UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JANIELLY GONÇALVES ARAÚJO

CONTINUIDADE ÓTIMA DO GRADIENTE PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS DEGENERADAS

FORTALEZA

2014

JANIELLY GONÇALVES ARAÚJO

CONTINUIDADE ÓTIMA DO GRADIENTE PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS DEGENERADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A689c Araújo, Janielly Gonçalves.
Continuidade ótima do gradiente para equações elípticas degeneradas / Janielly Gonçalves Araújo. – 2014.
53 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2014.
Orientação: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.

1. Regularidade ótima. 2. Degenerecência.. 3. Gradiente. I. Título.

CDD 510

JANIELLY GONÇALVES ARAÚJO

CONTINUIDADE ÓTIMA DO GRADIENTE PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS DEGENERADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 29/04/2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Michel Pinheiros Rebouças
Universidade Federal da Amazonas (UFAM)

Dedico este trabalho aos meus familiares e amigos que sempre estiveram presentes nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus por me abençoar e me dar sabedoria. Aos meus pais Júlio e Lourdes, aos meus irmãos Damião Junio e Jane Kelly por estarem sempre presentes em todas etapas da minha vida.

Ao meu orientador Gleydson Ricarte pela disponibilidade, paciência e ensinamentos. Aos professores que fizeram parte da minha vida acadêmica e aos meus colegas da graduação e pós-graduação que tiveram suas devidas importâncias ao longo dessa caminhada.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), orgão financiador.

''E mesmo que tudo dê errado, mesmo assim, não tem problema. Eu deito no telhado de uma casa qualquer, olho pro céu e invento uma nuvem que chove sorrisos, bem em cima de mim." (LOS HERMANOS)

RESUMO

Neste presente trabalho estudaremos importantes propriedades analíticas de soluções de equações diferenciais parciais elípticas totalmente não-lineares do tipo

$$|\nabla u|^{\gamma} F(X, D^2 u) = f(X).$$

Iremos obter a regularidade ótima para este tipo de equação, as quais tem como principal característica a degenerescência do seu gradiente ao longo do conjunto em que tal taxa de variação se anula. Faremos aplicações relacionando os resultados obtidos às teorias de supercondutividade, ∞-laplaciano e p-laplaciano.

Palavras-chave:Regularidade ótima. Degenerecência. Gradiente. Totalmente não-linear.

ABSTRACT

In this work we study important analytic properties of solutions of fully nonlinear elliptic partial differential equations type

$$|\nabla u|^{\gamma} F(X, D^2 u) = f(X).$$

We obtain optimal regularity for this type of equation which has as its main characteristic the degeneracy of its gradient along the whole in which this rate of change is canceled. We will make applications relating to the results theories of superconductivity, ∞-Laplacian and p-Laplacian.

Keywords: Optimal Regularity. Degenerate. Gradient. Full nonlinear .

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria de regularidade, na qual busca propriedades intrínsecas de soluções de equações diferenciais parciais, se torna relevante desde a fundação da teoria de análise moderna de EDPs, por volta do século XVIII. Esse estudo se torna necessário na modelagem matemática de fenômenos físicos e sociais, por exemplo, que são governados por equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem.

Suavidade de soluções fracas para equações uniformente elípticas de segunda ordem, tanto da forma divergente quanto não divergente, é hoje em dia bastante bem estabelecida. A parte central no desenvolvimento desta teoria, destacamos a busca de um módulo de continuidade universal de soluções de tais equações. Podemos destacar a teoria de DeGiorgi-Nash-Moser para equações da forma divergente, onde encontramos a obtenção do módulo universal de continuidade para soluções da equação linear homogênea $Lu = 0$ e a desigualdade de Harnack Krylov-Safonov para operadores da forma não divergente.

Apesar da distinta importância das obras supra-citadas acima, um grande número de modelos matemáticos, envolvem operadores cuja a elipticidade se degenera ao longo de uma região desconhecida *a priori*, que depende de sua própria solução. Tais modelos são chamados de *problemas de fronteira livre*. Este fato diminui a eficácia das características de difusão próximo dessa região, e portanto a teoria de regularidade para soluções se torna, para este caso, mais sofisticada do ponto de vista matemático.

Outro avanço destacável, está na teoria de regularidade para soluções de viscosidade de equações uniformemente elípticas não lineares,

$$F(D^2u) = 0 \tag{1.1}$$

que atraiu a atenção da comunidade matemática nessas últimas três décadas. É sabido que soluções da equação homogênea (1.1) são localmente de classe C^{1,α_0} para um expoente universal α_0, isto é, que depende apenas das constantes d-dimensão e λ, Λ-constantes de elipticidade, veja ROBERTS, CAFFARELLI, and CABRÉ (1995). Caso nenhuma hipótese estrutural seja imposta para o operador F, a regularidade C^{1,α_0} é de fato ótima, veja NADIRASHVILI (2007, 2008) e NADIRASHVILI and VLADUTS (2011). Sob hipótese de concavidade ou convexidade em F, um teorema devido a Evans e Krylov, estabelece que soluções são $C^{2,\alpha}$. A teoria de regularidade para o caso não-homogêneo

$$F(X, D^2u) = f(X) \tag{1.2}$$

naturalmente se torna um caso mais delicado. Como consequência, soluções de tais equações podem não ser tão regulares quanto as do caso homogêneo. Em um trabalho de bastante importância, Caffarelli CAFFARELLI (1988), estabelece estimativas $W^{2,p}$ *a priori* para soluções de (1.2), onde $f \in L^p$, com $p < d$-dimensão, adicionando ao operador F uma hipótese do tipo VMO para seus coeficientes. Recentemente, E. Teixeira em TEIXEIRA (2014), fornece um módulo de continuidade universal ótimo para equações totalmente não-lineares de coeficientes variáveis, baseado nas propriedades de fraca-integrabilidade que o potencial f em (1.2) pode assumir.

Nosso trabalho tem como objetivo obter estimativas ótimas interiores para equações elípticas degeneradas da forma:

$$\mathcal{H}(X, \nabla u)F(X, D^2u) = f(X) \quad \text{em} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^d, \tag{1.3}$$

onde $f \in L^\infty(B_1)$ e o operador $\mathcal{H}\colon B_1 \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ degenera com uma taxa comparável a uma potência da magnitude do gradiente, isto é,

$$\lambda |p|^\gamma \leq \mathcal{H}(X, p) \leq \Lambda |p|^\gamma, \tag{1.4}$$

para algum $\gamma > 0$. O operador de $2^{\underline{a}}$ ordem $F\colon B_1 \times \mathrm{Sym}(N) \to \mathbb{R}$ na equação (1.3) é o responsável pela difusão, ou seja, F é um operador uniformemente elíptico totalmente não-linear.

Em diversos modelos matemáticos, a degenerescência elíptica ocorre ao longo do conjunto singular:

$$\mathscr{S}(u) := \{X : \nabla u(X) = 0\},$$

de uma solução existente. De fato, um certo número de equações elípticas degeneradas tem seus graus de degenerescência comparados a

$$f(\nabla u)|D^2u| \approx 1, \tag{1.5}$$

para alguma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, com $\mathrm{Zero}(f) = \{0\}$. Assim, para compreendermos o efeito preciso sobre a falta de suavidade imposta pela equação modelo (1.5) nos guia a uma melhor compreensão sobre a teoria de regularidade ótima para uma quantidade razoável de operadores elípticos degenerados.

Notemos que pela estrutura da equação (1.3) nenhuma teoria de regularidade universal para tal equação pode ir além da regularidade C^{1,α_0}, para α_0 em (1.1), ou seja, essa regularidade é ótima. De fato, o termo de degenerescência $\mathcal{H}(X, \nabla u)$ força as soluções a serem menos regulares que soluções do problema uniformemente elíptico próximo de seu conjunto singular. Esta característica particular indica que a obtenção de estimativas de regularidade ótima para soluções de (1.3) não deve seguir de técnicas de pertubação, pois isto exige novas ideias envolvendo uma interação de equilíbrio entre a teoria de regularidade universal para equações uniformemente elípticas e o efeito de degenerescência atribuídos pelo operador difusão (1.4).

Sob esta análise estrutural, mostraremos que o gradiente de uma solução de viscosidade u, de (1.3), é localmente de classe $C^{0,\min\{\alpha_0^-,\frac{1}{1+\theta}\}}$. O expoente ótimo de Hölder-continuidade para o gradiente de soluções,

$$\beta := \min\left\{\alpha_0^-, \frac{1}{1+\theta}\right\}, \tag{1.6}$$

nos dá precisamente a regularidade ótima e universal de equações degeneradas do tipo (1.3).

A originalidade do principal resultado apresentado no decorrer desse trabalho, está precisamente na obtenção do expoente de Hölder-continuidade ótimo do gradiente de uma solução da equação degenerada (1.3), que por sua vez, é uma importante informação dentro de uma quantidade de análises qualitativas de EDPs, tais como análise de *blow-ups*, problemas de fronteira livre, estimativas geométricas, etc. Ela é uma aquisição extra-qualitativa em relação ao recente resultado de Imbert e Silvestre, IMBERT (2013), onde foi provado que soluções de viscosidade de (1.3) são continuamente diferenciáveis.

2 PRELIMINARES

No presente trabalho, iremos fazer uso da notação padrão utilizada na literatura. As equações e problemas estudados neste trabalho são modelados no espaço euclidiano d-dimensional, $\mathbb{R}^d$. A bola aberta de raio $r > 0$ centrada no ponto X_0 será denotada por $B_r(X_0)$ e simplesmente B_r para as bolas de raio r, centradas na origem. Denotaremos Ω como um domínio limitado em $\mathbb{R}^d$. Para um domínio $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$, $\partial\mathcal{O}$ será entendido como o bordo do domínio $\mathcal{A}$. Além disso, para cada $k > 0$, iremos denotar $kB_r(X_0) := B_{kr}(X_0)$. Já o produto escalar usual em $\mathbb{R}^d$ será representado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dado um vetor $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, sua norma euclideana será denotada por $|\alpha| := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. O produto tensorial $\xi \otimes \psi$ denota a matriz cuja entradas são dadas por $\xi_i \psi_j$ onde, $1 \leq i, j \leq d$. Seja $A = (A_{ij})_{d\times d}$ e $B = (B_{ij})_{d\times d}$ duas matrizes, denotaremos

$$\|A\| \ = sup_{|X|=1}|Ax|. \tag{2.1}$$

Para uma função $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$, seu gradiente e sua Hessiana em um ponto $X \in \Omega$ serão denotados respectivamente por

$$\nabla u(X) := (\partial_j u)_{1\leq j \leq d} \quad \text{e} \quad D^2 u(X) := (\partial_{ij} u)_{1 \leq i,j \leq d},$$

onde $\partial_j u$ e $\partial_{ij} u$ representam a j-ésima derivada direcional de u e a i-ésima derivada direcional de $\partial_j u$, respectivamente. Denotaremos por $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, onde

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \ \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$, onde

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u|.$$

A oscilação de u em um domínio Ω será dada por;

$$osc_\Omega u := \sup_\Omega u - \inf_\Omega u.$$

O espaço de todas matrizes simétricas $d \times d$ será denotado por $\mathrm{S}(d)$. Dizemos que um operador $F \colon \Omega \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ é *uniformemente elíptico*, se existem duas constantes positivas $0 < \lambda \leq \Lambda$ tais que, para cada $M \in \mathrm{S}(d)$ e $X \in \Omega$,

$$\lambda\|N\| \leq F(X, M + N) - F(X, M) \leq \Lambda\|N\|, \quad \forall\, N \geq 0. \tag{2.2}$$

Equivalentemente, um operador (λ, Λ)-elíptico pode ser definido sob a seguinte condição:

$$F(X, M+N) \leq F(X, M) + \Lambda\|N^+\| - \lambda\|N^-\| \tag{2.3}$$

para todo $x \in \Omega$ e $M, N \in \mathrm{S}(d)$, onde $\|N^+\|$ representa o máximo da parte positiva dos autovalores de N, e $\|N^-\| = \|(-N)^+\|$.

Para uma função $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$, seu gradiente e sua Hessiana em um ponto $X \in \Omega$ serão denotados respectivamente por

$$\nabla u(X) := (\partial_j u)_{1 \leq j \leq d} \quad \text{e} \quad D^2 u(X) := (\partial_{ij} u)_{1 \leq i,j \leq d},$$

onde $\partial_j u$ e $\partial_{ij} u$ representam a j-ésima derivada direcional de u e a i-ésima derivada direcional de $\partial_j u$ respectivamente. Denotaremos por $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \ \ \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, onde

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \ \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$, onde

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u|.$$

A oscilação de u em um domínio Ω será dada por;

$$osc_\Omega u := \sup_\Omega u - \inf_\Omega u.$$

O espaço de todas matrizes simétricas $d \times d$ será denotado por $\mathrm{S}(d)$. Dizemos que um operador $F \colon \Omega \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ é *uniformemente elíptico*, se existem duas constantes positivas $0 < \lambda \leq \Lambda$ tais que, para cada $M \in \mathrm{S}(d)$ e $X \in \Omega$,

$$\lambda\|N\| \leq F(X, M+N) - F(X, M) \leq \Lambda\|N\|, \quad \forall\, N \geq 0. \tag{2.4}$$

Equivalentemente, um operador (λ, Λ)-elíptico pode ser definido sob a seguinte condição:

$$F(X, M+N) \leq F(X, M) + \Lambda\|N^+\| - \lambda\|N^-\| \tag{2.5}$$

para todo $x \in \Omega$ e $M, N \in \mathrm{S}(d)$, onde $\|N^+\|$ representa o máximo da parte positiva dos autovalores de N, e $\|N^-\| = \|(-N)^+\|$.

