



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ERIVAMBERTO LIMA OLIVEIRA

DIFERENCIABILIDADE E APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES  $C^1$ :  
PARA FUNÇÕES LIPSCHITZ, DE SOBOLEV E VARIAÇÃO LIMITADA

FORTALEZA

2018

JOSÉ ERIVAMBERTO LIMA OLIVEIRA

DIFERENCIABILIDADE E APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES  $C^1$ :  
PARA FUNÇÕES LIPSCHITZ, DE SOBOLEV E VARIAÇÃO LIMITADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- O47d Oliveira, José Erivamberto Lima.  
Diferenciabilidade e aproximação por funções  $C^1$  : para funções Lipschitz, de Sobolev e Variação Limitada / José Erivamberto Lima Oliveira. – 2018.  
267 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.
1. Diferenciabilidade. 2. Aproximação. 3. Funções Lipschitz. 4. Funções de Sobolev. 5. Funções de Variação Limitada. I. Título.

CDD 510

---

JOSÉ ERIVAMBERTO LIMA OLIVEIRA

DIFERENCIABILIDADE E APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES  $C^1$ :  
PARA FUNÇÕES LIPSCHITZ, DE SOBOLEV E VARIAÇÃO LIMITADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: 28 / 02 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho, a minha querida mãe  
Teresinha, a minha namorada Nailena e meu  
irmão Evamberto.

## AGRADECIMENTOS

A Deus por todo amor, saúde e sucesso que Ele está proporcionando em minha vida.

A minha forte e guerreira Mãe Teresinha, agradeço pela a educação que me propiciou, além de todo carinho, amor, e a fé em suas orações para que eu conseguisse trilhar esse caminho, mesmo quando a esperança estava a se dissipar, sua fé fortaleceu a minha.

A minha namorada Nailena, a quem compartilhei momentos difíceis nesse percurso, e nesses, me apoiou e me ajudou a manter me firme e forte. Também te agradeço meu amor, pelo seu carinho e paciência. Te amo, beijinhos.

A meu irmão, Evamberto pelo apoio, confiança e fé.

A minha avó, pelo apoio e fé em suas orações.

A meu pai Erivan pelo apoio.

A meu querido tio Francisco de Assis Lima que hoje está ao lado de Deus. Em vida, foi um grande homem, o qual me orgulho muito. O mesmo também me ajudou a iniciar essa jornada.

A minha Tia Elenilda, pela solicitude e apoio.

A meu tio Eliosano, pelo apoio, confiança e apreço.

A senhora Gildelena, pelo apoio e fé.

Ao senhor Jaire Guimarães pelo apoio e confiança.

A senhora Selma pelo apoio.

Ao senhor Arnaldo pela paciência, confiança e apoio.

Ao senhor João Evangelista pelo apoio e confiança.

Ao senhor Raimundo, pelas suas orações.

A meus amigos Felipe Aguiar, Leandro, Sandro e Michel pela força e fé na conclusão dessa jornada e pela disponibilidade.

A meu amigo André Paiva, pela paciência.

A meu amigo Wanderley pela força em momentos difíceis, e por me ajudar nos primeiros passos dessa jornada.

Aos amigos Silvio e Elzon, pelo companherismo e ajuda. Além das boas conversas descontraídas acompanhadas com café no Alfa e Ômega. Também agradeço ao confrades Emanuel, André e Felipe por se preocuparem e me ajudarem no primeiro semestre. Sou grato também ao demais companheiros Pedro, Israel e Flaviano .

Ao professor Flávio Falcão, pois o pontapé inicial dessa jornada só foi possível com suas orientações em nossos seminários. E por ter me apresentado ainda na graduação o universo da Análise.

Agradeço também a todos os professores do departamento de matemática da UFC que contribuíram para constituição de minha formação, de maneira direta ou indireta.

Em especial, agradeço ao professores Edson Sampaio e Daniel Cibotaru, que no primeiro semestre me avaliaram pelo meu esforço e confiaram em meu potencial.

Ao professor Diego Moreira, pelas aulas excelentes e seminários, além de suas orientações, indicações de livros e por ter me indicado professor Ederson como orientador.

Ao meu orientador professor Ederson Braga, pelo seu esforço, paciência, dedicação, atenção e preocupação. Além de sua excelência quanto orientador. O compartilhar de sua experiência e saber em nossos encontros foram cruciais para minha formação. Muito obrigado professor!

A Andreia e a Jéssica pela paciência e excelência nas soluções de questões burocráticas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Por fim, sou grato a todas as pessoas que diretamente ou indiretamente ajudaram nessa jornada.

”Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam, e a prova das coisas que não se veem.”(Hebreus 11:1)



## RESUMO

No âmbito da pesquisa em Análise Aplicada como em Equações Diferenciais Parciais, um matemático tende a lidar muitas vezes com funções que se quer são contínuas. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo, apresentar resultados de regularidade e aproximação por funções mais regulares, para funções que a priori são apenas integráveis no sentido de Lebesgue e/ou gozam de uma propriedade preestabelecida. Contudo, para estabelecer tais resultados, se faz necessário consolidar uma série de resultados finos em vários tópicos da Análise Real afim de obtermos ferramentas mais sofisticadas. Em particular, será exposto resultados sobre Diferenciabilidade  $L^p$ , Diferenciabilidade Aproximada e Diferenciabilidade q.t.p. para funções Lipschitz, para funções de Sobolev cujo gradiente fraco são funções em  $L^p$  e para funções de Variação Limitada cujo gradiente é uma medida vetorial de Radon. Também será exposto resultados de regularidade para funções convexas. Mostraremos que tais funções são localmente Lipschitz e que para quase todo ponto do domínio de uma função convexa existem derivadas de segunda ordem. Este é o famoso Teorema de Aleksandrov. Além disso, será estabelecido resultados de aproximação por funções  $C^1$  para funções Lipschitz, de Sobolev e Variação Limitada onde temos o controle sobre a exiguidade da medida de Lebesgue do conjunto onde a função escolhida e seu gradiente diferem, respectivamente, da função  $C^1$  e seu gradiente.

**Palavras-chave:** Diferenciabilidade. Aproximação. Funções Lipschitz. Funções de Sobolev. Funções de variação limitada.

## ABSTRACT

In the scope of the research in Applied Analysis as in Partial Differential Equations, a mathematician tends to deal with functions that are not continuous. In this way, this work aims to present regularity and approximation results by more regular functions, for functions that are first only integrable in the Lebesgue sense and/or enjoy a preestablished property. However, in order to establish such results, it is necessary to consolidate a series of fine results into real-values of the Real Analysis in order to obtain more sophisticated tools. In particular, will be exported results on Differentiability  $L^p$ , Approximate Differentiability and Differentiability q.t.p. for Lipschitz functions, for Sobolev functions whose weak gradient are functions in  $L^p$  and for functions of Bounded Variation whose gradient is a vector measure of Radon. Also will be exposed regularity results for convex functions. We will show that such functions are locally Lipschitz and that for almost every point of the domain of a convex function there are derived from the second order. This is the famous Aleksandrov's Theorem. In addition, we will establish the approximation results by functions  $C^1$  for functions Lipschitz, Sobolev and Bounded Variation where we have control over the smallness of the Lebesgue measure of the set where the chosen function and its gradient differ, respectively, from the functions and its gradient

**Keywords:** Differentiability. Approximation. Lipschitz functions. Sobolev functions. Functions of bounded variation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração das bolas em questão com $r_{B'} = \frac{1}{2}r_B$ . . . . .	25
Figura 2 – Ilustração para auxiliar na compreensão do argumento para estimar I – K. . . . .	32
Figura 3 – Ilustração da definição de fronteira Lipschitz . . . . .	106
Figura 4 – Ilustração para construção do Cilindro. . . . .	122
Figura 5 – Ilustração para os conjuntos $U^+$ e $U^-$ . . . . .	124
Figura 6 – Ilustração para o conjunto $C_{\delta,\varepsilon}$ . . . . .	170

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	13
<b>2</b>	<b>RESULTADOS PRELIMINARES</b> . . . . .	15
<b>2.1</b>	<b>Teoria da medida</b> . . . . .	15
2.1.1	Funções mensuráveis . . . . .	16
2.1.2	Integrais e limites . . . . .	17
2.1.3	Espaços $L^p$ . . . . .	20
2.1.4	Produto de medidas, Teorema de Fubini . . . . .	21
2.1.5	Medida de Lebesgue . . . . .	22
<b>2.2</b>	<b>Teoremas de cobertura</b> . . . . .	23
2.2.1	Teorema da cobertura de Vitali . . . . .	23
2.2.2	Teorema da cobertura de Besicovitch . . . . .	29
<b>2.3</b>	<b>Diferenciação de medidas de Radon</b> . . . . .	42
<b>2.4</b>	<b>Teorema da diferenciação de Lebesgue</b> . . . . .	55
<b>2.5</b>	<b>Limites aproximados</b> . . . . .	59
<b>2.6</b>	<b>Teorema da representação de Riesz</b> . . . . .	66
<b>2.7</b>	<b>Convergência fraca e compacidade para medidas de Radon</b> . .	78
<b>2.8</b>	<b>Medida de Hausdorff</b> . . . . .	88
<b>2.9</b>	<b>Fórmulas da área e coarea</b> . . . . .	89
2.9.1	Aplicações lineares . . . . .	91
2.9.2	Jacobianos . . . . .	93
2.9.3	Fórmula da área . . . . .	93
2.9.4	Fórmula da coarea . . . . .	93
<b>2.10</b>	<b>Outros resultados preliminares</b> . . . . .	94
<b>3</b>	<b>FUNÇÕES DE SOBOLEV <math>W^{1,p}</math></b> . . . . .	96
<b>3.1</b>	<b>Sobre densidade de funções suaves em <math>W^{1,p}</math></b> . . . . .	97
3.1.1	O mollifier canônico . . . . .	97
3.1.2	Resultados de aproximação . . . . .	101
<b>3.2</b>	<b>Operações clássicas</b> . . . . .	109
<b>3.3</b>	<b><math>W^{1,\infty}</math> e as funções Lipschitzs</b> . . . . .	114
<b>3.4</b>	<b>Operador do traço para funções <math>W^{1,p}</math></b> . . . . .	117
<b>3.5</b>	<b>Operador de extensão para funções <math>W^{1,p}</math></b> . . . . .	121
<b>3.6</b>	<b>Desigualdades de Sobolev</b> . . . . .	136
3.6.1	Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev . . . . .	136
3.6.2	Desigualdade de Poincaré em bolas . . . . .	141
3.6.3	Desigualdade de Morrey . . . . .	147
<b>4</b>	<b>FUNÇÕES DE VARIAÇÃO LIMITADA BV</b> . . . . .	153
<b>4.1</b>	<b>Resultados de aproximação para funções BV</b> . . . . .	158

