UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, ATUÁRIA E CONTABILIDADE
CURSO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

FLÁVIA NAYANA PINHEIRO PADILHA

O PONTO FOCAL DE SCHELLING COMO SOLUÇÃO DE INTERAÇÃO ESTRATÉGICA RESULTANTE DE MÚLTIPLOS EQUILÍBRIOS DE NASH

FORTALEZA
2016

FLÁVIA NAYANA PINHEIRO PADILHA

O PONTO FOCAL DE SCHELLING COMO SOLUÇÃO DE INTERAÇÃO ESTRATÉGICA RESULTANTE DE MÚLTIPLOS EQUILÍBRIOS DE NASH

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Economia

Orientador: Prof. Dr. José Henrique Félix Silva

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca da Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade

---

P134p Padilha, Flávia Nayana Pinheiro.
O ponto focal de Schelling como solução de interação estratégica resultante de múltiplos equilíbrios de Nash / Flávia Nayana Pinheiro Padilha. - 2015.
54 f. : il., color.

Monografia (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, Curso de Ciências Econômicas, Fortaleza, 2015.
Orientação: Prof. Dr. José Henrique Félix Silva.

1. Teoria dos jogos. 2. Jogos de probabilidades (Matemática). I. Título

CDD 330

FLÁVIA NAYANA PINHEIRO PADILHA

O PONTO FOCAL DE SCHELLING COMO SOLUÇÃO DE INTERAÇÃO ESTRATÉGICA RESULTANTE DE MÚLTIPLOS EQUILÍBRIOS DE NASH

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Economia

Aprovada em

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Henrique Félix Silva(Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Cândido Átila Matias Souza
Universidade Federal do Ceará

Isadora Gonçalves Costa
Universidade Federal do Ceará

Para Luan.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus a minha vida e a conquista de concluir minha graduação.

Aos meus pais, Clovis Padilha Filho e Adriana Padilha, que sempre cuidaram de mim com muito amor e compreensão e que nunca deixaram de investir em minha educação, mesmo nos tempos mais difíceis. Obrigada por tudo. Amo muito vocês.

Ao meu irmão, Clovis José, que sempre foi um amigo ímpar.

Às minhas vozinhas, Valderina e Mª de Lourdes, que sempre me ajudaram. Aos meus avôs e avó que já estão no céu intercedendo por mim, José Pinheiro, Clovis Padilha e Rita Padilha.

Ao amor da minha vida, Luan Falcão, por ser um namorado amoroso, paciente, compreensivo e por nunca ter desistido de mim, sempre permanecendo ao meu lado, ajudando-me e me confortando nos momentos mais difíceis. Obrigada por tudo. Amo você com todo meu coração.

Ao professor Henrique Félix, pela orientação e pelas horas dedicadas a esse trabalho.

A Isadora Gonçalves e ao Cândido Átila, por terem aceitado participar da minha banca de defesa.

A todos os professores que passaram pela minha vida e contribuíram para a minha formação e o meu conhecimento. Para vocês, a minha admiração e gratidão.

"Porque o Senhor é bom, e eterna a sua misericórdia;
e a sua verdade dura de geração em geração."
(Salmo 100:5)

RESUMO

É comum, em situações de interação estratégica, observarmos múltiplos equilíbrios de Nash, alguns claramente improváveis de serem observados. Uma forma de selecionar um equilíbrio de Nash dentre vários existentes, e afirmarmos que apenas um deriva do comportamento racional dos indivíduos é utilizar o conceito de ponto focal de Schelling (1960), segundo o qual fatores como percepções culturais, tradições históricas etc. podem chamar a atenção dos jogadores para um determinado equilíbrio. Para testar este conceito, analisamos o chamado Jogo da Moeda, que possui infinitos equilíbrios de Nash. Neste jogo, dois jogadores determinam simultaneamente o quanto desejam sobre determinada quantia em dinheiro, não podendo estes reclamarem, juntos, uma quantia maior que a quantidade disponível. Supomos que indivíduos racionais escolhem sua estratégia maximizando o seu *payoff* esperado, e mostramos que, deste fato, os jogadores devem escolher como estratégia metade da quantia disponível para dividir. Para isso, aplicamos o jogo em turmas dos cursos de Economia e Administração da UFC e analisamos a distribuição de estratégias dos jogadores utilizando estimativas de densidade kernel. Além da estratégia dos jogadores, é perguntado também sobre sexo e acerca do conhecimento em Teoria dos Jogos, de forma a indentificarmos possíveis fatores que afetem a estratégia dos jogadores. Foi observado que a maioria dos jogadores de fato escolhem a metade da quantia disponível como estratégia, porém, jogadores do sexo masculino e aqueles que possuem conhecimento em Teoria dos Jogos tendem a escolher este valor em maior frequência.

Palavras-chaves: teoria dos jogos. jogo da moeda. ponto focal.

ABSTRACT

It is common, in situations of strategic interaction, observe multiple Nash equilibriums, some of them clearly unlikely of being observed. A way of selecting one Nash equilibrium among several existing and to make sure that only one arises from the rational behavior of the individuals is to use the concept of Schelling (1960)'s focal point, which states that factors such as cultural perceptions, historical traditions etc. may catch the attention of the players to a given equilibrium. In order to test this concept, we analyze the called Coin Game, which has an infinite number of Nash equilibriums. In this game, the players simultaneously determine how much they desire from a given amount of money, and they cannot, together, ask for an amount bigger than that available. We suppose that rational individuals choose their strategy maximizing their expected payoff, and we show that, from this fact, the players must choose as strategy half of the available amount to split up. For doing this, we apply the Coin Game in classes from the undergraduate courses of Economics and Business of UFC and we analyze the strategy distribution of the players using kernel density estimation. Besides the strategy of players, it is also asked about gender and knowledge in Game Theory, so we can identify possible factors affecting the strategy of the players. It was observed that most of the players, indeed, choose half of the available amount as strategy, however, male players and those who do have some knowledge in Game Theory are willing to choose this value more frequently.

Key-words: game theory. coin game. focal point.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os processos de interação estratégica, ou jogos, como tornou-se comum denominar a interação estratégica entre os agentes econômicos na literatura científica, são parte fundamental do ambiente econômico e englobam uma quantidade enorme de situações. A barganha no preço de um automóvel entre um potencial comprador e um vendedor de carros usados; empresas decidindo por quanto oferecer um produto ou serviço em uma licitação do governo; as decisões dos empresários de quanto do seu produto colocar no mercado; relações entre governos, sejam em termos de comércio internacional ou em ameaças de guerra são alguns exemplos de interações estratégicas.

Independentemente da situação em que dois ou mais agentes econômicos incorram em um jogo, fica claro que essa interação só ocorre por que a ação de um indivíduo afeta os demais, seja no resultado do processo de interação estratégica (como o lucro de uma empresa ao ofertar determinada quantidade do seu produto ou o possível desdobramento de uma ação militar) ou sobre suas estratégias. Dessa forma, os demais agentes agem de maneira a responder a ação daquele indivíduo ou o que eles preveem que aquele indivíduo fará, aqui fazendo uma distinção entre jogos sequenciais e jogos simultâneos, respectivamente. As ações que um agente pode tomar trarão consequêcias para os outros agentes no ambiente em que interagem estrategicamente.

Para tomar uma dimensão da necessidade que outrora têve-se de se criar ferramentas teóricas que possibilitassem estudar os processos de interação estratégica e assim extrair destes seus possíveis resultados, apresentaremos a seguir a história da chamada batalha do mar de Bismarck, extraída de Fiani (2009), uma batalha da Segunda Guerra Mundial que ilustra bem como a análise das estratégias dos jogadores pode dar um norte para a tomada de decisão dos agentes que estão interagindo em um jogo.

1.1 A Batalha do Mar de Bismarck

O ano era 1942, pouco tempo depois da derrota sofrida pelo Japão na famosa batalha de Guadalcanal, primeira grande ofensiva militar das forças aliadas no Pacífico após os ataques à base naval americana de Pearl Harbor, no

Figura 1 – A Batalha do Mar de Bismarck.

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	**Rota Sul**	**Rota Norte**
Busca Rota Sul no Primeiro Dia	3 dias de bombardeio	1 dia de bombardeio
Busca Rota Norte no Primeiro Dia	2 dias de bombardeio	2 dias de bombardeio

Fonte: Fiani (2009), página 5.

Havaí. Como consequência da derrota, o Japão perdeu para as forças aliadas um importante posto avançado no Pacífico, o arquipélago das Ilhas Salomão.

O alto comando de guerra japonês decide, então, transferir uma comboio de oito contratorpedeiros, oito navios de tropas e cem aeronaves de combate para Lae, em Pápua-Nova Guiné, de forma a minimizar as perdas sofridas na batalha de Guadalcanal.

Os comandantes da operação dispunham, então, de duas rotas alternativas para chegar a Lae. Uma rota pelo sul, com tempo bom e boa visibilidade, e uma rota pelo norte, com tempo ruim e baixa visibilidade.

