos imaginar que a pétala realiza n giros em volta do botão, assim, o botão é o centro de rotação e a pétala realiza cada giro sob um ângulo α .

Discutimos a seguir as transformações geométricas – especificamente rotação, translação e reflexão em uma reta – a partir de exemplos que podemos identificar nas rendas de bilros.

2.2 Isometria e Simetria nas Rendas de Bilros

De acordo com Ledergerber-Ruoff (1982), o conceito de transformação

geométrica surgiu considerando os movimentos de corpos rígidos, ou seja, nesses movimentos o corpo não muda nem de tamanho, nem de forma, mas sim sua posição.

Dessa forma, temos que isometria é uma transformação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 que conserva distâncias, isto é, se Π é uma isometria, e P e Q dois pontos arbitrários e se $P' = (P)\Pi$ e $Q' = (Q)\Pi$, então $|PQ| = |P'Q'|$ (LEDERGERBER-RUOFF, 1982). Vejamos a demonstração de algumas propriedades:

- a) Toda isometria $\Pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma retas em retas;
- b) Toda isometria $\Pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares;
- c) Toda isometria $\Pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma bijeção, cuja inversa $\Pi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é ainda uma isometria;
- d) Toda isometria $\Pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma um ângulo em outro ângulo de mesma medida (LEDERGERBER-RUOFF, 1982; LIMA, 1996).

Como as isometrias preservam as medidas de segmentos e ângulos, temos que a imagem de uma figura K por uma isometria Π é uma figura K' congruente à K . Neste tópico, tratamos de três isometrias: translação, rotação e reflexão por uma reta – simetria bilateral.

De acordo com Alvarenga (2009), podemos identificar a translação a partir de um motivo (padrão) que se repete. Dessa forma, resulta no deslocamento de uma forma qualquer, de uma certa distância, ao longo de uma linha específica. Vejamos o exemplo na Figura 4 da renda de bilro a seguir.

Figura 4 – Movimento de translação identificado em um exemplar de renda de bilro

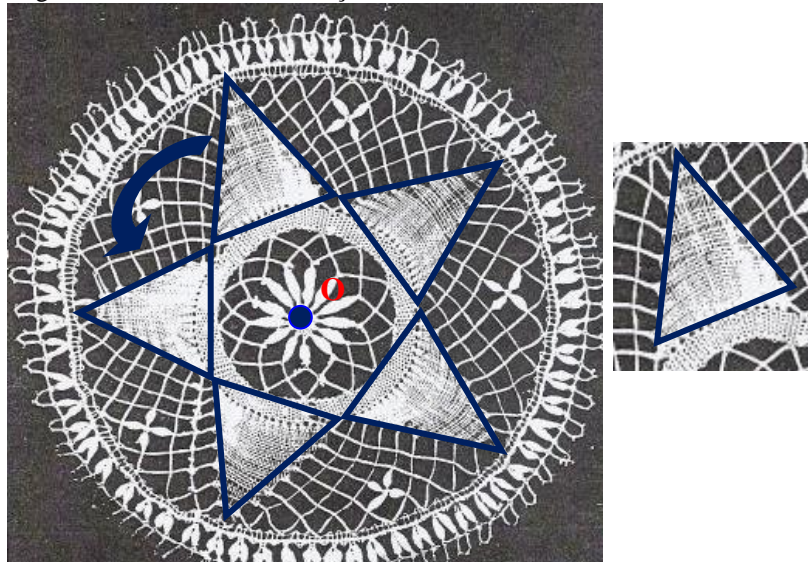


Fonte: Adaptada Santos (2012, p. 107)

O motivo destacado à direita se repete continuamente pela peça de renda, como indicado pela seta tracejada em branco, sem sofrer alterações em sua direção e seu sentido. Dessa maneira se desloca em uma linha.

Já com relação ao movimento de rotação temos que, dado um ponto fixo F no plano \mathbb{R}^2 e um ângulo de medida α , a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que associa o ponto F do plano \mathbb{R}^2 ao ponto F' . Nesse caso, o ponto F inicial gira em torno do ponto O , centro de rotação, segundo um ângulo de medida α em um sentido – sentido horário ou anti-horário (LEDERGERBER-RUOFF, 1982). Observamos na figura 5 a rotação que compreende o movimento de todos os pontos do motivo em torno do ponto O , chamado de centro de rotação.

Figura 5 – Movimento de rotação identificado na renda de bilro



Fonte: Adaptada Renda estrela. Girão (1984, p. 140) *apud* Santos (2012, p. 121)

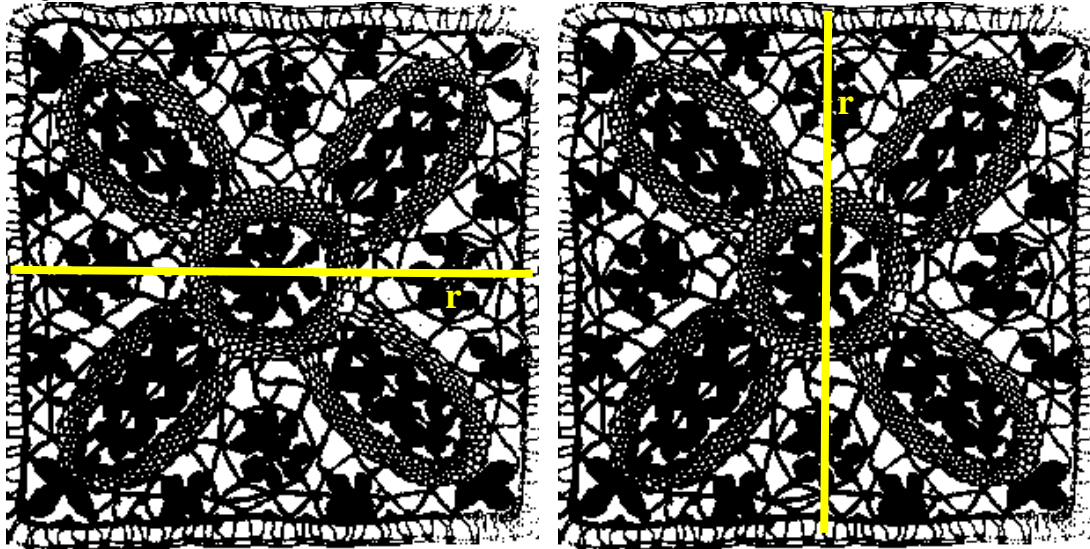
A Figura 5 da renda de bilro ilustra o movimento de rotação, à direita destacamos o motivo que realiza giros sob um ângulo α , a seta em azul indica a orientação do movimento no sentido anti-horário. Essa representação nos aproxima da relação entre as transformações geométricas e os padrões identificados nas rendas de bilro, uma prática cultural na qual podemos “descongelar” conceitos matemáticos como proposto por Gerdes (1991).

Sem muito rigor, Alvarenga (2009) define reflexão, ou simetria bilateral, como a simetria de um objeto colocada em frente a um espelho plano. A reflexão por uma reta é uma transformação geométrica que associa cada ponto P ao ponto P' , simétrico em relação a uma reta r . Dessa forma, na definição proposta por Alvarenga o espelho representa a reta r , denominada eixo de simetria.

Na Figura 6 da renda de bilro adiante podemos observar que, se dobrarmos a figura sobre o seu eixo de simetria, representado pela reta r , teremos uma sobreposição perfeita. Isso indica que a figura permanece inalterada após a aplicação da operação de simetria de reflexão, ao longo da sua linha central, eixo de simetria. De maneira análoga, a

reta r representa um espelho plano.

Figura 6 – Movimento de reflexão identificado na renda de bilro



Fonte: Adaptada Girão (1984, p. 140) *apud* Santos (2012, p. 121)

Com base nas figuras, identificamos construções Matemáticas a partir das formas e padrões presentes nas rendas de bilros, nesse sentido, essa Matemática congelada nas práticas sociais e culturais, aqui especificamente, a renda de bilro, serve como ponto de apoio para reorientarmos a Matemática escolar e aprendermos com mais significado os conteúdos (SANTOS, 2012).

Alvarenga (2002, p. 449) ainda informa que qualquer transformação geométrica exige alguns parâmetros. São eles: – A descrição geométrica do objeto (forma, posição); – Os atributos visuais do objeto (cores, linhas, padrões); – Outros atributos (que dependem da aplicação desejada); e, – O sistema de coordenadas, que diz onde estão os objetos.

A descrição e identificação desses parâmetros estão relacionadas às habilidades de visualização e representação, fundamentais para a aprendizagem em geometria. As atividades propostas por Santos (2012) recorrem constantemente a essas habilidades, a partir da visualização e descrição de padrões nas rendas de bilros, como expostos na Figura 6, bem como a representação desses padrões em malha quadriculada como proposto pelo pesquisador aos estudantes.

A seguir, apresentamos os trançados que constituíram nossa pesquisa, alinhavando cada ponto tecido para a estruturação desse estudo.

3 TRANÇADOS DA PESQUISA

De acordo com Santos (2012, p. 25), “[...] o método é o norte, a direção, o caminho, e, ao mesmo tempo, a avaliação e a medida do que pode ser conseguido em termos de conhecimento, além também de ser uma problematização prévia do próprio conhecimento.”

Assim, iniciamos nossos estudos a partir do levantamento da literatura sobre a temática pesquisada fundamentando-nos, principalmente, em Bishop (1999); D’Ambrosio (1993; 1996; 1997 e 2001); Gerdes (1991); Mendes (2009a e 2009b) e Santos (2012) no que diz respeito às relações entre Matemática e Cultura. Sobre o Ensino de Geometria e as Transformações Geométricas – rotação, translação e reflexão – apoiamo-nos em Alvarenga (2009); Fainguelernt (1999); Lima (1996); bem como, nos Parâmetros Curriculares Nacionais Matemática – PCNM (BRASIL, 1998) e na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017). Consultamos ainda os estudos de Santos (2016 e 2017) e Sousa et al. (2013) com relação à metodologia de ensino Sequência Fedathi (SF) e Mendes (2001; 2009a e 2009b) no intuito de compreender e justificar as Atividades Didáticas (AD).

Com relação ao ensino da matemática a partir da realização de AD, Mendes (2001, p. 57) afirma que “A proposta de ensino da Matemática baseado em atividades pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes em cada atividade.” Com isso, buscamos observar as congruências dessa discussão com a literatura consultada a respeito da inter-relação Matemática e Cultura e da aprendizagem da Geometria, em especial os conceitos de translação, rotação e reflexão, a fim de obter uma visão aprofundada do objeto em análise, com as AD a partir da SF.

3.1 A Metodologia Sequência Fedathi-SF: Análise de *plateau*

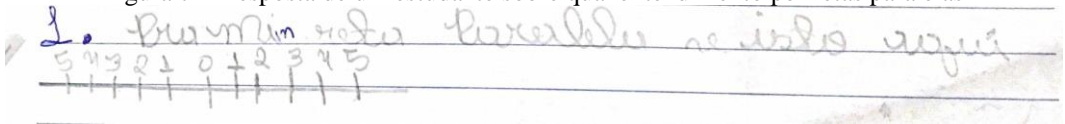
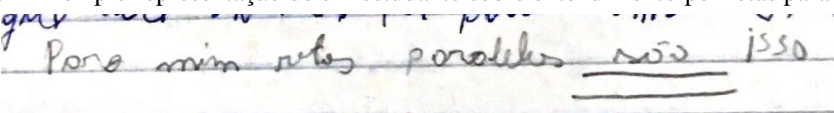
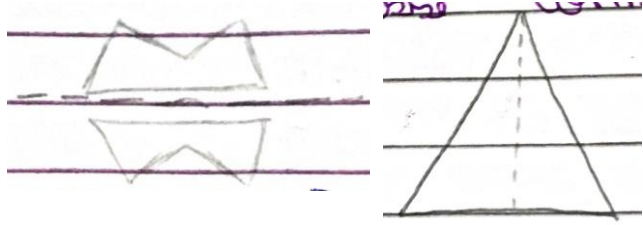
A metodologia de ensino SF se dá em quatro fases: I) Tomada de Posição, consiste na apresentação de uma situação desafiadora que pode ser na forma escrita, verbal, a partir de jogos ou de outra maneira, podendo ser realizada em grupo ou de forma individual; II) Maturação, momento no qual o estudante deve debruçar-se sobre a situação proposta, buscando identificar e compreender as variáveis envolvidas. Nesse instante o professor deve mediar, levantando questões que auxiliem os educandos na compreensão da situação proposta; III) Solução, consiste no momento em que os estudantes apresentam suas soluções ao grupo, nessa fase o docente desempenha o papel de contra-argumentar, apresentando

contraexemplos, com o intuito de ampliar e consolidar os conhecimentos, bem como esclarecer possíveis dúvidas; por fim, IV) Prova – representa a verificação, por parte do discente, da solução encontrada, nesse momento o professor faz analogias com os modelos científicos preexistentes e formaliza a solução matematicamente (SANTOS, 2016).

A SF prevê um planejamento –SD – que deve levar em consideração: a) análise ambiental, materiais disponíveis e necessários para a realização das atividades, bem como questões relacionadas ao espaço físico; b) a análise teórica, conhecimento acerca do saber científico estudado; e c) análise do *plateau*, nível de conhecimento e experiência do aluno (SANTOS 2016).

Assim, realizamos a análise do *plateau* com os estudantes do 9.º do Ensino Fundamental anos finais, sujeitos dessa pesquisa, em 2018, dos 30 alunos que compunham a turma 26 estavam presentes. No Quadro 2 a seguir, expomos os dados obtidos a partir da investigação com os 26 estudantes do 9.º ano do Ensino Fundamental anos finais.

Quadro 2 – Análise do *plateau* com alunos do 9.º ano do ensino fundamental anos finais a partir dos pressupostos da Sequência Fedathi-SF.

I. O que você entende por paralelismo? E retas paralelas?
<p>1 aluno representou uma reta numérica, a Figura 7 é um recorte da atividade e expressa como o estudante respondeu.</p> <p>Figura 7 – Resposta de um estudante sobre qual entendimento por retas paralelas</p>  <p>Fonte: Acervo do autor a partir das respostas dos estudantes</p>
<p>4 alunos responderam a partir de um desenho, quando questionados explicaram que as retas não podem “se encontrar.” Como expresso na Figura 8.</p> <p>Figura 8 – Exemplo representação de um estudante sobre entendimento por retas paralelas</p>  <p>Fonte: Acervo do autor a partir das respostas dos estudantes</p>
<p>15 alunos escreveram que são retas que não se cruzam</p>
<p>6 alunos informaram não conhecer sobre o assunto.</p>
II. Quais suas noções sobre simetria? Recorda se já estudou esse assunto? O que você lembra?
<p>18 alunos informaram que não sabiam ou não tinham conhecimento sobre o conteúdo</p>
<p>8 alunos representaram a partir de desenhos, como na Figura 9.</p> <p>Figura 9 – Exemplo de representação dos estudantes sobre seus conhecimentos sobre simetria</p>  <p>Fonte: Acervo do autor a partir das respostas dos estudantes</p>
III. Para você o que é translação, rotação e reflexão? Já estudou sobre esse assunto? Diga o que você

lembra.
13 alunos informaram que não sabiam ou não tinham conhecimento sobre o conteúdo.
5 alunos explicaram que translação é o movimento da Terra em torno do Sol e rotação é o movimento da Terra em torno do seu próprio eixo, mas não apresentaram ideias sobre reflexão.
7 alunos explicaram que translação é o movimento da Terra em torno do Sol e rotação é o movimento da Terra em torno do seu próprio eixo, e reflexão diz respeito a algo que está refletido.
1 aluno explicou que translação é o movimento da Terra em torno do seu próprio eixo e rotação é o movimento da Terra em torno do Sol e não apresentou ideias sobre reflexão.

Fonte: primária.

No livro didático do 9.º ano do Ensino Fundamental anos finais (9.º ano), esse conteúdo não estava mais presente e um número maior de estudantes, dezoito alunos, expressou não ter conhecimento sobre o assunto. Em meio ao debate dentro dos grupos, alguns estudantes buscaram outras estratégias para responder as questões, apresentando figuras para representar suas compreensões.

Após a análise do *plateau*, elaboramos uma SD (VER APÊNDICE A), estruturada a partir de cinco AD propostas por Santos (2012). Para a SF, o ponto de partida, na fase da Tomada de Posição, é a apresentação de uma situação desafiadora. Dessa maneira, de acordo com a proficiência apresentada pelos alunos na análise do *plateau*, inferimos que cada AD foi classificada nesse pressuposto - uma situação desafiadora.

3.2 Instrumentos de Coleta/ Análise de Dados

Nossas análises foram definidas a partir da discussão entre os objetivos deste estudo e os resultados das mediações-observações, coletados e obtidos a partir do Diário de Campo, roteiro de observação, fotos e as respostas fornecidas pelos estudantes nas AD propostas por Santos (2012), tanto na forma oral como nos materiais produzidos: cartazes e representações de figuras geométricas e dos movimentos de transformações geométricas – rotação, translação e reflexão – em papel quadriculado.

No Apêndice A, apresentamos a SD com o planejamento de cada AD desenvolvida para/com os estudantes, bem como as referências de vídeos e demais materiais que foram utilizados. Mais adiante, discorreremos sobre as observações e análises de forma detalhada dessas Atividades.

O Diário de Campo, utilizado para as anotações das observações realizadas pelo pesquisador, encontra apoio em Cruz Neto (1994) quando enfatiza que o instrumento demanda uso sistemático que se estende desde o primeiro momento da ida a campo até a fase final da investigação. Nele os pesquisadores registram suas percepções, angústias,

questionamentos e informações. Quanto mais rico for em anotações nesse Diário, maior será o auxílio à descrição e à análise do objeto estudado.

Cruz Neto (1994) salienta a associação do Diário de Campo a outras técnicas de pesquisa. Assim, elaboramos um roteiro de observação (VER APÊNDICE B) a fim de otimizar a observação das atividades. Entretanto, frisamos que esse roteiro não é restritivo e as observadoras possuíam liberdade para anotar todas as informações que considerassem necessárias.

As mediações e observações foram realizadas em cinco encontros, durante às terças-feiras, nas datas expressas no Quadro 3 compreendendo, assim, o mês de março e a primeira semana de abril. Os encontros ocorreram nas duas aulas após o intervalo. Cada aula possuía 50 minutos, totalizando 1h40min para cada mediação-observação.

Quadro 3 – Cronograma das mediações-observações

1.º dia de mediação-observação	06/03/2018
2.º dia de mediação-observação	13/03/2018
3.º dia de mediação-observação	20/03/2018
4.º dia de mediação-observação	27/03/2018
5.º dia de mediação-observação	03/04/2018

Fonte: Elaborado pelo autor

No primeiro dia de mediação-observação (06/03/2018), realizamos a atividade 1 (VER APÊNDICE A – Atividade 1) que consistia na manipulação de um tetraminó a partir do *software* de edição gráfica *LibreOffice Impress*. Para essa atividade, contamos com o apoio dos profissionais da Universidade Aberta do Brasil (UAB) que trabalham no polo que está sediado no prédio da escola e autorizaram que utilizássemos o Laboratório de Informática (LI) que pertence à UAB, pois a escola não possui o LI. Além da Atividade 1, iniciamos a atividade 2 apresentando aos estudantes um vídeo sobre a prática das rendas de bilros, peças de rendas de bilros e um roteiro de investigação, para discussão no próximo encontro.

O segundo encontro (13/03/2018) foi realizado na sala onde os alunos estudam diariamente. Retomamos a atividade 1, porém utilizando recursos analógicos – peças de tetraminós recortadas em papel cartolina – em seguida discutimos o roteiro de investigação sobre as rendas de bilro – Atividade 2 (VER APÊNDICE A – Atividade 2). Logo após, apresentamos aos estudantes as instruções e objetivos da Atividade 3 (VER APÊNDICE A – Atividade 3), na qual os estudantes deveriam representar no papel quadriculado as formas geométricas que observavam nas peças de rendas de bilros e, ao final, iniciamos a atividade 4 (VER APÊNDICE A – Atividade 4), que consistia na representação, no papel quadriculado,

dos movimentos de rotação, translação e reflexão que os estudantes enxergassem nas peças das rendas de bilros.

No terceiro encontro (20/03/2018), os estudantes formaram um total de 9 grupos de 3 ou 4 integrantes, produziram cartazes expondo suas compreensões sobre os conceitos de translação, rotação e reflexão – atividade 5 (VER APÊNDICE A – Atividade 5) – realizamos discussões, em alguns momentos de forma individual com cada grupo, em outros com a turma como um todo, retomando as atividades que havíamos construído até então e os conceitos que estávamos estudando: translação, rotação e reflexão. Entre as discussões e produção dos cartazes, utilizamos todo o tempo do terceiro encontro (1h40min). Dessa forma, deixamos as apresentações para o quarto encontro.

Devido uma organização interna da escola, houve uma redução no tempo das atividades para o quarto encontro (27/03/2018) e, por questões pessoais, as observadoras não compareceram para colaborar com as atividades. Assim, reorganizamos o cronograma e para essa data realizamos a Atividade 6 (VER APÊNDICE A – Atividade 6) – Consolidação da aprendizagem.