Observação 2.1. A definição acima nos diz que o operador F é monótono crescente e Lipschitz em $M \in S(d)$.

De fato, sejam $M, N \in S(d)$ tais que $M \leq N$ (isso significa que a matriz $N - M$ é positiva). Pela elipticidade uniforme de F temos,

$$\lambda\|N - M\| \leq F(X, M + [N - M]) - F(X, M) \leq \Lambda\|N - M\|.$$

Então,

$$0 < \lambda\|N - M\| \le F(X,N) - F(X,M) \Rightarrow F(X,M) \le F(X,N).$$

Isso conclui a monotonicidade de $F(X,M)$ em $S(d)$.
Agora, sejam $A, B \in S(d)$. A elipticidade uniforme do operador F nos dá que

$$\begin{aligned} F(X,B) - F(X,A) &= F(X, A + [B - A]) - F(X,A) \\ &\le \Lambda\|(B-A)^+\| - \lambda\|(B-A)^-\| \\ &\le \Lambda\|(B-A)^+\| \\ &\le \Lambda\|B - A\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(X,A) - F(X,B) &= F(X, B + [A - B]) - F(X,B) \\ &\le \Lambda\|(A-B)^+\| - \lambda\|(A-B)^-\| \\ &\le \Lambda\|(A-B)^+\| \\ &\le \Lambda\|A - B\| \\ &= \Lambda\|B - A\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|F(X,B) - F(X,A)| = \max\{F(X,B) - F(X,A), F(X,A) - F(X,B)\} \le \Lambda\|B - A\|,$$

ou seja, o operador F é Lipschitz em $S(d)$.

Dizemos que F é um operador côncavo quando este é uma função côncava no espaço das matrizes simétricas reais S^d. Para cada $\varepsilon > 0$, definamos

$$F_\varepsilon(X,M) := \varepsilon F\left(X, \frac{1}{\varepsilon}M\right) \quad \forall \quad X \in \Omega. \tag{2.6}$$

Escrevemos $f = o(g)$ quando $x \to x_0$ para significar que $\lim_{x\to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

2.1 Espaços de Hölder e soluções no sentido da viscosidade

A continuidade Hölder é uma medida quantitativa de continuidade que é especialmente apropriada para o estudo de equações diferenciais parciais. Isso sugere uma ampliação dos espaços $C^k(\Omega)$, onde

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : D^\gamma u \ \text{ é contínua em } \ \Omega \ \text{ para todo } \ |\gamma| \le k\}.$$

Sendo Ω um aberto, funções em $C^k(\Omega)$ (e suas derivadas) não precisam ser limitadas em Ω, por isso não podemos adotar a norma do sup para transformar $C^k(\Omega)$ em um espaço normado. Mas sabendo que funções limitadas e uniformente contínuas em Ω possuem uma única extensão contínua para $\bar{\Omega}$ podemos considerar o espaço

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) : D^\gamma u \ \text{ é uniformemente contínua em } \ \Omega \ \text{ para todo } \ |\gamma| \leq k\},$$

com a norma $\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max\limits_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Definição 2.2. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita ser α-Hölder contínua em um ponto X_0, com $0 < \alpha < 1$, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(X) - u(X_0)| \leq C|X - X_0|^\alpha, \quad \text{para todo} \quad X \neq X_0 \in \Omega$$

Quando $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é α-Hölder contínua em todo Ω, e escrevemos $u \in C^\alpha(\Omega)$, temos que

$$|u(X) - u(Y)| \leq C|X - Y|^\alpha, \quad \text{para todo} \quad X \neq Y \in \Omega.$$

Definição 2.3. Os espaços de Hölder $C^{k,\alpha}(\Omega)$ são subespaços de $C^k(\Omega)$ consistindo de funções cujas derivadas parciais até a ordem k são todas α-Hölder contínuas em Ω, ou seja,

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : \ D^\gamma u \in C^\alpha \, \text{para todo} \, |\gamma| \leq k\}.$$

Definimos também

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\bar{\Omega}) : \ D^\gamma u \in C^\alpha(\Omega) \, \text{para todo} \, |\gamma| \leq k\}$$

e consideramos a norma

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \max_{|\gamma|\leq k} [D^\gamma u]_{C^\alpha(\Omega)},$$

onde

$$[D^\gamma u]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{\substack{X,Y\in\Omega \\ X\neq Y}} \frac{|D^\gamma u(X) - D^\gamma u(Y)|}{|X - Y|^\alpha}.$$

Definição 2.4. $u : B_r \to \mathbb{R}$ é $C^{1,\alpha}$ na origem se, e somente se, existe um polinômio ℓ de grau 1 tal que

$$|u(X) - \ell(X)| \leq C|X|^{1+\alpha}, \quad \text{para alguma constante} \ C > 0.$$

A partir de agora falaremos sobre soluções no sentido da viscosidade. A origem desse termo é justificada pelo uso de um método chamado "vanishing viscosity"para a obtenção da existência de soluções para tais equações. A definição atual para *soluções* *no sentido da viscosidade* foi dada por Evans no ano de 1980. Depois disso, importantes propriedades foram refinadas em um trabalho feito em conjunto por Crandall, Evans e Lions, em 1984. A principal dificuldade em definir solução fraca de equações totalmente não lineares é a ausência de uma estrutura divergente. Daremos agora o conceito de solução no sentido da viscosidade para a equação elíptica de segunda ordem totalmente não linear,

$$|\nabla u|^{\gamma} F(X, D^2 u(X)) = f(X), \tag{2.7}$$

onde $X \in \Omega$, u e f são funções definidas no domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 2.5. Uma função u definida em Ω tem um máximo local em $X_0 \in \Omega$ quando $u(X) \leq u(X_0)$ para qualquer X em uma vizinhança de X_0.

De maneira análoga, com algumas modificações precisas, temos a definição de mínimo local.

Definição 2.6. Uma função contínua u em Ω é uma subsolução no sentido da viscosidade para a equação (2.7) se sempre que $u - \varphi$ atingir máximo local em um ponto $X_0 \in \Omega$, onde $\varphi \in C^2(\Omega)$, tivermos

$$|\nabla u|^{\gamma} F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \geq f(X_0).$$

Dizemos que uma função contínua u em Ω é uma supersolução no sentido da viscosidade para a equação (2.7) quando sempre que $u - \varphi$ atingir mínimo local em um ponto $X_0 \in \Omega$, onde $\varphi \in C^2(\Omega)$, tivermos

$$|\nabla u|^{\gamma} F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \leq f(X_0).$$

Finalmente, dizemos que u é solução no sentido da viscosidade para a equação (2.7) quando u for subsolução e supersolução no sentido da viscosidade para a equação (2.7).

Uma motivação para esta definição vem das seguintes observações:

Observação 2.7. Suponha que u é uma supersolução da equação (2.7) no sentido clássico, ou seja,

$$|\nabla u|^{\gamma} F(X, D^2 u(X)) \leq f(X) \quad \text{pontualmente.}$$

Assuma que $u - \varphi$ atinge um mínimo local em um ponto $X_0 \in \Omega$, para alguma $\varphi \in C^2(\Omega)$. Do curso de Cálculo, segue que a matriz simétrica $D^2(u - \varphi)(X_0)$ é não negativa, ou seja,

$$D^2\varphi(X_0) \leq D^2 u(X_0).$$

A monotonicidade de F nos dá que

$$|\nabla u|^{\gamma} F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \leq |\nabla u|^{\gamma} F(X_0, D^2 u(X_0)) \leq f(X_0).$$

Isso nos diz que u é supersolução da equação (2.7) no sentido da viscosidade.

Observação 2.8. Reciprocamente, suponha que $u \in C^2(\Omega)$ é uma supersolução da equação (2.7) no sentido da viscosidade. Dado qualquer ponto $X_0 \in \Omega$, defina a função teste $\varphi(X) = u(X) - \epsilon\|X - X_0\|^2$ (claramente φ é de classe C^2). Então,

$$(u - \varphi)(X_0) = 0 \leq \epsilon\|X - X_0\|^2 = (u - \varphi)(X).$$

Portanto, $u - \varphi$ atinge mínimo local no ponto X_0, e sendo u uma supersolução de (2.7) no sentido da viscosidade, segue da definição que

$$|\nabla u|^\gamma F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \leq f(X_0). \tag{2.8}$$

É fácil ver que

$$D^2\varphi(X) = D^2u(X) - 2\epsilon I_d.$$

Segue daí que

$$D^2\varphi(X_0) \to D^2u(X_0), \quad \text{quando} \quad \epsilon \to 0.$$

Portanto, a continuidade de F em $M \in S(d)$ nos dá que

$$|\nabla u|^\gamma F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \to |\nabla u|^\gamma F(X_0, D^2u(X_0)) \quad \text{quando} \quad \epsilon \to 0. \tag{2.9}$$

Portanto, a partir de (2.8) e (2.9) conclui-se que

$$|\nabla u|^\gamma F(X_0, D^2u(X_0)) \leq f(X_0) \quad \text{pontualmente (classicamente).}$$

2.2 Teoremas Importantes

Nessa seção citaremos alguns teoremas que tiveram importância significativa no desenvolvimento dessa teoria.

Teorema 2.9. *(Ascoli-Arzelá) Seja $\{f_n : \mathscr{K} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções definida em um compacto $\mathscr{K} \subset \mathbb{R}^n$. Assuma que exista uma constante M tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \mathscr{K}$. Além disso, assuma que a sequência $\{f_n : \mathscr{K} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua em todo ponto de $\mathscr{K}$. Então existe uma subsequência que converge uniformemente em $\mathscr{K}$.*

Os teoremas a seguir encontram-se no artigo do Imbert e Silvestre IMBERT (2013) com suas devidas demostrações.

Teorema 2.10. *(Estimativa Lipchitz para p's grandes). Seja u solução no sentido da viscosidade de,*

$$|p + \nabla u|^\gamma F(D^2u) = f \text{ em } B_1 \tag{2.10}$$

onde $osc_{B_1} u \leq 1$ e $||f||_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0 < 1$. Se $|p| \geq \dfrac{1}{\alpha_0}$, com $a_0 = a_0(\lambda, \Lambda, d, \gamma, r)$, então *qualquer solução no sentido da viscosidade u é Lipschitz contínua em B_r e,*

$$[u]_{1,B_r} \leq C$$

onde $C = C(\lambda, \Lambda, \gamma, d, r)$.

Teorema 2.11. *(Estimativa Lipchitz para p's pequenos). Seja u solução no sentido da viscosidade de,*

$$|p + \nabla u|^\gamma F(D^2u) = f \text{ em } B_1 \tag{2.11}$$

onde $osc_{B_1} u \leq 1$ e $||f||_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0 < 1$. Se $|p| \leq \dfrac{1}{\alpha_0}$, com $a_0 = a_0(\lambda, \Lambda, d, \gamma, r)$, então u é β-Hölder contínua em B_r e,

$$[u]_{\beta,B_r} \leq C$$

onde $\beta = \beta(\lambda, \Lambda, d, r, a_0)$ e $C = C(\lambda, \Lambda, a_0, d, r)$.

Teorema 2.12. *Seja u uma solução de viscosidade de*

$$|p + \nabla u|^\gamma F(D^2u) = 0 \text{ em } B_1$$

então u é uma solução de viscosidade de $F(D^2u) = 0$ em B_1.

A prova do seguinte resultado pode ser encontrada em ROBERTS, CAFFARELLI, and CABRÉ (1995).

Teorema 2.13. *Seja u solução de*

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{em} \quad B_1$$

no sentido da viscosidade.Então $u \in C^{1,\alpha}(\underline{B}_{\frac{1}{2}})$ e

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\underline{B}_{\frac{1}{2}})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|)$$

onde $0 < \alpha < 1$ e C são contantes universais.

3 COMPACIDADE UNIVERSAL

A partir desta seção começaremos a desenvolver a prova da principal estimativa de regularidade ótima apresentada no Teorema 5.1. Nesta primeira etapa, iremos obter um tipo compacidade universal que nos dará acesso à teoria de regularidade ótima para soluções da equação (5.1). Na prova que iremos apresentar, faremos uso da principal ferramenta técnica obtida no recente trabalho de Imbert e Silvestre, IMBERT (2013).

Lema 3.1. *Seja $q \in \mathbb{R}^d$ um vetor arbitrário e $u \in C(B_1)$, uma solução de viscosidade de*

$$|q + \nabla u|^\gamma F(X, D^2u) = f(X), \tag{3.1}$$

satisfazendo $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$. Dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$, dependendo somente de d, λ, Λ, e γ, tal que se

$$\|M\|^{-1} \cdot \|F(X, M) - F(0, M)\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)} < \varepsilon, \tag{3.2}$$

então podemos encontrar uma função h, solução de uma equação (λ, Λ)-uniformemente elíptica de coeficientes constantes

$$\mathfrak{F}(D^2h) = 0, \quad B_{1/2} \tag{3.3}$$

tal que

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq \delta. \tag{3.4}$$

Demonstração. Suponhamos por contradição que exista um $\delta_0 > 0$ tal que o lema falha. Portanto podemos encontrar sequências, $F_j(X, M)$, f_j, q_j e u_j, satisfazendo

- $F_j(X, M)$ é (λ, Λ)-elíptico,
- $\|M\|^{-1} \cdot \|F(X, M) - F(0, M)\|_{L^\infty(B_1)} = \mathrm{o}(1)$,
- $\|f_j\|_{L^\infty(B_1)} = \mathrm{o}(1)$,
- $\|u_j\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ e
- $|q_j + \nabla u_j|^\gamma F_j(X, D^2u_j) = f_j(X)$,

com,

$$\sup_{B_{1/2}} |u_j - h| \geq \delta_0, \tag{3.5}$$

para quaisquer h e $\mathfrak{F}$ satisfazendo (3.3).

