UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TIAGO GADELHA DE SOUSA

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO

FORTALEZA

2018

TIAGO GADELHA DE SOUSA

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S698m Sousa, Tiago Gadelha de.
Métricas críticas do funcional volume em variedades compactas com bordo / Tiago Gadelha de Sousa. – 2018.
48 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Funcional volume. 2. Métricas críticas de Miao-Tam. 3. Ricci paralelo. I. Título.
CDD 510

TIAGO GADELHA DE SOUSA

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovoda em: __ / __ / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a minha querida irmã Rosana (*in Memoriam).*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, que dá o sentido de tudo que fazemos em nossas vidas. Tenho certeza que ele esteve comigo e me deu discernimento nos momentos de dificuldade. Sou muito grato ao que ele tem proporcionado em minha vida.

À minha mãe Mirian, cujo amor e dedicação pelos filhos ultrapassam qualquer barreira.

À minha esposa Danielli, cujo apoio, paciência e compreensão foram essenciais.

Ao meu filho João Miguel, que me motiva a procurar fazer sempre o melhor possível, para que isso sirva como um motivo de orgulho e de exemplo para ele.

Ao meu orientador, professor Ernani Ribeiro, pelos conselhos, incentivo, paciência e por todo aprendizado que me proporcionou. Além de um excelente profissional, é uma grande pessoa.

Aos professores Rafael Jorge Pontes Diógenes e João Francisco da Silva Filho pela participação na banca.

A todos os professores da Pós-Graduação, em especial Antônio Caminha, Marcos Melo, Marcelo Melo, Fernanda Camargo e Jonatan Floriano, por me ajudarem na minha formação.

A todos os colegas da Pós-Graduação, em especial Valricélio, Tiago Gomes, Diego Silva, Danuso, Rosa, Patrícia, Erivamberto, Felipe Fernandes, Diego Elói, Diego Sousa, Emanoel Ferreira, Emanuel Mendonça, Thialita, Edilson, Pedro, Andre Luiz, Davi Ribeiro, Sílvio, Elisafã, Rafael e Flaviano.

À Andrea Dantas e Jessyca Soares pela presteza e competência.

À Funcap pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo desta dissertação é estudar o espaço das métricas Riemannianas em variedades compactas com bordo que satisfazem uma equação do ponto crítico associada com um problema de valor de fronteira. Nós apresentaremos uma fórmula integral que nos permite mostrar que se uma métrica crítica do funcional volume sobre uma variedade compacta, de dimensão n, conexa, M^n com bordo ∂M tem tensor de Ricci paralelo, então M^n é isométrico a uma bola geodésica em uma forma espacial $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. Esta dissertação foi baseada no artigo de Baltazar e Ribeiro Jr. (2017).

Palavras-chave: Funcional volume. Métricas críticas de Miao-Tam. Ricci paralelo.

ABSTRACT

The goal of this work is to study the space of smooth Riemannian structures on compact manifolds with boundary that satisfies a critical point equation associated with a boundary value problem. We provide an integral formula which enables us to show that if a critical metric of the volume functional on a connected n-dimensional manifold M^n with boundary ∂M has parallel Ricci tensor, then M^n is isometric to a geodesic ball in a simply connected space form $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ or $\mathbb{S}^n$. This work is based in an article by Baltazar and Ribeiro Jr. (2017).

Keywords: Volume Functional. Miao-Tam critical metric. Parallel Ricci tensor.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Antes de apresentarmos o objetivo deste trabalho, faremos uma breve contextualização. Um problema notável em Geometria Diferencial consiste em determinar métricas Riemannianas em uma determinada variedade M^n que forneça curvatura constante. Neste sentido é crucial compreender as métricas críticas dos funcionais Riemannianos, como por exemplo, o funcional curvatura escalar total e o funcional volume. Einstein e Hilbert provaram que os pontos críticos do funcional curvatura escalar total restrito ao conjunto de métricas Riemannians em M^n de volume unitário são Einstein. Veja Teorema 4.21 em (BESSE, 1987). Além disso, o funcional curvatura escalar total restrito a uma determinada classe conforme é exatamente o funcional Yamabe, cujos pontos críticos são métricas de curvatura escalar constantes nessa classe. Hilbert (1915) provou que as equações da relatividade geral podem ser obtidas a partir do funcional curvatura escalar total. Com isso, temos uma maneira natural de provar a existência de métricas Einstein.

Motivado pelo resultado obtido em Fan, Shi e Tam (2007), bem como na caracterização dos pontos críticos do funcional curvatura escalar total, Miao e Tam (2009; 2011) estudaram as propriedades variacionais do funcional volume restrito ao espaço das métricas de curvatura escalar constante em um determinado domínio compacto com bordo. Enquanto Corvino, Eichmair e Miao (2013) estudaram o problema modificado de encontrar pontos estacionários para o funcional volume no espaço de métricas cuja curvatura escalar é igual a uma constante.

Conforme terminologia utilizada em Barros, Diógenes e Ribeiro Jr (2015) e Batista, Diógenes, Ranieri e Ribeiro Jr (2017), uma métrica crítica de Miao-Tam é uma 3-upla (M^n, g, f), onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão pelo menos três com bordo suave ∂M e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ satisfazendo a equação

$$\mathcal{L}_g^*(f) = g, \tag{1}$$

onde $\mathcal{L}_g^*$ é a forma L^2-adjunta da linearização do operador de curvatura escalar $\mathcal{L}_g$. A função f é dita função potencial.

Relembremos que

$$\mathcal{L}_g^*(f) = -(\Delta f)g + Hessf - fRic,$$

onde Ric, Δ e Hess denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, o operador laplaciano e a forma Hessiana em M^n. Para mais detalhes veja (BESSE, 1987). Levando em conta a equação (1), a equação da métrica crítica de Miao-Tam pode ser representada por

$$-(\Delta f)g + Hessf - fRic = g. \tag{2}$$

Miao e Tam (2011) estudaram essas métricas críticas sob a condição Einstein. Mais precisamente, eles obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 1.1 *(Miao-Tam, 2011). Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam conexa, compacta, Einstein e com bordo suave ∂M. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

Toda métrica de Einstein é paralela. A recíproca dessa afirmação não é verdadeira. Para demonstração desse fato veja (DERDZIŃSKI, 1980, 1982). Na verdade, existem exemplos de variedades Riemannianas com tensor de Ricci paralelo que não são Einstein.

Por exemplo, $M_1 \times M_2$, onde $Ric_{M_1} = \lambda_1 g_1$ e $Ric_{M_2} = \lambda_2 g_2$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dando continuidade ao estudo de métricas críticas do funcional volume, substituiremos a condição de ser Einstein no Teorema 1.1 pela hipótese do tensor de Ricci ser paralelo. Mais precisamente temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2 *(Baltazar e Ribeiro Jr., 2017) Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada, conexa e com bordo suave ∂M. Então*

$$\int_M f|divRm|^2 dM_g + \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g + \int_M f(\Delta|Ric|^2 - |\nabla Ric|^2)dM_g = 0.$$

Como consequência desse teorema chegamos no resultado de rigidez citado.

Corolário 1.1 *(Baltazar e Ribeiro Jr., 2017) Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam, com M^n compacta, orientada, conexa e com fronteira ∂M suave e tal que o tensor de Ricci é paralelo. Então (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em uma forma espacial $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

O objetivo deste trabalho é portanto apresentar a prova do Teorema 1.1 e Corolário 1.1.

Como citado anteriormente, é fácil verificar que variedades de Einstein M^n, com $n \geq 3$, tem tensor de Ricci paralelo. Portanto, o Corolário 1.1 melhora claramente o Teorema 1.1. Além disso, vale a pena destacar, que os argumentos concebidos para a prova do Teorema 1.2 diferem significativamente de L.-F Tam e P. Miao (2011).

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados que iremos utilizar ao longo deste trabalho. Denotaremos por (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica g, ∇ a conexão de Levi-Civita, $C^\infty(M)$ o espaço das funções suaves sobre M e $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos vetores suaves de M. Outro conceito importante é o de curvatura de Riemann, que definiremos agora. O tensor de curvatura de Riemann é o (1,3) tensor

$$Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

definido por $Rm(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$, para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

O tensor de curvatura de Riemann pode ser visto também como um (0,4)-tensor

$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),$$

dado pela seguinte identidade

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle Rm(X, Y)W, Z \rangle.$$

Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal. Tomando o traço do tensor de curvatura de Riemann obtemos o tensor de Ricci, que é dado por

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} Rm(X, e_i, Y, e_i).$$

Tomando o traço do tensor de Ricci obtemos a função curvatura escalar R.

Dado um ponto em M, se considerarmos coordenadas locais (x^i) em torno desse ponto, podemos expressar o tensor de curvatura de Riemann e o tensor de Ricci por

$$R_{ijkl} = Rm\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) := \left\langle Rm\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle$$

e

$$R_{ik} := g^{jl} R_{ijkl},$$

respectivamente, onde o tensor de Ricci é dado pelo traço do tensor curvatura de Riemann com relação a segunda e quarta coordenadas.

Usando coordenadas a curvatura escalar R é dada por

$R := tr_g Ric = g^{ij} R_{ij}$.

Dada $f \in C^{\infty}(M)$, o $2-$tensor Hessiana de f é por definição

$$Hessf(X,Y) = \nabla^2 f(X,Y) = Y(Xf) - (\nabla_Y X)f,$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

O Laplaciano de f é definido por

$$\Delta f = tr_g \nabla^2 f$$

Em coordenadas temos que

$$\Delta f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f = \nabla_i \nabla_i f$$

Outro resultado que iremos utilizar é o Teorema de Stokes, que enunciamos a seguir.

