



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO ÍCARO MACIEL FORTE CHAVES

RIGIDEZ DA EQUIVALÊNCIA BI-LIPSCHITZ DE GERMES DE
FUNÇÕES W -HOMOGÊNEAS NO PLANO

FORTALEZA

2018

FRANCISCO ÍCARO MACIEL FORTE CHAVES

RIGIDEZ DA EQUIVALÊNCIA BI-LIPSCHITZ DE GERMES DE FUNÇÕES
W-HOMOGÊNEAS NO PLANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C438r Chaves, Francisco Ícaro Maciel Forte.
Rigidez da equivalência bi-Lipschitz de germes de funções w -homogêneas no plano. / Francisco Ícaro Maciel Forte Chaves. – 2018.
41 f. : il.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Alexandre Fernandes.
1. W -homogênea. 2. Singularidade Isolada. 3. Bi-Lipschitz. I. Título.

CDD 510

FRANCISCO ÍCARO MACIEL FORTE CHAVES

RIGIDEZ DA EQUIVALÊNCIA BI-LIPSCHITZ DE GERMES DE FUNÇÕES
W-HOMOGÊNEAS NO PLANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Aprovada em: 19 / 07 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. ALEXANDRE CÉSAR GURGEL FERNANDES (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a Dr. JOSERLAN PEROTE DA SILVA
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. EDVALTER SENA FILHO
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Dedico este trabalho ao meu filho mais velho
por todos os sábados e domingos de futebol
perdidos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por todas as bênçãos e oportunidades por ele oferecidas.

À minha família por me apoiar mesmo quando era contrária.

Agradeço ao Prof. Alberto Duarte, que me providenciou uma escalada mais suave durante a graduação e que foi um ouvido amigo durante todo tempo seguinte. Ao Prof. Alexandre Fernandes, que vem me acompanhado desde a graduação e que aceitou novamente o desafio de me orientar, desta vez, durante meu mestrado.

Aos amigos matemáticos que estavam nos momentos tão necessários de descontração às quartas ou sextas à noite desejo o melhor para todos e fico muito grato por ter tido vocês comigo. Em especial, cito o Davi Ribeiro, no qual foi prestativo em varios momentos, até mesmo momentos antes da hora exposição desse trabalho.

E por fim, agradeço ao Roger e ao Renato por serem minha plateia em meus treinos para a defesa. Sem as observações e perguntas deles, com certeza, não teria chegado ao nível de domínio de tempo e conteúdo no qual demonstrei no dia da apresentação.

”Você não percebeu que você é o único representante do seu sonho na face da terra?”
Emicida

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que, se dois germes de funções w -homogêneas (mas não homogêneas) na origem do plano complexo são bi-Lipschitz equivalentes, no sentido de que esses germes-funções podem ser incluídos em uma família fortemente bi-Lipschitz trivial, então esses germes de funções são analiticamente equivalentes.

Palavras-chave: W -homogêneo. Singularidade isolada. Bi-Lipschitz.

ABSTRACT

The main goal of this work is to show that if two germs of w -homogeneous (but not homogeneous) functions at the origin of the complex plane are bi-Lipschitz equivalent, in the sense that these germ-functions can be included in a strongly bi-Lipschitz trivial family, then these germs of functions are analytically equivalent.

Keywords: W -homogeneous. Isolated singularity. Bi-Lipschitz.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	12
2.1	O Lema de Mather	15
2.2	Fortemente Bi-Lipschitz Trivial	20
2.3	A Álgebra de \mathcal{O}_n	23
2.4	Número de Milnor	26
2.5	Polinômios W-Homogêneos	30
3	RESULTADOS	33
3.1	Resultados Intermediários	33
3.2	Resultado Final	36
4	CONCLUSÃO	39
	REFERÊNCIAS	40

1 INTRODUÇÃO

Uma questão fundamental na teoria da singularidade é o estudo das classes de equivalência de germes de aplicações geradas por uma determinada relação. No que diz respeito a germe de funções analiticamente equivalentes temos o famoso exemplo dado por Whitney em 1965, WHITNEY (1965). Seja o polinômio complexo $F(t, x, y) = xy(x - y)(x - ty)$, sua restrição para $0 < |t| < 1$

$$f_t(x, y) = xy(x - y)(x - ty)$$

define uma família de germes de funções $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ com singularidade isolada. Em WHITNEY (1965), H. Whitney justificou a rigidez da classificação analítica de germes de funções provando que: dado $t \neq s$, não há $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ germe de aplicação bi-analítica tal que $f_t = f_s \circ \phi$; isto é, f_t não é analiticamente equivalente a f_s .

Por outro lado, no que diz respeito ao ponto de vista topológico, esta família não é tão interessante, pois para qualquer $t \neq s$ existe um germe de homeomorfismo $\psi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $f_t = f_s \circ \psi$; isto é, f_t é topologicamente equivalente a f_s , como pode ser visto em KUO (1980).

No primordial paper HENRY and PARUSINSKI (2003), Henry e Parusinski consideraram a equivalência bi-Lipschitz, que está entre a analítica e a topológica, de germes de funções. Por exemplo, KOIKE and PARUSINSKI (1977) e BIRBRAIR, FERNANDES, and PANAZZOLO (2009) mostraram que, em certo sentido, para os germes de funções w-homogêneas reais em duas variáveis, o problema da classificação bi-Lipschitz é bastante "próximo" ao problema da classificação analítica. Os resultados apresentados em HENRY and PARUSINSKI (2003) mostram a rigidez da classificação bi-Lipschitz dos germes de funções. Mais precisamente, eles consideraram a família

$$f_t(x, y) = x^3 + y^6 - 3t^2xy^4 \quad ; \forall 0 < |t| < \frac{1}{2}; t \in \mathbb{C}$$

provando que dado $t \neq s$, não há $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ germe de aplicação bi-Lipschitz tal que $f_t = f_s \circ \phi$; ou seja, f_t não é equivalente bi-Lipschitz a f_s .

A estratégia usada por eles era introduzir um novo invariante baseado na observação de que um homeomorfismo bi-Lipschitz não move muito as regiões em torno das curvas polares. Para um único germe f , o invariante é dado em termos dos coeficientes principais das expansões assintóticas de f ao longo dos ramos das suas curvas polares genéricas. No caso da trivialidade bi-Lipschitz de uma família de germes de funções, integrar um campo vetorial Lipschitz, aqui chamado de fortemente bi-Lipschitz trivial, os cálculos são muito mais fáceis e muito ilustrativos.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que, se dois germes de funções

w-homogêneas (mas não homogêneas) $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ são equivalentes bi-Lipschitz, no sentido de que estes germes-função podem ser inclusos em uma família fortemente bi-Lipschitz trivial de germes de funções w-homogêneas, então eles são analiticamente equivalentes.

2 PRELIMINARES

Para fazer justiça, essa seção foi praticamente retirada de GIBSON (1979) e EBELING (2007).

Observação:

Denotaremos por \mathcal{O}_n o anel dos germes de funções analíticas na origem $0 \in \mathbb{C}^n$, \mathcal{M} o ideal maximal de \mathcal{O}_n e J_f o ideal gerado pelas derivadas parciais de f , $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$.

Definição 2.1 *Um grupo de Lie é um grupo que também é uma variedade suave de dimensão finita, na qual as operações de multiplicação e inversão do grupo são aplicações suaves.*

Exemplo: O espaço euclidiano real de dimensão n , \mathbb{R}^n , visto como um grupo aditivo \diamond

Exemplo: O grupo linear de todas as aplicações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, GL_n , com a operação de multiplicação de matrizes \diamond

Exemplo: Seja $n \geq 1$. O grupo $GL_n(k)$ (onde $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) das matrizes invertíveis n por n é um grupo de Lie, visto que a operação multiplicação de matrizes é contínua, já que se A e B são matrizes, então as entradas de AB são somas de produtos de entradas de A e B . \diamond

Definição 2.2 *Uma ação suave de grupo é uma aplicação suave $\Phi : G \times M \rightarrow M$ de um grupo de Lie G sobre uma variedade suave M tal que para $\forall x \in M$, $g, h \in G$ e e sendo o elemento unidade do grupo G*

1. $\Phi(e, x) = x$
2. $\Phi((gh), x) = \Phi(g, (\Phi(h, x)))$.

Denotamos por $H^d(n, p)$ os espaço das aplicações diferenciáveis $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ **Exemplo:** Seja o GL_n o grupo linear de todas as aplicações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sob a operação de composição, ou seja, multiplicação de matrizes. Verificasse que temos uma ação do grupo $GL_n \times GL_p$ sobre o espaço vetorial $H^d(n, p)$ dada por

$$(H, K) \bullet f = K \circ f \circ H^{-1}.$$

\diamond

Denotaremos ações $\Phi : G \times M \rightarrow M$ como as definidas acima por $(g, x) \mapsto g \bullet x$.