No último dia de mediação-observação (03/04/2018), realizamos a apresentação dos cartazes que foram produzidos pelos estudantes durante a Atividade 5. Também retomamos as demais atividades realizadas enfatizando os conceitos de rotação, translação e reflexão. Com base na SF, essa retomada permitiu verificar, a partir da exposição oral por parte dos estudantes, os conceitos compreendidos, bem como as lacunas conceituais que ainda persistiam. Dessa forma, revisamos os conceitos no intuito de consolidar a aprendizagem durante a fase da prova a partir dos modelos matemáticos existentes relacionando-os com a prática cultural das rendas de bilros.

No capítulo a seguir, discorreremos sobre o desenvolvimento das AD junto aos estudantes, os resultados obtidos, bem como as análises desses resultados.

4 APRESENTAÇÃO DAS ANÁLISES DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS-AD

Neste capítulo, arrazoamos sobre o desenvolvimento das AD e a análise da construção do conceito de simetria pelos estudantes com base na abordagem dos conceitos de rotação, translação e reflexão a partir de Alvarenga (2009), bem como nos trabalhos de Fainguelernt (1999) e Mendes (2009a; 2009b). A partir das observações dos registros no diário de campo e das respostas fornecidas pelos estudantes em cada uma delas, expomos um quadro que sintetiza as análises do desenvolvimento das atividades e a construção do conceito de simetria por parte dos sujeitos investigados.

4.1 Atividade 1 – Poliminós

Como já explicitado anteriormente, a atividade foi realizada no Laboratório de Informática (LI) da Universidade Aberta do Brasil (UAB), pois a escola não possui o LI, porém há um polo da UAB no mesmo prédio e os responsáveis autorizaram a utilização do espaço e dos computadores para realizar a atividade. Dos 30 sujeitos matriculados na turma de 9.º ano do ensino fundamental anos finais, 29 estavam presentes durante a atividade.

Iniciamos após o intervalo às 09h10min, os alunos foram direcionados para a sala e apresentamos a atividade a partir de um diálogo sobre o roteiro de investigação com relação aos conhecimentos deles acerca das transformações geométricas – translação, rotação e reflexão que havíamos realizado em fevereiro de 2018 – análise do *plateau*.

Dessa forma, os questionamos se lembravam do assunto que tratava o roteiro de investigação, alguns estudantes responderam que se tratava sobre o que já haviam estudado sobre simetria, questionamos se após a discussão em sala e até aquele momento eles tiveram curiosidade em pesquisar sobre o tema e de maneira geral informaram que não.

Figura 10 – Apresentando os poliminós e a Situação desafiadora



Fonte: Acervo do autor.

Em seguida, utilizando um *Datashow*, apresentamos para os estudantes um breve texto (VER APÊNDICE A – Atividade 1) sobre os polígonos e em seguida as orientações para a primeira atividade e a apresentação da situação desafiadora, como segue expresso anteriormente na Figura 10.

4.1.1 Dificuldades iniciais

Durante o planejamento da atividade, partimos da hipótese que os educandos não teriam dificuldades com relação ao manuseio do computador e uso do *software*, por ser tratar de um programa de interface simples e de fácil acesso.

Nos seis anos em sala de aula, realizei outras tarefas com meus alunos utilizando o LI sem muitas dificuldades (volto a utilizar a primeira pessoa do singular neste parágrafo por se tratar de minhas experiências como professor). Em SP, com uma turma da 3.^a série do Ensino Médio da modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA), construímos gráficos de funções do 2.^o utilizando o *Microsoft Office Excel*. No CE, com turmas da 2.^a série do Ensino Médio, construímos gráficos das funções seno e cosseno utilizando o *LibreOffice Calc*, programa similar ao Excel, porém é gratuito. Ao longo do desenvolvimento dessas atividades os alunos também relataram dificuldades com relação ao *software* utilizado, mas as superaram rapidamente e isso não interferiu no aproveitamento da atividade.

Esses são dois exemplos de atividades que vivenciamos no LI e que nos levaram à hipótese que as dificuldades com relação ao *software* seriam superadas e não interfeririam no desenvolvimento da atividade com os alunos do 9.^o ano do Ensino Fundamental anos finais. Entretanto, o desconhecimento da tecnologia se apresentou como obstáculo para o desenvolvimento da atividade, pois os alunos não conheciam o programa e logo foram citando que não utilizavam computadores. Muitos relataram que o principal meio para acessar a internet era o celular e a finalidade desse acesso eram as redes sociais. Também questionamos os educandos sobre o contato com o sistema operacional *Linux* e todos afirmaram ser o primeiro contato com esse sistema. Esse fato foi surpreendente. O julgamento inicial da rápida superação por parte dos educandos, como nas experiências anteriores, foi precipitado e o tempo destinado à atividade foi se dissolvendo nas instruções para o uso do *software*.

Sobre isso, D'Ambrosio (2001) aponta que a sociedade atual é multicultural e está impregnada de tecnologia, devendo esses fatores serem amplamente discutidos e incluídos na educação básica. Mendes (2009b) informa que o computador exerce um papel decisivo no ensino de matemática, pois oportuniza a construção de modelos para a Matemática

imaginária.

Mas, isso ainda não se configura como uma realidade para a educação brasileira. Quase 20 anos após as previsões de D'Ambrosio para a educação brasileira, o computador ainda não é realidade nas salas de aula. Atualmente os *Smartphones* ocupam um espaço de destaque na sociedade e nas possibilidades de uso como um recurso pedagógico, mas as desigualdades acentuadas do nosso país não permitem afirmar que todos possuem condições de possuir um *Smartphone*.

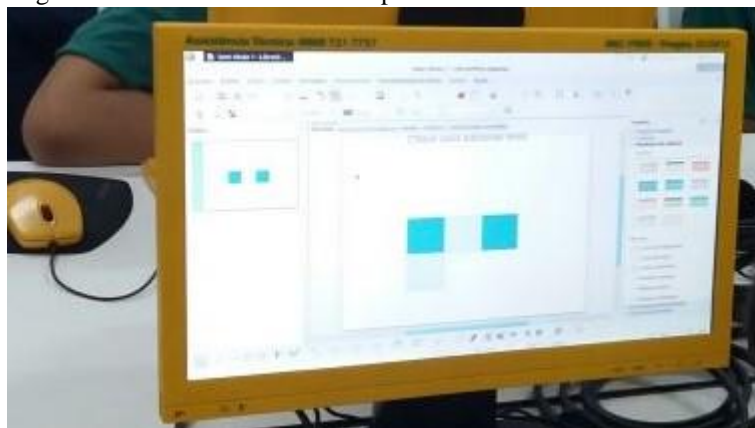
Kenski (2015) afirma que o acesso a partir de celulares e smartphones são a principal forma utilizada para as pessoas se conectarem, mas ressalta que na realidade digital brasileira o que fica evidente é a desigualdade nas condições de acesso e uso dos recursos e dispositivos disponíveis na internet, e que essa desigualdade interfere na qualidade de vida, na cultura e, sobretudo, na educação no país.

No tópico a seguir, expomos os desdobramentos das dificuldades dos estudantes com relação ao *software* e como superamos esse obstáculo para o desenvolvimento da atividade.

4.1.2 Caminhos e descaminhos da atividade

Cada ação da atividade precisou ser acompanhada individualmente. Nesse momento, passamos (as duas observadoras e o pesquisador) em cada computador auxiliando os alunos a construírem o quadrado, utilizando o *software LibreOffice Impress*, determinar a medida do lado igual a 3 cm, copiar e colar os outros quadrados a fim de obter a figura de um tetraminó. Os estudantes que acabaram de construir a figura foram auxiliando na orientação dos outros e conseguimos construir a Figura

Figura 11 – Tetraminó construído pelos alunos



Fonte: Acervo do autor

Havíamos planejado 1 hora e 20 minutos para realizar a atividade, entretanto, devido as intercorrências com relação ao uso do *software*, o tempo foi redimensionado, restando assim 60 minutos para desenvolver a atividade. Dessa forma, nos concentramos na seguinte tomada de posição: determinar a área e o perímetro do tetraminó desenhado, rotacionar a figura e relatar quais alterações a figura sofreu.

Durante o tempo de maturação da atividade, os alunos apresentaram dificuldades em determinar a área do tetraminó. Dessa maneira, questionamos: “Como vocês determinaram o perímetro da figura?” Um aluno respondeu que “somando os lados”. Questionamos quais exemplos do cotidiano eles poderiam citar que representassem a ideia de soma dos lados ou do perímetro de uma figura, apareceram respostas como os muros de um terreno, cerca de terrenos e um aluno afirmou que “o perímetro é como o contorno da uma figura”.

Partindo da ideia que o perímetro representava o contorno da figura, questionamos o que seria a área, a primeira resposta foi “a área é o todo”. Questionamos também o que seria esse todo e um aluno explicou que era como preencher uma área e esfregou as palmas da mão explicitando como ele entendia esse preenchimento. Então questionamos como determinar a área de uma figura. Imediatamente surgiu a resposta “base vezes a altura” e, em seguida, “o lado ao quadrado”. Questionamos se essa era a solução para todas as figuras e pedimos para que eles refletissem sobre a figura construída e no que havíamos discutido e que tentassem novamente determinar a área da figura.

Destacamos que esses questionamentos fazem parte das premissas da metodologia SF. Santos (2016) aponta que uma das maiores contribuições da metodologia se dá nas fases de maturação e solução, as quais normalmente não ocorrem em sala de aula, uma vez que é comum o professor apresentar situações e resolvê-las, sem dar a oportunidade ao educando de experimentar, descobrir e construir sua própria solução.

Mendes (2009a) corrobora ao afirmar que o ensino a partir de atividades deve levar em consideração o processo investigatório, a pesquisa como princípio da aprendizagem, possibilitando aos educandos a experimentação e investigação de situações-problema que os levem a compreensão do “que” e o do “porquê” da matemática investigada.

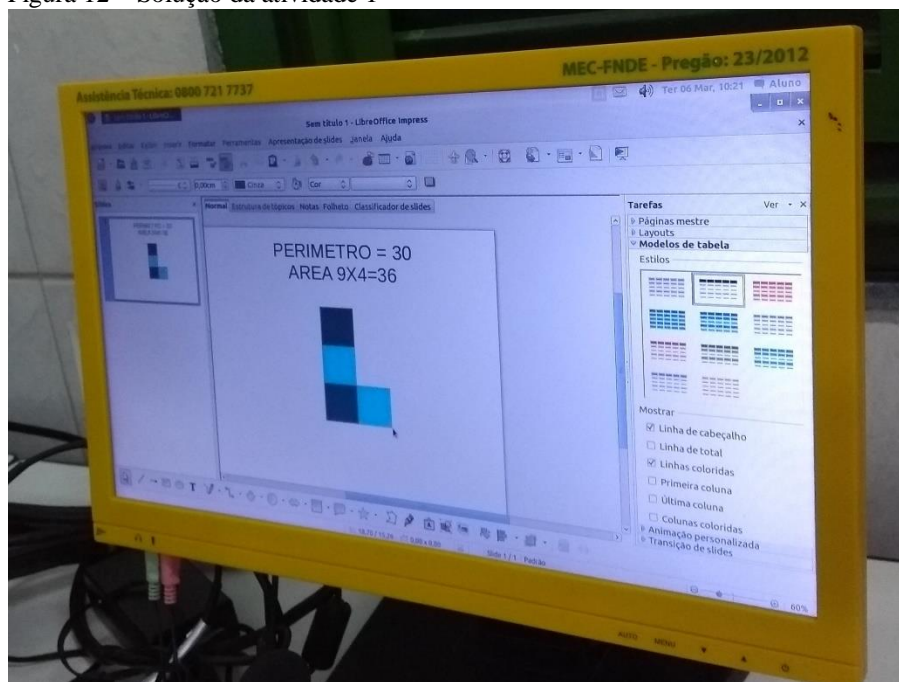
No momento da solução, os alunos expuseram os resultados obtidos e como determinaram a área e o perímetro da figura para determinar o perímetro unanimemente os educandos partiram da ideia de “somar os lados”.

E para o cálculo da área, os alunos decidiram determinar a área de um quadrado e multiplicar por quatro, já que a figura era formada por quatro quadrados congruentes. Alguns

alunos apresentaram dificuldades com relação à multiplicação e apareceram três resultados: 32, 36 e 37. Questionamos qual o valor da área daquele quadrado, e a resposta de todos os estudantes foi 9. Em seguida formalizamos que $4 \times 9 = 36$.

Logo após, solicitamos aos alunos que utilizando a ferramenta “rotacionar” girassem a figura 90° e questionamos se a figura havia sido alterada. Imediatamente os alunos responderam que sim. Um aluno, em seguida, disse que não, e surgiu a dúvida se havia ou não alteração na figura. Questionamos o que aconteceu com a figura e os alunos relataram que agora o tetraminó estava “em pé” como segue na Figura 12.

Figura 12 – Solução da atividade 1



Fonte: Acervo do autor

Então questionamos qual o valor da área e perímetro do tetraminó “em pé” os alunos disseram que o mesmo, pois a figura só havia mudado de posição. Voltamos a perguntar se a figura havia sido alterada e dessa vez afirmaram que não, ela apenas havia mudado de posição.

Encerramos a atividade com um vídeo sobre as rendas de bilros e rendeiras da região do Cariri – Ceará e um roteiro de pesquisa (VER APÊNDICE A – ATIVIDADE 2) que relatamos mais à frente. Antes apresentamos a atividade 1.1.

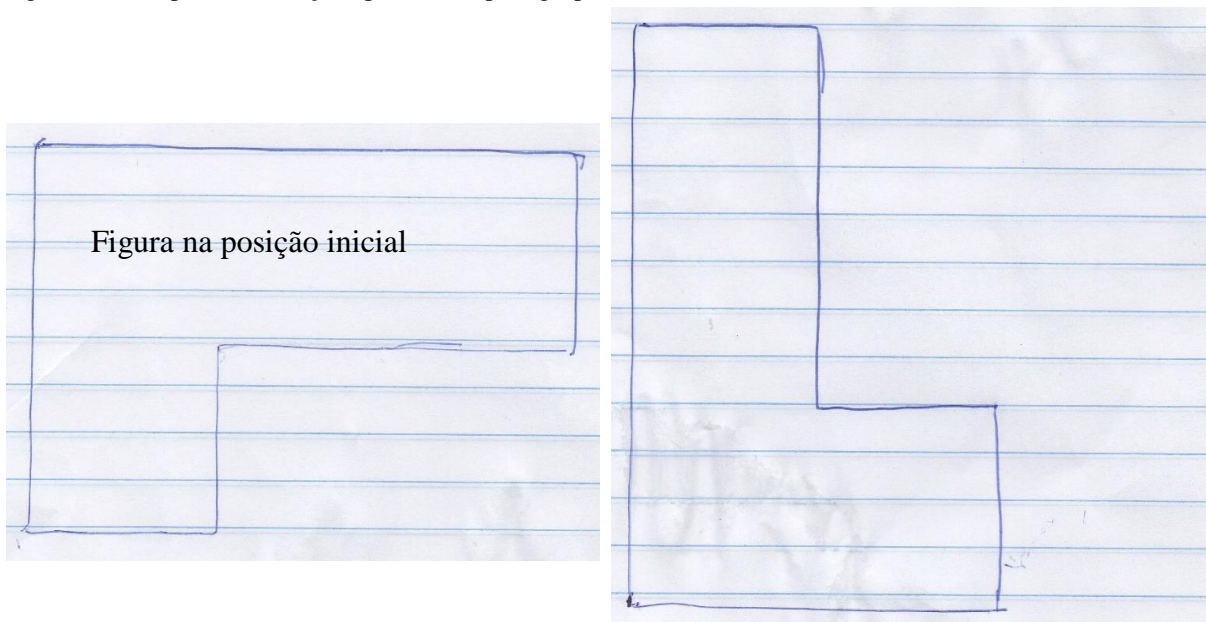
4.2 Atividade 1.1 – Poliminós (material analógico)

Como relatado acima, o desenvolvimento da Atividade 1 passou por uma série de intercorrências com relação ao uso do *software* e apesar de realizar parte do que estava proposto, alguns debates foram aligeirados e tivemos aproximadamente 50 minutos para discutir sobre a rotação da figura. Assim decidimos repetir a atividade, mas em sala de aula, utilizando material analógico, peças de tetraminós recortadas em cartolina.

Iniciamos solicitando que os alunos se organizassem em 9 grupos de 3 ou 4 integrantes. Dos 30 alunos matriculados, 28 estavam presentes. Distribuímos uma peça de tetraminó para cada aluno, utilizamos um Datashow para projetar o desenvolvimento da atividade. Nos concentramos novamente na tomada de posição I (VER APÊNDICE A) para determinar a área e o perímetro da figura, realizar um giro de 90° , no sentido horário e observar as mudanças.

Para representar a rotação da figura, os alunos decalcaram a peça de tetraminó em uma posição, realizaram o giro e voltaram a decalcar a peça. Dessa vez, além do giro de 90° os alunos deveriam ficar atentos ao sentido. O grupo A apresentou a seguinte resposta:

Figura 13 – Proposta de solução apresentada pelo grupo A



Fonte: Acervo do autor

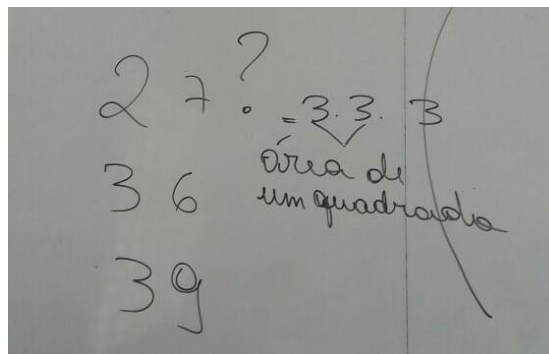
Questionamos como haviam feito o giro? Um dos integrantes do grupo A posicionou a peça novamente sobre a folha e explicou “que se a peça estiver ‘deitada’ quando gira 90° ela fica ‘em pé’, e se estiver ‘em pé’ quando gira ela fica ‘deitada’”

Então o questionamos sobre o sentido, “qual o movimento do relógio?”. O mesmo aluno girou o dedo representando o movimento feito pelo ponteiro do relógio e então perguntamos se o desenho realmente correspondia a um giro de 90° no sentido horário. Novamente o aluno girou o dedo no sentido horário, observou a folha e respondeu que não, percebendo que havia realizado o giro no sentido anti-horário.

Essas observações do aluno estão previstas na SF no momento da maturação. Dessa forma, ele deve se debruçar sobre o problema de maneira que possa pensar, tentar, errar e colaborar com seus colegas. Nesse momento, a partir das solicitações do aluno, o professor pode apresentar contraexemplos e levantar hipóteses que possibilitem ao aprendiz reflexões que lhe proporcionem maior possibilidade de encontrar uma solução (SANTOS, 2016).

No momento da solução, utilizamos o quadro para anotar as respostas dos alunos, conforme ilustra a Figura 14, com relação ao perímetro eles apontaram que somaram os lados e não houve incongruências no resultado obtido. Já sobre a área houve três resultados: 27; 36 e 39.

Figura 14 – Momento da solução da atividade



Fonte: Acervo do autor

Iniciamos as discussões pelo resultado igual a 27. O grupo B afirmou que calculou a área de um quadrado e depois multiplicou por três. Questionamos por que multiplicaram por três e uma integrante do grupo respondeu “não sei, são quatro quadrados, deveria ter multiplicado por quatro”.

Então questionamos o grupo C que obteve o resultado igual a 39. Eles informaram que haviam calculado a área de um quadrado, como o lado do quadrado media três centímetros, calcularam “ $3 \times 3 = 9$ ” e, já que eram quatro quadrados, multiplicaram “ $4 \times 9 = 39$ ”. Nesse momento, questionamos sobre o resultado da multiplicação e eles perceberam que o resultado era 36.

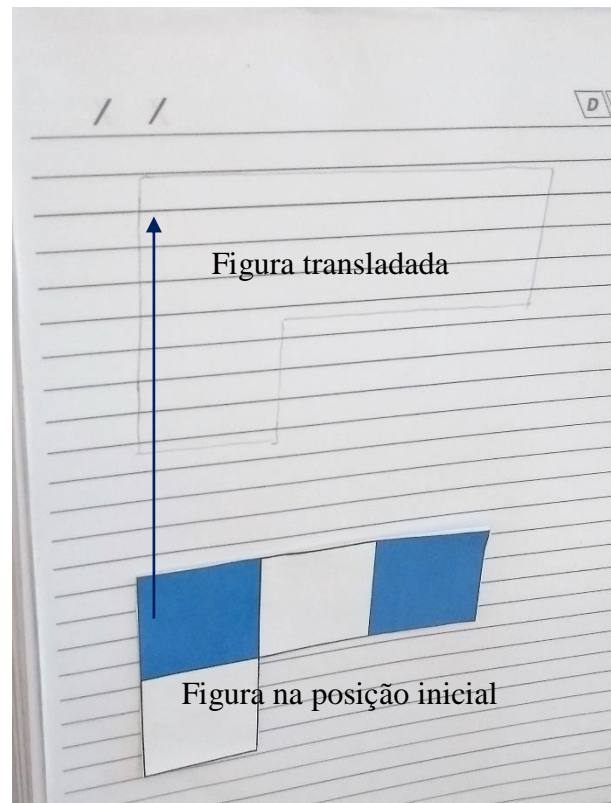
Os estudantes apresentam essa confusão também em outras atividades. Nas demais atividades que são realizadas em sala de aula, hipoteticamente, eles decoraram alguns resultados referente à tabuada e, quando realizam cálculos, informam o resultado que se lembram. Foi necessário questioná-los a fim de solicitá-los que contassem novamente para que percebessem a ausência de atenção. Alguns estudantes esperam os resultados e quando precisam responder algo que envolve a multiplicação e/ou a divisão questionam de imediato qual o resultado.