Teorema 2.1 *Se M uma variedade suave compacta orientada de dimensão n com bordo ∂M e ω é uma (n-1)-forma sobre M com suporte compacto, então*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

onde ∂M tem orientação induzida de M.

Para demonstração veja (LEE, 2003).

Finalmente, relembremos um resultado que pode ser encontrado em (LEE, 2003). Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com ou sem bordo, $\tilde{g}$ denotando a métrica induzida sobre ∂M e N é o campo vetorial normal unitário apontado para fora ao longo de ∂M. Então

$$
\begin{aligned}
\int_M u\Delta v\, dV_g &= \int_M \langle grad\, u, grad\, v\rangle_g\, dV_g - \int_{\partial M} uN_v\, dV_{\tilde{g}} \\
\int_M (u\Delta v - v\Delta u)\, dV_g &= \int_{\partial M} (vN_u - uN_v)\, dV_{\tilde{g}}.
\end{aligned}
$$

2.1 Tensor de Cotton, de Weyl e de Bach

Nesta seção apresentaremos alguns tensores clássicos que serão utilizados neste trabalho. Primeiramente, lembramos que o tensor de Weyl W é definido pela relação

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\
&\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}),
\end{aligned} \tag{3}
$$

onde R_{ijkl} é o tensor curvatura de Riemann Rm, R_{ij} é o tensor de Ricci e R é a curvatura escalar. O tensor de Cotton C é definido pela equação

$$
C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}). \tag{4}
$$

Observe que o tensor de Cotton é anti-simétrico nas duas primeiras entradas. De fato,

$$
\begin{aligned}
C_{jik} &= \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_j R g_{ik} - \nabla_i R g_{jk}) \\
&= -[\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik})] \\
&= -C_{ijk}.
\end{aligned}
$$

Além disso, o tensor de Cotton tem traço nulo tomando quaisquer dois índices. Com efeito, tomando o traço em relação a i e j, temos

$$
\begin{aligned}
g^{ij}C_{ijk} &= g^{ij}\nabla_i R_{jk} - g^{ij}\nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(g^{ij}\nabla_i R g_{jk} - g^{ij}\nabla_j R g_{ik}) \\
&= \nabla_i R_{ik} - \nabla_i R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{ik} - \nabla_i R g_{ik}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Analogamente obtemos o mesmo resultado tomando o traço em relação a i e k ou j e k. Os tensores de Cotton e de Weyl satisfazem a seguinte relação

$$C_{ijk} = -\frac{(n-2)}{(n-3)}\nabla_l W_{ijkl}, \tag{5}$$

Definimos o tensor de Bach sobre uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 4$, por meio da igualdade

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla^k\nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_{i\ \ j}^{\ k\ \ l}. \tag{6}$$

Quando $n = 3$ o tensor de Bach é definido por

$$B_{ij} = \nabla_k C_{kij}. \tag{7}$$

Em particular, a variedade (M^n, g) é dita ser Bach-flat se $B_{ij} = 0$.

2.2 Contrações da segunda identidade de Bianchi

Nesta seção veremos duas importantes relações obtidas a partir da segunda identidade de Bianchi.

Proposição 2.1 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com tensor de curvatura de Riemmann Rm. As seguintes identidades ocorrem*

1.

$$g^{im}\nabla_m R_{ijkl} = (divRm)_{jkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}. \tag{8}$$

2.

$$g^{im}\nabla_m R_{ik} = \nabla_m R_{mk} = \frac{1}{2}\nabla_k R. \tag{9}$$

Demonstração: Pela segunda identidade de Bianchi temos que

$$0 = \nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk}.$$

Tomando o traço em relação aos índices i e m, chegamos em

$$\begin{aligned} 0 &= g^{im}(\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk}) \\ &= g^{im}\nabla_m R_{ijkl} + g^{im}\nabla_k R_{ijlm} + g^{im}\nabla_l R_{ijmk}. \end{aligned}$$

Como a métrica é paralela, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= g^{im}\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k g^{im} R_{ijlm} + \nabla_l g^{im} R_{ijmk} \\ &= (divRm)_{jkl} - \nabla_k g^{im} R_{jilm} + \nabla_l g^{im} R_{jikm} \\ &= (divRm)_{jkl} - \nabla_k R_{jl} + \nabla_l R_{jk} \\ &= (divRm)_{jkl} - \nabla_k R_{jl} + \nabla_l R_{jk}. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$(divRm)_{jkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}.$$

Finalizando a prova do primeiro item.

Demonstraremos agora o segundo item. Pelo primeiro item temos que

$$g^{im}\nabla_m R_{ijkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}.$$

Tomando o traço em relação a j e l no lado esquerdo da igualdade e relembrando que a métrica é paralela segue que

$$\begin{aligned} g^{jl} g^{im}\nabla_m R_{ijkl} &= g^{im}\nabla_m g^{jl} R_{ijkl} \\ &= g^{im}\nabla_m R_{ik}. \end{aligned}$$

Tomando novamente o traço em relação a j e l, temos

$$\begin{aligned} g^{jl}\nabla_k R_{jl} - g^{jl}\nabla_l R_{jk} &= \nabla_k g^{jl} R_{jl} - g^{jl}\nabla_l R_{jk} \\ &= \nabla_k g^{jl} R_{jl} - g^{jl}\nabla_l R_{jk} \\ &= \nabla_k R - g^{jl}\nabla_l R_{jk}. \end{aligned}$$

Trocando j por i e l por m na segunda parcela do lado direito da última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} g^{jl}\nabla_k R_{jl} - g^{jl}\nabla_l R_{jk} &= \nabla_k R - g^{jl}\nabla_l R_{jk} \\ &= \nabla_k R - g^{im}\nabla_m R_{ik}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g^{im}\nabla_m R_{ik} = \nabla_k R - g^{im}\nabla_m R_{ik}.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \nabla_k R &= 2g^{im}\nabla_m R_{ik} \\ &= 2\nabla_m R_{mk}. \end{aligned}$$

Isto finaliza a demonstração.

□

3 MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO

Um problema clássico em Geometria Diferencial consiste em determinar métricas Riemannianas em uma determinada variedade M^n que forneça curvatura constante. Neste sentido, é crucial compreender as métricas críticas dos funcionais Riemannianos, como por exemplo, o funcional curvatura escalar total e o funcional volume. Einstein e Hilbert provaram que os pontos críticos do funcional curvatura escalar total restrito ao conjunto de métricas Riemannians em M^n de volume unitário são Einstein. Veja Teorema 4.21 em (BESSE, 1987). Além disso, o funcional curvatura escalar total restrito a uma determinada classe conforme é exatamente o funcional Yamabe, cujos pontos críticos são métricas de curvatura escalar constantes nessa classe. Hilbert (1915) provou que as equações da relatividade geral podem ser obtidas a partir do funcional curvatura escalar total. Com isso, temos uma maneira natural de provar a existência de métricas Einstein.

Motivado pelo resultado obtido em Fan, Shi e Tam (2007), bem como na caracterização dos pontos críticos do funcional curvatura escalar total, Miao e Tam (2009; 2011) estudaram as propriedades variacionais do funcional volume restrito ao espaço das métricas de curvatura escalar constante em um determinado domínio compacto com bordo. Enquanto Corvino, Eichmair e Miao (2013) estudaram o problema modificado de encontrar pontos estacionários para o funcional volume no espaço de métricas cuja curvatura escalar é igual a uma constante.

Para o que segue, iremos definir a métrica crítica de Miao-Tam, conforme terminologia utilizada em Barros, Diógenes e Ribeiro Jr (2015) e Batista, Diógenes, Ranieri e Ribeiro Jr (2017).

3.1 Métrica crítica de Miao-Tam

Definição 3.1 *Uma métrica crítica de Miao-Tam é uma 3-upla* (M^n, g, f) *onde* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão pelo menos três com bordo suave* ∂M *e* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave tal que* $f^{-1}(0) = \partial M$ *satisfazendo a equação*

$$\mathcal{L}_g^*(f) = g. \tag{10}$$

onde $\mathcal{L}_g^*$ *é a forma* L^2*-adjunta da linearização do operador de curvatura escalar* $\mathcal{L}_g$*. A função* f *é dita função potencial.*

Relembre que

$$\mathcal{L}_g^*(f) = -(\Delta f)g + Hessf - fRic.$$

Onde Ric, Δ, Hess denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, o operador laplaciano e a forma Hessiana em M^n. Para mais detalhes veja (BESSE, 1987). Levando em conta a equação (10), a equação da métrica crítica de Miao-Tam pode ser expressa por

$$-(\Delta f)g + Hessf - fRic = g. \tag{11}$$

Iremos apresentar agora alguns exemplos de métricas críticas construídos por Miao e Tam (2009).