Definição 2.3 *Fixada uma ação suave de grupo, chamamos de órbita de um elemento x de M a classe de equivalência de x com respeito à relação de equivalência \sim determinada por $x \sim y$ se existir $g \in G$ tal que $y = g \bullet x$.*

Antes de nos voltarmos para exemplos, notemos um pequeno ponto geométrico. Sejam x_1, x_2 pontos de uma variedade M que pertencem a uma mesma órbita, então existe $g \in G$ com $x_2 = g \bullet x_1$. Observe que a aplicação $M \rightarrow M$ definida por $x \mapsto g \bullet x$ é uma transformação de M (isto é, uma bijeção de M em si) que preserva órbitas - por essa frase

queremos dizer que um ponto é sempre mapeado para outro ponto na mesma órbita - e que mapeia x_1 para x_2 .

Exemplo: Voltando nosso olhos para o espaço $H_1^d(n, 1)$ no qual os elementos são polinômios homogêneos de grau d nas coordenadas x_1, \dots, x_n . Então, desde que não sejam zero, $p \in H_1^d(n, 1)$ irá definir uma hipersuperfície de grau d no espaço projetivo real $\mathbb{P}R^n$ de dimensão $(n - 1)$. Por exemplo quando $n = 2$ estamos lidando com d pontos em uma linha projetiva, quando $n = 3$ com uma curva de grau d no plano projetivo, e assim por diante.

Dois elementos de $H_1^d(n, 1)$ estarão na mesma órbita se e somente se as hipersuperfícies correspondentes podem ser obtidas umas das outras por uma mudança de coordenadas linear inversível, isto é, são projetivamente equivalentes. A caso de curiosidade, a dificuldade de listar as órbitas aumenta acentuadamente ao passo que d cresce.

◇

Uma grande dificuldade que se apresenta ao estudar órbitas é o de como calcular os espaços tangentes à elas. A proposição 2.1 vai servir de apoio para essa tarefa. Antes disso, apesar de sua enorme aplicação em várias áreas da matemática, enunciarei formalmente o Teorema de Sard a título de completude desse trabalho.

Teorema 2.1 [de Sard] *Seja $f_i : N_i \rightarrow P$ uma família enumerável de aplicações suaves. Então o conjunto de valores regulares comuns as f_i é denso em P .*

Prova. Ver GIBSON (1979). ■

Proposição 2.1 *Seja $\Phi : G \times M \rightarrow M$ uma ação suave de um grupo de Lie G sobre uma variedade suave M onde todas as órbitas são subvariedades suaves de M . Então para qualquer ponto $x \in M$ a aplicação $\Phi_x : G \rightarrow G \bullet x$ tal que $g \mapsto g \bullet x$ é uma submersão.*

Prova. A demonstração se divide em duas partes a primeira é a seguinte,

Afirmção 1 : *A aplicação Φ_x tem posto constante em todo ponto de G .*

Prova. É suficiente provar que o posto de Φ_x em qualquer ponto $h \in G$ é igual ao de $e \in G$. Sejam $\alpha : G \rightarrow G$ e $\beta : M \rightarrow M$ difeomorfismos definidos por $g \mapsto hg$ e $y \mapsto h \bullet y$ respectivamente. O diagrama de aplicações suaves à esquerda comuta e então implica o da direita. As setas verticais no diagrama de diferenciais são isomorfismos, então as aplicações $T_e\Phi_x$ e $T_h\Phi_x$ têm o mesmo posto.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\Phi_x} & G \bullet x \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 G & \xrightarrow{\Phi_x} & G \bullet x \\
 & & \Phi_x
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T_h G & \xrightarrow{T_e \Phi_x} & T_x G \bullet x \\
 T_e \alpha \downarrow & & \downarrow T_x \beta \\
 T_e G & \xrightarrow{T_h \Phi_x} & T_{h \bullet x} G \bullet x \\
 & & T_h \Phi_x
 \end{array}$$

■

Tendo provado a afirmação, agora a segunda parte é mostrar que Φ_x é submersão em qualquer ponto de G . Mas isso segue diretamente do Teorema de Sard que garante a existência de pelo menos um valor regular na imagem de Φ_x . ■

Uma consequência dessa proposição, como já dito anteriormente, é facilitar o cálculo do espaço tangente $T_x(G \bullet x)$ à uma órbita. A saber, o espaço tangente $T_x(G \bullet x)$ é a imagem do espaço tangente $T_e G$ sobre o diferencial $T_e \phi_x$. Uma amostra de como usar esta proposição é o seguinte exemplo.

Exemplo:

Sejam $\mathcal{R}(n, n)$ o grupo de germes de difeomorfismo analítico $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, $H_1^d(n, p)$ o grupo de todas as aplicações de $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ cujo cada um das componentes (em relação as coordenadas padrão do \mathbb{C}^p) é um polinômio homogêneo de grau d nas coordenadas x_1, \dots, x_n em \mathbb{C}^n e a ação $\Phi : \mathcal{R}(n, n) \times H_1^d(n, p) \rightarrow H_1^d(n, p)$ talque $(H, F) \mapsto F \circ H$.

Observação: Note a diferença entre as notações de $H_1^d(n, p)$ e de $H^d(n, p)$.

Calculamos a imagem do diferencial da seguinte forma. Seja e_1, \dots, e_{2n} denotando os vetores de base padrão em \mathbb{C}^n , e para $1 \leq i, j \leq 2n$ seja $\Delta_{i,j} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ seja a aplicação linear que mapeia e_j para e_i , e os vetores base restantes para 0.

Considere agora as curvas γ_{ij} em $\mathcal{R}(n, n)$ através de \mathbf{e} , o elemento unidade do grupo, dadas por $\gamma_{ij}(t) = \mathbf{e} + t\Delta_{ij}$ com t numa vizinhança de 0. Evidentemente, as derivadas dessas curvas em \mathbf{e} geram uma base para o espaço vetorial $M(n)$ das aplicações lineares de $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, que é o espaço tangente para $\mathcal{R}(n, n)$. Segue-se que a imagem do diferencial em \mathbf{e} para $H \rightarrow F \circ H$ será gerado pelas derivadas em 0 das curvas $F \circ \gamma_{ij}$, ou seja, as derivadas em 0 com respeito a t de $F(x_1, \dots, x_j + tx_i, \dots, x_n)$, que, pela Regra da Cadeia, são $x_i \frac{\partial F}{\partial x_j}$.

Agora, considere a aplicação $K \rightarrow K \circ F$: essa é a restrição de uma aplicação linear, assim coincidirá com seu diferencial em \mathbf{e} , e a imagem será gerada por todos os $G = (g_1, \dots, g_p)$ com apenas um g_i igual a um f_j , e todos os outros g 's zero.

◇

Outro resultado de suma importância para esse trabalho, mas que é suficientemente conhecido para permitir a omissão de sua demonstração é o

Proposição 2.2 [Teorema Fundamental das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem] *Considere o problema de valor inicial*

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Se $f(t, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ são contínuas no retângulo $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}; a < t < b \text{ e } \delta < y < \gamma\}$ contendo (t_0, y_0) , então o problema (1) tem uma única solução em um intervalo contendo

t_0 .

As Proposições 2.1 e 2.2 serão usadas para provar o Lema de Mather, que é a primeira peça do quebra-cabeça para a construção desse trabalho. Tal lema é fundamental para a continuação desse texto e por esse motivo foi deslocado para uma outra seção. Na seção que leva nome desse lema, a próxima, se encontra mais um outra proposição que é igualmente importante, o Teorema de Thom-Levine, pois deu inspiração para o resultado almejado no artigo gerador dessa dissertação.

2.1 O Lema de Mather

Teorema 2.2 [Lema de Mather]

Sejam $m : G \times M \rightarrow M$ uma ação suave e $P \subset M$ um subvariedade conexa e suave. Então P está contida numa única órbita da ação se

- (a) $T_x(G \bullet x) \supset T_x P$, para todo $x \in P$.
- (b) $\dim T_x(G \bullet x)$ é constante para $x \in P$.

Antes de provarmos o Lema de Mather, mostraremos a importância das duas condições ocorrerem simultaneamente.