Em seguida, iniciamos as discussões sobre o movimento do giro da peça de tetraminó. Relembramos sobre os conceitos que estávamos estudando, transformações geométricas, especificamente, translação, rotação e reflexão; e questionamos o que eles haviam pesquisado ou se haviam pesquisado algo em relação ao tema. Os grupos informaram que não haviam pesquisado. Então perguntamos o que eles entenderam a partir da atividade e solicitamos que expusessem suas deduções.

Três, dos 9 grupos, apresentaram dificuldades com relação ao sentido do giro e haviam girado a figura 90° no sentido anti-horário como exposto anteriormente na Figura 13. Fizemos o mesmo questionamento sobre o movimento dos ponteiros do relógio no intuito de que os estudantes refletissem sobre os problemas relacionados à lateralidade, e alguns alunos fizeram gestos com os dedos, demonstrando o movimento realizado pelo ponteiro e corrigiram o sentido do giro.

Na sequência, questionamos os alunos sobre os outros movimentos que estávamos estudando, translação e reflexão, e solicitamos que dessem algum exemplo. Apenas um grupo expressou o que entendia sobre translação, dizendo que é como se o objeto “escorregasse”, alterando sua posição, mas sem alterar sua forma e explicaram isso a partir do desenho, representado pela Figura 15 a seguir:

Figura 15 – Exemplo do movimento de translação



Fonte: Acervo do autor

Na análise do *plateau*, observamos que os alunos apresentaram menor familiaridade sobre o movimento de reflexão. 19 dos 30 alunos investigados afirmaram, no roteiro de investigação (VER QUADRO 2), desconhecer o assunto. Na atividade, a ausência do conceito ficou mais evidente, pois nenhum grupo expressou seu entendimento ou noções sobre reflexão.

Essa constatação chamou-nos a atenção. Alvarenga (2009) afirma que a simetria por reflexão é encontrada de maneira abundante na natureza e que é conhecida como a simetria dos espelhos. Os espelhos são objetos comuns no cotidiano, utilizamos espelhos diariamente, a escola onde os alunos estudam possui espelhos em todos os banheiros. Voltando para a análise do *plateau*, 3 alunos associaram o movimento de reflexão a “algo que está refletido”, porém no momento da solução da atividade suas impressões sobre o movimento de reflexão eram tímidas ou ausentes.

Então questionamos sobre um objeto, algo do dia-a-dia, que eles pudessem associar ao nome “reflexão”. Dois alunos responderam ao mesmo tempo “o espelho”. Nesse

momento, as dúvidas se apresentaram nos rostos dos estudantes: alguns franziram a testa, outros ergueram a sobrancelha e de alguns foi possível ouvir um “ah...”, exclamando em sinal de compreensão ou esclarecimento.

Como o foco da atividade 1.1 era o movimento de rotação, apenas iniciamos um debate sobre os outros movimentos que estávamos estudando e deixamos para retomar as discussões na atividade 4. Em seguida, iniciamos a atividade 2, que é apresentada adiante.

4.3 Atividade 2 – Investigação Sobre a Renda de Bilro

Iniciamos a atividade ainda no LI, no primeiro encontro (cronograma apresentado anteriormente no Quadro 3), exibindo um vídeo⁴ no qual as rendeiras da região do Cariri, localizada no sul do estado do Ceará. Elas expõem, de maneira breve, a história da renda de bilro, como são feitas e um pouco sobre o dia-a-dia do trabalho com as rendas.

Apresentamos aos estudantes algumas peças de rendas de bilros, como segue na Figura 16:

Figura 16 – Contado dos estudantes com a renda de bilro



Fonte: Acervo do autor

Os alunos relataram não conhecer as rendas de bilros, alguns afirmaram nunca terem ouvido falar. Essas considerações iam ao encontro do objetivo da atividade, aproximar os educandos ao fazer das rendas de bilros. Dessa maneira, apresentamos o roteiro de investigação para que os alunos pesquisassem e discutíssemos na aula seguinte.

Na semana seguinte à exibição do vídeo, no segundo encontro, realizamos o

⁴ Jornal Futura - Renda de Bilro 11/03/2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3_0-ePmDH2w> acesso: 05 de março de 2018.

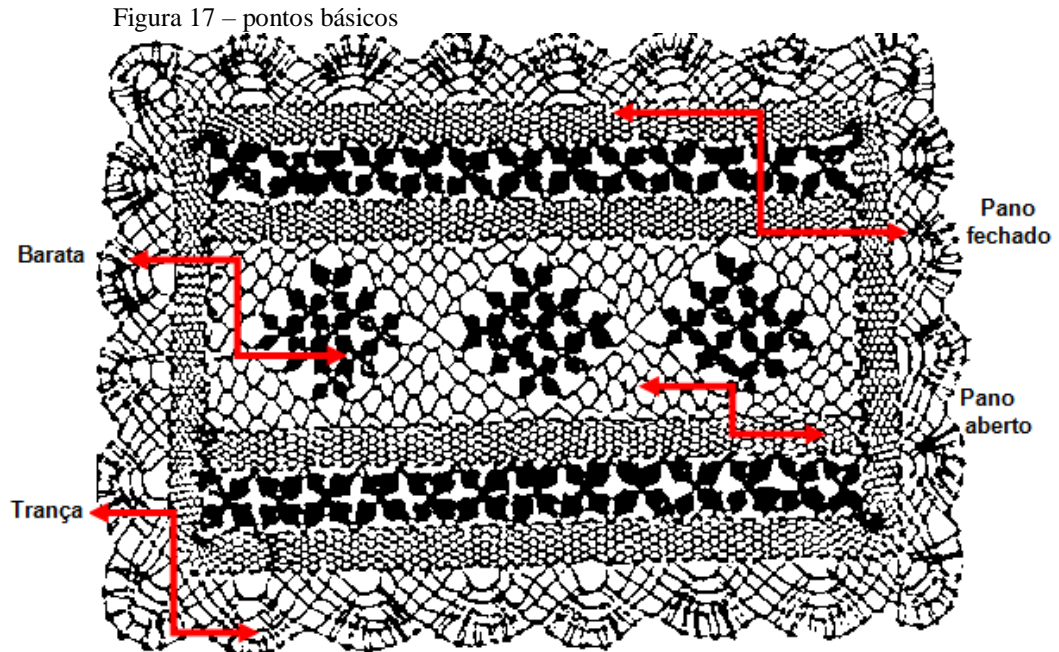
debate sobre o roteiro de investigação apresentado para os educandos no primeiro dia de mediação-observação. No momento da discussão, utilizamos um *Datashow* para projetar as questões do roteiro no quadro branco. Conforme líamos cada questão, os alunos iam expondo o que encontraram em suas pesquisas. No Quadro 4 a seguir, expomos uma síntese das respostas fornecidas pelos alunos.

Quadro 4 – Investigação sobre a renda de bilro

1. Qual a origem da renda de bilro?
De maneira comum os estudantes relataram que não há precisão sobre a origem da renda de bilro, acredita-se que tenha se originado na Europa e a disseminação das rendas no Brasil se deu a partir dos colonizadores portugueses.
2. Quais os instrumentos necessários para se fazer a renda de bilro?
A partir do que observaram no vídeo e da consulta realizada os estudantes identificaram: a linha, os bilros, a almofada, os alfinetes – ou como apresentado no vídeo, no Ceará são substituídos por espinhos do mandacaru – e o papelão.
3. Quais os pontos comuns praticados no trançado das rendas de bilros?
Alguns alunos encontraram que são três tipos de pontos básicos e outros encontraram cinco pontos, entretanto informaram que não identificaram que pontos são esses e nem souberam informar a fonte consultada.
4. Que tipos de rendas foram encontradas na pesquisa?
Os estudantes identificaram as rendas pesquisadas a partir do formato que possuem e relataram que encontraram modelos mais comuns que são quadrados, circulares e, ou retangulares, como também peças de roupas: vestidos, camisetas e outros.
5. Quanto tempo demora para se fazer uma peça das mais simples?
Os alunos relataram que alguns textos trazem informações sobre a morosidade do fazer renda, um trabalho que requer muita dedicação de tempo. Entretanto, não há uma informação clara de quanto tempo demora para concluir uma peça e isso também está relacionado com o tamanho da peça e os padrões escolhidos. Alguns encontraram informações que demora cerca de um mês e um estudante relatou cinco meses, mas não souberam identificar a fonte, apenas informaram que encontraram na <i>Internet</i> .
6. Quais as situações matemáticas observadas na prática da rendeira?
As respostas foram variadas e os estudantes perceberam diversas situações matemáticas na prática das rendeiras. Algumas respostas eram mais genéricas como “tudo é sobre medida”. Uma estudante relatou as operações de multiplicação e divisão, relacionando a quantidade linha para se fazer peças de tamanhos diversos, relataram também sobre o movimento dos bilros como movimentos que se repetem, seguindo um padrão.
7. Quais os padrões geométricos identificados nas rendas de bilro?
Os estudantes identificaram formas geométricas, principalmente o quadrado, o retângulo e o círculo, tanto nos formatos das peças, como nos trançados que compõe a renda. Identificaram também os desenhos que compõe as rendas como flores e relataram novamente que os trançados se repetem seguindo um padrão.

Fonte: Elaborado pelo autor

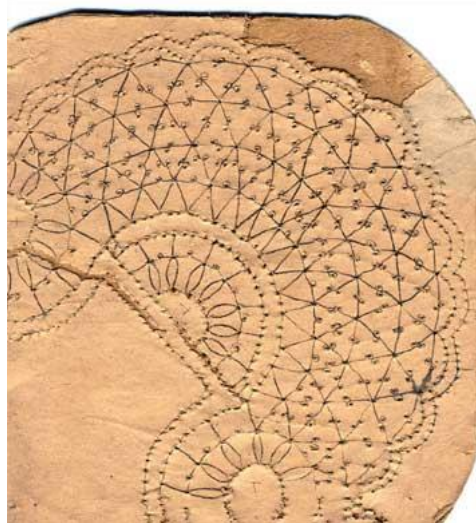
Conforme os estudantes iam expondo suas observações, utilizamos o *Datashow* para projetar imagens para exemplificar e esclarecer o que haviam encontrado em suas pesquisas. A Figura 17 exemplifica os pontos básicos, principalmente o pano fechado, pano aberto e trança, presentes na maioria das peças de rendas de bilros (SANTOS, 2012).



Fonte: Santos (2012, p. 52)

Já na Figura 18 temos exemplos do modelo (desenho) pinicado no papelão.

Figura 18 – Papelão pinicado



Fonte: A arte das rendas de bilros (2007)

Observamos que os estudantes demonstraram entusiasmo em conhecer mais sobre as rendas. Eles queriam ver e pegar os modelos que levamos como exemplo, se mostravam menos tímidos para expor o que haviam pesquisado e mais curiosos em relação às imagens

que foram projetadas no quadro. Como havia relatado que não conheciam as rendas de bilros a partir da pesquisa, o debate em sala de aula e a exposição das imagens e vídeo eles puderam conhecer um pouco sobre essa arte.

Sobre isso, Santos (2012) recomenda que intelectuais de outras áreas de conhecimento lancem novos olhares acerca das possibilidades diversas de aplicação que permeiam a prática da confecção das rendas de bilros, olhando-a como uma prática sociocultural e histórica que se apresentou como um suporte pedagógico para auxiliar o desenvolvimento de um aprendizado mais significativo de alguns conteúdos matemáticos da educação básica, especialmente a Isometria.

Dessa maneira, finalizamos a atividade 2 e na sequência iniciamos a terceira atividade, que apresentamos na próxima seção.

4.3 Atividade 3 – Identificação e Conceitualização das Formas/ Padrões

Na sétima questão do roteiro de investigação sobre as rendas de bilros, da atividade 2, os estudantes citaram as formas e padrões geométricos observados nas rendas. Na atividade 3, os estudantes desenharam, no papel quadriculado, as formas observadas.

Para realizar a atividade (VER APÊNDICE A – ATIVIDADE 3), os alunos continuaram nos 9 grupos de 3 ou 4 integrantes. entregamos uma folha de papel quadriculado para cada aluno e utilizando o Datashow, projetamos imagens das rendas de bilros, bem como entregamos aos estudantes as rendas que trouxemos de exemplo.

Os estudantes não apresentaram dificuldades na atividade 2 para identificar as formas geométricas e os padrões visualizados nas rendas de bilros. Entretanto apresentaram dificuldades para representar os desenhos no papel quadriculado.

Muitos não adotaram uma escala e realizaram os desenhos considerando apenas o que viam na renda e a forma geométrica que queriam representar. Dessa maneira, as representações não ficaram uniformes. Partimos da hipótese que os estudantes tivessem conhecimento do trabalho com a malha quadriculada e o conceito de escala ou a necessidade de adotar uma não foi priorizado no momento da orientação da atividade. Essa hipótese foi confirmada por uma parcela da turma, que consideraram um “quadrado” da malha como unidade padrão para realizar a representação das formas geométricas.

Mas a maior parte da turma refutou essa hipótese e informou que não se atentou para esse conceito. Na Figura 19 a seguir, podemos observar dois padrões identificados por dois grupos. Em ambos não foi adotada uma escala, porém os estudantes conseguiram

caracterizar o padrão observado e como elaboraram o desenho.

Figura 19 – Padrões observados nas rendas de bilros



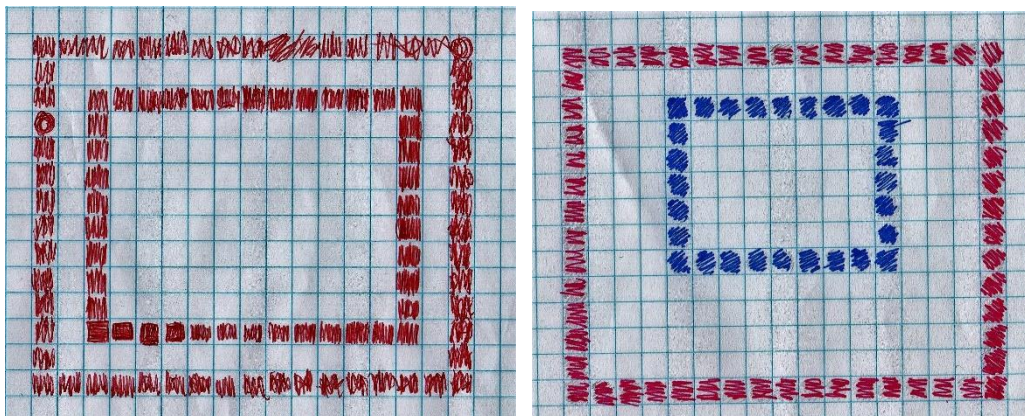
Fonte: Acervo do Autor

Na Figura 20, temos exemplos de retângulos que os alunos observaram a partir de uma das imagens que foi projetada no quadro, à esquerda o grupo argumentou que contou os “quadrinhos” do papel para realizar o desenho, já à direita o outro grupo relatou que apenas desenhou dois retângulos como visualizaram na renda.

Figura 20 – Formas geométricas: Retângulos

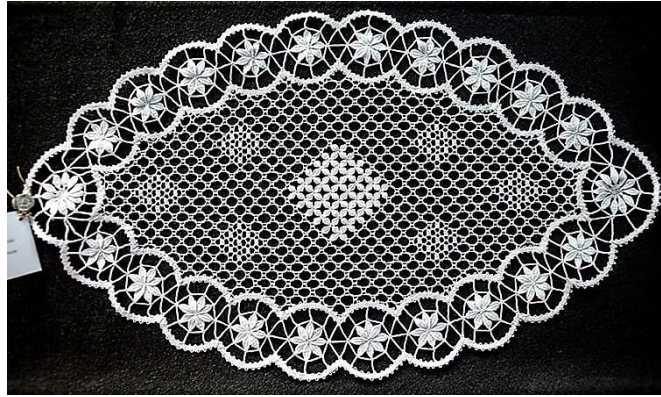


Fonte: Renda de bilros (200?)

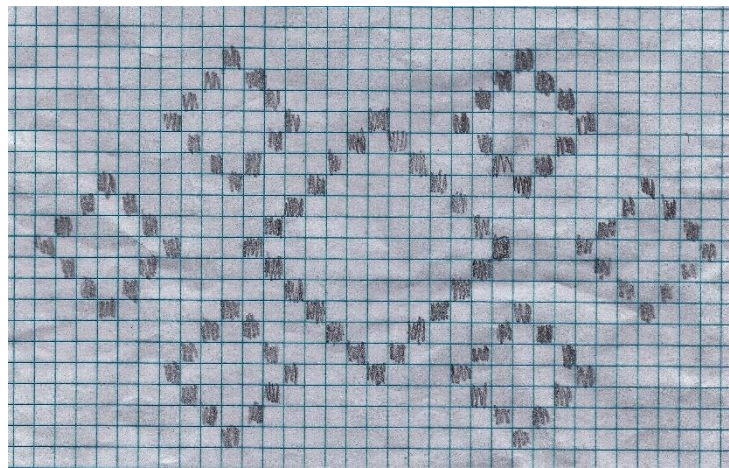


Fonte: Acervo do autor

Figura 21 – Formas geométricas: Quadrados



Fonte: Campelo (2016)



Fonte: Acervo do autor

Já na Figura 21, o grupo observou quadrados em uma outra imagem de renda que foi projetada no quadro. O grupo também relatou que contou os “quadrinhos” para que tivessem a mesma distância, como podemos verificar na Figura 21.

De maneira geral, os alunos apresentaram quadrados e retângulos como as formas geométricas e padrões similares aos expostos na Figura 20. A diferença entre os trabalhos dos grupos estavam na adoção ou não de uma escala e, principalmente, na compreensão ou não do que é adotar uma escala, uma medida padrão ou uma unidade de medida.

Outro fator que influenciou na realização dos desenhos foi a ausência de materiais próprios para o trabalho com desenho (régua, esquadro, compasso e transferidor). Mendes (2009a) assinala que esses materiais são imprescindíveis ao desenvolvimento de atividades pedagógicas e favorecimento da construção conceitual. Não obstante, as observadoras relataram que a exposição não foi tão clara por parte do professor/ pesquisador, influenciando na compreensão da atividade por uma parcela da turma, como salientado acima os estudantes não foram orientados sobre a adoção da escala.

Sobre isso, Mendes (2009a) aponta que uma orientação sólida por parte do

professor oportunizará aos estudantes maturarem o desenvolvimento de uma compreensão mais ampla das propriedades e aplicações matemáticas sobre o assunto estudado. Dessa forma, a atividade refletiu resultados também na aprendizagem do professor/ pesquisador.

Durante o debate e exposição dos desenhos, alguns grupos demonstravam compreender que deveriam adotar uma unidade de medida a partir dos “quadrados” da malha quadriculada e relataram não terem feito devido a facilidade de apenas rascunhar o desenho na malha. Enquanto outros realmente não haviam compreendido o que seria adotar uma escala para realizar o desenho.

A exposição dos trabalhos e a apresentação por parte dos grupos oportunizou identificar essa dificuldade, bem como discutir a respeito para melhor compreensão dos que apresentavam dificuldades. Mendes (2009a) assinala que as atividades que possibilitam a discussão entre o professor e os estudantes ou somente entre os estudantes certamente favorecem o desenvolvimento da compreensão.

Partilhar os desenhos entre os grupos foi muito importante para os estudantes, pois puderam comparar as diferenças de quando se tem uma unidade de medida e quando simplesmente se faz um rascunho na malha quadriculada.

Finalizadas as apresentações dos grupos, iniciamos a atividade 4. Vejamos a seguir.

4.4 Atividade 4 – Conceito de Simetria

Para realizar a quarta atividade, os estudantes permaneceram nos 9 grupos de 3 ou 4 estudantes novamente entregamos uma folha de papel quadriculado para cada aluno e utilizando um *Datashow* projetamos imagens de rendas de bilros no quadro.

Antes de iniciar a atividade, voltamos ao debate que havíamos iniciado ao final da Atividade 1.1 sobre os movimentos de rotação, translação e reflexão. A atividade com os poliminós abordou o conceito de rotação. Nessa atividade, os estudantes apresentaram menor dificuldade sobre esse conceito. O maior obstáculo ainda era o movimento de reflexão.

Retomamos a discussão a partir do objeto do cotidiano que representa a ideia de reflexão, como um dos estudantes já havia citado, o espelho. Assim, questionamos se a imagem refletida no espelho é alterada de alguma forma. No questionamento levamos em consideração o espelho plano. Os estudantes relataram que a imagem não sofre alterações.

Em seguida, questionamos o que aconteceria se colocássemos um espelho embaixo de uma cadeira e um estudante respondeu que a cadeira ficaria de “ponta cabeça”.