Exemplo 3.1 *Considere $M^n \subset \mathbb{R}^n$ uma bola geodésica centrada na origem de raio R_0 e a função f definida por $f(x) = \dfrac{R_0^2}{2(n-1)} - \dfrac{|x|^2}{2(n-1)}$. Consideremos em $\mathbb{R}^n$ a métrica canônica g e em M a métria restrita. A função f pode ser escrita também da seguinte forma*

$$f(x) = \frac{R_0^2}{2(n-1)} - \frac{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2)}{2(n-1)}.$$

Calculando a derivada parcial de f em relação a x_i, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_0^2}{2(n-1)} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2}{2(n-1)}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_0^2}{2(n-1)}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2}{2(n-1)}\right) \\
&= -\frac{x_i}{n-1}.
\end{aligned}$$

Agora, derivando em relação a x_j temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{x_j}{n-1}\right) \\
&= -\frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) \\
&= -\frac{1}{n-1}\delta_{ij} \\
&= -\frac{1}{n-1}g_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \nabla_i\nabla_j f\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\\ &= -\frac{1}{n-1}g_{ij}.\end{aligned}$$

Tomando o traço em relação i e j, temos que

$$\begin{aligned}\Delta f &= g^{ij}\nabla^2 f\\ &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j f\\ &= g^{ij}\left(-\frac{1}{n-1}g_{ij}\right)\\ &= -\frac{1}{n-1}g^{ij}g_{ij}\\ &= -\frac{1}{n-1}\delta_i^i\\ &= -\frac{n}{n-1}.\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla^2 f = -\frac{1}{n-1}g$ *e* $\Delta f = -\frac{n}{n-1}$. *Como em* M *temos a métrica restrita do* $\mathbb{R}^n$, *então* $Ric = 0$. *Logo,*

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - fRic = \frac{n}{n-1}g - \frac{1}{n-1}g = g.$$

Observe também que $f^{-1}(0) = \partial M$. *De fato, resolvendo a equação* $f(x) = 0$, *temos que*

$$\begin{aligned}0 &= f(x)\\ &= \frac{R_0^2}{2(n-1)} - \frac{|x|^2}{2(n-1)}\\ &= R_0^2 - |x|^2.\end{aligned}$$

Isto é, $|x|^2 = R_0^2$. *Portanto* $f^{-1}(0) = \partial M$. *Com isso, concluímos que* (M^n, g, f) *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

Agora citaremos um exemplo construído no espaço hiperbólico.

Exemplo 3.2 *Considere* $\mathbb{R}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, ds^2)$, *onde* $ds^2 = dx_1^2 + ... + dx_n^2 - dt^2$. *Além disso, considere* $\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + ... + x_n^2 - t^2 = -1, t \geqslant 1\}$ *mergulhado em* $\mathbb{R}^{n,1}$ *e seja* g *a métrica induzida. Nessas condições* g *é uma métrica Riemanniana. Agora fixe* $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{H}^n$ *e considere* $M^n \subset \mathbb{H}^n$ *uma bola geodésica centrada em* p *de raio* R_0 *e a função* f *definida por* $f(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{coshr}{coshR_0}\right) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{t}{coshR_0}\right)$, *onde* r *é a distância geodésica de* $(x_1, ..., x_n, t)$ *a* p. *Logo* $t = coshr$ *e* t *é a função altura.*

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= -\frac{1}{(n-1)coshR_0}\nabla^2(t) \\
&= -\frac{t}{(n-1)coshR_0}g.
\end{aligned}
$$

Daí, concluímos que o Δf *é dado por*

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= (\nabla^2 f)_{ij}g^{ij} \\
&= -\frac{t}{(n-1)coshR_0}g_{ij}g^{ij} \\
&= -\frac{t}{(n-1)coshR_0}\delta_i^i \\
&= -\frac{nt}{(n-1)coshR_0}.
\end{aligned}
$$

Assim, como $Ric = -(n-1)g$ *no caso do espaço hiperbólico, temos*

$$
\begin{aligned}
-\Delta f g + \nabla^2 f - fRic &= \frac{nt}{(n-1)coshR_0}g - \frac{t}{(n-1)coshR_0}g \\
&\quad + \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{t}{coshR_0}\right)(n-1)g \\
&= \frac{nt - t + (n-1)coshR_0 - (n-1)t}{(n-1)coshR_0}g \\
&= g.
\end{aligned}
$$

Além disso, como $f^{-1}(0) = \partial M$*, temos que* (M^n, g, f) *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

Exemplo 3.3 *Considere* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{S}^n$*. Sejam* $M^n \subset \mathbb{S}^n$ *uma bola geodésica centrada em* p *de raio* $R_0 < \frac{\pi}{2}$ *e* f *a função definida por* $f(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{t}{cosR_0} - 1\right) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{cosr}{cosR_0} - 1\right)$*, onde* r *é a distância geodésica de* $(x_1, ..., x_n, t)$ *a* p*. Assim* $t = cosr$ *e* t *é a função altura. Então,*

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{(n-1)cosR_0}\nabla^2(t) \\
&= -\frac{t}{(n-1)cosR_0}g
\end{aligned}
$$

Dessa forma, o laplaciano de f *será dado por*

$$\begin{aligned}\Delta f &= (\nabla^2 f)_{ij} g^{ij}\\ &= -\frac{t}{(n-1)cosR_0} g_{ij} g^{ij}\\ &= -\frac{t}{(n-1)cosR_0}\delta_i^i\\ &= -\frac{nt}{(n-1)cosR_0}.\end{aligned}$$

Como no caso do $\mathbb{S}^n$ a curvatura de Ricci é dada por $Ric = (n-1)g$, então

$$\begin{aligned}-\Delta f + \nabla^2 f - fRic &= \frac{nt}{(n-1)cosR_0} g - \frac{t}{(n-1)cosR_0} g\\ &\quad -\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{t}{cosR_0} - 1\right)(n-1)g\\ &= \frac{nt - t - (n-1)t + (n-1)cosR_0}{(n-1)cosR_0} g\\ &= g.\end{aligned}$$

Temos também que $f^{-1}(0) = \partial M$. Podemos concluir então que (M^n, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Observou-se que as métricas críticas de Miao-Tam originam pontos críticos do funcional volume em M^n quando restrito à classe de métricas g com curvatura escalar constante prescrita, de modo que $g_{|T\partial M} = h$ para uma métrica Riemannanian h prescrita sobre o bordo, conforme foi mostrado por Miao e Tam (2009). Eles mostraram que tais métricas têm curvatura escalar constante. Veja Proposição 2.1 e Teorema 2.3 em Corvino, J., Eichmair, M. e Miao, P. (2013) para mais detalhes. Alguns exemplos explícitos de métricas críticas de Miao-Tam podem ser encontrados em Miao, P. e Tam, L-F. (2009) e Miao, P. e Tam, L.-F (2011).

Miao e Tam (2011) abordaram o problema de determinar se existem métricas críticas de Miao-Tam com curvatura seccional não constante em um variedade compacta com bordo isométrico a uma esfera canônica. Baseado nisso, e motivados pelas idéias obtidas por Kobayashi (1982) e por Kobayashi e Obata (1981), eles provaram que uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, localmente conformemente plana, simplesmente conexa (M^n, g, f) com bordo isométrico a uma esfera padrão $\mathbb{S}^{n-1}$ deve ser necessariamente isométrica a uma bola geodésica em uma espaço simplesmente conexo da forma $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.

Recentemente, Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015) com base nas técnicas desenvolvidas em um trabalho de Cao e Chen (2013), provaram que uma métrica crítica de Miao-Tam do tipo Bach-flat, simplesmente conexa, compacta e com bordo isométrico a uma esfera padrão $\mathbb{S}^3$ deve ser isométrico a uma bola geodésica em um espaço simplesmente conexo da forma $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$. Eles mostraram posteriormente que, em dimensão três, o resultado continua verdadeiro substituindo hipótese de Bach-flat pela condição mais fraca de que M^3 tem um tensor de Bach harmônico, veja Barros, Diógenes e Ribeiro (2015). Miao e Tam (2011) também estudaram essas métricas críticas sob a condição Einstein. Eles observaram que podiam remover a condição da fronteira ser isométrica a uma esfera padrão. Neste contexto, eles obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *(Miao-Tam, 2011). Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam conexa, compacta, Einstein e com bordo suave ∂M. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

Como a métrica é paralela, é fácil mostrar que toda variedade Riemanniana com tensor de Ricci paralelo tem curvatura harmônica. A recíproca dessa afirmação não é verdadeira. Para demonstração desse fato veja (DERDZIŃSKI, 1980, 1982). Na verdade, existem exemplos de variedades Riemannianas compactas e não compactas com Ricci paralelo mas não são Einstein. Por exemplo, $M_1 \times M_2$, onde $Ric_{M_1} = \lambda_1 g_1$ e $Ric_{M_2} = \lambda_2 g_2$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dando continuidade ao estudo de métricas críticas do funcional volume, substituiremos a condição de ser Einstein no Teorema 3.1 pela hipótese do tensor de Ricci ser paralelo, mais precisamente temos o seguinte teorema.

Teorema 3.2 *(Baltazar e Ribeiro Jr., 2017) Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada, conexa e com bordo suave ∂M. Então temos*

$$\int_M f|divRm|^2 dM_g + \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g + \int_M f(\Delta|Ric|^2 - |\nabla Ric|^2) dM_g = 0.$$

Como consequência desse teorema chegamos no resultado de rigidez citado.

Corolário 3.1 *(Baltazar e Ribeiro Jr., 2017) Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam, com M^n compacta, orientada, conexa e com fronteira ∂M suave e tal que o tensor de Ricci é paralelo. Então (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em uma forma espacial $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

Antes de apresentarmos as provas do Teorema 3.2 e corolário 3.1, mostraremos alguns resultados preliminares. Tais resultados nos ajudarão a entender um pouco mais sobre as métricas de Miao-Tam. De fato, sabemos que por (11)

$$-(\Delta f)g + Hessf - fRic = g.$$

Tomando o traço obtemos

$$(n-1)\Delta f + Rf + n = 0. \tag{12}$$

De fato, note que $g^{ij}g_{ij} = \delta_i^i = n$. Além disso, expressando (11) em coordenadas temos

$$g_{ij} \quad = \quad -(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - fR_{ij}. \tag{13}$$

Tomando o traço em relação a i e j, segue que

$$\begin{aligned} n &= g^{ij}[-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - fR_{ij}] \\ &= -(\Delta f)g_{ij}g^{ij} + g^{ij}\nabla_i \nabla_j f - fg^{ij}R_{ij} \\ &= -(\Delta f)g_{ji}g^{ij} + \Delta f - fR \\ &= -(\Delta f)\delta_i^i + \Delta f - fR \\ &= -(\Delta f)n + \Delta f - fR. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(n-1)\Delta f + Rf + n = 0.$$

Uma importante relação entre a forma Hessiana e o tensor de Ricci, ambos sem traço, é dada pela próxima proposição.