1. Satisfazendo a condição (a).

Seja G o subgrupo de matrizes em $GL(2, \mathbb{R})$ que preservam o eixo- x . Então

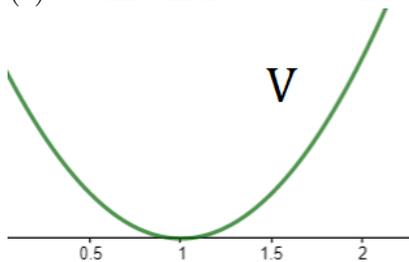
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}.$$

Seja $M = \mathbb{R}^2$ e suponha que a ação é dada por

$$A \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Existem três órbitas, $(0, 0)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0; x < 0 \vee x > 0\}$ e o complementar do eixo x .

Comando $P = V$ onde V é o gráfico de $y = (x - 1)^2$. Então P satisfaz (a), mas não (b) e também não está contida em uma só órbita (Figura abaixo).



2. Satisfazendo a condição (b).

Seja a ação $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ dada por

$$(a, (x, y)) \mapsto (x, y) + (0, a).$$

Suas órbitas são todas as retas verticais em \mathbb{R}^2 .

Fazendo $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$ satisfaz (b), mas não (a) e conseqüentemente não está contida em uma única órbita.

Mostrado esses exemplos, rumamos à provar o Lema de Mather.

Prova. Antes de atacar o resultado, usemos a Proposição 2.1 para fazer uma pequena mudança no enunciado do problema. Dada a aplicação $m_x : G \rightarrow M$, $g \mapsto g \bullet x$ as condições (1) e (2) se equivalem as seguintes proposições

(a') $dm_x(\mathbf{e})(T_{\mathbf{e}}G) \supset T_xP$, para todo $x \in P$.

(b') O posto da aplicação $dm_x(\mathbf{e})$ é constante.

Feito esse ajuste, definamos L_x para ser o complemento ortogonal do kernel da aplicação $dm_x(\mathbf{e})$ para $x \in P$, $L = \bigcup_{x \in P} (x \times L_x)$. Mais ainda se fizermos

$$L_x^0 = L_x \cap (dm_x(\mathbf{e}))^{-1}(T_xP) \text{ e } L^0 = \bigcup_{x \in P} (x \times L_x^0)$$

L^0 é um subconjunto de L e a diferencial $dm_x(\mathbf{e})$ induz um isomorfismo de fibrados vetoriais L^0 sobre o fibrado tangente de P , $L^0 \xrightarrow{\sim} TP$; $(x, v) \mapsto (x, dm_x(\mathbf{e})v)$. A saber $(x, v) \mapsto (x, dm_x(\mathbf{e})v)$ é claramente injetivo e é sobrejetivo pois $T_xP \subset dm_x(\mathbf{e})(T_{\mathbf{e}}G)$.

Seja $F = (id, f) : TP \rightarrow L^0$ o isomorfismo inverso, onde id representa a aplicação identidade, e $p : P \times T_{\mathbf{e}}G \rightarrow T_{\mathbf{e}}G$ a projeção na segunda coordenada.

Teremos que a $p \circ F$ é uma aplicação suave satisfazendo

$$dm_x(\mathbf{e})(p \circ F(v)) = v, \quad \forall v \in T_xP$$

A variedade P sendo conexa, qualquer dois pontos nela podem ser ligados por um caminho suave em P . Então é suficiente mostra que qualquer caminho suave $c : [0, 1] \rightarrow P$ tem imagem contida numa única órbita.

Seja $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}P$ o correspondente vetor tangente, definamos

$$X_t = p(F(\dot{c}(t))) \in T_{\mathbf{e}}G,$$

$$\overline{X}_t(\mathbf{e}) = X_t$$

e

$$\overline{X}_t(g) = dR_g(\mathbf{e})(X_t),$$

onde $R_g(h) = gh$.

Para $t_0 \in [0, 1]$, considere a seguinte equação diferencial ordinária

$$(1) \quad \dot{a}(t) = \overline{X}_t(a(t)), \quad a(t_0) = \mathbf{e}.$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução $a : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow G$ para (1). Então

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(t)^{-1}(t) \bullet c(t)) = 0$$

assim $a(t)^{-1}(t) \bullet c(t) = c(t_0)$. Mostrando que $c(t)$ se mantém numa única órbita para $|t - t_0| < \epsilon$. Como o intervalo é conexo, temos que a imagem de c está de fato contida numa única órbita da ação. ■

A prova do Teorema 2.3 motivou a definição de uma família fortemente bi-Lipschitz trivial e conseqüentemente o paper que gerou esse trabalho.

Teorema 2.3 [Teorema de Thom-Levine]

Seja U um domínio em \mathbb{C} , W uma vizinhança de 0 em \mathbb{C}^n e $F : W \times U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(0, t) = 0$. Denotando $f_t(x) = F(x, t) \forall t \in U, \forall x \in W$. Se houver uma família de campos vetoriais analíticos $v : W \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$, $v(0, t) = 0$ para todos $t \in U$ e

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(x) = (df_t)(x)(v_t(x))$$

$\forall t \in U, \forall x \in W$, então f_t é analiticamente equivalente à f_s para qualquer $t, s \in U$.

Para prova-ló precisaremos de algumas definições:

Definição 2.4 Seja $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função. Uma **deformação p -parâmetro** de f é um germe F de função analítica na origem de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^n$ tal que

$$F_0(x) = F(0, x) = f(x).$$

Definição 2.5 Duas deformações p -parâmetro, F e G , de um mesmo germe $f \in \mathcal{O}_n$ são **isomorfas**, se existe um difeomorfismo local ϕ na origem em $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^n$ tal que

1. $\phi(t, x) = (t, \psi(t, x))$ e $\phi(0, x) = (0, x)$
2. $G = F \circ \phi$.

Definição 2.6 Uma deformação é dita **trivial** se ela é isomorfa à deformação constante

$$(t, x) \mapsto f(x)$$

Com todas essas definições estamos capacitados para provar o resultado seguinte.

Proposição 2.3 Uma deformação um-parâmetro F de um germe de função f em \mathcal{O}_n é trivial se e somente se existe um germe de campo vetorial X na origem de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ da

seguinte forma

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

tal que $X \cdot F = 0$

Prova.

(\Rightarrow)

Se F é trivial, existe $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo tal que

$$f(x) = F(t, \psi(t, x)).$$

Diferenciando em respeito à t ,

$$0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i(t, x)}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

fazendo $X(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i(t, x)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i}$ chegamos ao resultado.

(\Leftarrow)

Dado um campo C^∞ definido em um aberto de $\mathbb{R} \times \{0\}$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que tem a seguinte forma

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

As orbitas do campo X em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ são curvas integrais do sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$(1) \frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Definindo $t \mapsto (t, \phi(t, x))$ onde $\phi(t, x)$ uma solução de (1) com condição inicial $x_i(0, x) = x$.

Pelo teorema fundamental das equações diferenciais de primeira ordem temos que existe $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contendo $[0, 1] \times \{0\}$ tal que para cada $t \in [0, 1]$, a aplicação

$$\Phi_t : U_0 \rightarrow U_t$$

$$x \mapsto \phi(t, x)$$

onde $U_t = \{x \in \mathbb{R}^n / (t, x) \in U\}$ é um difeomorfismo com $\Phi(0, x) = x$. Assim, $\Psi(t, x) = (t, \Phi(t, x))$ também é um difeomorfismo satisfazendo,

$$f(x) = F(\Psi(0, x)) = F(0, \Phi(0, x)).$$

Como $X \cdot F = 0$ a regra da cadeia nos dá

$$\frac{\partial F(\Psi)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_i(t, x)}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i(t, x)}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

o que mostra que $F \circ \Psi$ não depende de t e assim sendo uma deformação um parâmetro trivial. ■

A demonstração do Teorema 2.3 sai de uma aplicação direta dessa última proposição, mas se caso dúvidas ainda persistirem, consultar MARTINET (1982).

2.2 Fortemente Bi-Lipschitz Trivial

Motivado pelo Teorema de Thom-Levine para a equivalência analítica de germes de funções, Teorema 2.3, e pela vontade de estudar as equivalência bi-Lipschitz de germe de funções analíticas definimos a seguinte noção de trivialidade bi-Lipschitz de uma família de germes de funções.

Definição 2.7 *Seja f_t , $t \in U$, um domínio em \mathbb{C} , uma família de germes de funções analíticas, ou seja, existe uma vizinhança W de 0 em \mathbb{C}^n e uma função analítica $F : U \times W \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(t, 0) = 0$ e $f_t(x) = F(t, x) \forall t \in U, \forall x \in W$. Nós chamamos f_t de **fortemente bi-Lipschitz trivial** quando há uma família contínua de campos vetoriais Lipschitz $v_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, onde a constante de Lipschitz de v_t não depende de t , tal que*

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(x) = (df_t)(x)(v_t(x))$$

$\forall x \in W, \forall t \in U$.

