UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANDRÉ LUIZ ARAÚJO DA COSTA

ANÉIS TOPOLÓGICOS, APLICAÇÕES HOMOGÊNEAS E PRIMALIDADE

FORTALEZA
2018

ANDRÉ LUIZ ARAÚJO DA COSTA

ANÉIS TOPOLÓGICOS, APLICAÇÕES HOMOGÊNEAS E PRIMALIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues
Coorientadora: Profª. Dra. Giselle Antunes Monteiro.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C87a Costa, André Luiz Araújo da.
Anéis topológicos, aplicações homogêneas e primalidade / André Luiz Araújo da Costa. – 2018.
72 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues.
Coorientação: Profa. Dra. Giselle Antunes Monteiro.

1. Aplicações homogêneas contínuas. 2. Quaseanel. 3. Primalidade. 4. Anel topológico. I. Título.
CDD 510

ANDRÉ LUIZ ARAÚJO DA COSTA

ANÉIS TOPOLÓGICOS, APLICAÇÕES HOMOGÊNEAS E PRIMALIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Álgebra Topológica.

Aprovada em: 19/04/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Dra. Giselle Antunes Monteiro (Coorientadora)
Czech Academy of Sciences (Praga)

Prof. Dr. Elkin Oveimar Quintero Vanegas
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

Prof. Dr. Francisco Enio do Nascimento Lima
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho a Jesus Cristo, que me tornou santo através da sua morte.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus Pai, pelo seu infinito amor que excede todo entendimento;
Ao meu salvador, Jesus Cristo, por me fazer coparticipante de sua glória;
Ao meu amigo, Espírito Santo, por estar comigo em todos os momentos;
À minha família, em especial minha mãe Isabel, meu pai Luiz, meu avô Francisco e às minhas tias e primos, pela torcida e apoio no decorrer desta etapa;
À minha namorada Priscila, por me apoiar e incentivar em todos os momentos dessa trajetória com a sua perfeita companhia, além de ser a mulher mais linda do mundo;
Ao corpo de Cristo, em especial aos pastores William, Samara, Jacaúna, Jamilly, Jabes e Cristiane, por me amarem como filho e cuidarem de mim, e aos amigos Gerardo, Danilo, Rayane Sales, Rayane Peres e Larissa, por serem irmãos tão preciosos;
Ao meu orientador Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues, por aceitar o desafio de me orientar e fazer isso com tanto zelo;
À minha coorientadora Profª. Dra. Giselle Antunes, pelas orientações, em particular, por ter vindo de tão longe me ajudar neste trabalho;
Aos demais professores participantes da banca examinadora Prof. Elkin e Prof. Enio Lima pelo tempo, pela disponibilidade;
A todos os professores do departamento de Matemática da UFC, em especial Alexandre Fernandes, Alberto Maia, Edson Sampaio, Franscisco Pimentel, Lev Birbrair, Fernanda Camargo e Frederico Girão, pela sua colaboração na minha formação;
Ao Prof. Nazareno Oliveira pelo apoio em diversas etapas da minha carreira discente;
Ao Prof. Eduardo Leão pelos conselhos;
A todos os meus colegas de curso, em especial Emanoel, Diego, Hamilton, Danielson, Felipe, Erivamberto, Thiátila, Peron, Ronildo, Bruno, Massimo, Gauss, Sílvio, Thiago pelos vários momentos que compartilhamos;
À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

“O princípio da sabedoria é o temor a Deus.” (Salomão)

RESUMO

Sejam R um anel topológico e G um R-módulo topológico à direita. Estudaremos a estrutura algébrica do conjunto $N_R(G) = \{f : G \to G \text{ tal que } f \text{ é } R\text{-homogênea e contínua}\}$. Estabeleceremos algumas relações entre a primalidade do anel R e a primalidade do quaseanel $N_R(G)$. Sob algumas circunstâncias topológicas, encontraremos condições necessárias e suficientes para que $N_R(G)$ tenha estrutura de anel.

Palavras-chave: Aplicações homogêneas contínuas. Quaseanel. Primalidade. Anel topológico.

ABSTRACT

Let R be a topological ring and G a right topological R-module. We study the algebraic structure of the set $N_R(G) = \{f : G \to G$ such that f is R-homogeneous and continuous$\}$. We establish some relations between the primeness of the ring R and the primeness of the near-ring $N_R(G)$. Under some topological circumstances, we find necessary and sufficient conditions for $N_R(G)$ to have a ring structure.

Keywords: Continuous homogeneous map. Near-ring. Topological ring.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um quaseanel é um conjunto munido de duas operações binárias, adição e multiplicação, que satisfazem as propriedades de um anel exceto a comutatividade da adição e a lei distributiva, esta última valendo unilateralmente. A primeira aparição desta estrutura algébrica ocorreu em 1905 quando L. E. Dikson mostrou que existem "corpos" que satisfazem a distributividade em apenas um dos lados. G. Pilz publicou o primeiro livro sobre quaseanéis, a saber *PILZ, G.* (1945). O exemplo básico de um quaseanel é o conjunto de aplicações de um grupo aditivo nele mesmo, considerando a adição pontual e a composição como as operações binárias. A importância de estudar quaseanéis de aplicações em grupos se dá pelo fato de que todo quaseanel com elemento identidade pode ser mergulhado em um quaseanel (com elemento identidade) de aplicações de um grupo aditivo nele mesmo.

Um grupo topológico é um grupo munido de uma topologia segundo a qual a adição de dois elementos e a inversão de um elemento definem aplicações contínuas. Os grupos topológicos foram estudados pela primeira vez por Schreirer em 1926 e por F. Leja em seu artigo *LEJA, F.* (1927). Depois dos grupos topológicos outras estruturas algébricas começaram a ser estudadas com uma abordagem semelhante, assim surgiram os anéis e módulos topológicos que, em particular, são grupos topológicos com respeito à operação associativa.

Nas preliminares fazemos uma introdução a quaseanéis e grupos topológicos apresentando as definições necessárias e alguns resultados iniciais. Além disso, dedicamos uma seção das preliminares ao estudo de ideais de quaseanéis e primalidade, onde estão contidos resultados importantes para o desenvolvimento da dissertação. Por fim, definimos o que será o nosso principal objeto de estudo, o quaseanel das aplicações homogêneas contínuas em um módulo topológico.

No capítulo 3 começamos a trabalhar os resultado presentes no artigo base, a saber "*Topological rings, homogeneous functions, and primeness*" (2017) dos autores G. L. Booth, J. H. Meyer e K. Mogae. Iniciamos considerando um anel topológico R que possui elemento identidade como um R-módulo topológico à direita. Chegamos à conclusão de que toda aplicação R-homogênea em R é contínua e, além disso, o quaseanel das aplicações R-homogêneas de R para R, $N_R(R)$, é isomorfo a R. Assim, $N_R(R)$ é um anel que herda a primalidade de R. Em seguida consideramos R^2 como R-módulo topológico à direta, onde as aplicações R-homogêneas não são sempre contínuas. Depois disso, fazemos um estudo mais profundo sobre a relação entre a primalidade do anel R e do quaseanel $N_R(R^2)$, onde apresentamos uma série de resultados similares usando várias noções de primalidade.

No quarto e último capítulo, iniciamos mostrando que, se R é um subanel denso no anel topológico G onde R possui elemento identidade de G, então $N_R(G)$ é isomorfo a G, em particular, $N_R(G)$ é um anel. Neste caso, $N_R(G)$ herda a primalidade de G. Sendo assim, começamos a estudar o caso em que R é um ideal à esquerda do anel topológico G que não necessariamente contém elemento identidade de G. Nesse caso somos conduzidos a seguinte pergunta: Sob que condições $N_R(G)$ será um anel? Esse questionamento foi tratado no caso em que R é um anel finito em *MAXSON C. J.* and *SMITH K. C.* (1980). Já no fim do trabalho conseguimos obter uma caracterização, no caso em que estamos trabalhando, de quando $N_R(G)$ é um anel, respondendo à pergunta proposta acima. Os últimos resultados apresentam relações entre a primalidade do anel topológico R e do quaseanel $N_A(R)$ onde A é um ideal (ou ideal à esquerda) de R.

2 PRELIMINARES

2.1 Quaseanéis

Dedicaremos esta seção à introdução da estrutura algébrica chamada quaseanel. A maioria das definições e resultados a seguir podem ser encontrados, ainda que em menor riqueza de detalhes ou com demonstração omitida, em *PILZ, G.* (1983).

Definição 2.1. *Um quaseanel à direita é uma terna $(N,+,\cdot)$, onde N é um conjunto não vazio, $+$ e $\cdot$ são operações binárias de N (que chamamos de adição e multiplicação, respectivamente) satisfazendo:*
$(A1)$ $(N,+)$ *é um grupo (não necessariamente abeliano);*
$(A2)$ $(N,\cdot)$ *é um semigrupo;*
$(A3)$ $(a+b)c = ac+bc$*, para quaisquer* $a,b,c \in N$.

Se, em vez de $(A3)$, valer
$(A3')$ $a(b+c) = ab+ac$, para quaisquer $a,b,c \in N$,
dizemos que $(N,+,\cdot)$ é um quaseanel à esquerda.

Segue da definição acima que todo anel é um quaseanel, tanto à direita como à esquerda.

Em um anel R qualquer, sabemos que $0n = 0$ e $n0 = 0$, para todo $n \in R$. No entanto, em quaseanéis, apenas a primeira igualdade sempre ocorre. Com efeito,

$$0n = (0+0)n = 0n + 0n,$$

o que implica $0 = 0n$. Uma vez que não temos a distributividade à esquerda, nem sempre a igualdade $n0 = 0$ é válida.

Observação. A menos de menção explícita do contrário, neste trabalho vamos nos referir a quaseanel à direita simplesmente por quaseanel.

Definição 2.2. *Dado um quaseanel $(N,+,\cdot)$, dizemos que $S \subseteq N$ é um subquaseanel de N se $(S,+,\cdot)$ é um quaseanel.*

Definição 2.3. *Dado um quaseanel N, dizemos que $n \in N$ é um elemento zerossimétrico de N se $n0 = 0$.*

Definição 2.4. *Dado um quaseanel N, dizemos que $n \in N$ é um elemento constante de N se $n0 = n$.*

Provaremos adiante que o conjunto $N_0 = \{n \in N : n0 = 0 = 0n\}$ dos elementos zerossimétricos e o conjunto $N_c = \{n \in N : n0 = n\}$ dos elementos constantes de N, chamados de parte zerossimétrica e parte constante de N, respectivamente, são subquaseanéis de N.

Observação. Se $n \in N_c$, então $nx = n$, para todo $x \in N$. Com efeito,

$$n = n0 = n(0x) = (n0)x = nx.$$

Proposição 2.5. *Seja N um quaseanel. Então $(N_0, +)$ é um subgrupo normal de $(N, +)$ e N_0 e N_c são subquaseanéis de N. Além disso, $N = N_0 + N_c$ e $N_0 \cap N_c = \{0\}$.*

Demonstração. Dados $0 \in N$ e $n_1, n_2 \in N_0$, temos que $0 \cdot 0 = 0$, logo $0 \in N_0$. Além disso,

$$(n_1 + n_2)0 = n_10 + n_20 = 0 + 0 = 0,$$

o que nos permite concluir que $(n_1 + n_2) \in N_0$. Temos também que

$$(-n_1)0 = 0 + (-n_1)0 = n_10 + (-n_1)0 = (n_1 + (-n_1))0 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $-n_1 \in N_0$. Além disso,

$$(n_1n_2)0 = n_1(n_20) = n_1(0) = 0,$$

o que nos permite concluir que $n_1n_2 \in N_0$. Logo $(N_0, +)$ é subgrupo de $(N, +)$ e $(N_0, +, \cdot)$ é subquaseanel de $(N, +, \cdot)$, uma vez que $(N_0, +)$ herda a propriedade de associatividade de $(N, +)$ e $(N_0, +, \cdot)$ herda as propriedades de associatividade e distributividade à direta de $(N, +, \cdot)$.

Agora, vamos concluir que $(N_0, +)$ é subgrupo normal de $(N, +)$ mostrando que

$$x + N_0 + (-x) \subseteq N_0,$$

para todo $x \in N$. Com efeito, dado $n \in N_0$, temos que, para todo $x \in N$, vale

$$[x + n + (-x)]0 = x0 + [n + (-x)]0 = x0 + n0 + (-x)0 = x0 + (-x)0 =$$

$$= [x + (-x)]0 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Logo $(N_0, +)$ é subgrupo normal de $(N, +)$.

Quanto a $(N_c, +, \cdot)$, dados $0 \in N$ e $n_3, n_4 \in N_c$, temos que $0 \cdot 0 = 0$. Logo $0 \in N_c$. Além disso, vale que

$$(n_3 + n_4)0 = n_30 + n_40 = n_3 + n_4.$$

Portanto, $(n_3 + n_4) \in N_c$. Também é verdade que

$$0 = 0 \cdot 0 = [(n_3 + (-n_3)]0 = n_30 + (-n_3)0 = n_3 + (-n_3)0.$$

Logo $(-n_3)0 = -n_3$. Assim, $(-n_3) \in N_c$. Além disso,

$$(n_3n_4)0 = n_3(n_40) = n_3n_4.$$

Portanto, $n_3n_4 \in N_c$. Logo $(N_c, +, \cdot)$ é subquasenel de $(N, +, \cdot)$ já que este herda as propriedades de associatividade e distributividade à direta de $(N, +, \cdot)$.

Agora vamos mostrar que $N = N_0 + N_c$. Com efeito, dado $n \in N$, temos que $n0 = m_2$, para algum $m_2 \in N$. Seja $m_1 = n + (-m_2)$. Sendo assim, temos que

$$m_1 + m_2 = n + (-m_2) + m_2 = n.$$

Afirmamos que $m_1 \in N_0$ e $m_2 \in N_c$. Com efeito,

$$m_20 = (n0)0 = n(0 \cdot 0) = n0 = m_2,$$

o que nos permite concluir que $m_2 \in N_c$. Além disso,

$$m_10 = [n + (-m_2)]0 = n0 + (-m_2)0 = m_2 + (-m_2)0 = m_20 + (-m_2)0 =$$

$$= [m_2 + (-m_2)]0 = 0 \cdot 0 = 0,$$

o que implica $m_1 \in N_0$. Logo $N = N_0 + N_c$.

Finalmente, se $n \in N_0 \cap N_c$, temos $n = n0 = 0$, ou seja, $n = 0$. Portanto, $N_0 \cap N_c = \{0\}$. $\square$

Definição 2.6. *Se $N = N_0$, dizemos que N é um quaseanel zerossimétrico.*

Definição 2.7. *Se $N = N_c$, dizemos que N é um quaseanel constante.*

Definição 2.8. *Sejam $(N, +, \cdot)$ um quaseanel e $S \subseteq N$ não vazio.*

(a) *S é invariante à esquerda em N se satisfaz $NS = \{na : n \in N, a \in S\} \subseteq S$. Um subgrupo de $(N, +)$ invariante à esquerda em N é chamado um N-subgrupo;*

(b) *S é invariante à direita em N se $SN = \{an : n \in N, a \in S\} \subseteq S$;*

(c) *S é invariante em N se é invariante à direita e à esquerda em N;*

(d) *S é dito um ideal à esquerda de N se $(S, +)$ é um subgrupo normal de $(N, +)$ tal que $n(m + a) - nm \in S$, para quaisquer $n, m \in N$ e $a \in S$;*

(e) *S é dito um ideal à direita de N se $(S, +)$ é um subgrupo normal de $(N, +)$ que é invariante à direita em N;*

(f) *S é um ideal de N, denotamos $S \triangleleft N$, se S é um ideal à direita e à esquerda de N.*

Definição 2.9. *Dado um quaseanel N e $x \in N$, definimos o ideal gerado por x, denotado por $\langle x \rangle$, como o menor ideal de N que contém x.*

É claro que, se N é um quaseanel, então $\{0\}$ e N são ideais de N.

Proposição 2.10. *Sejam N um quaseanel, I e J ideais de N. Então $I \cap J$ e $I + J$ são ideais de N.*

Demonstração. Como I e J são subgrupos normais de $(N, +)$, temos que $I \cap J$ é subgrupo normal de $(N, +)$. Como $I \cap J \subseteq I$ e $I \cap J \subseteq J$, temos que

$$(I \cap J)N \subseteq IN \subseteq I$$

e

$$(I \cap J)N \subseteq JN \subseteq J.$$

Logo $(I \cap J)N \subseteq I \cap J$. Além disso, dado $a \in I \cap J$, temos que $n(m + a) - nm \in I$ e $n(m + a) - nm \in J$, para quaisquer $n, m \in N$. Assim, $n(m + a) - nm \in I \cap J$. Portanto, $I \cap J$ é ideal do quaseanel N.

Quanto a $I + J$, considere $a \in I$ e $b \in J$. Dado $x \in N$, vejamos que existe $y \in N$ tal que $(a + b) + x = y + (a + b)$. Com efeito, sabemos que $(a + b) + x = a + (b + x)$, e como J é subgrupo normal, existe $x' \in N$ tal que $b + x = x' + b$. Portanto,

$$(a + b) + x = a + (x' + b) = (a + x') + b.$$

Como I é subgrupo normal, existe $y \in N$ tal que $a + x' = y + a$. Logo $(a + b) + x = y + (a + b)$, o que nos permite concluir que $I + J$ é subgrupo normal de N. Como $IN \subseteq I$ e $JN \subseteq J$, qualquer que seja $n \in N$, vale que

$$(a + b)n = an + bn \in IN + JN \subseteq I + J,$$

o que nos permite concluir que $I + J$ é invariante à direita. Finalmente, dados $n, m \in N$, como I e J são subgrupos normais, temos que

$$n[m + (a + b)] - nm = n[m + (a + b + (-a) + a)] - nm =$$

$$= n[(m + a + b + (-a)) + a] - nm =$$

$$= n[(m + a + b + (-a)) + a] - n(m + a + b + (-a)) + n(m + a + b + (-a)) - nm.$$

Note que $b' = a + b + (-a) \in J$, uma vez que J é subgrupo normal. Portanto,

$$n[m + (a + b)] - nm = n[(m + b') + a] - n(m + b') + n(m + b') - nm,$$

onde $n[(m + b') + a] - n(m + b') \in I$ e $n(m + b') - nm \in J$, o que nos permite concluir que $n[m + (a + b)] - nm \in I + J$. Logo $I + J$ é um ideal de N. $\square$

Definição 2.11. *Se os únicos ideais de um quaseanel N são $\{0\}$ e N, dizemos que N é um quaseanel simples.*

Dado um quaseanel $(N, +, \cdot)$ e $I \lhd N$, defimos o conjunto $N/I = \{n + I : n \in N\}$, que será munido com as operaçãoes definidas por $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$ e $(x + I) \cdot (y + I) = xy + I$, para quaisquer $x, y \in N$. Vejamos que N/I, munido com as operações acima, é um quaseanel.

Proposição 2.12. *Sejam N um quaseanel e I um ideal de N. Então N/I é um quaseanel.*

Demonstração. Inicialmente, vejamos que as operações definidas acima estão bem definidas. Como I é um subgrupo normal de $(N, +)$, temos que a operação de adição está bem definida, pois é a mesma definida para quociente de grupos. Quanto à multiplicação, sejam $a, b \in N$ e tome $a' \in a + I$ e $b' \in b + I$. Como I é subgrupo normal, temos que $a+I = I+a$. Sendo assim, existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $a' = x_1+a$ e $b' = b+x_2$. Queremos mostrar que $a'b' \in (ab) + I$, ou seja, que $a'b' - ab \in I$. Com efeito,

$$a'b' - ab = (x_1 + a)(b + x_2) - ab = x_1(b + x_2) + a(b + x_2) - ab.$$

Como I é ideal de N, em particular ideal à direita, temos que $x_1(b + x_2) \in I$, e como I é ideal à esquerda, temos que $(a(b + x_2) - ab) \in I$. Portanto,

$$a'b' - ab = x_1(b + x_2) + (a(b + x_2) - ab) \in I.$$

Assim, as operações de N/I estão bem definidas.

Denotando a classe $x + I$ de um elemento $x \in N$ por $\overline{x}$, verifiquemos que N/I é um quaseanel. Vejamos que $(N/I, +)$ é grupo. Com efeito, dados $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in N/I$, temos que

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{(a + b)} + \overline{c} = \overline{(a + b) + c} = \overline{a + (b + c)} = \overline{a} + \overline{(b + c)} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}).$$

Além disso, temos que

$$\overline{a} + \overline{(-a)} = \overline{a + (-a)} = \overline{0} = \overline{(-a) + a} = \overline{(-a)} + \overline{a},$$

e que

$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a + 0} = \overline{a} = \overline{0 + a} = \overline{0} + \overline{a}.$$

Agora, vejamos que $(N/I, \cdot)$ é semigrupo. Com efeito,

$$(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{(a \cdot b)} \cdot \overline{c} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \overline{a} \cdot \overline{(b \cdot c)} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c}).$$

Finalmente, verifiquemos que $(N/I, +, \cdot)$ é distributivo à direita. Com efeito,

$$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{(a+b)} \cdot \overline{c} = \overline{(a+b) \cdot c} = \overline{a \cdot c + b \cdot c} = \overline{a \cdot c} + \overline{b \cdot c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}.$$

Portanto, $(N/I, +, \cdot)$ é um quaseanel à direita. □

Definição 2.13. *Sejam $(N, +, \cdot)$ e $(M, \oplus, \star)$ quaseanéis. Um homomorfismo de quaseanéis é uma aplicação $\theta : N \to M$ tal que, para quaisquer $n_1, n_2 \in N$, valem:*
(a) $\theta(n_1 + n_2) = \theta(n_1) \oplus \theta(n_2)$;
(b) $\theta(n_1 \cdot n_2) = \theta(n_1) \star \theta(n_2)$.
Se θ for bijetiva, então θ é dita um isomorfismo de quaseanéis. Além disso, N e M são ditos isomorfos, o que denotamos $N \cong M$.