4.2	Operador do traço para funções BV . . . . .	169
4.3	Extensão para funções BV . . . . .	193
4.4	Desigualdades de Sobolev e Poincaré para funções BV . . . . .	196
5	<b>RESULTADOS DE DIFERENCIABILIDADE E APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES <math>C^1</math></b> . . . . .	199
5.1	<b>Diferenciabilidade <math>L^{p^*}</math></b> . . . . .	199
5.1.1	Diferenciabilidade $L^{1^*}$ para funções BV . . . . .	199
5.1.2	Diferenciabilidade $L^{p^*}$ para funções $W^{1,p}$ , ( $1 \leq p < n$ ) . . . . .	205
5.2	<b>Diferenciabilidade aproximada</b> . . . . .	210
5.3	<b>Diferenciabilidade <math>\mathcal{L}^n</math>-q.t.p. para funções <math>W^{1,p}</math>, (<math>p &gt; n</math>)</b> . . . . .	215
5.4	<b>Funções convexas</b> . . . . .	216
5.4.1	Notação para funções convexas . . . . .	227
5.4.2	Existência de $D^2f$ para funções convexas, $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. . . . .	231
5.5	<b>Teorema da extensão de Whitney</b> . . . . .	238
5.6	<b>Aproximação <math>C^1</math> para funções Lipschitz, Sobolev e BV</b> . . . . .	251
5.6.1	Aproximação de funções Lipschitz . . . . .	251
5.6.2	Aproximação de funções BV . . . . .	253
5.6.3	Aproximação de funções de Sobolev . . . . .	257
6	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	265
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	266

## 1 INTRODUÇÃO

No âmbito da pesquisa em Análise Aplicada como em Equações Diferenciais Parciais, um matemático tende a lidar com as eventuais soluções para suas equações, em espaços de funções que se quer são contínuas. Isto é, para ir de encontro a solução de uma EDP é necessário uma mudança de paradigma, tendo em vista mais flexibilidade nos espaços onde se busca pela resolução do problema elencado.

Contudo, nessa nova perspectiva, não sabemos, uma vez encontrada uma solução “fraca”, se esta se adequa a situações concretas em outras áreas da ciência e tecnologia. Dessa forma, quando se lida com tais espaços, o trabalho do matemático se estende a averiguar a regularidade da solução, para uma eventual aplicação nas demais áreas do conhecimento.

Assim, este trabalho tem como objetivo, apresentar resultados finos de regularidade e aproximação por funções mais regulares (Classe  $C^1$ ), para funções que a priori são apenas integráveis no sentido de Lebesgue e gozam de uma propriedade preestabelecida. Para alcançarmos tal objetivo nos baseamos na obra *Measure Theory and Fine Properties of Functions* de Evans e Gariepy (?).

No entanto, para estabelecer tais resultados, se faz necessário consolidar uma série de resultados finos em vários tópicos da Análise Real afim de obtermos ferramentas mais sofisticadas. Logo, nos Resultados Preliminares elencamos os resultados da Teoria da Medida e Teoria Geométrica da Medida. Em particular, nesse capítulo demonstramos teoremas importantes de cobertura como o *Teorema da Cobertura de Vitali* e o *Teorema da Cobertura de Besicovitch*, além dos resultados cruciais para o estudo das Funções de Variação Limitada, *Teorema da Diferenciação para Medidas de Radon*, *Teorema da Decomposição de Lebesgue* e *Teorema da Representação de Riesz* entre outros como *Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch*.

No terceiro capítulo, fizemos um estudo sobre as Funções de Sobolev onde provamos o *Teorema de Aproximação Global*, *Teorema do Traço* e o *Teorema de Extensão*, para abertos limitados do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira Lipschitz, além de desigualdades que aferem a respeito da regularidade das funções de tal espaço.

No quarto capítulo, procedemos um estudo similar ao capítulo anterior, contudo, as funções em questão são as Funções de Variação Limitadas no  $\mathbb{R}^n$ . Tais funções são bem mais delicadas, no que diz respeito a manipulá-las, pois possui como “gradiente” uma Medida Vetorial de Radon. Ressaltamos aqui que essas funções são importantes no estudo dos conjuntos de Perímetro Finito. Infelizmente, não abordaremos, grandiosa teoria nesse trabalho.

Por fim, e não menos importantes, apresentamos neste quinto e último capítulo teoremas sobre Diferenciabilidade  $L^p$ , Diferenciabilidade Aproximada e Diferenciabilidade q.t.p. para funções Lipschitz, para Funções de Sobolev e para Funções de Variação Limi-

tada, tais resultados complementam os estudos realizados nos capítulos anteriores sobre essas funções. Também provamos resultados de regularidade para funções convexas. Mostraremos que tais funções são localmente Lipschitz e que para quase todo ponto do domínio de uma função convexa existem derivadas de segunda ordem. Este é o famoso Teorema de Aleksandrov. Além disso, estabelecemos resultados de aproximação por funções  $C^1$  para Funções Lipschitz, de Sobolev e Variação Limitada onde temos o controle sobre a exiguidade da medida de Lebesgue do conjunto onde a função escolhida e seu gradiente diferem, respectivamente, da função  $C^1$  e seu gradiente.