Definição 2.8 *Dois germes de função $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ são chamados de **bi-Lipschitz equivalente** se existe um germe de aplicação bi-Lipschitz $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $f = g \circ \phi$.*

O próximo resultado mostra que se incluirmos dois germes de função f e g em uma família fortemente bi-Lipschitz trivial de germes de funções, então os dois germes de funções iniciais f e g são bi-Lipschitz equivalentes.

Para provar-ló precisaremos de um corolário decorrente do Lema de Gronwall. A afirmação é que se f satisfaz a condição Lipschitz então, para t fixo e ϕ uma solução de

$$\dot{x} = f(t, x)$$

é Lipschitz relativamente a x .

Lema 2.1 (Gronwall) *Sejam $\alpha \geq 0$ uma constante, $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções positivas contínuas tais que*

$$u(t) \leq \alpha + \int_t^{t_0} u(s)v(s)ds, \forall t \in I.$$

Então vale

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_t^{t_0} v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0, u \equiv 0$.

Com a mesma notação do lema anterior:

Corolário 2.1 *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, e Lipschitziana com respeito à segunda variável, digamos*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Então, $\forall t \in B_{t_0, x_0} \cap B_{t_0, y_0}$ temos

$$|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, y_0)| \leq e^{K|t-t_0|} |x_0 - y_0|.$$

Para consultar a demonstração do Lema de Gronwall e sua consequência consultar SOTOMAYOR (1979).

Teorema 2.4 *Se f_t é fortemente bi-Lipschitz trivial, então f_t é bi-Lipschitz equivalente para f_s para qualquer $t, s \in U \subset \mathbb{C}$.*

Prova.

Sejam $F : U \times W \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $F(t, 0) = 0$ e $f_t(x) = F(t, x) \forall t \in U, \forall x \in W$ e $v_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ uma família contínua de campos vetoriais Lipschitz onde a constante Lipschitz não depende de t e tal que

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(x) = (df_t)(x)(v_t(x)).$$

Sejam as equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(t, x) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

onde $v_i(t, x)$ é a i -ésima coordenada de $v_t(x)$.

Seja $\phi(t, x)$ uma solução de (1) com condição inicial $x_i(0, x) = x$. Note que $v_i(t, x)$ é contínua e satisfaz a condição Lipschitz na segunda coordenada.

Assim pela Proposição 2.1 temos que existe $B \times V \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ tal que para cada $t \in B$, a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_t : V_0 &\rightarrow V_t \\ x &\mapsto \phi(t, x) \end{aligned}$$

onde $V_t = \{x \in \mathbb{C}^n / (t, x) \in B \times V\}$ é Lipschitz com $\Phi_t(0, x) = x$.

Então o germe de aplicação, $\Psi(t, x) = (t, -\phi(t, x))$ é bi-Lipschitz, pois o fluxo de para (1) é bi-Lipschitz, satisfazendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\Psi(t, x))}{\partial t} &= \frac{\partial F(t, -\phi(t, x))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_1(t, x)}{\partial t} \dots - \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial \phi_n(t, x)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f_t}{\partial t} - \frac{\partial f_t}{\partial x_1} v_1(t, x) \dots - \frac{\partial f_t}{\partial x_n} v_n(t, x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_1(t, x)}{\partial t} \dots + \frac{\partial f_t}{\partial x_n} \frac{\partial \phi_n(t, x)}{\partial t} = (df_t(x))(\Psi(t, x)).$$

Logo $F \circ \Psi$ não depende de t mostrando que para qualquer $t \in U$, f_t é bi-Lipschitz equivalente a f_0 . Assim qualquer dois $t, s \in U$ são bi-lipchitz equivalentes por composição de bi-Lipschitz.

■

2.3 A Álgebra de \mathcal{O}_n

Essa seção se destina a dar uma breve introdução sobre a álgebra presente no anel \mathcal{O}_n . Dito isso começamos como a

Proposição 2.4 *O anel \mathcal{O}_n de germes de função holomorfas na origem em \mathbb{C}^n é isomorfo ao anel $\mathbb{C}\{z\}$ da série de potências convergentes em 0.*

Prova. Definindo a aplicação

$$\Phi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbb{C}\{z\}$$

que associa um germe de função holomorfa representada por uma função holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ para sua expansão da série de potência em 0.

Esta aplicação está bem definida pois dois representantes do mesmo germe concordam em uma vizinhança aberta de 0 e, portanto, possuem a mesma expansão de série de potências em 0.

A aplicação Φ é sobrejetora. Uma série de potência $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ convergente em um polidisco em torno de 0 define uma função holomorfa, assim um germe de função holomorfa.

A aplicação Φ é também injetora, pois esse germe de função é exclusivamente determinado. É claro que Φ respeita as operações do anel e então é um isomorfismo de anéis. ■

Proposição 2.5 *O anel \mathcal{O}_n é um domínio de integridade, ou seja, para todos $f, g \in \mathcal{O}_n$ segue de $fg = 0$ que $f = 0$ ou $g = 0$.*

Prova. Sejam $f', g' \in \mathcal{O}_n$ com $f'g' = 0$. Os germes f', g' são representados por funções holomorfas $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ onde U é uma vizinhança aberta de 0. De $fg = 0$ segue que $f(z)g(z) = 0$ para todo $z \in V \subset U$, onde V é uma vizinhança aberta conexa de 0. Se $f(w) \neq 0$ para algum $w \in V$, então $f(z) \neq 0$ para todo $z \in W$, com W uma vizinhança de w . Então $g(z) = 0$ para todo $z \in W$. Pelo Teorema da Identidade para funções holomorfas segue-se que $g(z) = 0$ para todos $z \in V$ e, portanto, $g = 0$. ■

Proposição 2.6 *As unidades do anel \mathcal{O}_n são precisamente os germes de função f com $f(0) \neq 0$.*

Prova.

- (a) Se $f \in \mathcal{O}_n$ é uma unidade, existe um $g \in \mathcal{O}_n$ tal que $fg = 1$, em particular $f(0)g(0) = 1$, então $f(0) \neq 0$.
- (b) Agora, inversamente, seja f um representante de um germe de função holomorfa de \mathcal{O}_n com $f(0) \neq 0$. Então, por continuidade, $f(z) \neq 0$ para todo z em uma vizinhança aberta U de 0. Então $1/f$ está bem definida e é contínua em U . Agora $1/f$ é holomorfa em cada variável. Assim $1/f$ é holomorfa em U , donde $1/f \in \mathcal{O}_n$. ■

Proposição 2.7 *O anel \mathcal{O}_n é um anel local*

Prova.

Sabemos que um anel R é local se e somente se suas não unidades formarem um ideal I . Se R é local, então I é seu ideal maximal. Então é suficiente mostrar que os elementos de \mathcal{O}_n que não são unidades formam um ideal em \mathcal{O}_n . Pela Proposição 2.6 estes são justamente os germes de função holomorfas f com $f(0) = 0$. Se f é tal germe e $g \in \mathcal{O}_n$ é um germe de função arbitrária, então $fg(0) = f(0)g(0) = 0$. Assim

$$m = \{f \in \mathcal{O}_n | f(0)\}$$

é um ideal em \mathcal{O}_n . Então \mathcal{O}_n é um anel local como ideal maximal m . ■

Definição 2.9 *Uma série de potências $g(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ é chamada de regular de ordem k em z_{n+1} se $g(0, \dots, 0, z_{n+1})$ é uma série de potências em z_{n+1} de ordem k .*

Lema 2.2 *Se $g(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ é uma série de potências convergente de ordem $k < \infty$, então $g(z')$, onde z'_1, \dots, z'_{n+1} são coordenadas apropriadas de \mathbb{C}^{n+1} obtidas por uma mudança linear de coordenadas de z_1, \dots, z_{n+1} , é regular de ordem k em z'_{n+1} .*

Proposição 2.8 (Teorema de Divisão de Weierstrass) *Sejam $f, g \in \mathbb{C}\{z, t\}$ tal que g é regular de ordem k em t . Então existe uma única série de potências $q \in \mathbb{C}\{z, t\}$ e um polinômio r unicamente determinado em $\mathbb{C}\{z\}[t]$ de grau $\leq k - 1$ com*

$$f = qg + r$$

Para a prova do Lema 2.2 e da Proposição 2.8 consultar EBELING (2007).

Teorema 2.5 (Teorema da Base de Hilbert) *Todo ideal no anel de polinômios em várias variáveis sobre um anel Noetheriano é finitamente gerado.*

Para maiores esclarecimento a respeito dessa afirmação veja LANG (2002).

Finalizando essa seção de propriedades algebricas de \mathcal{O}_n , mostrarei que esse anel é Noetheriano.