Pelo lado das forças aliadas, estes deveriam decidir se enviariam aviões de reconhecimento para a rota sul ou para a rota norte, pois dispunham de aviões de reconhecimento suficientes para cobrir apenas uma rota por vez. Caso a escolha da rota de reconhecimento coincidisse com a escolha de rota dos japoneses, poderiam começar de imediato a bombardear o comboio de tropas japonês. Caso escolhessem a rota errada, as forças aliadas perderiam um dia de bombardeios. O clima também afetaria a capacidade de bombardeio dos aliados. O mal tempo na rota norte daria vantagem de um dia para o comboio japonês.

As informações de estratégia das forças aliadas e do Japão e de dias de bombadeio são resumidos na figura 1.

Analisando a figura 1, fica claro que os japoneses escolheriam a rota norte, pois independente da escolha de rota de reconhecimento pelas forças aliadas, a escolha pela rota norte incorreria em menos perdas para o comboio japonês, pois sofreriam pelo menos o mesmo número de dias de bombardeio.

Considerando que os japoneses agiriam de forma racional, os aliados enviaram seus aviões de reconhecimento para o norte e puderam começar de imediato a interceptar o comboio de tropas japonês.

Fica claro, nesse exemplo, a importância da teoria dos jogos para a análise dos processos de interação estratégica. Desse exemplo, extraimos o conceito de estratégias estritamente dominadas e estratégias dominadas, que nos indica de que maneira uma estratégia será preterida a outra, não importando as ações dos outros jogadores. Definimos estratégias estritamente dominadas e estratégias dominadas a seguir.

Definição 1.1. Seja s_i a estratégia do jogador i e s_{-i} a estratégia de todos os outros jogadores. Seja s'_i e s''_i estratégias factíveis para o jogador i. Seja $u = u(s_i, s_{-i})$ sua função de *payoff*. A estratégia s'_i é estritamente dominada pela estratégia s''_i se:

$$u(s'_i, s_{-i}) < u(s''_i, s_{-i})$$

qualquer que seja as estratégias dos outros jogadores. E a estratégia s'_i é dominada pela estratégia s''_i se:

$$u(s'_i, s_{-i}) \leq u(s''_i, s_{-i})$$

qualquer que seja as estratégias dos outros jogadores (GIBBONS, 1992).

É fácil ver que, no jogo apresentado, a estratégia por parte dos japoneses de escolher a rota sul é dominada pela estratégia de escolher a rota norte, e por isso a escolha dos japoneses por tomar esta rota.

1.2 Objetivos

A história da Teoria dos Jogos é particularmente interessante, e desde o trabalho pioneiro de von Neumann (1928), considerado pai da Teoria dos Jogos, vários avanços foram feitos no sentido de fortalecer a noção de equilíbrio em jogos cooperativos e não cooperativos. Em jogos que possuem múltiplos equilíbrios de Nash[1], é por vezes difícil prever as ações dos indivíduos, dificultando a análise dos processos de interação estratégica. Surge deste problema o conceito de Ponto Focal, devido a Thomas Schelling. Segundo Schelling (1960), pode haver

[1] Definimos Equilíbrio de Nash no capítulo 2, definição 2.2.

algum fator externo que chame a atenção dos jogadores para um equilíbrio em particular, como uma percepção cultural ou até mesmo tradições históricas.

Com o objetivo de testar empiricamente este conceito de equilíbrio, aplicaremos o chamado Jogo da Moeda para uma amostra de estudantes dos cursos de Ciências Econômicas e Administração da Universidade Federal do Ceará. No Jogo da Moeda, os jogadores dispõe de um número infinito de estratégias ao seu dispor. Neste caso, diz-se que o espaço de estratégias dos jogadores é contínuo. Também, há infinitos perfis de estratégias de equilíbrio, tornando difícil prever o comportamento real dos indivíduos. Utilizamos o conceito de Ponto Focal para selecionar dentre os infinitos equilíbrios teóricos aquele que de fato deve ocorrer no mundo real.

Com a intenção de apresentar alguns conceitos e definir a nomenclatura utilizada no restante deste trabalho, no capítulo seguinte apresentaremos um breve histórico do desenvolvimento da teoria dos jogos, apresentado as principais contribuições teóricas para a disciplina e seus principais autores.

No capítulo 3, apresentamos o Jogo da Moeda e sua forma normal, que consiste no conjunto de jogadores, o espaço de estratégia dos jogadores e suas funções *payoff*. Em seguida, fazemos a análise do Equilíbrio de Nash e como podemos selecionar, dos infinitos equilíbrios de Nash presentes neste jogo, aquele equilíbrio que de fato esperamos que ocorra.

No capítulo 4 apresentamos uma metodologia para a análise dos resultados. Além de simplesmente contar a frequência de interações estratégicas em que nosso resultado previsto aconteceu, propomos analisar a distribuição de estratégia dos jogadores. Como o espaço de estratégias dos jogadores é contínuo, sua distribuição pode nos falar muito acerca do comportamento destes. Para isso, apresentamos a chamada estimativa de densidade kernel, que nos dá, sem a necessidade de se escolher *a priori* uma distribuição de probabilidade, uma estimativa da densidade de estratégias.

Nos capítulos 5 e 6 apresentamos os resultados e estimações de densidade kernel segundo uma série de características observáveis, como sexo, curso e conhecimento em Teoria dos Jogos. Depois, fazemos algumas considerações acerca dos resultados deste trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Umas das primeiras tentativas de se utilizar o instrumental matemático no que na época chamava-se Economia Política foi feita pelo matemático francês Antoine Augustin Cournot (1838), no seu livro *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Theorie des Richesses*. No capítulo sete, *De la concurrence des producteurs* (Da concorrência dos produtores), Cournot não só dá o pontapé inicial da análise moderna dos oligopólios como também resolve o problema da determinação simultânea da quantidade produzida por duas firmas em um ambiente de competição, utilizando-se de uma ferramenta que só seria formalizada mais de um século depois, a noção de equilíbrio de Nash.

Cournot analisa a natureza da competição imaginando um cenário onde dois mananciais distintos, mas de qualidade idêntica, são explorados por dois indivíduos diferentes, os quais os chama de proprietários. O preço, p, do produto que os proprietários extraem dos mananciais é o mesmo para cada um dos proprietários, dada a natureza idêntica da qualidade da água dos mananciais, e a quantidade total ofertada no mercado, D, é função deste preço: $D = F(p)$. Onde $D = D_1 + D_2$, sendo D_1 a quantidade ofertada pelo proprietário 1 e D_2 a quantidade ofertada pelo proprietário 2.

Cournot negligencia propositadamente aqui a existência de custos de produção, apenas para facilitar a análise do problema, de forma que o lucro de cada proprietário será dado por pD_1 e pD_2, ou, por conveniência, $D_1 f(D_1 + D_2)$ e $D_2 f(D_1 + D_2)$. Cada proprietário tem como objetivo, então, obter de forma independente o maior lucro possível. Cournot, matemático, lança mão, então, das ferramentas do cálculo diferencial para proceder a análise de como os proprietários escolheriam a quantidade que iriam ofertar no mercado de forma a maximizar seu lucro. Os proprietários escolheriam D_1 e D_2 de forma que

$$f(D_1 + D_2) + D_1 \frac{\partial f(D_1 + D_2)}{\partial (D_1 + D_2)} = 0 \tag{2.1}$$

e

$$f(D_1 + D_2) + D_2 \frac{\partial f(D_1 + D_2)}{\partial (D_1 + D_2)} = 0 \tag{2.2}$$

Os valores D_1^* e D_2^* que resolvem simultâneamente as equações 2.1 e 2.2 seriam a quantidade ofertada por cada proprietário no mercado. Cournot (1838) acrescenta:

> Se um dos produtores, induzido em erro quanto ao seu verdadeiro interesse, o abandona temporariamente, ele será trazido de volta a ele por uma série de reações, constantemente reduzidas em amplitude.

Qualquer desvio das quantidades ótimas D_1^* e D_2^* por qualquer um dos produtores, levaria este produtor a repensar sua estratégia, e ajustar esse desvio de forma a maximizar seu lucro, voltando este ao equilíbrio inicial estabelecido pelas equações 2.1 e 2.2. O equilíbrio deste oligopólio é estável, não havendo necessidade de qualquer produtor se desviar dele.

A solução simultânea das equações 2.1 e 2.2 não é nada mais que a condição de equilíbrio de Nash, definida mais adiante. Mas qual a inovação trazida por Nash, então, se mais de um século antes sua noção de equilíbrio já havia sido usada? Sobre isso, Myerson (1999) argumenta que dar crédito a Cournot pelo conceito fundamental de equilíbrio em jogos não cooperativos seria confundir uma aplicação, o seu modelo de oligopólio, com a sua formulação geral. A intenção de Cournot não foi, portanto, a de criar uma teoria geral dos processos de interação não cooperativos. Apesar da grande importância do seu modelo de oligopólio para a análise das estruturas de mercado na atualidade, de fato, falar em "equilíbrio de Cournot", em vez de equilíbrio de Nash, ao tratar de jogos não cooperativos, seria um equívoco.