Proposição 3.1 *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam. Temos então que* $f\mathring{Ric} = He\mathring{s}sf$.

Demonstração: O tensor de Ric sem traço é dado por $\mathring{Ric} = Ric - \frac{1}{n}tr(Ric)$ e portanto temos

$$f\mathring{Ric} = f(Ric - \frac{trRic}{n})g.$$

Pela equação (11) sabemos que

$$fRic = -(\Delta f)g + Hessf - g. \tag{14}$$

No entanto, por (12), temos

$$\begin{aligned} 0 &= (n-1)\Delta f + Rf + n \\ &= \Delta f + \frac{Rf}{n-1} + \frac{n}{n-1} \\ &= \Delta f + \frac{Rf + n}{n-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta f = -\frac{(Rf+n)}{n-1}.$$

que implica

$$(-\Delta f)g = \frac{(Rf+n)}{n-1}g.$$

Usando essa relação em (14) resulta

$$\begin{aligned} fRic &= -(\Delta f)g + Hessf - g \\ &= \frac{(Rf+n)}{n-1}g + Hessf - g. \end{aligned}$$

Voltando a expressão de $f\mathring{Ric}$, deduzimos

$$\begin{aligned} f\mathring{Ric} &= \frac{(Rf+n)}{n-1}g + Hessf - g - \frac{fR}{n}g \\ &= \frac{n(Rf+n) - n(n-1) - (n-1)fR}{n(n-1)}g + Hessf \\ &= \frac{(nfR + n^2 - n^2 + n - nfR + fR)}{n(n-1)}g + Hessf \\ &= \frac{(fR+n)}{n(n-1)}g + Hessf. \end{aligned}$$

Usando (12), obtemos

$$fR + n = -(n-1)\Delta f.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f\mathring{Ric} &= Hessf + \frac{(fR+n)}{n(n-1)}g \\ &= Hessf - \frac{(n-1)}{n(n-1)}\Delta f g \\ &= Hessf - \frac{\Delta f}{n}g \\ &= Hessf - \frac{(trHessf)}{n}g \\ &= \mathring{Hess}f. \end{aligned} \tag{15}$$

□

Apresentaremos agora um resultado que utilizaremos com bastante frequência ao longo deste trabalho. Mostraremos que em uma métrica crítica de Miao-Tam (M^n, g, f) a curvatura escalar é constante.

Proposição 3.2 *(Miao-Tam, 2009) Seja (M^n, g, f) uma métria crítica de Miao-Tam. Então (M^n, g) tem curvatura escalar constante.*

Demonstração: Sabemos de (13) que

$$g_{ij} = -(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - fR_{ij}.$$

Onde usamos a notação $\nabla^2 f$ para o Hessiano de f.
Portanto,

$$g^{jk}\nabla_k g_{ij} \quad = \quad g^{jk}\nabla_k(-\Delta f g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - fR_{ij}).$$

No entanto, como a métrica é paralela, temos

$$\begin{aligned} 0 &= g^{jk}\nabla_k(-\Delta f g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - fR_{ij}) \\ &= g^{jk}\left[\nabla_k(-\Delta f g_{ij}) + \nabla_k \nabla_i \nabla_j f + \nabla_k(-fR_{ij})\right] \\ &= g^{jk}[-\nabla_k \Delta f g_{ij} - \Delta f \nabla_k g_{ij} + \nabla_k \nabla_i \nabla_j f - (\nabla_k f)R_{ij} - f\nabla_k R_{ij}] \\ &= g^{jk}[-\nabla_k \Delta f g_{ij} + \nabla_k \nabla_i \nabla_j f - (\nabla_k f)R_{ij} - f\nabla_k R_{ij}]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \quad = \quad -g^{jk}\nabla_k \Delta f g_{ij} + g^{jk}\nabla_k \nabla_i \nabla_j f - g^{jk}\nabla_k f R_{ij} - g^{jk} f \nabla_k R_{ij}. \tag{16}$$

Pela identidade de Ricci temos

$$\nabla_k \nabla_i \nabla_j f = \nabla_i \nabla_k \nabla_j f + R_{kijs}\nabla_s f.$$

Usando esse fato em (16) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -g^{jk}\nabla_k \Delta f g_{ij} + g^{jk}(\nabla_i \nabla_k \nabla_j f + R_{kijs}\nabla_s f) - g^{jk}\nabla_k f R_{ij} - g^{jk} f \nabla_k R_{ij} \\ &= -\nabla_i \Delta f + g^{jk}\nabla_i \nabla_k \nabla_j f + g^{jk}R_{kijs}\nabla_s f - \nabla_k f R_{ik} - g^{jk} f \nabla_k R_{ij} \\ &= -\nabla_i \Delta f + \nabla_i g^{jk}\nabla_k \nabla_j f + R_{is}\nabla_s f - R_{ik}\nabla_k f - f g^{jk}\nabla_k R_{ij} \\ &= -f\frac{1}{2}\nabla_i R. \end{aligned}$$

Onde na última igualdade usamos (9) e a segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes. Temos então

$$0 = \frac{1}{2} f \nabla_i R.$$

Portanto, $f dR \equiv 0$. Pelo fato de f ser analítica, então $dR \equiv 0$ em $M \setminus \partial M$. Veja Corvino, J. (2000). No entanto, como ∂M tem medida nula, então $dR \equiv 0$ em M pela continuidade da curvatura escacalar R. Como M é conexa, segue que a curvatura escacalar R é constante.

□

3.2 Lemas chave

Antes de apresentarmos o resultado principal deste trabalho, iremos mostrar alguns Lemas envolvendo métrica crítica de Miao-Tam que irão nos auxiliar na prova do resultado principal. Usaremos o que foi feito nas duas seções anteriores.

Lema 3.1 *(Barros, Diógenes e Ribeiro Jr., 2015). Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Temos então*

$$\begin{aligned} f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= R_{ijkl} \nabla_l f + \frac{R}{n-1} (\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad -(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \end{aligned}$$

Demonstração: Considerando a equação (13), temos

$$-(\Delta f) g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} = g_{ij}.$$

Trocando i por j e j por k, chegamos na expressão

$$-(\Delta f) g_{jk} + \nabla_j \nabla_k f - f R_{jk} = g_{jk}.$$

Derivando em relação a i na igualdade anterior e observando que $\nabla_i g_{jk} = 0$ deduzimos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i [-(\Delta f) g_{jk} + \nabla_j \nabla_k f - f R_{jk}] \\ &= -(\nabla_i \Delta f) g_{jk} + \nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_i (f R_{jk}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_i(fR_{jk}) \;=\; \nabla_i\nabla_j\nabla_k f - (\nabla_i\Delta f)g_{jk}.$$

No entanto, observe que $\nabla_i(fR_{jk}) = \nabla_i f R_{jk} + f\nabla_i R_{jk}$. Então,

$$\nabla_i f R_{jk} + f\nabla_i R_{jk} \;=\; \nabla_i\nabla_j\nabla_k f - (\nabla_i\Delta f)g_{jk}. \tag{17}$$

Por (12), temos que

$$(n-1)\Delta f + Rf + n \;=\; 0.$$

Derivando em relação a i e lembrando que a curvatura escalar é constante, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i[(n-1)\Delta f + (Rf + n)] \\ &= (n-1)\nabla_i\Delta f + \nabla_i(Rf) + \nabla_i(n) \\ &= (n-1)\nabla_i\Delta f + R\nabla_i f. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\nabla_i\Delta f \;=\; -\frac{R}{(n-1)}\nabla_i f.$$

Usando esta última expressão em (17), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_i f R_{jk} + f\nabla_i R_{jk} &= \nabla_i\nabla_j\nabla_k f - (\nabla_i\Delta f)g_{jk} \\ &= \nabla_i\nabla_j\nabla_k f + \frac{R}{(n-1)}\nabla_i f g_{jk}. \end{aligned}$$

Com isso, segue que

$$f\nabla_i R_{jk} \;=\; -\nabla_i f R_{jk} + \nabla_i\nabla_j\nabla_k f + \frac{R}{(n-1)}\nabla_i f g_{jk}. \tag{18}$$

Trocando i por j em (18), deduzimos

$$f\nabla_j R_{ik} \;=\; -\nabla_j f R_{ik} + \nabla_j\nabla_i\nabla_k f + \frac{R}{(n-1)}\nabla_j f g_{ik}. \tag{19}$$

Agora, subtraindo (18) de (19), encontramos a expressão

$$\begin{aligned} f\nabla_i R_{jk} - f\nabla_j R_{ik} &= -\nabla_i f R_{jk} + \nabla_i\nabla_j\nabla_k f + \frac{R}{(n-1)}\nabla_i f g_{jk} \\ &\quad -(-\nabla_j f R_{ik} + \nabla_j\nabla_i\nabla_k f + \frac{R}{(n-1)}\nabla_j f g_{ik}) \\ &= (\nabla_i\nabla_j\nabla_k f - \nabla_j\nabla_i\nabla_k f) + \frac{R}{(n-1)}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad -(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \end{aligned}$$

No entanto, pela identidade de Ricci, sabemos que

$$\nabla_i\nabla_j\nabla_k f - \nabla_j\nabla_i\nabla_k f = R_{ijkl}\nabla_l f.$$

Assim,

$$f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{(n-1)}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}).$$

Isto finaliza a prova do lema. A seguir provaremos mais dois lemas que serão de fundamental importância para chegarmos ao resultado principal deste trabalho.