Proposição 2.14. *Se um quaseanel (à esquerda) N é isomorfo a um anel R, então N é um anel, ou seja, vale a distributividade à esquerda e a comutatividade da adição.*

Demonstração. Basta verificarmos que N possui as propriedades de distributividade à direita e comutatividade da adição. Com efeito, seja Ψ o isomorfismo entre N e R. Sendo assim, sejam $x, y, z \in N$ quaisquer. Então

$$x(y+z) = \Psi^{-1}(\Psi(x(y+z))) = \Psi^{-1}(\Psi(x)\Psi(y) + \Psi(x)\Psi(z)) =$$

$$= \Psi^{-1}(\Psi(x))\Psi^{-1}(\Psi(y)) + \Psi^{-1}(\Psi(x))\Psi^{-1}(\Psi(z)) = xy + xz.$$

Além disso,

$$x + y = \Psi^{-1}(\Psi(x+y)) = \Psi^{-1}(\Psi(x) + \Psi(y)) = \Psi^{-1}(\Psi(y) + \Psi(x)) =$$

$$= \Psi^{-1}(\Psi(y)) + \Psi^{-1}(\Psi(x)) = y + x.$$

Logo N é um anel. □

Proposição 2.15. *Seja $\theta : N \to M$ um homomorfismo de quaseanéis. Então* $\mathrm{Ker}(\theta) \triangleleft N$.

Demonstração. Devemos mostrar que as seguintes afirmações são verdadeiras:
(*a*) $\mathrm{Ker}(\theta)$ é subgrupo normal de $(N, +)$;
(*b*) $\mathrm{Ker}(\theta)N \subseteq \mathrm{Ker}(\theta)$;
(*c*) $n(m+a) - nm \in \mathrm{Ker}(\theta)$, quaisquer que sejam $n, m \in N$ e $a \in \mathrm{Ker}(\theta)$.

(*a*) Temos que

$$\theta(0_N) = \theta(0_N + 0_N) = \theta(0_N) \oplus \theta(0_N),$$

o que implica que $\theta(0_N) = 0_M$. Portanto, $0_N \in \mathrm{Ker}(\theta)$. Além disso, dados $n_1, n_2 \in \mathrm{Ker}(\theta)$,

vale
$$\theta(n_1 + n_2) = \theta(n_1) \oplus \theta(n_2) = 0_M \oplus 0_M = 0_M.$$
Logo $(n_1 + n_2) \in \mathrm{Ker}(\theta)$. Finalmente, vale que
$$0_M = \theta(0_N) = \theta(n_1 + (-n_1)) = \theta(n_1) \oplus \theta(-n_1) = 0_M \oplus \theta(-n_1) = \theta(-n_1),$$
o que nos permite concluir que $-n_1 \in \mathrm{Ker}(\theta)$. Logo $(\mathrm{Ker}(\theta), +)$ é subgrupo de $(N, +)$, uma vez que a associatividade é herdada.

Quanto à normalidade de $(\mathrm{Ker}(\theta), +)$, dado $n \in \mathrm{Ker}(\theta)$, para todo $x \in N$, temos que
$$\theta(x + n + (-x)) = \theta(x) \oplus \theta(n) \oplus \theta(-x) = \theta(x) \oplus 0_M \oplus \theta(-x) = \theta(x) \oplus \theta(-x) =$$
$$= \theta(x + (-x)) = \theta(0_N) = 0_M.$$
Logo $x + \mathrm{Ker}(\theta) + (-x) \subseteq \mathrm{Ker}(\theta)$. Portanto, $(\mathrm{Ker}(\theta), +)$ é subgrupo normal de $(N, +)$.

(b) Dado $n \in \mathrm{Ker}(\theta)$, para todo $x \in N$, temos
$$\theta(n \cdot x) = \theta(n) \star \theta(x) = 0_M \star \theta(x) = 0_M.$$
Portanto, $n \cdot x \in \mathrm{Ker}(\theta)$. Logo $\mathrm{Ker}(\theta)N \subseteq \mathrm{Ker}(\theta)$.

(c) Para quaisquer $n, m \in N$, $a \in \mathrm{Ker}(\theta)$, temos que
$$\theta(n(m + a) - nm) = \theta(n(m + a)) \oplus \theta(-nm) = \theta(n) \star \theta(m + a) \oplus \theta(-nm) =$$
$$= \theta(n) \star [\theta(m) \oplus \theta(a)] \oplus \theta(-nm) = \theta(n) \star \theta(m) \oplus \theta(-nm) = \theta(nm) + \theta(-nm) =$$
$$= \theta(nm + (-nm)) = \theta(0_N) = 0_M.$$
□

Definição 2.16. *Sejam $(G, +)$ um grupo (não necessariamente abeliano), $(N, \oplus, \cdot)$ um quaseanel e considere uma aplicação $\mu : N \times G \to G$. Então (G, μ) é chamado N-grupo se, para quaisquer $g \in G$ e $n, m \in N$, valerem as igualdades:*

(a) $\mu(n \oplus m, g) = \mu(n, g) + \mu(m, g)$;

(b) $\mu(n \cdot m, g) = \mu(n, \mu(m, g))$.

Se N tem elemento identidade e e $\mu(e, g) = g$, para todo $g \in G$, então G é dito um N-grupo unitário (ou com identidade).

Dado um N-grupo (G, μ), seja H um subgrupo de G. Considere as seguintes propriedades que podem eventualmente serem satisfeitas por H:

(1) $\mu(n,h) \in H$, para quaisquer $n \in N$ e $h \in H$;

(2) H é subgrupo normal de G;

(3) $\mu(n, g+h) - \mu(n,g) \in H$, para quaisquer $n \in N$, $g \in G$, $h \in H$.

Definição 2.17. *Dado um N-grupo* (G,μ)*, seja* H *um subgrupo de* G*. Se* H *satisfaz* (1)*, então* H *é dito N-subgrupo de* G*. Se* H *satisfaz* (2) *e* (3)*,* H *é dito um N-ideal de* G*.*

Exemplo 2.18. *Um ideal* I *de um quaseanel* N *é um* N*-subgrupo de* N *sob a ação* $\mu(n,h) = nh$*. Com efeito, como* $NI \subseteq I$ *(pois* I *é invariante à esquerda em* N*), temos que* $nh = \mu(n,h) \in I$*, e além disso,*

$$\mu(nm,h) = (nm)h = n(mh) = n\mu(m,h) = \mu(n, \mu(m,h)),$$

para quaisquer $n, m \in N$ *e* $h \in I$*. Sendo assim,* I *é* N*-subgrupo de* N*.*

É claro que, se N é um quaseanel e (G,μ) é um N-grupo, $\{0\}$ e G são N-ideais de G.

Proposição 2.19. *Se* G *é um* N*-grupo e* H *um* N*-ideal de* G*, então o grupo quociente* G/H *é um* N*-grupo sobre a ação* $\sigma : N \times G/H \to G/H$ *dada por*

$$\sigma(n, g+H) = \mu(n,g) + H.$$

Demonstração. Com efeito,

$$\sigma(n+m, g+H) = \mu(n+m, g) + H = (\mu(n,g) + \mu(m,g)) + H =$$

$$= (\mu(n,g) + H) + (\mu(m,g) + H) = \sigma(n, g+H) + \sigma(m, g+H),$$

e além disso,

$$\sigma(n \cdot m, g+H) = \mu(n \cdot m, g) + H = \mu(n, \mu(n,g)) + H =$$

$$= \sigma(n, \mu(n,g) + H) = \sigma(n, \sigma(n, g+H)).$$

□

Para subconjuntos não vazios arbitrários A e B do N-grupo G, definimos o subconjunto de N

$$(A : B) = \{n \in N : \mu(n,g) \in A, \text{ para todo } g \in B\}.$$

Note que A e B são subconjuntos quaisquer, não necessariamente estando contidos um no outro. Sendo assim, se $A = \{0\}$ e S é subconjunto não vazio de G, chamamos $(\{0\} : S)_N$ de anulador de S em N.

Definição 2.20. *Seja G um N-grupo e H um N-ideal de G. Definimos o anulador do N-grupo G/H por*

$$Ann(G/H) = (H : G)_N = \{n \in N : \mu(n, g) \in H, \text{ para todo } g \in G\}.$$

2.2 Ideais em quaseanéis e primalidade

Nesta seção faremos um breve estudo sobre ideais em quaseanéis além de apresentar algumas definições e resultados acerca de primalidade em anéis e principalmente em quaseanéis. A maioria dos resultados sobre quaseanéis podem ser encontrados, ainda que em menor riqueza de detalhes ou com demonstração omitida, em *PILZ, G.* (1983).

Definição 2.21. *Um ideal próprio I de um quaseanel N é dito primo se, para quaisquer J e K ideais de N, $JK \subseteq I$ implica que $J \subseteq I$ ou $K \subseteq I$.*

Observação. Note que I ser um ideal primo é equivalente a seguinte condição: para quaisquer J e K ideais de N tais que $I \subseteq J$ e $I \subseteq K$, $JK \subseteq I$ implica $I = J$ ou $I = K$. Com efeito, considere ideais J e K de N tais que $I \subseteq J$, $I \subseteq K$ e $JK \subseteq I$. Como I é primo, temos que $J \subseteq I$ ou $K \subseteq I$, o que nos permite concluir que $I = J$ ou $I = K$. Reciprocamente, considere ideais J e K tais que $JK \subseteq I$. Note que $J + I$ e $K + I$ são ideais de N tais que $I \subseteq J + I$ e $I \subseteq K + I$. Além disso, como $JK \subseteq P$, temos que $(J + I)(K + I) \subseteq I$. Portanto, $I = J + I$ ou $I = K + I$, o que implica que $J \subseteq I$ ou $K \subseteq I$.

Definição 2.22. *Um quaseanel N é dito primo se o ideal $\{0\}$ é um ideal primo.*

Definição 2.23. *Um anel R é dito primo se, para quaisquer dois elementos a e b de R, $arb = 0$, para todo $r \in R$, implica que $a = 0$ ou $b = 0$.*

Proposição 2.24. *Sejam N um quaseanel e I um ideal de N. Então I é um ideal primo se, e somente se, N/I é um quaseanel primo.*

Demonstração. Suponha que I é um ideal primo. Da Proposição 2.12, já sabemos que N/I é um quaseanel à direita. Vejamos que N/I é primo, ou seja, que o ideal $\{\overline{0}\}$ é primo. Sejam $\overline{J}$ e $\overline{K}$ ideais de N/I tais que $\overline{JK} \subset \{\overline{0}\}$. Assim, temos que $ab \in I$, para quaisquer $a \in J = \{x \in N : \overline{x} \in \overline{J}\}$ e $b \in K = \{y \in N : \overline{y} \in \overline{K}\}$. Ou seja, $JK \subseteq I$. Notemos que J e K são ideais de N. Com efeito, dado $\overline{x} \in N/I$, como $\overline{J}$ é ideal de N/I, temos que $\overline{x} + \overline{J} = \overline{J} + \overline{x}$. Isto significa que, para todo $\overline{j_1} \in \overline{J}$, existe $\overline{j_2} \in \overline{J}$ tal que $\overline{x + j_1} = \overline{j_2 + x}$. Assim, como I é ideal de N, existirá $i_2 \in I$ tal que, para dados $j_1, j_2 \in J$, vale que $x + j_1 = i_2 + j_2 + x$. Como $I \subseteq J$ (pois $\overline{0} \in \overline{J}$), temos que $i_2 + j_2 \in J$. Ou seja, para todo $j_1 \in J$, podemos tomar $j_2' = i_2 + j_2$ tal que $x + j_1 = j_2' + x$. Logo J é subgrupo normal de $(N, +)$. Além disso, dado $\overline{x} \in \overline{J}$ temos que $\overline{nx} \in \overline{J}$, para todo $n \in N$. Logo $nx \in J$, para todo $n \in N$, ou seja, $NJ \subseteq J$. Agora, dados $\overline{n}, \overline{m} \in N/I$ e $\overline{a} \in \overline{J}$, como $\overline{J}$ é ideal de N/I, temos que $\overline{n(m+a)-nm} \in \overline{J}$. Desse modo, temos que $n(m+a)-nm \in J$. Portanto, J é um ideal de N. De forma análoga, vemos que K também é ideal de N. Como I é primo, temos que $J \subseteq I$ ou $K \subseteq I$, o que nos permite concluir que $\overline{J} \subseteq \overline{\{0\}}$ ou $\overline{K} \subseteq \overline{\{0\}}$. Logo, N/I é um quaseanel primo.

Reciprocamente, suponha que N/I é um quaseanel primo, ou seja, que $\overline{\{0\}}$ é um ideal primo. Dados J e K ideais de N tais que $JK \subseteq I$, vejamos que $\overline{J}$ e $\overline{K}$ são ideais de N/I. Com efeito, dado $x \in N$, como J é ideal de N, temos que $x+J = J+x$. Isto significa que, para todo $j_1 \in J$, existe $j_2 \in J$ tal que $x + j_1 = j_2 + x$. Sendo assim, temos que $\overline{x+j_1} = \overline{x+j_2}$, o que implica que $\overline{x} + \overline{J} = \overline{J} + \overline{x}$. Logo $\overline{J}$ é subgrupo normal de $(N,+)$. Além disso, dado $x \in J$ temos que $nx \in J$, para todo $n \in N$. Logo $\overline{nx} \in \overline{J}$, para todo $n \in N$, ou seja, $\overline{NJ} \subseteq \overline{J}$. Agora, dados $n, m \in N$ e $x \in J$, como J é ideal de N, temos que $n(m+a)-nm \in J$. Assim, temos que $\overline{n(m+a)-nm} \in \overline{J}$. Portanto, $\overline{J}$ é um ideal de N/I. De forma análoga, vemos que $\overline{K}$ também é ideal de N/I. Como $\overline{\{0\}}$ é primo, temos que $\overline{J} \subseteq \overline{\{0\}}$ ou $\overline{K} \subseteq \overline{\{0\}}$, o que nos permite concluir que $J \subseteq I$ ou $K \subseteq I$. Logo, I é um ideal primo. $\square$

Definição 2.25. *Sejam um quaseanel N e I um ideal de N. Um ideal minimal no conjunto de todos os ideais primos de N contendo I é dito um ideal primo minimal de I.*

Definição 2.26. *Um ideal I de um quaseanel N é dito semiprimo se, para todo ideal J de N, $JJ \subseteq I$ implica que $J \subseteq I$.*

Observação. Segue das respectivas definições que, em um quaseanel, todo ideal primo é semiprimo.

Proposição 2.27. *Se I e J são ideais semiprimos de N, então $I \cap J$ é um ideal semiprimo.*

Demonstração. Dado um ideal K de N tal que $KK \subseteq I \cap J$, temos que $KK \subseteq I$ e $KK \subseteq J$. Como I e J são ideais semiprimos de N, temos que $K \subseteq I$ e $K \subseteq J$. Logo $K \subseteq I \cap J$. Portanto, $I \cap J$ é um ideal semiprimo. $\square$

Corolário 2.28. *Sejam N um quaseanel, I e J ideais primos. Então $I \cap J$ é um ideal semiprimo.*

Definição 2.29. *Um quaseanel é dito semiprimo se o ideal $\{0\}$ é semiprimo.*

Definição 2.30. *Dados um quaseanel N e $M \subseteq N$, dizemos que M é um m-sistema se, para quasiquer $a, b \in M$,existem $a_1 \in \langle a \rangle$ e $b_1 \in \langle b \rangle$ tais que $a_1 b_1 \in M$.*

Definição 2.31. *Dados um quaseanel N e $M \subseteq N$, dizemos que M é um sp-sistema se, para todo $m \in M$, existem $m_1, m_2 \in \langle m \rangle$ tais que $m_1 m_2 \in M$.*

Proposição 2.32. *Em um quaseanel N vale que:*

(*a*) *Todo m-sistema é um sp-sistema.*

(*b*) *Um ideal I de N é semiprimo se, e somente se, $N \setminus I$ é um sp-sistema.*

Demonstração. (a) Como M é m-sistema, dado $m \in M$, existem $a_1 \in \langle m \rangle$ e $b_1 \in \langle m \rangle$ tais que $a_1 b_1 \in M$. Ou seja, basta tomar $a = m$ e $b = m$ na definição de m-sistema. Portanto, M é um sp-sistema.

(b) Suponha que I é um ideal semiprimo. Dado $m \in (N \setminus I)$, queremos mostrar que existem $m_1, m_2 \in \langle m \rangle$ tais que $m_1 m_2 \in (N \setminus I)$. Suponha, por absurdo, que $m_1 m_2 \in I$, para quaisquer $m_1, m_2 \in \langle m \rangle$. Sendo assim, temos que $\langle m \rangle \langle m \rangle \subseteq I$. Como I é semiprimo, segue que $\langle m \rangle \subseteq I$. Absurdo, pois $m \in (N \setminus I)$. Logo $N \setminus I$ é um sp-sistema.

Reciprocamente, suponha que $N \setminus I$ é um sp-sistema. Seja J um ideal de N tal que $JJ \subseteq I$. Suponha, por absurdo, que existe $m \in J$ tal que $m \notin I$. Assim, como $N \setminus I$ é sp-sistema, existem $m_1, m_2 \in \langle m \rangle$ tais que $m_1 m_2 \in (N \setminus I)$. Desse modo, temos que $m_1 m_2 \notin I$, em particular, $m_1 m_2 \notin JJ$. Absurdo, pois $m_1, m_2 \in \langle m \rangle \subseteq J$. □

Lema 2.33. *Sejam N um quaseanel N e S um sp-sistema. Então, dado $s \in S$, existe um m-sistema M tal que $s \in M \subseteq S$.*

Demonstração. Como S é um sp-sistema, temos que existem $s_1^1, s_2^1 \in \langle s \rangle$ tais que $s_1^1 s_2^1 \in S$. Novamente, como S é um sp-sistema e $s_1^1 s_2^1 \in S$, existem $s_1^2, s_2^2 \in \langle s_1^1 s_2^1 \rangle$ tais que $s_1^2 s_2^2 \in S$. Continuando esse processo, obtemos uma sequência

$$s, (s_1^1 s_2^1), (s_1^2 s_2^2), \cdots, (s_1^k s_2^k), \cdots$$

onde $(s_1^k s_2^k) \in S$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\langle s \rangle \supseteq \langle s_1^1 s_2^1 \rangle \supseteq \langle s_1^2 s_2^2 \rangle \supseteq \cdots$.

Seja $M = \{s, (s_1^1 s_2^1), (s_1^2 s_2^2), \cdots, (s_1^k s_2^k), \cdots\}$. Vejamos que M é o m-sistema que queremos. Já sabemos que $s \in M \subseteq S$, então basta mostrar que M é um m-sistema. Com efeito, dados $(s_1^l s_2^l), (s_1^k s_2^k) \in M$ com $k \geq l$, por definição, temos que $\langle s_1^l s_2^l \rangle \supseteq \langle s_1^k s_2^k \rangle$. Assim, temos que

$$s_1^{k+1}, s_2^{k+1} \in \langle s_1^k s_2^k \rangle \subseteq \langle s_1^l s_2^l \rangle.$$

Portanto, $s_1^{k+1} \in \langle s_1^k s_2^k \rangle$, $s_2^{k+1} \in \langle s_1^l s_2^l \rangle$ e, além disso, sabemos que $s_1^{k+1} s_2^{k+1} \in M$, o que nos permite concluir que M é um m-sistema. □

Definição 2.34. *Dado um ideal I em um quaseanel N, definimos o radical primo de I, denotado por $\mathcal{P}(I)$, como a interseção de todos os ideas primos de N que contém I.*

Lema 2.35. *Sejam M um m-sistema e I um ideal no quaseanel N tais que $I \cap M = \emptyset$. Então existe um ideal primo P que contém I e não intersecta M.*

Demonstração. Considere o conjunto $\mathcal{I} = \{J \lhd N : I \subseteq J \text{ e } J \cap M = \emptyset\}$. Note que

$\mathcal{I} \neq \emptyset$, uma vez que $I \in \mathcal{I}$. Assim, segue do Lema de Zorn que $\mathcal{I}$ possui um elemento maximal, digamos P. Vejamos que P é um ideal primo. Com efeito, suponha que P não é primo. Então existem I_1 e I_2 ideais de N tais que $P \subsetneq I_1$, $P \subsetneq I_2$ e $I_1 I_2 \subset P$. Segue da maximalidade de P que existem $a_1 \in I_1 \cap M$ e $a_2 \in I_2 \cap M$. Como M é m-sistema, existem $x_1 \in \langle a_1 \rangle$ e $x_2 \in \langle a_2 \rangle$ tais que $x_1 x_2 \in M$. Desse modo, temos que

$$x_1 x_2 \in \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle \subset I_1 I_2 \subset P.$$

Logo $x_1 x_2 \in P \cap M$, o que é uma contradição. Portanto, concluímos que P é um ideal primo. □

O lema a seguir segue do terceiro teorema presente no artigo *VAN DER WALT, A. P. J.* (1964). No entanto, faremos a demonstração segundo a linguagem que adotamos nesta dissertação.