Seja $q \in \mathbb{R}^d$ arbitrário, pelo teorema 2.10, existe uma constante universalmente grande $A_0 > 0$, tal que, se para alguma subsequência $\{q_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, tivermos,

$$|q_{j_k}| \geq A_0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

então, a sequência de soluções correspondentes, $\{u_{j_k}\}_{j\in\mathbb{N}}$, é limitada em $C^{0,1}(B_{2/3})$. Caso tenhamos,

$$|q_j| < A_0, \quad \forall j \geq j_0,$$

então, pelo teorema 2.11, $\{u_j\}_{j \geq j_0}$ é limitado em $C^{0,\beta}(B_{2/3})$ para algum $0 < \beta < 1$ universal. Portanto $\{u_j\}_{j \in d}$ é uma sequência de funções equicontínuas e como por hipótese a u_j é limitada, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli 2.9, a menos de uma subsequência temos,

$$u_j \; \to u_\infty \quad \text{localmente uniforme em } B_{2/3},$$

para algum $u_\infty \in C^{0,\beta}(B_{2/3})$. Nosso objetivo final é provar que a função limite u_∞ é solução de uma equação do tipo (3.3). Para isso, analisaremos dois casos.

Suponha que $|q_j|$ é limitado,então pelo Teorema de Bolzano Wiestress podemos extrair uma subsequência de $\{q_j\}$, que converge para algum $q_\infty \in \mathbb{R}^d$. Além disso, pela elipticidade uniforme e pelo segundo ítem das propriedades listadas acima, para cada $x \in B_1$ a menos de uma subsequência $F_j(X, \cdot) \to F_\infty(X, \cdot)$ localmente uniforme em subconjunto compacto S(d), e pela observação 3.2 segue que

$$|q_\infty + \nabla u_\infty|^\gamma F_\infty(D^2 u_\infty) = 0$$

em B_1 no sentido da viscosidade.

Pelo Teorema 2.12, concluímos que $F_\infty(D^2 u_\infty) = 0$ em $B_{\frac{1}{2}}$, assim tomando $\mathfrak{F} = F_\infty$ e $u_\infty = h$ gera uma contradição com (3.5).

Se $|q_j|$ é ilimitado, então a menos de subsequência, $|q_j| \to \infty$. Neste caso, defina $\vec{e}_j = q_j/|q_j|$, então u_j será solução de

$$\left| \vec{e}_j + \frac{\nabla u_j}{|q_j|} \right|^\gamma F_j(X, D^2 u_j) = \frac{f_j(X)}{|q_j|^\gamma}.$$

De fato, já temos que

$$|\vec{q}_j + \nabla u_j|^\gamma \, F_j(X, D^2 u_j) = f_j(X).$$

Multiplicando os dois membros da equação acima por $\dfrac{1}{|q_j|^\gamma}$ obtemos o desejado. Como $u_j \in C^{0,1}(B_{2/3})$ temos que o ∇u_j é limitado, assim tomando $j \to \infty$ tem-se $|q_j| \to \infty$, portanto

$$\frac{\nabla u_j}{|q_j|} \to 0 \quad \text{e} \quad \frac{f_j(x)}{|q_j|^\gamma} \to 0 \quad \text{pois} \quad f_j \in L^\infty(B_1).$$

Com isso,encontramos uma função limite u_∞, satisfazendo $F_\infty(D^2 u_\infty) = 0$. Como no caso anterior, tome $\mathfrak{F} = F_\infty$ e $h = u_\infty$, isto nos leva a uma contradição com (3.5). Assim, o Lema está provado. □

Observação 3.2. Supondo $u_j \to u_\infty$ e $F_j(X, M) \to F_\infty(X, M)$, com $|\vec{q}_j + \nabla u_j|^\gamma F_j(X, D^2 u_j) =$

$f_j(X)$ no sentido da viscosidade, então

$$|\vec{q}_j + \nabla u_j|^\gamma F_\infty(0, D^2 u_0) = 0 \quad \text{em} \quad B_1 \quad \text{(no sentido da viscosidade)}.$$

De fato, para mostrarmos isso, é suficiente mostrar que u_∞ é uma subsolução no sentido da viscosidade (aplicamos o mesmo procedimento para $-|\vec{q}_j + \vec{b}|^\gamma F_\infty(0, -D^2(-u_0)) = 0$ para mostrar o caso que u_∞ é uma supersolução no sentido da viscosidade). Para isso, seja P um parabolóide que toca u_0 por cima em uma vizinhança A de $X_0 \in B_1$. Devemos mostrar que $|\vec{q}_j + \vec{b}|^\gamma F_\infty(0, D^2 P(X_0)) \geq 0$. Suponha por contradição que

$$|\vec{q}_j + \vec{b}|^\gamma F_\infty(0, D^2 P(X_0)) = -\eta < 0.$$

Seja $\epsilon_j > 0$ tal que

$$|\vec{q}_j + \vec{b}|^\gamma (F_j(0, D^2 P) - F_\infty(0, D^2 P)) \leq \epsilon_j \quad \forall j, \quad \text{com} \quad \epsilon_j \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to +\infty.$$

Agora, seja $\psi_j \in C^0(\overline{B_1})$ uma solução no sentido da viscosidade (que é garantida pelo método de Perron) de

$$\mathscr{M}^+(D^2\psi_j, \lambda^*, 1) = |f_j(X)| - |\beta_{F_j}(X)| - \epsilon_j =: g_j(X) \quad \text{em} \quad B_1,$$

para algum $\lambda^* < 1$ a ser escolhido a posteriore. Desde que $\mathscr{M}^+$ é convexo (veja **?**) tem-se que $\psi_j \in C^{2,\gamma}$ em B_1, para algum $\gamma \in (0,1)$. Portanto, $\psi_j \in C^2(B_1)$ e satisfaz

$$\frac{1}{n\lambda^*}\left(\|(D^2\psi_j)^+\| + |f_j| + |\beta_{F_j}| + \epsilon_j\right) \leq \|(D^2\psi_j)^-\| \quad \text{em} \quad B_1. \tag{3.6}$$

$$|\vec{q}_j + \vec{b}|^\gamma \frac{1}{n\lambda^*}\left(\|(D^2\psi_j)^+\| + |f_j| + |\beta_{F_j}| + \epsilon_j\right) \leq \|(D^2\psi_j)^-\| \quad \text{em} \quad B_1. \tag{3.7}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
|\vec{q} + \vec{b}|^\gamma \left(\frac{|F_j(X, D^2P) - F_j(0, D^2P)|}{\|D^2P\|}\right) &\leq |\vec{q} + \vec{b}|^\gamma \sup_{M \in S(n)\setminus\{0\}} \frac{|F_j(X, M - F_j(0, M)|}{\|M\|} \\
&= |\vec{q} + \vec{b}|^\gamma \beta_{F_j},
\end{aligned}$$

logo temos que

$$\begin{aligned}
|\vec{q} + \vec{b}|^\gamma [F(X, D^2P) - F_j(0, D^2P)] &\leq |\vec{q} + \vec{b}|^\gamma [|F_j(X, D^2P) - F_j(0, D^2P)|] \qquad (3.8) \\
&\leq |\vec{q} + \vec{b}|^\gamma \|D^2P\| \beta_{F_j}.
\end{aligned}$$

Sabemos que,

$\lambda||N^+||-\Lambda||N^-|| \leq F_j(X, M+N)-F_j(X,M) \leq \Lambda||N^+||-\lambda||N^-||$ para quaisquer $M, N \in S(n)$.

portanto,

$$\begin{array}{rcl} |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma(\lambda||N^+||-\Lambda||N^-||) & \leq & |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma[F_j(X,M+N)-F_j(X,M)] \\ & \leq & |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma(\Lambda||N^+||-\lambda||N^-||) \text{ para quaisquer } M,N\in S(n). \end{array}$$

Assim, usando (3.7) e (3.8) temos

$$\begin{array}{rcl} |\vec{q_j}+\vec{b}|^\gamma F_j(X, D^2[P+\psi_j]) & \leq & |\vec{q_j}+\vec{b}|^\gamma F_j(X,D^2P) + |\vec{q_j}+\vec{b}|^\gamma \Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| - |\vec{q_j}+\vec{b}|^\gamma\lambda\|(D^2\psi_j)^-\| \\ & = & |\vec{q_j}+\vec{b}|^\gamma F_j(X,D^2P) - |\vec{q_j}+\vec{b}|^\gamma F_\infty(0,D^2P) + |\vec{q_j}+\vec{u}|^\gamma F_\infty(0,D^2P) \\ & & +|\vec{q_j}+\vec{b}|^\gamma\Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| - |\vec{q_j}+\vec{b}|^\gamma\lambda\|(D^2\psi_j)^-\| \\ & \leq & |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma F_\infty(0,D^2P) + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\Lambda\|D^2P\|\beta_{F_j} + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| \\ & & -|\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\lambda\|(D^2\psi_j)^-\| \\ & \leq & |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma F_\infty(0,D^2P) + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\|D^2P\|\beta_{F_j}(X) + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| \\ & & -|\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\lambda||(D^2\psi_j)^-|| - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}\left(\|(D^2\psi_j)^+\| + |f_j| + |\beta_{F_j}| + \epsilon_j\right) \\ & \leq & |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma F_\infty(0,D^2P) + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\|D^2P\|\beta_{F_j}(X) + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| \\ & & -|\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}\left(\|(D^2\psi_j)^+\| + |f_j| + |\beta_{F_j}| + \epsilon_j\right) + \epsilon_j \\ & = & |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma F_\infty(0,D^2P) + \epsilon_j - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}\epsilon_j + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\|D^2P\|\beta_{F_j} \\ & & -|\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}|\beta_{F_j}| + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}\|(D^2\psi)^+\| \\ & & -|\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}|f_j| \\ & \leq & |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma F_\infty(0,D^2P) + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}\epsilon_j - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}\epsilon_j + \\ & & +|\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}\beta_{F_j}(X) - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}|\beta_{F_j}| + \\ & & +|\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}\|(D^2\psi_j)^+\| - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}\|(D^2\psi)^+\| - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}|f_j| \\ & = & |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma F_\infty(0,D^2P) - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma\dfrac{\lambda}{n\lambda^*}|f_j| \\ & \leq & |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma F_\infty(0,D^2P) - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma|f_j| \\ & = & -\eta - |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma|f_j(X)| \\ & \leq & -\eta + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma f_j(X) \\ & \leq & -\dfrac{\eta}{2} + |\vec{q}+\vec{b}|^\gamma f_j, \text{ para todo } j. \end{array}$$

ou seja,

$$F_j(X, D^2[P+\psi_j] < -\frac{\eta}{2} + f_j(X) \quad \forall j, \tag{3.9}$$

onde $\lambda^* < 1$ é escolhido suficientemente pequeno de tal forma que se tenha

$$\frac{\lambda}{n\lambda^*} \geq \max\{1, \Lambda, \|D^2 P\|\}.$$

Agora, como P toca $u_0 = \lim_{k\to+\infty} u_j$ por cima em uma vizinhança A de X_0, segue que $P + \psi_j + \dfrac{\eta\|X - X_0\|^2}{(4\Lambda)} + C$ (para j suficientemente grande e para alguma constante C) toca u_j por cima em A em algum ponto $a \in A$. Portanto,

$$|\vec{q} + \vec{b}|^\gamma F_j\left(a, D^2P(a) + D^2\psi_j(a) + \frac{\eta}{2\lambda} I\right) \geq |\vec{q} + \vec{b}|^\gamma f_j(a)$$

e assim

$$|\vec{q} + \vec{b}|^\gamma F_j(a, D^2P(a) + D^2\psi_j(a)) \geq -\frac{\eta}{2} + |\vec{q} + \vec{b}|^\gamma f_j(a). \tag{3.10}$$

Mas 3.10 contradiz 3.9 aplicado no ponto a.

4 REGULARIDADE $C^{1,\alpha}$

Nesta seção, iremos desenvolver a oscilação de decaimento, que irá finalmente nos fornecer a estimativa de regularidade ótima $C^{1,\alpha}$ para soluções da equação (1.3). A primeira tarefa será obter uma versão discreta da estimativa de regularidade, e é justamente isto que o lema seguinte nos fornecerá.

Lema 4.1. *Seja $q \in \mathbb{R}^d$ um vetor arbitrário e $u \in C(B_1)$ normalizada, isto é, $|u| \leq 1$, solução de viscosidade de*

$$|q + \nabla u|^\gamma F(X, D^2 u) = f(X). \tag{4.1}$$

Dado $\alpha \in (0, \alpha_0) \cap (0, \frac{1}{\gamma+1}]$, existem constantes $0 < \rho_0 < 1/2$ e $\epsilon_0 > 0$, dependendo somente de $d, \lambda, \Lambda, \gamma$ e α, tais que se

$$\|M\|^{-1} \cdot \|F(X, M) - F(0, M)\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \epsilon_0, \tag{4.2}$$

então existe uma função afim $\ell(X) = a + \vec{b} \cdot X$, tal que

$$\sup_{B_{\rho_0}} |u(X) - \ell(X)| \leq \rho_0^{1+\alpha}.$$

Além disso,

$$|a| + |\vec{b}| \leq C(d, \lambda, \Lambda),$$

para uma constante universal $C(d, \lambda, \Lambda)$ que depende apenas da dimensão e das constantes de elipticidade.