Então questionamos novamente se a figura é alterada de alguma forma? E o mesmo aluno respondeu que muda a posição da figura, mas não o tamanho.

Sobre a translação e rotação, os alunos já apresentavam ideia de que a figura tinha suas dimensões preservadas e que os movimentos alteravam a sua posição. Alguns estudantes já associavam os dois movimentos ao movimento de translação e rotação da terra, como expuseram inicialmente no roteiro de investigação do *plateau*.

Com isso, solicitamos aos estudantes que discutissem agora em grupo e respondessem a atividade. A partir das rendas de bilros, tanto as que foram entregues para que pudessem analisar como as que estavam sendo projetadas no quadro, os grupos deveriam criar três exemplos, um para cada movimento que estávamos estudando.

Na Figura 22 a seguir, os estudantes identificaram duas unidades padrão e representaram os movimentos de translação, o qual explicaram como “deslizamento” ou “escorregamento” da figura e o movimento de rotação, em que relataram que a unidade padrão destacada dá “giros” em torno da renda.

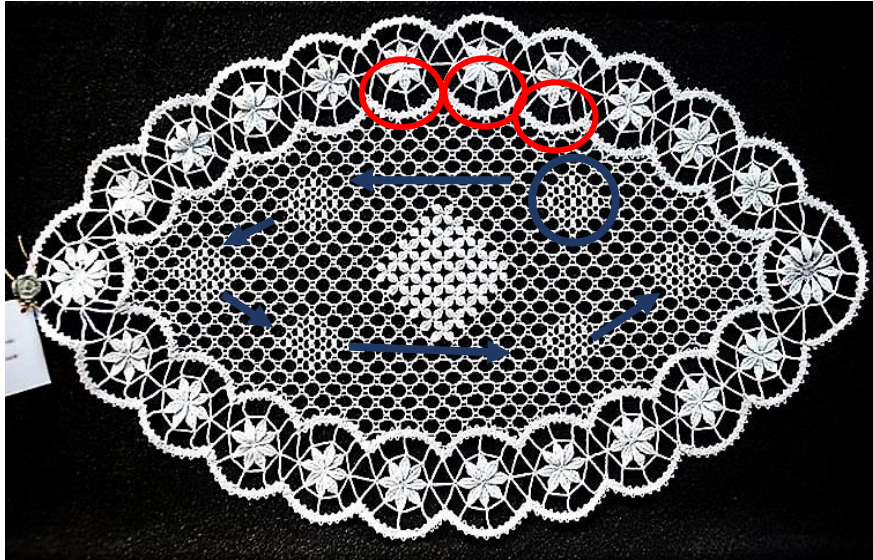
Figura 22 – Padrões destacados pelos alunos e representação dos movimentos de translação e rotação



Fonte: Acervo do autor

Vejamos na renda de bilro (Figura 23) o padrão destacado em azul e as setas que indicam o padrão “deslizando” pela renda, representando o movimento de translação. E o padrão destacado em vermelho, os estudantes argumentaram que “adotaram metade da roda” como unidade padrão que realiza “giros” em torno da renda, representando o movimento de rotação.

Figura 23 – Movimento de translação e rotação

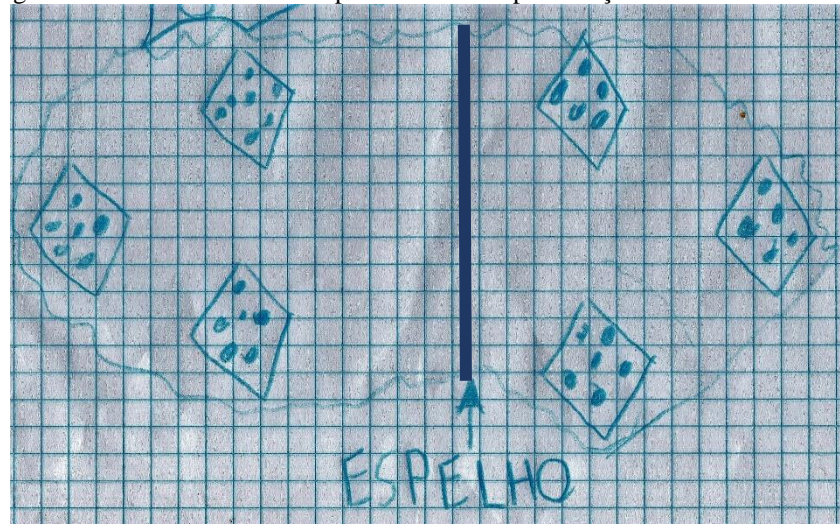


Fonte: Adaptada Campelo (2016)

Um dos grupos representou o movimento de reflexão como exposto na Figura 24 adiante. O desenho não possui escala e não há a mesma distância entre as figuras que o compõe, os estudantes representaram o “espelho” por uma seta, a qual frisamos com uma barra azul. Questionamos os estudantes sobre o “espelho”. Eles relataram que poderia ser onde estava indicado pela seta, um pouco mais para um lado ou pouco mais para o outro.

Durante as discussões da atividade 1.1, os estudantes não deram exemplos ou explicaram o que entendiam sobre reflexão. Ainda não havíamos estudado sobre o movimento e apenas discutido ligeiramente que o espelho é um objeto que podemos associar a simetria de reflexão. Dessa forma, os estudantes ainda não apresentaram noções sobre o eixo de simetria, mas começaram a produzir pequenos esboços do que compreendiam ser reflexão.

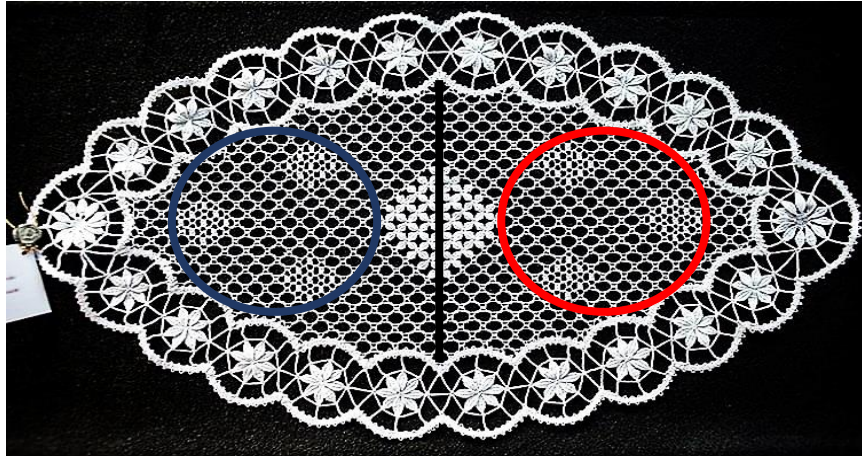
Figura 24 – Padrões destacados pelos alunos e representação do movimento de reflexão



Fonte: Acervo do autor

Vejam na figura 25 o padrão adotado pelos alunos destacado em azul e o reflexo destacado em vermelho. A barra destacada em preto representa o eixo de simetria.

Figura 25 – Movimento de reflexão



Fonte: Adaptada Campelo (2016)

Ainda que as discussões acerca do movimento de reflexão tenham sido superficiais, alguns grupos conseguiram determinar um padrão e o reflexo desse padrão, apresentaram a ausência de conceitos, eixo de simetria, que ainda não havíamos estudado, mas que seriam aprofundados mais à frente.

Assim, finalizamos a atividade solicitando aos estudantes que estudassem e pesquisassem sobre os conceitos vistos durante a aula, especificamente as transformações geométricas: translação, rotação e reflexão, a pesquisa deveria ser feita individualmente em sala partilhariam as informações na semana seguinte, quando retomariamos as atividades, a partir da Atividade 5 com a elaboração e apresentação dos cartazes sobre os conceitos estudados, que apresentamos a seguir.

4.5 Atividade 5 – Ampliando os Conceitos Construídos

Seguindo o mesmo desenvolvimento das atividades anteriores, os alunos se organizaram em grupos de 3 ou 4 estudantes. Novamente entregamos folhas de papel quadriculado para cada aluno, porém dessa vez não utilizamos o *Datashow*. Os estudantes receberam as instruções da atividade de forma impressa e cartolinas para confeccionar os cartazes.

Iniciamos a atividade a partir de uma discussão sobre o que já havíamos estudado

e questionamos sobre o que pesquisaram e se haviam pesquisado. Dos 30 alunos matriculados, 28 estavam presentes e se organizaram em 9 grupos. A mesma formação foi repetida desde a primeira atividade os grupos não alteraram os integrantes. Desses, dois grupos não haviam realizado a pesquisa.

Os outros sete grupos apresentaram maior interesse e organização que nas atividades anteriores, trouxeram materiais para a produção dos cartazes como lápis de cor, canetinhas, cola e tesoura, bem como as anotações das pesquisas que haviam realizado. Como não utilizamos o Datashow, fixamos as três peças de renda de bilros, que utilizamos como exemplo durante as outras atividades, no quadro. Como segue na Figura 26.

Figura 26 – Peças de Rendas de Bilros



Fonte: Acervo do autor

Durante a elaboração das atividades, acompanhamos os estudantes e fomos questionando sobre eventuais dúvidas, sobre como realizaram as pesquisas e o que haviam compreendido e pesquisado. Para a SF, o momento da maturação deve ser acompanhado pelo professor a partir de perguntas reflexivas e contraexemplos, possibilitando aos aprendizes realizar experimentações, conjecturas e testagem de suas respostas de maneira que construam seu conhecimento a partir da investigação (SANTOS, 2016).

Os estudantes trouxeram anotações com definições sobre os conceitos de rotação, translação e reflexão. Foram sintetizando essas informações e escrevendo nos cartazes. Para cada conceito que haviam pesquisado, criaram uma figura como exemplo. O desenvolvimento da atividade levou mais tempo do que havíamos programado: tínhamos 1h40min para construção dos cartazes e apresentação, havíamos dividido em 40 minutos para a elaboração dos cartazes e 1 hora para as apresentações e discussões.

Entretanto, o tempo foi consumido durante a elaboração dos cartazes e não

conseguimos realizar as apresentações no mesmo dia. Além desse contratempo, na semana seguinte também não seria possível realizar as apresentações devido a uma programação interna da escola e, portanto, o tempo para as apresentações seria reduzido.

Dessa forma, combinamos com os estudantes de inverter a ordem das atividades, realizar a avaliação primeiro e, na semana posterior, as apresentações dos cartazes. Concordamos que seria uma oportunidade para discutir também sobre a avaliação e eventuais dúvidas. Com isso, apresentamos a seguir a atividade 6 e só depois a apresentação dos cartazes, que chamamos de Culminância.

4.6 Atividade 6 – Consolidação da aprendizagem

A Atividade 6 foi realizada de forma individual. Dessa maneira, cada estudante recebeu uma folha contendo as questões a serem resolvidas (VER APÊNDICE A – ATIVIDADE 6). A mediação foi feita também de maneira individual, não houve exposição dos resultados obtidos nessa atividade, mas o pesquisador passou nas mesas dos estudantes questionando os sobre as respostas e debatendo sobre as dúvidas que foram surgindo.

Damos ênfase às duas primeiras questões, uma vez que a terceira questão trata do conceito de rotação e os estudantes apresentaram menor dificuldade ou outro tipo de intercorrência para resolvê-la, pois, desde a terceira atividade, observamos uma menor dificuldade deles com relação a esse movimento.

Para responder as duas questões, os estudantes deveriam observar a Figura 27 a seguir e: 1) determinar exemplos de transformações isométricas no plano – translação, rotação e reflexão – seguindo o padrão observado na figura ou de outras figuras, caso preferissem; 2) construir uma faixa utilizando o papel quadriculado seguindo um padrão igual ao da Figura 27 ou outro padrão que preferissem.

Figura 27 – Faixa de Renda de Bilros

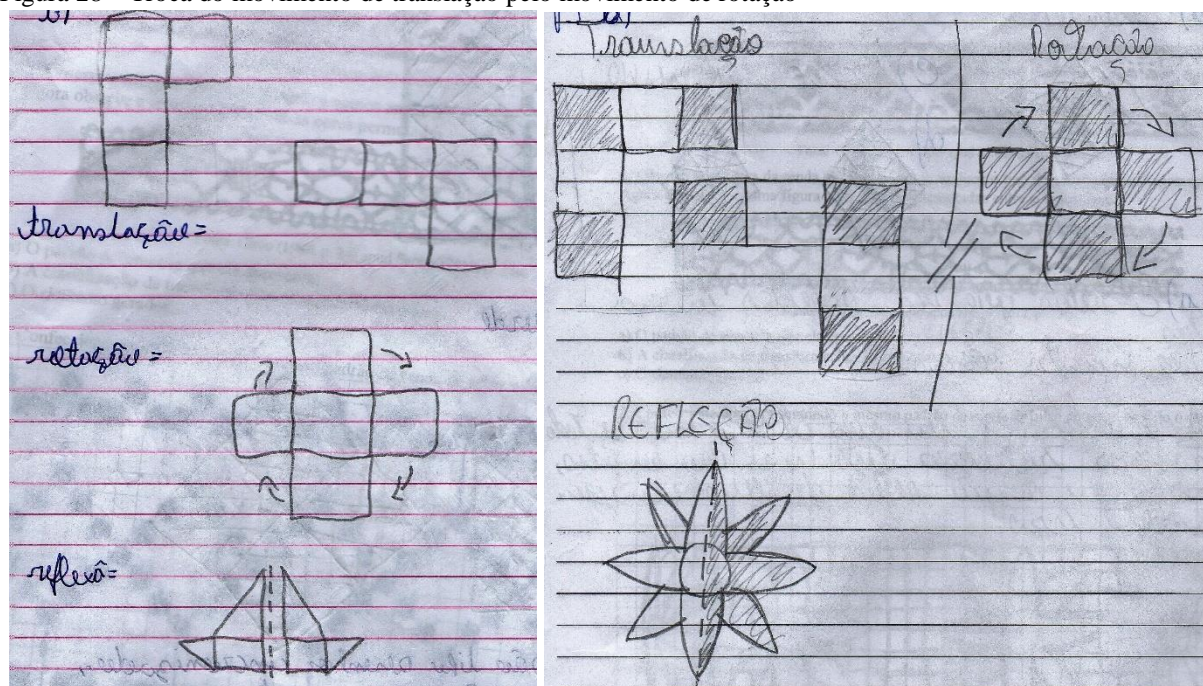


Fonte: Girão (1984, p. 260) *apud* Santos (2012, p. 162)

Na primeira questão, de modo geral, os estudantes conseguem explicar e exemplificar o movimento de rotação. Já com relação ao movimento de translação, alguns

alunos ainda apresentaram alguns equívocos. Na Figura 28, os estudantes confundiram o movimento de translação com rotação.

Figura 28 – Troca do movimento de translação pelo movimento de rotação

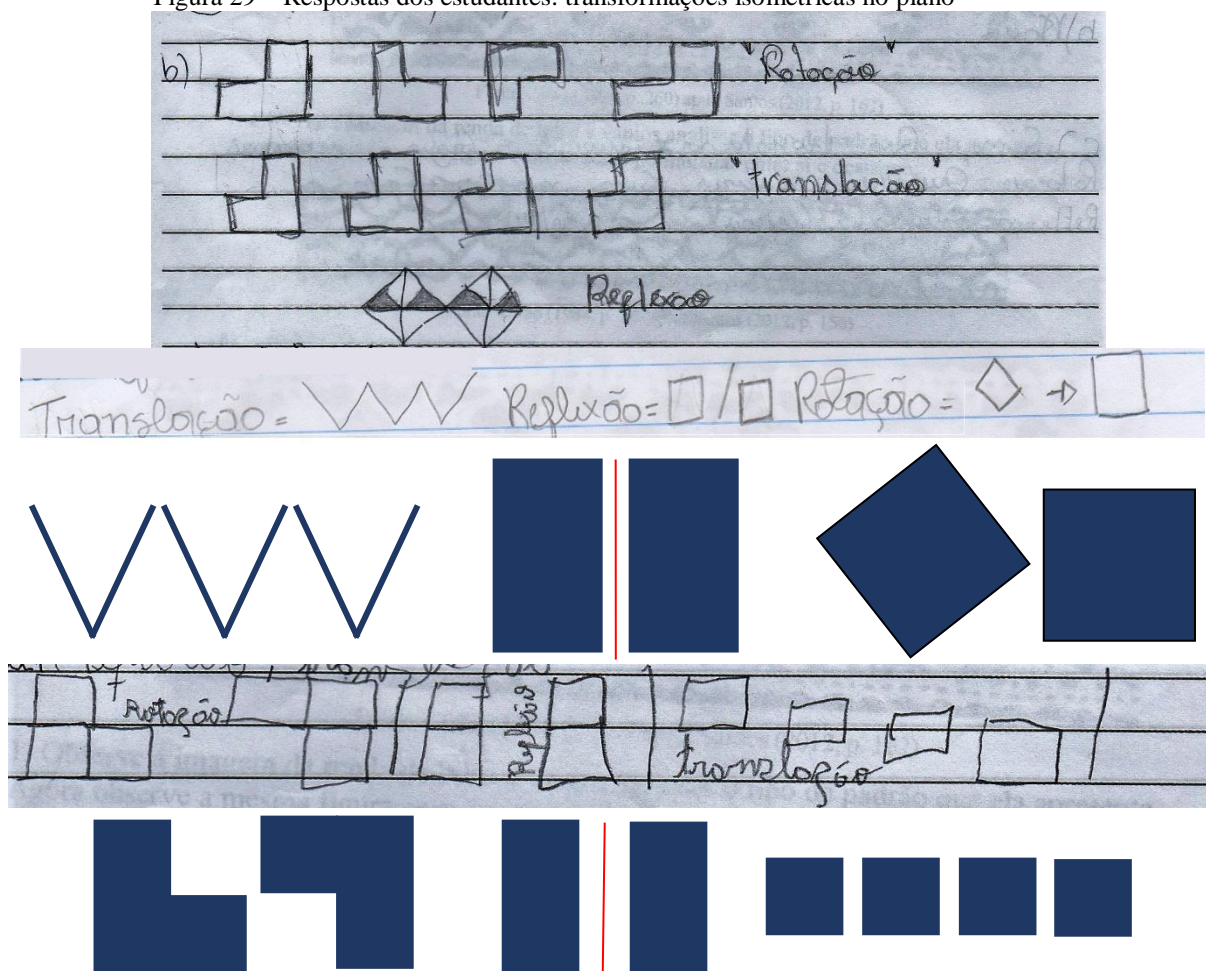


Fonte: Acervo do autor

Na figura 29 temos exemplos de respostas fornecidas pelos estudantes, ainda para a primeira questão, que representam a maioria das respostas. Como observado durante as atividades, eles identificaram e exemplificaram com maior facilidade os movimentos de translação e rotação, mas ainda possuem dificuldades com o movimento de reflexão principalmente com relação ao eixo de simetria.

Outra dificuldade apresentada pelos estudantes foi a organização das atividades e, principalmente, a adoção de uma escala. Os desenhos não são uniformes, é mais complicado identificar as isometrias. Em dois casos na Figura 29, reconstruímos as figuras propostas pelos estudantes a fim de facilitar a visualização e compreensão das imagens.

Figura 29 – Respostas dos estudantes: transformações isométricas no plano

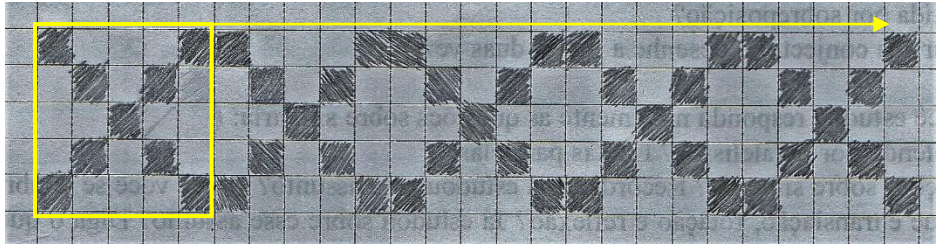


Fonte: Acervo do autor

Com relação a segunda questão, foi possível perceber uma evolução por parte dos estudantes. Na atividade 3, eles também deveriam desenhar os padrões observados nas rendas de bilros. Entretanto muitos o fizeram como um rascunho. Os alunos relataram que não adotaram uma unidade de medida devido à ausência do material de desenho, que haviam esquecido de levar no dia, mas que haviam adotado uma unidade padrão ao responder a segunda questão que contava com uma malha quadriculada.

A exposição das atividades e o debate da terceira atividade foram bem produtivos e podemos observar os resultados a partir das repostas dos estudantes na Atividade 6. Vejamos os padrões criados.