Lema 2.36. *Se I é um ideal no quaseanel N e N_I é o conjunto dos elementos $n \in N$ com a propriedade de que todo m-sistema que o contém possui interseção não vazia com I, então $\mathcal{P}(I) \subseteq N_I$. Em outras palavras, se M é um m-sistema, então $M \cap \mathcal{P}(I) \neq \emptyset$ implica $M \cap I \neq \emptyset$.*

Demonstração. Considere $n \in N$ tal que existe um m-sistema M em N tal que $n \in M$, mas M não intersecta I. Vamos mostrar que $n \notin \mathcal{P}(I)$. Com efeito, segue do Lema 2.35 que existe um ideal primo P que contém I e não intersecta M. Como $n \in M$, temos que $n \notin P$. Além disso, $\mathcal{P}(I) \subseteq P$, pois P é primo. Portanto, $n \notin \mathcal{P}(I)$. □

Proposição 2.37. *Se I é um ideal semiprimo em um quaseanel N, então $I = \mathcal{P}(I)$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{P}(I) \neq I$ e tome $m \in (\mathcal{P}(I) \setminus I)$. Como I é semiprimo, temos do item (b) da Proposição 2.32, que $N \setminus I$ é um *sp*-sistema. Como $m \in (N \setminus I)$, segue do Lema 2.33 que existe um m-sistema M contendo m tal que $M \subseteq (N \setminus I)$. Como $m \in \mathcal{P}(I)$, segue do Lema 2.36 que $M \cap I \neq \emptyset$. No entanto, temos que

$$M \cap I \subseteq (N \setminus I) \cap I = \emptyset.$$

Contradição. □

Agora vejamos outras definições acerca de primalidade em quaseanéis que estão presentes no artigo base, mas que são provenientes de *BOOTH, G. L.*, *GROENEWALD, N. J.*, and *VELDSMAN, S.* (1990) e *GROENEWALD, N. J.* (1991).

Definição 2.38. *Um quaseanel N é:*

(a) *0-semiprimo se, dado $A \lhd N$, $A^2 = \{0\}$ implica $A = \{0\}$;*

(b) *0-primo se, dados $A, B \lhd N$, $AB = \{0\}$ implica $A = \{0\}$ ou $B = \{0\}$;*

(c) *2-primo se, dados A,B N-subgrupos de N, $AB = \{0\}$ implica $A = \{0\}$ ou $B = \{0\}$;*

(d) *3-semiprimo se, dado $a \in N$, $aNa = \{0\}$ implica $a = 0$;*

(e) *3-primo se, dados $a, b \in N$, $aNb = \{0\}$ implica $a = 0$ ou $b = 0$;*

(f) *equiprimo se, dados $a, x, y \in N$, $anx = any$, para todo $n \in N$, implica $a = 0$ ou $x = y$.*

A seguir, mostramos algumas relações entre as noções de primalidade apresentadas acima.

Proposição 2.39. *Dado um quaseanel N zerossimétrico, valem as seguintes afirmações:*

(a) *Se N é equiprimo, então N é 3-primo;*

(b) *Se N é 3-primo, então N é 2-primo e 3-semiprimo;*

(c) *Se N é 3-semiprimo, então N é 0-semiprimo;*

(d) *Se N é 2-primo, então N é 0-primo;*

(e) *Se N é 0-primo, então N é 0-semiprimo.*

Demonstração. (a) Sejam $a, b \in N$ tais que $aNb = \{0\}$, ou seja, $anb = 0$, para qualquer $n \in N$. Como N é zerossimétrico, temos também que

$$an0 = 0.$$

Como N é equiprimo, segue que $a = 0$ ou $b = 0$. Logo N é 3-primo.

(b) Sejam A e B N-subgrupos de N tais que $AB = \{0\}$. Suponha que $A \neq \{0\}$ e tome $a \in A$ não nulo. Como B é N-subgrupo de N, temos que

$$nb = \mu(n, b) \in B,$$

para quaisquer $n \in N$ e $b \in B$. Sendo assim, vale que

$$aNB \subseteq AB = \{0\}.$$

Logo $aNb = \{0\}$, para qualquer $b \in B$. Como N é 3-primo e $a \neq 0$, temos que $b = 0$, para todo $b \in B$, isto é, $B = \{0\}$.

Agora, suponha que $B \neq \{0\}$. Como $nb = \mu(n, b) \in B$, para todo $b \in B$ (uma vez que B é N-subgrupo de N), temos que $NB \subseteq B$, ou seja, $Nb \subseteq B$, para qualquer $b \in B$. Logo $ANb \subseteq AB = \{0\}$, isto é, $aNb = \{0\}$, para todo $a \in A$. Como $B \neq \{0\}$ e N é 3-primo, segue que $A = \{0\}$. Portanto, N é 2-primo.

Finalmente, seja $x \in N$ tal que $xNx = \{0\}$. Como N é 3-primo, segue que $x = 0$. Logo N é 3-semiprimo.

(c) Seja A um ideal de N tal que $A^2 = \{0\}$. Como A é ideal de N, temos que $AN \subseteq A$.

Logo $ANA \subseteq AA = A^2 = \{0\}$, isto é, $aNa = \{0\}$, para todo $a \in A$. Como N é 3-semiprimo, segue $a = 0$, para todo $a \in A$, isto é, $A = \{0\}$. Logo N é 0-semiprimo.

(d) Sejam A e B ideais de N tais que $AB = \{0\}$. Ora, de acordo com o Exemplo 2.18, um ideal de N é um N-subgrupo de N sob a ação $\mu(n,h) = nh$. Sendo assim, A e B são N-subgrupos de N. Como N é 2-primo e $AB = \{0\}$, segue que $A = \{0\}$ ou $B = \{0\}$. Logo N é 0-primo.

(e) Basta tomar $A = B$ na definição de 0-primo. □

S. Veldsman introduziu o conceito de quaseanéis semiequiprimos em *VELDSMAN, S.* (1991).

Definição 2.40. *Um quaseanel N é semiequiprimo se, dados $a, x \in N$, $(a - x)na = (a - x)nx$, para todo $n \in N$, implica que $a = x$.*

Proposição 2.41. *Dado um quaseanel zerossimétrico N, valem as seguintes afirmações:*

(a) *Se N é equiprimo, então N é semiequiprimo.*

(b) *Se N é semiequiprimo, então N é 3-semiprimo.*

Demonstração. (a) Sejam $a, x \in N$ tais que $(a - x)na = (a - x)nx$, para todo $n \in N$. Como N é equiprimo, temos que $a = x$. Portanto, N é semiequiprimo.

(b) Seja $a \in N$ tal que $aNa = \{0\}$. Desse modo, $ana = 0$ para todo $n \in N$. Em particular, $(a-0)na = 0$ para todo $n \in N$. Por outro lado, como N é zerossimétrico, também temos que $(a - 0)n0 = 0$ para todo $n \in N$. Assim, como N é semiequiprimo, segue que $a = 0$. Logo, N é 3-semiprimo. □

Definição 2.42. *Sejam N um quaseanel e P um ideal de N. Dizemos que P é um ideal ν-primo (ν-semiprimo, exceto para $\nu = 2$) de N se o quaseanel N/P é um quaseanel ν-primo (ν-semiprimo, exceto para $\nu = 2$), para $\nu = 0, 2, 3$. Além disso, P é dito um ideal equiprimo (3-semiequiprimo) de N se N/P é um quaseanel equiprimo (3-semiequiprimo).*

Observação. Note que, para o quaseanel N, vale que $N/\{0\} \cong N$. Sendo assim, podemos dizer que um quaseanel é ν-primo se, e somente se, o ideal $\{0\}$ é ν-primo, para $\nu = 0, 2, 3$. Analogamente, podemos dizer que um quaseanel é equiprimo se, e somente se, o ideal $\{0\}$ é equiprimo.

Definição 2.43. *Dado um quaseanel N, chamamos de radical ν-primo de N o conjunto*

$$\mathcal{P}_\nu(N) := \bigcap_{I \,\in\, \mathcal{I}_\nu} I,$$

onde $\mathcal{I}_\nu$ é o conjunto dos ideais ν-primos de N.

Definição 2.44. *Dado um anel R, dizemos que um ideal próprio I de R é um ideal* *semiprimo se, para todo $x \in R$, $xRx \subseteq I$ implica $x \in I$. Se o ideal $\{0\}$ for um ideal semiprimo, dizemos que R é um anel semiprimo.*

Observação. No caso do anel R ser semiprimo, temos que $xRx = \{0\}$, para todo $x \in R$, implica $x \in \{0\}$. Em outras palavras, temos que o anel R é semiprimo (ou, equivalentemente, o ideal $\{0\}$ é semiprimo) se $xRx = 0$, para todo $x \in R$, implica $x = 0$.

Definição 2.45. *Um anel R é dito fortemente primo se, para cada $a \in R$ não nulo, existir um subconjunto finito $S(a)$ de R tal que se $x \in R$ satisfizer $asx = 0$ para todo $s \in S(a)$, então $x = 0$.*

Em *GROENEWALD, N. J.* (1988), a noção de anel fortemente primo foi generalizada para quaseanéis.

Definição 2.46. *Um quaseanel N é dito fortemente primo se, para cada $a \in N$ não nulo existir um subconjunto finito $S(a)$ de N tal que se $x \in N$ satisfizer $asx = 0$ para todo $s \in S(a)$, então $x = 0$. Um conjunto $S(a)$ que obedece a propriedade acima é dito um isolador do elemento a.*

Em *BOOTH, G. L.*, *GROENEWALD, N. J.*, and *VELDSMAN, S.* (1991), N é dito *fortemente equiprimo* se, para todo $a \in N$ não nulo, existir um subconjunto finito $S_e(a)$ de N tal que se $x \in N$ satisfizer $asx = asy$ para todo $s \in S_e(a)$, então $x = y$ (onde $x, y \in N$). Um ideal P de um quaseanel N é dito fortemente primo (fortemente equiprimo) se o quaseanel quociente N/P é fortemente primo (fortemente equiprimo).

Finalizamos esta seção mostrando uma relação simples entre as noções de quaseanel fortemente primo e fortemente equiprimo.

Proposição 2.47. *Se um quaseanel zerossimétrico N é fortemente equiprimo, então N é fortemente primo.*

Demonstração. Seja $a \in N$ não nulo. Queremos mostrar que existe um subconjunto finito $S(a)$ de N tal que se $asx = 0$ para todo $s \in S(a)$, então $x = 0$. Considere $x \in N$ tal que $asx = 0$, para todo $s \in S_e(a)$. Como N é zerossimétrico, temos que $asx = 0 = as0$, para todo $s \in S_e(a)$. Como N é fortemente equiprimo, segue que $x = 0$. Portanto, basta tomar $S_e(a) = S(a)$, o que nos permite concluir que N é fortemente primo. $\square$

2.3 Gupos, anéis e módulos topológicos

Admitindo um conhecimento razoável de Topologia Geral, que pode ser rapidamente revisada em *LEE, J. M.* (2000), nesta seção apresentamos algumas definições e resultados de Álgebra Topológica. A maioria desses resultados estão presentes, obviamente não contendo a mesma riqueza de detalhes, em *HUSAIN, T.* (1966). Iniciamos esta seção com uma definição e uma proposição, ambas de natureza topológica.

Definição 2.48. *Dado um conjunto X, dizemos que uma coleção τ de subconjuntos de X é uma topologia se satisfizer as seguintes propriedades:*

(1) *X e $\emptyset$ são elementos de τ;*

(2) *Se $U_1, U_2, ..., U_n$ são elementos de τ, então a interseção $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ é um elemento de τ;*

(3) *Se $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma família de elementos de τ, então a união $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ é um elemento de τ.*

Se X e τ são como acima, o par (X, τ) é dto um espaço topológico.

Definição 2.49. *Dados um espaço topológico (X, τ) e $x \in X$, o conjunto $\mathcal{U}_x$ de todas as vizinhanças U_x de x é chamado de sistema de vizinhanças de x.*

Proposição 2.50. *Seja X um conjunto. Suponha que, para cada $x \in X$, existe uma coleção $\mathcal{U}_x$ de subconjuntos de X que satisfazem as condições:*

(1) *Para cada U_x em $\mathcal{U}_x$, temos $x \in U_x$;*

(2) *Se U_x está em $\mathcal{U}_x$ e W é um subconjunto de X tal que $U_x \subseteq W$, então $W \in \mathcal{U}_x$;*

(3) *Toda interseção finita de elementos de $\mathcal{U}_x$ está em $\mathcal{U}_x$;*

(4) *Se U_x está em $\mathcal{U}_x$, então existe V_x em $\mathcal{U}_x$ tal que $V_x \subseteq U_x$ e $U_x \in \mathcal{U}_y$ para cada $y \in V_x$.*

Então existe uma única topologia τ_x em X tal que $\mathcal{U}_x$ é exatamente o sistema de vizinhanças de x, para cada x em X.

Demonstração. Seja τ a coleção de subconjuntos de X consistindo de $\emptyset$ e todo conjunto U tal que $U \in \mathcal{U}_x$ sempre que $x \in U$. Vamos mostrar que τ define uma topologia em X. Para cada $x \in X$, temos que X está em $\mathcal{U}_x$ por conta de (2), já que $U_x \subseteq X$ para todo $U_x \in \mathcal{U}_x$. Logo $X \in \tau$. Por definição, temos também que $\emptyset \in \tau$. Considere uma coleção finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de elementos de τ. Dado $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, temos que x está em cada U_i. Sendo assim, todos os U_i estão em $\mathcal{U}_x$, ou seja, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ é uma interseção finita de elementos de $\mathcal{U}_x$. Segue da condição (3) que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ está em $\mathcal{U}_x$. Portanto, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ está em τ, já que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}_x$, para todo x em $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Finalmente, seja $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma coleção arbitrária de elementos de τ. Dado $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, temos que $x \in U_\alpha$, para algum $\alpha \in \Lambda$. Logo $U_\alpha \in \mathcal{U}_x$. Como $U_\alpha \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, segue da condição (2) que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ está em $\mathcal{U}_x$. Portanto, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ está em τ, já que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_x$, para todo x em $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.

Assim, τ define uma topologia em X, e segue, da condição (4), que $\mathcal{U}_x$ é o sistema de vizinhanças de x, para cada $x \in X$. Pela construção feita acima esta topologia é única. $\square$

Definição 2.51. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um subconjunto $\mathcal{B}$ da topologia τ é dito uma base de τ se, para cada elemento x pertencente a um elemento U de τ, existir $U_\beta \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_\beta \subseteq U$.*

Definição 2.52. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{U}_x$ o sistema de vizinhanças de um elemento x de X. Dizemos que uma subfamília $\mathcal{V}_x$ de $\mathcal{U}_x$ é uma base para $\mathcal{U}_x$, ou forma um sistema fundamental de vizinhanças de x, se, para cada $U_x \in \mathcal{U}_x$, existir V_x em $\mathcal{V}_x$ tal que $V_x \subseteq U_x$.*

Definição 2.53. *Dados um grupo multiplicativo $(G, \cdot)$ e uma topologia τ em G, dizemos que $(G, \cdot, \tau)$ é um grupo topológico se satisfaz as seguintes condições:*

(a) *A aplicação multiplicação $\rho_m : G \times G \to G$, dada por $\rho_m(x, y) = x \cdot y$, é contínua;*

(b) *A aplicação inversão $\rho_i : G \to G$, dada por $\rho_i(x) = x^{-1}$, é contínua.*

A seguir, definimos anel topológico e módulo topológico. Ambas definições, assim como alguns resultados que apresentamos sobre essas estruturas, estão em *ARNAUTOV*, *GLAVATSKY*, and *MIKHALEV* (1996) ou em *WARNER* (1993).

Definição 2.54. *Dados um anel $(R, +, \cdot)$ e uma topologia τ em R, dizemos que $(R, +, \cdot, \tau)$ é um anel topológico se satisfaz as seguintes condições:*

(a) *A aplicação adição $\rho_a : R \times R \to R$, dada por $\rho_a(x, y) = x + y$, é contínua;*

(b) *A aplicação inversão $\rho_i : R \to R$, dada por $\rho_i(x) = -x$, é contínua.*

(c) *A aplicação multiplicação $\rho_m : R \times R \to R$, dada por $\rho_m(x, y) = x \cdot y$, é contínua.*

Observação. Algumas vezes as notações das operações e da topologia das estruturas definidas acima serão omitidas, sendo apresentadas quando forem necessárias para o entendimento.

Definição 2.55. *Dados um anel topológico R, um R-módulo à direita G e uma topologia τ_G em G, dizemos que (G, τ_G) é um R-módulo topológico à direita se satisfaz as seguintes condições:*

(a) *A aplicação de adição em G $\rho_a : G \times G \to G$, dada por $\rho_a(x, y) = x + y$, é contínua;*

(b) *A aplicação de inversão em G $\rho_i : G \to G$, dada por $\rho_i(x) = -x$, é contínua.*

(c) *A aplicação multiplicação por escalar $\rho_e : G \times R \to G$, dada por $\rho_e(y, \lambda) = y\lambda$, é contínua, onde a topologia de $G \times R$ é a topologia produto.*

Observação. Note que os índices colocados em ρ fazem referência às palavras "multiplicação", "adição", "inverso" ou "escalar", que remetem diretamente às operação estabelecidas por essas aplicações. Esse artifíco será muito usado ao longo desse trabalho.

Lema 2.56. *Seja R um anel munido de uma topologia. Então a aplicação $\rho_d : R \times R \to R$, dada por $\rho_d(x, y) = x - y$, é contínua se, e somente se, as aplicações ρ_a e ρ_i são contínuas.*

Demonstração. Suponha que ρ_d é contínua. Considere $\rho_d|_{\{0\}\times R} : \{0\} \times R \to R$, que é contínua por ser restrição de uma aplicação contínua. Assim, dado $U \subset R$ aberto, temos que $\rho_d^{-1}|_{\{0\}\times R}(U) = \rho_i^{-1}(U)$ é aberto, uma vez que $\rho_d|_{\{0\}\times R}$ é contínua. Logo ρ_i é contínua. Além disso, $\rho_i^{-1} = \rho_i$, o que nos permite concluir que ρ_i é homeomorfismo. Quanto a ρ_a, notenos inicialmente que $\varphi : R \times R \to R \times R$, dada por $\varphi(x, y) = (x, -y)$, é homeomorfismo. Com efeito, sendo $Id_R : R \to R$ a aplicação identidade em R, temos que $\varphi = Id_R \times \rho_i$. Como Id_R e ρ_i são homeomorfismos, segue que φ é homeomorfismo. Sendo assim, temos que

$$(\rho_d \circ \varphi)(x, y) = \rho_d(x, -y) = x - (-y) = x + y = \rho_a(x, y),$$

para todo $(x, y) \in R \times R$. Portanto, $\rho_a = \rho_d \circ \varphi$. Como φ e ρ_d são contínuas, concluímos que ρ_a é contínua.

Reciprocamente, suponha que ρ_i e ρ_a são contínuas. Aqui temos novamente que ρ_i e φ são homeomorfismos. Como ρ_a e φ são contínuas e $\rho_d = \rho_a \circ \varphi$, segue que ρ_d é contínua. □

Agora apresentamos um exemplo bem conhecido de anel topológico.

Exemplo 2.57. *Considere $\mathbb{R}$ com sua topologia usual, a mesma induzida pela métrica $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $d(x, y) = |x - y|$. Segue do Lema 2.56 que, para $\mathbb{R}$ ser anel topológico é suficiente que ρ_d e ρ_m sejam contínuas. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, consideremos os seguintes casos:*

***Caso 1**: $a = b = 0$*

Seja V uma vizinhança de $\rho_d(a, b) = (a - b)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto

$$B((a - b), \varepsilon) = \{z \in \mathbb{R} : d((a - b), z) < \varepsilon\}$$

está contido em V. Tome $\delta < \varepsilon/2$ e considere $B(a, \delta) \times B(b, \delta)$, que é aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Assim, dado $(x, y) \in B(a, \delta) \times B(b, \delta)$, temos que

$$d((x - y), (a - b)) = |(x - y) - 0| = |x - y| \leq |x| + |y| = |x - 0| + |y - 0| =$$

$$= |x - a| + |y - b| = d(x, a) + d(x, b) < \delta + \delta < \varepsilon.$$

Logo

$$\rho_d(B(a, \delta) \times B(b, \delta)) \subset B((a - b), \varepsilon) \subset V,$$

o que nos permite concluir que ρ_d é contínua. Quanto a ρ_m, dada uma vizinhança V de ab, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B((ab), \varepsilon) \subset V$. Então, tomando $\delta < \sqrt{\varepsilon}$, temos que

$$d(xy, ab) = d(xy, 0) = |x||y| = |x - a||y - b| = d(x, a) \cdot d(y, b) < \delta \cdot \delta < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\rho_m(B(a,\delta)\times B(b,\delta))\subset B((ab),\varepsilon)\subset V,$$

o que nos permite concluir que ρ_m é contínua.