Proposição 2.9 *O anel $\mathcal{O}_n \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ é Noetheriano.*

Prova. Provamos o teorema por indução em n .

Quando $n = 0$; $\mathcal{O}_0 \cong \mathbb{C}$ é um corpo, então é trivialmente um anel Noetheriano.

Seja $I \subset \mathcal{O}_0$, um ideal e $g \in I$, $g \neq 0$. Podemos assumir que, após uma mudança de coordenadas, se necessário, g é regular de ordem k em z_n . Pela hipótese de indução \mathcal{O}_{n-1} é Noetheriano. Pelo Teorema de Base de Hilbert, o anel $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é Noetheriano. Segue que o ideal $I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é finitamente gerado por elementos $g_1, \dots, g_i \in I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

Agora seja $f \in I$. Pelo Teorema da Divisão de Weierstrass, f pode ser escrita como

$$f = qg + r$$

com $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

Desde que $f \in I$ e $g \in I$, temos

$$r = f - qg \in I$$

então $r \in I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Assim, existem $a_1, \dots, a_l \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ com

$$r = a_1g_1 + \dots + a_lg_l.$$

Segue que

$$f = qg + a_1g_1 + \dots + a_lg_l.$$

Logo provamos que g, g_1, \dots, g_l geram o ideal I . ■

2.4 Número de Milnor

Definição 2.10 Chamamos de **Número de Milnor** $\mu(f)$ a dimensão do espaço $\frac{\mathcal{O}_n}{J_f}$, onde J_f denota o ideal de \mathcal{O}_n gerado pelas derivadas parciais de f .

Uma bonita e simples relação entre o Número de Milnor e os ponto singulares é mostrada na seguinte proposição.

Proposição 2.10 *Suponha que o germe f em \mathcal{O}_n tenha Número de Milnor positivo e finito. Então a origem em \mathbb{C}^n é um ponto singular isolado de qualquer representante de f , ou seja, existe uma vizinhança da origem em que 0 é o único ponto singular do representante.*

Prova.

Observe primeiro que $0 \in \mathbb{C}^n$ deve de fato ser um ponto singular de (qualquer representante de) f . De fato, se alguma derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial z_i}(0) \neq 0$ então $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ seria um elemento invertível de \mathcal{O}_n , então $J_f = \mathcal{O}_n$ e f teria Número de Milnor zero. Como f tem Número de Milnor finito temos, $\mathcal{M}_n^k \subset J_f$ para algum inteiro $k > 1$. Em particular, isso significa que os monômios x_1, \dots, x_n podem ser escritos como combinações lineares de $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ com coeficientes em \mathcal{O} . Em um ponto singular de f todas essas derivadas parciais devem se anular, então x_1, \dots, x_n devem se anular também, ou seja, o ponto singular em questão deve ser 0. ■

Exemplo:

Considere o germe $f(x, y, z) = y^2 - z^2x^2 + x^3$. Aqui o derivadas parciais são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2z^2x + 3x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2zx^2$$

nas quais se anulam simultaneamente no eixo z . Assim a origem no \mathbb{C}^3 não é um ponto isolado de f , e pela Proposição 2.10 nos diz que f deve ter Número de Milnor infinito.

◇

Definição 2.11 *Seja I um ideal de \mathcal{O}_n chamamos de **codim I** a dimensão do espaço quociente $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$*

Um resultado algébrico útil para provar um proposição que facilitará muito nossa vida quando desejamos calcular o Número de Milnor de um germe é a seguinte proposição

Proposição 2.11 *Seja M um \mathcal{O} -módulo com uma base finita, e seja $I \subset M$ um submódulo \mathcal{O} -módulo. Uma condição necessária e suficiente para I ter codimensão finita em M é que exista um inteiro $k \geq 1$ com $\mathcal{M}^k M \subset I$.*

Proposição 2.12 *Sob as hipóteses da Proposição 2.11 uma condição necessária e suficiente para $I \subset M$ ser de codimensão finita em M é que todos, a menos de uma finidade*

de $\text{codim}_k I$ sejam nula; e nesse caso

$$\text{codim } I = \text{codim}_0 I + \text{codim}_1 I + \dots$$

onde

$$\text{codim}_k I = \dim \frac{I + \mathcal{M}^k M}{I + \mathcal{M}^{k+1} M}.$$

Para referência das Proposições 2.11 e 2.12 consultar GIBSON (1979).

Para calcular a codimensão, e conseqüentemente o Número de Milnor, procedemos da seguinte maneira. Suponha que $\mu(f)$ seja finito. A ideia é calcular $\mu(f)$ usando a Proposição 2.12. Vamos abreviar $\text{codim}_k J_f$ para $\text{codim}_k f$: sabemos que

$$\mu(f) = \text{codim } f = \text{codim}_0 f + \text{codim}_1 f + \dots$$

então devemos calcular sucessivamente $\text{codim}_0 f, \text{codim}_1 f, \dots$ até chegarmos a uma resposta zero e, em seguida, adicione a lista de números inteiros assim obtidos. Os aspectos práticos da questão faz valer a pena o processo.

Para calcular o $\text{codim } f$ temos que encontrar uma base para um suplemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$ em $J_f + \mathcal{M}^k$; claramente, isso pode ser extraído de uma lista de monômios de grau k nas n variáveis x_1, \dots, x_n que não estão em $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$. O primeiro passo neste cálculo é sempre trivial, pois $\text{codim}_0 f = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_n} = 1$.

Na prática, tomasse sucessivamente $k = 1, 2, 3, \dots$; e para cada k temos que decidir para cada monômio de grau k na variáveis x_1, \dots, x_n se ele está ou não no ideal $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$. Uma observação que permite economizar bastante trabalho é que, se esta condição é válida para algum monômio m , então ela é automaticamente verdadeira para todos os seus descendentes, ou seja, os monômios que podem ser obtidos a partir de m , multiplicando-os por algum outro monômio.

Vale a pena tomar nota que decisão sobre se determinado monômio reside no respectivo ideal pode muito bem envolver um pouco de trabalho. Um caso que frequentemente aparece em prática é para $n = 2$. Aqui, os monômios são em duas variáveis x, y podem ser convenientemente exibidos como no seguinte arranjo

$$\begin{array}{cccc} x & y & & \\ & x^2 & xy & y^2 \\ & & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{array}$$

Devemos trabalhar a partir do topo do arranjo para baixo. Uma maneira simples de gravar os resultados dos cálculos é o seguinte. Suponha que alcançamos a k^{th} linha do arranjo, isto é, os monômios de grau k . Sublinhe aqueles monômios que aparecem

no ideal $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$ e depois sublinhe todos os seus descendentes no arranjo, evitando assim trabalho desnecessário. Para o restante dos monômios selecione um suplemento para $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$ em $J_f + \mathcal{M}^k$; o número de monômios selecionados é o valor de $\text{codim}_k f$.

O cálculo termina sempre que alcançarmos uma fila de monômios que podem ser todos sublinhados. A codimensão, e o Número de Milner, é a soma desses $\text{codim}_k f$, mais um, porque devemos que adicionar $\text{codim}_0 f = 1$, assumindo que f é um germe com singularidade isolada.

Para ilustrar o que foi dito acima, farei dois exemplos usando o método descrito acima.

Exemplo: Vamos calcular $\mu(f)$ de $f(x, y) = x^2y + y$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 4y^3$$

se anulam simultaneamente apenas na origem, então f tem Número de Milnor finito. Nós escrevemos o arranjo de monômios em x, y . Nenhum dos x, y está em $J_f + \mathcal{M}^2$. Para x^2, xy, y^2 os dois primeiros certamente estão em $J_f + \mathcal{M}^3$ como $x^2 = \frac{\partial f}{\partial y} - 4y^3, xy = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}$, mas y^2 não. Assim, sublinhamos x^2, xy e todos os seus descendentes no arranjo - ou seja, x^3, xy, xy^2 na terceira linha e x, x^3y, x^2y^2, xy^3 na quarta linha e assim por diante. Os monômios grau 3 apenas y^3 precisa ser considerado, e ele não está em $J_f + \mathcal{M}^4$. Dos monômios de grau 4 só precisa ser considerado, e está em $J_f + \mathcal{M}^5$ pois $y^4 = \frac{1}{4}y \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{8}x \frac{\partial f}{\partial x}$. Assim, todos os monômios de grau 4 estão em $J_f + \mathcal{M}^4$ e assim o cálculo está terminado. O Número de Milnor é o total de monômios que não foram sublinhados (x, y, y^2, y^3) mais um, então $\mu(f) = 5$.