□

Lema 3.2 *(Baltazar e Ribeiro Jr., 2017) Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Então*

$$\begin{aligned} \int_M f|divRm|^2 dM_g &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \left\langle \nabla f, \nabla|Ric|^2 \right\rangle dM_g \\ &\quad +2\int_M f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})dM_g \\ &\quad +2\int C_{klj}\nabla_l f R_{jk} dM_g. \end{aligned}$$

Demonstração: Pela equação (8) sabemos que

$$\begin{aligned} (divRm)_{jkl} &= \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk} \\ &= \nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj}. \end{aligned}$$

Pois o tensor de Ricci é simétrico. Logo,

$$\begin{aligned} f|divRm|^2 &= f(divRm)_{jkl}(divRm)_{jkl} \\ &= f(\nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj})(\nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj}) \\ &= f(\nabla_k R_{lj})(\nabla_k R_{lj}) + f(\nabla_l R_{kj})(\nabla_l R_{kj}) - 2f\nabla_k R_{lj}\nabla_l R_{kj} \\ &= 2f|\nabla Ric|^2 - 2f\nabla_k R_{lj}\nabla_l R_{kj}. \end{aligned} \tag{20}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_l(f\nabla_k R_{lj}R_{kj}) &= \nabla_l(f\nabla_k R_{lj})R_{kj} + f\nabla_k R_{lj}\nabla_l R_{kj} \\ &= \nabla_l f\nabla_k R_{lj}R_{kj} + f\nabla_l\nabla_k R_{lj}R_{kj} + f\nabla_k R_{lj}\nabla_l R_{kj}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f\nabla_k R_{lj}\nabla_l R_{kj} = -\nabla_l f\nabla_k R_{lj}R_{kj} - f\nabla_l\nabla_k R_{lj}R_{kj} + \nabla_l(f\nabla_k R_{lj}R_{kj}). \tag{21}$$

Substituindo a equação (21) em (20) e aplicando a integral sobre M, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M f|divRm|^2 dM_g &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g - 2\int_M f\nabla_k R_{lj}\nabla_l R_{kj} dM_g \\ &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + 2\int_M \nabla_l f\nabla_k R_{lj}R_{kj} dM_g \\ &\quad +2\int_M f\nabla_l\nabla_k R_{lj}R_{kj} dM_g - 2\int_M \nabla_l(f\nabla_k R_{lj}R_{kj}) dM_g. \end{aligned} \tag{22}$$

Como (M^n, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam, (M^n, g) tem curvatura escalar constante R. Por (4), temos

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}.$$

Trocando i por k, j por l e k por j, obtemos

$$C_{klj} = \nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj},$$

Isto é,

$$\nabla_k R_{lj} = C_{klj} + \nabla_l R_{kj}, \tag{23}$$

onde C é o tensor de Cotton. Além disso, pela identidade de Ricci, sabemos que

$$\nabla_i \nabla_j R_{ik} - \nabla_j \nabla_i R_{ik} = R_{ijis} R_{sk} + R_{ijks} R_{is}. \tag{24}$$

Portanto,

$$\nabla_i \nabla_j R_{ik} = \nabla_j \nabla_i R_{ik} + R_{ijis} R_{sk} + R_{ijks} R_{is}.$$

Trocando i por l, j por k e k por j, segue que

$$\nabla_l \nabla_k R_{lj} = \nabla_k \nabla_l R_{lj} + R_{lkls} R_{sj} + R_{lkjs} R_{ls}. \tag{25}$$

Substituindo (23) e (25) em (22), temos

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dMg + 2\int_M \nabla_l f(C_{klj} + \nabla_l R_{kj})R_{kj} dM_g \\ &+2\int_M f(\nabla_k \nabla_l R_{lj} + R_{lkls}R_{sj} + R_{lkjs}R_{ls})R_{kj} dM_g \\ &-2\int_M \nabla_l (f\nabla_k R_{lj} R_{kj}) dM_g.\end{aligned}$$

Simplificando essa expressão deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dMg + 2\int_M \nabla_l f C_{klj} R_{kj} dM_g + 2\int_M \nabla_l f \nabla_l R_{kj} R_{kj} dM_g \\ &+2\int_M f\nabla_k \nabla_l R_{lj} R_{kj} dM_g + 2\int_M f(R_{lkls}R_{sj} + R_{lkjs}R_{ls})R_{kj} dM_g \\ &-2\int_M \nabla_l (f\nabla_k R_{lj} R_{kj}) dM_g.\end{aligned}$$

Pela equação (8), sabemos que $\nabla_l R_{lj} = \frac{1}{2}\nabla_j R = 0$. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dMg + 2\int_M \nabla_l f C_{klj} R_{kj} dM_g + \int_M \nabla_l f 2\nabla_l R_{kj} R_{kj} dM_g \\ &+2\int_M f\nabla_k (\frac{1}{2}\nabla_j R) R_{kj} dM_g + 2\int_M f(R_{ks}R_{sj} - R_{kljs}R_{ls})R_{kj} dM_g,\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $R_{lkls} = R_{klsl} = R_{klsm}g^{lm} = R_{ks}$ e $R_{lkjs} = -R_{kljs}$. Além disso, pelo Teorema de Stokes

$$\int_M \nabla_l (f\nabla_k R_{lj} R_{kj}) dM_g = \int_{\partial M} f\nabla_k R_{lj} R_{kj} dS = 0,$$

pois f se anula no bordo. Logo,

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dMg + \int_M \nabla_l f \nabla_l |Ric|^2 dM_g + 2\int_M C_{klj} R_{kj} \nabla_l f dM_g \\ &+2\int_M f(R_{ks}R_{sj}R_{kj} - R_{kljs}R_{ls}R_{kj})dM_g. \qquad (26)\end{aligned}$$

Visto que

$$2\nabla_l R_{kj} R_{kj} = \nabla_l (R_{kj}R_{kj}) = \nabla_l |Ric|^2.$$

Agora trocando j por i e s por j na quarta integral do lado direito da igualdade em (26), temos

$$\begin{aligned}2\int_M f(R_{ks}R_{sj}R_{kj} - R_{kljs}R_{ls}R_{kj})dM_g &= 2\int_M f(R_{kj}R_{ji}R_{ki} - R_{klij}R_{lj}R_{ki})dM_g \\ &= 2\int_M f(R_{jk}R_{ij}R_{ik} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})dM_g \\ &= 2\int_M f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})dM_g,\end{aligned}$$

onde usamos o fato do tensor de Ricci ser simétrico e a simetria do tensor de curvatura de Riemann das duas primeiras entradas com as duas últimas, isto é, $R_{klij} = R_{ijkl}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dMg + \int_M \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle dM_g \\ &+2\int_M f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})dM_g \\ &+2\int_M C_{klj}\nabla_l f R_{jk} dM_g,\end{aligned}$$

onde foi usado que $\nabla_l f \nabla_l |Ric|^2 = \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \rangle$.

□

Lema 3.3 *(Baltazar e Ribeiro Jr., 2017) Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Então*

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= -\int_M \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle dM_g - 2\int_M C_{klj}\nabla_l f R_{jk} dM_g \\ &-2\int_M f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})dM_g \\ &+2\int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g - 2\int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g.\end{aligned}$$

Demonstração: Inicialmente, de (13), obtemos

$$-(\Delta f)g_{ik} + \nabla_i\nabla_k f - fR_{ik} = g_{ik},$$

onde concluímos que

$$\begin{aligned} fR_{ik} &= -(\Delta f)g_{ik} + \nabla_i\nabla_k f - g_{ik} \\ &= [-(\Delta f + 1)]g_{ik} + \nabla_i\nabla_k f. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_M fR_{ijkl}R_{jl}R_{ik}dM_g &= \int_M R_{ijkl}R_{jl}fR_{ik}dM_g \\ &= \int_M R_{ijkl}R_{jl}[-(\Delta f + 1)g_{ik} + \nabla_i\nabla_k f]dM_g \\ &= -\int_M (\Delta f + 1)g_{ik}R_{ijkl}R_{jl}dM_g + \int_M R_{ijkl}R_{jl}\nabla_i\nabla_k f dM_g \\ &= -\int_M (\Delta f + 1)g_{ik}R_{jilk}R_{jl}dM_g + \int_M R_{ijkl}R_{jl}\nabla_i\nabla_k f dM_g \\ &= -\int_M (\Delta f + 1)|Ric|^2 dM_g + \int_M R_{ijkl}R_{jl}\nabla_i\nabla_k f dM_g. \end{aligned} \tag{27}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f) &= \nabla_i R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f + R_{ijkl}\nabla_i(R_{jl}\nabla_k f) \\ &= \nabla_i R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f + R_{ijkl}(\nabla_i R_{jl}\nabla_k f + R_{jl}\nabla_i\nabla_k f) \\ &= \nabla_i R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f + R_{ijkl}\nabla_i R_{jl}\nabla_k f + R_{ijkl}R_{jl}\nabla_i\nabla_k f. \end{aligned}$$