Figura 30 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno A

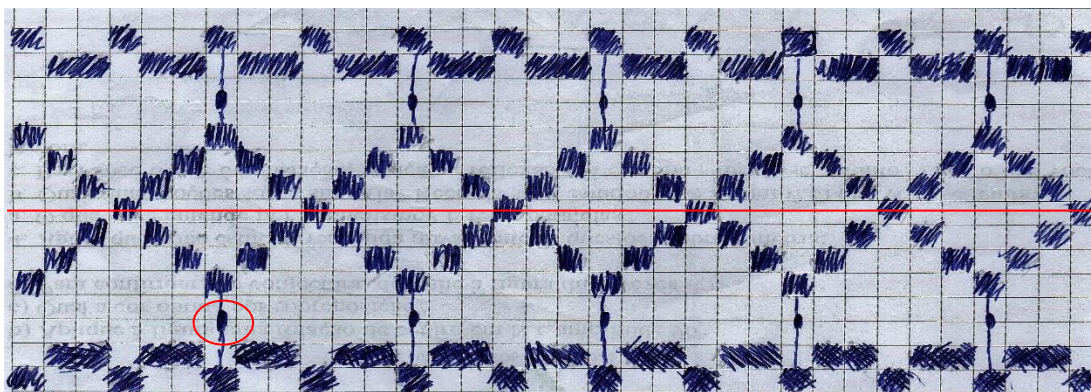


Fonte: Acervo do Autor

Na Figura 30, o “x” destacado a partir do retângulo em amarelo é o padrão que o estudante criou e o trasladou para a construção da faixa. Borralho e Barbosa (2009) assinalam que os padrões são a essência da Matemática e a linguagem na qual está expressa, sendo importante para desenvolvimento do pensamento algébrico, mas também do pensamento geométrico observando as regularidades nas figuras e simetrias.

Dessa maneira, o ensino deve ser priorizado a partir de atividades que focalizem a investigação e a exploração de maneira que os estudantes tenham a oportunidade de explorar os padrões e a possibilidade de explicitar, refletir e discutir sobre suas compreensões e ideias (BORRALHO; BARBOSA, 2009).

Figura 31 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno B



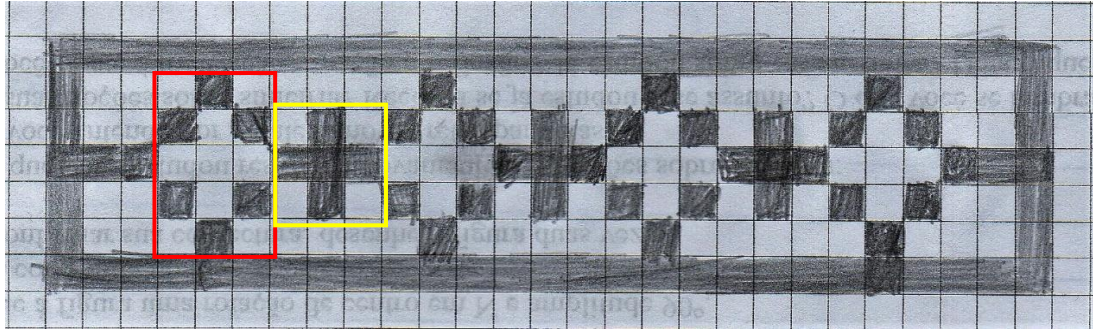
Fonte: Acervo do Autor

Na figura 31, o estudante relatou que representou o movimento de reflexão e que o “espelho” reflete a imagem. Os estudantes reconhecem a partir da visualização a necessidade de um parâmetro para identificar o movimento de reflexão, mas ainda não identificam o nome eixo de simetria. O estudante frisou a representação dos pontos existentes na renda de bilros como destacado a partir da circunferência em vermelho.

Alvarenga (2009) afirma a necessidade de parâmetros para as transformações geométricas, entre eles a descrição geométrica do objeto (forma, posição) e os atributos visuais do objeto (cores, linhas, padrões). O estudante observou esses parâmetros nas rendas

de bilros e os representou na malha quadriculada.

Figura 32 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno C

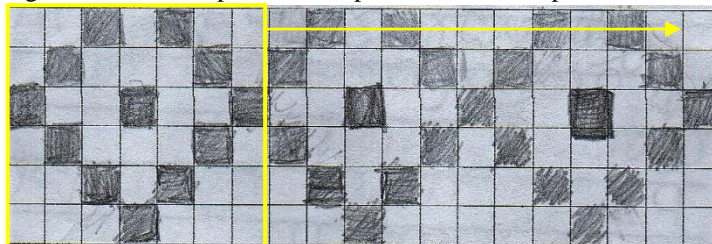


Fonte: Acervo do Autor

Na Figura 32, o estudante determinou dois motivos para construir sua faixa, e informou que na faixa da Figura 27 há dois motivos, ressaltando a identificação dos parâmetros visuais identificados por ele. Sobre isso, Fainguelernt (1999) afirma que na construção de um conceito é fundamental partir da percepção e intuição de dados concretos, explorando diversas representações.

Na Figura 33 a seguir, o estudante também criou sua faixa a partir do movimento de translação. O motivo criado por ele está destacado pelo retângulo em amarelo de acordo com a argumentação fornecida pelo aluno. Porém há um equívoco quanto ao conceito, pois o estudante sobrepôs algumas partes da figura. Para a SF, o surgimento do “erro” constitui um papel importante durante as fases de desenvolvimento do processo de aprendizagem, cabendo ao professor dialogar com o estudante e conceber situações de aprendizagem ao educando que o permitam identificar o próprio erro e de maneira que o estudante possa então reelaborar e ressignificar a construção de seus conceitos, de modo a superar o erro cometido. (SANTOS, 2016).

Figura 33 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno D

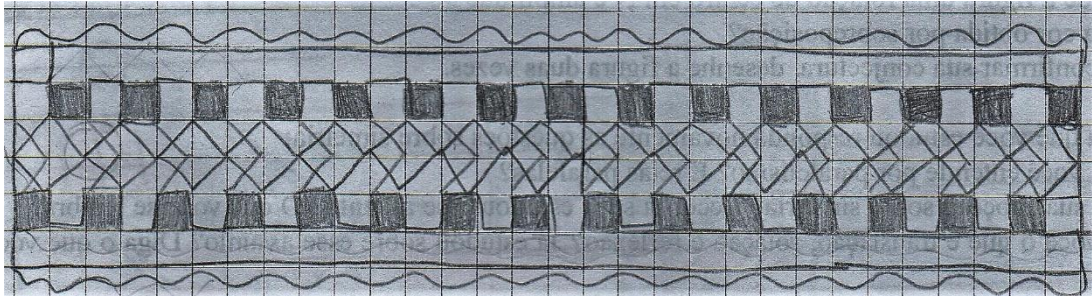


Fonte: Acervo do Autor

Na figura 34, a estudante informou que procurou destacar as linhas das rendas de bilros. Há uma imperfeição do traço, pois foram feitos à mão livre. Como evidenciado por Mendes (2009a), os materiais básicos de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor)

são fundamentais. Entretanto a aluna consegue identificar os atributos visuais das rendas de bilros e representá-los na malha quadriculada.

Figura 34 – Faixa a partir de um padrão construída pelo aluno E



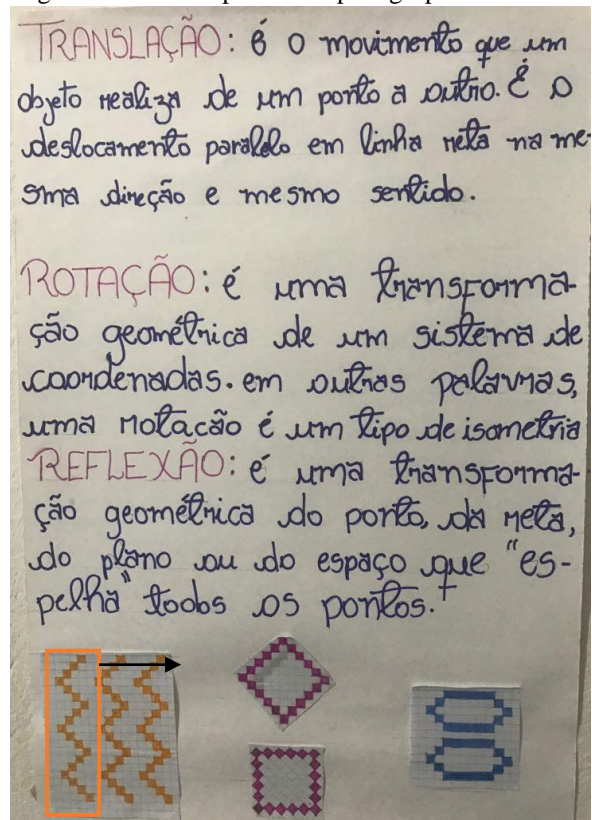
Fonte: Acervo do Autor

Ao contrário da atividade 3, podemos perceber que além de determinar uma medida padrão para construir as faixas de rendas de bilros os alunos criaram modelos diversos, utilizaram mais a criatividade e realizaram a atividade com maior capricho. As dificuldades identificadas durante a atividade 3 foram debatidas com os estudantes durante o momento da solução oportunizando-os a reconstrução de conhecimentos de acordo com as premissas da metodologia SF.

4.7 Culminância

Nas apresentações dos trabalhos, os estudantes produziram cartazes como o da Figura 35. Em síntese, os alunos retiraram definições de sites da internet e as informações eram bem similares. Dessa maneira, focamos nossas discussões nas explicações que eles forneceram e as dúvidas que surgiram durante as apresentações e o que pesquisaram que não compreenderam.

Figura 35 – Cartaz produzido pelo grupo B



Fonte: Acervo do Autor

Os nove grupos apresentaram os trabalhos, mesmo os dois grupos que não haviam realizado a pesquisa anteriormente conseguiram se organizar e expor suas conclusões. Alguns grupos demonstravam mais propriedade sobre o que estavam apresentando e outros liam o que estava escrito no cartaz.

Seguimos a ordem exposta no cartaz e vamos tratar das observações dos estudantes acerca do movimento de translação. Durante as atividades, em alguns momentos, os alunos apresentaram alguns equívocos e confundiram-no com o movimento de rotação ou de reflexão.

Mas, no geral, os estudantes relataram o movimento como o deslocamento de um ponto a outro e identificaram que a alteração se dá na posição que a figura ocupa no plano e não em suas dimensões. Também se referem à translação como um escorregamento ou deslizamento da figura no plano, como o padrão em laranja no cartaz. Ao apresentá-lo, a aluna leu a definição que haviam pesquisado e explicou para os colegas “você podem ver que a figura laranja está escorregando para o lado...”

A partir das pesquisas, muitos grupos apresentaram a definição expressa no cartaz “deslocamento paralelo em linha reta na mesma direção e mesmo sentido”. Na análise do

plateau, os alunos demonstraram compreender que retas paralelas são retas que não possuem pontos em comum, “retas que não se cruzam” como eles explicaram.

Entretanto sobre a direção e o sentido, não discutimos em nenhuma atividade e, até antes de pesquisarem em sites da *Internet*, os estudantes não haviam questionado sobre esses conceitos e nem os explicitaram em outros momentos. Assim, questionamos o que era direção e sentido e o que haviam compreendido a respeito, uma vez que todos os grupos apresentaram ideias similares.

Nenhum dos sujeitos soube responder o que seriam esses conceitos, então questionamos se quando leram ou informaram para alguém “deslocamento de um ponto ao outro” se essa informação basta para determinar a localização desse movimento? Mas ainda assim, os estudantes não compreenderam ou citaram alguma informação referente à direção e/ou sentido.

Então questionamos a partir de um exemplo “Se uma pessoa está parada próxima da porta e dizemos que ela vai se mover desse ponto a outro. Para onde essa pessoa vai?” Então uma aluna respondeu que precisava especificar se a pessoa vai para frente, para trás, para esquerda ou direita.

Salientamos que esses questionamentos fazem parte dos pressupostos da SF. O professor deve mediar a solução a partir de questionamentos que proporcionem aos educandos reflexões sobre suas respostas – perguntas reflexivas – e contraexemplos quando as perguntas reflexivas ainda não satisfazem as dúvidas dos educandos. Reforçamos, dessa maneira, que os estudantes devem construir o conhecimento a partir da investigação e o professor não deve fornecer respostas prontas (SANTOS, 2016).

Questionamos novamente o que era direção e sentido, e uma aluna respondeu que a direção e o sentido especificavam qual rota seguir. A partir dessa resposta, questionamos individualmente quantas direções podemos seguir, mas os estudantes ainda apresentavam dificuldades. Então afirmamos que comumente estudamos duas direções, até que um estudante respondeu, “horizontal e vertical”.

Em seguida, questionamos também individualmente, o que seria o sentido. Como os estudantes ainda apresentaram dificuldades, questionamos na vertical qual movimento podemos realizar, e um aluno respondeu “para cima e para baixo”. Imediatamente questionamos: “e na horizontal?”. Os alunos responderam: para frente, para trás, para esquerda, para direita.

Voltamos ao movimento de translação e formalizamos o que haviam exposto no cartaz compreendendo para além da simples leitura sem entendimento dos conceitos expostos

nos cartazes. Na sequência, iniciamos as discussões sobre a rotação. A partir das atividades realizadas, os estudantes demonstraram maior conhecimento com relação ao movimento de rotação, associaram-no ao movimento de rotação da Terra estudado nas disciplinas de Geografia e Ciências.

Durante a apresentação dos cartazes, um dos grupos destacou o movimento de rotação presente no “bico” da renda de bilro e explicaram que o bico faz giros em torno da renda, num movimento de rotação, como exposta na Figura 36.

Figura 36 – Movimento de rotação apresentado pelos estudantes



Fonte: Acervo do Autor

Os demais grupos expuseram outros exemplos, citaram o centro de rotação e a dificuldade encontrada inicialmente com relação e este movimento havia sido a de identificar sentido horário e anti-horário que já havíamos discutido na atividade 1.1.

Com isso, seguimos a discussões sobre o movimento de reflexão. Ainda que a simetria de reflexão seja abundante na natureza e a possibilidade de associá-la aos espelhos, os educandos apresentaram maior dificuldade com esse movimento. Durante apresentação dos cartazes, leram as definições e os exemplos eram simples e em alguns cartazes haviam informações como reflexão em relação a uma reta. Uma das dificuldades dos estudantes foi identificar essa reta como o eixo de simetria e, principalmente, a compreensão de que a distância do ponto original e seu reflexo tem a mesma distância em relação ao eixo de simetria.

Em alguns cartazes, a informação era mais clara e especificava que a reta se chamava eixo, mas não complementava que era o eixo de simetria. Dessa maneira,

complementando as discussões, questionamos aos estudantes o que ocorre com o reflexo quando estão na frente do espelho e começam a se afastar. Um dos estudantes respondeu que o reflexo também se afasta. Então questionamos o que seria esse espelho na simetria de reflexão e a possibilidade de associá-la aos espelhos contribuiu para que um dos estudantes respondesse que seria a reta. Perguntamos então qual seria o nome dessa reta. Timidamente no fundo da sala uma aluna exclamou “só pode ser o eixo de simetria”. Voltando para o quadro o professor/ pesquisador realizou alguns desenhos com o intuito de ilustrar melhor e facilitar a compreensão sobre o eixo de simetria e os pontos equidistantes do eixo.

Com isso encerramos nossas atividades acerca do conceito de transformações isométricas. No quadro 5, a seguir expomos as categorias de análises identificadas a partir das observações e das respostas fornecidas pelos estudantes durante o desenvolvimento das AD.

Quadro 5 – Quadro de análises – Aprendizagem do conceito de transformação geométrica, especificamente, Rotação, Translação e Reflexão

Movimento de Rotação	
Síntese obtida a partir das observações e respostas dos alunos nas atividades didáticas realizadas	Exemplificação de respostas apresentadas pelos estudantes
Os estudantes identificaram o movimento de rotação como o ato de girar em torno de um ponto fixo, centro de rotação.	“Rotação é o giro de uma forma ao redor de um ponto chamado centro de rotação” (Aluno A).
Associam o movimento de rotação ao movimento de rotação da Terra. Relacionando o conteúdo estudado a partir das rendas de bilros com outras áreas de conhecimento.	“Rotação é algo que gira em torno de si” (Aluno B). “Rotação é o giro em torno do seu eixo” (Aluno C).
As atividades auxiliaram a identificar uma dificuldade elementar que os estudantes apresentaram, confundir o sentido horário com sentido anti-horário, bem como proporcionou o debate sobre essa dificuldade e oportunizou aos educandos a (re)construção desse conceito.	/
Movimento de Translação	
Síntese obtida a partir das observações e respostas dos alunos nas atividades didáticas realizadas	Exemplificação de respostas apresentadas pelos estudantes
Os estudantes identificaram o movimento de translação como deslocamento de um ponto ao outro, expõe ideias como “deslizar”, “escorregar”	“Translação é quando a figura tem certa rota” (Aluno D). “Translação é o movimento que um objeto realiza de um

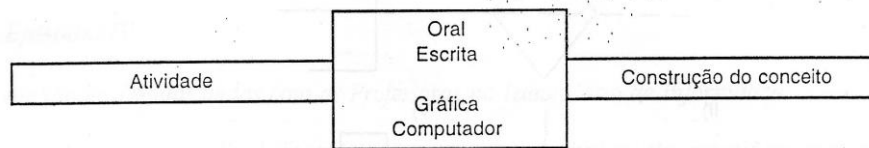
para explicar o movimento.	ponto para o outro” (Aluno E).
Relacionam ao movimento de translação da Terra.	“translação é o deslocamento do objeto em torno de alguma coisa” (Aluno F).
As atividades auxiliaram a identificar dificuldades com relação à localização. Os estudantes relataram desconhecer conceitos elementares como direção (horizontal e vertical) e apresentaram dificuldades com relação ao sentido, principalmente em diferenciar esquerda e direita o debate sobre essas dificuldades oportunizou aos educandos a (re)construção desses conceitos.	
Movimento de Reflexão	
Síntese obtida a partir das observações e respostas dos alunos nas atividades didáticas realizadas	Exemplificação de respostas apresentadas pelos estudantes
Os estudantes associaram o movimento de reflexão ao reflexo, exemplificaram o movimento a partir de uma figura refletida em um espelho.	“Reflexão é como em um espelho ou reflexo de algo” (Aluno C). “Reflexão é quando o objeto está refletido” (Aluno E).
Reconhecem a necessidade de um parâmetro, referência para que se identifique a simetria de reflexão, reflexão em relação a uma reta: eixo de simetria.	“Reflexão ocorre através de uma reta chamada eixo de simetria” (Aluno A).
Citam que a figura original e a figura refletida têm a mesma distância do eixo de simetria, porém apresentam dificuldades de apropriação do conceito citado.	“A reflexão tem a mesma distância e forma em relação ao eixo” (Aluno D)

Fonte: Elaborado pelo autor

O quadro acima sintetiza a emergência de indícios preliminares do desenvolvimento do processo de aprendizagem dos conceitos de rotação, translação e reflexão pelos sujeitos do 9.º ano do ensino fundamental anos finais, a partir da análise do *plateau* podemos identificar sinais preliminares de avanços na percepção e compreensão dos estudantes com relação a esses conceitos.

Em seu estudo sobre o processo do conhecimento das transformações geométricas a partir das diferentes representações: oral, escrita, gráfica e outras, Fainguelernt (1999) propôs o esquema a seguir para as etapas do processo de conhecimento das professoras investigadas em seu trabalho.

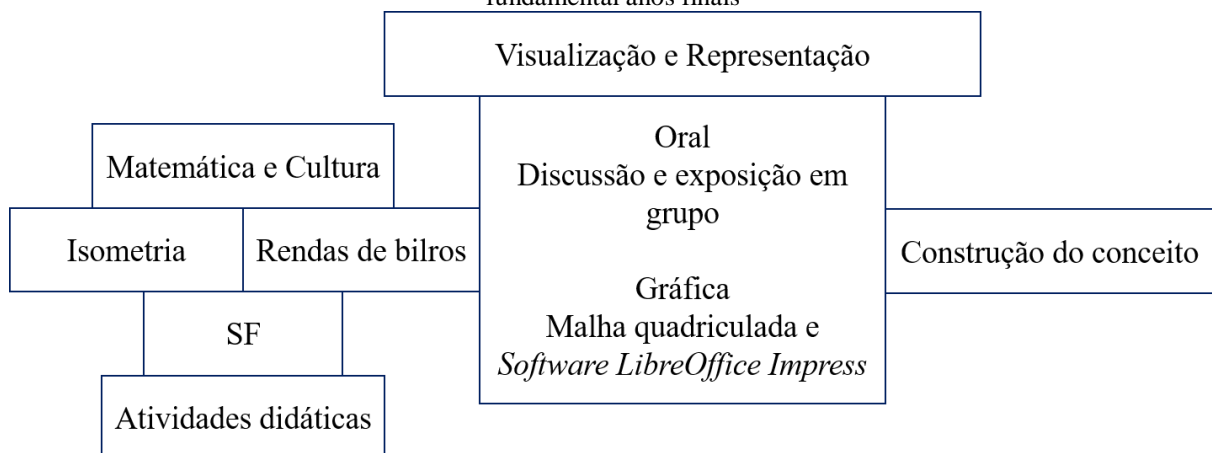
Figura 37 – etapas do processo de construção do conceito de simetria apresentado por Fainguelernt (1999)
O seguinte esquema apresenta as etapas do processo de construção dos conceitos pelas professoras.