$$\begin{array}{cccccc} x & y & & & & \\ \underline{x^2} & \underline{xy} & y^2 & & & \\ \underline{x^3} & \underline{x^2y} & \underline{xy^2} & y^3 & & \\ \underline{x^4} & \underline{x^3y} & \underline{x^2y^2} & \underline{xy^3} & y^4 & \\ \underline{x^5} & \underline{x^4y} & \underline{x^3y^2} & \underline{x^2y^3} & \underline{xy^5} & \underline{y^5} \end{array}$$

◇ . **Exemplo:** O germe $f(x, y) = x^3 + xy^3$ tem Número de Milnor finito, $\mu(f) = 7$. O cálculo é muito semelhante ao do exemplo anterior, então omitirei o texto, mas manterei o arranjo dos monômios.

$$\begin{array}{cccccc} x & y & & & & \\ \underline{x^2} & xy & y^2 & & & \\ \underline{x^3} & \underline{x^2y} & \underline{xy^2} & y^3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{x^4} & \underline{x^3y} & \underline{x^2y^2} & \underline{xy^3} & \underline{y^4} & \\ \underline{x^5} & \underline{x^4y} & \underline{x^3y^2} & \underline{x^2y^3} & \underline{xy^5} & \underline{y^5} \end{array}$$

◇

2.5 Polinômios W-Homogêneos

Definição 2.12 *Seja $w = (w_1, \dots, w_n)$ uma n -upla de números inteiros positivos. Dizemos que uma função polinomial $f(x_1, \dots, x_n)$ é **w-homogêneo de grau d** se $f(s^{w_1}x_1, \dots, s^{w_n}x_n) = s^d f(x_1, \dots, x_n)$ para todo $s \in \mathbb{C}^*$.*

Observação: Denotamos $H_w^d(n, 1)$ o espaço de polinômios w -homogêneos de n variáveis de grau d .

Definição 2.13 *O **espaço k -jato** $J^k(n, p)$ é o espaço vetorial complexo de todas as aplicações $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ cujos componentes é um polinômio de grau menor ou igual à k nas coordenadas padrões x_1, \dots, x_n em \mathbb{C}^n com termo constante zero: os elementos de $J^k(n, p)$ serão chamados de k -jatos.*

Suponha que $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é uma aplicação analítica, e que $a \in \mathbb{C}^n$. Se na série de Taylor de $f(x) - f(a)$ na origem (expressa em termos das coordenadas padrão em $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p$), excluimos todos os termos de grau maior igual à k o resultado pode ser pensado como um k -jato, no qual escreve-se $j^k f(a)$ e chama-o de **k -jato de f em a** .

Proposição 2.13 *Seja $f \in \mathcal{O}_n$, e suponha que $J_f, \mathcal{M} \cdot J_f$ tenham codimensões positivas e finitas então*

$$\text{codim } \mathcal{M} \cdot J_f = n + \text{codim } J_f.$$

Prova.

Observe primeiro que J_f é a soma vetorial dos subespaços vetoriais $\mathcal{M} \cdot J_f$ e $\mathbb{C}\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\}$ onde as chaves indicam o subespaço vetorial gerado pelas primeiras derivadas parciais. De fato, um elemento de J_f tem a forma $u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ com $u_i \in \mathcal{O}_n$; então segue que $u_i = (u_i - u_i(0)) + u_i(0)$ e então $J_f = \mathcal{M} \cdot J_f \oplus \mathbb{C}\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\}$.

Em seguida, afirmamos que não é possível encontrar germes $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{O}_n$, com pelo menos um $g_i(0) \neq 0$, para o qual $\sum g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. Para provar isso, é conveniente confundir os germes com seus representantes. Imagine g_1, \dots, g_n como os componentes de um campo vetorial G em uma vizinhança de 0 em \mathbb{C}^n com $g(0) = 0$. Recorde que podemos encontrar um difeomorfismo h de uma vizinhança do 0 em \mathbb{C}^n com $h(0) = 0$ para o qual $g_i \circ h = \frac{\partial h_i}{\partial x_1}$, onde h_1, \dots, h_n são os componentes de h .

Observe agora que $\varphi = f \circ h$ é um germe em \mathcal{O}_n equivalente a f , assim também tem codimensão positiva e finita. Vamos escrever $b = h(a)$. Então $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) = \sum g_i(b) \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) = 0$, então $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ é identicamente nula em uma vizinhança de 0 em \mathbb{C}^n , ou seja, φ é independente da variável x_1 : então, a origem 0 é ponto singular para φ , de modo que cada ponto numa vizinhança de 0 no eixo x_1 é um ponto singular para φ , e φ tem codimensão infinita. Essa contradição estabelece nossa reivindicação.

Tomando g_1, \dots, g_n para ser números complexos, vemos que $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ são linearmente independentes sobre os complexos, e, portanto, o subespaço vetorial $\mathbb{C}\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\}$ tem dimensão n . Além disso, seguem imediatamente do que foi dito acima que a soma

vetorial de $\mathcal{M} \cdot J_f$ e $\mathbb{C}\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\}$ é direta, isto é, que a interseção é o espaço trivial, assim o resultado agora segue. ■

Proposição 2.14 *Seja $f \in \mathcal{O}_n$ uma função polinomial w -homogênea de grau d com $w = (w_1, \dots, w_n)$. Se f tem singularidade isolada, então*

$$\mu(f) = \frac{(d - w_1) \dots (d - w_n)}{\prod_{i=1}^n w_i}.$$

Prova. Veja DIMCA (1987). ■

Teorema 2.6 *Seja $F(t, x_1, \dots, x_n)$ uma função polinomial tal que para cada $t \in U$ temos que $f_t(x_1, \dots, x_n) = F(t, x_1, \dots, x_n)$ é w -homogênea de grau d com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$, onde U é um domínio de \mathbb{C} . Se $\frac{\partial F}{\partial t}$ pertence ao ideal de \mathcal{O}_n gerado por $\{x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} : i, j = 1, \dots, n\}$ para cada $t \in U$ fixo, então f_t é analiticamente equivalente a f_s para qualquer $t, s \in U$.*

Prova.

Vamos denotar por TF o ideal de \mathcal{O}_n gerado por $\{x_i \frac{\partial F}{\partial x_j} : i, j = 1, \dots, n\}$. É claro que $H_w^d(n, 1)$ pode ser considerado um subconjunto do espaço de m -jatos $J^m(n, 1)$, para m suficiente grande. O conjunto

$$A_w^d(n, 1) = \{f \in H_w^d(n, 1) : f \text{ tem uma singularidade isolada na origem}\}$$

é um subconjunto aberto de Zariski de $H_w^d(n, 1)$.

Em particular, $A_w^d(n, 1)$ pode ser visto como uma subvariedade conexa do espaço, m -jato $J^m(n, 1)$. Seja $\mathcal{R}(n, n)$ o grupo de germes de difeomorfismo analítico $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$. Considerando a ação natural de $G = j^m(\mathcal{R}(n, n))$ na variedade $M = J^m(n, 1)$ dada por

$$(j^m(\phi), j^m(f)) \mapsto j^m(f \circ \phi).$$

Então, dada $f \in A_w^d(n, 1)$, nós temos

$$\begin{aligned} \text{codim}(G \bullet f) &= \dim(M) - \dim(G \bullet f) \\ &= \dim(M) - \dim(T_f(G \bullet f)) \end{aligned} \tag{1}$$

$$= \dim\left(\frac{\mathcal{M}_n}{\mathcal{M}_n^{m+1}}\right) - \dim\left(\frac{TF}{\mathcal{M}_n^{m+1}}\right) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &= \dim\left(\frac{\mathcal{M}_n}{TF}\right) \\ &= n + \mu(f) \end{aligned} \tag{3}$$

A igualdade (1) vem de que uma órbita tem mesma dimensão do espaço tan-

gente, (2) M é isomorfo à $\frac{\mathcal{M}_n}{\mathcal{M}_n^{m+1}}$ e, para a outra parte, segue do exemplo que vem logo após o Proposição 2.1, (3) vem da Proposição 2.13.

Desde que o número Milnor de $f \in A_w^d(n, 1)$ não depende de f , Proposição 2.14, temos que a dimensão de $T_f(G \bullet f)$ não depende de $f \in A_w^d(n, 1)$. Seja $P = \{f_t : t \in U\}$, então:

1. Por hipótese, $T_f P \subset T_f(G \bullet f)$, para qualquer $f \in P$, e
2. $\dim(T_f(G \bullet f))$ é constante para $f \in P$, porque $P \subset A_w^d(n, 1)$.