Gostaríamos de ressaltar também que quando notação  $\mu$ -q.t.p. aparecer, a mesma significa: a menos de um conjunto de medida  $\mu$  nula.

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES

### 2.1 Teoria da medida

Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $2^X$  o conjunto das partes de  $X$ .

**Definição 2.1.** *Um função  $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  é chamada uma medida em  $X$  se*

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii)  $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$  onde  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ .

**Definição 2.2.** *Seja  $X$  um conjunto não vazio, e  $A \subset X$ . Então,  $\mu$  restrita a  $A$ , escrevemos  $\mu|_A$ , é*

$$\mu|_A(B) = \mu(A \cap B)$$

para todo  $B \subset X$ .

**Definição 2.3.** *Um  $A \subset X$  é dito mensurável se para cada  $B \subset X$ ,*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A).$$

**Teorema 2.1** (Propriedade dos Conjuntos Mensuráveis). *Seja  $\mu$  uma medida em  $X$  e  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  uma sequência de conjuntos  $\mu$ -mensuráveis de  $X$ .*

- (i) *Os conjuntos  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  e  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  são mensuráveis.*
- (ii) *Se  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  são disjuntos, então*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

- (iii) *Se  $A_1 \subset \dots \subset A_k \subset A_{k+1} \dots$  então,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

- (iv) *Se  $A_1 \supset \dots \supset A_k \supset A_{k+1} \dots$  e  $\mu(A_1) < \infty$  então,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 2. ■

**Definição 2.4.** *Uma coleção de subconjuntos  $\mathcal{A} \subset 2^X$  é chamada  $\sigma$ -álgebra se*

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ ,
- (ii) *Se  $A \in \mathcal{A}$  então  $X - A \in \mathcal{A}$ ,*
- (iii) *Se para cada  $k$ ,  $A_k \in \mathcal{A}$  então  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ .*

Do teorema anterior é imediato que a classe dos conjuntos  $\mu$ -mensuráveis de



$X$  é uma  $\sigma$ -álgebra

**Definição 2.5.** Um subconjunto  $A \subset X$  é  $\sigma$ -finito com respeito a  $\mu$  se podemos escrever  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$  onde  $B_k$  é  $\mu$ -mensurável e  $\mu(B_k) < \infty$  para cada  $k$ .

**Definição 2.6.** A  $\sigma$ -álgebra de borel do  $\mathbb{R}^n$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém todos os abertos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.7.** Diremos que uma medida  $\mu$  em  $X$  é regular se para cada  $A \subset X$  existe  $B \subset X$  mensurável tal que  $A \subset B$  e  $\mu(A) = \mu(B)$ .

**Definição 2.8.** Uma medida  $\mu$  em  $\mathbb{R}^n$  é de Borel se todo boreliano é  $\mu$ -mensurável.

**Definição 2.9.** Diremos que uma medida  $\mu$  em  $\mathbb{R}^n$  é Borel regular se  $\mu$  é Borel e para cada  $A \subset X$  existe  $B \subset \mathbb{R}^n$  boreliano tal que  $A \subset B$  e  $\mu(A) = \mu(B)$ .

**Definição 2.10.** Uma medida  $\mu$  em  $\mathbb{R}^n$  é de Radon se  $\mu$  é Borel regular  $\mu(K) < \infty$  para todo  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto.

**Teorema 2.2.** Seja  $\mu$  uma medida regular em  $X$ . Se  $A_1 \subset \dots \subset A_k \subset A_{k+1} \dots$ , então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right).$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 5. ■

**Teorema 2.3.** Seja  $\mu$  uma medida Borel regular em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -mensurável e  $\mu(A) < \infty$ . Então,  $\mu|_A$  é uma medida de Radon.

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 5. ■

**Teorema 2.4.** Seja  $\mu$  uma medida de Radon em  $\mathbb{R}^n$ . Então,

(i) Para cada  $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U); A \subset U, U \text{ aberto}\}.$$

(ii) Para cada  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -mensurável,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K); K \subset A, K \text{ compacto}\}.$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 8. ■

**Teorema 2.5** (Critério de Carathéodory). Seja  $\mu$  uma medida em  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  para todos  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  com  $\text{dist}(A, B) > 0$ , então  $\mu$  é uma medida de Borel.

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 9. ■

### 2.1.1 Funções mensuráveis

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $\mu$  uma medida em  $X$ .

**Definição 2.11.** Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é  $\mu$ -mensurável se para cada aberto  $U \subset Y$ ,  $f^{-1}(U)$  é  $\mu$ -mensurável.

**Definição 2.12.** Uma função  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  é  $\sigma$ -finita com respeito a  $\mu$  se  $f$  é  $\mu$ -mensurável e  $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$  é  $\sigma$ -finito com respeito a  $\mu$ .

**Teorema 2.6.** Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são  $\mu$ -mensuráveis então,  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\min\{f, g\}$  e  $\max\{f, g\}$  também o são. Além disso se  $g \neq 0$  em  $X$ , então  $\frac{f}{g}$  também é  $\mu$ -mensurável.