Fonte: Fainguelernt (1999, p. 189)

De maneira análoga, sintetizamos as etapas do processo de construção do conceito de simetria pelos estudantes, a partir do esquema a seguir,

Figura 38 – Etapas do processo de construção do conceito de simetria pelos estudantes do 9.º ano do ensino fundamental anos finais



Fonte: Elaborado pelo autor

Fundamentados em Fainguelernt (1999), elaboramos o esquema representado pela Figura 38, partimos da inter-relação Matemática e Cultura, significando a aprendizagem dos conceitos de rotação, translação e reflexão a partir da prática sociocultural das rendas bilros. Com isso, elaboramos uma SD com base nos pressupostos da SF, a partir das AD propostas por Santos (2012). O desenvolvimento das atividades evidenciou as habilidades de visualização e representação por meio da manipulação das peças de rendas de bilros, construção e representação das formas na malha quadriculada e no *software LibreOffice Impress*, bem como a discussão e partilha dos resultados nos momentos de solução e prova. Esses processos culminaram na construção dos conceitos de rotação, translação e reflexão.

Assim, no capítulo a seguir, apresentamos os trançados finais dessa pesquisa, alinhando o objetivo e nossa questão inicial aos resultados e análises obtidos a partir do desenvolvimento das atividades junto aos estudantes, bem como nossas percepções sobre a possibilidade de estudos futuros.

5 CONSIDERAÇÕES

Evidenciamos com as atividades o processo investigativo, bem como as habilidades de visualização e representação, a partir de debates na forma oral e nas exposições em grupos, também de forma gráfica a partir da representação e classificação das Isometrias identificadas nas rendas de bilros, na malha quadriculada. Como proposto por Fainguelernt (1999), essas etapas contribuem na construção do conceito de simetria por parte dos aprendizes.

Dessa forma, ao observamos a análise do *plateau* sobre os conhecimentos dos educandos acerca dos conceitos de rotação, translação e reflexão (QUADRO – 2) e as categorias de análises (QUADRO – 5), constatamos o surgimento de indícios preliminares de um avanço quanto ao desenvolvimento do processo de aprendizagem da turma investigada com relação a esses conceitos.

De acordo com a SF, é a partir da análise do *plateau* que podemos verificar se o aluno avançou durante o processo didático, mediante sua participação na sistematização das resoluções apresentadas em sala (SANTOS, 2016).

Inicialmente mais da metade da turma respondeu desconhecer os conceitos de rotação, translação e reflexão, após as mediações a partir das Atividades Didáticas-AD identificamos avanços na aprendizagem desses conceitos. Como sintetizado na Figura 38, fundamentados nos pressupostos da SF, elaboramos uma SD a partir de AD que relacionassem a Matemática e Cultura e a aprendizagem de conceitos de Isometria a partir da prática cultural das rendas de bilros, propostas por Santos (2012).

Analisamos fatores relacionados ao desenvolvimento do processo de aprendizagem do conceito de simetria e isometria, especificamente, rotação translação e reflexão a partir das AD propostas por Santos (2012), que relacionam a prática cultural das rendas de bilros a conceitos matemáticos de geometria, em especial, isometria e simetria. Com efeito, realizamos o estudo junto a uma turma de 30 estudantes de 9.º ano do ensino fundamental anos finais, de uma escola da rede pública de ensino de Caucaia – CE.

Durante a pesquisa, tecemos discussões acerca da aprendizagem em geometria, especialmente sobre os conceitos de translação, rotação e reflexão, bem como a definição e o conceito dessas transformações geométricas. Num contexto geral, buscamos o debate sobre a necessidade de ressignificar a aprendizagem a partir de práticas culturais, especificamente, das rendas de bilro, enfatizando a inter-relação Matemática-Cultura. Trabalhamos, ainda, a Metodologia de ensino SF e as AD para ver a aprendizagem das transformações geométricas.

Tratamos da importância da problemática que envolve as condições de recurso pedagógico, as fragilidades observadas no livro didático, e ainda, na ausência de conhecimentos dos sujeitos - alunos, sobre o conceito de Simetria.

Dessa maneira, a partir de nossos estudos e discussões sobre o tema, entendemos ser oportuno apontar que o ensino de Matemática na Educação Básica não pode ser reduzido às atividades do livro didático. A Matemática não pode ser apresentada aos estudantes como uma simples caixa de ferramentas e, principalmente, não podemos esquecer da intrínseca relação deste componente com o cotidiano dos educandos e com diversas práticas culturais, devendo relacionar os conceitos matemáticos à cultura, oportunizando aos estudantes durante todo o processo de aprendizagem a investigação e exploração.

Com relação ao objetivo desta pesquisa – o qual visava analisar o processo de aprendizagem dos alunos do 9.º ano do ensino fundamental anos finais, especialmente sobre os conceitos matemáticos que envolvem simetria e isometria a partir das premissas das AD que relacionam as rendas de bilros e a matemática cultural – a partir da análise e interpretação dos dados coletados na pesquisa, foi possível emergir indícios preliminares de que a investigação e a exploração por parte dos estudantes, durante o desenvolvimento das atividades, oportunizaram a exposição de dificuldades, discuti-las, trabalhá-las em grupo e relacionar conteúdos matemáticos à prática das rendas de bilros.

Verificamos, ainda, que as premissas da SF contribuem positivamente com esse processo, principalmente na fase de maturação, na qual os estudantes tiveram a oportunidade de fazer suas conjecturas e testá-las e na fase da solução, uma vez que a partilha de informações possibilitou aos educandos elaborarem a (re)construção e (res)significação de conceitos.

Observamos a ausência de conceitos elementares, dificuldades relacionadas à lateralidade, grande parte dos estudantes apresentaram adversidades quando solicitados a identificarem ou manipularem figuras para esquerda, para direita ou um giro no sentido horário, como exemplo. Quando discutimos sobre direção e sentido, conceitos que os próprios estudantes expuseram a partir de suas pesquisas, nenhum aluno conseguia explicar e, ou demonstrar o que significavam.

A ausência desses conceitos implicou diretamente na aprendizagem dos conceitos de simetria. Já com relação ao movimento de translação, os estudantes conseguiram explicar e associá-lo como o deslocamento de um ponto ao outro, mas sem especificar um parâmetro para esse movimento, pois havia lacunas conceituais com relação aos conceitos de direção e sentido. O movimento de reflexão representou maior obstáculo de compreensão para os

educandos, mesmo após as mediações muitos ainda tinham dificuldades em explicar e representar esse movimento. A identificação do eixo de simetria ocorreu apenas no último encontro a partir dos contraexemplos e perguntas reflexivas, pressupostos da SF, que foram debatidos no momento da fase da Prova durante a Culminância.

Nos documentos nacionais para a Educação Básica, PCNM (BRASIL, 1997) e BNCC (BRASIL, 2017), os conceitos direção, sentido, lateralidade e localização de objetos no plano e no espaço aparecem no rol de conteúdos do 1.º ao 5.º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais, entretanto no 9.º do Ensino Fundamental Anos Finais, os estudantes apresentaram dificuldades com relação a esses conceitos. Como citado no início desta pesquisa, estudantes da 3ª série do Ensino Médio apresentaram dificuldades similares ao estudar conteúdos de Geometria Analítica, um dos fatores que instigou este trabalho.

Sugerimos e recomendamos, para pesquisas futuras, uma investigação mais aprofundada sobre os fatores e/ou motivos que geram ou ocasionam a ausência dos conceitos sobre lateralidade e localização. Conceitos basilares, estudados e aprofundados durante o Ensino Fundamental e tão presentes no dia a dia, mas que se apresentaram como dificuldades para os educandos e interferiram na aprendizagem e compreensão de outros conceitos.

Cabe ainda sugerir maiores reflexões e estudos acerca da efetiva inserção das tecnologias digitais da informação e comunicação na educação, como constatamos durante a proposta de uma atividade. Os alunos investigados utilizam esses recursos com fins recreativos e o desconhecimento sobre recursos tecnológicos para o uso pedagógico se apresentou como obstáculo para o desenvolvimento da atividade.

Para além do desconhecimento apresentado pelos estudantes, nossa maior inquietação se dá com a ausência de materiais e recursos tecnológicos nas escolas, o descaso das autoridades governamentais é evidente e necessitamos fomentar mais debates e aprofundar estudos que indiquem medidas efetivas para a melhoria desse problema.

Com efeito, após termos trabalhado para o ordenamento, sistematização e concretização dos dados desse estudo, sentimo-nos inquietados com as problemáticas identificadas durante o desenvolvimento dessa pesquisa. Mas, ao mesmo tempo, sentimo-nos satisfeitos no sentido do cumprimento dos objetivos em relação ao objeto de investigação, nossa pesquisa soma-se às discussões da Educação Matemática e deixamos nossa contribuição, para essa área, propondo uma abordagem da disciplina matemática que valorize práticas sociais e oportunize aos estudantes a investigação durante o desenvolvimento do processo de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, L. G. **Geometria e imagem**. [S.l.: s.n.], 2009.

A ARTE das rendas de bilros: figura. In: TRAJES de Portugal. 2007. Disponível em: <<http://trajesdeportugal.blogspot.com/2007/01/arte-da-renda-de-bilros.html>>. Acesso em: 09 de setembro de 2018.

ASURINI do Xingu: [textos e imagens]. In: **Colégio Pedro II (Org.)**. Pintura corporal indígena. Rio de Janeiro, 200?

ATAÍDES, L. F.: figura. In: BAIXAKI. 2008. Disponível em: <<https://www.baixaki.com.br/papel-de-parede/21359-flor.htm>>. Acesso em: 09 de setembro de 2018.

BISHOP, A. J. **Enculturación matemática**: la educación matemática desde una perspectiva cultural. Paidós Ibérica, 1999.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica. 2016.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Pensamento Algébrico e exploração de Padrões. **Patterns-Multiple Perspectives and Contexts in Mathematics Education**, p. 59-68, 2009.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 3ª versão. Brasília, DF: Ministério da Educação. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 21 de março de 2018.

BRASIL. **Ensino fundamental de nove anos**: passo a passo do processo de implantação. Brasília, DF: MEC/SEB. 2009. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=700-passoapasso9anos-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 30 jun. 2018

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN)**: Lei nº. 9394/96. Brasília, DF: 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais / matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF. 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais / matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF. 1998.

CAMPELO, Marília (Fotografia e vídeo). Talento sem fronteiras: renda produzida na Escola Municipal de Rendas e Bilros de Peniche. **Diário do Nordeste**, Fortaleza, jan. 2016. Projeto especial “Fios de Tradição”, que inclui duas edições impressas publicadas no jornal Diário do Nordeste em 24 e 31 de janeiro de 2016. Disponível em: <<http://hotsite.diariodonordeste.com.br/especiais/fios-de-tradicao/rendas-do-mar/ceara-peniche-vila-do-conde/>>. Acesso em: 09 de setembro de 2018.

CHAGAS, E. M. P. de F. Educação matemática na sala de aula: problemáticas e possíveis soluções. **Millenium**, p. 240-248, 2004.

CRUZ NETO, O. O Trabalho de campo como descoberta e criação. *In*: DESLANDES, S. F. et al. (Org). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes. 1994.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. São Paulo: Ática. 1993.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus. 1996.

D'AMBROSIO, U. **Transdisciplinaridade**. São Paulo: Palas Athena, 1997.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática - elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBROSIO, U. A transdisciplinaridade como uma resposta à sustentabilidade. **Revista Terceiro Incluído**, v. 1, n. 1, p. 1-13, 2011.

DANTE, L. R. Livro didático de matemática: uso ou abuso? **Em aberto**, v. 16, n. 69, 1996. Disponível em: <rbep.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/download/2068/2037>. Acesso em 30 jun. 2018.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática: representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul. 1999.

GERDES, P. **Etnomatemática: cultura, matemática, educação: colectânea de textos**. Maputo: Instituto Superior Pedagógico. 1991.

INEP. **Censo escolar da educação básica: notas estatísticas**. Brasília, DF: Inep. 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/notas_estatisticas/2018/notas_estatisticas_Censo_Escolar_2017.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2018.

KNIJNIK, G. Currículo, etnomatemática e educação popular: um estudo em um assentamento do movimento sem terra. **Revista Currículo sem Fronteiras**, v. 3, n. 1, p. 96-110, 2003.

KENSKI, V. M. Educação e Internet no Brasil. **Cad Adenauer XVI [Internet]**, v. 3, p. 133-50, 2015. Disponível em: <https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/38551673/Educacao_e_internet_no_Brasil_Cadernos_Adenauer_2015_1.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1530345454&Signature=p8OyJy4G5gM1aUgnPPinOOKD9Mg%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DEducacao_e_internet_no_Brasil.pdf>. Acesso em 30 jun. 2018.

LEDERGERBER-RUOFF, E. B. **Isometrias e ornamentos do plano euclidiano**. Atual, 1982.

LIMA, E. L. Isometrias, Coleção Professor de Matemática. **Sociedade Brasileira de**

Matemática, 1996.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5ª Ed. São Paulo: Atlas. 2003.

MENDES, I. A. **Ensino da matemática por atividades**: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática. Tese (doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001.

MENDES, I. A. **Tendências metodológicas no ensino de matemática**. Belém: EdUFPA. 2008.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino da trigonometria In: ANTONIO MIGUEL et al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física. 2009a.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física. 2009b.

MINAYO, M. C. de S. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: DESLANDES, S. F. et al. (Org). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes. 1994.

RENDA de bilros: figura. In: CRIVART. 200?. Disponível em: <<http://crivart.pt/pt/product/85/pano-de-consola-ou-comoda-renda-de-bilros.html>>. Acesso em: 09 de setembro de 2018.

SANTOS, M. J. C. dos. **Geometria e simetria nas rendas de bilro**: contribuições para a Matemática escolar. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2012.

SANTOS, M. J. C. dos. O ensino de simetria por meio das rendas de bilro. 2013, Canoas. **Anais do VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática...** Canoas: ULBRA, 2013. p. 1-17. Disponível em: <<http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/879/483>>. Acesso em: 29 maio 2018.

SANTOS, M. J. C. dos. Reflexões sobre a formação de educadores matemáticos: a metodologia de ensino sequência fedathi. In: DIAS, A. M. I.; MAGALHÃES, E. B.; FERREIRA, G. N. L. (Org). **A aprendizagem como razão do ensino**: por uma diversidade de sentidos. Fortaleza: Imprece. 2016.

SANTOS, M. J. C. dos. A formação do professor de matemática: metodologia sequência fedathi (sf). **Revista Lusófona de Educação**, [S.l.], v. 38, n. 38, p. 81-96. dez. 2017. Disponível em: <<http://revistas.ulusofona.pt/index.php/rleducacao/article/view/6261>>. Acesso em: 10 jul. 2018.

SANTOS, M. J. C. O currículo de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental na base nacional comum curricular (BNCC): os subalternos falam?. **Horizontes**, v. 36, n. 1, p. 132-143, 2018.

SILVEIRA, E. **Matemática:** compreensão e prática. 3. ed. São Paulo: Moderna. 2015.

SIMETRÍA bilateral: figura. *In:* TIPOS de simetria. Disponível em: <<https://www.tipos.co/tipos-de-simetria/>>. Acesso em: 09 de setembro de 2018.

SOUSA, F. E. E. de. et al. (org). **Sequência Fedathi:** uma proposta para o ensino de matemática e ciências. Fortaleza: Edições UFC. 2013.

VIEIRA, N. S. O. **A formação matemática do pedagogo:** reflexões sobre o ensino de geometria. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

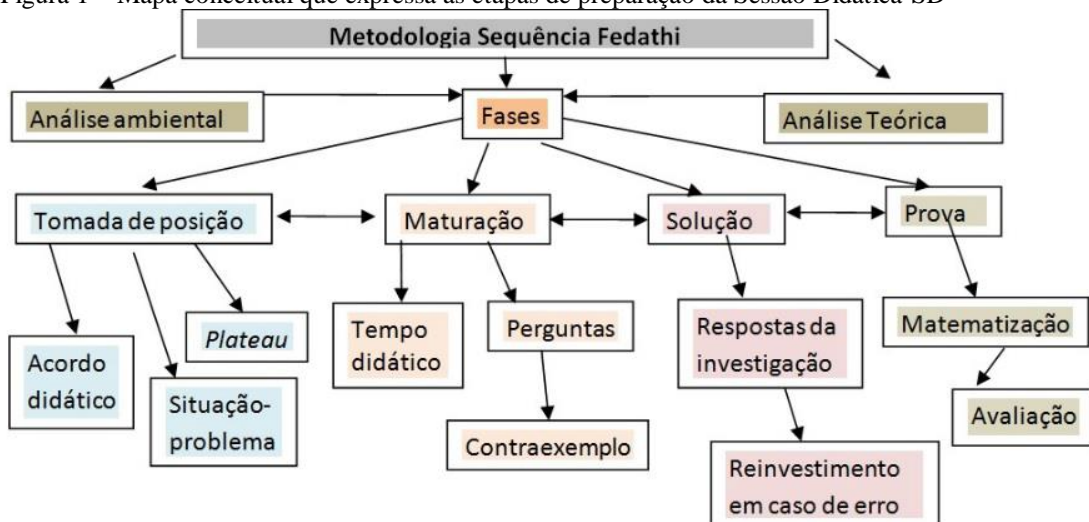
APÊNDICE A – SESSÃO DIDÁTICA-SD

APRESENTAÇÃO

As atividades apresentadas nesta Sessão Didática (SD) foram propostas por Santos (2012), dessa maneira, apenas realizamos as adaptações necessárias ao público investigado. Destacamos a importância das atividades por oportunizarem aos educandos uma dinâmica experimental colocando-os como investigadores e sujeitos ativos no processo de construção do conhecimento (MENDES, 2009a).

A Sequência Fedathi (SF) corrobora com esta preposição uma vez que prevê que o estudante construa seu conhecimento a partir da investigação por meio de situações desafiadoras, levando-o a exploração, experimentação e constatação durante todo o processo de desenvolvimento das Etapas da SF (SANTOS, 2016), feitas durante todo o processo de desenvolvimento das etapas da SF, de modo a vivenciarem a mesma atmosfera do trabalho desenvolvido pelo matemático. (SOUSA, 2013). A Figura 1 a seguir representa um resumo das etapas de preparação da SD.

Figura 1 – Mapa conceitual que expressa as etapas de preparação da Sessão Didática-SD



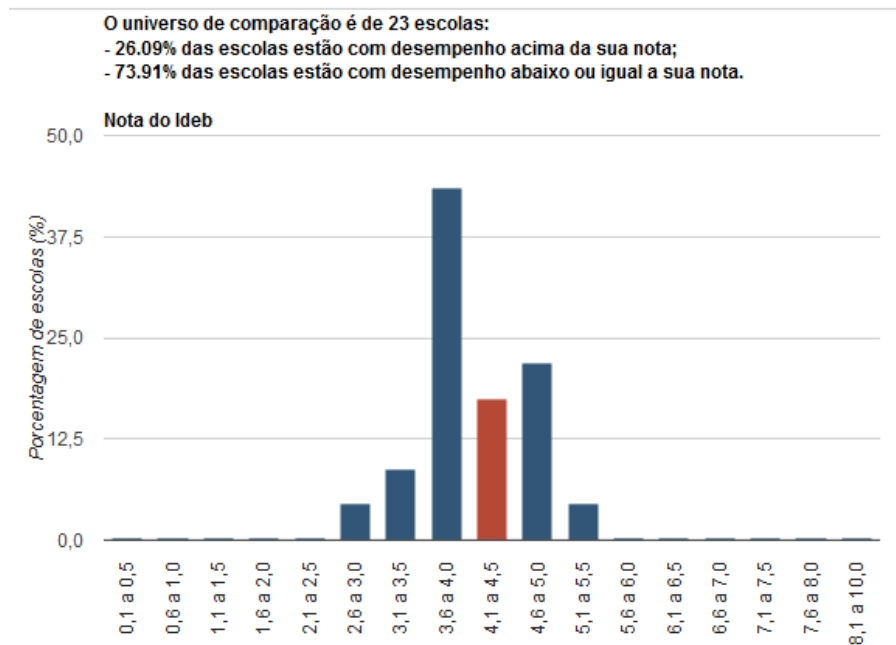
Fonte: (SANTOS, 2017, p. 88)

ANÁLISE AMBIENTAL

As atividades ocorrerão em uma escola municipal de ensino fundamental anos finais localizada na área urbana, do município de Caucaia-Ceará. De acordo com o Indicador para mensurar a complexidade da gestão nas escolas a partir dos dados do Censo Escolar da Educação Básica, a escola lócus da pesquisa está classificada no nível 3 - Porte entre 50 e 500 matrículas, operando em 2 turnos, com 2 ou 3 etapas, apresentando os Anos Finais como etapa mais elevada (BRASIL, 2014).

O gráfico a seguir, identificado pela figura 2, representa a nota do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica - Ideb, censo 2015, da escola em comparação com outras 23 escolas do mesmo nível, do município de Caucaia-Ceará. Em 2015 a escola teve nota igual a 4,2; abaixo da meta prevista para 5,1. Mas não pertence ao grupo de escolas com menores notas. A escola está localizada no destaque em vermelho.