Caso 2: *$a\neq 0$ ou $b\neq 0$*
Sem perda de generalidade, suponhamos que $a\neq 0$. Sendo assim, temos que $|a|\neq 0$ e $2|a|+|b|\neq 0$, uma vez que $|x|\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Dada uma vizinhança V de $\rho_d(a,b)=(a-b)$, existe $\varepsilon>0$ tal que $B((a-b),\varepsilon)$ está contido em V. Tome $\delta<\varepsilon/2$ e considere $B(a,\delta)\times B(b,\delta)$, que é aberto em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Assim,

$$d((x-y),(a-b))=|(x-y)-(a-b)|=|(x-a)-(y-b)|\leq$$

$$\leq|x-a|+|y-b|=d(x,a)+d(y,b)<\delta+\delta<\varepsilon.$$

Logo,

$$\rho_d(B(a,\delta)\times B(b,\delta))\subset B((a-b),\varepsilon)\subset V,$$

o que nos permite concluir que ρ_d é contínua. Quanto a ρ_m, dada uma vizinhança V de ab, existe $\varepsilon>0$ tal que $B((ab),\varepsilon)\subset V$. Assim, para qualquer $x\in B(a,\delta)$ onde $\delta<min\left\{|a|,\dfrac{\varepsilon}{(2|a|+|b|)}\right\}$, temos que

$$d(xy,ab)=|xy-ab|=|xy-xb+xb-ab|=|x(y-b)+b(x-a)|\leq$$

$$\leq|x||y-b|+|b||x-a|=|x|d(y,b)+|b|d(x,a),$$

e como

$$|x|-|a|<|x-a|<\delta \text{ implica } |x|<|a|+\delta,$$

concluímos que

$$|x|d(y,b)+|b|d(x,a)=|x|\delta+|b|\delta<(|a|+\delta)\delta+|b|\delta=$$

$$=(|a|+|b|+\delta)\delta<(2|a|+|b|)\delta<\varepsilon.$$

Logo $d(xy,ab)<\varepsilon$ e, portanto,

$$\rho_m(B(a,\delta)\times B(b,\delta))\subset B((ab),\varepsilon)\subset V.$$

Assim, ρ_m também é contínua.

Proposição 2.58. *Um par (G,τ), onde G é um grupo e τ é uma topologia em G, é um grupo topológico se, e somente se, a aplicação $f:G\times G\to G$, dada por $f(x,y)=xy^{-1}$, é contínua.*

Demonstração. Suponha inicialmente que (G, τ) seja grupo topológico. Assim, temos que

$$f(x, y) = \rho_m(x, \rho_i(y)) = xy^{-1}.$$

Note que a aplicação $g : G \times G \to G \times G$, dada por

$$g(x, y) = (x, y^{-1}) = (Id(x), \rho_i(y))$$

é contínua, pois a aplicação identidade, Id, e a aplicação de inversão, ρ_i, são contínuas (uma vez que (G, τ) é grupo topológico). Como $f(x, y) = (\rho_m \circ g)(x, y)$, segue que f é contínua por ser composição de aplicações contínuas.

Reciprocamente, suponha que f seja contínua. Assim, $f|_{\{e\}\times G} : \{e\} \times G \to G$ é contínua, onde e é o elemento identidade de G. Além disso, segue da topologia produto que $\{e\} \times A$ é aberto em $\{e\} \times G$ se, e somente se, A é aberto em G. Temos que $\rho_i(x) = f|_{\{e\}\times G}(e, x)$. Sendo assim, dado A aberto em G, $f|^{-1}_{\{e\}\times G}(A) = \{e\}\times\ \rho_i^{-1}\ (A)$, que é aberto em $\{e\} \times G$, uma vez que $f|_{\{e\}\times G}$ é contínua. Portanto $\rho_i^{-1}\ (A)$ é aberto em G, para todo A aberto em G. Logo ρ_i é contínua. Agora, note que $\rho_m = f \circ g$. Logo ρ_m é contínua por ser composição de aplicações contínuas. □

Proposição 2.59. *Seja G um grupo topológico. Então, para um elemento arbitrário a de G, as translações $R_a : G \to G$ e $L_a : G \to G$, dadas por $R_a(x) = xa$ e $L_a(x) = ax$, a aplicação $\rho_i : G \to G$ e o automorfismo $\varphi_a : G \to G$, dado por $\varphi_a(x) = axa^{-1}$, são homeomorfismos.*

Demonstração. Note que

$$R_a(R_{a^{-1}}(x)) = R_a(xa^{-1}) = xa^{-1}a = x$$

e

$$R_{a^{-1}}(R_a(x)) = R_{a^{-1}}(xa) = xaa^{-1} = x.$$

Ou seja, $R_a^{-1} = R_{a^{-1}}$, o que implica que R_a é bijeção. Sendo assim, para ver que R_a é homeomorfismo basta mostrar a sua continuidade, uma vez que sua inversa também é uma translação. Com efeito, dado $A \subseteq G$ aberto, seja $U = (R_a)^{-1}(A)$ e note que $U \times \{a\} = (\rho_m|_{G\times\{a\}})^{-1}(A)$. Como $\rho_m|_{G\times\{a\}}$ é contínua, segue que $U \times \{a\}$ é aberto. Logo, U é aberto, o que nos permite concluir que R_a é contínua. Portanto, R_a é homeomorfismo. A demonstração para L_a é análoga. Quanto a ρ_i, note que

$$\rho_i(\rho_i(x)) = \rho_i(x^{-1}) = x.$$

Assim, segue que ρ_i é homeomorfismo, uma vez que ρ_i é contínua e é a sua própria inversa.

Em relação a φ_a, temos que

$$\varphi_a(x) = axa^{-1} = R_{a^{-1}}(ax) = R_{a^{-1}}(L_a(x)).$$

Desse modo, temos que φ_a é a composição de $R_{a^{-1}}$ e L_a, que são homeomorfismos. Portanto, φ_a é homeomorfismo. $\square$

Agora vamos provar um resultado simples, mas que será importante na demonstração de um dos últimos resultados presentes nesta dissertação.

Proposição 2.60. *Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Se H é aberto, então H é fechado.*

Demonstração. Para cada $x \in G$, temos, da Proposição 2.59, que xH é aberto. Assim, temos que $\displaystyle\bigcup_{x\in G'} xH$ é aberto, onde $G' = \{x \in G : xH \neq H\}$. Desse modo, segue que $\displaystyle G \setminus \bigcup_{x\in G'} xH$ é fechado. Vejamos que $\displaystyle H = G \setminus \bigcup_{x\in G'} xH$.

Seja $h \in H$. Suponha, por absurdo, que $\displaystyle h \notin \left(G \setminus \bigcup_{x\in G'} xH\right)$. Então existem $y \in G'$ e $h_1 \in H$ tais que $h = yh_1$. Logo

$$y = yh_1h_1^{-1} = hh_1^{-1} \in H.$$

Ora, se $y \in H$, temos $yH = H$. Absurdo, pois $y \in G'$.

Agora, seja $\displaystyle h \in \left(G \setminus \bigcup_{x\in G'} xH\right)$. Suponha, por absurdo que $h \notin H$. Sendo assim, temos que $hH \neq H$, pois, caso contrário, teríamos

$$h = he_G \in hH = H.$$

Logo, $h \in G'$. Como $e_G \in H$, segue que

$$h = he_g \notin \left(G \setminus \bigcup_{x\in G'} xH\right),$$

o que contradiz a suposição inicial. Portanto $\displaystyle H = G \setminus \bigcup_{x\in G'} xH$. $\square$

Proposição 2.61. *Seja R um anel topológico. Então, para um elemento arbitrário a de R, as translações multiplicativas $R'_a : R \to R$ e $L'_a : R \to R$, dadas por $R'_a(x) = xa$ e $L'_a(x) = ax$, são contínuas.*

Demonstração. Dado $A \subseteq G$ aberto, seja $U = (R'_a)^{-1}(A)$ e note que $U \times \{a\} = (\rho_m|_{R\times\{a\}})^{-1}(A)$. Como $\rho_m|_{R\times\{a\}}$ é contínua, segue que $U \times \{a\}$ é aberto em $R \times \{a\}$. Segue da topologia produto que U é aberto em R, o que nos permite concluir que R'_a é contínua.

A demonstração de que L'_a é contínua é análoga. Portanto as translações multiplicativas em anéis topológicos são contínuas. □

Observação. Usaremos "L_a" e "R_a" para denotar translações em um grupo topológico por um elemento a à esquerda e à direita, respectivamente. Já em um anel topológico, usaremos estas notações para se referir às translações aditivas, e as notações "L'_a" e "R'_a" serão usadas para se referir às respectivas translações multiplicativas.

Proposição 2.62. *Se $\mathcal{U}_e$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas do elemento identidade e de um grupo topológico (G,τ), então $\{xU : U \in \mathcal{U}_e, x \in G\}$ e $\{Ux : U \in \mathcal{U}_e, x \in G\}$ formam bases da topologia τ.*

Demonstração. Sejam $a \in G$ e W uma vizinhança aberta de a. Uma vez que L_a^{-1} é homeomorfismo (pela Proposição 2.59), temos que $L_a^{-1}(W) = a^{-1}W$ é um conjunto aberto que contém $a^{-1}a = e$. Sendo assim, existe $U \in \mathcal{U}_e$ tal que $U \subset a^{-1}W$. Consequentemente, $aU \subset W$. Logo $\{xU : U \in \mathcal{U}_e, x \in G\}$ é uma base para a topologia de G. A demonstração de que $\{Ux : U \in \mathcal{U}_e, x \in G\}$ também é base de τ é análoga. □

Definição 2.63. *Um subconjunto U de um grupo G é dito simétrico se $U^{-1} = U$, ou em notação aditiva, se $-U = U$.*

Proposição 2.64. *Dado um grupo topológico G, existe um sistema fundamental $\mathcal{U}_e$ de vizinhanças simétricas do elemento identidade e de G.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U}_e$ um sistema de vizinhanças de e. Como $e^{-1} = e$, segue da Proposição 2.59 que, para cada U em $\mathcal{U}_e$, U^{-1} é uma vizinhança de e. Seja $V_U = U \cap U^{-1}$. Assim, temos que

$$V_U^{-1} = (U \cap U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap U = V_U.$$

Portanto, cada $U \in \mathcal{U}_e$ contém um conjunto simétrico V_U obtido desta forma. Logo $\mathcal{V}_e = \{V_U : U \in \mathcal{U}_e\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças simétricas de e. □

Proposição 2.65. *Sejam (G,τ) um grupo topológico e V uma vizinhança da identidade e. Para todo inteiro positivo n, existe uma vizinhança U_n de e tal que*

$$U_n^n = \underbrace{U_n \cdot U_n \cdot \ldots \cdot U_n}_{n} \subset V.$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução. Para $n = 1$, basta tomar $U_1 = V$. Para $n = 2$, como $\rho_m : G \times G \to G$ é contínua, existe uma vizinhança U de (e, e) tal que $\rho_m(U) \subset V$. Assim, podemos tomar um subconjunto $A \subset U$ aberto que contém (e, e). Segue, da topologia produto de $G \times G$, que $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ onde $A_\alpha = A_{\alpha_1} \times A_{\alpha_2}$, onde A_{α_1} e A_{α_2} são abertos de G. Como $(e, e) \in A$, temos que existe $\beta \in \Lambda$ tal que

$$(e, e) \in A_\beta = A_{\beta_1} \times A_{\beta_2}.$$

Seja $U_2 = A_{\beta_1} \cap A_{\beta_2}$, o que nos permite concluir que $(e, e) \in U_2 \times U_2$ e

$$U_2 \times U_2 \subset A_{\beta_1} \times A_{\beta_2} \subset A \subset U.$$

Como $U_2 \times U_2 \subset U$ e $\rho_m(U) \subset V$, segue que $\rho_m(U_2 \times U_2) \subset V$, ou seja, $U_2 \cdot U_2 \subset V$.

Suponhamos que o resultado seja válido para $n = k$, ou seja, que existe uma vizinhança U_k de e tal que $U_k^k \subset V$. Sendo assim, do passo onde $n = 2$, temos que existe U_{k+1} vizinhança de e tal que $U_{k+1} \cdot U_{k+1} = U_{k+1}^2 \subset U_k$. Uma vez que $e \in U_{k+1}$ e $U_{k+1} \cdot U_{k+1} \subset U_k$, temos que $e \cdot U_{k+1} = U_{k+1} \subset U_k$. Assim, como $U_{k+1} \subset U_k$, $U_{k+1}^2 \subset U_k$ e $U_k^k \subset V$, podemos concluir que $U_{k+1}^{k+1} \subset V$, o que conclui a demonstração. □

Proposição 2.66. *Seja $\mathcal{U}$ o sistema de todas as vizinhanças da identidade e de um grupo topológico G. Então, para todo subconjunto A de G, temos*

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} AU = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} UA.$$

Demonstração. Dados $x \in \overline{A}$ e $U \in \mathcal{U}$, segue da Proposição 2.59 que xU^{-1} é uma vizinhança de x. Assim, temos que $xU^{-1} \cap A \neq \emptyset$. Portanto, $x \in AU$, qualquer que seja $U \in \mathcal{U}$. Logo $\overline{A} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} AU$.

Reciprocamente, suponha que $x \in AU$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Segue da Proposição 2.59 que, para toda vizinhança V de x, $V^{-1}x$ é uma vizinhança de e, ou seja, está em $\mathcal{U}$. Logo $x \in AV^{-1}x$, uma vez que $x \in AU$, para toda vizinhança U de e. Sendo assim, existem $a \in A$ e $p \in V$ tais que $x = ap^{-1}x$. Segue que $a = p$, o que implica que $A \cap V \neq \emptyset$. Em outras palavras, A intersecta toda vizinhança de x. Logo $x \in \overline{A}$.

Portanto, $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} AU$. A outra igualdade mostra-se de forma análoga. □

Considere as seguintes propriedades de separabilidade em um espaço topológico X:

(A_0) Para quaisquer dois elementos distintos x e y de X, um deles possui uma vizinhança

U que não contém o outro;

(A_1) Para quaisquer dois elementos distintos x e y de X, existem vizinhanças V_x e V_y tais que $x \in V_x$, $y \in V_y$, mas $x \notin V_y$ e $y \notin V_x$;

(A_2) Para quaisquer dois elementos distintos x e y de X, existem vizinhanças V_x e V_y de x e de y, respectiviamente, que são disjuntas;

(A_3) Dados um fechado F de X e um ponto $x \notin F$, existem vizinhanças V_1 e V_2 de F e de x, respectivamente, que são disjuntas.

Definição 2.67. *Um espaço topológico X que satisfaz a propriedade (A_i) é dito um espaço T_i, para $i = 1, 2, 3$. Um espaço T_2 também é chamado espaço de Hausdorff. Além disso, um espaço T_1 que satisfaz (A_3) é dito regular.*

Proposição 2.68. *Um espaço topológico X é um espaço T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$, o conjunto $\mathcal{F}_x$ das vizinhanças fechadas de x forma um sistema fundamental de vizinhanças de x.*

Demonstração. Suponha que X seja um espaço T_3. Dado $x \in X$, queremos mostrar que, para cada vizinhança U_x de x, existe uma vizinhança fechada F_x de x tal que $F_x \subset U_x$. Com efeito, existe um aberto W_x contido em U_x que contém x. Temos que $X \setminus W_x$ é fechado e não contém x. Como X é um espaço T_3, existem abertos V_1 e V_2 tais que $x \in V_1$, $(X \setminus W_x) \subset V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Portanto $\overline{V_1} \subset W_x$.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{F}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x e seja F um fechado de X que não contém x. Como $\mathcal{F}_x$ é sistema fundamental de vizinhanças fechadas de x, existe uma vizinhança fechada K de x que está contida na vizinhança $X \setminus F$. Assim, K é vizinhança de x e $X \setminus K$ é vizinhança de F e, além disso, são claramente disjuntas. □

Corolário 2.69. *Sejam G um grupo topológico e U uma vizinhança da identidade. Então existe uma vizinhança V da identidade tal que $\overline{V} \subset U$. Além disso, todo grupo topológico é um espaço T_3.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.65 que podemos tomar uma vizinhança V de e tal que $V \cdot V \subset U$. Segue da Proposição 2.66 que $\overline{V} \subset V \cdot V \subset U$.

Dados $x \in G$ e uma vizinhança U_x de x, temos, da Proposição 2.59, que $U = L_{x^{-1}}(U_x)$ é uma vizinhança de e. Agora tomemos uma vizinhança V de e tal que $\overline{V} \subset U$, conforme feito no início desta demonstração. Logo $L_x(\overline{V}) \subset U_x$. Como L_x é homeomorfismo, temos que $L_x(V)$ é vizinhança de x e $L_x(\overline{V}) = \overline{L_x(V)}$. Sendo $V_x = L_x(V)$, temos que

$$\overline{V_x} = \overline{L_x(V)} = L_x(\overline{V}) \subset U_x.$$

Ou seja, $\overline{V_x} \subset U_x$. Portanto, para todo $x \in G$, o conjunto $\mathcal{F}_x$ das vizinhanças fechadas de

x forma um sistema fundamental de vizinhanças de x. Segue da Proposição 2.68 que G é um espaço T_3. $\square$

Proposição 2.70. *Seja G um grupo topológico. Então existe um sistema fundamental $\mathcal{U}_e$ de vizinhanças fechadas da identidade e tal que:*

(a) *U é simétrico, para todo $U \in \mathcal{U}_e$;*

(b) *Para cada $U \in \mathcal{U}_e$, existe $V \in \mathcal{U}_e$ tal que $V^2 \subset U$;*

(c) *Para quaisquer $U \in \mathcal{U}_e$ e $a \in G$, existe $V \in \mathcal{U}_e$ tal que $V \subset a^{-1}Ua$ (ou $aVa^{-1} \subset U$).*

Demonstração. Como G é um grupo topológico, segue da Proposição 2.64 e do Corolário 2.69 que existe um sistema fundamental $\mathcal{U}_e$ de vizinhanças de e tal que cada $U \in \mathcal{U}_e$ é simétrico e fechado. Sendo assim, a condição (a) é satisfeita por $\mathcal{U}_e$. Além disso, como G é um grupo topológico, segue da Proposição 2.58 que a aplicação $f : G \times G \to G$, dada por $f(x, y) = xy^{-1}$, é contínua. Desse modo, dado $U \in \mathcal{U}_e$, considere $f^{-1}(U)$. Como $(e, e) \in f^{-1}(U)$ e f é contínua, segue da topologia produto que existe uma vizinhança W de e tal que $W \times W \subset f^{-1}(U)$. Como $\mathcal{U}_e$ é sistema fundamental de vizinhanças de e, existe $V \in \mathcal{U}_e$ tal que

$$V \times V \subset W \times W \subset f^{-1}(U).$$

Assim, como V é simétrica, temos que

$$f(V \times V) = VV^{-1} = VV \subset U,$$

o que nos permite concluir que $\mathcal{U}_e$ satisfaz a condição (b).

Finalmente, da Proposição 2.59 temos que a aplicação $\varphi_a : G \to G$, dada por

$$\varphi_a(x) = axa^{-1},$$

é homeomorfismo, para todo $a \in G$. Sendo assim, dado $U \in \mathcal{U}_e$, como

$$\varphi_a(e) = aea^{-1} = aa^{-1} = e$$

e φ_a é homeomorfismo, temos que $\varphi_a(U) = aUa^{-1}$ é vizinhança de e. Portanto, como $\mathcal{U}_e$ é sistema fundamental de vizinhanças de e, existe $V \in \mathcal{U}_e$ tal que $V \subset aUa^{-1}$. Logo $\mathcal{U}_e$ satisfaz a condição (c). $\square$

Proposição 2.71. *Todo grupo topológico G que é um espaço T_0 é também um espaço T_1.*

Demonstração. Dados dois elementos distintos x e y de G, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe uma vizinhança U de x tal que $y \notin U$. Segue da Proposição 2.59 que $x^{-1}U = V$ é uma vizinhança de e. Assim, segue que $V \cap V^{-1} = W$ é uma vizinhança simétrica de e. Novamente da Proposição 2.59, segue que yW é uma vizinhança de y.

Note que $x \notin yW$. Com efeito, se $x \in yW$, temos que

$$x^{-1} \in \rho_i(yW) = Wy^{-1} \subset Vy^{-1} \subset x^{-1}Uy^{-1},$$

onde $\rho_i : G \to G$ é o homeomorfismo de inversão. Desse modo,

$$e = xx^{-1} \in xx^{-1}Uy^{-1} = Uy^{-1},$$

o que nos permite concluir que $y \in U$, o que é uma contradição. Logo yW é uma vizinhança de y que não contém x. Em particular, G é um espaço T_1. $\square$

Proposição 2.72. *Todo grupo topológico G que é um espaço T_0 é também um espaço T_2.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.71 que G é um espaço T_1. Sejam x e y elementos distintos de G. Note que, como G é um espaço T_1, para cada $z \in (G \setminus \{x\})$, podemos tomar uma vizinhança U_z de z tal que $x \notin U_z$. Sendo assim, temos que

$$\{x\} = G \setminus \bigcup_{z \in G_x} U_z,$$

onde $G_x = G \setminus \{x\}$. Ou seja, $\{x\}$ é o complementar de um aberto e, portanto, é fechado. Assim, G_x é uma vizinhança de y que não contém x. Segue da Proposição 2.59 que $y^{-1}G_x$ é uma vizinhança de e. Pela Proposição 2.70, podemos tomar uma vizinhança fechada simétrica V de e tal que $VV^{-1} \subset y^{-1}G_x$, uma vez que $y^{-1}G_x$ é uma vizinhança de e. Como V é uma vizinhança de e, temos que yV é uma vizinhança de y. Seja $W = G \setminus yV$, que é aberto (pois é complementar de um fechado). Note que $x \in W$. Com efeito, se $x \notin W$, então $x \in yV$. Deste modo, sendo xV uma vizinhança de x, concluímos que $xV \cap yV \neq \emptyset$. Logo $x \in yVV^{-1}$. Uma vez que $VV^{-1} \subset y^{-1}G_x$, podemos concluir que $x \in y(y^{-1}G_x) = G_x$, o que é uma contradição. Como $W = G \setminus yV$, temos que $W \cap yV = \emptyset$. Portanto, escolhendo as vizinhanças W de x e yV de y, concluímos que G é um espaço T_2. $\square$

2.4 O quaseanel $N_R(G)$

Sejam R um anel topológico e G um R-módulo topológico à direita. Dizemos que uma aplicação $f : G \to G$ é R-homogênea se $f(x\lambda) = f(x)\lambda$, para quaisquer $x \in G$ e $\lambda \in R$. Seja

$$M_R(G) = \{f : G \to G : f \text{ é } R\text{-homogênea}\}$$

o conjunto das aplicações R-homogêneas de G em G. Finalmente, definimos o seguinte subconjunto de $M_R(G)$ que será o nosso principal objeto de estudo:

$$N_R(G) = \{f \in M_R(G) : f \text{ é contínua}\}.$$

Observação. A partir de agora, ao mencionar que uma aplicação é "R-homogênea", omitiremos o "R", dizendo apenas que a aplicação é "homogênea". Faremos menção do anel onde a aplicação tem a propriedade de homogeneidade apenas quando for necessário.