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 11. ■

**Teorema 2.7.** Se  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  é uma sequência de funções  $\mu$ -mensuráveis, com  $f_k : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , então,  $\inf_{k \geq 1} f_k$ ,  $\sup_{k \geq 1} f_k$ ,  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$  e  $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$  são funções mensuráveis. Em particular,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$  é mensurável.

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 11. ■

**Teorema 2.8** (Teorema de Lusin). *Seja  $\mu$  uma medida Borel regular em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $\mu$ -mensurável. Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  com  $\mu(A) < \infty$ . Fixe  $\varepsilon > 0$ . Então existe um  $K \subset A$  compacto, tal que*

- (i)  $\mu(A - K) < \varepsilon$
- (ii)  $f|_K$  é contínua.

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 15. ■

**Corolário 2.1.** *Seja  $\mu$  uma medida Borel regular em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $\mu$ -mensurável. Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -mensurável e  $\mu(A) < \infty$ . Fixe  $\varepsilon > 0$ . Então, existe uma função contínua  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\mu(\{x \in A; \bar{f}(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$*

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 16. ■

**Teorema 2.9** (Teorema de Egoroff). *Seja  $\mu$  uma medida em  $\mathbb{R}^n$  e suponhamos que  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $k = 1, 2, \dots$  são  $\mu$ -mensuráveis. Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -mensurável com  $\mu(A) < \infty$  e  $f_k \rightarrow g$  em  $A$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Então para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $B \subset A$   $\mu$ -mensurável tal que*

- (i)  $\mu(A - B) < \varepsilon$
- (ii)  $f_k \rightarrow g$  uniformemente em  $B$ .

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 16. ■

### 2.1.2 Integrais e limites

Seja  $\mu$  uma medida em  $X$ , para  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , então defina

$$f^+ := \max\{f, 0\} \quad \text{e} \quad f^- := \max\{-f, 0\}.$$

Consequentemente,  $f = f^+ - f^-$  e  $|f| = f^+ + f^-$ .

**Definição 2.13.** Uma função  $g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  é uma função simples se a imagem de  $g$  é enumerável, isto é, se podemos escrever  $g$ , como uma soma enumerável

$$g(x) = \sum_{-\infty \leq y \leq +\infty} y \chi_{g^{-1}(y)}(x).$$

**Definição 2.14.** Se  $g$  é uma função não negativa, simples e  $\mu$ -mensurável então definimos

$$\int_X g \, d\mu := \sum_{0 \leq y \leq +\infty} y \mu(g^{-1}(y))$$

**Definição 2.15.** Se  $g$  é uma função simples e  $\int_X g^+ \, d\mu < \infty$  ou  $\int_X g^- \, d\mu < \infty$ , dizemos que  $g$  é uma função simples  $\mu$ -integrável e definimos

$$\int_X g \, d\mu := \int_X g^+ \, d\mu - \int_X g^- \, d\mu.$$

Logo, a integral de uma função simples  $g$  em  $X$  é dada por

$$\int_X g \, d\mu := \sum_{-\infty \leq y \leq +\infty} y \mu(g^{-1}(y)).$$

**Definição 2.16.** Seja  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Definimos integral superior de  $f$

$$\int_X^* f \, d\mu := \inf \left\{ \int_X g \, d\mu; g \text{ é uma função simples } \mu\text{-integrável com } g \geq f, \mu\text{-q.t.p.} \right\}$$

e integral inferior de  $f$  por

$$\int_{*X} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X g \, d\mu; g \text{ é uma função simples } \mu\text{-integrável com } g \leq f, \mu\text{-q.t.p.} \right\}.$$

**Definição 2.17.** Uma função  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $\mu$ -mensurável é dita integrável se  $\int_X^* f \, d\mu = \int_{*X} f \, d\mu$  e neste caso escrevemos

$$\int_X f \, d\mu = \int_X^* f \, d\mu = \int_{*X} f \, d\mu.$$

**Definição 2.18.** Uma função  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  é  $\mu$ -somável se  $f$  é  $\mu$ -integrável e

$$\int_X |f| \, d\mu < \infty.$$

**Definição 2.19.** Seja  $\mu$  uma medida em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  é localmente  $\mu$ -somável se  $f|_K$  é  $\mu$ -integrável para cada  $K \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.20.** Dizemos que  $\nu$  é uma medida com sinal em  $\mathbb{R}^n$  se existe uma medida

de Radon  $\mu$  em  $\mathbb{R}^n$  e uma função localmente  $\mu$ -somável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  tal que

$$\nu(K) = \int_K f \, d\mu$$

para todos  $K \subset \mathbb{R}^n$  compactos. Em particular, representaremos a igualdade acima por  $\nu(K) = \mu|_f(K)$ .