Figura 2 – Nota Ideb, censo 2017, escola lócus da pesquisa



Fonte: IDEB (2017)

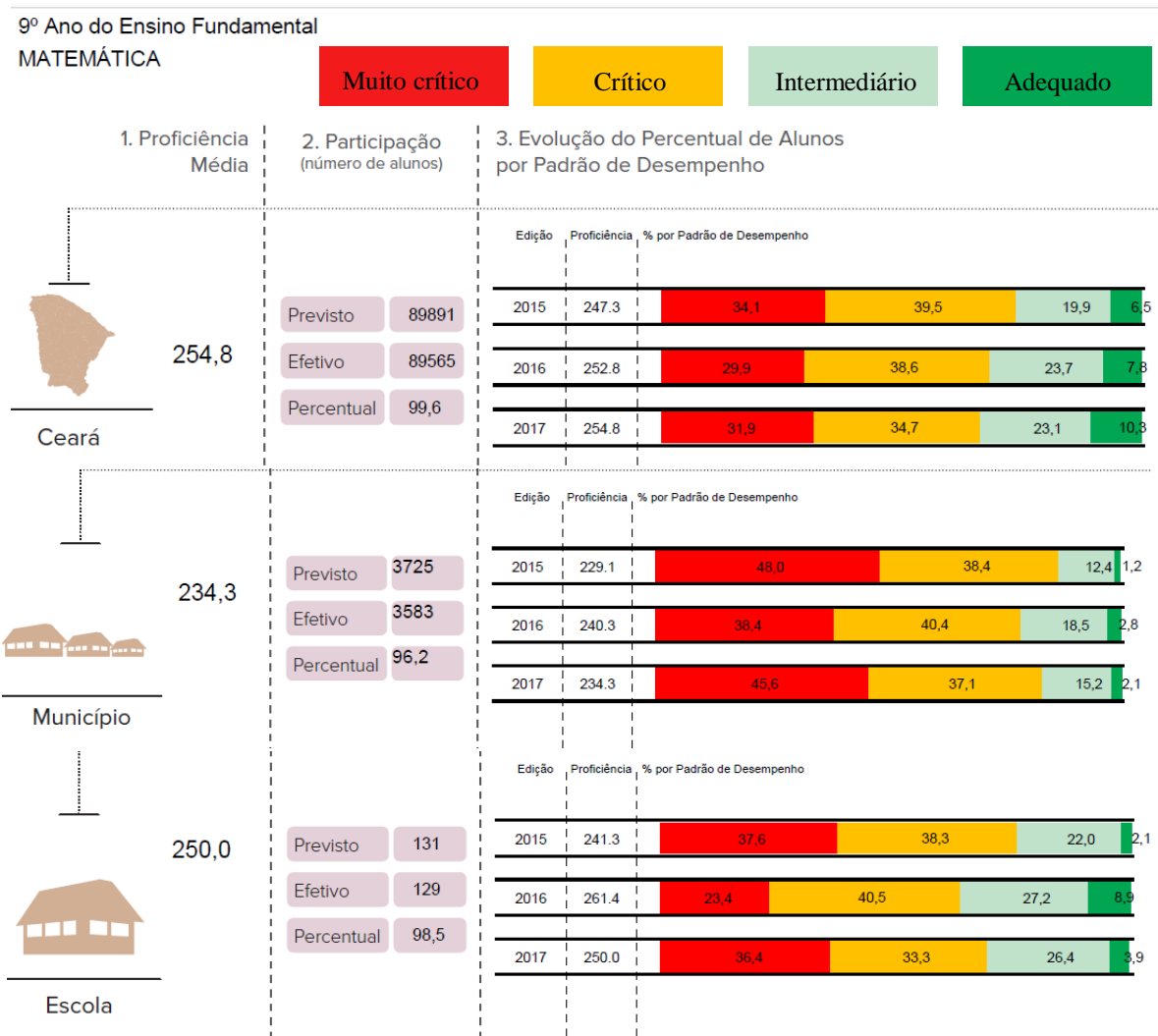
De modo mais específico, o gráfico abaixo representa a proficiência da escola no Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará – SPAECE, na disciplina de Matemática, no período de 2015 a 2017, em comparação com a proficiência do Município de Caucaia e do Estado do Ceará no mesmo período.

Observamos que a escola estava acima da proficiência média do município, porém abaixo da proficiência média do Estado. E de acordo com o índice de avaliação do desempenho – muito crítico, crítico, intermediário e adequado – a escola possuía, em 2017,

aproximadamente 70% dos estudantes nos níveis muito crítico e crítico.

Esse fator é alarmante para o Estado como um todo, pois no mesmo ano, o nível de desempenho geral do Estado do Ceará também se aproximava de 70% dos estudantes entre os níveis muito crítico e crítico. No município a soma desses dois níveis, também no ano de 2017, ultrapassou os 80%. Outro dado que chama a atenção é a baixa porcentagem de alunos no nível adequado.

Figura 3 – Proficiência no SPAECE em Matemática da escola *locus* da pesquisa



Fonte: SPAECE (2017)

O ambiente físico da escola é composto por 8 salas de aula, uma sala para os professores, uma para a coordenação, uma para a direção, uma para a biblioteca, uma sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE), uma secretaria, uma quadra poliesportiva e um refeitório onde se encontra a cozinha/ cantina. Há ainda os banheiros/ vestiários masculino

e feminino localizados na área do refeitório que são de uso comum e os banheiros localizados nas salas do AEE, dos professores e na secretaria

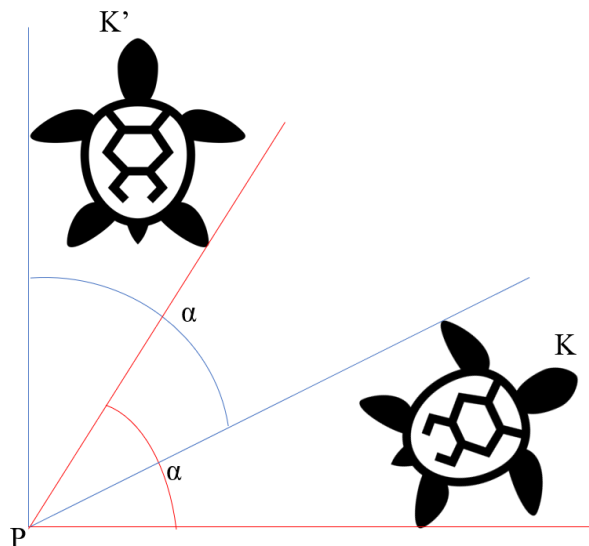
A escola não conta com laboratório de informática, porém no mesmo local existe um polo da Universidade Aberta do Brasil (UAB) dessa maneira foi acordado que para a primeira atividade poderemos utilizar o laboratório da UAB. As demais atividades serão desenvolvidas em sala de aula, que conta com um quadro branco, cadeiras e mesas para os educandos e para o professor.

1 ANÁLISE TEÓRICA

As Isometrias são transformações geométricas que preservam distâncias, também chamadas de movimentos rígidos, ou seja, nesses movimentos o corpo não muda nem de forma, nem de tamanho, mas sim a sua posição (LEDERGERBER-RUOFF, 1982).

Nesta SD abordaremos três tipos de Isometrias: translação, rotação e reflexão numa reta. De acordo com Alvarenga (2009) translação é o movimento que repete um motivo (padrão) em uma linha, dessa forma, resulta no deslocamento de uma forma qualquer, em uma determinada direção e um determinado sentido. Definimos rotação a partir de um ponto P fixo no plano \mathbb{R}^2 e um ângulo α orientado (sentido horário ou anti-horário). A aplicação que tem P como ponto fixo e aplica todo ponto $A \neq P$ no ponto A' segundo um ângulo α orientado, chama-se rotação de centro P e ângulo α (LEDERGERBER-RUOFF, 1982). Ou seja, dado uma figura inicial formada pelo conjunto de pontos K , todos os pontos de K giram em torno de P sob o ângulo α , resultando na figura K' que é congruente a K , conforme a Figura 4.

Figura 4 – Ilustração movimento de rotação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já o movimento de reflexão, também chamado de simetria bilateral, pode ser definido, sem muito rigor, como a simetria de um objeto colocada em frente a um espelho plano. A reflexão por uma reta é uma transformação geométrica que associa cada ponto P ao ponto P' , simétrico em relação a uma reta r , em que r representa o eixo de simetria (ALVARENGA, 2009).

O estudo desses movimentos é contemplado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que prevê o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir do estudo da posição e deslocamento no espaço e o das formas e relações entre propriedades de figura planas e espaciais (BRASIL, 2017).

Também na BNCC observamos um destaque para o das transformações geométricas, em especial o das simetrias. Este conteúdo tem um histórico de “preconceito” nas na educação básica, ficando relegado a segundo plano e em algumas vezes não chega a ser estudado (SANTOS, 2012).

As simetrias estão amplamente presentes no cotidiano. É possível identificá-las na natureza, nos espelhos planos, na arquitetura, nas pavimentações, na arte e etc. Dessa forma, esse corpo de conhecimento apresenta grandes relações com o mundo real oportunizando aos educandos o contato com situações de aprendizagem investigativas.

A investigação deve ser o cerne da aprendizagem, os estudantes necessitam questionar, pesquisar, testar, verificar, errar, fazer inferências para, então, desenvolver a abstração (MENDES, 2009a). Nesse sentido, as habilidades de visualização e representação são fundamentais na aprendizagem da Geometria (FAINGUELERNT, 1999).

As Atividades Didáticas-AD propostas por Santos (2012) recorrem constantemente a essas habilidades, propondo o estudo de simetria e isometria significado pela prática cultural das rendas de bilros. A inter-relação matemática e cultura, compõe uma rica e necessária estratégia para aprendizagem de conceitos de matemáticos, como exprime Gerdes (1991) as dificuldades não são relacionadas aos conceitos matemáticos, mas sim, a ausência desses com o cotidiano.

Para além da relação da matemática com a cultura parte do princípio e da necessidade de se ensinar uma matemática mais crítica nas escolas, uma matemática que questione as desigualdades e injustiças de classes em um mundo cuja a vida humana apresenta cada vez menos valor (D'AMBROSIO, 1997; 2001).

1.1 Público alvo

30 alunos de uma turma de 9.º ano do ensino fundamental anos finais de uma escola pública municipal de Caucaia, cidade localizada na região metropolitana de Fortaleza – Ceará.

1.2 Experiências prévias da turma - *plateau*

A fim de identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre conceitos de simetria realizamos as seguintes questões:

1. O que você entende por paralelismo? E retas paralelas?
2. Quais suas noções sobre simetria? Recorda se já estudou esse assunto? O que você se lembra?
3. Para você o que é translação, rotação e reflexão? Já estudou sobre esse assunto? Diga o que você lembra.

1.2.1 Hipóteses

Os estudantes possuem conhecimentos básicos acerca da localização de objetos no plano;

Não apresentam dificuldades para reconhecer direita e esquerda e possuem noção sobre os conceitos de direção e sentido ou, caso apresentem dificuldades ou desconheçam os conceitos, esses obstáculos poderão ser superados facilmente;

Os sujeitos utilizam computador e possuem familiaridade com programas de edição.

Os estudantes já trabalharam com a representação de figuras em malha quadriculada, tanto em matemática como em outras disciplinas, dessa forma não apresentarão impedimentos ou, caso apresentem, serão facilmente superados durante as atividades.

2 CONTEÚDO DA SESSÃO DIDÁTICA-SD

Transformações geométricas – rotação, translação e reflexão, aplicação das AD propostas em Santos (2012).

3 ACORDO DIDÁTICO

Santos (2016, p. 133) aponta que “[...] acordo didático, para a SF, é o conjunto de preceitos que entrelaça a cumplicidade didática na sala de aula entre professor-conteúdo-aluno.” E complementa que deve constar no planejamento da SD e ser apresentado para o

aluno de forma clara.

Para alcançar os resultados esperados com as AD, esperamos a participação dos alunos em todas as atividades, o professor deve mediar, colaborando com os alunos a fim de esclarecer as dificuldades e possíveis equívocos durante as atividades. O professor não deve fornecer respostas aos alunos, mas sim, mediar as situações a partir de exemplos e, ou contraexemplos cabendo aos educandos refletirem sobre o conteúdo estudado.

Ressaltamos que a colaboração não se dá a partir do fornecimento de respostas. Dessa maneira, os alunos não devem esperar que o professor exponha o conteúdo e responda as questões. Durante o desenvolvimento das atividades, os alunos devem se debruçar sobre as situações desafiadoras de forma individual ou em grupo, de acordo com a proposta de desenvolvimento para cada atividade. E o professor deve fornecer contraexemplos e, ou realizar questionamentos, que proporcionem aos alunos maiores reflexões sobre as atividades.

Nesse contexto, Mendes (2009a, p. 109) afirma “[...] que o desenvolvimento da aprendizagem deve ser alcançado a partir das experiências e reflexões dos próprios estudantes.” Assim, não cabe ao professor fornecer as respostas dos desafios.

A fim de obter melhor aproveitamento das aulas devemos evitar atrasos, por parte do professor e dos alunos, é importante que se cumpra os horários previstos das atividades para que não se tire tempo dos momentos de reflexões, discussões e exposições das atividades e resultados obtidos.

5 SITUAÇÕES DESAFIADORAS

A SF é desenvolvida em quatro fases: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova, não é intuito dessa sessão discorrer sobre cada fase, entretanto sobre a Tomada de Posição é relevante acrescentar que consiste na apresentação de uma situação desafiadora que pode ser na forma verbal, escrita, a partir de jogos ou outras formas, que podem ser realizadas em grupo ou individualmente (SANTOS, 2016).

Nessa SD, as situações desafiadoras são as AD propostas por Santos (2012). As atividades serão realizadas em grupo ou individualmente, como especificado durante o desenvolvimento de cada atividade.

5.1 Atividade 1 – Poliminós

Com essa atividade, pretendemos levar os alunos à ideia de transformação geométrica, o conceito e nomenclatura não serão apresentados, construiremos tetraminós e solicitaremos que façam “mudanças” nessas figuras, dialogando, a cada ação exposta no

desenvolvimento da atividade.

Objetivo de Ensino:

Suscitar discussões acerca de transformações geométricas – rotação, translação e reflexão.

Objetivo de aprendizagem:

Determinar área e perímetro de figuras planas formadas a partir dos poliminós e realizar comparações de área e perímetro de figuras planas após operações de rotação, translação ou reflexão.

Materiais:

Digitais - Computador com programa de edição gráfica instalado – *LibreOffice Impress ou Microsoft PowerPoint; Notebook e Datashow.*

Tomada de Posição I

1.º momento – Conhecendo os poliminós

Iniciaremos a atividade apresentando aos alunos o texto a seguir e faremos uma breve discussão sobre os poliminós, a partir de questionamentos como: Vocês conhecem os poliminós? Já ouviram falar? Já jogaram Tétris⁵?

Poliminós são figuras geométricas planas formadas por um ou mais quadrados congruentes unidos lado a lado. Os poliminós são um caso específico de poliformas, figuras planas construídas unindo-se polígonos básicos idênticos. Os poliminós recebem seus nomes de acordo com a quantidade de quadrados: monominó para um quadrado, dominó para dois quadrados, triminó para três, tetraminó para quatro, pentaminó para cinco e assim por diante. Os poliminós se originam em uma conversa de solomon golomb para o harward mathematical club em 1953 e, posteriormente, foi publicado na american mathematical monthly e na scientific american. (OLIVEIRA, s.d.)⁶

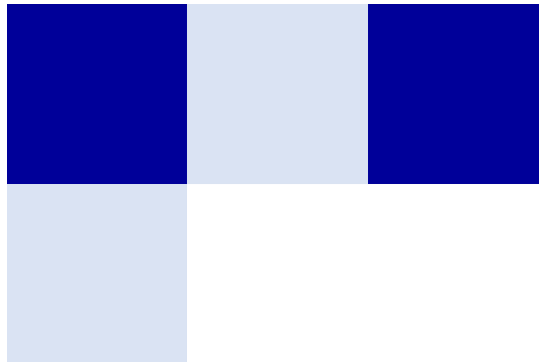
2.º Momento

Os alunos serão orientados a construir quadrados bicolores, congruentes, medindo 3cm de lado. Utilizando a ferramenta “agrupar” devem construir um tetraminó. Conforme a Figura 5 a seguir:

⁵ Tetris é um jogo eletrônico muito popular, desenvolvido por Alexey Pajitnov, Dmitry Pavlovsky e Vadim Gerasimov, e lançado em Junho de 1984.

⁶Material sem data, disponível no endereço: <https://www.fop.unicamp.br/biblioteca/joomla/pdf/ManualSimplificado1.pdf>. Acesso: 04/03/2018.

Figura 5 – Tetraminó construído a partir do *LibreOffice Impress*



Fonte: Elaborado pelo autor

Posterior à construção, os estudantes devem determinar a área e o perímetro da figura, e em seguida utilizando a ferramenta “girar” realizar um giro na figura em um ângulo de 90° no sentido horário.

Maturação

Individualmente, os educandos devem construir o poliminó e buscar estratégias para determinar a área e o perímetro da figura, durante esse momento podem surgir algumas dificuldades com relação ao uso operacional do *software LibreOffice Impress* ou com o cálculo da área e perímetro. Como exposto nas hipóteses a seguir:

Os estudantes superam dificuldades relacionadas ao uso operacional *software*;

Têm contato no cotidiano com as tecnologias digitais.

Possuem dificuldades para determinar o cálculo da área da figura;

Não apresentam dificuldades para determinar o perímetro da figura.

Solução

Nesse momento, os alunos devem expor suas conclusões, percepções e dificuldades. Realizaremos a discussão dos resultados a partir das seguintes perguntas reflexivas: A figura foi alterada? Qual era o perímetro da figura antes do giro? E após o giro? E a área? Se construirmos outra figura e realizarmos os mesmos procedimentos o que poderemos observar? Utilizamos a ferramenta “girar”, pense em outro nome para essa ferramenta. Por que você escolheu esse nome?

Tomada de posição II

Após as discussões, proporemos aos estudantes a seguinte situação desafiadora,

que copiem (ctrl+c) e colem (ctrl+v) a figura, sobrepondo-as. Assim, novamente devem utilizar a ferramenta “girar”, mas selecionar a opção “inverter a figura horizontalmente⁷”.

Maturação

Nesse momento, todos os alunos já terão construído a figura e determinado a área e o perímetro da figura, dessa maneira temos como hipótese que as dificuldades com relação a atividade serão menores, mas ainda podem existir pequenas intercorrências com relação ao uso do *software*.

Solução

Seguiremos com a exposição por parte dos estudantes de suas conclusões e percepções acerca da manipulação da figura, e debateremos a partir das questões reflexivas:

As figuras são congruentes?

Qual a área e o perímetro de cada figura?

Você consegue exemplificar alguma situação ou objeto do seu cotidiano que proporcionaria a mesma mudança na figura?

No primeiro momento realizaremos um giro de 90° no sentido horário e no segundo “inverteremos a figura horizontalmente”, existe diferença entre esses passos? Qual outro nome você atribuiria para essa inversão?

Tomada de posição III

No terceiro momento os alunos devem deletar uma das figuras. E utilizando a ferramenta posição, realizar alterações na localização da figura que restou no *Slide*.

Maturação

Assim, como na Tomada de Posição II a figura já está construída e os estudantes já determinaram a área, igualmente, segue a hipótese de que as adversidades sejam relacionadas ao uso do *software* e que serão superadas sem interferir no desenvolvimento na atividade.

Solução

Seguiremos com a exposição por parte dos estudantes de suas conclusões e percepções acerca da manipulação da figura, e debateremos a partir das questões reflexivas:

⁷No *software PowerPoint* a nomenclatura inverter a figura horizontalmente é equivalente a isometria de reflexão que apresenta eixo de simetria horizontal.

A figura foi alterada?

Quanto medem a área e perímetro, antes e após a mudança na localização?

Qual nome você daria para essa mudança de posição?

Prova

Nesse momento, o professor deve formalizar com os educandos o cálculo da área e perímetro da figura, revisando conceitos já estudados. Também deve observar e avaliar quais percepções os educandos têm sobre os conceitos de translação, rotação e reflexão, se lembram dos conteúdos e se fazem associação dos movimentos realizados a partir da manipulação da figura com os conceitos citados.

5.2 Atividade 2 – Investigação sobre a renda de bilro

Essa atividade deve aproximar os alunos dos conceitos matemáticos já trabalhados com outros que eles irão construir e ampliar em contato com o trabalho com a renda de bilro e com a prática das rendeiras.

Objetivo de ensino:

Aproximar o aluno para o contato com a renda de bilro e a rendeira, bem como, partir da visualização de modelos recorrentes para entender o movimento dos bilros e a habilidade das artesãs em fazer a renda.

Objetivo de aprendizagem:

Identificar e compreender formas geométricas e padrões presentes nas peças de rendas de bilro.

Materiais:

Renda de bilro, vídeo sobre a prática das rendeiras.

Tomada de posição:

Apresentação do vídeo, Jornal Futura - Renda de Bilro 11/03/2013 (Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=3_0-ePmDH2w, acesso: 05 de março de 2018). Após a exibição do vídeo os alunos devem pesquisar sobre as rendas de bilros, bem como sobre a prática das rendeiras a partir do roteiro de investigação a seguir:

1. Qual a origem da renda de bilro?

2. Quais os instrumentos necessários para se fazer a renda de bilro?
3. Quais os pontos comuns praticados no trançado das rendas de bilros?
4. Que tipos de rendas foram encontradas na visita?
5. Quanto tempo demora para se fazer uma peça das mais simples?
6. Quais as situações matemáticas observadas na prática da rendeira?
7. Quais os padrões geométricos identificados nas rendas de bilro?