Demonstração. Note que estamos nas hipóteses do Lema 3.1, assim para um $\delta > 0$ a ser escolhido *a posteriori*, seja h uma solução de uma equação (λ, Λ)-uniformemente elíptica homogênea com coeficientes constantes, ou seja,

$$\mathfrak{F}(D^2 h) = 0 \quad \text{em} \quad B_{\frac{1}{2}}$$

tal que $||u-h||_{L^\infty(B_{1/2})} \leq \delta$, para algum ε_0 escolhido suficientemente pequeno, dependendo somente de δ e dos parâmetros universais. A partir da escolha do δ, que será universalmente escolhido logo depois, iremos concluir que a escolha do ε_0 será também universal. De (3.4), segue que

$$\|h\|_{L^\infty(B_{1/2})} = \|u - h + u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq 1 + \delta < 2;$$

Como h é homogênea, pelo teorema 2.13 $h \in C^{1,\alpha}$, onde $0 < \alpha < 1$ (regularidade ótima) e portanto,

$$\begin{aligned}\sup_{B_r} |h(X) - (\nabla h(0) \cdot X + h(0))| &\leq C(d, \lambda, \Lambda) \cdot r^{1+\alpha_0} \quad \forall \quad r < \frac{1}{2}, &(4.3)\\ |\nabla h(0)| + |h(0)| &\leq C(d, \lambda, \Lambda), &(4.4)\end{aligned}$$

para alguma constante universal $C(d, \lambda, \Lambda) > 0$. A desigualdade 4.4 decorre do fato de $\|h\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq 2$ e ∇h ser limitado, uma vez que $h \in C^{1,\alpha}$, onde $0 < \alpha < 1$. Denotaremos

$$\ell(X) := \nabla h(0) \cdot X + h(0). \tag{4.5}$$

Pela desigualdade triangular segue que

$$\begin{aligned}\sup_{B_{\rho_0}} |u(X) - \ell(X)| &= \sup_{B_{\rho_0}} |u(X) - h(X) + h(X) - \ell(X)| &(4.6)\\ &\leq \delta + C(d, \lambda, \Lambda) \cdot \rho_0^{1+\alpha_0}.\end{aligned}$$

Agora, fixado um expoente $\alpha < \alpha_0$ iremos escolher ρ_0 de modo que

$$C\rho_0^{1+\alpha_0} \leq \frac{1}{2}\rho_0^{1+\alpha}, \text{ ou seja, } \rho_o \leq \sqrt[\alpha_0-\alpha]{\frac{1}{2C}}. \tag{4.7}$$

Consideremos,

$$\rho_0 := \sqrt[\alpha_0-\alpha]{\frac{1}{2C}} \quad \text{e} \quad \delta := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2C}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha_0-\alpha}} \tag{4.8}$$

onde $C(d, \lambda, \Lambda) > 0$ é a constante universal que aparece em 4.3. Observe que como $C > 0$ e $\alpha < \alpha_0$ segue que $\delta > 0$ e $0 < \rho < \frac{1}{2}$ e que as escolhas acima dependem somente de d, λ, Λ e do expoente $0 < \alpha < \alpha_0$ fixado. Finalmente, combinando 4.4, 4.6, e 4.8 obtemos

$$\begin{aligned}\sup_{B_{\rho_0}} |u(X) - \ell(X)| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2C(d, \lambda, \Lambda)}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha_0-\alpha}} + C(d, \lambda, \Lambda) \cdot \rho_0^{1+\alpha} \cdot \rho_0^{\alpha_0-\alpha}\\ &= \frac{1}{2}\rho_0^{1+\alpha} + \frac{1}{2}\rho_0^{1+\alpha}\\ &= \rho_0^{1+\alpha},\end{aligned}$$

e o Lema está provado. □

Na sequência, iremos iterar o Lema 4.1 em bolas diádicas para obtermos a precisa oscilação de decaimento da diferença entre u e as funções afim ℓ_k que serão definidas abaixo.

Lema 4.2. *Sob as condições do Lema anterior, existe uma sequência de funções afins $\ell_k(X) := a_k + \vec{b}_k \cdot X$ satisfazendo*

$$|a_{k+1} - a_k| + \rho_0^k|\vec{b}_{k+1} - \vec{b}_k| \leq C_0\rho_0^{(1+\alpha)k}, \tag{4.9}$$

tal que

$$\sup_{B_{\rho_0^k}} |u(X) - \ell_k(X)| \leq \rho_0^{k(1+\alpha)}. \tag{4.10}$$

onde α é um expoente fixado, tal que

$$\alpha \in (0, \alpha_0) \cap \left(0, \frac{1}{1+\gamma}\right] \tag{4.11}$$

e C_0 uma constante universal que depende somente da dimensão e elipticidade.

Demonstração. Faremos a prova por indução finito sobre k. O caso $k = 1$ segue exatamente do Lema 4.1. Suponha que as estimativas (4.9) e (4.10) sejam válidas para $j = 1, 2, \cdots, k$, mostraremos que é válido também para $j = k+1$. Para isso, seja a função reescalonada $v : B_1 \to R$ como segue,

$$v(X) := \frac{(u - \ell_k)(\rho_0^k X)}{\rho_0^{k(1+\alpha)}}.$$

Assim, $|v| = \dfrac{|u - l_k|}{|\rho_0^{k(1+\alpha)}|} \leq \dfrac{\rho_0^{k(1+\alpha)}}{\rho_0^{k(1+\alpha)}} = 1$. Além disso, como $D^2 u = \dfrac{D^2 v}{\rho_0^{k(1-\alpha)}}$ e $\nabla u = \rho_0^{k\alpha} \nabla v + b_k$, temos que v satisfaz a seguinte equação diferencial,

$$\left|\rho^{-k\alpha} b_k + \nabla v\right|^{\gamma} F_k(X, D^2 v) = f_k(X)$$

onde $F_k : B_1 \times S(d) \to R$ é dada por

$$F_k(X, M) := \rho_0^{k(1-\alpha)} F\left(\rho_0^k X, \frac{1}{\rho_0^{k(1-\alpha)}} M\right) \ \text{ e } \ f_k(X) = \rho_0^{k[1-\alpha(1+\gamma)]} f(\rho_0^k X)$$

Pela observação 4.3 o operador F_k é (λ, Λ)-elíptico, já que F é um operador (λ, Λ) elíptico. Além disso, a ω-norma da oscilação dos respectivos coeficientes de F_k, como definido em (5.4), não aumenta. Como $f_k(X) = \rho_0^{k[1-\alpha(1+\gamma)]} f(\rho_0^k X)$, temos a seguinte estimativa

$$\|f_k\|_{L^\infty(B_1)} \leq \rho_0^{k[1-\alpha(1+\gamma)]} \|f\|_{L^\infty(B_{\rho_0^k})}. \tag{4.12}$$

Devido a escolha do expoente feita em (4.11), a saber $\alpha \leq \frac{1}{1+\gamma}$, tem-se que $k[1-\alpha(1-\gamma)] \geq 0$ e como $0 < \rho_0 < \frac{1}{2}$ segue que $||f_k||_{L^\infty(B_1)} \leq \epsilon_0$. Desta forma, mostramos que v está sob as hipóteses do Lema 4.1, que garante a existência de uma função afim $\tilde{\ell}(X) := a + \vec{b} \cdot X$ com $|a| + |\vec{b}| \leq C(d, \lambda, \Lambda)$, tal que

$$\sup_{B_{\rho_0}} |v(X) - \tilde{\ell}(X)| \leq \rho_0^{1+\alpha}. \tag{4.13}$$

Substituindo v na expressão acima obtemos:

$$\sup_{B_{\rho_0}} \left| \frac{(u-\ell_k)(\rho_0^k X)}{\rho_0^{k(1+\alpha)}} - \tilde{\ell}(X) \right| \leq \rho_0^{1+\alpha},$$

ou seja,

$$\sup_{B_{\rho_0}} |u(\rho_0^k X) - (\ell_k(\rho_0^k X) - \tilde{\ell}(X)\rho_0^{k[1+\alpha]})| \leq \rho_0^{(1+\alpha)(k+1)}$$

Observe que dado qualquer $Z \in B_{\rho_0^{k+1}}$ podemos escrevê-lo como $Z = \rho_0^k X$, onde $X = \frac{1}{\rho_0^k} Z \in B_{\rho_0}$.Assim,

$$|u(Z) - \ell_{k+1}| = |u(\rho_0^k X) - \ell_{k+1}| \leq \sup_{B_{\rho_0}} |u(\rho_0^k X) - \ell_{k+1}| \leq \rho_0^{(1+\alpha)(k+1)}$$

onde

$$\ell_{k+1}(X) := \ell_k(\rho_0^k X) - \tilde{\ell}(X)\rho_0^{k[1+\alpha]}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \ell_{k+1}(X) &:= a_k + \vec{b}_k \cdot \rho_0^k X + a\rho_0^{k(\alpha+1)} + \vec{b} \cdot \rho_0^{k(\alpha+1)} X \\ &= (a_k + a\rho_0^{k(\alpha+1)}) + (\vec{b}_k \cdot \rho_0^k X + \vec{b} \cdot \rho_0^k X \rho_0^{k\alpha}) \\ &= (a_k + a\rho_0^{k(\alpha+1)}) + (\vec{b}_k \cdot + \vec{b} \cdot \rho_0^{k\alpha}) X \end{aligned}$$

Dessa forma, definamos a $(k+1)$-ésima função afim, $\ell_{k+1}(X) := a_{k+1} + \vec{b}_{k+1} \cdot X$ da seguinte forma:

$$a_{k+1} := a_k + \rho_0^{(1+\alpha)k} a \quad \text{e} \quad \vec{b}_{k+1} := \vec{b}_k + \rho_0^{\alpha k} \vec{b}.$$

Desfazendo o reescalonamento em (4.13), obtemos

$$\sup_{B_{\rho_0^{k+1}}} |u(X) - \ell_{k+1}(X)| \leq \rho_0^{(k+1)(1+\alpha)}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} |a_{k+1} - a_k| + \rho_0^k |\vec{b}_{k+1} - \vec{b}_k| &= |a||\rho_0^{k(1+\alpha)}| + \rho_0^k |\vec{b}||\rho_0^{k\alpha}| \\ &= |a|\rho_0^{k(\alpha+1)} + |\vec{b}|\rho_0^{k(\alpha+1)} \\ &= (|a| + |\vec{b}|)\rho_0^{k(\alpha+1)} \\ &< C_0(d, \lambda, \Lambda)\rho_0^{k(\alpha+1)} \end{aligned}$$

e a prova do Lema 4.2 está completa. □

Observação 4.3. O operador F_k é (λ, Λ)-elíptico.

De fato, como F é (λ, Λ)-elíptico temos:

$$\begin{aligned} F_k(X, M+P) - F_k(X, M) &= \rho_0^{k(1-\alpha)} F(\rho_0^k X, \frac{1}{\rho_0^{k(1-\alpha)}}[M+P]) - \rho_0^{k(1-\alpha)} F(\rho_0^k X, \frac{1}{\rho_0^{k(1-\alpha)}} M) \\ &= \rho_0^{k(1-\alpha)} [F(\rho_0^k X, \tilde{M} + \tilde{P}) - F(\rho_0^k X, \tilde{M})], \end{aligned}$$

onde
$$\tilde{M} = \frac{1}{\rho_0^{k(1-\alpha)}} M \quad e \quad \tilde{P} = \frac{1}{\rho_0^{k(1-\alpha)}} P.$$
Observe que $\tilde{M} \in S(n)$ e que $\tilde{P} \geq 0$. Então,

$$\lambda \|\tilde{P}\| \leq F(\rho_0^k X, \tilde{M} + \tilde{P}) - F(\rho_0^k X, \tilde{M}) \leq \Lambda \|\tilde{P}\| \tag{4.14}$$

Multiplicando (4.14) por $\tau := \rho_0^{k(1-\alpha)}$ obtemos

$$\lambda \|P\| \leq F_k(X, M + P) - F_k(X, M) \leq \Lambda \|P\|.$$

5 O RESULTADO PRINCIPAL

Neste capítulo iremos tratar da obtenção da regularidade ótima para equações elípticas degeneradas da forma:

$$\mathcal{H}(X, \nabla u)F(X, D^2u) = f(X) \quad \text{em} \quad B_1, \tag{5.1}$$

onde F é uniformemente elíptica, $f \in L^\infty$ e para algum $\gamma > 0$, $\mathcal{H}$ satisfaz a seguinte condição de degenerescência,

$$\lambda|p|^\gamma \leq \mathcal{H}(X, p) \leq \Lambda|p|^\gamma \tag{5.2}$$

para cada $p \in \mathbb{R}^d$ e $X \in B_1$. Para efeito de normalização, assumiremos sem perda de generalidade que $F(X, 0) = 0$ para todo $X \in B_1$.

Como mencionado outras vezes nesse presente trabalho, segue da teoria de Krylov-Safanov, veja ROBERTS, CAFFARELLI, and CABRÉ (1995), que soluções de viscosidade da equação

$$F(X, D^2u) = f(X) \in L^\infty(B_1),$$

são localmente de classe $C^{1,\beta}$, para todo $0 < \beta < \alpha_0$. Veja TEIXEIRA (2014). Soluções da equação de coeficientes constantes

$$F(D^2u) = 0,$$

são localmente de classe C^{1,α_0}, para algum expoente $\alpha_0 = \alpha_0(d, \lambda, \Lambda)$ universal. No decorrer deste capítulo, α_0 será entendido como tal expoente. Caso não tenha sido imposta nenhuma condição adicional à F, α_0 é de fato o expoente ótimo. Veja NADIRASHVILI (2007, 2008) e NADIRASHVILI and VLADUTS (2011). Para a classe de equações com coeficientes variáveis, soluções são em geral, somente de classe C^{0,α_0} e esta regularidade é ótima, a menos que alguma condição de continuidade em seus coeficientes seja imposta. Tal condição é bastante natural, estando sempre presente na teoria linear: $Lu = a_{ij}D_{ij}u$. Para o nosso objetivo de encontrar uma estimativa $C^{1,\alpha}$ para soluções da equação (5.1), iremos daqui em diante, assumir uma hipótese de continuidade nos coeficientes de F, a saber:

$$\sup_{\|M\| \leq 1} \frac{|F(X, M) - F(Y, M)|}{\|M\|} \leq C \cdot \omega(|X - Y|), \tag{5.3}$$

onde $C \geq 0$ é uma constante positiva e ω é um módulo de continuidade normalizado, isto é, $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é não-decrescente com $\omega(0^+) = 0$ e $\omega(1) = 1$. Para uma notação conveniente, iremos denotar

$$\|F\|_\omega := \inf\left\{C>0\ :\ \sup_{\|M\|\le 1}\frac{|F(X,M)-F(Y,M)|}{\|M\|}\le C\omega(|X-Y|),\ \forall X,Y\in B_1\right\}. \tag{5.4}$$

Para concluir os nosso comentários iniciais sob a condição de continuidade (5.3), soluções de viscosidade da equação

$$F(X,D^2u)=f(X)\in L^\infty(B_1),$$

são localmente de classe $C^{1,\beta}$, para todo $0<\beta<\alpha_0$. Veja CAFFARELLI (1988); TEIXEIRA (2014).