Nosso objetivo é estudar a primalidade do quaseanel $N_R(G)$. Antes de tudo, vamos mostrar que $N_R(G)$ é, de fato, um quaseanel.

Proposição 2.73. *O conjunto $N_R(G)$ munido das operações $\oplus$ e $\circ$, definidas por*

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \;\; e \;\; (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

tem estrutura de quaseanel à direita. Além disso, $N_R(G)$ é zerossimétrico.

Demonstração. Primeiramente, vejamos que $\oplus$ e $\circ$ estão bem-definidas. Com efeito, temos que

$$(f \oplus g)(x\lambda) = f(x\lambda) + g(x\lambda) = f(x)\lambda + g(x)\lambda = (f(x) + g(x))\lambda = [(f \oplus g)(x)]\lambda.$$

Logo $f \oplus g$ é homogênea. Para ver que $f \oplus g$ é contínua, note que

$$(f \oplus g)(x) = \rho_a(f(x), g(x)),$$

onde f e g são contínuas, pois f e g estão em $N_R(G)$, e ρ_a é contínua, uma vez que G é módulo topológico. Portanto, $f \oplus g \in N_R(G)$, ou seja, a operação $\oplus$ está bem-definida em $N_R(G)$. Quanto a $\circ$, vale que

$$(g \circ f)(x\lambda) = g(f(x\lambda)) = g(f(x)\lambda) = g(f(x))\lambda = [(g \circ f)(x)]\lambda.$$

Logo $g \circ f$ é homogênea. Para ver que $g \circ f$ é contínua, basta notar que se trata da composição de aplicações contínuas e, portanto, é contínua. Assim, podemos concluir que $(g \circ f) \in N_R(G)$, ou seja, a operação $\circ$ está bem-definida em $N_R(G)$.

Agora, vejamos que $(N_R(G), \oplus)$ é grupo. Quanto à associatividade, temos

$$[(f \oplus g) \oplus h](x) = (f \oplus g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) =$$

$$= f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g \oplus h)(x) = [f \oplus (g \oplus h)](x).$$

Em relação ao elemento identidade, tome a aplicação identicamente nula $c_0 : G \to G$ dada por $c_0(x) = 0$, para todo $x \in G$. Assim, temos

$$(f \oplus c_0)(x) = f(x) + c_0(x) = f(x) + 0 = f(x) \text{ e}$$

$$(c_0 \oplus f) = c_0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x).$$

Logo c_0 é elemento identidade para a operação $\oplus$.

Agora, vejamos que $(-f) : G \to G$, dada por $(-f)(x) = -f(x)$, está em $N_R(G)$ e é elemento inverso para f, onde $f \in N_R(G)$. Com efeito,

$$(-f)(x\lambda) = -f(x\lambda) = -f(x)\lambda = [(-f)(x)]\lambda.$$

Logo $(-f) \in M_R(G)$. Além disso, é verdade que $(-f)$ é contínua, pois $(-f)$ é a composição de duas aplicações contínuas, a saber, ρ_i, que é contínua porque G é módulo topológico, e f, que é contínua pois está em $N_R(G)$. Além disso, vale que

$$[(-f) \oplus f](x) = (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0 \text{ e que}$$

$$[f \oplus (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Portanto, $(-f)$ é o elemento inverso de f, para todo $f \in N_R(G)$. Logo, $(N_R(G), \oplus)$ é grupo.

Note que $(N_R(G), \circ)$ é semigrupo, pois a composição de aplicações é associativa. Sendo assim, resta apenas mostrar a distributividade à direita. Dados $f, g, h \in N_R(G)$ e $x \in G$, temos que

$$[(f \oplus g) \circ h](x) = (f \oplus g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) =$$

$$= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) = [(f \circ h) \oplus (g \circ h)](x).$$

Logo,

$$(f \oplus g) \circ h = (f \circ h) \oplus (g \circ h),$$

o que mostra que $N_R(G)$ é um quaseanel à direta.

Vejamos que $N_R(G)$ é zerossimétrico. Dados $f \in N_R(G)$, $x \in G$ e sendo $c_0 \equiv 0$, temos

$$(f \circ c_0)(x) = f(c_0(x)) = f(0) = f(0 \cdot 0) = f(0)0 = 0.$$

$\square$

Com demonstração análoga, vê-se que $M_R(G)$ também é um quaseanel zerossimétrico. Assim, $N_R(G)$ é um subquaseanel de $M_R(G)$.

3 MÓDULOS COM IDENTIDADE

A partir de agora o nosso objetivo é buscar relações entre a primalidade de R e de $N_R(G)$. Nesta seção vamos estudar o caso em que R é um anel com identidade e. Agora, faça $G = R$, ou seja, considere R como um R-módulo topológico. Neste caso, provamos as próximas duas proposições cujas afirmações aparecem desacompanhadas de demonstração no artigo base:

Proposição 3.1. *Se R é um anel topológico, então $N_R(R) = M_R(R)$.*

Demonstração. Dado $f \in M_R(R)$, temos que

$$f(x) = f(e \cdot x) = f(e)x.$$

Portanto, f é a multiplicação à esquerda por $f(e)$, ou seja, $f = L'_{f(e)}$. Portanto, segue da Proposição 2.61 que f é contínua. Logo $N_R(R) = M_R(R)$. □

Proposição 3.2. *Considere o anel topológico R como R-módulo topológico. Então $M_R(R)$ é isomorfo a R.*

Demonstração. Considere a aplicação $\Psi : M_R(R) \to R$ dada por $\Psi(f) = f(e)$. Claramente Ψ está bem-definida. Vejamos que Ψ é um homomorfismo (de quaseanéis). Com efeito, dados $f, g \in M_R(R)$, temos

$$\Psi(f \oplus g) = (f \oplus g)(e) = f(e) + g(e) = \Psi(f) + \Psi(g).$$

Além disso, note

$$\Psi(g \circ f) = (g \circ f)(e) = g(f(e)) = g(e \cdot f(e)) = g(e)f(e).$$

Portanto, Ψ é homomorfismo.

Quanto à bijetividade, como $f(x) = f(e)x$, temos que $\Psi(f) = 0$ se, e somente se, $f(e) = 0$, o que ocorre se, e somente se, $f \equiv 0$. Ou seja, $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{0\}$, o que implica que Ψ é injetiva. Para verificar a sobrejetividade, para um elemento arbitrário $y \in R$, tome $L'_y \in M_R(R)$ que é dada por $L'_y(x) = yx$. Temos que $\Psi(L'_y) = y$. Logo Ψ é sobrejetiva. Portanto, Ψ é isomorfismo, o que nos permite concluir que $M_R(R)$ é isomorfo a R. □

Das duas últimas proposições, segue o seguinte corolário:

Corolário 3.3. *Considere o anel topológico R como R-módulo topológico. Então $N_R(R) = M_R(R) \cong R$.*

Nem sempre $N_R(G) = M_R(G)$, como podemos constatar no próximo exemplo, que está presente no artigo base *BOOTH, G. L.*, *MEYER, J. H.*, and *MOGAE, K.* (2017).

Exemplo 3.4. *Seja $G = \mathbb{R}^2$ com a topologia usual a partir da topologia de $\mathbb{R}$. Considere $\mathbb{R}^2$ como um $\mathbb{R}$-módulo topológico onde $(x, y)r = (rx, ry)$. Então $N_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) \neq M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$. Com efeito, seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$f(a,b) = \begin{cases} (-a,0), & b \neq 0 \\ (a,0), & b = 0 \end{cases}.$$

Vejamos que $f \in M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$. Dados $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathcal{R}$, para $b \neq 0$, temos:

$$f((a,b)r) = f(ar, br) = (-ar, 0) = (-a, 0)r = f(a,b)r.$$

Por outro lado, se $b = 0$, temos

$$f((a,b)r) = f(ar, br) = f(ar, 0) = (ar, 0) = f(a, 0)r = f(a,b)r.$$

No entanto, vejamos que f não é contínua em $(1,0)$. Considere a sequência $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\lim_{x\to\infty} f(1, x_n) = \lim_{x\to\infty}(-1,0) = (-1,0) \neq (1,0) = \lim_{x\to\infty}(1,0) = f\left(\lim_{x\to\infty}(1, x_n)\right),$$

o que nos permite concluir que $f \notin N_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$.

Considerando o R-módulo R^2 onde considera-se o produto por escalar dado por $(a,b)r = (ar, br)$, quaisquer que sejam $a, b, r \in R$, S. Veldsman mostrou em *VELDSMAN* (1992) que R é um anel primo se, e somente se, $M_R(R^2)$ é equiprimo, e que isto ocorre se, e somente se, $M_R(R^2)$ é 3-primo. Com a pretenção de exibir uma extensão desse resultado para anéis topológicos, onde faz sentido analisarmos $N_R(R^2)$ em vez de $M_R(R^2)$, segue o seguinte resultado auxiliar:

Lema 3.5. *Seja R um anel topológico. Então a aplicação $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : R^2 \to R^2$ definida pela multiplicação de matrizes:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

está em $N_R(R^2)$.

Demonstração. Inicialmente, note que a aplicação $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a soma das aplicações

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, onde

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ cx \end{bmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} by \\ dy \end{bmatrix}.$$

Além disso, temos que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (L'_a(x), L'_c(x)) \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (L'_b(y), L'_d(y)).$$

Sendo assim, segue da Proposição 2.61 que as aplicações $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ são contínuas.

Agora, vejamos que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é homogênea. Com efeito, dado $r \in R$, temos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} xr \\ yr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} axr + byr \\ cxr + dyr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ax + by)r \\ (cx + dy)r \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} r,$$

o que nos permite concluir que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N_R(R^2)$. □

O resultado a seguir é enunciado no artigo base, mas sem demonstração. Veldsman apresenta uma demonstração para esse resultado no caso de anéis discretos em *VELDSMAN* (1992), que também funciona para o caso de anéis topológicos. A seguir apresentamos, com uma riqueza maior de detalhes, a demonstração feita por Veldsman.

Proposição 3.6. *Seja R um anel topológico com identidade. Então são equivalentes:*

(*a*) *R é um anel primo;*

(*b*) *$N_R(R^2)$ é um quaseanel equiprimo;*

(*c*) *$N_R(R^2)$ é um quaseanel 3-primo.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Sejam $f, g, h \in N_R(R^2)$, com $h \neq 0$, tais que

$$h \circ \varphi \circ f = h \circ \varphi \circ g,$$

para todo $\varphi \in N_R(R^2)$. Como $h \neq 0$, existem $x, y \in R$ tais que $h(x, y) = (x', y') \neq (0, 0)$. Para $z, w \in R$, sejam $f(z, w) = (z', w')$ e $g(z, w) = (z'', w'')$. Para algum $r \in R$, considere

$\begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix}$, que, pelo Lema 3.5, está em $N_R(R^2)$. Sendo assim, temos que

$$h \circ \begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix} \circ f = h \circ \begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix} \circ g.$$

Aplicando ambas em (z, w), temos

$$h \circ \begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix} \circ f(z,w) = h \circ \begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix} \circ g(z,w) \text{ se, e somente se,}$$

$$h \circ \begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z' \\ w' \end{bmatrix} = h \circ \begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z'' \\ w'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$h(xrz', yrz') = h(xrz'', yrz'') \text{ se, e somente se,}$$

$$h(x,y)rz' = h(x,y)rz'' \text{ se, e somente se,}$$

$$(x', y')rz' = (x', y')rz''.$$

Logo $x'rz' = x'rz''$ e $y'rz' = y'rz''$, para todo $r \in R$. No entanto, como $(x', y') \neq (0,0)$, temos que $x' \neq 0$ ou $y' \neq 0$, fazendo com que uma das igualdades encontradas seja não nula. Sem perda de generalidade, suponha que $x' \neq 0$. Assim, $x'rz' = x'rz''$ implica $x'r(z' - z'') = 0$, para todo $r \in R$. Como R é primo, segue que $z' = z''$.

Agora, considere $\begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix}$ que, também pelo Lema 3.5, está em $N_R(R^2)$. Sendo assim, temos que

$$h \circ \begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix} \circ f = h \circ \begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix} \circ g.$$

Logo, aplicando ambas em (z, w), temos

$$h \circ \begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix} \circ f(z,w) = h \circ \begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix} \circ g(z,w) \text{ se, e somente se,}$$

$$h \circ \begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z' \\ w' \end{bmatrix} = h \circ \begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z'' \\ w'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$h(xrw', yrw') = h(xrw'', yrw'') \text{ se, e somente se,}$$

$$h(x,y)rw' = h(x,y)rw'' \text{ se, e somente se,}$$

$$(x', y')rw' = (x', y')rw''.$$

Logo $x'rw' = x'rw''$ e $y'rw' = y'rw''$, para todo $r \in R$. No entanto, como $(x', y') \neq (0,0)$, temos que $x' \neq 0$ ou $y' \neq 0$, fazendo com que uma das igualdades acima seja não nula. Assim, como R é primo, segue que $w' = w''$.

Sendo assim, concluímos que $f(z,w) = g(z,w)$, para todo $(z,w) \in R^2$. Logo $f = g$, o que nos permite concluir que $N_R(R^2)$ é equiprimo.

$(b) \Rightarrow (c)$: Segue diretamente do item (a) da Proposição 2.39.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sendo $N_R(R^2)$ é 3-primo, suponha, por absurdo, que R não é primo. Então existem $a, x \in R$ não nulos tais que $arx = 0$, para todo $r \in R$. Assim, temos que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_R(R^2).$$

Agora, tome $\varphi \in N_R(R^2)$ e considere $(c,d) = \varphi(e,0)$, onde e é o elemento identidade de R. Dados $z, w \in R$, temos que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \varphi \circ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \varphi \circ \begin{bmatrix} xz \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \varphi \circ \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} xz = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} xz =$$

$$= \begin{bmatrix} (acx)z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix},$$

para qualquer $(z,w) \in R^2$. Como $N_R(R^2)$ é 3-primo, temos que

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que $x = 0$. Contradição. Logo, R é primo. $\square$

Observação. Note que a primalidade de R não depende da sua topologia. No entanto, a topologia de R determina a estrutura do quaseanel $N_R(R^2)$. Além disso, é interessante perceber que a primalidade $N_R(R^2)$ determina e é determinada pela de R.

Proposição 3.7. *Seja R um anel topológico com identidade. Então são equivalentes:*
(a) R é um anel semiprimo;
(b) $N_R(R^2)$ é um quaseanel semiequiprimo;
(c) $N_R(R^2)$ é um quaseanel 3-semiprimo.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Sejam $f, g \in N_R(R^2)$ tais que $(f-g) \circ h \circ f = (f-g) \circ h \circ g$, para todo $h \in N_R(R^2)$. Para quaisquer $x, y \in R$, sejam $f(x,y) = (x', y')$ e $g(x,y) = (x'', y'')$. Sabemos que, para todo $r \in R$, temos que

$$\begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix} \in N_R(R^2).$$

Assim, segue que

$$(f-g)\begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix} f(x,y) = (f-g)\begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix} g(x,y) \text{ se, e somente se,}$$

$$(f-g)\begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = (f-g)\begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$(f-g)\begin{bmatrix} xrx' \\ yrx' \end{bmatrix} = (f-g)\begin{bmatrix} xrx'' \\ yrx'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$(f-g)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} rx' = (f-g)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} rx'' \text{ se, e somente se,}$$

$$f(x,y)rx' - g(x,y)rx' = f(x,y)rx'' - g(x,y)rx'' \text{ se, e somente se,}$$

$$(x', y')rx' - (x'', y'')rx' = (x', y')rx'' - (x'', y'')rx'' \text{ se, e somente se,}$$

$$(x'rx' - x''rx', y'rx' - y''rx') = (x'rx'' - x''rx'', y'rx'' - y''rx'').$$

Desse modo, podemos concluir que $x'rx' - x''rx' = x'rx'' - x''rx''$, o que implica

$$(x' - x'')r(x' - x'') = 0.$$

Como R é semiprimo, temos que $x' = x''$.

Agora, tomando $\begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix}$ no lugar de $\begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr & 0 \end{pmatrix}$, concluímos que:

$$(f-g)\begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & xr \end{pmatrix} f(x,y) = (f-g)\begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix} g(x,y) \text{ se, e somente se,}$$

$$(f-g)\begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = (f-g)\begin{pmatrix} 0 & xr \\ 0 & yr \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$(f-g)\begin{bmatrix} xry' \\ yry' \end{bmatrix} = (f-g)\begin{bmatrix} xry'' \\ yry'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$(f-g)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ry' = (f-g)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ry'' \text{ se, e somente se,}$$

$$f(x,y)ry' - g(x,y)ry' = f(x,y)ry'' - g(x,y)ry'' \text{ se, e somente se,}$$

$$(x',y')ry' - (x'',y'')ry' = (x',y')ry'' - (x'',y'')ry'' \text{ se, e somente se,}$$

$$(x'ry' - x''ry', y'ry' - y''ry') = (x'ry'' - x''ry'', y'ry'' - y''ry'').$$

Desse modo, vale que $y'ry' - y''ry' = y'ry'' - y''ry''$, o que implica

$$(y'-y'')r(y'-y'') = 0.$$

Como R é semiprimo, segue que $y' = y''$. Portanto $f = g$, o que nos permite concluir que $N_R(R^2)$ é semiequiprimo.

$(b) \Rightarrow (c)$: Esta implicação é uma consequência direta do item (b) da Proposição 2.41.

$(c) \Rightarrow (a)$: Seja $a \in R$ tal que $ara = 0$ para todo $r \in R$. Temos que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_R(R^2)$. Sejam $h \in N_R(R^2)$ e $x, y \in R$. Suponha que $h(e,0) = (z,w)$, onde e é o elemento neutro de R. Assim, vale que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ h \circ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ h \begin{bmatrix} ax \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ h \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} ax = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} zax \\ wax \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} azax \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pois $aza = 0$. Como $N_R(R^2)$ é 3-semiprimo, temos que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, o que nos permite concluir que $a = 0$. Portanto, R é semiprimo. □

Definição 3.8. *Seja R um anel. Um elemento $x \in R$ é dito idempotente se $x^2 = x$.*

Definição 3.9. *Um conjunto de elementos idempotentes $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de um anel R é dito ortogonal se $e_i \cdot e_j = 0$ sempre que $i \neq j$.*

A seguir, vamos exibir um resultado que tem basicamente a mesma demonstração da sua versão para anéis discretos (no caso em que $M_R(R^2) = N_R(R^2)$) que não está presente no artigo base deste trabalho, mas em *MAXSON, C. J.* and *VAN WYK, L.* (1992). Antes disso, provaremos o lema a seguir.

Lema 3.10. *Seja R um anel com identidade e tal que $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ é uma soma* *direta de ideias $R_1, \cdots, R_n$. Então temos que $e = e_1 + \cdots + e_n$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais e e_i é a identidade de R_i.*

Demonstração. Como $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, temos que o elemento identidade e de R é escrito de maneira única como soma direta de elementos dos R_i, digamos

$$e = e_1 + \cdots + e_n,$$

onde $e_i \in R_i$, $i = 1, \ldots, n$. Vamos mostrar que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais e e_i é a identidade de R_i. Com efeito, como $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ e $e_i \in R_i$, segue que $e_i \cdot e_j = 0$ sempre que $i \neq j$. Sendo assim, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, podemos concluir que

$$e_i = e_i \cdot e = e_i \cdot (e_1 + \cdots + e_n) = e_i \cdot e_1 + \cdots + e_i \cdot e_n = e_i^2.$$

Logo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais. Vejamos que e_i é elemento identidade de R_i. Dado $x_i \in R_i$, temos que

$$x_i = e \cdot x_i = (e_1 + \cdots + e_n) \cdot (0 + \cdots + x_i + \cdots + 0) =$$

$$= e_1 \cdot 0 + \cdots + e_i \cdot x_i + \cdots + e_n \cdot 0 = e_i \cdot x_i$$

e

$$x_i = x_i \cdot e = (0 + \cdots + x_i + \cdots + 0) \cdot (e_1 + \cdots + e_n) =$$

$$= 0 \cdot e_1 + \cdots + x_i \cdot e_i + \cdots + 0 \cdot e_n = x_i \cdot e_i.$$

Logo e_i é elemento identidade em R_i. □

Proposição 3.11. *Seja R um anel topológico com identidade tal que $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ é uma soma direta de ideais $R_1, \cdots, R_n$. Então $N_R(R^2) \cong N_{R_1}(R_1^2) \oplus \cdots \oplus N_{R_n}(R_n^2)$.*

Demonstração. Como $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, onde $R_1, \cdots, R_n$ são ideais de R, temos que $e = e_1 + \cdots + e_n$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais e e_i é a identidade de R_i (pelo Lema 3.10). Além disso, note que $R^2 = R_1^2 \oplus \cdots \oplus R_n^2$. Se $(x, y) \in R^2$, então $(x, y) = (x_1, y_1) + \cdots + (x_n, y_n)$, onde $(x_i, y_i) \in R_i^2$. Assim, dado $f \in N_R(R^2)$, vale que

$$f(x, y) = f((x_1, y_1) + \cdots + (x_n, y_n)) = (a_1, b_1) + \cdots + (a_n, b_n),$$

onde $(a_i, b_i) \in R_i^2$. No entanto, como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais, segue que $e_i \cdot e_j = 0$ se $i \neq j$, e $e_i^2 = e_i$. Assim, como $f \in N_R(R^2)$, podemos concluir que

$$f(x,y)e_i = f((x_1,y_1)e_i + \cdots + (x_n,y_n)e_i) = (a_1,b_1)e_i + \cdots + (a_n,b_n)e_i \text{ se, e somente se,}$$

$$f(x_i,y_i) = (a_i,b_i).$$

Logo $f(x,y) = f(x_1,y_1)+\cdots+f(x_n,y_n)$, e além disso, $f(R_i^2) \subset R_i^2$, ou seja, R_i^2 é invariante por f, para todo $f \in N_R(R^2)$.