Borel (1921) foi o primeiro a se perguntar se, em um jogo, existe um *método de jogo* que é melhor que todos os outros, e se existiria uma maneira de encontrar tal método. Ainda não se falava em estratégia, cabendo mais tarde a von Neumann (1928) a formalização do conceito de estratégia. Por método de jogo, Borel se referia a um "código", que para cada movimento do jogador adversário, diria o que fazer em resposta ao seus movimentos. Embora Borel tenha se proposto a tarefa de encontrar uma solução para o equilíbrio de jogos não cooperativos, ele não desenvolveu esta ideia, e hoje atribui-se a von Neumann (1928) o desenvolvimento da teoria dos jogos.

A primeira formalização de um processo de interação estratégico da forma como conhecemos hoje foi feita por von Neumann (1928). Em seu artigo seminal, *Zur Theories der Gesellschaftsspiele*, von Neumann sintetiza os jogos não cooperativos como sendo estruturas em que cada jogador se move sequencialmente ao longo do tempo com informação imperfeita acerca dos movimentos dos outros jogadores. A imperfeição na informação dos jogadores sobre os movimentos dos outros jogadores pode ser parcial, e a estratégia de cada jogador depende da informação que este possui a cada estágio do jogo. Von Neumann (1928) define, então, uma estratégia como sendo um plano completo, que especifica um movimento a cada estágio do jogo como uma função da sua informação neste estágio. Desta forma, um jogador racional pode escolher sua estratégia antes que o jogo comece de fato , criando um plano contigencial para cada possível situação que emergir da interação entre os jogadores.

Além do conceito de estratégia como hoje conhecemos, também é devido a von Neumann (1928) a estrutura analítica dos jogos ainda utilizada hoje. Segundo von Neumann (1928), qualquer jogo competitivo pode ser modelado por um jogo matemático contendo um conjunto de jogadores, cada jogador possuindo um espaço de estratégias e uma função *payoff* das estratégias de todos os jogadores. Von Neumann e Morgenstern (1944) chamam esta estrutura de forma normal, e a definimos a seguir.

Definição 2.1. Um jogo representado na *forma normal* e n jogadores especifica o espaço de estratégia dos jogadores, $S_i = \{s_i^1, ..., s_i^m\}, i = 1, ..., n$, e suas funções *payoff*, $u_i = f(s_1 \in S_1, ..., s_n \in S_n), i = 1, ..., n$. O jogo na forma normal é dado por $G = (S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n)$.

A segunda grande contribuição de von Neumann (1928) à Teoria dos Jogos deve-se à prova da existência de uma solução, para situações em que existem apenas dois jogadores, para os chamados jogos de soma zero, o teorema *minimax*. Nos jogos de soma zero, qualquer ganho por parte de um jogador decorre de uma perda em igual magnitude para o outro jogador. Se assumirmos que a função de bem estar social da economia é do tipo utilitarista, qualquer que seja o resultado do processo de interação estratégica, não há mudanças no nível de bem estar social.

O equilíbrio nos jogos de soma zero é equivalente ao equilíbrio de Nash, mas há aqui uma restrição muito grande para considerarmos von Neumann como o responsável pelo desenvolvimento de uma teoria geral para a solução de jogos não cooperativos, e não Nash. Ao assumir que os processos de interação estratégica são jogos de soma zero, von Neumann (1928) exclui da análise dos jogos não cooperativos grande parte das interações econômicas, sociais e políticas.

Pense a respeito do oligopólio de Cournot (1838). Será que as funções de reação que podem ser derivadas das equações 2.1 e 2.2 são de fato lineares, e que o aumento na produção de uma unidade pela firma 1 é seguido pela redução de 1 unidade na produção da firma 2?

Sobre a importância de von Neumann e Morgenstern (1944) e como John Nash revolucionou o estudo dos jogos não cooperativos, Myerson (1999) coloca:

> So by 1948 von Neumann and Morgenstern had developed many fundamental elements for a theory of games: the extensive and normal forms linked by the concept of a strategy, the use of fixed-point theorems to prove existence of solutions for games with randomization, and a general derivation of the expected utility criterion for individual decision-making. But in their drive to assemble all these new ideas in a general unified theory of games, von Neumann and Morgenstern did not apply them consistently. So when John Forbes Nash, Jr., arrived at Princeton as a new graduate student, the time was ripe for a talented young mathematician who had the audacity to reconsider the whole structure of game theory on his own, to take these elements apart and reassemble them correctly.

O responsável por quebrar esta estrutura analítica de jogos de soma zero, que limitava em grande medida as possibilidades de análise da Teoria dos Jogos, foi Nash (1950a). Por meio de notáveis argumentos axiomáticos, Nash (1950a) apresenta uma solução para jogos de barganha, que abrangem uma grande variedade de situações econômicas, como negociações entre um monopólio e um monopsônio, acordos de comércio internacional entre duas nações, negociações de salário entre empresas e sindicatos de trabalhadores, ou até mesmo a negociação do preço de um carro usado entre dois indivíduos. Nash (1950a) não só quebra com a limitação dos jogos de soma zero como dá o pontapé inicial para o estudo de jogos cooperativos. A maioria dos trabalhos em jogos cooperativos que se seguem ao seu artigo *The bargaining problem* são baseados na sua abordagem ao problema de barganha.

A próxima contribuição de Nash à Teoria dos Jogos, o seu *Equilibrium points in n-person games*, foi tão fundamental à teoria econômica e às ciências sociais que, segundo Myerson (1999), podemos dividir a ciência econômica em antes e depois de Nash. Antes de Nash, pode-se dizer que o objeto da ciência econômica era tão somente a escassez. A noção de equilíbrio de Nash, então, abre espaço para a análise de um número sem fim de situações econômicas, e a Economia, antes a ciência que tratava em grande medida da administração de recursos escassos, passa a tratar de qualquer assunto em que os indivíduos são movidos por incentivos.

Em um artigo de apenas duas páginas, *Equilibrium points in n-person games*, Nash (1950b) apresenta o seu conceito de equilíbrio para jogos não cooperativos envolvendo um número finito de jogadores, o equilíbrio de Nash. Nash (1950b) apresenta também uma prova para a existência do seu equilíbrio, em estratégias randomizadas, para qualquer jogo finito na forma normal, o teorema de Nash. A sua prova, utilizando o teorema do ponto fixo de Kakutani, inspirou diretamente, inclusive, a prova para a existência do equilíbrio Walrasiano. A seguir, uma definição do equilíbrio de Nash.

Definição 2.2. No jogo na forma normal e n jogadores $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, o perfil de estratégias $(s_1^*, ..., s_n^*)$ é um *equilíbrio de Nash* se, para cara jogador i, s_i^* é a melhor resposta para as estratégias dos outros $n-1$ jogadores, $(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

para toda estratégia factível $s_i \in S_i$. Isto é:

$$s_i^* = \underset{s_i \in S_i}{\operatorname{argmax}}\ u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

(GIBBONS, 1992).

É fácil ver que os valores D_1^* e D_2^* que resolvem o sistema de equações em 2.1 e 2.2, no modelo de duopólio de Cournot, são um equilíbrio de Nash de acordo com a definição 2.2. No duopólio de Cornot, as empresas maximizam simultaneamente os seus lucros, e a produção de cada empresa depende da produção da outra, portanto, cada empresa reage à estratégia de produção da outra maximizando o lucro em função da melhor resposta da outra empresa, constituindo, assim, um equilíbrio de Nash. É fácil ver também na definição 2.2 por que damos crédito a Nash (1950b) pelo conceito de equilíbrio em jogos não cooperativos, e não a Cournot (1838), ao observarmos uma clara distinção entre uma aplicação e um conceito geral.

Na sua tese de doutorado, cuja maior parte foi publicada no seu artigo de 1951, *Non-cooperative games*, Nash (1951) desenvolve completamente sua ideia de equilíbrio, e mostra como o equilíbrio de Nash pode ser usado para analisar uma série de problemas que os teóricos em teoria dos jogos da época se preocupavam em solucionar, tais como jogos com equilíbrio Pareto-ineficiente, como o dilema dos prisioneiros, jogos com múltiplos equilíbrios e jogos com equilíbrio instável.