Logo,

$$R_{ijkl}R_{jl}\nabla_i\nabla_k f = \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f) - \nabla_i R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f - R_{ijkl}\nabla_i R_{jl}\nabla_k f. \tag{28}$$

Substituindo a equação (28) em (27), temos

$$\begin{aligned} \int_M fR_{ijkl}R_{jl}R_{ik}dM_g = -\int_M (\Delta f + 1)|Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g \\ -\int_M \nabla_i R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f dM_g - \int_M R_{ijkl}\nabla_i R_{jl}\nabla_k f dM_g. \end{aligned} \tag{29}$$

Sabemos que $\nabla_i R_{ijkl} = (divRm)_{jkl}$. Além disso, por (8), temos que

$$(divRm)_{jkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}.$$

Assim, segue que

$$\nabla_i R_{ijkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}. \tag{30}$$

No entanto, por (4) temos que o tensor de Cotton satisfaz a equação

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}).$$

Lembrando que R é constante temos

$$C_{klj} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}. \tag{31}$$

Comparando (30) e (31), segue que

$$\nabla_i R_{ijkl} = C_{klj}. \tag{32}$$

Agora substituindo (32) em (29), temos

$$\begin{aligned}\int_M f R_{ijkl} R_{jl} R_{ik} dM_g &= -\int_M (\Delta f + 1)|Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i (R_{ijkl} R_{jl} \nabla_k f) dM_g \\ &\quad - \int_M C_{klj} R_{jl} \nabla_k f dM_g - \int_M R_{ijkl} \nabla_i R_{jl} \nabla_k f dM_g. \end{aligned} \tag{33}$$

Por outro lado, note que

$$\int_M R_{ijkl} \nabla_i R_{jl} \nabla_k f dM_g = \frac{1}{2}\left[\int_M R_{ijkl} \nabla_i R_{jl} \nabla_k f dM_g + \int_M R_{ijkl} \nabla_i R_{jl} \nabla_k f dM_g\right].$$

Trocando j por i na segunda integral do lado direito da igualdade, temos

$$\begin{aligned}\int_M R_{ijkl} \nabla_i R_{jl} \nabla_k f dM_g &= \frac{1}{2}\left[\int_M R_{ijkl} \nabla_i R_{jl} \nabla_k f dM_g + \int_M R_{jikl} \nabla_j R_{il} \nabla_k f dM_g\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_M R_{ijkl} \nabla_i R_{jl} \nabla_k f dM_g - \int_M R_{ijkl} \nabla_j R_{il} \nabla_k f dM_g\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_M R_{ijkl} (\nabla_i R_{jl} - \nabla_j R_{il}) \nabla_k f dM_g. \end{aligned}$$

Onde foi usado que $R_{jikl} = -R_{ijkl}$. Trocando k por l segue que

$$\begin{aligned}\int_M R_{ijkl} \nabla_i R_{jl} \nabla_k f dM_g &= \frac{1}{2}\int_M R_{ijlk} (\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) \nabla_l f dM_g \\ &= -\frac{1}{2}\int_M R_{ijkl} (\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) \nabla_l f dM_g. \end{aligned} \tag{34}$$

Substituindo (34) em (33), obtemos

$$\begin{aligned}\int_M fR_{ijkl}R_{jl}R_{ik}dM_g &= -\int_M(\Delta f+1)|Ric|^2dM_g-\int_M C_{klj}R_{jl}\nabla_k f dM_g\\&+\frac{1}{2}\int_M R_{ijkl}(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})\nabla_l f dM_g\\&+\int_M\nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g.\end{aligned}\tag{35}$$

Pelo Lema (3.1), sabemos que

$$f(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})=R_{ijkl}\nabla_l f+\frac{R}{n-1}\left(\nabla_i f g_{jk}-\nabla_j f g_{ik}\right)-\left(\nabla_i f R_{jk}-\nabla_j f R_{ik}\right).$$

Portanto,

$$R_{ijkl}\nabla_l f=f(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})-\frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk}-\nabla_j f g_{ik})+(\nabla_i f R_{jk}-\nabla_j f R_{ik}).$$

Multiplicando essa igualdade pela expressão $(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})$, segue que

$$\begin{aligned}R_{ijkl}\nabla_l f(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik}) &= f(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})\\&-\frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk}-\nabla_j f g_{ik})(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})\\&+(\nabla_i f R_{jk}-\nabla_j f R_{ik})(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik}).\end{aligned}$$

Como $(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})=|\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik}|^2$, temos então

$$\begin{aligned}R_{ijkl}\nabla_l f(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik}) &= f|\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik}|^2\\&-\frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk}-\nabla_j f g_{ik})(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik})\\&+(\nabla_i f R_{jk}-\nabla_j f R_{ik})(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik}).\end{aligned}\tag{36}$$

Note que

$$\begin{aligned}(\nabla_i f g_{jk}-\nabla_j f g_{ik})(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik}) &= \nabla_i f g_{jk}\nabla_iR_{jk}-\nabla_i f g_{jk}\nabla_jR_{ik}\\&-\nabla_j f g_{ik}\nabla_iR_{jk}+\nabla_j f g_{ik}\nabla_jR_{ik},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(\nabla_i f g_{jk}-\nabla_j f g_{ik})(\nabla_iR_{jk}-\nabla_jR_{ik}) &= \nabla_i f\nabla_i g_{jk}R_{jk}-\nabla_i f g_{jk}\nabla_jR_{ik}\\&-\nabla_j f g_{ik}\nabla_iR_{jk}+\nabla_j f\nabla_j g_{ik}R_{ik}\\&= \nabla_i f\nabla_i R-\nabla_i f\nabla_j R_{ij}\\&-\nabla_j f\nabla_i R_{ji}+\nabla_j f\nabla_j R.\end{aligned}$$

Além disso, por (8), segue que

$$\nabla_j R_{ij} = \nabla_j R_{ji} = \frac{1}{2}\nabla_i R = 0.$$

Analogamente,

$$\nabla_i R_{ji} = \nabla_i R_{ij} = \frac{1}{2}\nabla_j R = 0.$$

Portanto,

$$(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik})(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = 0. \tag{37}$$

Usando (37) em (36), obtemos

$$\begin{aligned} R_{ijkl}\nabla_l f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= f|\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}|^2 \\ &\quad +(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}). \end{aligned} \tag{38}$$

Observando que $(divRm)_{kij}(divRm)_{kij} = |divRm|^2$, concluímos que

$$|divRm|^2 = |\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}|^2. \tag{39}$$

Substituindo (39) em (38) temos

$$\begin{aligned} R_{ijkl}\nabla_l f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= f|divRm|^2 + (\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik})(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) \\ &= f|divRm|^2 + \nabla_i R_{jk}\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}\nabla_i R_{jk} \\ &\quad -\nabla_i f R_{jk}\nabla_j R_{ik} + \nabla_j R_{ik}\nabla_j f R_{ik}. \end{aligned}$$

Isto implica (ao trocarmos i por j)

$$\begin{aligned} R_{ijkl}\nabla_l f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= f|divRm|^2 + \nabla_j R_{ik}\nabla_j f R_{ik} - \nabla_i f R_{jk}\nabla_j R_{ik} \\ &\quad -\nabla_i f R_{jk}\nabla_j R_{ik} + \nabla_j R_{ik}\nabla_j f R_{ik} \\ &= f|divRm|^2 + 2\nabla_j R_{ik}\nabla_j f R_{ik} - 2\nabla_i f R_{jk}\nabla_j R_{ik} \\ &= f|divRm|^2 + \nabla_j f 2\nabla_j R_{ik} R_{ik} - 2\nabla_i f R_{jk}\nabla_j R_{ik} \\ &= f|divRm|^2 + \nabla_j f\nabla_j (R_{ik}R_{ik}) - 2\nabla_i f R_{jk}\nabla_j R_{ik} \\ &= f|divRm|^2 + \nabla_j f\nabla_j |Ric|^2 - 2\nabla_i f R_{jk}\nabla_j R_{ik} \\ &= f|divRm|^2 + \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle - 2\nabla_i f R_{jk}\nabla_j R_{ik}. \end{aligned} \tag{40}$$

Derivando na direção i a expressão $\nabla_j f R_{ik} R_{jk}$, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) &= \nabla_i \nabla_j f R_{ik} R_{jk} + \nabla_j f \nabla_i (R_{ik} R_{jk})\\ &= \nabla_i \nabla_j f R_{ik} R_{jk} + \nabla_f \nabla_i R_{ik} R_{jk} + \nabla_j f \nabla_i R_{jk} R_{ik}.\end{aligned}$$

Como por (9), $\nabla_i R_{ik} = \dfrac{1}{2} \nabla_k R = 0$, pois R é constante, então

$$\nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) = \nabla_i \nabla_j f R_{ik} R_{jk} + \nabla_j f \nabla_i R_{jk} R_{ik}.$$

Trocando i por j temos

$$\begin{aligned}\nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) &= \nabla_i \nabla_j f R_{ik} R_{jk} + \nabla_i f \nabla_j R_{ik} R_{jk}\\ &= \nabla_i \nabla_j f R_{ik} R_{jk} + \nabla_i f R_{jk} \nabla_j R_{ik}.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\nabla_i f R_{jk} \nabla_j R_{ik} = \nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) - \nabla_i \nabla_j f R_{ik} R_{jk}. \tag{41}$$