Iremos agora apresentar o principal resultado acerca da teoria que será desenvolvida neste capítulo. Tal resultado fornecerá uma estimativa de regularidade ótima para funções u, satisfazendo

$$|\nabla u|^\gamma\cdot|F(D^2u)|\lesssim 1,\quad \gamma>0, \tag{5.5}$$

no sentido da viscosidade, para algum operador uniformemente elíptico F. Como comentado no início deste capítulo, para o caso não-degenerado, isto é, $\gamma=0$, a melhor regularidade possível é $C^{1+\alpha_0^-}_{\text{loc}}$. O ponto delicado, está em obter uma estimativa universal precisa o suficiente para que o grau de singularidade $\gamma>0$, que surge da equação (5.5) seja explicitamente sentido, ao longo do conjunto singular $(\nabla u)^{-1}(0)$.

Para entender alguns fatos acerca do que devemos esperar neste estudo, vamos olhar de um modo ingênuo para a seguinte EDO:

$$\begin{cases} u''(t)=(u')^{-\theta},\\ u(0)=u'(0)=0,\end{cases}$$

que pode ser resolvida de uma maneira simples para $t\in(0,\infty)$. A solução é $u(t)=t^{\frac{2+\gamma}{1+\gamma}}$. Após algumas inferências heurísticas, torna-se razoável aceitar que $C^{\frac{2+\gamma}{1+\gamma}}$ é uma barreira superior para qualquer estimativa de regularidade universal para a equação (5.5). Portanto, a estimativa de regularidade ótima ideal que se deve esperar para funções satisfazendo a Equação (5.5) deve ser $C^{1,\min\{\alpha_0^-,\frac{1}{1+\gamma}\}}$. Devido aos comentários feitos acima, estamos aptos a formular o principal resultado o qual foi dedicado este capítulo.

Teorema 5.1. *Seja u uma solução de viscosidade de*

$$\mathcal{H}(X,\nabla u)F(X,D^2u)=f(X)\quad \textit{em}\quad B_1. \tag{5.6}$$

Assuma $f\in L^\infty(B_1)$, $\mathcal{H}$ satisfaz (5.2) e $F\colon B_1\times S(d)\to\mathbb{R}$ é uniformemente elíptico com *coeficientes contínuos, isto é, satisfazendo* (2.4) *e* (5.3). *Fixado um expoente*

$$\alpha \in (0, \alpha_0) \cap \left(0, \frac{1}{1+\gamma}\right],$$

então existe uma constante $C(d, \lambda, \Lambda, \gamma, \|F\|_\omega, \|f\|_\infty, \alpha) > 0$, *que dependente apenas de* $d, \lambda, \Lambda, \gamma, \|F\|_\omega, \|f\|_\infty$ *e* α, *tal que*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(d, \lambda, \Lambda, \gamma, \|F\|_\omega, \|f\|_\infty, \alpha) \cdot \|u\|_{L^\infty}.$$

Em suma, a estratégia dada no capítulo anterior atesta que, para mostramos o Teorema 5.1, é suficiente trabalhar sob o regime de pequenez posto como hipótese na demonstração do Lema 4.1. Uma vez estabelecida a estimativa regularidade ótima para a função normalizada u, a estimativa correspondente para v será prontamente obtida. A partir de agora faremos esse processo detalhadamente.

5.1 Regularidade local sob o regime de pequenez

Nesta seção, ainda sob as hipóteses dos Lemas 4.1 e 4.2, iremos estabelecer, para um expoente fixado α satisfazendo a condição (4.11), a existência de uma função afim

$$\ell_\star(X) := a_\star + \vec{b}_\star \cdot X,$$

tal que

$$|\vec{b}_\star| + |a_\star| \leq C,$$

onde

$$\sup_{B_r} |u(X) - \ell_\star(X)| \leq C r^{1+\alpha}, \quad \forall r \ll 1, \tag{5.7}$$

para uma constante positiva C que depende somente das constantes d, λ, Λ, γ e α.

Para isso iremos mostrar que para concluirmos a prova do Teorema 5.1 é suficiente obter que a estimativa (5.7) é válida na origem para uma solução u sob as hipóteses dos Lemas 4.1 e 4.2.

De fato, seja $v \in C(B_1)$ uma solução no sentido da viscosidade de

$$\mathcal{H}(X, \nabla v) F(X, D^2 v) = f(X),$$

onde $\mathcal{H}$ satisfaz (1.4) e F é um operador (λ, Λ)-elíptico com coeficientes contínuos, ou seja, que satisfazem (2.4) e (5.3). Fixemos um ponto $Y_0 \in B_{1/2}$ e definamos $u \colon B_1 \to \mathbb{R}$ como

$$u(X) := \frac{v(\eta X + Y_0)}{\tau},$$

para parâmetros η e τ a serem determinados. Note que $D^2 v = \frac{D^2 u}{\eta^2} \tau$ e $\nabla v = \frac{\nabla u}{\eta} \tau$, assim temos que u é solução no sentido da viscosidade para

$$\mathcal{H}_{\eta,\tau}(X,\nabla u)F_{\eta,\tau}(X,D^2u)=f_{\eta,\tau}(X),$$

onde $F_{\eta,\tau}:B_1\times S(d)\to R$ é dada por:

$$\begin{aligned} F_{\eta,\tau}(X,M) &:= \frac{\eta^2}{\tau}F\left(\eta X+Y_0,\frac{\tau}{\eta^2}M\right) &(5.8)\\ \mathcal{H}_{\eta,\tau}(X,p) &:= \left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{\gamma}\mathcal{H}\left(\eta X+Y_0,\frac{\tau}{\eta}p\right) &(5.9)\\ f_{\eta,\tau}(X) &:= \frac{\eta^{\gamma+2}}{\tau^{\gamma+1}}f(\eta X+Y_0). &(5.10)\end{aligned}$$

De maneira análoga a observação 4.3 temos que $F_{\eta,\tau}$ é uniformemente elíptica com as mesmas constantes de elipticidade do operador original F, ou seja, tal operador é (λ,Λ)-elíptico. Note também que $\mathcal{H}_{\eta,\tau}$ satisfaz a mesma condição de degenerescência (1.4), com as mesmas constantes, pois como

$$\lambda|\vec{p}|^{\gamma}\leq\mathcal{H}(X,\vec{p})\leq\Lambda|\vec{p}|^{\gamma}$$

para algum $\gamma>0$. Assim, sendo $\vec{q}=\dfrac{\tau}{\eta}\vec{p}$ tem-se

$$\lambda|\vec{q}|^{\gamma}\leq\mathcal{H}(\eta X+Y_0,\vec{q})\leq\Lambda|\vec{q}|^{\gamma}$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $\sigma=\left(\dfrac{\eta}{\tau}\right)^{\gamma}$ obtemos:

$$\lambda\left|\frac{\eta}{\tau}\left(\frac{\tau}{\eta}\vec{p}\right)\right|^{\gamma}\leq\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{\gamma}\mathcal{H}(\eta X+Y_0,\vec{q})\leq\Lambda\left|\frac{\eta}{\tau}\left(\frac{\tau}{\eta}\vec{p}\right)\right|^{\gamma}$$

ou seja,

$$\lambda|\vec{p}|^{\gamma}\leq\mathcal{H}_{\eta,\tau}(X,\vec{p})\leq\Lambda|\vec{p}|^{\gamma}$$

Vamos inicialmente escolher

$$\tau:=\max\left\{1,\|v\|_{L^\infty(B_1)}\right\},$$

para que tenhamos $|u|\leq 1$ em $B_1(Y_0)$, pois $|u|=|v|\leq 1$ em B_1 se $\tau=1$ ou $|u|\leq\dfrac{\|v\|_\infty}{\|v\|_\infty}=1$ se $\tau=\|v\|_\infty$. Agora para o ε_0 universal que surge nas hipóteses do Lema 4.1, faremos a seguinte escolha

$$\eta:=\min\left\{1,\cdot(\varepsilon_0\|f\|_{L^\infty}^{-1})^{\frac{1}{\gamma+2}},\omega^{-1}\left(\frac{\varepsilon_0}{\|F\|_\omega}\right)\right\},$$

pois assim teremos $\|f_{\tau,\eta}\|_\infty < \varepsilon_0$ temos $\dfrac{\eta^{\gamma+2}}{\tau^{\gamma+1}}\|f\|_\infty < \varepsilon_0$ assim, $\eta^{\gamma+2}\|f\|_\infty < \varepsilon_0$, ou seja, $\eta < (\varepsilon_0\|f_\infty\|^{-1})^{\frac{1}{\gamma+2}}$,e

$$\begin{aligned}
\frac{|F_{\eta,\tau}(X,M) - F_{\eta,\tau}(0,M)|}{||M||} &= \frac{\frac{\eta^2}{\tau}\left|F\left(\eta X + Y_0, \frac{\tau}{\eta^2}M\right) - F\left(0, \frac{\tau}{\eta^2}M\right)\right|}{||M||} \\
&= \frac{|F(\eta X + Y_0, M') - F(0,M')|}{||M'||}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sup_{\|M\|\leq 1} \frac{|F_{\eta,\tau}(X,M) - F_{\eta,\tau}(0,M)|}{\|M\|} &= \sup_{\|M'\|\leq 1} \frac{|F(\eta X + Y_0, M') - F(0,M')|}{\|M'\|} \\
&\leq C\omega(|\eta X + Y_0 - \eta Y - Y_0|) \\
&= C\omega(\eta|X - Y|) \\
&\leq C\omega(\eta)
\end{aligned}$$

Na última desigualdade acima foi usado o fato da função ω ser crescente em $(0,1)$. Com isso queremos que $C\omega(\eta) \leq \epsilon_0$ logo, $\eta \leq \omega^{-1}\left(\dfrac{\epsilon_0}{C}\right)$. Obtivemos,

✓ $|u| \leq 1$ em B_1;

✓ $\|f_{\eta,\tau}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_0$;

✓ $\|M\|^{-1}\|F_{\eta,\tau}(X,M) - F_{\eta,\tau}(0,M)\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0$.

Inicialmente, segue de (4.9), que os coeficientes da sequência de funções afins ℓ_k geradas no Lema 4.2, ou seja, $\vec{b}_k$ e a_k, são sequências de Cauchy em $\mathbb{R}^d$ e em $\mathbb{R}$, respectivamente. Sejam $\vec{b}_\star$ e $a_\star$ os coeficientes limites, isto é,

$$\lim_{k\to\infty} \vec{b}_k =: \vec{b}_\star \in \mathbb{R}^d \tag{5.11}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k =: a_\star \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

Além disso, por (4.9) temos que $|a_{k+1} - a_k| < \rho_0^{k(1+\alpha)}$ e $|b_{k+1} - b_k| < \rho_0^{k\alpha}$ e portanto,

$$\begin{aligned}
|a_{k+d} - a_k| &\leq |a_{k+d} - a_{k+d-1}| + |a_{k+d-1} - a_{k+d-2}| + ... + |a_{k+1} - a_k| \\
&\leq C_0(\rho_0^{(k+d-1)(1+\alpha)} + \rho_0^{(k+d-2)(1+\alpha)} + ... + \rho_0^{(k+1)(1+\alpha)} + \rho_0^{k(1+\alpha)}) \\
&= C_0\rho_0^{k(1+\alpha)}(\rho_0^{(d-1)(1+\alpha)} + \rho_0^{(d-2)(1+\alpha)} + ... + \rho_0^{(1+\alpha)} + 1) \\
&\leq \frac{C_0}{1-\rho_0}\rho^{k(1+\alpha)}.
\end{aligned}$$

De maneira análago tem-se

$$|b_{k+d} - b_k| \leq \frac{C_0}{1-\rho}\rho_0^{k\alpha}.$$

Fazendo $k \to \infty$ nas duas desigualdades acima, temos que:

$$\begin{aligned} |a_\star - a_k| &\leq \frac{C_0}{1-\rho_0}\rho_0^{k(1+\alpha)}, & (5.13)\\ |\vec{b}_\star - \vec{b}_k| &\leq \frac{C_0}{1-\rho_0}\rho_0^{k\alpha}. & (5.14) \end{aligned}$$

Agora, fixado $0 < r < \rho_0^k$, iremos escolher $k \in$ tal que

$$\rho_0^{k+1} < r \leq \rho_0^k.$$

Por fim, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \sup_{B_r}|u(X) - \ell_\star(X)| &\leq \sup_{B_{\rho_0^k}}|u(X) - \ell_\star(X)| \\ &\leq \sup_{B_{\rho_0^k}}|u(X) - \ell_k(X)| + \sup_{B_{\rho_0^k}}|\ell_k(X) - \ell_\star(X)| \\ &\leq \rho_0^{k(1+\alpha)} + \frac{C_0}{1-\rho_0}\rho_0^{k(1+\alpha)} \\ &= \rho_0^{k(1+\alpha)}\left(1 + \frac{C_0}{1-\rho_0}\right) \\ &= \frac{\rho_0^{k(1+\alpha)}}{\rho_0^{(k+1)(1+\alpha)}}\left(1 + \tfrac{C_0}{1-\rho_0}\right)\rho_0^{(k+1)(1+\alpha)} \\ &= \frac{1}{\rho_0^{1+\alpha}}\left(1 + \tfrac{C_0}{1-\rho_0}\right)\rho_0^{(k+1)(1+\alpha)} \\ &= \frac{1}{\rho_0^{1+\alpha}}\left(1 + \tfrac{C_0}{1-\rho_0}\right)\rho_0^{(k+1)(1+\alpha)} \\ &\leq \frac{1}{\rho_0^{1+\alpha}}\left(1 + \frac{C_0}{1-\rho_0}\right)\cdot r^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

logo $||u||_{C^{1,\alpha}} \leq C(d, \lambda, \Lambda, \gamma, \|F\|_\omega, \|f\|_\infty, \alpha) \cdot \|u\|_{L^\infty}$ e a prova do Teorema 5.1 está completa. □

Segue no Corolário abaixo, uma importante consequência do Teorema 5.1.