Nash (1951) também oferece uma forma de analisar qualquer situação de interação estratégica utilizando o seu conceito de equilíbrio e a forma normal de von Neumann (1928). Nash (1951) mostra como podemos estudar os jogos cooperativos reduzindo-os a uma forma não cooperativa, no sentido de que um processo de negociação entre os jogadores se torna movimentos em um jogo não cooperativo. Desta forma, qualquer tipo de interação estratégica pode ser reduzida a sua análise de equilíbrio. Sobre a importância disso para as ciências sociais, Myerson (1999) destaca:

> With this step, Nash carried social science into a new world where a unified analytical structure can be found for studying all situations of conflict and cooperation. Von Neumann's normal form is our general model for all games, and Nash's equilibrium is our general solution concept. Nash (1951) also noted that the assumption of transferable utility can be dropped without loss of generality, because possibilities for transfer can be put into the moves of the game itself, and he dropped the zero-sum restriction that von Neumann had imposed.

Conforme a sua noção de equilíbrio foi aplicada em uma série de situações econômicas, políticas e sociais, ficou claro que alguns refinamentos no conceito de equilíbrio de Nash deveriam ser feitos antes de torná-lo uma metodologia analítica geral para a ciência aplicada. O primeiro passo para isso foi dado por Kuhn (1950) e Kuhn (1953), que fez uma reformulação geral da forma extensiva para jogos sequenciais.

Selten (1965) e Selten (1975) mostrou que, em várias situações, podem existir muitos equilíbrios de Nash, e que alguns desses equilíbrios, quando analisados utilizando-se a forma extensiva, são, aparentemente, ações que um agente econômico racional não tomaria. Segundo Selten (1965) e Selten (1975), esse problema surge porque a forma como os jogadores escolhem suas estratégias, segundo a noção mais básica de equilíbrio de Nash, maximizando a utilidade esperada no começo do jogo, não impõe nenhuma restrição ao comportamento dos jogadores quando estes percebem que uma ou mais estratégias são improváveis de acontecer.

Esta aparente irracionalidade que surge nas ações dos agentes econômicos quando analisadas pela ótica do equilíbrio de Nash não o derruba como um conceito geral de equilíbrio, mas, na verdade, mostra que o equilíbrio de Nash é uma condição necessária para o comportamento racional dos indivíduos. Uma condição suficiente, a noção de equilíbrio perfeito, foi mostrada por Selten (1975), que também mostra que o equilíbrio de Nash é uma implicação do seu equilíbrio perfeito, ou seja, todo equilíbrio perfeito é também um equilíbrio de Nash.

Um problema comum na análise de equilíbrio de Nash era sobre a informação dos jogadores, que assume que, no começo dos jogos, todos os jogadores possuem o mesmo conjunto de informação. Em muitas situações, isso não é verdade. De fato, a assimetria de informação é comum em vários modelos econômicos. Este problema foi contornado por Harsanyi (1967), que mostrou como evitar esta dificuldade a partir dos chamados jogos de informação incompleta, ou jogos bayesianos.

Outra forma de contornar o problema de múltiplos equilíbrios foi dado por Schelling (1960) e o seu conceito de ponto focal. Em um jogo com vários equilíbrios, qualquer fator que chame a atenção dos jogadores para um equilíbrio em particular pode influenciá-los a seguir as estratégias que direcionam o jogo a esse equilíbrio. De acordo com Schelling (1960), a existência de múltiplos equilíbrios em um processo de interação estratégica deve ser entendido como jogos em que percepções culturais ou tradições históricas podem exercer um efeito decisivo para que um dos equilíbrios se sobressaia aos demais.

3 O JOGO

O jogo que descreveremos a seguir é um claro exemplo de uma situação de interação estratégica que resulta em múltiplos equilíbrios de Nash, e onde o conceito de ponto focal de Schelling (1960) pode ser eficaz em extrair da totalidade de equilíbrios um único perfil de estratégias que, em teoria, se sobressai aos demais.

A seguir, apresentamos o jogo em questão, descrevendo-o na forma normal e, então, a análise do equilíbrio de Nash. Depois, como podemos usar a noção de ponto focal para inferir acerca do comportamento dos indivíduos.

3.1 O Jogo da Moeda e sua Forma Normal

O jogo consiste na seguinte situação. Dois jogadores, os quais chamaremos jogador 1 e jogador 2, têm de decidir como dividir entre si uma determinada quantia em dinheiro, x unidades monetárias. Porém, os dois não podem se comunicar e coordenar seus movimentos. Eles não podem barganhar quanto a fatia de cada um sobre a quantia em dinheiro. Desta forma, sem qualquer informação sobre a fatia que o seu oponente está reclamando, os dois jogadores devem anunciar o quanto desejam do montante total. Caso a soma das fatias que ambos os jogadores estão reclamando exceda o montante total que eles podem dividir, nenhum receberá nada. Por outro lado, caso a soma das fatias seja inferior ao total, a diferença é perdida, e cada jogador recebe apenas a quantidade que reclamou.

Este jogo é uma versão simultânea do jogo do ultimato, um jogo sequencial em que o primeiro jogador a se movimentar, o proponente, anuncia o quanto deseja sobre o montante que devem dividir, e o segundo jogador, o respondente, decide se aceita ou não a proposta do primeiro jogador.

É fácil ver que, do fato de que cada jogador não possui informação acerca da estratégia do seu oponente no momento em que faz seu movimento, esta situação de interação estratégica constitui um jogo simultâneo de informação completa, no sentido de que é de conhecimento comum a todos os jogadores a função *payoff* de todos os envolvidos no jogo. Desta forma, é imperativo o uso da forma normal de von Neumann (1928) para modelar este jogo.

A estratégia de cada jogador constitui-se em um valor s_i que deseja sobre a quantidade total x. Desta forma, é racional pensar que cada jogador reclamará um valor entre 0 e x, e nenhum valor fora deste intervalo. Valores maiores que x retornariam um *payoff* nulo, de acordo com as regras do jogo. Dito isto, o espaço de estratégia do jogador 1 e do jogador 2 será dado pelo seguinte intervalo:

$$S_i = [0, x] \quad i = 1,\ 2 \tag{3.1}$$

O espaço de estratégias dos jogadores é contínuo, havendo, portanto, um número infinito de estratégias $s_i \in S_i$.

É fácil ver que a função *payoff* de cada jogador é dada pelo valor de sua estratégia s_i, porém, caso a estratégia do jogador adversário exceda $x - s_i$, de forma que a soma das estratégias exceda a quantidade disponível x, o payoff do jogador i será nulo. Dito isto, temos que:

$$u_i(s_i, s_j) = \begin{cases} s_i, & \text{se } s_j \leq x - s_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i = 1,\ 2 \tag{3.2}$$

De 3.1 e 3.2, o jogo na forma normal será dado por:

$$G = \{S_1 = [0, x], S_2 = [0, x]; u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2)\} \tag{3.3}$$

Na seção seguinte, mostramos o equilíbrio de Nash do jogo na forma normal em 3.3, e como o conceito de ponto focal de Schelling (1960) nos ajuda a prever o comportamento racional dos indivíduos.

3.2 Análise do Equilíbrio de Nash

Utilizando a definição 2.2 de equilíbrio de Nash, o problema dos jogadores 1 e 2 é, portanto, dado por:

$$\max_{s_1 \in [0,x]} \quad u_1(s_1, s_2^*)$$
$$\text{s.a.: } s_1 + s_2^* \leq x;$$

e

$$\max_{s_2 \in [0,x]} \quad u_2(s_1^*, s_2) = s_2$$
$$\text{s.a.: } s_1^* + s_2 \leq x;$$

respectivamente.

As condições de primeira ordem dos problemas acima nos dão a seguinte condição para que um perfil de estratégias (s_1^*, s_2^*) seja um equilíbrio de Nash:

$$s_1^* + s_2^* = x \tag{3.4}$$

Observe que, se $s_1^* = \alpha$, para qualquer $0 \leq \alpha \leq x$, então, da equação 3.4, temos que $s_2^* = x - \alpha$. Portanto, o equilíbrio de Nash para este jogo é dado pelo perfil de estratégias $(\alpha, x - \alpha)$, para qualquer $0 \leq \alpha \leq x$.

Intuitivamente, é facil entender este equilíbrio. Imagine que dois indivíduos têm de decidir, simultaneamente, suas fatias de uma determinada quantia em dinheiro, digamos, R\$100,00. Suponha que a estratégia do jogador 1 seja dada por $s_1 =$ R\$60,00. A melhor resposta do jogador 2 para esta estratégia do jogador 1, aquela que maximiza sua função *payoff*, é $s_2 =$ R\$40,00. Qualquer valor acima ou abaixo de R\$40,00 não se configuraria uma melhor resposta, pois retornaria um *payoff* inferior a R\$40,00, e, portanto, o jogador 2 não estaria maximizando sua função *payoff*. Da mesma forma, a melhor resposta do jogador 1 à estratégia $s_2 =$ R\$40,00 será $s_1 =$ R\$60,00, de outra forma, o jogador 1 não estaria maximizando sua função *payoff*. O perfil $(R\$60, R\$40)$ é, portanto, um dos muitos equilíbrios de Nash.