Nós denotaremos o espaço das funções  $\mu$ -somáveis em  $X$  por

$$L^1(X, \mu)$$

e o espaços das localmente  $\mu$ -somáveis em  $\mathbb{R}^n$ , por

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu).$$

**Teorema 2.10** (Lema de Fatou). *Seja  $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -mensurável,  $k = 1, 2, \dots$ . Então*

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 19. ■

**Teorema 2.11** (Teorema da Convergência Monótona). *Seja  $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -mensurável e  $f_k \leq f_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Então*

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 20. ■

**Teorema 2.12** (Teorema da Convergência Dominada). *Sejam  $g$   $\mu$ -somável e  $f, \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$   $\mu$ -mensuráveis. Se  $|f_k| \leq g$  e  $f_k \rightarrow f$   $\mu$ -q.t.p. quando  $k \rightarrow \infty$ . Então,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 20. ■

**Teorema 2.13** (Teorema da Convergência Dominada Generalizado). *Sejam  $g, \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\mu$ -somáveis e  $f, \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$   $\mu$ -mensuráveis. Se  $|f_k| \leq g_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $f_k \rightarrow f$   $\mu$ -q.t.p.,  $g_k \rightarrow g$ ,  $\mu$ -q.t.p. quando  $k \rightarrow \infty$  e*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 21. ■

**Teorema 2.14.** *Sejam  $f, \{f_k\}$  funções  $\mu$ -somáveis em  $X$  tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu = 0.$$

*Então existe uma subsequência  $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$  tal que*

$$f_{k_j} \longrightarrow f$$

*quando  $k \rightarrow \infty$ , a menos de um conjunto de medida  $\mu$  nula.*

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 21. ■

### 2.1.3 Espaços $L^p$

Seja  $\mu$  uma medida em  $X$  e  $1 \leq p < \infty$ , denotaremos por  $L^p(X, \mu)$  o espaço das funções  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $\mu$ -mensuráveis tais que  $|f|^p$  é  $\mu$ -somável. Consideramos nesses espaços que duas funções são iguais, se são iguais a menos de conjunto de medida  $\mu$  nula. Com isso, muniremos  $L^p(X, \mu)$  com a seguinte norma,

$$\|f\|_{L^p(X, \mu)} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p(X, \mu).$$

Ressaltamos que os espaços  $L^p(X, \mu)$  são espaços de Banach com essa norma.

Denotamos por  $L^\infty(X, \mu)$  o espaço das funções  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$   $\mu$ -mensuráveis que

$$\inf\{\alpha; \mu(\{x \in X; |f(x)| > \alpha\}) = 0\} < \infty.$$

Em particular, definimos o número acima como a norma de uma função de  $L^\infty(X, \mu)$ . Esse espaço também é Banach com essa norma.

Abaixo seguem três resultados clássicos extremamente importantes.

**Teorema 2.15** (Desigualdade de Young). *Sejam  $a, b > 0$  e  $1 < p, q < \infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

*Demonstração.* Ver Wheeden e Zygmund (?), pág. 127. ■

**Teorema 2.16** (Desigualdade de Hölder). *Sejam  $1 \leq p, q \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $f \in L^p(X, \mu)$  e  $g \in L^q(X, \mu)$  então*

$$\int_X fg d\mu \leq \|f\|_{L^p(X, \mu)} \|g\|_{L^q(X, \mu)}.$$

*Demonstração.* Ver Wheeden e Zygmund (?), pág. 128. ■

**Teorema 2.17.** *Seja  $f \in L^p(X, \mu)$  se  $1 \leq p, q \leq \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,*

$$\|f\|_{L^p(X, \mu)} = \sup \left\{ \int_X fg \, d\mu; g \in L^q(X, \mu), \|g\|_{L^q(X, \mu)} \leq 1. \right\}.$$

*Demonstração.* Ver Wheeden e Zygmund (?), pág. 128. ■

**Teorema 2.18** (Desigualdade de Minkowski). *Seja  $1 \leq p < \infty$  e  $f, g \in L^p(X, \mu)$ . Então,*

$$\|f + g\|_{L^p(X, \mu)} \leq \|f\|_{L^p(X, \mu)} + \|g\|_{L^p(X, \mu)}.$$

*Demonstração.* Ver Wheeden e Zygmund (?), pág. 129. ■

**Teorema 2.19.** *Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x) & \forall x, y \in E \text{ e } \forall \lambda > 0, \\ p(x + y) &\leq p(x) + p(y) & \forall x, y \in E. \end{aligned}$$

*Seja  $G \subset E$  um subespaço linear e seja  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear tal que*

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G.$$

*Nessas condições, existe um funcional linear  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in G$  e*

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

*Demonstração.* Ver Brezis (?), pág. 1. ■

**Teorema 2.20** (Teorema da Representação de Riesz para o dual de  $L^1$ ). *Seja  $\varphi \in (L^1(\mathbb{R}^n))'$ . Então existe uma única função  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que*

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fu \, dx,$$

*para toda  $f \in L^1$ .*

*Demonstração.* Ver Brezis (?), pág. 99. ■

## 2.1.4 Produto de medidas, Teorema de Fubini

Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos.

**Definição 2.21.** *Seja  $\mu$  uma medida em  $X$  e  $\nu$  uma medida em  $Y$ . Definimos a medida  $\mu \times \nu : 2^{X \times Y} \rightarrow [0, \infty]$  definindo para cada  $S \subset X \times Y$ ,*

$$(\mu \times \nu)(S) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i); A_i \subset X, B_i \subset Y, i = 1, 2, \dots, S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \right\}.$$

Chamamos a medida  $\mu \times \nu$  de produto de medida de  $\mu$  e  $\nu$ .