Corolário 5.2. *Seja u solução de viscosidade de*

$$\mathcal{H}(X, \nabla u)F(D^2u) = f(X) \quad in \quad B_1. \tag{5.15}$$

Assuma $f \in L^\infty(B_1)$, $\mathcal{H}$ satisfazendo (5.2), F uniformemente elíptica e côncava. Então u é localmente $C^{1,\frac{1}{1+\gamma}}$ e essa regularidade é ótima.

Demonstração. Note que estamos nas hipóteses do teorema 4.1, daí temos que fixado $\alpha \in (0, \alpha_0) \cap \left(0, \dfrac{1}{1+\gamma}\right]$ existe uma contante $C = C(d, \gamma, \lambda, \Lambda, \|F\|_w, \|f\|_\infty, \alpha) > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C = C(d, \gamma, \lambda, \Lambda, \|F\|_w, \|f\|_\infty, \alpha)\|u\|_\infty$$

Por outro lado temos que soluções de equações côncavas são localmente de classe $C^{1,1}$ pelo Teorema de Evans-Krylov. Logo $u \in C^{1,\frac{1}{1+\gamma}}$ localmente e essa regularidade é ótima. $\square$

É interessante compreender o Teorema 5.1 como um modelo de classificação para equações elípticas degeneradas, conectando a magnitude da degenerescência do operador à regularidade ótima de suas respectivas soluções. De fato, como mencionado anteriormente, várias equações tem seus graus de degenerescência comparável a uma equação modelo da forma $|\nabla u|^{\gamma}|F(D^2u)| \lesssim 1$. Iremos explorar essa perspectiva na próxima seção.

6 APLICAÇÕES E PERSPECTIVAS

A heurística da classificação de degenerescência mencionado no parágrafo anterior, possui de fato um vasto campo de aplicabilidade. Nesta seção intermediária, iremos comentar sobre algumas consequências que a estimativa de regularidade ótima dispõe para teoria de regularidade elíptica.

Na sequência, iremos usar o Teorema 5.1 e o Corolário 5.2 para solucionar casos particulares de alguns problemas abertos bastante conhecidos. O resultado obtido nesta seção nos dá a esperança de que progressos decisivos possam ser contemplados para casos mais gerais em um futuro próximo.

6.1 Equações da teoria de supercondutividade

Começaremos nesta seção, comentando sobre algumas aplicações que o Teorema 5.1 fornece para a teoria de supercondutividade, onde as equações totalmente não-lineares do tipo:

$$F(X, D^2u) = g(X, u)\chi_{\{|\nabla u|>0\}} \tag{6.1}$$

regem os modelos matemáticos desta teoria. A equação (6.1) representa a equação estacionária para a "mean field theory of superconducting vortices"quando a função de fluxo escalar admite uma dependência funcional no potencial magnético escalar, veja CHAPMAN, RUBINSTEIN, and SCHATZMAN (1996). Propriedades de existência e regularidade da Equação (6.1) foram estudadas em CAFFARELLI and SALAZAR (2002) e CAFFARELLI, SALAZAR, and SHAHGHOLIAN (2004). A novidade no estudo da Equação (6.1) está em testar a equação apenas por polinômios que tocam a solução com $|\nabla P(X_0)| \neq 0$. Foi provado em CAFFARELLI and SALAZAR (2002), corolário 7, que soluções são localmente $C^{0,\alpha}$ para algum $0 < \alpha < 1$. Para operadores côncavos, foi provado em CAFFARELLI and SALAZAR (2002) corolário 8, que soluções estão em $W^{2,p}$. Uma aplicação da fórmula de monotonicidade de Alt-Caffarelli-Friedman CAFFARELLI and SALAZAR (2002), Lema 9, fornece regularidade $C^{1,1}$ para o problema particular

$$\Delta u = cu\ \chi_{\{|\nabla u|>0\}}. \tag{6.2}$$

A Equação (6.1) pode ser obtida como o problema limite, quando $\delta \to 0$, para a família de equações singulares da forma

$$|\nabla u_\delta|^\delta \cdot F(X, D^2u_\delta) = g(X, u_\delta), \quad B_1. \tag{E_δ}$$

De fato, segue do Teorema 5.1 que se u_δ é uma solução normalizada,ou seja, $||u_\delta||_{L^\infty} = 1$

de (E_δ), para δ suficientemente pequeno, isto é, para

$$\delta < 1-\alpha_0^-, \text{ para } \alpha_0^- \in (0,\alpha_0)\cap\left(0, \frac{1}{1+\gamma}\right]$$

então existe uma constante $C(d,\lambda,\Lambda,\gamma,||g||_w,||g||_\infty,\alpha_0^-) > 1$ que não depende de δ,tal que,

$$\|u_\delta\|_{C^{1,\alpha_0^-}_{\text{loc}}} \leq C||u_\delta||_{L^\infty} = C. \tag{6.3}$$

Em particular, a estimativa (6.3) nos dá compacidade local para a família de soluções $\{u_\delta\}_{\delta>0}$ de (E_δ).Assim pelo teorema de Ascoli-Arzelá,a menos de uma subsequência,seja u_0 a função limite de tal sequência, ou seja,

$$u_0 = \lim_{j\to 0} u_{\delta_j},$$

para $\delta_j = \text{o}(1)$. De (6.3), temos,

$$\nabla u_{\delta_j} \longrightarrow \nabla u_0 \quad \text{localmente uniforme,} \tag{6.4}$$
$$u_0 \in C^{1,\alpha_0^-}_{\text{loc}}(B_1). \tag{6.5}$$

Agora, fixemos um ponto regular $Z \in B_1$ de u_0, isto é,

$$|\nabla u_0(Z)| > 0.$$

A convergência gradiente (6.4) e a estimativa (6.5) nos dá a existência de $\eta > 0$ pequeno, tal que

$$\inf_{B_\eta(Z)} |\nabla u_\delta| \geq \frac{1}{10}|\nabla u_0(Z)| =: c_0,$$

para todo $\delta \ll 1$. Assim,

$$g(X,u_\delta)\cdot|\nabla u_\delta|^{-\delta} \longrightarrow g(X,u_0), \quad \text{quando} \quad \delta\longrightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } B_\eta(Z).$$

Resumimos a discussão acima com o seguinte Teorema:

Teorema 6.1. *Seja $u_\delta \in C^0(B_1)$ uma solução de viscosidade de (E_δ), com $|u_\delta| \leq 1$, $\delta \ll 1$, onde g é contínua em u e mensurável e limitada em X. Assuma que o operador F está sob as hipóteses do Teorema 5.1. Então, fixado um número $\alpha < \alpha_0(d,\lambda,\Lambda)$, para δ suficientemente pequeno, temos*

$$\|u_\delta\|_{C^{1,\alpha}(B_{4/5})} \leq C(d,\lambda,\Lambda,\alpha).$$

Em particular,

$$u_\delta \to u_0 \in C^{1,\alpha}(B_{1/2}),$$

e u_0 *é uma solução de viscosidade de* (6.1).

A principal vantagem do Teorema 6.1, em comparação com a teoria de regularidade desenvolvida em CAFFARELLI and SALAZAR (2002), é que ela nos dá a estimativa $C^{1,\alpha}$ ótima, para o caso mais geral de operadores totalmente não lineares, não necessariamente côncavos.

6.2 Visitando a teoria do ∞-laplaciano

Iremos agora visitar a teoria do operador ∞-laplaciano ,

$$\Delta_\infty v := \sum_{i,j} v_i v_j v_{ij} \tag{6.6}$$

a qual está relacionada ao problema de melhor extensão Lipschitz para um dado de fronteira fixado. Além disso, o operador acima tem como características a não-linearidade e alta degenerescência. A teoria das funções infinito-harmônicas, isto é, soluções da EDP homogênea

$$\Delta_\infty h = 0,$$

tem recebido uma grande atenção. Um dos principais problemas em aberto da teoria moderna de EDPs está em mostrar que funções infinito-harmônicas são de classe C^1. Essa conjectura tem sido respondida positivamente por O. Savin SAVIN (2005) no plano. Evans e Savin, EVANS (2008) melhoraram o resultado para $C^{1,\alpha}$ para algum $\alpha > 0$ pequeno, porém somente em duas dimensões. Muito recentemente, Evans e Smart provaram que funções infinito-harmônicas são q.t.p. diferenciáveis independentemente da dimensão, veja EVANS and SMART (2011). Não obstante, características de não-continuidade de ∇u podem ser inferidos por argumentos ingênuos. O famoso exemplo de função infinito-harmônica

$$a(x,y) := x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} \tag{6.7}$$

devido a Aronsson por volta dos anos 60, determina a regularidade ótima ideal para tal problema. Ou seja, a teoria de regularidade universal para funções infinito-harmônicas não pode ir além de $C^{1,\frac{1}{3}}$. Até onde sabemos, não houve antes qualquer resultado significativo de que funções infinito-harmônicas devem ou não ter uma regularidade $C^{1,\frac{1}{3}}$ universal, a menos de especulações baseadas no exemplo de Aronsson. De outra maneira, porém, a desconfiança para a validade da conjectura da regularidade $C^{1,\frac{1}{3}}$ para funções infinito-hamônicas se confirma explorando as propriedades de escalonamento da equação. Por exemplo, podemos escrever o operador infinito-laplaciano como

$$\Delta_\infty v = (\nabla v)^t \cdot D^2 v \cdot \nabla v,$$

e desta forma, torna-se tentador comparar suas características de degenerescência com

$$|\nabla u|^2 \cdot |\Delta u| \lesssim 1, \tag{6.8}$$

que possui as mesmas propriedades de escalonamento de Δ_∞ e cujas soluções são $C^{1,\frac{1}{1+2}}$ regulares, do Corolário 5.2. Embora, em geral não seja verdade que funções infinito-harmônicas satisfazem (6.8), essa observação nos leva a um interessante guia heurístico.

Note que o exemplo de Aronsson - como quaisquer exemplos populares na teoria de EDPs - é uma função de variáveis separáveis. Na sequência, como uma aplicação do Corolário 5.2, mostraremos que qualquer função infinito-harmônica com variáveis separáveis é de fato, localmente $C^{1,\frac{1}{3}}$.

Proposição 6.2. *Seja $u\colon B_1 \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função infinito-harmônica. Assuma que u é uma função de variáveis separáveis, i.e.,*

$$u(X) = \sigma_1(x_1) + \sigma_2(x_2) + \cdots \sigma_d(x_d),$$

para $\sigma_i \in C^0(B_1)$. Então $u \in C^{1,\frac{1}{3}}(B_{1/2})$.

Demonstração. Primeiramente note que $\nabla u = (\sigma_1' x_1, \cdots, \sigma_d' x_d)$ e

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \sigma_1''(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2''(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_d''(x_d) \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$0 = \Delta_\infty u = |\sigma_1'(x_1)|^2 \sigma_1''(x_1) + |\sigma_1'(x_2)|^2 \sigma_2''(x_2) + \cdots + |\sigma_d'(x_d)|^2 \sigma_d''(x_d). \tag{6.9}$$

Notamos, contudo, que o i-ésimo termo na equação (6.9) depende apenas da variável x_i. Portanto, como a soma acima é nula, cada termo deve ser constante, isto é,

$$|\sigma_i'(x_i)|^2 \sigma_i''(x_i) = \beta_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \beta_i = 0. \tag{6.10}$$

E portanto,

$$\sum_{i=1}^{d} |\sigma_i'(x_i)|^2 \sigma_i''(x_i) = \sum_{i=1}^{d} \beta_i = 0.$$

Aplicando a regularidade $C^{1,\frac{1}{3}}$ para cada σ_i que segue do Corolário 5.2, temos que a prova da Proposição 6.2 está concluída. $\square$

Em alguns problemas físicos e geométricos, soluções herdam a simetria radial do dado de fronteira.É portanto, interessante analisarmos a regularidade ótima para soluções radialmente simétricas.

Na sequência provaremos que funções radialmente simétricas cujo infinito laplaciano é limitado no sentido da viscosidade é de classe $C^{1,\frac{1}{3}}$ e esta regularidade é ótima como por exemplo

$$\Delta_\infty |X|^{\frac{4}{3}} = cte$$

Proposição 6.3. *Seja $u \in C^0(B_1)$ uma função radialmente simétrica,isto é, $u(X) = v(r)$ para $r := |X|$,satisfazendo*

$$\Delta_\infty u = f(|X|, u) \quad em \quad B_1,$$

no sentido da viscosidade. Assuma $f \in C^0([0,1]x\mathbb{R})$.Então $u \in C^{1,\frac{1}{3}}_{loc}$.