Substituindo (41) em (40), segue que

$$\begin{aligned}R_{ijkl} \nabla_l f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= f|divRm|^2 + \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle\\ &\quad -2[\nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) - \nabla_i \nabla_j f R_{ik} R_{jk}]\\ &= f|divRm|^2 + \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle\\ &\quad -2\nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) + 2\nabla_i \nabla_j f R_{ik} R_{jk}. \qquad (42)\end{aligned}$$

Por (13), temos que $-(\Delta f) g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} = g_{ij}$ e portanto

$$\nabla_i \nabla_j f = f R_{ij} + (\Delta f + 1) g_{ij}.$$

Usando essa relação em (42), temos

$$\begin{aligned}R_{ijkl} \nabla_l f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= f|divRm|^2 + \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle\\ &\quad -2\nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) + 2[f R_{ij} + (\Delta f + 1) g_{ij}] R_{ik} R_{jk}\\ &= f|divRm|^2 + \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle\\ &\quad -2\nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) + 2 f R_{ij} R_{ik} R_{jk} + 2(\Delta f + 1) g_{ij} R_{ik} R_{jk}\\ &= f|divRm|^2 + \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle\\ &\quad -2\nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) + 2 f R_{ij} R_{ik} R_{jk} + 2(\Delta f + 1) R_{ik} R_{ik}\\ &= f|divRm|^2 + \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle\\ &\quad -2\nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) + 2 f R_{ij} R_{ik} R_{jk} + 2(\Delta f + 1)|Ric|^2.\end{aligned}$$

Integrando em relação a M, resulta

$$\begin{aligned}\int_M R_{ijkl}\nabla_l f(\nabla_i R_{jk}-\nabla_j R_{ik})dM_g &= \int_M f|divRm|^2 dM_g+\int_M \left\langle \nabla f,\nabla|Ric|^2\right\rangle dM_g\\ &-2\int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g+2\int_M fR_{ij}R_{ik}R_{jk}dM_g\\ &+2\int_M(\Delta f+1)|Ric|^2 dM_g. \end{aligned}\tag{43}$$

Note que, por (35), temos

$$\begin{aligned}\int_M fR_{ijkl}R_{jl}R_{ik}dM_g &= -\int_M(\Delta f+1)|Ric|^2 dM_g-\int_M C_{klj}R_{jl}\nabla_k f dM_g\\ &+\frac{1}{2}\int_M R_{ijkl}(\nabla_i R_{jk}-\nabla_j R_{ik})\nabla_l f dM_g\\ &+\int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g.\end{aligned}$$

Usando (43) em (35), obtemos

$$\begin{aligned}\int_M fR_{ijkl}R_{jl}R_{ik}dM_g &= -\int_M(\Delta f+1)|Ric|^2 dM_g-\int_M C_{klj}R_{jl}\nabla_k f dM_g\\ &+\frac{1}{2}\int_M f|divRm|^2 dM_g+\frac{1}{2}\int_M \left\langle \nabla f,\nabla|Ric|^2\right\rangle dM_g\\ &-\int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g+\int_M fR_{ij}R_{ik}R_{jk}dM_g\\ &+\int_M(\Delta f+1)|Ric|^2 dM_g+\int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g.\end{aligned}\tag{44}$$

Agora multiplicando por 2 a equação (44) e isolando $\int_M f|divRm|^2 dM_g$, segue que

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= -\int_M \left\langle \nabla f,\nabla|Ric|^2\right\rangle dM_g+2\int_M C_{klj}R_{jl}\nabla_k f dM_g\\ &+2\int_M fR_{ijkl}R_{jl}R_{ik}dM_g-2\int_M fR_{ij}R_{ik}R_{jk}dM_g\\ &+2\int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g-2\int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g.\end{aligned}$$

Simplificando a expresssão e trocando k por l resulta

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= -\int_M \left\langle \nabla f,\nabla|Ric|^2\right\rangle dM_g+2\int_M C_{lkj}R_{jk}\nabla_l f dM_g\\ &-2\int_M f(R_{ij}R_{ik}R_{jk}-R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})dM_g\\ &+2\int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g-2\int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g.\end{aligned}$$

Como o tensor de Cotton é anti-simétrico nas duas primeiras entradas, isto é, $C_{lkj} = -C_{klj}$, temos

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= -\int_M \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle dM_g - 2\int_M C_{klj}R_{jk}\nabla_l f dM_g \\ &\quad -2\int_M f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})dM_g \\ &\quad +2\int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g - 2\int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g.\end{aligned}$$

Isto finaliza a prova do lema.

□

3.3 Prova do resultado principal

Nesta seção apresentaremos a prova do Teorema 3.2. A partir dele, com a hipótese adicional do tensor de Ricci ser paralelo, provaremos também o Corolário 3.1.

Teorema 3.3 *(Baltazar e Ribeiro Jr., 2017) Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada, conexa e com bordo suave ∂M. Então temos*

$$\int_M f|divRm|^2 dM_g + \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g + \int_M f(\Delta |Ric|^2 - |\nabla Ric|^2)dM_g = 0.$$

Demonstração: Pelo Lema 3.2, sabemos que

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle dM_g \\ &\quad +2\int_M f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})dM_g \\ &\quad +2\int_M C_{klj}\nabla_l f R_{jk} dM_g. \qquad (45)\end{aligned}$$

Temos também que, pelo Lema 3.3,

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= -\int_M \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle dM_g - 2\int_M C_{klj}\nabla_l f R_{jk} dM_g \\ &\quad -2\int_M f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})dM_g \\ &\quad +2\int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g - 2\int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g. \qquad (46)\end{aligned}$$

Somando (45) com (46), deduzimos

$$\begin{aligned} 2\int_M f|divRm|^2 dM_g &= 2\int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + 2\int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g \\ &\quad -2\int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g \\ &\quad -\int_M \nabla_i(R_{ijkl}R_{jl}\nabla_k f)dM_g. \end{aligned}$$

Trocando k por l, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g \\ &\quad -\int_M \nabla_i(R_{ijlk}R_{jk}\nabla_l f)dM_g. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk})dM_g \\ &\quad +\int_M \nabla_i(R_{ijkl}\nabla_l f R_{jk})dM_g. \end{aligned} \tag{47}$$

Relembre que

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}. \tag{48}$$

Além disso, pelo Lema 3.1, sabemos que

$$\begin{aligned} f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad -(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \end{aligned} \tag{49}$$

Usando (48) em (49), resulta que

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad -(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} R_{ijkl}\nabla_l f &= fC_{ijk} - \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad +(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \end{aligned} \tag{50}$$

Substituindo (50) em (47), segue que

$$\begin{aligned} \int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) dM_g \\ &\quad + \int_M \nabla_i [fC_{ijk} - \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad +(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})] R_{jk} dM_g \\ &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) dM_g \\ &\quad + \int_M \nabla_i [fC_{ijk}R_{jk} - \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik})R_{jk} \\ &\quad +(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})R_{jk}] dM_g. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) dM_g \\ &\quad + \int_M \nabla_i [fC_{ijk}R_{jk} - \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk}R_{jk} - \nabla_j f g_{ik}R_{jk}) \\ &\quad +(\nabla_i f R_{jk}R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}R_{jk})] dM_g \\ &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) dM_g \\ &\quad + \int_M \nabla_i [fC_{ijk}R_{jk} - \frac{R}{n-1}(\nabla_i f R - \nabla_j f R_{ij}) \\ &\quad +(\nabla_i f |Ric|^2 - \nabla_j f R_{ik}R_{jk})] dM_g. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} \int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) dM_g \\ &\quad + \int_M \nabla_i [-\frac{R}{n-1}(\nabla_i f R - \nabla_j f R_{ji}) + \nabla_i f |Ric|^2] dM_g \\ &\quad + \int_M \nabla_i (fC_{ijk}R_{jk}) dM_g - \int_M \nabla_i(\nabla_j f R_{ik} R_{jk}) dM_g. \end{aligned}$$

Note que, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_M \nabla_i(fC_{ijk}R_{jk})dM_g = \int_{\partial M} fC_{ijk}R_{jk}dS = 0,$$

pois f se anula em ∂M. Usando esse resultado na igualdade anterior e observando que R é constante, após algumas simplificações, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M \nabla_i[-\frac{R^2}{n-1}\nabla_i f + \frac{R}{n-1}R_{ji}\nabla_j f + \nabla_i f|Ric|^2]dM_g \\
&= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M [\nabla_i(-\frac{R^2}{n-1}\nabla_i f) + \nabla_i(\frac{R}{n-1}R_{ji}\nabla_j f)]dM_g \\
&\quad + \int_M \nabla_i(\nabla_i f|Ric|^2)dM_g \\
&= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M [-\frac{R^2}{n-1}\nabla_i\nabla_i f + \frac{R}{n-1}\nabla_i(\nabla_j f R_{ji})]dM_g \\
&\quad + \int_M (\nabla_i\nabla_i f|Ric|^2 + \nabla_i f\nabla_i|Ric|^2)dM_g \\
&= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M [-\frac{R^2}{n-1}\Delta f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i\nabla_j f R_{ji} + \nabla_j f\nabla_i R_{ji})]dM_g \\
&\quad + \int_M (\Delta f|Ric|^2 + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle)dM_g.
\end{aligned} \tag{51}$$

É fácil notar que $\nabla_j f\nabla_i R_{ji} = 0$. Além disso, por (13), temos que

$$\nabla_i\nabla_j f = fR_{ij} + (\Delta f + 1)g_{ij}.$$

Usando essas relações em (51), segue que

$$\begin{aligned}
\int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M [-\frac{R^2}{n-1}\Delta f + \frac{R}{n-1}(fR_{ij} + (\Delta f + 1)g_{ij})R_{ji}]dM_g \\
&\quad + \int_M (\Delta f|Ric|^2 + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle)dM_g + \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g \\
&= \int_M [-\frac{R^2}{n-1}\Delta f + \frac{R}{n-1}(fR_{ij}R_{ji} + (\Delta f + 1)g_{ij}R_{ji})]dM_g \\
&\quad + \int_M (\Delta f|Ric|^2 + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle)dM_g + \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M [-\frac{R^2}{n-1}\Delta f + \frac{R}{n-1}(f|Ric|^2 + (\Delta f + 1)R)]dM_g\\ &+ \int_M (\Delta f|Ric|^2 + \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle)dM_g\\ &+ \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g. \end{aligned} \tag{52}$$

Pela equação (12), temos que $\Delta f = \dfrac{-Rf - n}{n-1}$. Logo, $\Delta f|Ric|^2 = \dfrac{(-Rf-n)}{n-1}|Ric|^2$.