Maturação:

Individualmente os estudantes devem realizar a pesquisa e responder o roteiro de investigação. A pesquisa será realizada como tarefa de casa. Dessa maneira devem refletir sobre as respostas encontradas e organizar os conceitos e informações encontrados para posterior discussão em sala de aula. A partir da discussão, será possível constatar ou refutar a hipótese de que nem todos os estudantes realizaram a pesquisa, mas ainda assim, conjecturamos que esse número será pequeno e teremos dados para a discussão.

Solução:

No momento da solução discutiremos sobre as respostas encontradas pelos estudantes e suas percepções sobre as rendas de bilros, bem como a relação dessas como os conceitos matemáticos que estão sendo investigados, rotação translação e reflexão.

Suscitaremos o debate a partir dos questionamentos: Como você encontrou esse resultado? Há divergências entre as repostas que você encontrou e os seus colegas? Além dos conceitos matemáticos que já foram citados, você pode citar outros? Quais?

Prova:

A partir da exposição dos educandos o professor deve avaliar os conceitos matemáticos percebidos/ construídos pelos estudantes, principalmente sobre simetria e isometria. Também deve avaliar a ausência de percepção, buscando a compreensão das lacunas conceituais apresentadas pelos educandos, ou mesmo na abordagem das atividades que dificultem a aprendizagem.

5.3 Atividade 3 – Identificação e conceitualização das formas

Essa atividade está relacionada às ideias de visualização e abstração. As rendas de bilros não possuem formas geométricas como observamos no plano euclidiano, porém ao observá-las os alunos devem registrar na malha quadriculada as figuras que percebem nas

rendas de bilros bem como os padrões existentes.

Objetivo de aprendizagem:

Identificar nas rendas de bilro os conceitos intuitivos relacionados às formas geométricas planas e padrões recorrentes.

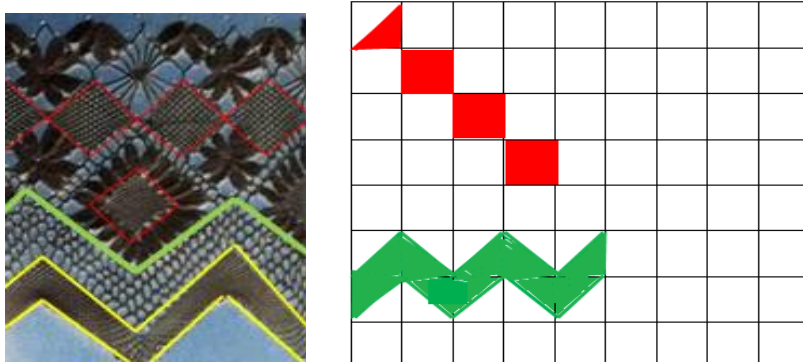
Materiais:

Rendas de bilros, material quadriculado, régua, compasso, lápis.

Tomada de posição:

Proporemos aos alunos a seguinte situação desafiadora, esboçar no papel quadriculado os padrões geométricos encontrados nos modelos das rendas de bilros, identificar esses padrões e formas geométricas, e classificá-los. Conforme exemplo a seguir:

Figura 6 – Identificação das formas nas rendas de bilros



Fonte: Santos (2012, p. 151)

Maturação:

Os estudantes realizarão a atividade em grupos de três ou quatro integrantes, devem observar as rendas de bilros e representar na malha quadriculada os padrões identificados, bem como as figuras geométricas presentes na arte das rendas. Com isso, temos como hipótese que os estudantes não apresentarão dificuldades para realizar a atividade.

Solução:

Após as representações dos grupos exporemos as malhas para a sala e discutiremos sobre os formas e padrões identificados pelos estudantes, bem como a possíveis

dificuldades que tenham surgido durante a maturação.

Suscitaremos o debate a partir dos questionamentos: Quantos lados tem essa figura? Quantos ângulos? Podemos determinar o tamanho dos lados da figura? E os ângulos? De qual maneira podemos fazer isso?

Prova:

Durante a exposição o professor deve avaliar as percepções dos educandos quanto às formas geométricas, bem como se expressam as propriedades e características das figuras para além de citar os nomes. Cabe também a avaliação do contato dos estudantes com as rendas de bilros, suas percepções acerca dessa arte e as contribuições para a aprendizagem dos conceitos.

5.4 Atividade 4 – Conceito de Simetria

A ideia de simetria está ligada mais ao pensamento sobre arte e natureza do que em relação à Matemática. Tais ideias nos fazem pensar que as simetrias estão em toda parte e em nosso redor.

Objetivo de ensino:

Explorar conceitos de simetria a partir da representação de padrões presentes nas rendas de bilros. Suscitar discussões sobre o conceito de simetria e os conteúdos estudados, bem como realizar atividades em grupo.

Objetivo de aprendizagem:

Identificar nos padrões presentes nas rendas de bilros os movimentos de translação, rotação e reflexão e representá-los no papel quadriculado, bem como classificar os movimentos identificados.

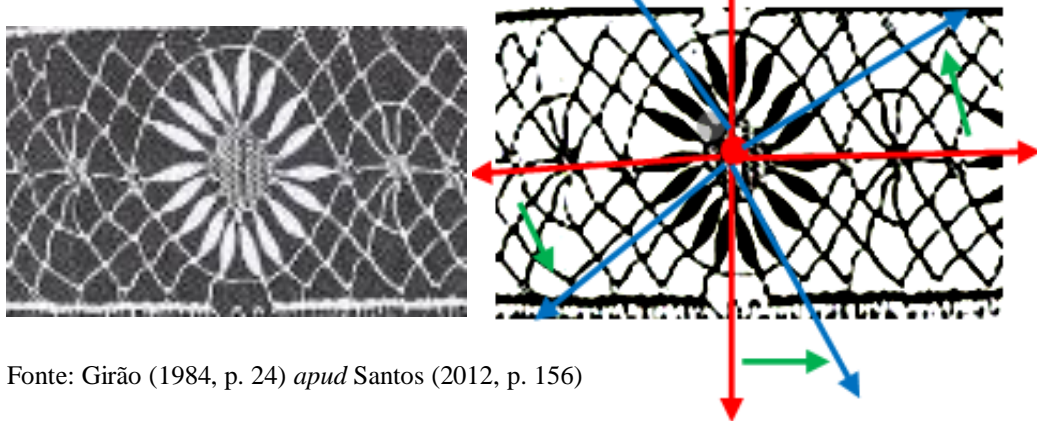
Materiais:

Figuras das rendas de bilro e outros desenhos similares, peças de rendas de bilro, papel quadriculado, lápis de cor, caneta e régua.

Tomada de posição:

Solicitar aos alunos que façam desenhos diversos dos tipos de simetria encontrados na renda de bilro a ser analisada. Exemplo:

Figura 7 – Exemplo movimento de rotação



Fonte: Girão (1984, p. 24) *apud* Santos (2012, p. 156)

Maturação:

Os estudantes realizarão a atividade em grupos de três ou quatro integrantes, devem observar as rendas de bilros e representar na malha quadriculada os padrões de simetria identificados, bem como classificá-lo, rotação, translação e ou reflexão. Com isso, temos como hipótese que os estudantes apresentarão pouca dificuldade durante o desenvolvimento da atividade.

Com base na análise do *plateau* identificamos que os estudantes apresentaram poucas noções sobre o conceito de simetria, entretanto por se tratar de 9.º ano do ensino fundamental anos finais partimos da premissa que os estudantes não se recordam de já terem estudado os conteúdo, mas que a partir das atividades já desenvolvidas até o momento terão mais facilidade em resolver a atividade proposta.

Solução:

Após os grupos terem realizados suas identificações, representações e classificações, exporemos as malhas para a sala e discutiremos sobre as simetrias, translação, rotação e reflexão observadas nas rendas de bilros.

Suscitaremos o debate a partir dos questionamentos: Como podemos identificar o movimento de translação? E o de reflexão? E o de rotação? Além do movimento que você identificou nessa renda de bilro, pode identificar outro? Você consegue explicar o que é translação? E reflexão? E Rotação?

Prova:

Nesse momento devemos realizar a comparação dos desenhos realizados pelos alunos e a renda de bilro original e verificar a validação dos conceitos explorados por eles,

bem como os conceitos que ainda não foram apreendidos.

5.5 Atividade 5 – Ampliando os conceitos construídos

Essa atividade reforça as habilidades de visualização e representação, bem como oportuniza aos estudantes organizarem suas percepções e compreensões acerca do conteúdo investigado: rotação, translação e reflexão.

Objetivo de ensino:

Explorar conceitos de simetria a partir da representação de padrões presentes nas rendas de bilros. Suscitar discussões sobre o conceito de simetria e os conteúdos estudados, bem como realizar atividades em grupo.

Objetivo de aprendizagem:

Construir o conceito de isometria: translação, rotação e reflexão com base nos desenhos realizados pelos alunos a partir dos padrões identificados nas rendas de bilro.

Materiais:

Cartolina, lápis, compasso, régua, rendas de bilros, folhas de papel ofício, lápis de cor, gizes de cera entre outros.

Tomada de posição:

Os alunos devem criar cartazes expondo os conceitos matemáticos estudados sobre os padrões geométricos e conceitos de isometria estudados – translação, rotação e reflexão dialogando transversalmente com as rendas de bilros, bem como seu contexto histórico.

Maturação:

Os estudantes realizarão a atividade em grupos de três ou quatro integrantes, devem observar as rendas de bilros e representar na malha quadriculada os padrões de simetria identificados, bem como classificá-los, em: rotação, translação e ou reflexão.

Cada grupo deverá apresentar, no mínimo, três exemplos, um de cada movimento, além da representação dos movimentos os estudantes devem sintetizar suas compreensões nos cartazes para posterior exposição junto aos demais colegas.

Com isso, temos como hipótese que os estudantes terão mais facilidade em

realizar a atividade, e possuirão argumentos para expressar suas noções sobre o conceito de simetria.

Solução:

Após os grupos terem realizados seus cartazes, iniciaremos as discussões sobre as simetrias, translação, rotação e reflexão observadas nas rendas de bilros.

Suscitaremos o debate a partir dos questionamentos: Como podemos identificar o movimento de translação? E o de reflexão? E o de rotação? Além do movimento que você identificou nessa renda de bilro, pode identificar outro? Você consegue explicar o que é translação? E reflexão? E Rotação?

Prova:

A partir da comunicação oral, os alunos devem expor verbalmente os conhecimentos que construíram. Dessa maneira, o professor deve avaliar se os alunos conseguem transmitir oralmente os conceitos construídos com a exploração didática da renda de bilro.

5.6 Atividade 6 – Consolidação da aprendizagem

As atividades que seguem são de fixação e ampliação dos conceitos construídos. Dessa maneira, resgataremos os conteúdos até agora estudados e formalizados.

Tomada de posição:

1. Observe a figura da renda de bilro e vamos analisar o tipo de padrão que ela apresenta.

Figura 8 – Faixa da renda de bilro



Fonte: Girão (1984, p. 24) *apud* Santos (2012, p. 156)

Agora observe a mesma figura com as cores permutadas entre si e destaque a classificação de transformações isométricas no plano, dê exemplos dos movimentos de

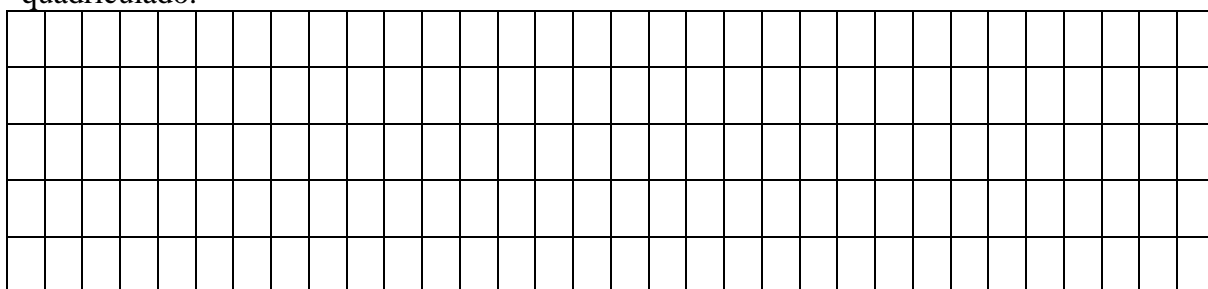
translação, rotação e reflexão.

Figura 9 – Faixa da renda de bilro com cores permutadas entre si



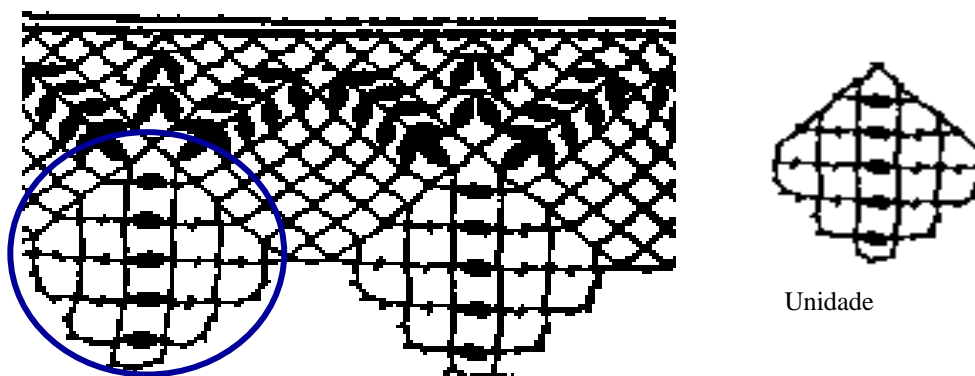
Fonte: Girão (1984, p. 260) *apud* Santos (2012, p. 162)

2. Confeccione uma tira seguindo o mesmo padrão da renda de bilro anterior, usando o quadriculado.



3. Observe a figura a seguir, a unidade padrão escolhida e vamos construir outra figura a partir dela e depois analisar o tipo de simetria.

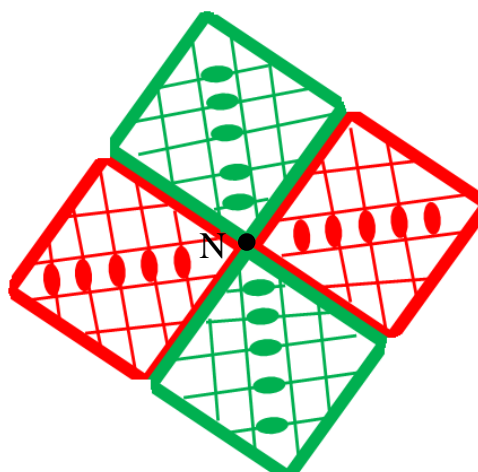
Figura 10 – Unidade padrão a partir da renda de bilro



Fonte: Santos (2012, p. 170)

a) Observe a outra figura a seguir. Ela segue a unidade padrão extraída da figura anterior?

Figura 11 – Figura construída a partir da unidade padrão



Fonte: Santos (2012, p. 170)

- b) Observe o centro de rotação N.
- c) Aplique à figura uma rotação de centro em N e amplitude 90° .
- d) Qual a cor obtida por sobreposição?
- e) Para confirmar sua conjectura, desenhe a figura duas vezes.

Maturação:

Os estudantes realizarão a atividade de forma individual, nesse momento deverão se debruçar sobre cada situação proposta na atividade e fazer suas testagens e conjecturas a partir dos conceitos estruturados durante as atividades anteriores.

Solução:

Após todos os estudantes realizarem a atividade, iniciaremos um debate sobre as atividades desenvolvidas até aqui e suas compreensões acerca do conceito de simetria, bem como o interesse pela prática das rendas de bilros. Suscitaremos o debate a partir das seguintes questões, vocês conheciam as rendas de bilros? Gostaram de estudar sobre simetria a partir das rendas de bilros? Sabem explicar o que são os movimentos de rotação, de translação e de reflexão? Podem dar exemplos desses movimentos em situações para além das rendas de bilros?

Prova:

Nesse momento, o professor deve formalizar matematicamente os conceitos

estudos e avaliar se os estudantes compreenderam o conceito de simetria, bem como as dificuldades que ainda se apresentam com relação à construção desse conceito.

Avaliação:

A partir do *plateau* é possível identificar se o educando avançou durante as mediações-observações, dessa forma observaremos os resultados e dúvidas apresentados de forma oral, na resolução das atividades, nos momentos de partilha em grupo e para o grupo a fim de identificar se os estudantes demonstram avanços com relação a aprendizagem dos conceitos de rotação, translação e reflexão.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, L. G. **Geometria e imagem**. [S.l.: s.n.], 2009.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 3ª versão. Brasília, DF: Ministério da Educação. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 21 de março de 2018.

BRASIL. Nota Técnica nº 040, de 17 de dezembro de 2014. Este estudo introduz um indicador para mensurar o nível de complexidade de gestão das escolas de educação básica brasileira. **Indicador Para Mensurar A Complexidade da Gestão na S Escolas A Partir dos Dados do Censo Escolar da Educação Básica**. Brasília, DF, Disponível em: <http://download.inep.gov.br/informacoes_estatisticas/indicadores_educacionais/2014/escola_complexidade_gestao/nota_tecnica_indicador_escola_complexidade_gestao.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2018.

D'AMBROSIO, U. **Transdisciplinaridade**. São Paulo: Palas Athena, 1997.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática - elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática: representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul. 1999.

GERDES, P. **Etnomatemática: cultura, matemática, educação**: colectânea de textos. Maputo: Instituto Superior Pedagógico. 1991.

IDEB: figura. In: INEP. 2017. Disponível em: < <http://idebescola.inep.gov.br/ideb/consulta-publica>> Acesso em: 09 de setembro de 2018.

LEDERGERBER-RUOFF, E. B. **Isometrias e ornamentos do plano euclidiano**. Atual, 1982.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino da trigonometria In: ANTONIO MIGUEL et al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria

da Física. 2009a.

SANTOS, M. J. C. dos. **Geometria e simetria nas rendas de bilro**: contribuições para a Matemática escolar. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2012.

SANTOS, M. J. C. dos. Reflexões sobre a formação de educadores matemáticos: a metodologia de ensino sequência fedathi. *In*: DIAS, A. M. I.; MAGALHÃES, E. B.; FERREIRA, G. N. L. (Org). **A aprendizagem como razão do ensino**: por uma diversidade de sentidos. Fortaleza: Imprece. 2016.

SANTOS, M. J. C. dos. A formação do professor de matemática: metodologia sequência fedathi (sf). **Revista Lusófona de Educação**, [S.l.], v. 38, n. 38, p. 81-96. dez. 2017. Disponível em: <<http://revistas.ulusofona.pt/index.php/rleducacao/article/view/6261>>. Acesso em: 10 jul. 2018.

SOUSA, F. E. E. de. et al. (org). **Sequência Fedathi**: uma proposta para o ensino de matemática e ciências. Fortaleza: Edições UFC. 2013.

SPAECE: figura. In: CAED. 2017. Disponível em: <<http://resultados.caedufjf.net/resultados/publicacao/publico/escola.jsf>>. Acesso em: 09 de setembro de 2018.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

APÊNDICE B – ROTEIRO DE INVESTIGAÇÃO

A presente pesquisa tem como objetivo analisar o processo de aprendizagem de 30 alunos matriculados no 9.º ano do ensino fundamental anos finais, especialmente sobre os conceitos matemáticos que envolvem simetria e isometria a partir das premissas das Atividades Didáticas-AD que relacionam as rendas de bilros e a matemática cultural.

Já de modo específico, objetivamos, utilizar as Atividades Didáticas-AD propostas por Santos (2012), considerando as várias interpretações, resoluções e ampliações na construção dos conceitos de transformação geométrica – translação, reflexão e rotação; identificar a proficiência dos alunos no desenvolvimento das atividades propostas sobre rotação, translação e reflexão; por fim, avaliar se os alunos ao final das AD construíram o conceito de transformação geométrica – translação, reflexão e rotação, com vistas ao uso desse conceito em outras situações e contextos.

Este roteiro tem a intenção de orientar a observação durante as atividades, mas não é restritivo, anote tudo que considerar relevante e o máximo possível de informações. Obrigado por colaborar!

1. Como se dá o contato inicial dos alunos com as rendadas de bilro? Qual comportamento e ações eles expressam? Como?
2. Os alunos conhecem ou informam lembrar sobre conceito de transformação geométrica – rotação, translação e reflexão?
3. Os alunos apresentam interesse pelo assunto estudado?
4. Os alunos demonstram conhecimento matemático sobre o conteúdo abordado?
5. Expressam o interesse verbalmente? Interagem e participam das atividades?
6. Os alunos apresentam dificuldades com relação ao conteúdo estudado?
7. Expõe as dificuldades encontradas? Como?
8. Existe um debate e partilha de informações durante o desenvolvimento das

atividades?

9. Os alunos demonstram compreensão sobre as atividades? Compreendem claramente a exposição dos objetivos?

10. Há dispersão durante o desenvolvimento da atividade?