Nesta situação, que envolve a partilha de uma quantidade fixa de dinheiro, se considerarmos que a menor unidade de divisão são centavos, existiriam $100x + 1$ equilíbrios de Nash, muitos dos quais extremamente improváveis, como $(x, 0)$, ou $(0,99x, 0,01x)$. Dessa forma, é preciso um conceito mais forte de equilíbrio, que nos permita prever o comportamento racional dos indivíduos. Utilizamos aqui o conceito de ponto focal de Schelling (1960) para tentar inferir qual perfil de estratégias seria o mais racional, aquele que de fato veríamos ocorrendo no mundo real.

O jogador i sabe que, caso reclame uma quantia α, só a receberá no caso de o jogador j reclamar uma quantia menor ou igual a $x - \alpha$, de forma que $s_i + s_j \leq x$. Caso contrário, se $s_j > x - \alpha$, então $s_i + s_j > x$ e o jogador i não recebe nada. O mesmo vale para o jogador j. No caso de ele pedir uma fatia $x - \alpha$, só a recebe se $s_i \leq \alpha$.

Suponha que as estratégias dos dois jogadores são distribuídas uniformemente sobre o intervalo contínuo $[0, x]$. Os jogadores sabem, portanto, que a probabilidade de se receber um valor s_i, $P(s_j \leq x - s_i)$, é de $(x - s_i)/x$.

Para o perfil de estratégias $(\alpha, x - \alpha)$, a probabilidade de o jogador 1 receber de fato α é $P(s_2 \leq x - \alpha) = (x - \alpha)/x$. Desta forma, o seu *payoff* esperado será dado por:

$$Eu_1 = \alpha.P(s_2 \leq x - \alpha) + 0.P(s_2 > x - \alpha) = \alpha \frac{x - \alpha}{x} = \alpha - \frac{\alpha^2}{x} \tag{3.5}$$

Da mesma forma, para o jogador 2, a probabilidade de ele receber $x - \alpha$ será $P(s_1 \leq \alpha) = \alpha/x$, e o seu *payoff* esperado será:

$$Eu_2 = (x - \alpha).P(s_1 \leq \alpha) + 0.P(s_1 > \alpha) = (x - \alpha)\frac{\alpha}{x} = \alpha - \frac{\alpha^2}{x} \tag{3.6}$$

Utilizando a noção de ponto focal de Schelling (1960), esperamos que os jogadores escolham, dentre os múltiplos equilíbrios de Nash, aquele que maximiza o seu *payoff* esperado. Supondo que o espaço de estratégias dos jogadores seja contínuo, o valor α que maximiza o *payoff* esperado dos jogadores nas equações 3.5 e 3.6 será $x/2$ e $x/2$.

O perfil de estratégias $(x/2, x - x/2)$, ou $(x/2, x/2)$, portanto, maximiza o *payoff* esperado dos jogadores 1 e 2. Observe, também, que $x/2 + x/2 = x$, obedecendo a condição derivada na equação 3.4 para que um perfil de estratégias seja um equilíbrio de Nash.

Intuitivamente, é bastante claro porque os indivíduos escolheriam este perfil de estratégias. Observe que, supondo que um indivíduo racional maximizará seu *payoff* esperado em cima da condição descrita pela equação 3.4, eles decidem, desta forma, dividir pela metade a quantia disponível, mesmo que estejam incomunicáveis e não possam negociar. É de se esperar que esta divisão meio a meio ocorra, pois, não podendo os indivíduos negociarem a partilha do dinheiro, é improvável que, se um deles lançar mão de uma estratégia diferente de $x/2$, ele receberá o maior *payoff* possível.

No capítulo seguinte, propomos uma metodologia para testar se de fato o perfil de estratégias $(x/2, x/2)$, derivado do conceito de ponto focal, prevalece sobre os demais equilíbrios de Nash.

4 METODOLOGIA

Como mostrado no capítulo anterior, o jogo em análise, o jogo da moeda, possui infinitos equilíbrios de Nash, mas, quando lançamos mão de um conceito mais forte de equilíbrio, o conceito de ponto focal, esperamos que os jogadores escolherão suas estratégias maximizando uma função *payoff* esperado, considerando o perfil de estratégias geral $(\alpha, x - \alpha)$, para qualquer $0 \leq \alpha \leq x$. Desta maximização do *payoff* esperado, o perfil de estratégias $(x/2, x/2)$ surge como indicativo do comportamento racional dos indivíduos.

Para testar esta hipótese, aplicaremos o jogo em questão em algumas turmas do curso de graduação em Ciências Econômicas e Administração da Universidade Federal do Ceará. Porém, em vez de propor a divisão de uma quantia em dinheiro, será proposto aos estudantes dividirem um ponto extra em uma de suas avaliações.

Seguindo esta configuração, o espaço de estratégias dos jogadores é dado por:

$$S_i = [0, 1] \quad i = 1,\ 2$$

e a função *payoff* será dada pela função:

$$u_i(s_i, s_j) = \begin{cases} s_i, & \text{se } s_j \leq 1 - s_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i = 1,\ 2$$

O equilíbio de Nash será qualquer perfil de estratégias na forma $(\alpha,\ 1 - \alpha)$, para qualquer $0 \leq \alpha \leq 1$, e, do que foi argumentado no capítulo anterior, é esperado que o perfil $(0,5,\ 0,5)$ seja aquele que indica o comportamento racional dos indivíduos.

Para manter a simultaneidade do jogo, de forma que não seja possível nenhum movimento sequencial ou barganha por parte dos jogadores, os estudantes receberão, aleatoriamente, códigos que os identifiquem, mas não tornam possível por parte dos jogadores a identificação dos seus concorrentes, sendo essa informação de propriedade exclusiva do pesquisador e somente após a tabulação dos resultados.

Junto com a estratégia do estudante, serão perguntadas informações sobre sexo, se possui conhecimento em teoria dos jogos e o seu curso. O questionário a ser aplicado está disponível no anexo A.

Como já mostrado, o espaço de estratégias dos jogadores é contínuo no intervalo $[0,\ 1]$. Desta forma, a fim de sumarizar os resultados da nossa amostra, optamos por estimar uma função densidade de probabilidade para as estratégias dos jogadores, de maneira a termos uma visão mais geral da distribuição de estratégias dos jogadores. Na seção seguinte, mostramos o processo de estimação não-paramétrica de funções densidade de probabilidade por meio de kernel, a estimativa de densidade kernel.

4.1 Estimação Não-Paramétrica de Distribuições de Probabilidade

Usualmente, quando queremos estimar uma função densidade de probabilidade, $f(x,\ \theta)$, de uma variável aleatória X e dispomos de uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$, fazemos alguma suposição *a priori* da distribuição de probabilidade da variável aleatória X. O trabalho, então, consiste em estimar o vetor θ, que consiste em k parâmetros desconhecidos.

O principal problema desta abordagem é que temos que supor que a amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ saiu de uma determinada família de distribuições f. Se esta hipótese não for verdadeira, a função densidade de probabilidade estimada pode diferir substancialmente da real.

Para contornar este problema, podemos utilizar métodos não-paramétricos de estimação da função densidade de probabilidade. Desta forma, não necessitamos fazer nenhuma hipótese *a priori* acerca da distribuição de probabilidade da amostra aleatória em análise.

A forma mais usual e mais antiga de estimação não-paramétrica de densidades é o histograma. O processo de estimação de um histograma é bastante simples, e consiste em dividir o intervalo da amostra em m intervalos distintos de tamanho h e contar o número de observações em cada intervalo. Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra de tamanho n. Considere a partição da amostra em m intervalos distintos de mesmo tamanho: $(z_k,\ z_{k+1})$, para todo $k = 1, \ldots, m$, com $m < n$ e $z_{k+1} - z_k = h$. O estimador da função densidade de probabilidade por histograma é dada por:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} I\left(z_k < x_i \leq z_{k+1}\right) \tag{4.1}$$

para $k = 1, \ldots, m$. $I(.)$ é uma função indicadora, que assume valor 1 caso $z_k < x_i \leq z_{k+1}$ e valor 0 caso contrário.

Vários fatores afetam o formato do histograma, como a escolha do ponto de origem, a escolha do número de intervalos e a escolha do tamanho dos intervalos. Também, para variáveis aleatórias contínuas, o histograma não é uma boa opção para estimação da sua função densidade de probabilidade, já que não retorna uma curva diferenciável, como geralmente são as densidades de variáveis aleatórias contínuas. Técnicas mais sofisticadas de estimação não-paramétrica podem ser usadas para contornar estes problemas. A seguir, apresentamos o método de estimação de densidades por meio de kernel, a estimativa de densidade kernel.