Segue-se do Lema de Mather, Teorema 2.2, que P está contida em uma única G -órbita. ■

3 RESULTADOS

3.1 Resultados Intermediários

Teorema 3.1 *Seja $F(t, x, y)$ uma função polinomial tal que: para cada $t \in U$, as funções $f_t(x, y) = F(t, x, y)$ é w -homogênea de mesmo grau com singularidade em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, onde U é um subconjunto aberto de \mathbb{C} e $w_1 > w_2$. Se f_t define uma família fortemente bi-Lipschitz trivial de germes de funções na origem $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, então existe uma função $k : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) - k(t)y \frac{\partial F}{\partial y}(t, x, y) \equiv 0$$

em $\{(t, x, y) : \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, y) = 0\}$.

Antes de iniciarmos a prova do Teorema 3.1, como a mesma condições do teorema anterior provemos o seguinte resultado.

Lema 3.1 *Para cada $t \in U$, seja $\Gamma_t = \{(t, x, y) : \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, y) = 0\}$. Se $y = 0$ é uma componente de Γ_{t_0} para alguns t_0 , então $y = 0$ é uma componente de Γ_t para todo $t \in U$. Além disso, $F_t(x, y) = y\bar{F}_t(x, y)$, onde $\bar{F}_t(x, y)$ é um polinômio w -homogêneo e $\bar{F}_t(x, 0) \neq 0$.*

Prova. Se $y = 0$ é um componente de Γ_{t_0} , podemos escrever

$$F_t(x, y) = H_t(x, y)\bar{F}_t(x, y)$$

tal que H_t e \bar{F}_t são polinômios w -homogêneos de grau a e b respectivamente e $H_{t_0}(x, y) = y^m$. Como o grau de F_t não depende de t , a e b também não dependem. Nós temos $m = 1$, porque se $m \geq 2$, então f_{t_0} não tem singularidade isolada na origem. Então, H_t é um polinômio w -homogêneo de grau w_2 para todo t . Como $w_1 > w_2$, segue que $H_t(x, y) = a(t)y$ e $a(t) = 0$ para todo $t \in U$. O que prova o lema. ■

Demonstração do Teorema 3.1.

Pelas suposições, existe um campo vetorial Lipschitz

$$v(t, x, y) = (1, v_1(t, x, y), v_2(t, x, y))$$

tal que $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$. Vamos denotar

$$\Gamma_t = \{(t, x, y) : \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, y) = 0\}.$$

Seja $a_1(t), \dots, a_r(t)$ funções definidas da seguinte maneira:

Caso em que $\{y = 0\}$ não é componente de Γ_t .

Neste caso, $a_1(t), \dots, a_r(t)$ são as raízes da equação polinomial

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, 1) = 0.$$

Assim,

$$\gamma_i(s) = (t, a_i(t)s^{w_1}, s^{w_2}), i = 1, \dots, r$$

parametriza os ramos de Γ_t . Pois,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_i(s)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, a_i(t)s^{w_1}, s^{w_2}) \\ &= s^{d-w_1} \frac{\partial F}{\partial x}(t, a_i(t), 1) \\ &= s^{d-w_1} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Caso em que $\{y = 0\}$ é componente de Γ_t .

Neste caso, $a_1(t), \dots, a_r(t)$ são as raízes da equação polinomial

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}(t, x, 1) = 0.$$

Assim, analogamente a conta acima

$$\gamma_i(s) = (t, a_i(t)s^{w_1}, s^{w_2}), i = 1, \dots, r$$

parametriza os ramos de Γ_t . que não sejam $\{y = 0\}$.

Vamos definir as funções $k_1(t), \dots, k_r(t)$ por

$$k_i(t) = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t, a_i(t), 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(t, a_i(t), 1)}.$$

Afirmo que $k_i(t) = k_j(t)$ para qualquer i e j . De fato, desde que $v_2(t, x, y)$ é uma função Lipschitz, existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$|v_2(t, a_i(t)s^{w_1}, s^{w_2}) - v_2(t, a_j(t)s^{w_1}, s^{w_2})| \leq \lambda |a_i(t) - a_j(t)| |s|^{w_1}. \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|v_2(t, a_i(t)s^{w_1}, s^{w_2}) - v_2(t, a_j(t)s^{w_1}, s^{w_2})| &= \left| \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t, a_i(t)s^{w_1}, s^{w_2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(t, a_i(t)s^{w_1}, s^{w_2})} - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t, a_j(t)s^{w_1}, s^{w_2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(t, a_j(t)s^{w_1}, s^{w_2})} \right| \\
&= |k_i(t) - k_j(t)| |s|^{w_2} \\
&\stackrel{(1)}{<} \lambda |a_i(t) - a_j(t)| |s|^{w_1}.
\end{aligned}$$

Desde $w_1 > w_2$ e fazendo $s \rightarrow 0$ temos $k_i(t) = k_j(t)$.

Desse modo podemos denotar $k(t) = k_1(t) = \dots = k_r(t)$. Agora, fixando t .

Nós vemos que a função

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) - k(t)y \frac{\partial F}{\partial y}(t, x, y)$$

é identicamente nula em cada ramo de Γ_t em $(t, 0, 0)$, mesmo quando $\{y = 0\}$ é uma componente de Γ_t . ■

Comentário 1 Como consequência da prova da proposição acima, vemos que $k(t)$ satisfaz propriedades adicionais. Como $k(t)$ é uma expressão algébrica das funções $a_i(t)$ e, como podemos desenvolver $a_i(t)$ como uma série de Puiseux em uma vizinhança de cada t_0 , temos que para qualquer $t_0 \in U$ existem dois conjuntos abertos $V \ni 0 \subset \mathbb{C}$ e $U' \ni t_0 \subset U$ de modo que

$$s \mapsto s^N + t_0$$

mapeia V para U' e a função

$$s \mapsto k(s^N + t_0)$$

é analítica para algum $N \in \mathbb{N}$.

3.2 Resultado Final

Teorema 3.2 *Seja $F(t, x, y)$ uma função polinomial tal que para cada $t \in U$, a função $f_t(x, y) = F(t, x, y)$ é w -homogênea ($w_1 > w_2$) com singularidade isolada em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio. Se $\{f_t : t \in U\}$, como uma família de germes de função em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, é fortemente bi-Lipschitz trivial, então f_t é analiticamente equivalente a f_s para qualquer $t, s \in U$.*

Antes de provar o teorema gostaria de levantar uma breve observação sobre as diferenças desse com o Teorema 2.3. No resultado dessa seção, pedimos apenas que o campo seja Lipschitz, o que é uma hipótese bem mais fraca do que é pedido no Teorema 2.3, no qual o campo é analítico. Em contra partida, aumentamos a rigorosidade sobre os germes de funções, nesse exigimos polinômios w -homogêneos, no de Thom-Levine, germes de funções quaisquer.

Prova.

Seja $k(t)$ dado pelo Teorema 3.1; daí temos uma função $k : U \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) - k(t)y \frac{\partial F}{\partial y}(t, x, y) \equiv 0$$

em $\{(t, x, y) : \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, y) = 0\}$. Seja $t_0 \in U$. De acordo com a Comentário 1, existem dois conjuntos abertos $V \subset \mathbb{C}$ e $U' \subset U$ contendo a origem e t_0 respectivamente de modo que

$$s \mapsto s^N + t_0$$

mapeia V para U' e a função

$$s \mapsto k(s^N + t_0)$$

é analítica para algum $N \in \mathbb{N}$. Vamos denotar $G(s, x, y) = F(s^N + t_0, x, y)$, $g_s(x, y) = G(s, x, y)$ e $\tilde{k}(s) = k(s^N + t_0)$. Assim, temos uma função analítica $\tilde{k} : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\frac{\partial G}{\partial s}(s, x, y) - Ns^{N-1}\tilde{k}(s)y \frac{\partial G}{\partial y}(s, x, y) \equiv 0$$

em $\{(s, x, y) : \frac{\partial G}{\partial x}(s, x, y) = 0\}$.