Usando essa relação em (52), segue que

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M [-\frac{R^2}{n-1}\Delta f + \frac{R}{n-1} f|Ric|^2 + \frac{R^2}{n-1}\Delta f + \frac{R^2}{n-1}]dM_g\\ &+ \int_M \frac{(-Rf-n)}{n-1}|Ric|^2 dM_g + \int_M \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle dM_g\\ &+ \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g\\ &= \int_M [\frac{Rf}{n-1}|Ric|^2 + \frac{R^2}{n-1} + \frac{(-Rf-n)}{n-1}|Ric|^2]dM_g\\ &+ \int_M \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle dM_g + \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g\\ &= \int_M [\frac{(Rf-Rf-n)}{n-1}|Ric|^2 + \frac{R^2}{n-1}]dM_g\\ &+ \int_M \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle dM_g + \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M (\frac{R^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}|Ric|^2)dM_g\\ &+ \int_M \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle dM_g\\ &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g - \frac{n}{n-1}\int_M (|Ric|^2 - \frac{R^2}{n})dM_g\\ &+ \int_M \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle dM_g. \end{aligned} \tag{53}$$

Relembre que $|Ric - \dfrac{R}{n}g|^2 = |Ric|^2 - \dfrac{R^2}{n}$. De fato, expressando $|Ric - \dfrac{R}{n}g|^2$ em coordenadas, temos

$$
\begin{aligned}
|R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}|^2 &= (R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij})(R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}) \\
&= R_{ij}R_{ij} - 2\frac{R}{n} g_{ij}R_{ij} + \frac{R^2}{n^2} g_{ij}g_{ij} \\
&= |Ric|^2 - 2\frac{R}{n} R + \frac{R^2}{n^2} n \\
&= |Ric|^2 - \frac{R^2}{n}.
\end{aligned}
$$

Utilizando essa expressão em (53), segue que

$$
\begin{aligned}
\int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g - \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n} g|^2 dM_g \\
&+ \int_M \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle dM_g. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
\nabla_i (f\nabla_i |Ric|^2) &= \nabla_i f \nabla_i |Ric|^2 + f\nabla_i\nabla_i |Ric|^2 \\
&= \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle + f\Delta |Ric|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle = \nabla_i (f\nabla_i |Ric|^2) - f\Delta |Ric|^2.
$$

Integrando em M, temos

$$
\int_M \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle dM_g = \int_M \nabla_i (f\nabla_i |Ric|^2) dM_g - \int_M f\Delta |Ric|^2 dM_g.
$$

No entanto, usando o Teorema de Stokes e que f se anula no bordo, segue que

$$
\int_M \nabla_i (f\nabla_i |Ric|^2 dM_g = \int_{\partial M} f\nabla_i |Ric|^2 dS = 0.
$$

Assim,

$$
\int_M \left\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \right\rangle dM_g = -\int_M f\Delta |Ric|^2 dM_g. \qquad (55)
$$

Usando (55) em (54) temos

$$\begin{aligned}\int_M f|divRm|^2 dM_g &= \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g - \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g \\ &- \int_M f\Delta|Ric|^2 dM_g.\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\int_M f|divRm|^2 dM_g + \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g - \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g + \int_M f\Delta|Ric|^2 dM_g = 0,$$

o que simplificando, nos dá

$$\int_M f|divRm|^2 dM_g + \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g + \int_M f(\Delta|Ric|^2 - |\nabla Ric|^2) dM_g = 0,$$

encerrando a prova do teorema.

□

Finalmente, provaremos agora o corolário 3.1 usando o Teorema 3.2.

Corolário 3.2 *(Baltazar e Ribeiro Jr., 2017) Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam, com M^n compacta, orientada, conexa e com fronteira ∂M suave e tal que o tensor de Ricci é paralelo. Então (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em um espaço simplesmente conexo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*
Demonstração: Observe inicialmente que como o tensor de Ricci é paralelo, derivando na direção k, temos que $\nabla_k Ric = \nabla_k R_{ij} = 0$. Além disso, $|Ric|$ é constante. De fato,

$$\nabla_k |Ric|^2 = \nabla_k(R_{ij}R_{ij}) = 2\nabla_k R_{ij} R_{ij} = 0.$$

Portanto, $|Ric|$ é constante em M.

De (8), sabemos que $(divRm)_{jkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk} = 0$, pois o tensor de Ricci é paralelo. Portanto,

$$(divRm)_{jkl}(divRm)_{jkl} = |divRm|^2 = 0.$$

Além disso, como $|Ric|^2$ é constante, $\Delta|Ric|^2 = 0$. Temos também que $|\nabla Ric|^2 = 0$, pois $\nabla Ric = 0$, novamente pelo fato do tensor de Ricci ser paralelo. Logo, pelo Teorema 3.3 temos

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_M f|divRm|^2 dM_g + \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g + \int_M f(\Delta|Ric|^2 - |\nabla Ric|^2) dM_g \\
&= \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g.
\end{aligned}
$$

Isto implica que $\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g = 0$. Donde concluímos que $|Ric - \frac{R}{n}g| = 0$. Ou seja, M é uma variedade de Einstein. Portanto, basta aplicarmos o Teorema 3.1 para concluir que (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em uma forma espacial $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. Isto é exatamente o que queríamos demonstrar.

$\square$

4 CONCLUSÃO

Na procura por métricas especiais em uma variedade diferenciável que forneçam curvatura constante, se estudou funcionais Riemannianos: Funcional curvatura escalar total e Funcional Volume. Muitos resultados foram obtidos a partir do estudo variacional desses funcionais. Destacamos o resultado alcançado por Miao e Tam (2011), que resultou do estudo variacional do Funcional Volume e das métricas críticas. Os autores concluíram que, se (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam conexa, compacta, Einstein e com bordo suave ∂M, então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. No entanto, ressaltamos que Baltazar e Ribeiro Jr. (2017), sob a hipótese do tensor de Ricci ser paralelo em vez da variedade ser Einstein, conseguiram a mesma conclusão. Vale salientar que o tensor de Ricci paralelo é uma hipótese mais fraca que a variedade ser Einstein. Sendo assim, os autores conseguiram melhorar significativamente o resultado, visto que a conclusão agora é válida para um conjunto mais abrangente de variedades. A idéia é que se consiga aumentar cada vez mais esse conjunto.

REFERÊNCIAS

BALTAZAR, H.; RIBEIRO JR, E. Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 145, n. 8, p. 3513–3523, 2017.

BARROS, A.; DIÓGENES, R.; RIBEIRO JR, E. Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 25, n. 4, p. 2698–2715, 2015.

BATISTA, R.; DIÓGENES, R.; RANIERI, M.; RIBEIRO JR., E. Critical metrics of the volume functional on compact three-manifolds with smooth boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 27, n. 2, p. 1530–1547, 2017.

BESSE, A. **Einstein manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete**. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

CAO, H.-D; CHEN, Q. On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons. **Duke Mathematical Journal**, v. 162, n. 6, p. 1149–1169, 2013.

CORVINO, J. Scalar curvature deformation and a gluing construction for the Einstein constraint equations. **Communications in Mathematical Physics**, v. 214, n. 1, p. 137–189, 2000.

CORVINO, J.; EICHMAIR, M.; MIAO, P. Deformation of scalar curvature and volume. **Mathematische Annalen**, v. 357, n. 2, p. 551–584, 2013.

DERDZIŃSKI, A. Classification of certain compact Riemannian manifolds with harmonic curvature and non-parallel Ricci tensor. **Mathematische Zeitschrift**, v. 172, n. 3, p. 273–280, 1980.

DERDZIŃSKI, A. On compact Riemannian manifolds with harmonic curvature. **Mathematische Annalen**, v. 259, n. 2, p. 145–152, 1982.

FAN, X.-Q; SHI, Y.; TAM, L.-F. Large-sphere and small-sphere limits of the Brown-York mass. **arXiv preprint arXiv:0711.2552**, 2007.

HILBERT, D. Die Grundlagen der Physik, Nach. **Ges. Wiss**, p. 461–472, 1915.

KOBAYASHI, O. A differential equation arising from scalar curvature function. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 34, n. 4, p. 665–675, 1982.

KOBAYASHI, O.; OBATA, M. Conformally-flatness and static space-time. In: **Manifolds and Lie groups:** Papers in Honor of Yozô Matsushima, Boston: Birkhauser, p. 197–206. 1981.

LEE, JOHN M. **Introduction to Smooth Manifolds**. New York: Springer, 2003.

MIAO, P.; TAM, L-F. On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 36, n. 2, p. 141–171, 2009.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 363, n. 6, p. 2907–2937, 2011.