Olhando para cada R_i^2 como um R-módulo, considere o quaseanel $N_R(R_i^2)$. Agora, verifiquemos que a aplicação $\varphi : N_R(R^2) \to N_R(R_1^2) \oplus \cdots \oplus N_R(R_n^2)$ dada por $\varphi(f) = (f_1, \cdots, f_n)$, onde $f_i = f|_{R_i^2}$, é um isomorfismo de quaseanéis. Com efeito, dadas $f, g \in N_R(R^2)$ e $((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)) \in R_1^2 \oplus \cdots \oplus R_n^2$, temos que

$$\varphi(f \oplus g)((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)) = ((f \oplus g)_1,\ldots,(f \oplus g)_n)((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n))$$

e como R_i^2 é invariante por todo elemento de $N_R(R^2)$, vale que

$$(f \oplus g)_i(x_i,y_i) = f_i(x_i,y_i) + g_i(x_i,y_i).$$

Assim, segue que

$$\varphi(f \oplus g)((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)) = (f_1(x_1,y_1)+g_1(x_1,y_1),\ldots,f_n(x_n,y_n)+g_n(x_n,y_n)) =$$

$$= (f_1(x_1,y_1),\ldots,f_n(x_n,y_n)) + (g_1(x_1,y_1),\ldots,g_n(x_n,y_n)) =$$

$$\varphi(f)((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)) + \varphi(g)((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)).$$

Logo $\varphi(f \oplus g) = \varphi(f) \oplus \varphi(g)$. Agora, em relação à operação $\circ$, temos que

$$\varphi(f \circ g)((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)) = ((f \circ g)_1,\ldots,(f \circ g)_n)((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)).$$

E como R_i^2 é invariante por todo elemento de $N_R(R^2)$, segue que

$$(f \circ g)_i(x_i,y_i) = (f_i \circ g_i)(x_i,y_i) = f_i(g_i(x_i,y_i)).$$

Desse modo, podemos concluir que

$$\varphi(f \circ g)((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)) = (f_1(g_1(x_1,y_1)),\ldots,f_n(g_n(x_n,y_n)) =$$

$$= \varphi(f)(g_1(x_1,y_1),\ldots,g_n(x_n,y_n)) = \varphi(f) \circ \varphi(g)((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)).$$

Logo $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$. Assim, φ é um homomorfismo de quaseanéis.

Vejamos que φ é sobrejetiva. Dado $(f_1,\ldots,f_n) \in N_R(R_1^2) \oplus \cdots \oplus N_R(R_n^2)$, defina $f : R^2 \to R^2$ por

$$f(x, y) = f_1(x_1, y_1) + \cdots + f_n(x_n, y_n),$$

onde $(x, y) = (x_1, y_1) + \cdots + (x_n, y_n)$. Assim, concluímos que $\varphi(f) = (f_1, \ldots, f_n)$. Logo φ é sobrejetiva.

Quanto à injetividade, seja $f \in N_R(R^2)$ tal que $\varphi(f) = 0$. Assim, vale que $f_i = f|_{R_i^2} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Logo, como $R^2 = R_1^2 \oplus \cdots \oplus R_n^2$, segue que $f \equiv 0$. Portanto, φ é injetiva, o que nos permite finalmente concluir que $N_R(R^2) \cong N_R(R_1^2) \oplus \cdots \oplus N_R(R_n^2)$.

Como $R_i \subset R$, temos que toda aplicação R-homogênea é R_i-homogênea. Desse modo, segue que $N_R(R_i^2) \subset N_{R_i}(R_i^2)$. Por outro lado, se $r \in R$, então $r = r_1 + \cdots + r_n$, onde $r_i \in R_i$, $i = 1, \cdots, n$. Assim, para $(x_i, y_i) \in R_i^2$, vale que

$$(x_i, y_i)r = (x_i, y_i)(e_1 r_1 + \cdots + e_n r_n) = (x_i, y_i)r_i,$$

pois $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais. Sendo assim, se f está em $N_{R_i}(R_i^2)$, então

$$f((x_i, y_i)r) = f((x_i, y_i)r_i) = f(x_i, y_i)r_i = f(x_i, y_i)r,$$

ou seja, $f \in N_R(R_i^2)$. Portanto, $N_{R_i}(R_i^2) = N_R(R_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$, o que nos permite concluir que

$$N_{R_1}(R_1^2) \oplus \cdots \oplus N_{R_n}(R_n^2) = N_R(R_1^2) \oplus \cdots \oplus N_R(R_n^2).$$

Finalmente concluímos que

$$N_R(R^2) \cong N_{R_1}(R_1^2) \oplus \cdots \oplus N_{R_n}(R_n^2).$$

□

Definição 3.12. *Um anel R é dito artiniano à esquerda se satisfizer a Condição de Cadeia Descendente para Ideais à Esquerda, ou seja, se, para toda sequência decrescente de ideais à esquerda $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$, existir um número inteiro positivo m tal que $I_m = I_{m+1} = \cdots$.*

Na demonstração da próxima proposição faremos uso do Teorema de Artin-Wedderburn, que enunciaremos agora, cuja demonstração pode ser vista em *NICHOLSON, W. K.* (1993).

Teorema 3.13. *(Artin-Wedderburn) Se R é um anel semiprimo artiniano à esquerda, então*

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r),$$

onde cada D_i é um anel com divisão e $M_n(D)$ denota o anel de matrizes $n \times n$ sobre D.

Observação. Lembre que os anéis de matrizes sobre um anel com divisão (que é um anel primo) são anéis primos, vide página 172 em *LAM, T.Y.* (2001).

Definição 3.14. *Seja N um quaseanel e I um ideal de N. Dizemos que I é um ideal 3-semiprimo se, dado $a \in N$, $aNa \subseteq I$ implica $a \in I$.*

Em *GROENEWALD, N.* (2001) vemos um exemplo de que, em um quaseanel zerossimétrico, um ideal 3-semiprimo não necessariamente é a interseção de ideais 3-primos. Esse exemplo contrasta com o caso de ideais semiprimos, que sempre são a interseção de ideais primos, como vimos na Proposição 2.37. Por outro lado, temos o seguinte lema:

Lema 3.15. *Em um quaseanel, a interseção de ideais 3-primos é um ideal 3-semiprimo.*

Demonstração. Inicialmente, note que todo ideal 3-primo é 3-semiprimo. Com efeito, sejam N um quaseanel e I um ideal 3-primo de N. Desse modo, temos que que N/I é um quaseanel 3-primo. Sendo assim, para quaisquer $a, b \in N$, vale que $\overline{a} \cdot N/I \cdot \overline{b} = \overline{0}$ implica que $\overline{a} = 0$ ou $\overline{b} = 0$. Ou seja, temos que $anb \in I$, para todo $n \in N$, implica que $a \in I$ ou $b \in I$. Em particular, temos que $ana \in I$, para todo $n \in N$, implica que $a \in I$. Logo I é um ideal 3-semiprimo.

Agora, sejam I_1 e I_2 ideais 3-primos que, portanto, são 3-semiprimos. Dado $a \in I_1 \cap I_2$ tal que $aNa \subseteq I_1 \cap I_2$, em particular, temos que $aNa \subseteq I_1$ e $aNa \subseteq I_2$. Como I_1 e I_2 são 3-semiprimos, temos que $a \in I_1$ e $a \in I_2$, ou seja, $a \in I_1 \cap I_2$. Portanto, $I_1 \cap I_2$ é 3-semiprimo. □

Com o auxílio da Proposição 3.11, veremos, no próximo resultado, que a relação entre a primalidade de R e de $N_R(R^2)$ é realmente profunda.

Além disso, o exemplo de um ideal 3-semiprimo que não é a intercessão de ideais 3-primos que é apresentado em *GROENEWALD, N.* (2001) mostra que, para um quaseanel 3-semiprimo N, não é necessariamente verdade que $\mathcal{P}_3(N) = \{0\}$. Assim, fica claro que a nossa próxima proposição não é apenas uma reescrita da Proposição 3.7.

Proposição 3.16. *Seja R um anel topológico artiniano à esquerda com identidade. Então são equivalentes:*

(*a*) *R é um anel semiprimo;*
(*b*) *$\mathcal{P}_e(N_R(R^2)) = \{0\}$;*
(*c*) *$\mathcal{P}_3(N_R(R^2)) = \{0\}$;*
(*d*) *$N_R(R^2)$ é 3-semiprimo.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Como R é um anel semiprimo Artiniano à esquerda, segue do Teorema de Artin-Wedderburn e da observação subsequente que R é a soma direta de anéis primos, digamos $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$. Sendo assim, a Proposição 3.11 nos permite concluir que

$$N_R(R^2) \cong N_{R_1}(R_1^2) \oplus \cdots \oplus N_{R_n}(R_n^2).$$

Como cada R_i é primo, temos da Proposição 3.6 que cada $N_{R_i}(R_i^2)$ é um quaseanel equiprimo. Deste modo, temos que $N_R(R^2)$ é um quaseanel equiprimo, uma vez que é soma direta finita de quaseanéis equiprimos. Portanto, o ideal $\{0\}$ de $N_R(R^2)$ é equiprimo. Logo $\mathcal{P}_e(N_R(R^2)) = \{0\}$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Como $\mathcal{P}_e(N_R(R^2)) = \{0\}$ e todo ideal equiprimo é 3-primo, concluímos que $\mathcal{P}_3(N_R(R^2)) = \{0\}$.

$(c) \Rightarrow (d)$: Como $\mathcal{P}_3(N_R(R^2)) = \{0\}$ é a interseção de todos os ideais 3-primos, o Lema 3.15 nos permite concluir que $\{0\}$ é um ideal 3-semiprimo. Assim, $N_R(R^2)/\{0\}$ é um quaseanel 3-semiprimo, isto é, $N_R(R^2)$ é 3-semiprimo.

$(d) \Rightarrow (a)$: Segue de $(c) \Rightarrow (a)$ na Proposição 3.7. $\square$

A seguir, veremos um resultado razoavelmente semelhante ao da Proposição 3.6 para um anel fortemente primo.

Proposição 3.17. *Seja R um anel topológico com identidade. Então são equivalentes:*

- (a) *R é um anel fortemente primo (à esquerda);*
- (b) *$N_R(R^2)$ é um quaseanel fortemente equiprimo;*
- (c) *$N_R(R^2)$ é um quaseanel fortemente primo.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Sejam $f, g, h \in N_R(R^2)$ com $h \neq 0$. Então, existem $x, y \in R$ tais que $h(x, y) = (x', y') \neq 0$. Dados $z, w \in R$, sejam $f(z, w) = (z', w')$ e $g(z, w) = (z'', w'')$. Como $(x', y') \neq 0$, concluímos que $x' \neq 0$ ou $y' \neq 0$. Suponha que $x' \neq 0$. Como R é fortemente primo, temos que existe um subconjunto finito $S(x')$ de R tal que se $r \in R$ é não nulo, então $x'sr \neq 0$, para todo $s \in S(x')$. Semelhantemente, se $y' \neq 0$, existe um subconjunto finito $S(y')$ de R tal que se $r \in R$ é não nulo, então $y'sr \neq 0$, para todo $s \in S(y')$. Se $x' = 0$, defina $S(x') = \emptyset$; e se $y' = 0$, defina $S(y') = \emptyset$. Finalmente, defina $S = S(x') \cup S(y')$, que é não vazio uma vez que $x' \neq 0$ ou $y' \neq 0$. Deste modo, podemos tomar $p \in \{x', y'\}$ não nulo, o que nos permite concluir que

$$pSr = \{0\} \text{ implica } r = 0.$$

Além disso, dado $t \in S$, é verdade que $\begin{pmatrix} xt & 0 \\ yt & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & yt \end{pmatrix} \in N_R(R^2)$.

Portanto,

$$h \circ \begin{pmatrix} xt & 0 \\ yt & 0 \end{pmatrix} \circ f \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = h \circ \begin{pmatrix} xt & 0 \\ yt & 0 \end{pmatrix} \circ g \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$h \circ \begin{pmatrix} xt & 0 \\ yt & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z' \\ w' \end{bmatrix} = h \circ \begin{pmatrix} xt & 0 \\ yt & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z'' \\ w'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$h \begin{bmatrix} xtz' \\ ytz' \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} xtz'' \\ ytz'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se, } h \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} tz' = h \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} tz'' \text{ se, e somente se,}$$

$$(x', y')tz' = (x', y')tz'' \text{ se, e somente se, } (x'tz', y'tz') = (x'tz'', y'tz'').$$

Assim, segue que $x'tz' = x'tz''$ e $y'tz' = y'tz''$ para todo $t \in S$. Logo,

$$pS(z' - z'') = \{0\},$$

o que implica $z' = z''$.

Agora, tomando $\begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & yt \end{pmatrix}$ em vez de $\begin{pmatrix} xt & 0 \\ yt & 0 \end{pmatrix}$, temos que

$$h \circ \begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & yt \end{pmatrix} \circ f \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = h \circ \begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & yt \end{pmatrix} \circ g \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$h \circ \begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & yt \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z' \\ w' \end{bmatrix} = h \circ \begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & yt \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z'' \\ w'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$h \begin{bmatrix} xtw' \\ ytw' \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} xtw'' \\ ytw'' \end{bmatrix} \text{ se, e somente se,}$$

$$h \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} tz' = h \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} tz'' \text{ se, e somente se,}$$

$$(x', y')tw' = (x', y')tw'' \text{ se, e somente se, } (x'tw', y'tw') = (x'tw'', y'tw'').$$

Assim, podemos concluir que $x'tw' = x'tw''$ e $y'tw' = y'tw''$ para todo $t \in S$. Segue que

$$pS(w' - w'') = \{0\},$$

o que implica $w' = w''$.

Logo o conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} xt & 0 \\ yt & 0 \end{pmatrix} : t \in S\right\} \bigcup \left\{\begin{pmatrix} 0 & xt \\ 0 & yt \end{pmatrix} : t \in S\right\}$$

é um isolador para h e é finito, já que S é finito. Portanto, $N_R(R^2)$ é fortemente equiprimo.

$(b) \Rightarrow (c)$ Como $N_R(R^2)$ é zerossimétrico (pela Proposição 2.73) e equiprimo, esta implicação segue diretamente da Proposição 2.47

$(c) \Rightarrow (a)$: Sejam $a, x \in R$ com $a \neq 0$. Sendo assim, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é um elemento não nulo de $N_R(R^2)$. Como $N_R(R^2)$ é fortemente primo, existe um subconjunto finito S_a de $N_R(R^2)$ tal que para qualquer $\varphi \in N_R(R^2)$, se $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ f \circ \varphi = 0$ para todo $f \in S_a$, então $\varphi = 0$. Em particular, se tomarmos φ da forma $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, para qualquer $b \in R$, temos que se $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ f \circ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ para todo $f \in S_a$, então $b = 0$.

Dado $f \in S_a$, fixemos $f(e, 0) = (c, d)$, para algum $(c, d) \in R^2$, onde e é o elemento neutro de R. Para quaisquer $z, w \in R$, temos vale

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ f \circ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ f \begin{bmatrix} xz \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ f \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} xz = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} xz = \begin{bmatrix} acxz \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, afirmar que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ f \circ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = 0$ para todo $f \in S_a$, implica que $x = 0$ equivale a dizer que se $acxz = 0$ para quaisquer $c \in S(a) = \{\pi_1(f(e, 0)) : f \in S_a\}$ e $z \in R$, então $x = 0$. Em particular, tomando $z = e$, temos que se $acx = 0$ para todo $c \in S(a)$, então $x = 0$. Assim, $S(a)$ é um isolador para a. $\square$

4 MÓDULOS NÃO NECESSARIAMENTE COM IDENTIDADE

Agora, consideremos um caso mais geral, onde G é um anel topológico e R é um subanel de G. O resultado a seguir revela que $N_R(G)$ e $M_R(G)$ podem ser bem diferentes.

Proposição 4.1. *Seja R um subanel denso de um anel topológico G com identidade. Então $N_R(G) \cong G$.*

Demonstração. Sejam $f \in N_R(G)$ e $y \in G$. Sendo assim, temos que $f(r) = f(e)r$, para todo $r \in R$. Como R é denso em G, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de R que converge para y. Como f é R-homogênea e $x_n \in R$, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $f(x_n) = f(e)x_n$. Além disso, como f é contínua, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$, e como ρ_m é contínua (pois G é anel topológico), podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} f(e)x_n = f(e)\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(e)y.$$

Como $f(x_n) = f(e)x_n$, segue que $f(y) = f(e)y$. Ou seja, cada $f \in N_R(G)$ é completamente determinada por $f(e)$ através da fórmula $f(y) = f(e)y$.

Para estabelecer o isomorfismo, considere $\Psi : N_R(G) \to G$ dada por $\Psi(f) = f(e)$, para todo $f \in N_R(G)$. Note que Ψ está bem-definida já que $f(e)$ é único para cada $f \in N_R(G)$. Note que Ψ é injetiva, pois

$$\Psi(f) = \Psi(g) \text{ se, e somente se, } f(e) = g(e) \text{ se, e somente se, } f = g.$$

Agora, dado $z \in G$, tome $L'_z : G \to G$ dada por $L'_z(x) = zx$. Note que $L'_z(e) = z$, e além disso, temos que $L'_z \in N_R(G)$, pois L'_z é a translação multiplicativa à esquerda por z, que é contínua e R-homogênea. Sendo assim, vale que $\Psi(L'_z) = L'_z(e) = z$. Portanto Ψ é sobrejetiva. Finalmente, note que Ψ é um homomorfismo de quaseanéis, pois

$$\Psi(f \oplus g) = (f \oplus g)(e) = f(e) + g(e) = \Psi(f) + \Psi(g)$$

e

$$\Psi(f \circ g) = f(g(e)) = f(\Psi(g)) = f(e)\Psi(g) = \Psi(f)\Psi(g).$$

Portanto, $N_R(G) \cong G$. □

Corolário 4.2. *Seja R um subanel denso de um anel topológico G com identidade . Então $N_R(G)$ é um anel.*

Demonstração. Da Proposição 4.1 temos que $N_R(G) \cong G$. Como G é um anel e $N_R(G) \cong G$, segue da Proposição 2.14 que $N_R(G)$ é um anel. □

Agora, vejamos um exemplo onde $M_R(G)$ não é um anel, mas $N_R(G)$ o é.

Exemplo 4.3. *$N_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ é anel, mas $M_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ não é anel. Com efeito, nas notações do Corolário 4.2, sejam $G = \mathbb{R}$ e $R = \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ e é um subanel de $\mathbb{R}$ com identidade e, segue do Corolário 4.2 que $N_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ é anel. Para ver que $M_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ não é anel, tome $f, g, h \in M_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ dadas por*

$$f(x) = (\pi - 2)x \ , \quad g(x) = 2x \quad e \quad h(x) = \begin{cases} x & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 2x & x \in \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Tomando $x = 1$, temos que

$$h \circ (f \oplus g)(1) = h(f(1) + g(1)) = h((\pi - 2) + 2) = h(\pi) = \pi,$$

enquanto

$$(h \circ f)(1) + (h \circ g)(1) = h(f(1)) + h(g(1)) = h(\pi - 2) + h(2) = \pi - 2 + 4 = \pi + 2.$$

Logo $h \circ (f \oplus g)(1) \neq (h \circ f)(1) + (h \circ g)(1)$, o que nos permite concluir que $M_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ não é anel.

Nesta seção, vamos estudar $N_R(G)$ no caso em que R é um ideal (ou ideal à esquerda) do anel G. Ainda que G seja um anel com identidade, G, como R-módulo, não necessariamente terá identidade. Se G é um anel de multiplicação nula, isto é, $GG = \{0\}$, então, para todo ideal R de G temos que $M_R(G) = M_{\{0\}}(G)$ e $N_R(G) = N_{\{0\}}(G)$. Sendo assim, vamos assumir que os anéis que estudamos nessa seção satisfazem $GG \neq \{0\}$. Observe que R pode ser visto como um G-módulo à esquerda. Em vista disso, o próximo resultado mostra que o anulador de R em G,

$$A = \mathrm{Ann}_G(R) = (\{0\} : R)_G = \{x \in G : xR = \{0\}\},$$

é um ideal de G.