Sejam

$$P_1(s, x, y), \dots, P_r(s, x, y)$$

tal que definem os fatores analíticos irredutíveis de $\frac{\partial G}{\partial x}(s, x, y)$ em \mathcal{O}_3 . Sejam $j(s) = Ns^{N-1}\tilde{k}(s)$ e

$$\alpha_i = \max\{\alpha \in \mathbb{N} : P_i^{\alpha} \text{ divide } \frac{\partial G}{\partial x} \in \mathcal{O}_3\}.$$

Por hipótese, temos números inteiros positivos β_1, \dots, β_r tais que

$$\frac{\partial G}{\partial s}(s, x, y) = u(s, x, y)P_1^{\beta_1}(s, x, y) \dots P_r^{\beta_r}(s, x, y) + j(s)y \frac{\partial G}{\partial y}(s, x, y)$$

com $u = u(s, x, y) \in \mathcal{O}_3$. Além disso, podemos supor que o P_i não o divide u em \mathcal{O}_3 . Vamos denotar

$$u_i(s, x, y) = u(s, x, y)P_1^{\beta_1}(s, x, y) \dots \widehat{P_i^{\beta_i}(s, x, y)} \dots P_r^{\beta_r}(s, x, y).$$

Assim, temos a equação

$$\frac{\partial G}{\partial s}(s, x, y) = u_i(s, x, y)P_i^{\beta_i}(s, x, y) + j(s)y \frac{\partial G}{\partial y}(s, x, y),$$

onde $u_i = u_i(s, x, y) \in \mathcal{O}_3$ e P_i não o divide u_i em \mathcal{O}_3 .

Devemos mostrar que $\beta_i \geq \alpha_i$. Se $\alpha_i = 1$, não temos nada para fazer. Assim, considere $\alpha_i > 1$. Segue de

$$\frac{\partial G}{\partial s}(s, x, y) = u_i(s, x, y)P_i^{\beta_i}(s, x, y) + j(s)y \frac{\partial G}{\partial y}(s, x, y)$$

que

$$(1) \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial s}(s, x, y) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(s, x, y)P_i^{\beta_i}(s, x, y) + \beta_i u_i P_i^{\beta_i-1} \frac{\partial P_i}{\partial x} + j(s)y \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(s, x, y).$$

Agora, desde $P_i^{\alpha_i}$ divide $\frac{\partial G}{\partial x}$, temos que $P_i^{\alpha_i-1}$ divide $\frac{\partial^2 G}{\partial s \partial x}$ e $\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}$; agora, por (1), obtemos

$$(2) \quad P_i^{\alpha_i-1} \text{ divide } P_i^{\beta_i-1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} P_i^{\beta_i} + \beta_i u_i P_i^{\beta_i-1} \frac{\partial P_i}{\partial x} \right).$$

Desde P_i não divide nem u_i nem $\frac{\partial P_i}{\partial x}$ segue de (2) que $\beta_i \geq \alpha_i$.

Uma vez que $\beta_i \geq \alpha_i$, temos que $\frac{\partial G}{\partial s}$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\frac{\partial G}{\partial s}(s, x, y) = q(s, x, y) \frac{\partial G}{\partial x}(s, x, y) + j(s)y \frac{\partial G}{\partial y}(s, x, y).$$

Agora, $\frac{\partial G}{\partial s}(s, x, y)$ e $y \frac{\partial G}{\partial y}(s, x, y)$, para s fixo, são funções polinomiais w -homogêneas de grau d , nas variáveis x e y , e $\frac{\partial G}{\partial x}(s, x, y)$ é w -homogênea de grau $(d - w_1)$; portanto $q(s, x, y)$ deve ser w -homogênea de grau w_1 . Em particular, $w(s, 0, 0) = 0$ e $\frac{\partial G}{\partial s}(s, x, y)$ pertence ao ideal de \mathcal{O}_3 gerado por

$$\left\{ x \frac{\partial G}{\partial x}, x \frac{\partial G}{\partial y}, x \frac{\partial G}{\partial y}, y \frac{\partial G}{\partial y} \right\}.$$

Assim, vem do Lema de Mather ou da versão analítica do Thom-Levine que G_t é analiticamente equivalente a G_s para qualquer $t, s \in V$. Isso significa que f_t é analiticamente equivalente a f_s para qualquer $t, s \in U'$. Finalmente, segue de U ser conexo que f_t é analiticamente equivalente a f_s para qualquer $t, s \in U$. ■

Se $\frac{\partial F}{\partial x}$ for analiticamente reduzida, este teorema pode ser provado da seguinte maneira. Seja $k(t)$ dado pelo Teorema 3.1. Fixando $t \in U$, e desde $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, y)$ é analiticamente reduzida, existe uma função analítica $u(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) - k(t)y \frac{\partial F}{\partial y}(t, x, y) = u(x, y) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, y).$$

Desde que $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y)$ é w -homogêneo de grau d , y é w -homogêneo de grau w_2 , $\frac{\partial F}{\partial y}(t, x, y)$ é w -homogêneo de grau $d - w_2$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, y)$ é w -homogêneo de grau $d - w_1$; segue que $u(x, y)$ é w -homogênea de grau w_1 e em particular $u(0, 0) = 0$.

Assim, $\frac{\partial F}{\partial t}$ pertence ao ideal de \mathcal{O}_2 gerado por

$$\left\{ x \frac{\partial F}{\partial x}, x \frac{\partial F}{\partial y}, y \frac{\partial F}{\partial x}, y \frac{\partial F}{\partial y} \right\}.$$

Finalmente, como $f_t(x, y) = F(t, x, y)$ é w -homogênea de grau d para todo $t \in U$, segue do Teorema 2.6 que $\{f_t : t \in U\}$ define uma família de germes de funções na origem $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ tal que f_t é analiticamente equivalente a f_s para qualquer $t, s \in U$.

O argumento acima nos permite estender o Teorema 3.2 para polinômios w -homogêneos em n variáveis ($w_1 > \dots > w_n$) com a hipótese adicional de que o ideal

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \right\}$$

é radical. No entanto, o exemplo a seguir mostra que, para $n \geq 3$ variáveis, se remover algumas hipóteses acima, este resultado não é verdade.

Exemplo: Seja $f_t(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^k + tx^2y^2$ é fortemente bi-Lipschitz trivial (para t próximo de 0), mas f_t não é analiticamente equivalente a f_s quando $t \neq s$.

◇

4 CONCLUSÃO

No capítulo inicial, INTRODUÇÃO, foram mostrados vários teoremas que formaram a base desse trabalho. Entre esses, relembro o Teorema de Thom-Levine, Teorema 2.3, no qual afirma que se houver uma família de campos vetoriais analíticos $v : W \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$, $v(0, t) = 0$ para todos $t \in U$ e $\frac{\partial f_t}{\partial t}(x) = (df_t)(x)(v_t(x))$, então f_t e f_s são analiticamente equivalentes para quaisquer t e s em U . Resultado no qual tem importância reforçada durante anos de aplicação e que serviu de inspiração para o nosso resultado.

O resultado primordial desse escrito é o Teorema 3.2, no qual possui um enunciado bem próximo do Teorema 2.3. Apesar dos enunciados parecidos, a diferença entre os dois merece nota: os campos vetoriais. Um deles sendo analítico e o outro apenas lipschitz, e entretanto, ainda obtendo a equivalência analítica.

Em conclusão, fazemos uma análise da necessidade de se pedir que os polinômios sejam genuínos w -homogêneos, isto é, não homogêneos. O último exemplo do capítulo 3, RESULTADOS, mostra que existem exemplos de famílias de polinômios que mesmo sendo bi-Lipschitz equivalentes não são analiticamente equivalentes. Por um lado, com ajuda de tal exemplo confirmou a importância das hipóteses e por outro, com o que foi discutido no segundo parágrafo dessa sessão ratificamos a beleza do resultado principal desse trabalho.

REFERÊNCIAS

BIRBRAIR, Lev; FERNANDES, Alexandre; PANAZZOLO, Daniel. Lipschitz classification of functions on a Hölder triangle. *St. Petersburg Math.*, v. 20, p. 681–686, 2009.

DIMCA, Alexandru. *Topic on Real and Complex Singularities: an introduction*. Wiesbaden: Braunschweig, 1987.

EBELING, Wolfgang. *Functions of several complex variables and their singularities*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2007.

GIBSON, C G. *Singular Points of Smooth Mappings*. London: Pitman, 1979.

HENRY, Jean-Pierre; PARUSINSKI, Adam. Existence of moduli for bilipschitz equivalence of analytic functions. *Compositio Math*, v. 136, p. 217–235, 2003.

KOIKE, Satoshi; PARUSINSKI, Adam. Equivalence relations for two variable real analytic function germs. *J. Math. Soc. Japan*, v. 65, n.1, p. 237–276, 1977.

KUO, Tzee Char. The modified analytic trivialization of singularities. *J. Math. Soc. Japan*, v. 32, n.4, 1980.

LANG, S. *Algebra 3rd Edition*. New York: Springer-Verlag, 2002.

MARTINET, J. *Singularities of Smooth Functions and Maps*. Cambridge: Cambridge University of Press, 1982.

SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

WHITNEY, Hassler. Local properties of analytic varieties. S.(ed.) In: CAIRNS (Ed.), *Differential and Combinatorial Topology: A symposium on Honor of Marston Morse*. Princeton: Princeton: University of Press, 1965, p. 205–244.