4.1.1 Estimativa de Densidade Kernel

Um dos maiores problemas na representação de dados por meio de histogramas é a escolha do ponto de origem. Para evitar a escolha arbitrária de um ponto de origem, o estimador *naive* leva em consideração intervalos que podem se sobrepor, em vez de serem inteiramente separados uns dos outros. O princípio do estimador *naive* é bastante simples, mas representa um avanço significativo em relação à estimativa de funções densidade de probabilidade por meio de histogramas. Para cada ponto em um intervalo contínuo que contém todos os valores da amostra, abre-se uma janela em torno deste ponto e conta-se o número de observações neste intervalo. Observe a diferença entre o histograma e o estimador *naive*. No segundo, ao abrir-se um intervalo em cada ponto do domínio da amostra, estes intervalos podem se sobrepor, gerando uma estimativa da densidade de probabilidade bem mais suave que a estimativa por meio de histogramas. Para uma amostra de tamanho n, o estimador *naive* é dado por:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} I\left(x - \frac{h}{2} < x_i < x + \frac{h}{2}\right) \tag{4.2}$$

onde h é o tamanho do intervalo.

a única diferença entre o estimador *naive* em 4.2 e o histograma, representado na equação 4.1, é o argumento da função indicadora. Na equação 4.2, a estimativa da densidade em um ponto x é dado pela proporção de observações que estão a uma distância de $h/2$ ou menos do ponto x. A estimativa da função densidade de probabilidade é obtida "arrastando-se" essa janela de tamanho h ao longo de todo o intervalo da amostra e contando-se a frequência relativa do número de observações em cada intervalo.

Observe que a função indicadora, neste caso, é a função densidade de probabilidade, $w(.)$, de uma variável aleatória uniforme contínua no intervalo $(-1/2,\ 1/2)$. Podemos reescrever a equação 4.2 como:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} w\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \tag{4.3}$$

onde

$$w(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A função $w(.)$ atribui pesos iguais a 1 a todas as observações dentro de cada intervalo, não importando se a observação está no centro do intervalo ou em um de seus extremos. Surge deste problema a estimativa de densidade kernel. Em vez de atribuir o mesmo peso a todas as observações em um intervalo, atribui-se pesos maiores para observações mais próximas do centro do intervalo. Em outras palavras, a transição de 1 para 0 nos pesos atribuidos às observações não é tão abrupta, mas gradual. O estimador kernel é obtido substituindo-se a função $w(.)$ na equação 4.3 por uma função kernel $K(.)$:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \tag{4.4}$$

Para que a estimativa $\hat{f}(x)$ conserve as propriedades de uma função densidade de probabilidade, a função kernel na equação 4.4 tem que satisfazer a seguinte condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$$

Qualquer função densidade satisfaz esta condição. Porém, deve-se utilizar funções de densidade simétricas, de forma que observações que estão em lados opostos ao centro do intervalo, mas a uma mesma distância, recebam pesos iguais. Não se deve confundir a escolha de uma função densidade para a função kernel com a escolha *a priori* de uma função para proceder com uma estimação de seus parâmetros. Nesse caso, a função densidade serve apenas para atribuir pesos as observações. Como mostra Silverman (1986), a escolha da função kernel tem pouco impacto na estimativa da densidade de probabilidade. É comum, porém, utilizar uma função Normal padrão, o chamado *kernel Gaussiano*:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

O estimador de densidade kernel ainda requer a escolha de um tamanho de intervalo h, mas consiste em um grande avanço em relação a estimação paramétrica, onde se deve escolher a própria função densidade de probabilidade e estimar seus parâmetros, e em relação ao histograma, que além da escolha de um tamanho de intervalo, deve-se escolher o número de intervalos e o ponto de origem. Para a nossa análise, optamos por escolher um tamanho de intervalo de $0,03$.

No capítulo seguinte, mostramos as estimativas de densidade kernel das distribuições de estratégias para a amostra como um todo e separando os jogadores por curso, sexo e conhecimento em Teoria dos Jogos.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Conseguiu-se amostrar 91 jogadores, dos quais foi possível promover 44 interações estratégicas. Entre estes 91 indivíduos na amostra, 24 eram alunos do curso de Administração e 67 do curso de Economia. 43 jogadores eram do sexo masculino e 48 jogadores do sexo feminino. 43 jogadores afirmaram possuir algum conhecimento em Teoria dos Jogos, contra 48 jogadores que afirmaram não possuir conhecimento em Teoria dos Jogos.

Das 44 interações estratégicas amostradas, 15 geraram perfis de estratégia de equilíbrio de Nash, 14 na forma $(0,5,\ 0,5)$ e 1 na forma $(0,6,\ 0,4)$. Embora um número aparentemente pequeno de interações estratégicas geraram perfis de equilíbrio, $34,1\%$, não o podemos considerar irrelevante, dado a continuidade do espaço de estratégias dos jogadores e o número infinito de possíveis perfis de estratégias.

A análise da distribuição de estratégias dos jogadores pode nos dar informações adicionais acerca do comportamento racional dos indivíduos. Na seção seguinte, apresentamos as estimações por meio de kernel das distribuções de estratégias dos jogadores segundo uma série de características observáveis.

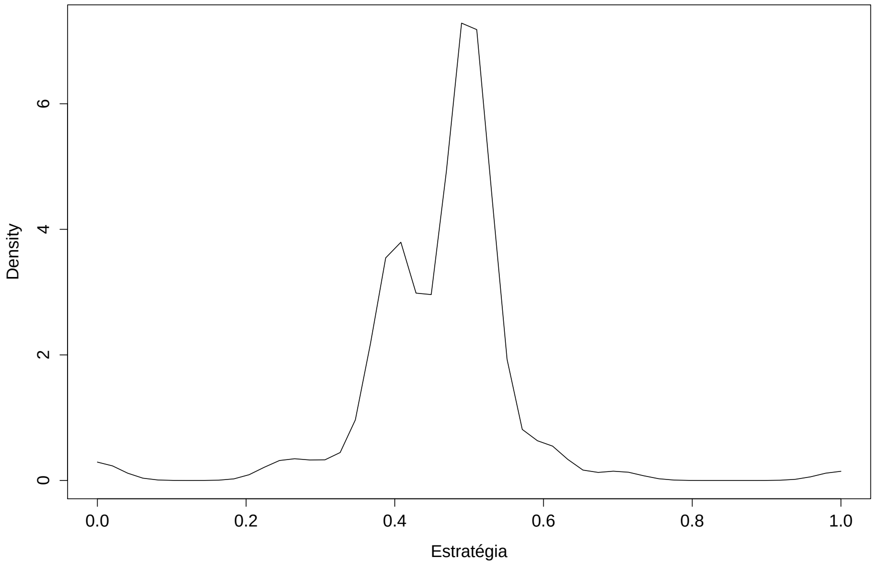
5.1 Estimação via Kernel das Distribuições de Estratégias

A figura 2 mostra a estimativa de densidade kernel da distribuição de estratégias dos alunos dos cursos de Administração e Economia da UFC. Um primeiro fato a ser notado é que a amostra possui valores de estratégias que cobrem todo o intervalo teórico para o Jogo da Moeda, com valores que vão de 0 até 1. Fica evidente, também, que a maioria das estratégias se concentram em torno da estratégia que derivamos do conceito de ponto focal, $0,5$, embora algumas estratégias também se concentram em torno do valor $0,4$.

Em termos absolutos, 51 jogadores utilizaram como estratégia o valor $0,5$, o que representa 56% dos jogadores na amostra, contra 26 jogadores utilizando como estratégia o valor $0,4$, ou $28,6\%$ dos jogadores.

Para termos um quadro mais específico dos fatores que levam um jogador a adotar determinada estratégia, dividimos nossa análise segundo o curso do jo-

Figura 2 – Estimação via Kernel da Distribuição de Estratégias dos Alunos de Administração e Economia.



Fonte: Elaborado pela autora.

gador, seu sexo e se possui ou não conhecimento em Teoria dos Jogos. Nas seções que se seguem, mostramos a estimativa de densidade kernel das distribuições de estratégias dos jogadores segundo cada uma destas características observáveis.

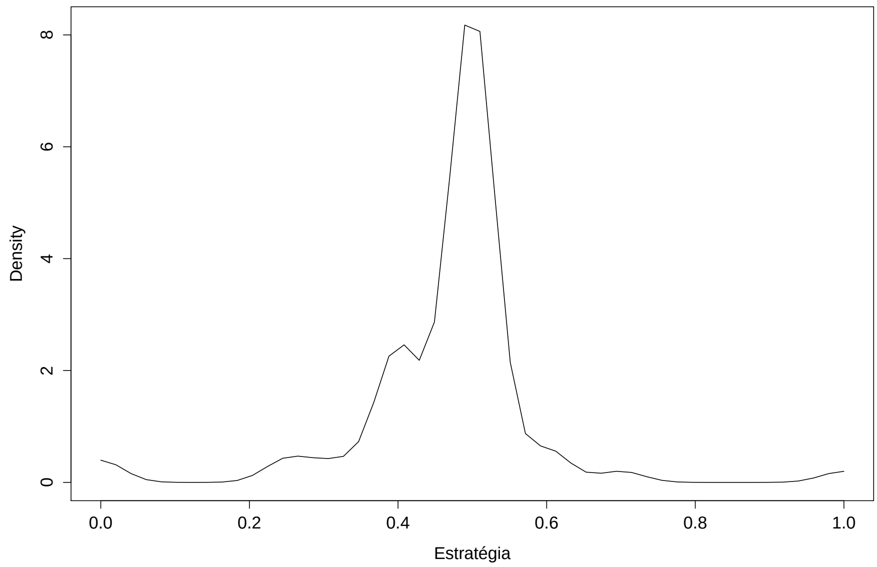
5.1.1 Por Curso

A estimativa de densidade kernel da distribuição de estratégias dos alunos do curso de Economia é mostrada na figura 3. A figura 4 mostra a estimação para os alunos do curso de Administração.