**Teorema 2.21** (Teorema de Fubini). *Seja  $\mu$  uma medida em  $X$  e  $\nu$  uma medida em  $Y$ .*

- (i) *Então,  $\mu \times \nu$  é uma medida regular em  $X \times Y$ , mesmo que  $\mu$  e  $\nu$  não sejam regulares.*
- (ii) *Se  $A \subset X$  é  $\mu$ -mensurável e  $B \subset Y$  é  $\nu$ -mensurável, então  $A \times B$  é  $\mu \times \nu$ -mensurável e  $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ .*
- (iii) *Se  $S \subset X \times Y$  é  $\sigma$ -finito com respeito a  $\mu \times \nu$ , então,  $S_y := \{x; (x, y) \in S\}$  é  $\mu$ -mensurável para  $\nu$ -q.t.p. com respeito a  $y$ ,  $S_x := \{y; (x, y) \in S\}$  é  $\nu$ -mensurável para  $\mu$ -q.t.p. com respeito a  $x$ , e  $\mu(S_y)$  é  $\nu$ -integrável,  $\nu(S_x)$  é  $\mu$ -integrável. Mais ainda,*

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_y) d\nu(y) = \int_X \nu(S_x) d\mu(x).$$

- (iv) *Se  $f$  é  $\sigma$ -finita com respeito a  $\mu \times \nu$  (em particular  $f$  é  $\mu \times \nu$ -somável), então a função*

$$y \longmapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

*é  $\nu$ -integrável e a função*

$$x \longmapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

*é  $\mu$ -integrável e*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[ \int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y) = \int_X \left[ \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x).$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 23. ■

### 2.1.5 Medida de Lebesgue

**Definição 2.22.** *A medida 1-dimensional de Lebesgue,  $\mathcal{L}^1$  em  $\mathbb{R}$  é definida por*

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(C_i); A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, C_i \subset \mathbb{R} \right\}$$

*para todo  $A \subset \mathbb{R}$ .*

**Definição 2.23.** *Definiremos indutivamente a medida  $n$ -dimensional de Lebesgue,  $\mathcal{L}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ , por*

$$\mathcal{L}^n := \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1 = \underbrace{\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1 \times \dots \times \mathcal{L}^1}_{n \text{ vezes}}$$

*De modo equivalente,  $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n-k} \times \mathcal{L}^k$  para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .*

Sempre que estivermos integrando com a medida de Lebesgue usaremos  $dx$  ao invés de  $d\mathcal{L}^n$ . Além disso, denotaremos por  $L^1(\mathbb{R}^n)$  o espaço  $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ .

## 2.2 Teoremas de cobertura

### 2.2.1 Teorema da cobertura de Vitali

Se  $B$  é uma bola fechada do  $\mathbb{R}^n$ , então nós escrevemos  $\hat{B}$  para denotar a bola concêntrica a  $B$  e com raio cinco vezes maior do que o de  $B$ .

**Definição 2.24.** *Uma coleção  $\mathcal{F}$  de bolas fechadas em  $\mathbb{R}^n$  é uma cobertura de  $A \subset \mathbb{R}^n$  se*

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

*Dizemos que  $\mathcal{F}$  é uma cobertura fina de  $A$ , se para cada  $x \in A$*

$$\inf\{\text{diam}(B); x \in B, B \in \mathcal{F}\} = 0.$$

*Ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$  e  $x \in A$ , existe  $B \in \mathcal{F}$  tal que  $x \in B$  e  $\text{diam}(B) < \varepsilon$ .*

**Teorema 2.22** (Teorema da Cobertura de Vitali). *Seja  $\mathcal{F}$  uma coleção de bolas fechadas não degeneradas em  $\mathbb{R}^n$  com*

$$\sup\{\text{diam}(B); B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

*Então, existe uma família enumerável  $\mathcal{G}$  de bolas disjuntas em  $\mathcal{F}$  tal que*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}.$$

*Demonstração.* Denotemos por

$$D = \sup\{\text{diam}(B); B \in \mathcal{F}\}.$$

Seja,

$$\mathcal{F}_j = \left\{ B \in \mathcal{F}; \frac{D}{2^j} < \text{diam} B \leq \frac{D}{2^{j-1}} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Primeiro, escolheremos coleções  $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$  de bolas fechadas e disjuntas. Em particular, tomemos  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}_1$  com a coleção maximal de bolas fechadas e disjuntas. A existência dessa coleção  $\mathcal{G}_1$  maximal é garantida pelo *Lema de Zorn*.

Vejamos, defina  $\mathfrak{F}$  para ser a coleção de todas as famílias de bolas disjuntas de  $\mathcal{F}_1$ . Muniremos  $\mathfrak{F}$  com a seguinte relação de ordem: dados  $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in \mathfrak{F}$  dizemos que

$$\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2$$

Note que tal relação torna  $\mathfrak{F}$  um conjunto parcialmente ordenado. Seja  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$



um subconjunto totalmente ordenado e definamos

$$\mathfrak{g}^* = \bigcup_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}} \mathfrak{g}$$

Claramente,  $\mathfrak{g}^*$  é um limite superior para  $\mathfrak{G}$ , com respeito a relação de ordem estabelecida. Logo, estamos nas hipóteses do *Lema de Zorn*, ou seja, isso garante a existência de um elemento maximal em  $\mathfrak{F}$ . Em particular, isso garante a existência de  $\mathcal{G}_1$ .