Proposição 4.4. *Sejam G um anel e R um ideal de G. Então $A = Ann_G(R)$ é um ideal de G.*

Demonstração. Inicialmente, note que $0 \in A$, pois $0x = 0$, para todo $x \in R$. Além disso, dados $a, b \in A$, temos, para todo $x \in R$, que

$$(a + b)x = ax + bx = 0 + 0 = 0.$$

Logo $(a+b) \in A$. Finalmente, se $a \in A$ e $r \in G$, então, para todo $x \in R$, valem que

$$(ra)x = r(ax) = r0 = 0 \text{ e } (ar)x = a(rx) = 0,$$

uma vez que $rx \in R$, pois $r \in G$, $x \in R$ e R é ideal de G. Logo $ar, ra \in A$, o que nos permite concluir que A é ideal de G. □

De modo geral, se G é um anel topológico que não necessariamente tem elemento identidade lateral e R é um ideal à esquerda de G, temos que $f(GR) \subseteq R$, para todo $f \in N_R(G)$, pois $f(ax) = f(a)x \in R$, para quaisquer $a \in G$ e $x \in R$. Se G tem uma identidade à esquerda, temos o seguinte resultado:

Lema 4.5. *Seja R um ideal à esquerda de um anel topológico G onde G tem uma identidade à esquerda. Então, para todo $f \in N_R(G)$, vale que $f(R) \subseteq R$ e $f(A) \subseteq A$, onde $A = (\{0\} : R)_G$.*

Demonstração. Sejam $f \in N_R(G)$ e $r \in R$. Assim, temos que $f(gr) = f(g)r$, para todo $g \in G$. Tomando $g = e$, temos que

$$f(r) = f(er) = f(e)r \in R,$$

uma vez que $f(e) \in G$, $r \in R$ e $GR \subseteq R$. Logo $f(R) \subseteq R$. Além disso, se $a \in A$, então

$$f(a)r = f(ar) = f(0) = f(0)0 = 0,$$

o que nos permite concluir que $f(A) \subseteq A$. □

Usando a terminologia de módulos sobre quaseanéis, isto é, considerando a aplicação $\mu : N_R(G) \times G \to G$ dada por $\mu(f, x) = f(x)$, vamos usar o Lema 4.5 para provar o resultado a seguir, que é comentado no artigo base sem demonstração, que afirma que R e A são $N_R(G)$-subgrupos de G.

Proposição 4.6. *Seja R um ideal à esquerda de um anel topológico G, onde G tem uma identidade à esquerda. Então A e R são $N_R(G)$-subgrupos de G.*

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar que G é um $N_R(G)$-grupo sob a ação $\mu : N_R(G) \times G \to G$ dada por $\mu(f, g) = f(g)$. Com efeito, para quaisquer $f_1, f_2 \in N_R(G)$ e $x \in G$, temos que

$$\mu((f_1 \oplus f_2), x) = (f_1 \oplus f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \mu(f_1, x) + \mu(f_2, x) \text{ e}$$

$$\mu((f_1 \circ f_2), x) = (f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(\mu(f_2, x)) = \mu(f_1, \mu(f_2, x)).$$

Logo G é um $N_R(G)$-grupo.

Para concluir que A e R são $N_R(G)$-subgrupos de G, basta verificar que $\mu(f,a) \in A$, para quaisquer $f \in N_R(G)$ e $a \in A$ e que $\mu(f,r) \in R$, para quaisquer $f \in N_R(G)$ e $r \in R$, respectivamente. Em outras palavras, basta verificar que $f(A) \subseteq A$ e que $f(R) \subseteq R$, para todo $f \in N_R(G)$. No entanto, o Lema 4.5 nos assegura tais inclusões. Portanto, A e R são $N_R(G)$-subgrupos de G. $\square$

De fato, podemos mostrar que A é um pouco mais que um $N_R(G)$-subgrupo de G.

Proposição 4.7. *Seja R um ideal à esquerda de um anel topológico G e $A = (\{0\} : R)_G$. Então A é um $N_R(G)$-ideal de G.*

Demonstração. Já sabemos, da Proposição 4.6, que A é um $N_R(G)$-subgrupo de G. Sendo assim, basta verificar que A é subgrupo normal de G e que $\mu(f, x+a) - \mu(f,x) \in A$, para quaisquer $f \in N_R(G)$, $x \in G$ e $a \in A$. Dado $a \in A$, para quaisquer $x, g \in G$, temos que

$$(x + a - x)g = xg + ag - xg = xg - xg = 0,$$

logo $(x + a - x) \in A$. Portanto, A é um subgrupo normal de G.

Além disso, dado $g \in G$, para quaisquer $f \in N_R(G)$, $x \in G$ e $a \in A$, temos que

$$[\mu(f, x+a) - \mu(f,x)]g = [f(x+a) - f(x)]g = f((x+a)g) - f(xg) =$$

$$= f(xg + ag) - f(xg) = f(xg + 0) - f(xg) = 0.$$

Logo $\mu(f, x+a) - \mu(f,x) \in A$, o que nos permite concluir que A é um $N_R(G)$-ideal de G. $\square$

Usando os resultados acima e conhecimentos básicos da teoria N-grupos, onde N é um quaseanel, provamos o resultado a seguir, cuja demonstração não está detalhada no artigo base *BOOTH, G. L.*, *MEYER, J. H.*, and *MOGAE, K.* (2017).

Proposição 4.8. *Sejam R um ideal à esquerda de um anel topológico com identidade G e $A = (\{0\} : R)_G$. Então os seguintes conjuntos são ideais de $N_R(G)$:*

(*a*) $(\{0\} : A)_{N_R(G)} = \{\varphi \in N_R(G) : \varphi(A) = 0\}$;

(*b*) $(A : G)_{N_R(G)} = \{\varphi \in N_R(G) : \varphi(G) \subseteq A\}$.

Demonstração. (*a*) Inicialmente, vejamos que $(\{0\} : A)_{N_R(G)}$ é um subgrupo normal de $(N_R(G), \oplus)$. Com efeito, se $\varphi \in (\{0\} : A)_{N_R(G)}$, $f \in N_R(G)$ e $a \in A$, então

$$(f \oplus \varphi \oplus (-f))(a) = f(a) + \varphi(a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0.$$

Logo $(f \oplus \varphi \oplus (-f)) \in (\{0\} : A)_{N_R(G)}$, para quaisquer $\varphi \in (\{0\} : A)_{N_R(G)}$ e $f \in N_R(G)$, o que nos permite concluir que $(\{0\} : A)_{N_R(G)}$ é subgrupo normal de $N_R(G)$.

Além disso, note que $(\{0\} : A)_{N_R(G)}$ é um ideal à direita de $N_R(G)$. Com efeito, dados $\varphi \in (\{0\} : A)_{N_R(G)}$, $f \in N_R(G)$ e $a \in A$, temos que

$$(\varphi \circ f)(a) = \varphi(f(a)) = 0,$$

pois $\varphi \in (\{0\} : A)_{N_R(G)}$ e, do Lema 4.5, temos que $f(a) \in A$. Portanto, $(\{0\} : A)_{N_R(G)}$ é um ideal à direita de $N_R(G)$.

Finalmente, vejamos que $(\{0\} : A)_{N_R(G)}$ é ideal à esquerda de $N_R(G)$. Com efeito, dado $a \in A$, sejam $\varphi \in (\{0\} : A)_{N_R(G)}$ e $f, g \in N_R(G)$. Note que

$$[f \circ (g \oplus \varphi) \oplus (-f) \circ g](a) = [f \circ (g \oplus \varphi)(a) - (f \circ g)(a)] =$$

$$= f(g(a) + \varphi(a)) - f(g(a)) = f(g(a)) - f(g(a)) = 0,$$

pois $\varphi(a) = 0$ (uma vez que $\varphi \in (\{0\} : A)_{N_R(G)}$ e $a \in A$). Logo $(\{0\} : A)_{N_R(G)}$ é ideal à esquerda de $N_R(G)$. Assim, concluímos que $(\{0\} : A)_{N_R(G)}$ é um ideal de $N_R(G)$.

(b) Inicialmente, vejamos que $(A : G)_{N_R(G)}$ é subgrupo normal de $(N_R(G), +)$. Com efeito, sejam $\varphi \in (A : G)_{N_R(G)}$, $f \in N_R(G)$, $x \in G$ e $y \in R$, então

$$[(f \oplus \varphi \oplus (-f))(x)](r) = [f(x) + \varphi(x) - f(x)]r =$$

$$= f(x)r + \varphi(x)r - f(x)r = f(x)r - f(x)r = 0,$$

pois $\varphi \in (A : G)_{N_R(G)}$ e $r \in R$. Logo $(f \oplus \varphi \oplus (-f)) \in (A : G)_{N_R(G)}$, para quaisquer $\varphi \in (A : G)_{N_R(G)}$ e $f \in N_R(G)$, o que nos permite concluir que $(A : G)_{N_R(G)}$ é subgrupo normal de $N_R(G)$.

Além disso, note que $(A : G)_{N_R(G)}$ é ideal à direita do quaseanel $N_R(G)$. Com efeito, dados $\varphi \in (A : G)_{N_R(G)}$, $f \in N_R(G)$, $x \in G$ e $r \in R$, temos que

$$[(\varphi \circ f)(x)]r = [\varphi(f(x))]r = 0,$$

pois $\varphi(f(x)) \in A$, uma vez que $\varphi \in (A : G)_{N_R(G)}$. Logo $(\varphi \circ f) \in (A : G)_{N_R(G)}$. Assim, concluímos que $(A : G)_{N_R(G)}$ é ideal à direita de $N_R(G)$.

Finalmente, vejamos que $(A : G)_{N_R(G)}$ é ideal à esquerda de $N_R(G)$. Com efeito, sejam $f, g \in N_R(G)$, $\varphi \in (A : G)_{N_R(G)}$, $x \in G$ e $r \in R$. Temos que

$$[(f \circ (g \oplus \varphi) \oplus (-f) \circ g)(x)]r = [f(g(x) + \varphi(x)) - f(g(x))]r =$$

$$= f(g(x) + \varphi(x))r - f(g(x))r = f(g(x)r + \varphi(x)r) - f(g(x)r) =$$

$$= f(g(x))r - f(g(x))r = 0,$$

pois $\varphi(x)r = 0$, uma vez que $\varphi \in (A : G)_{N_R(G)}$ e $r \in R$. Logo $(A : G)_{N_R(G)}$ é ideal à esquerda de $N_R(G)$, o que nos permite concluir que $(A : G)_{N_R(G)}$ é ideal de $N_R(G)$. $\square$

Como estamos considerando um ideal R de um anel topológico G com identidade à esquerda e já sabemos que $A = (\{0\} : R)_G$ é um ideal de G, temos que $A \cap R$ é um ideal de G. Assim, provamos o seguinte resultado cuja demonstração também não aparece bem detalhada no artigo base.

Proposição 4.9. *Sejam R um ideal à esquerda de um anel topológico G com identidade à esquerda e e $A = (\{0\} : R)_G$. Então*

(*a*) $(\{0\} : R)_{N_R(G)} = (A : G)_{N_R(G)}$;

(*b*) $(R : G)_{N_R(G)} \subseteq (R \cap A : A)_{N_R(G)}$.

Demonstração. (*a*) Sejam $\varphi \in (\{0\} : R)_{N_R(G)}$, $x \in G$ e $r \in R$, então vale que

$$\varphi(x)r = \varphi(xr).$$

Como a translação multiplicativa à esquerda por x, $L'_x : G \to G$, está em $N_R(G)$, temos, do Lema 4.5, que $L'_x(R) \subseteq R$. Logo

$$L'_x(r) = xr \in R,$$

o que nos permite concluir que

$$\varphi(x)r = \varphi(xr) = 0,$$

uma vez que $\varphi \in (\{0\} : R)_{N_R(G)}$. Logo $(\{0\} : R)_{N_R(G)} \subseteq (A : G)_{N_R(G)}$.

Por outro lado, dados $\varphi \in (A : G)_{N_R(G)}$ e $r \in R$, note que

$$\varphi(r) = \varphi(er) = \varphi(e)r = r = 0,$$

pois $\varphi(e) \in A$, uma vez que $\varphi \in (A : G)_{N_R(G)}$. Logo $(\{0\} : R)_{N_R(G)} \supseteq (A : G)_{N_R(G)}$. Assim, concluímos que $(\{0\} : R)_{N_R(G)} = (A : G)_{N_R(G)}$.

(*b*) Sejam $\varphi \in (R : G)_{N_R(G)}$ e $a \in A$. Do Lema 4.5, temos que $\varphi(A) \subseteq A$, o que implica que $\varphi(a) \in A$. Resta mostrar que $\varphi(a) \in R$. Ora, como $\varphi \in (R : G)_{N_R(G)}$, temos que $\varphi(a) \in R$, uma vez que $\varphi(G) \subseteq R$. Logo $\varphi(a) \in R \cap A$, o que nos permite concluir que $(R : G)_{N_R(G)} \subseteq (R \cap A : A)_{N_R(G)}$. $\square$

Definição 4.10. *Dado um quaseanel N e um N-grupo G, dizemos que G é um N-grupo fiel se $(\{0\} : G)_N = \{0\}$.*

Como consequência da Proposição 4.9, provamos o seguinte corolário:

Corolário 4.11. *Sejam R um ideal à esquerda de um anel topológico G com identidade à esquerda e e $A = (\{0\} : R)_G$. Se $A = \{0\}$, então R é um $N_R(G)$-grupo fiel.*

Demonstração. Como $A = \{0\}$, a Proposição 4.9 nos permite concluir que $(\{0\} : R)_{N_R(G)} = (\{0\} : G)_{N_R(G)}$. Sendo assim, dado $f \in N_R(G)$, temos que $f(r) = 0$, para todo $r \in R$ se, e somente se, $f(x) = 0$, para todo $x \in G$, o que ocorre se, e somente se $f \equiv 0$. Portanto, $(\{0\} : R)_{N_R(G)} = \{0\}$. $\square$

Além disso, se $A \cap R = \{0\}$, temos diretamente da Proposição 4.9 que

$$(R : G)_{N_R(G)} \subseteq (\{0\} : A)_{N_R(G)}.$$

A seguir provamos um lema que mostra como obter, no contexto que estamos estudando, ideais a esquerda de G a partir de um $N_R(G)$-subgrupo de R.

Lema 4.12. *Se R é um ideal à esquerda de um anel topológico G com identidade à esquerda e e H é um $N_R(G)$-subgrupo de R, então H é um ideal à esquerda de G.*

Demonstração. Inicialmente, note que $0 \in H$, pois H é um subgrupo de $(R, +)$. Dados $h_1, h_2 \in H$, ainda por que H é subgrupo de $(R, +)$, temos que $(h_1 + h_2) \in H$. Além disso, dados $h \in H$ e $x \in G$, temos que $xh = L'_x(h)$. Como H é $N_R(G)$-subgrupo de R e $L'_x \in N_R(G)$, temos que $xh \in H$. Portanto, H é ideal à esquerda de G. $\square$

A seguir demonstramos detalhadamente um teorema apresentado no artigo base que mostra que $(\{0\} : R)_G$ é decisivo para $M_R(G)$ ser ou não um anel.

Teorema 4.13. *Seja R um anel topológico com identidade e. Considere o anel $G = R \oplus R$ com a topologia produto e R como ideal $R \oplus \{0\}$ de G. Então $(\{0\} : R)_G = \{0\} \oplus R$ e, além disso, $M_R(G)$ não é anel.*

Demonstração. Dado $(x, y) \in G$, temos que $(x, y) \in (\{0\} : R)_G$ se, e somente se, $xr = 0$ e $y0 = 0$, para todo $r \in R$. Note que $y0 = 0$ vale para todo $y \in R$. Além disso, como R tem identidade, para que (x, y) esteja em $(\{0\} : R)_G$ devemos ter que $xe = 0$, o que ocorre apenas no caso em que $x = 0$. Portanto $(\{0\} : R)_G = \{0\} \oplus R$.

Para ver que $M_R(G)$ não é anel, considere as aplicações $\alpha, \beta : G \to G$, dadas por

$$\alpha(x, y) = (0, y) \text{ e } \beta(x, y) = \begin{cases} (0, 0), & x = 0 \\ (x, y), & x \neq 0 \end{cases}.$$

Agora, vejamos que $\alpha, \beta \in M_R(G)$. Com efeito, dado $(r,0) \in R$, temos que

$$\alpha((x,y)(r,0)) = \alpha(xr, y0) = \alpha(xr, 0) = (0,0) = (0,y)(r,0) = \alpha(x,y)(r,0).$$

Logo $\alpha \in M_R(G)$.

Quanto a β, temos que

$$\beta((x,y)(r,0)) = \beta((xr, y0)) = \beta(xr, 0) = \begin{cases} (0,0), & xr = 0 \\ (xr, 0), & xr \neq 0 \end{cases}.$$

Note que, se $x = 0$, então $xr = 0$ e $\beta(x,y) = (0,0)$, o que nos permite concluir que

$$\beta((x,y)(r,0)) = (0,0) = (0,0)(r,0) = \beta(x,y)(r,0).$$

Se $x \neq 0$ e $xr \neq 0$, então $\beta(x,y) = (x,y)$. Assim, concluímos que

$$\beta((x,y)(r,0)) = (xr,0) = (x,y)(r,0) = \beta(x,y)(r,0).$$

Se $x \neq 0$ e $xr = 0$, então $\beta(x,y) = (x,y)$. Logo,

$$\beta((x,y)(r,0)) = (0,0) = (xr,0) = (x,y)(r,0) = \beta(x,y)(r,0).$$

Em todos os casos temos que $\beta((x,y)(r,0)) = \beta(x,y)(r,0)$. Portanto, $\beta \in M_R(G)$.

Finalmente, vejamos que $M_R(G)$ não é anel. Temos que:

$$\beta \circ (\alpha \oplus \beta)(e,e) = \beta(\alpha(e,e) + \beta(e,e)) = \beta((0,e) + (e,e)) = \beta(e, 2e) = (e, 2e)$$

enquanto

$$((\beta \circ \alpha) \oplus (\beta \circ \beta))(e,e) = \beta(\alpha(e,e)) + \beta(\beta(e,e)) = \beta(0,e) + \beta(e,e) = (0,0) + (e,e) = (e,e).$$

Logo $\beta \circ (\alpha \oplus \beta) \neq ((\beta \circ \alpha) \oplus (\beta \circ \beta))$. Portanto, $M_R(G)$ não é distributivo pela esquerda e, consequentemente, não é um anel. □

Usando o que foi feito no Teorema 4.13, apresentamos um exemplo onde $N_R(G)$ não é anel.

Exemplo 4.14. *Nas notações do Teorema 4.13, considere $R = \mathbb{R}$ e $G = \mathbb{R}^2$, ambos com suas topologias usuais. Assim, as aplicações $\alpha, \beta : G \to G$, dadas por*

$$\alpha(x,y) = (0,y) \text{ e } \beta(x,y) = \begin{cases} (0,0), & x = 0 \\ (x,y), & x \neq 0 \end{cases}$$

são contínuas e, portanto, estão em $N_R(G)$. No entanto, segue da demonstração do

Teorema 4.13 que

$$\beta \circ (\alpha \oplus \beta) \neq ((\beta \circ \alpha) \oplus (\beta \circ \beta)),$$

de onde concluímos que $N_R(G)$ não é um anel.

Vamos demonstrar detalhadamente o teorema a seguir, que está presente no artigo base e apresenta condições concernentes a $(\{0\} : R)_G$ e à existência de identidade que são suficientes para que, ao considerar o ideal à esquerda R de um anel topológico G, $N_R(G)$ seja um anel.

Teorema 4.15. *Seja R um ideal à esquerda de um anel topológico G tal que $(\{0\} : R)_G = \{0\}$. Se ou R ou G tem elemento identidade à esquerda e, então $N_R(G) \cong R$. Portanto, $N_R(G)$ é um anel.*

Demonstração. Inicialmente, vejamos que $xr \in R$, para quaisquer $x \in G$ e $r \in R$. Com efeito, combinando a Proposição 2.61 com o Lema 4.5, temos que $L'_x \in N_R(G)$ e, portanto, $L'_x(R) \subseteq R$. Sendo assim, como $xr = L'_x(r)$, temos que $xr \in R$.

Seja $f \in N_R(G)$, vejamos que $(f(e)x - f(x)) \in (\{0\} : R)_G$, para todo $x \in G$. Com efeito,

$$(f(e)x - f(x))r = f(e)xr - f(x)r = f(exr) - f(xr) = f(xr) - f(xr) = 0,$$

pois f é R-homogênea e $xr \in R$. Logo $(f(e)x - f(x)) \in (\{0\} : R)_G$.

No entanto, como $(\{0\} : R)_G = \{0\}$, temos que $(f(e)x - f(x)) = 0$, o que nos permite concluir que $f(e)x = f(x)$, para todo $x \in G$. Logo, $f = L'_{f(e)}$, ou seja, f é o operador de multiplicação à esquerda por $f(e)$. Por outro lado, sabemos que o operador de multiplicação à esquerda, $L'_x : G \to G$, é um elemento de $N_R(G)$. Sendo assim, concluímos que $N_R(G) = \{L'_x : x \in G\}$.