Observe que, entre os alunos do curso de Economia, a estratégia mais comum é $0,5$, enquanto que, entre os alunos do curso de Administração, a estratégia predominante é $0,4$. Em termos relativos, $62,7\%$ dos alunos de Economia utilizaram a estratégia de equilíbrio $0,5$, contra $37,5\%$ dos alunos do curso de Administração. Entre estes, $58,3\%$ utilizaram como estratégia $0,4$.

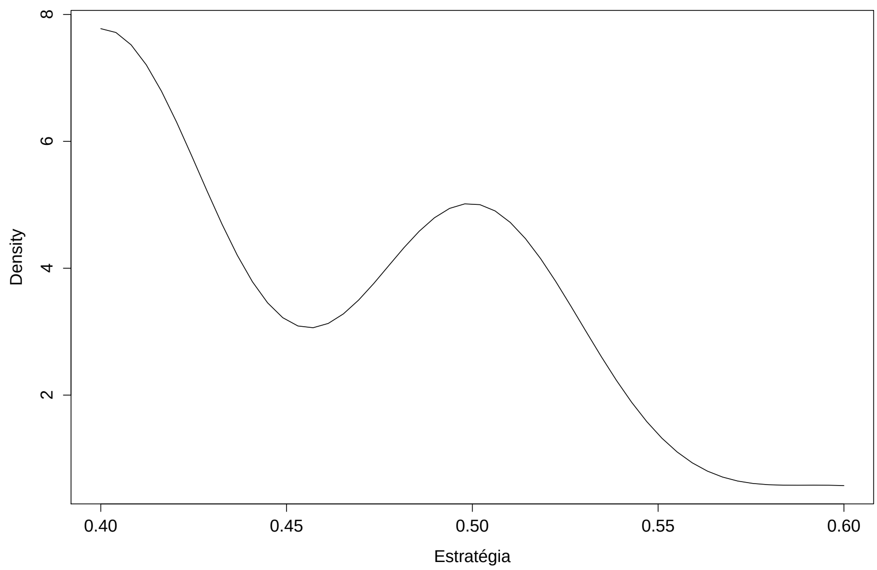
Um fato que pode explicar esta diferença é o conhecimento em Teoria dos Jogos. Na amostra, apenas $8,3\%$ dos alunos do curso de Administração disseram possuir algum conhecimento em Teoria dos Jogos, contra $61,2\%$ dos

Figura 3 – Estimação via Kernel da Distribuição de Estratégias dos Alunos de Economia.



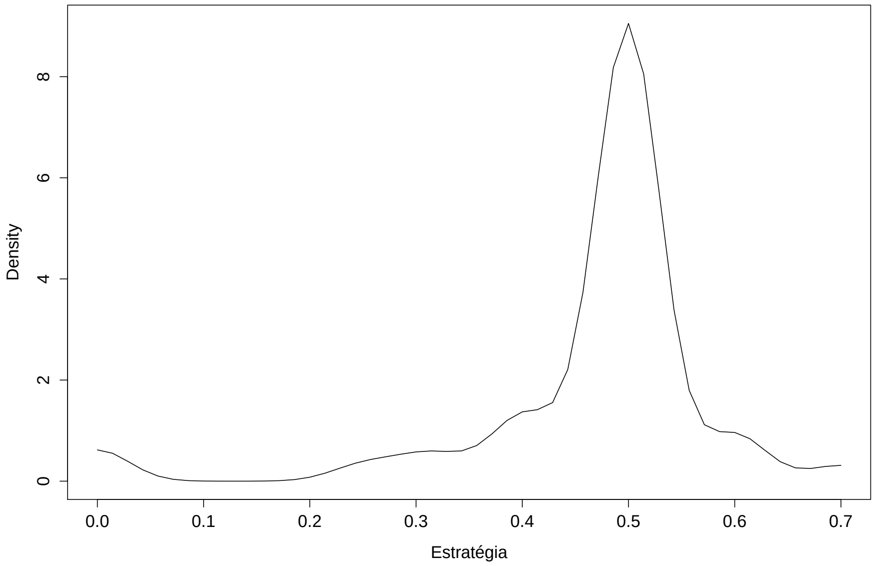
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4 – Estimação via Kernel da Distribuição de Estratégias dos Alunos de Administração .



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5 – Estimação via Kernel da Distribuição de Estratégias dos Alunos que Possuem Conhecimento em Teoria dos Jogos.



Fonte: Elaborado pela autora.

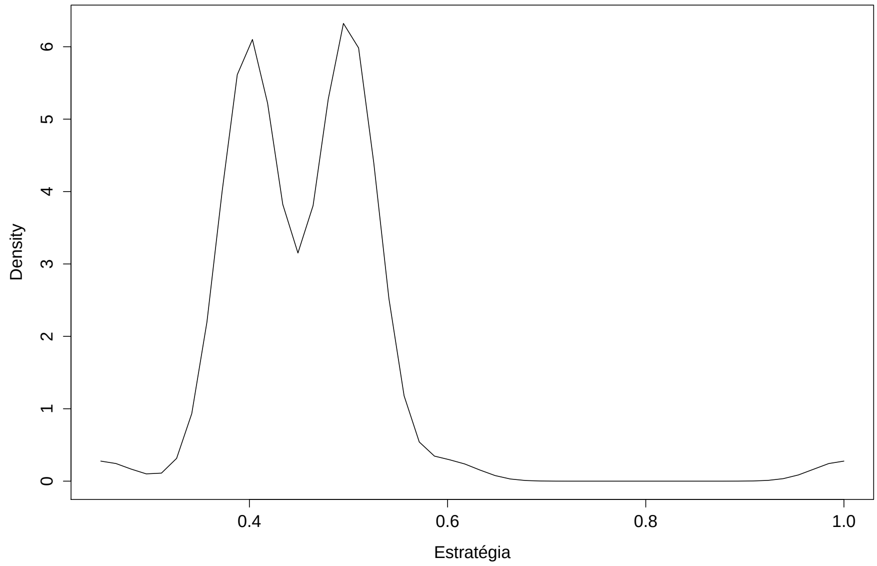
alunos do curso de Economia. Desta forma, na seção seguinte, analisamos a distribuição de estratégias dos jogadores segundo o conhecimento em Teoria dos Jogos, de forma a termos condições de inferir se essa diferença nos valores das estratégias é de fato devido ao curso em que o indivíduo está cursando ou se pelo fato de a maioria dos estudantes do curso de Economia possuirem conhecimento em Teoria dos Jogos enquanto os estudantes do curso de Administração não.

5.1.2 Por Conhecimento em Teoria dos Jogos

As estimativas de densidade kernel das distribuições de estratégias dos jogadores que possuem conhecimento em Teoria dos Jogos e daqueles que não possuem conhecimento na disciplina são mostradas nas figuras 5 e 6, respectivamente.

A diferença na distribuição de estratégias é bastante evidente quando separamos os jogadores entre aqueles que possuem conhecimento em Teoria dos Jogos e aqueles que não possuem. Entre aqueles que possuem conhecimento em Teoria dos Jogos, a estratégia adotada é predominantemente aquela que

Figura 6 – Estimação via Kernel da Distribuição de Estratégias dos Alunos que Não Possuem Conhecimento em Teoria dos Jogos.



Fonte: Elaborado pela autora.

derivamos utilizando a noção de ponto focal. Entre estes jogadores, 67,4% lançaram mão da estratégia 0,5, contra 9,3% de jogadores utilizando 0,4 como estratégia. Entre aqueles que não possuem conhecimento em Teoria dos Jogos, 22 jogadores adotaram a estratégia 0,5 e, da mesma forma, 22 jogadores adotaram 0,4 como estratégia.