Demonstração. Observemos inicialmente que,

$$u_i = v'(r)\frac{X_i}{|X|} \quad \text{e} \quad u_{ij} = v''(r)\frac{X_i X_j}{|X|^2} + v'(r)\left[\frac{1}{|X|}\delta_{ij} - \frac{1}{|X|^3}X_i X_j\right]$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_\infty u &= \frac{(v'(r))^3}{|X|^5}\sum_{i=1}^{d}(X_i)^2 - \frac{(v'(r))^3}{|X|^5}\left(\sum_{i,j=1}^{d}(X_i)^2(X_j)^2\right) + \frac{v''(r)(v'(r))^2}{|X|^4}\left(\sum_{i,j=1}^{d}(X_i)^2(X_j)^2\right)\\
&= \frac{(v'(r))^3}{|X|} - \frac{(v'(r))^3}{|X|} + v''(r)(v'(r))^2\\
&= v''(r)(v'(r))^2
\end{aligned}$$

Assim,

$$v''(r)(v'(r))^2 = f(r, v(r)), \tag{6.11}$$

no sentido da viscosidade. Como

$$f(X) \in L^\infty_{\text{loc}}(B_1),$$

podemos aplicar o Corolário 5.2 para obtermos $u \in C^{1,\frac{1}{1+2}}_{\text{loc}}$ o que prova a proposição. □

Comentamos que a regularidade da Proposição 6.3 é ótima quando

$$\Delta_\infty |X|^{\frac{4}{3}} = \text{constante}.$$

Ainda iremos mencionar que, para funções com o infinito-laplaciano limitados, E. Lindgren, seguindo as ideias de EVANS and SMART (2011), estabeleceu recentemente estimativas Lipschitz e diferenciabilidade q.t.p..

6.3 Outras equações elípticas degeneradas

Um outro exemplo interessante a ser explorado é o operador p-laplaciano:

$$\Delta_p u := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \quad \text{para} \quad p \geq 2. \tag{6.12}$$

Ele aparece por exemplo na equação de Euler-Lagrange associada a integral p-energia

$$\int (Du)^p dX \to \min.$$

O estudo de equações envolvendo o operador p-laplaciano tem recebido uma grande atenção nos últimos 50 anos. Em particular, a teoria de regularidade para funções p-harmônicas tem sido um assunto de intensa investigação, desde o final dos anos 60, quando Uraltseva em URALTSEVA (1968) provou que soluções fracas da equação homogênea

$$\Delta_p h = 0, \tag{6.13}$$

é localmente de classe $C^{1,\alpha(d,p)}$, para algum $\alpha(d,p) > 0$. A regularidade ótima para funções p-harmônicas no plano foi obtida por Iwanec e Manfredi, em IWANIEC and MANFREDI (1989). O expoente ótimo de Hölder continuidade do gradiente de funções p-harmônicas em altas dimensões, $d \geq 3$, tem sido o maior problema em aberto desde então.

O operador p-laplaciano pode ser escrito na forma não-divergente, simplesmente aplicando formalmente as derivadas da seguinte forma:

$$\Delta_p u = |\nabla u|^{p-2}\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{p-4}\Delta_\infty u. \tag{6.14}$$

A noção de soluções fracas, usando a estrutura divergente em (6.12), e na forma não-divergente em (6.14) são equivalentes, veja JUUTINEN, LINDQVIST, and MANFREDI (2001).

Dentro do contexto de funções com o p-laplaciano limitado, é conjecturado que a regularidade ótima deve ser $C^{p'}$, onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Nosso próximo resultado nos dá uma resposta parcial para esta conjectura.

Proposição 6.4. *Seja $p \geq 2$ e u satisfazendo*

$$|\Delta_p u| \leq C, \quad \text{em } B_1.$$

Assuma u radialmente simétrica, i.e. $u(X) = v(r)$ para $r := |X|$. Então $v \in C^{p'}_{loc}(B_1)$.

Demonstração. Usando os mesmos argumentos da prova da Proposição 6.3 temos que

$$|v'|^{p-2}|v''| + |v'|^{p-4} \cdot v'^2|v''| \leq C,$$

no sentido da viscosidade. Portanto, como uma aplicação do Corolário 5.2, obtemos

$$v \in C^{1,\frac{1}{1+(p-2)}}_{\text{loc}} \cong C^{p'}_{\text{loc}},$$

e a proposição em questão está provada. □

Estimativas da forma $|\nabla u|^{p-2}|D^2u| < C$ não são raras em um certo número de problemas envolvendo o operador p-laplaciano, veja por exemplo LEE and SHAHGHOLIAN (2003). Vamos mencionar também que estimativas da forma $(\epsilon + |\nabla v|^2)^{\frac{p-1}{2}}|D^2v| < C$ são comumente obtidas para soluções fracas de equações da forma divergente, $D_i\left(A^i(Dv)\right) = 0$, veja DACOROGNA (2007), Capítulo 8.

Iremos encerrar esta seção, revisitando o operador infinito-laplaciano como o limite do operador p-laplaciano, quando $p \to \infty$. Seja $h \in C^0(B_1)$ uma função infinito-harmônica. Para cada $p \gg 1$, seja h_p a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta_p h_p &= 0, \text{ in } B_{3/4} \\ h_p &= h, \text{ on } B_{3/4}. \end{cases}$$

É sabido que h_p forma uma sequência de funções equicontínuas e $h_p \to h$ localmente uniforme para h. Em particular

$$\Delta_\infty h_p = \text{o}(1), \quad \text{quando } p \to \infty.$$

Dessa forma, iremos denotar h_p como a aproximação p-harmônica da função infinito-harmônica h em $B_{3/4}$.

Proposição 6.5. *Seja $h \in C^0(B_1)$ uma função infinito-harmônica h_p sua aproximação p-harmônica. Assuma $|\Delta_\infty h_p| = O(p^{-1})$ quando $p \to \infty$. Então $h \in C^{1,\frac{1}{3}}(B_{1/2})$.*

Demonstração. Como h_p é p-harmônica, temos que $\Delta_p h_p = 0$ e portanto,

$$|\nabla h_p|^2\Delta h_p - (2-p)\Delta_\infty h_p = 0 \quad \text{,ou seja,} \quad |\nabla h_p|^2\Delta h_p = (2-p)\Delta_\infty h_p.$$

Pelo princípio do máximo,

$$\|h_p\|_{L^\infty_{(B_{4/5})}} \leq \|h\|_{L^\infty_{(B_1)}} \leq \varepsilon,$$

uma vez que $h \in C^0(B_1)$. Por hipótese temos que $\Delta_\infty h_p| = \text{O}(p^{-1})$, assim $|\Delta_\infty h_p|p \leq C$ e segue da desigualdade triangular que $(2-p)\Delta_\infty h_p \in L^\infty_{(B_{\frac{1}{2}})}$. Da hipótese de aproximação e do Corolário 5.2, temos

$$\|h_p\|_{C^{1,\frac{1}{3}}(B_{1/2})} \leq C,$$

para uma constante C que independe de p. A prova da proposição segue por argumentos padrões. □

Outra interessante Proposição relaciona funções p-harmônicas com infinito-laplaciano limitado.

Proposição 6.6. *Seja u uma função p-harmônica $B_1 \subset \mathbb{R}^d$. Assuma $\Delta_\infty u \in L^\infty(B_1)$. Então $u \in C^{1,\frac{1}{3}}(B_{1/2})$.*

Demonstração. A prova segue por argumentos similares aos da prova da Proposição 6.5. □

Segue como um problema em aberto, se a Proposição 6.6 vale mesmo sem a hipótese extra de limitação do infinito-laplaciano. É plausível conjecturar que se $\alpha(d,p)$ é o expoente de Hölder continuidade ótimo (universal) para funções p-harmônicas, então

$$\alpha(d,p) > \frac{1}{3} + \mathrm{o}(1), \quad \text{quando p } \to \infty.$$

7 SOLUÇÕES MINIMAIS E GEOMETRIA NÃO DEGENERADA

Nessa seção provaremos o seguinte teorema:

Teorema 7.1. *Seja u solução minimal para o problema do valor limitado*

$$\begin{cases} \mathcal{H}(X,\nabla u)F(X,D^2u) &= f(X) \text{ em } \Omega \\ u &= \varphi \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

onde Ω é um domínio suave limitado, $\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ e $f \in C(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ satisfazendo $0 < \inf_{\Omega} f(X)$. Dado $X_0 \in S(u)$ e $r < dist(X_0, \partial\otimes)$, existe uma constante $\bar{C} = \bar{C}(d, inf f, \lambda, \Lambda, \gamma) > 0$, tal que

$$\bar{C}r^{\frac{2+\gamma}{1+\gamma}} + u(X_0) \leq \sup_{B_r(X_0)} u(X).$$

Antes de começarmos a prova desse teorema faremos alguns comentários sobre a existência de solução mínima para o problema de valor limitado acima. Aqui assumiremos que Ω é um domínio limitado e suave. O dado de contorno $\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ podemos assumir sem perda de generalidade, ser não negativa. O pressuposto fundamental para o nosso objetivo é que $f \in C(\Omega) \cap L^{\infty}(\bar{\Omega})$ satisfazendo,

$$0 < \inf_{\Omega} f(X)$$

Dada uma função g, vamos definir o operador elíptico da seguinte forma,

$$G_g[u] := \mathcal{H}(X,\nabla u)F(X,D^2u) - g(X)$$

A existência de solução minimal para equação (7.1), segue das orientações do método de Perron's, também chamado método sub-super solução. Para princípio de comparação em equações elípticas degeneradas, ver teorema 3.3 em CRANDALL, ISHII, and LIONS (1992) e Teorema 1.1 em BIRINDELLI and DEMENGEL (2004). Tal solução de viscosidade é obtida por,

$$u(X) := \inf_{w \in \mathcal{P}} f(X)$$

onde

$$\mathcal{P} = \{w \in C(\bar{\Omega}); u_* \leq w \leq u^* \text{ e } w \text{ é supersolução de (7.1)}\}$$

e u^*,u_* resolvem

$$\begin{cases} G_{\inf f}[u^*] &= 0 \text{ em } \Omega \\ u^* &= \varphi \text{ em } \Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} G_{||f||_\infty}[u_*] &= 0 \text{ em } \Omega \\ u_* &= \varphi \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{7.2}$$

respectivamente. Além disso, é esclarecedora a comentar que pelo princípio de comparação a solução minimal construída acima é uma solução única para o problema de dirichlet.

Passamos agora para a prova do teorema 7.1. A partir de agora nós rotulamos

$$\alpha := \frac{2+\gamma}{1+\gamma}$$

Seja u uma solução minimal de (7.1), e assuma sem perda de generalidade que $0 \in S(u)$. Fixado $\eta > 0$ podemos construir a seguinte barreira auxiliar:

$$\theta(X) = \begin{cases} C, \text{ se } 0 \leq |X| < B\eta; \\ A\frac{\alpha^2}{2}\eta^{\alpha-2}(|X| - B\eta)^2 + C \text{ se } B\eta \leq |X| < \eta; \\ A|X|^\alpha + \left(C - \frac{A}{2}\eta^\alpha\right) \text{ se } |X| > \eta; \end{cases} \tag{7.3}$$

para $B := 1 - \frac{1}{\alpha} \in (0,1)$, pois $B := 1 - \left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma}\right) = \frac{1}{2+\alpha} < 1$, onde as constantes A e $C > 0$ serão escolhidas a posteriore. Note que pela própio definição de θ temos $\theta \in C^1$ e $D^2\theta \in C^1$. Nosso primeiro objetivo é mostrar que, se escolhermos $0 < A << 1$ universalmente pequeno então θ satisfaz

$$|\nabla\theta(X)|^\gamma F(X, D^2\theta(X)) < \inf_\Omega f(X)$$

pontualmente em Ω.

De fato, temos três casos a serem analizados.