Agora, considere a aplicação $\Psi : G \to N_R(G)$ dada por $\Psi(x) = L'_x$. Vejamos que Ψ é isomorfismo. Com efeito, dados $x, y, g \in G$, temos que

$$\Psi(x+y)(g) = L'_{(x+y)}(g) = (x+y)g = xg + yg = L'_x(g) + L'_y(g) = (L'_x \oplus L'_y)(g)$$

e

$$\Psi(xy) = L'_{xy}(g) = (xy)g = x(yg) = x(L'_y(g)) = L'_x(L'_y(g)) = (L'_x \circ L'_y)(g).$$

Logo Ψ é homomorfismo.

A aplicação Ψ é sobrejetiva, pois, dado $f \in N_R(G)$, já sabemosmos que

$$f = L'_{f(e)} = \Psi(f(e)).$$

Finalmente, vejamos que Ψ é injetiva. Seja $x \in \text{Ker}(\Psi)$, então

$$\Psi(x)g = \varphi_x(g) = xg = 0,$$

para todo $g \in G$. Portanto, $x \in (\{0\} : R)_G$. No entanto, $(\{0\} : R)_G = \{0\}$ por hipótese. Logo $x = 0$, o que nos permite concluir que Ψ é injetiva. Portanto, $N_R(G) \cong R$, o que nos permite concluir que $N_R(G)$ é um anel. $\square$

No final da demonstração acima é possível perceber a importância da hipótese de que $(\{0\} : R)_G = \{0\}$, que acaba sendo determinante para que $N_R(G)$ tenha estrutura de anel. Note que no Teorema 4.13 e no Exemplo 4.14 não temos essa hipótese, uma vez que no primeiro temos $(\{0\} : R)_G = \{0\} \oplus R$, e no segundo temos $(\{0\} : \mathbb{R})_G = \{0\} \oplus \mathbb{R}$.

Não temos um resultado exatamente recíproco para o Teorema 4.15, no entanto, algo próximo disso é apresentado em *BOOTH, G. L.*, *MEYER, J. H.*, and *MOGAE, K.* (2017). Antes de apresentar esse teorema provaremos um lema, para que possamos demonstrá-lo com uma riqueza maior de detalhes.

Lema 4.16. *Seja R um ideal à esquerda aberto de um anel topológico G com uma identidade à esquerda e tal que $(\{0\} : R)_G \neq \{0\}$. Então, dado $a \in (\{0\} : R)_G$ não nulo, as aplicações $f, g : G \to G$ dadas por*

$$f(x) = \begin{cases} a + x, & x \in (G \setminus R) \\ x, & x \in R \end{cases} \quad e \quad g(x) = \begin{cases} -a, & x \in (G \setminus R) \\ 0, & x \in R \end{cases}$$

estão em $N_R(G)$.

Demonstração. Inicialmente, para provar a continuidade, notemos alguns fatos que serão usados. Da Proposição 2.60, temos que R é aberto e fechado; do Corolário 2.69, temos que G é um espaço topológico T_3. Dado $x \in G$, para mostrar que f e g são contínuas em cada ponto de G, vamos considerar dois casos:

Caso 1: $x \in R$
Temos que $f(x) \in R$, uma vez que $f(x) = x$. Assim, dada uma vizinhança V de $f(x)$, tome a vizinhança $V \cap R$ de x. Como $V \cap R \subseteq R$, temos que

$$f(V \cap R) = V \cap R \subseteq V.$$

Quanto a g, temos que $g(x) = 0$. Dada uma vizinhança V de 0, temos que $V \cap R \subseteq R$ e, portanto, $g(V \cap R) = \{0\}$. Deste modo temos que $g(V \cap R) \subseteq V$.

Caso 2: $x \in (G \setminus R)$
Note que $f(x) = a + x$, o que significa que $f(x)$ pode ser um elemento de R ou não.

Suponha, inicialmente que $f(x) \in (G \setminus R)$. Como G é um espaço T_3 e R é fechado, podemos tomar uma vizinhança V_1 de $f(x)$ tal que $V_1 \cap R = \emptyset$, ou seja, $V_1 \subseteq (G \setminus R)$. Dada uma vizinhança V de $f(x)$, consideremos $V_2 = V \cap V_1$. Como $f(G \setminus R) = a + (G \setminus R)$ é um aberto que contém $f(x)$ (pois translação aditiva em grupos topológicos é homeomorfismo), podemos ainda considerar $f(G \setminus R) \cap V_2$ como vizinhança de $f(x)$, a qual chamaremos de V_3. Assim, fazendo $V_4 = ((-a) + V_3)$, temos que $V_4 \subseteq (G \setminus R)$ e além disso, temos que V_4 é vizinhança de x, pois

$$(-a) + f(x) = (-a) + a + x = x.$$

Sendo assim, vale que

$$f(V_4) = a + V_4 = V_3 = f(G \setminus R) \cap V_2 \subseteq V_2 = V \cap V_1 \subseteq V.$$

Agora, suponha que $f(x) \in R$. Dada uma vizinhança W de $f(x)$, considere $W_1 = W \cap R$. Considere a aplicação de translação aditiva $L_{(-a)} : G \to G$ dada por $L_{(-a)}(y) = (-a) + y$, que é homeomorfismo segundo a Proposição 2.59. Assim, existe uma vizinhança U de x tal que $L_{(-a)}(U) \subseteq W_1$. Considere $U_1 = U \cap (G \setminus R)$, que é uma vizinhança de x, uma vez que $x \in (G \setminus R)$ e $G \setminus R$ é aberto. Além disso, como f e $L_{(-a)}$ coincidem em $G \setminus R$, temos que

$$f(U_1) = L_{(-a)}(U_1) \subseteq L_{(-a)}(U) \subseteq W_1 \subseteq W.$$

Quanto a g, temos que $g(x) = -a$. Como G é um espaço T_3 e R é fechado, podemos tomar uma vizinhança U' de x tal que $U' \cap R = \emptyset$, ou seja, $U' \subseteq (G \setminus R)$. Assim, podemos concluir que

$$g(U') = \{-a\} \subseteq V',$$

para toda vizinhança V' de $(-a)$.

Vejamos que f e g são R-homogêneas. Dados $x \in G$ e $r \in R$, temos que $xr \in R$. No entanto, temos duas possibilidades para x. Se $x \in R$, temos que

$$f(xr) = xr = f(x)r \quad \text{e} \quad g(xr) = 0 = 0 \cdot r = g(x)r.$$

Se $x \in (G \setminus R)$, como $a \in (\{0\} : R)_G$, temos que

$$f(xr) = xr = 0 + xr = ar + xr = (a + x)r = f(x)r.$$

e

$$g(xr) = 0 = (-a)r = g(x)r.$$

Portanto, $f, g \in N_R(G)$. □

Teorema 4.17. *Seja R um ideal à esquerda aberto de um anel topológico G com uma identidade à esquerda e tal que $2e \notin R$. Se $N_R(G)$ é um anel, então $(\{0\} : R)_G = \{0\}$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $(\{0\} : R)_G \neq \{0\}$, e então consideremos $a \in (\{0\} : R)_G$ não nulo. Definamos as aplicações $f, g : G \to G$ por

$$f(x) = \begin{cases} a + x, & x \in (G \setminus R) \\ x, & x \in R \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} -a, & x \in (G \setminus R) \\ 0, & x \in R \end{cases}.$$

Além dessas duas aplicações, consideremos a aplicação identidade $I : G \to G$, dada por $I(x) = x$, que obviamente está em $N_R(G)$. Do Lema 4.16, temos que $f, g \in N_R(G)$. Agora, consideramos os casos:

Caso 1: $e + a \in R$
Como $2e \notin R$, temos que $a \notin R$. Caso contrário, teríamos que

$$(e + a) - a = e \in R,$$

o que nos permitiria concluir que $2e \in R$. Além disso, temos que $(-a + e) \notin R$. Caso contrário, teríamos que

$$(e + a) + (-a + e) = 2e \in R.$$

Sendo assim, temos que

$$f \circ (g \oplus I)(e) = f(g(e) + I(e)) = f(-a + e) = a + (-a + e) = e$$

e

$$((f \circ g) \oplus (f \circ I))(e) = f(g(e)) + f(I(e)) = f(-a) + f(e) = (a - a) + (a + e) = a + e.$$

Portanto, $f \circ (g \oplus I) \neq (f \circ g) \oplus (f \circ I)$.

Caso 2(i): $e + a \notin R$ e $a \notin R$
Nesse caso, temos

$$f \circ (g \oplus I)(e + a) = f(g(e + a) + I(e + a)) = f(-a + e + a) = f(e) = a + e$$

e

$$((f \circ g) \oplus (f \circ I))(e + a) = f(g(e + a)) + f(e + a) = f(-a) + f(e + a) = a - a + a + e + a = a + e + a.$$

Portanto, $f \circ (g \oplus I) \neq (f \circ g) \oplus (f \circ I)$.

Caso 2(ii): $e + a \notin R$ e $a \in R$

Nesse caso, temos que $a + e + e \notin R$. Caso contrário, teríamos que

$$(-a) + (a + e + e) = 2e \in R.$$

Sendo assim, temos que

$$(g \circ (f \oplus I))(e) = g(f(e) + I(e)) = g(a + e + e) = -a$$

e

$$((g \circ f) \oplus (g \circ I))(e) = g(f(e)) + g(e) = g(a + e) - a = -a - a.$$

Portanto, $g \circ (f \oplus I) \neq (g \circ f) \oplus (g \circ I)$.

Em cada um dos casos achamos um elemento de $N_R(G)$ que não é distributivo, o que contradiz a hipótese de $N_R(G)$ ser anel. Portanto, temos que $(\{0\} : R)_G = \{0\}$. $\square$

Um Corolário imediato dos Teoremas 4.17 e 4.15 é o seguinte:

Corolário 4.18. *Seja R um ideal à esquerda aberto de um anel topológico G com uma identidade à esquerda e tal que $2e \notin R$. Então $N_R(G)$ é um anel se, e somente se, $(\{0\} : R)_G = \{0\}$.*

No próximo resultado, voltamos a estudar primalidade:

Teorema 4.19. *Seja R um anel topológico primo e A um ideal não nulo de R. Então $N_A(R)$ é equiprimo.*

Demonstração. Faremos a demonstração provando a contra-positiva da afirmação presente na definição de quaseanel equiprimo. Sejam $f, g, \varphi \in N_A(R)$, onde $\varphi \neq 0$ e $f \neq g$. Sendo assim, existem $x, y \in R$ tais que $\varphi(x) \neq 0$ e $f(y) \neq g(y)$. Assim, vale que $f(y) - g(y) \neq 0$. Como R é primo e $A \neq \{0\}$, existe $a \in A$ tal que

$$a[f(y) - g(y)] \neq 0.$$

Novamente, como R é primo e $\varphi(x) \neq 0$, temos que existe $r \in R$ tal que

$$\varphi(x)ra[f(y) - g(y)] \neq 0,$$

o que nos permite concluir que

$$\varphi(x)raf(y) \neq \varphi(x)rag(y).$$

Defina a aplicação $\psi : R \to R$ por

$$\psi(t) = xrat,$$

para todo $t \in R$. Como ψ é a translação multiplicativa por xra à esquerda, temos que ψ é contínua e A-homogênea. Logo $\psi \in N_A(R)$.

Como ψ é A-homogênea e $raf(y) \in A$ (pois A é ideal de R e $a \in A$), temos que

$$(\varphi \circ \psi \circ f)(y) = \varphi(\psi(f(y))) = \varphi(xraf(y)) = \varphi(x)raf(y).$$

Da mesma forma, temos que

$$(\varphi \circ \psi \circ g)(y) = \varphi(\psi(g(y))) = \varphi(xrag(y)) = \varphi(x)rag(y).$$

Como $\varphi(x)raf(y) \neq \varphi(x)rag(y)$, concluímos que

$$(\varphi \circ \psi \circ f) \neq (\varphi \circ \psi \circ g).$$

Portanto, $N_A(R)$ é equiprimo. $\square$

Agora vamos apresentar com detalhes um exemplo que está no artigo base, e no qual, nas notações do Teorema 4.19, R não é primo, fazendo com que $N_A(R)$ não seja equiprimo.

Exemplo 4.20. *Nas notações do Teorema 4.19, tome $R = \mathbb{Z}_4$ com a topologia discreta e $A = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \overline{0}, & x \in \{\overline{0}, \overline{2}\} \\ \overline{2}, & x \in \{\overline{1}, \overline{3}\} \end{cases},$$

que é obviamente contínua. Note que f também é A-homogênea. Com efeito, se $a = \overline{0}$, então

$$f(x \cdot \overline{0}) = \overline{0} = f(x) \cdot \overline{0},$$

para todo $x \in \mathbb{Z}_4$. Se $a = \overline{2}$, então temos que

$$f(\overline{0} \cdot \overline{2}) = f(\overline{0}) = \overline{0} = \overline{0} \cdot \overline{2} = f(\overline{0}) \cdot \overline{2},$$

$$f(\overline{1} \cdot \overline{2}) = f(\overline{2}) = \overline{0} = \overline{2} \cdot \overline{2} = f(\overline{1}) \cdot \overline{2},$$

$$f(\overline{2} \cdot \overline{2}) = f(\overline{0}) = \overline{0} = \overline{0} \cdot \overline{2} = f(\overline{2}) \cdot \overline{2},$$

e

$$f(\overline{3} \cdot \overline{2}) = f(\overline{2}) = \overline{0} = \overline{2} \cdot \overline{2} = f(\overline{3}) \cdot \overline{2}.$$

Logo $f(xa) = f(x)a$*, para quaisquer* $x \in \mathbb{Z}_4$ *e* $a \in A$*. Portanto* $f \in N_A(R)$*.*

Da definição de f*, dado* $x \in \mathbb{Z}_4$*, temos que* $f(x) \in A$*. Do Lema 4.5 temos que* $\varphi(A) \subseteq A$*, para todo* $\varphi \in N_A(R)$*. Portanto,*

$$(f \circ \varphi \circ f)(x) = f(\varphi(f(x))) = \overline{0},$$

pois $\varphi(f(x)) \in A$ *e* $f(a) = \overline{0}$*, para todo* $a \in A$*. Ou seja,* $(f \circ \varphi \circ f) \equiv 0$*, para todo* $\varphi \in N_A(R)$*, o que nos permite concluir que* $N_A(R)$ *não é 3-semiprimo. Segue da Proposição 2.41 que se* $N_A(R)$ *fosse equiprimo, deveria ser 3-semiprimo. Logo* $N_A(R)$ *não é equiprimo.*

Na presença de elemento identidade, veremos, no teorema a seguir, que a recíproca do Teorema 4.19 é verdadeira. Mas primeiro, um lema:

Lema 4.21. *Seja* R *um anel topológico primo com identidade e* A *um ideal não nulo de* R*. Então* $f(A) \neq \{0\}$*, para todo* $f \in N_A(R)$ *não nulo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe $f \in N_A(R)$ tal que $f(A) = \{0\}$. Como A é ideal de R, temos que $AR = A$ e, portanto, $f(AR) = f(A) = \{0\}$. Agora, para todo $a \in A$ não nulo, considere a aplicação $L'_a : R \to R$ por $L'_a(r) = ar$, para todo $r \in R$. Note que $L'_a \in N_A(R)$, pois é a translação multiplicativa por a à esquerda. Sendo assim, para quaisquer $\varphi \in N_A(R)$ e $r \in R$, temos que

$$(f \circ \varphi \circ L'_a)(r) = f(\varphi(ar)) \in f(A),$$

pois $AR = A$ e $\varphi(A) \subseteq A$, para todo $\varphi \in N_A(R)$ (Lema 4.5). No entanto, $f(A) = \{0\}$. Portanto, $(f \circ \varphi \circ L'_a) \equiv 0$, para todo $\varphi \in N_A(R)$. Mas isto contradiz a 3-primalidade de $N_A(R)$, uma vez que f e L'_a são não nulas. Portanto, $f(A) \neq \{0\}$, para todo $f \in N_A(R)$ não nulo. □

Teorema 4.22. *Seja* R *um anel topológico com identidade e e* A *um ideal não nulo de* R*. Então são equivalentes:*

(a) *R é um anel primo.*

(b) *$N_A(R)$ é um quaseanel equiprimo.*

(c) *$N_A(R)$ é um quaseanel 3-primo.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Segue diretamente do Teorema 4.19.

$(b) \Rightarrow (c)$: Segue diretamente do item (a) da Proposição 2.39.

$(c) \Rightarrow (a)$: Mostraremos a contra-positiva da afirmação presente na definição de anel primo. Sejam $x, y \in R$ não nulos. Considere as aplicações de translação multiplicativa por x e y à esquerda $L'_x, L'_y \in N_A(R)$, que são não nulas. Como $N_A(R)$ é 3-primo, existe

$f \in N_A(R)$ tal que $(L'_x \circ f \circ L'_y) \neq 0$. Assim, temos que

$$(L'_x \circ f \circ L'_y)(A) = xf(yA) \neq 0.$$

Sendo assim, como f é A-homogêneo e $L'_y(A) = yA \subseteq A$ (Lema 4.5), temos que

$$x[f(e)]yA = x[f(e)yA] \neq 0.$$

Logo $x[f(e)]y$ é um elemento não nulo de xRy. Portanto, R é primo. $\square$

5 CONCLUSÃO

A principal proposta desta dissertação era estudar a estrutura dos quaseanéis de aplicações homogêneas e contínuas definidas em um módulo topológico, que por sua vez, é definido a partir de um anel topológico, e toma valores neste mesmo módulo. Além disso, este trabalho tinha como objetivo apresentar de uma forma mais acessível alguns avanços que G. L. Booth, J. H. Meyer e K. Mogae obtiveram sobre alguns trabalhos de S. Veldsman e C. J. Maxson, estudando a profundidade com que esse quaseanel herda as propriedades de primalidade do anel de partida.

Considerando um anel topológico R como um R-módulo topológico, concluímos que o quaseanel das aplicações contínuas e homogêneas de R em R, $N_R(R)$, é isomorfo a R e, portanto, herda suas propriedades de primalidade e admite estrutura de anel. O mesmo não ocorre quando consideramos R^2 como R-módulo topológico, No entanto, G. L. Booth, J. H. Meyer e K. Mogae mostraram em "*Topological rings, homogeneous functions, and primeness*" que a relação de primalidade entre R e $N_R(R^2)$ é bastante profunda.

Considerando o caso onde G é um anel topológico, R é um subanel de G e tomando G como R-módulo, provamos que $N_R(G)$ é isomorfo a G no caso de R ser denso em G. Por fim, estabelecemos algumas condições necessárias e suficientes para que $N_R(G)$ seja anel, no caso onde R é um ideal a esquerda do anel topológico G, e exibimos alguns resultados que mostram relação de primalidade entre $N_A(R)$ e R, sendo R um anel topológico e A é um ideal não nulo.

REFERÊNCIAS

ARNAUTOV, V.; *GLAVATSKY*, S.; *MIKHALEV*, A.V. *Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules.* Taylor & Francis, 1996.

BOOTH, G. L.; *GROENEWALD, N. J.*; *VELDSMAN, S.* A Kurosh-Amitsur prime radical for near-rings. *Communications in Algebra*, v. 18, n. 9, p. 3111–3122, 1990.

BOOTH, G. L.; *GROENEWALD, N. J.*; *VELDSMAN, S.* Strongly equiprime near-rings. *Quaestiones Mathematicae*, v. 14, n. 4, p. 483–489, 1991.

BOOTH, G. L.; *MEYER, J. H.*; *MOGAE, K.* Topological rings, homogeneous functions, and primeness. *Communications in Algebra*, v. 45, n. 1, p. 322–331, 2017.

GROENEWALD, N. Prime near rings and special radicals. *East-West Journal of Mathematics*, v. 3, p. 147–162, 2001.

GROENEWALD, N. J. Strongly prime near-rings. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, v. 31, n. 3, p. 337–343, 1988.

GROENEWALD, N. J. Different prime ideals in near-rings. *Communications in Algebra*, v. 19, n. 10, p. 2667–2675, 1991.

HUSAIN, T. Introduction to topological groups. Saunders, 1966.

LAM, T.Y. A First Course in Noncommutative Rings. Springer, 2001.

LEE, J. M. Introduction to Topological Manifolds. Springer, 2000.

LEJA, F. Sur la notion du groupe abstrait topologique. *Fundamenta Mathematicae*, v. 9, p. 37–44, 1927.

MAXSON C. J.; *SMITH K. C.* Centralizer Near-Rings that are Endomorphism Rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 80, n. 2, p. 189–195, 1980.

MAXSON, C. J.; *VAN WYK, L.* The lattice of ideals of $M_R(R^2)$, R a commutative PIR. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series A. Pure Mathematics and Statistics*, v. 52, n. 3, p. 368–382, 1992.

NICHOLSON, W. K. A short proof of the Wedderburn-Artin theorem. *New Zealand J. Math*, v. 22, n. 1, p. 83–86, 1993.

PILZ, G. Near-rings: the theory and its applications. North-Holland, 1945.

PILZ, G. Near-Rings. North-Holland, 1983.

VAN DER WALT, A. P. J. Prime ideals and nil radicals in near-rings. *Archiv der Mathematik*, v. 15, n. 1, p. 408–414, 1964.

VELDSMAN, S. On equiprime near-rings. *Communications in Algebra*, v. 20, n. 9, p. 2569–2587, 1992.

VELDSMAN, S. An overnilpotent radical theory for near-rings. *Journal of Algebra*, v. 144, n. 1, p. 248–265, 1991.

WARNER, S. *Topological Rings.* Elsevier Science, 1993.