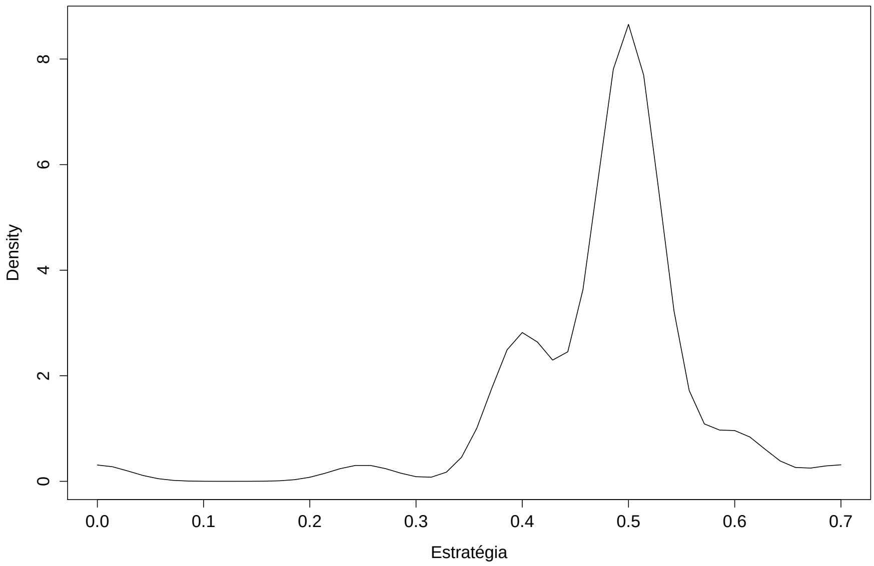
Por último, na seção seguinte, apresentamos as estimativa de densidade kernel da distribuição de estratégias dos jogadores segundo seu sexo.

5.1.3 Por Sexo

As estimações para jogadores do sexo masculino e jogadores do sexo feminino são mostradas nas figuras 7 e 8 , respectivamente.

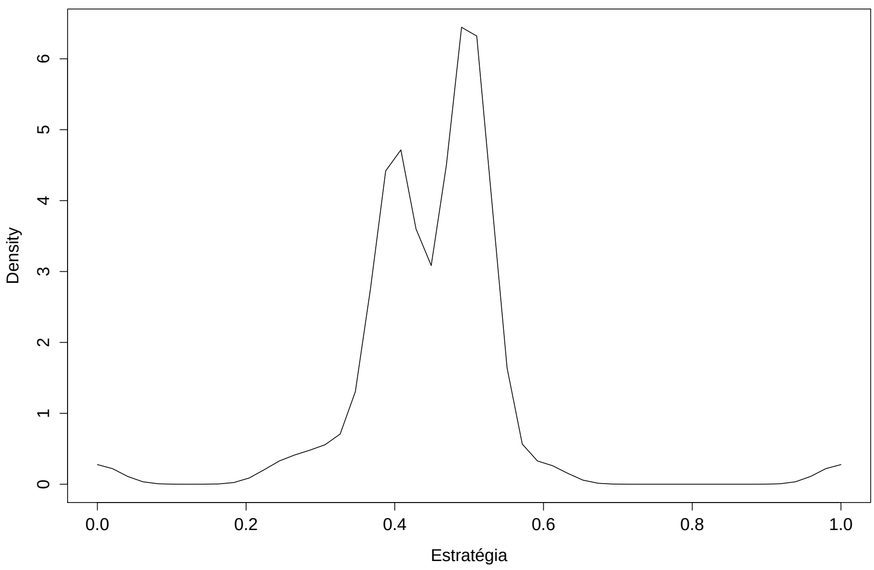
Em ambos os casos, é possível notar que a estratégia utilizada é predominantemente 0,5, embora esta estrategia seja mais predominante entre jogadores do sexo masculino. Entre estes, 62,8% jogaram 0,5. Entre as mulheres, uma fração menor utilizou como estratégia 0,5, 50%. Também, 20,9% dos jogadores do sexo masculino e 35,4% dos jogadores dos sexo feminino responderam 0,4.

Figura 7 – Estimação via Kernel da Distribuição de Estratégias dos Alunos do Sexo Masculino.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 8 – Estimação via Kernel da Distribuição de Estratégias dos Alunos do Sexo Feminino.



Fonte: Elaborado pela autora.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já observado, a maioria das estratégias dos jogadores se concentra em torno de duas estratégias: 0,4 e 0,5. O principal fator que parece guiar esta escolha é o conhecimento em Teoria dos Jogos, visto que a grande maioria daqueles que disseram possuir conhecimento em Teoria dos Jogos optou por jogar 0,5. Porém, mesmo entre aqueles que afirmaram não possuir conhecimento em Teoria dos Jogos, as escolhas de estratégias se concentram em torno de 0,4 e 0,5.

A diferença, embora pequena, também é aparente quando analisamos as distribuições de estratégias dividindo o grupo de jogadores por sexo. Em ambos os grupos, as estratégias se concentram em torno de 0,5, porém, mais proeminentemente entre os indivíduos do sexo masculino. Isso nos leva a perguntar se existe outro fator que pode levar a escolha de uma estratégia inferior a 0,5, como o grau de aversão ao risco, por exemplo. Indivíduos com maior aversão ao risco podem ser levados a escolher uma estratégia menor que 0,5, e aqueles propensos ao risco podem ser levados a escolher 0,5.

Este não é um trabalho definitivo, já que outras questões surgiram após a análise dos resultados, como, por exemplo, em que medida a aversão ao risco de um jogador o leva a escolher uma estratégia diferente daquela que previmos. Desta forma, para uma análise futura, pode-se perguntar, também, se o jogador é ou não avesso ao risco, e, desta forma, podermos concluir se a aversão ao risco leva os jogadores a escolher como estratégia um valor inferior a 0,5. Para termos uma visão mais geral do comportamento racional dos indivíduos, é preciso levar este experimento para fora da Universidade, e analisar as estratégias adotadas por indivíduos que não possuem conhecimento técnico em Economia, como indivíduos que tenham apenas o ensino fundamental ou médio, assim como em pessoas mais jovens e com idade mais avançada, visto que o simples fato de um jogador possuir conhecimento em Teoria dos Jogos o leva a adotar em maior medida a estratégia que previmos como derivada do comportamento racional. Da mesma forma, pode-se expandir o experimento dentro da Universidade, incluindo mais turmas dos cursos analisados ou expandindo a pesquisa para outros cursos. Da mesma forma, a estimação de modelos de escolha discreta, como o modelo Probit e o modelo Logit, podem ajudar a compreender os fatores que influenciam os jogadores na escolha de sua estratégia.

REFERÊNCIAS

BOREL, E. La théorie du jeu et les equation intégrales à noyau symétrique gauche. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, v. 173, n. 1, p. 1304–1308, 1921.

COURNOT, A. A. *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Theorie des Richesses*. Paris: L. Hachette, 1838.

FIANI, R. *Teoria dos jogos: com aplicações em economia, administração e ciências sociais*. 3. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

GIBBONS, R. *Game Theory for Applied Economists*. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 1992.

HARSANYI, J. C. Games with incomplete information played by "bayesian" players. *Management Science*, v. 14, n. 3, p. 159–182, 1967.

KUHN, H. Extensive games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 36, p. 570–576, 1950.

KUHN, H. Contributions to the theory of games. In: _____. Princeton: Princeton University Press, 1953. v. 1, cap. Extensive games and the problem of information, p. 193–216.

MYERSON, R. B. Nash equilibrium and the history of economic theory. *Journal of Economic Literature*, v. 37, p. 1067–1082, 1999.

NASH, J. F. The bargaining problem. *Econometrica*, v. 18, n. 2, p. 155–162, 1950a.

NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 36, p. 48–49, 1950b.

NASH, J. F. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics*, v. 54, n. 2, p. 286–295, 1951.

SCHELLING, T. C. *The Strategy of Conflict*. Cambridge: Harvard University Press, 1960.

SELTEN, R. Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfragetragheit. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, v. 121, n. 2, p. 301–324, 1965.

SELTEN, R. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, v. 4, n. 1, p. 25–55, 1975.

SILVERMAN, B. W. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Londres: Chapman and Hall, 1986.

VON NEUMANN, J. Zur theories der gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, v. 100, n. 1, p. 295–320, 1928.

VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 1944.

ANEXO A – QUESTIONÁRIO

Questionário

1. **Código.**

2. **Nome Completo.**
   Em letra de forma.

3. **Sua estratégia.**
   Neste espaço, escreva qual a fatia que você deseja sobre o ponto ("um") disponível para ser dividido. Lembre-se, caso a soma da fatia que você deseja e a do seu adversário exceda o ponto disponível, os dois receberão zero pontos.

4. **Sexo.**
   Marcar apenas uma oval.
   - Masculino
   - Feminino

5. **Qual a sua forma de ingresso na UFC?**
   Marcar apenas uma oval.
   - Ampla concorrência
   - Cotas

6. **Conhecimento em Teoria dos Jogos.**
   Você possui algum conhecimento em Teoria dos Jogos, como o conceito de equilíbrio de Nash, estratégias mistas ou ponto focal de Schelling?
   Marcar apenas uma oval.
   - Sim
   - Não