Se $0 \leq |X| < B\eta$, temos $\theta(X) = C$ logo $\nabla\theta(X) = 0$. Portanto,

$$|\theta(X)|^\gamma F(X, D^2\theta(X)) < \inf_\Omega f(X), \quad \text{ou seja,} \quad 0 < \inf_\Omega f(X)$$

Agora se $B\eta \leq |X| < \eta$ temos,

$$\theta(X) = A\frac{\alpha^2}{2}\eta^{\alpha-2}(|X| - B\eta)^2 + C$$

Daí computamos,

$$\theta_i(X) = A\frac{\alpha^2}{2}\eta^{\alpha-2}\left[2(|X| - B\eta)\frac{X_i}{|X|}\right] = A\alpha^2\eta^{\alpha-2}(|X| - B\eta)\frac{X_i}{|X|}$$

$$\theta_{ij}(X) = A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\left[\frac{X_iX_j}{|X|^2} + (|X| - B\eta)\frac{|X|\delta_{ij} - X_i\frac{X_j}{|X|}}{|X|^2}\right] = A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\left[\frac{X_iX_j}{|X|^2} + \left(1 - \frac{B\eta}{|X|}\right)\left(\delta_{ij} - \frac{X_iX_j}{|X|^2}\right)\right]$$

Em particular para pontos da forma (—X—,0,...,0) temos,

$$\begin{cases} \theta_{ii}(X) &= A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\left[0+\left(1-\dfrac{B\eta}{|X|}\right)(1-0)\right] = A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\left(1-\dfrac{B\eta}{|X|}\right) \text{ se } i\neq 1;\\ \theta_{ij}(X) &= 0 \text{ se } i\neq j \quad (\text{ Usamos o fato de } X_iX_j=0 \text{ e } \delta_{ij}=0);\\ \theta_{11}(X) &= A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\left[\dfrac{|X|^2}{|X|^2}+\left(1-\dfrac{B\eta}{|X|}\right)(1-\dfrac{|X|^2}{|X|^2})\right] = A\alpha^2\eta^{\alpha-2}. \end{cases} \tag{7.4}$$

Da teoria de EDP's elípticas totalmente não lineares temos:

$$F(X,D^2\theta(X)) \leq M^+\left(D^2\theta(X),\frac{\lambda}{d},\Lambda\right) = \Lambda\left(A\alpha^2\eta^{\alpha-2}+(d-1)\left[A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\left(1-\frac{B\eta}{|X|}\right)\right]\right).$$

Observe que,

$$B\eta \leq |X| < \eta \Leftrightarrow -\eta \leq -|X| < -B\eta \Leftrightarrow -B \geq \frac{-B\eta}{|X|} \geq -1 \Leftrightarrow 1-B \geq \frac{1-B\eta}{|X|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1-B\eta}{|X|}.$$

Portanto,

$$F(X,D^2\theta(X)) \leq \Lambda\left(A\alpha^2\eta^{\alpha-2}+(d-1)\left(A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\frac{1}{\alpha}\right)\right) \leq \Lambda d A\alpha^2\eta^{\alpha-2}.$$

Na última desigualdade acima usamos o fato de $\dfrac{1}{\alpha} < 1$. Temos também que,

$$\begin{aligned} |\nabla\theta(X)| &= A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\left(1-\frac{B\eta}{|X|}\right)|X_i|\\ &< A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\left(1-\frac{B\eta}{|X|}\right)|X|\\ &< A\alpha^2\eta^{\alpha-2}\left(1-\frac{B\eta}{|X|}\right)\eta = A\alpha^2\eta^{\alpha-1}\frac{1}{\alpha}\\ &= \alpha A\eta^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\nabla\theta(X)|^\gamma F(D^2\theta(X)) &\leq \Lambda d A\alpha^2\eta^{\alpha-2}(\alpha A\eta^{\alpha-1})^\gamma\\ &= \Lambda d\alpha^{\gamma+2}A^{\gamma+1}\eta^{(\alpha-2)+(\alpha-1)\gamma}\\ &= C(d,\Lambda,\lambda,\gamma)A^{\gamma+1}\eta^{(\alpha-2)+(\alpha-1)\gamma} \end{aligned}$$

Como

$$(\alpha-2)+(\alpha-1)\gamma = 0,$$

obtemos $|\nabla\theta(X)|^{\gamma}F(D^2\theta(X)) \leq C(d,\Lambda,\lambda,\gamma)A^{\gamma+1}$. Daí escolhemos $0 < A << 1$ tal que,

$$C(d,\lambda,\Lambda,\gamma)A^{\gamma+1} < \inf_{w\in\mathcal{P}} f(X), \quad \text{assim} \quad A < \sqrt[\gamma+1]{\frac{\inf_{w\in\mathcal{P}} f(X)}{C(d,\lambda,\Lambda,\gamma)}}$$

Logo,

$$|\nabla\theta(X)|^{\gamma}F(D^2\theta(X)) < \inf_{w\in\mathcal{P}} f(X) \text{ para } 0 < A << 1$$

E por final analizaremos o caso quando $|X| \leq \eta$. Aqui $\theta(X) = A|X|^{\alpha} + \left(C - \frac{A}{2}\eta^{\alpha}\right)$. Daí computamos,

$$\theta_i(X) = A\alpha|X|^{\alpha-1}\frac{X_i}{|X|}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{ij}(X) &= A\alpha(\alpha-1)|X|^{\alpha-2}\frac{X_iX_j}{|X|^2} + \left[A\alpha|X|^{\alpha-1}\left(\frac{|X|\delta_{ij} - \frac{X_iX_j}{|X|}}{|X|^2}\right)\right] \\
&= A\alpha|X|^{\alpha-2}(\alpha-1)\frac{X_iX_j}{|X|^2} + \left[A\alpha|X|^{\alpha-1}\left(\frac{|X|^2\delta_{ij} - X_iX_j}{|X|^3}\right)\right] \\
&= A\alpha|X|^{\alpha-2}(\alpha-1)\frac{X_iX_j}{|X|^2} + \left[A\alpha|X|^{\alpha-2}\delta_{ij} - A\alpha|X|^{\alpha-2}\frac{X_iX_j}{|X|^2}\right] \\
&= A\alpha[(\alpha-2)X_iX_j|X|^{-2} + \delta_{ij}]|X|^{\alpha-2}.
\end{aligned}$$

Pela invariância de rotação fixemos uma direção com os pontos da forma (—X—,0,...,0), assim temos:

$$\begin{cases}
\theta_{ii}(X) = A\alpha|X|^{\alpha-2} \text{ se } i \neq 1; \\
\theta_{ij}(X) = A\alpha 0|X|^{\alpha-2} = 0 \text{ se } i \neq j; \\
\theta_{11}(X) = A\alpha[(\alpha-2)+1]|X|^{\alpha-2} = A\alpha(\alpha-1)|X|^{\alpha-2}.
\end{cases} \tag{7.5}$$

Novamente pela teoria de EDP's elípticas totalmente não lineares temos:

$$\begin{aligned}
F(X, D^2\theta(X)) \leq M^{+}\left(D^2\theta(X), \frac{\lambda}{d}, \Lambda\right) &= \Lambda(A\alpha(\alpha-1)|X|^{\alpha-2} + (d-1)A\alpha|X|^{\alpha-2}) \\
&< \Lambda(A\alpha|X|^{\alpha-2} + (d-1)A\alpha|X|^{\alpha-2}) \\
&= \Lambda dA\alpha|X|^{\alpha-2}.
\end{aligned}$$

Onde na segunda desigualdade acima usamos o fato de $\alpha < 2$. Veja também que

$$|\nabla\theta(X)| = A\alpha|X|^{\alpha-2} \quad \text{assim} \quad |\nabla\theta(X)|^{\gamma} = (A\alpha|X|^{\alpha-2})^{\gamma}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|\nabla\theta(X)|^\gamma F(D^2\theta(X)) &< \Lambda dA\alpha|X|^{\alpha-2}(A\alpha|X|^{\alpha-2})^\gamma\\ &= \Lambda d\alpha^{\gamma+1}A^{\gamma+1}|X|^{(\alpha-2)+(\alpha-1)\gamma}\\ &= C(d,\Lambda,\lambda,\gamma)A^{\gamma+1}|X|^{(\alpha-2)+(\alpha-1)\gamma}.\end{aligned}$$

Como

$$(\alpha-2)+(\alpha-1)\gamma=0,$$

obtemos $|\nabla\theta(X)|^\gamma F(D^2\theta(X)) \leq C(d,\Lambda,\lambda,\gamma)A^{\gamma+1}$. Daí escolhemos $0 < A << 1$ tal que

$$C(d,\lambda,\Lambda,\gamma)A^{\gamma+1} < \inf_{w\in\mathcal{P}} f(X) \quad \text{ou seja,} \quad A < \sqrt[\gamma+1]{\frac{\inf_{w\in\mathcal{P}} f(X)}{C(d,\Lambda,\lambda,\gamma)}}.$$

Logo,

$$|\nabla\theta(X)|^\gamma F(D^2\theta(X)) < \inf_{w\in\mathcal{P}} f(X) \text{ para } 0 < A << 1.$$

Com isso mostramos que para $0 < A << 1$ universal, θ satisfaz

$$|\nabla\theta(X)|^\gamma F(D^2\theta(X)) < \inf_{w\in\mathcal{P}} f(X) \leq f(X)\forall X\in\Omega.$$

Segue que θ é uma subsolução de

$$|\nabla\theta(X)|^\gamma F(D^2\theta(X)) = f(X).$$

O parâmetro $C > 0$ ainda precisa ser ajustado e $\eta > 0$ foi arbitrário até essa etapa da prova, sem influências sobre as estimativas obtidas até agora.

A partir de agora nos é dado um $0 < r < dist(0,\partial\Omega)$.

Observação 7.2. Se $C < u(0)$ então $u(Z) > \theta(Z) \quad \forall Z\in\partial B_r$. Escolha $\eta = \frac{1}{10}r$ e suponha por contradição que $u\leq\theta$ em ∂B_r. Como u e θ são subsoluções de

$$\mathcal{H}(X,\nabla u)F(X,D^2u) = f(X),$$

seque que a função corte,

$$w := \begin{cases} \min\{u,\theta\} & \text{em} \quad \bar{B}_r;\\ u & \text{em} \quad \Omega\bar{B}_r\end{cases} \tag{7.6}$$

é uma subsolução de 7.1, pois mínimo de subsoluções ainda é uma subsolução.

Portanto pela escolha anterior

$$\theta(0) = C < u(0)$$

o que contradiz a minimalidade de u. Isto é, mostramos a existência de um ponto $Z \in \partial B_r$, tal que

$$\bar{C}|Z|^{\alpha} + C = \theta(Z) < u(Z),$$

para alguma constante $\bar{C} > 0$ universal. Finalmente, tomando $C = u(x_0 - \epsilon)$ e $\epsilon \to 0$ concluimos que

$$\bar{C}r^{\alpha} + u(0) \leq \sup_{B_r} u$$

que é a estimativa desejada. Daí conclui-se a prova do teorema 7.1.

8 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, nos foi possível adquirir os conhecimentos necessários para a análise da teoria de regularidade de soluções para os tipos de equações até então trabalhadas. Foram estudadas todas as propriedades e comportamentos das soluções, e sabendo que soluções são $C^{1,\alpha}$, através do método geométrico tangecial, foi possível caracterizar e encontrar o expoente α ótimo com exatidão.

O trabalho contribuiu para a ampliação dos conhecimentos acerca do tema e reforçou o fato do quanto a teoria é importante nas aplicações relacionadas a diversas áreas, tais como física, biologia, química, dentre outras.

REFERÊNCIAS

BIRINDELLI, Isabeau; DEMENGEL, Françoise. Comparison principle and Liouville type results for singular fully nonlinear operators. **Annales de Faculté des sciences de Toulous**, v. 13, n. 2, p. 261–287, 2004.

CAFFARELLI, Luis; SALAZAR, J. Solutions of fully nonlinear elliptic equations with patches of zero gradient: existence, regularity and convexity of level curves. . **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 354, n. 8, p. 3095–3115, 2002.

CAFFARELLI, Luis; SALAZAR, Jorge; SHAHGHOLIAN, Henrik. Free-boundary regularity for a problem arising in superconductivity. . **Archive for rational mechanics and analysis** , v. 171, n. 1, p. 115–128, 2004.

CAFFARELLI, Luis A. Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations. **Annales de Faculté des sciences de Toulous**, v. 130, n. 1, p. 189–213, 1988.

CHAPMAN, S. J.; RUBINSTEIN, J.; SCHATZMAN, M. A mean-field model of superconducting vortices. . **European Journal of Applied Mathematics** , v. 7, n. 2, p. 97–111, 1996.

CRANDALL, Michael G.; ISHII, Hitoshi; LIONS, Pierre-Louis. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. . **Bulletin of the American mathematical society**, v. 27, n. 1, p. 1–67, 1992.

DACOROGNA, Bernard. **Direct methods in the calculus of variations.** Springer Science e Business Media, 2007.

EVANS, Lawrence C.; SMART, Charles K. Everywhere differentiability of infinity harmonic functions. . **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 42, n. 2, p. 289–299, 2011.

EVANS, Ovidiu, Lawrence C.; SAVIN. $C^{1,\alpha}$ regularity for infinity harmonic functions in two dimensions. . **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 32, n. 3, p. 325–347, 2008.

IMBERT, Luis., Cyril; SILVESTRE. $C^{1,\alpha}$ regularity of solutions of degenerate fully non-linear elliptic equations. . **Advances in Mathematics**, v. 233, n. 1, p. 196–206, 2013.

IWANIEC, Tadeusz; MANFREDI, Juan J. Regularity of p-Harmonic Functions on the Plane. . **Harmonic Functions on the Plane**, v. 5, n. 1, p. 1–19, 1989.

JUUTINEN, Petri; LINDQVIST, Peter; MANFREDI, Juan J. On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation. . **SIAM journal on mathematical analysis**, v. 33, n. 3, p. 699–717, 2001.

LEE, K.; SHAHGHOLIAN, H. Hausdorff dimension and stability for the p-obstacle problem ($2 < p < \infty$). **J. Differential Equations**, v. 195, n. 1, p. 14–24, 2003.

NADIRASHVILI, Nikolai. Singular viscosity solutions to fully nonlinear elliptic equations. **J. Math. Pures Appl.**, v. 89, n. 9, p. 107–113, 2008.

NADIRASHVILI, Nikolai; VLADUTS, Serge. Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations II. Hessian equations and octonions. **Geom. Funct. Anal.**, v. 21, n. 1, p. 483–498, 2011.

NADIRASHVILI, Serge., Nikolai; VLĂDUŢ. Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations. **Geometric and Functional Analysis**, v. 17, n. 4, p. 1283–1296, 2007.

ROBERTS, Luis A.; CAFFARELLI, Luis A.; CABRÉ, Xavier. **Fully nonlinear elliptic equations**. American Mathematical Soc., 1995.

SAVIN, Ovidiu. C^1 regularity for infinity harmonic functions in two dimensions. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 176, n. 3, p. 351–361, 2005.

TEIXEIRA, Eduardo V. Universal moduli of continuity for solutions to fully nonlinear elliptic equations. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 211, n. 3, p. 911–927, 2014.

URALTSEVA, N.N. Degenerate quasilinear elliptic systems. **Zap. Na. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov(LOMI)**, v. 7, n. 1, p. 184–222, 1968.