Com isso, seja  $\mathcal{G}_2$  o subconjunto maximal de

$$\{B \in \mathcal{F}_2; B \cap B' = \emptyset, \forall B' \in \mathcal{G}_1\}$$

e seja  $\mathcal{G}_3$  o subconjunto maximal de

$$\{B \in \mathcal{F}_2; B \cap B' = \emptyset, \forall B' \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2\}.$$

Indutivamente, seja  $\mathcal{G}_k$  o subconjunto maximal de

$$\left\{ B \in \mathcal{F}_k; B \cap B' = \emptyset, \forall B' \in \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{G}_i \right\}.$$

Observe que para cada  $k$ ,  $\mathcal{G}_k$  é uma coleção enumerável, pois as bolas de  $\mathcal{G}_k$  são disjuntas e não degeneradas, logo, podemos tomar em cada uma delas um racional numa vizinhança de seu centro. Disso, segue a enumerabilidade. Assim, defina

$$\mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k.$$

**Afirmção:** Para cada  $B \in \mathcal{F}$ , existe uma bola  $B' \in \mathcal{G}$  de modo que  $B \cap B' \neq \emptyset$  e  $B \subset \hat{B}'$ .

**Prova da Afirmção:** Fixe  $B \in \mathcal{F}$ . Logo, existe  $j$  tal que  $B \in \mathcal{F}_j$ . Se  $B \in \mathcal{G}_j$ , nossa afirmação está verificada. Por outro lado, se  $B \notin \mathcal{G}_j$  então  $B$  não pode pertencer a

$$\left\{ B \in \mathcal{F}_j; B \cap B' = \emptyset, \forall B' \in \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{G}_k \right\} \quad (1)$$

pois, do contrário, isto é, se para todo  $B' \in \mathcal{G}_j$ ,  $B' \cap B = \emptyset$ , podemos definir

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G}_j \cup \{B\}.$$

Disso, temos claramente que  $\mathcal{G}^* \supset \mathcal{G}_j$ . Mas isso fere a maximalidade de  $\mathcal{G}_j$ . Logo, neste caso, existe  $B' \in \mathcal{G}_j$  tal que  $B' \cap B \neq \emptyset$ . Note que ainda é possível que  $B$  pertença ao complementar de (1). Contudo, neste caso é imediato a existência de  $B'$  tal que  $B \cap B' \neq \emptyset$ , onde  $B' \in \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{G}_k$ .

Logo, podemos concluir que existe  $B' \in \bigcup_{k=1}^j \mathcal{G}_k$  tal que

$$B' \cap B \neq \emptyset.$$

Assim, existe  $j_0$  tal que  $B' \in \mathcal{G}_{j_0}$  e  $j_0 \leq j$ . Dessa forma,

$$\text{diam}(B') \geq \frac{D}{2^{j_0}} \geq \frac{D}{2^j}.$$

Então,

$$2\text{diam}(B') \geq \frac{D}{2^{j-1}} > \text{diam}(B), \quad (2)$$

uma vez que  $B \in \mathcal{F}_j$ .

Por (2) temos que

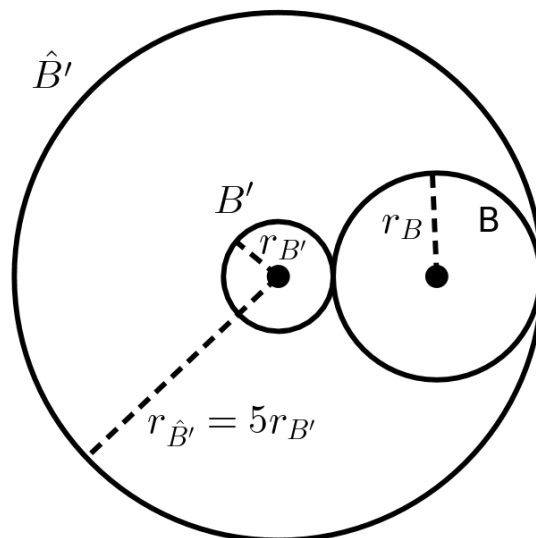
$$4r_{B'} \geq 2r_B \quad (3)$$

onde  $r_{B'}$  e  $r_B$  são, respectivamente, o raio de  $B'$  e o raio de  $B$ . Agora seja  $\mathbf{a}$  o centro de  $B'$  e  $\mathbf{b}$  o centro de  $B$ . Mostraremos que  $\hat{B}' \supset B$ . Em particular, basta mostrar que dados  $x \in B$ ,  $|x - \mathbf{a}| \leq 5r_{B'}$ . Com efeito, seja  $x \in B$  e usando (3),

$$|x - \mathbf{a}| \leq |x - \mathbf{b}| + |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \leq r_B + r_B + r_{B'} = 2r_B + r_{B'} \leq 4r_{B'} + r_{B'} = 5r_{B'}$$

o que prova o desejado. ■

Figura 1 – Ilustração das bolas em questão com  $r_{B'} = \frac{1}{2}r_B$ .



Fonte: Acervo próprio

**Corolário 2.2.** *Assuma que  $\mathcal{F}$  é uma cobertura fina de  $A$  por bolas fechadas e*

$$\sup\{\text{diam}(B); B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

*Então, existe uma família enumerável  $\mathcal{G}$  de bolas disjuntas em  $\mathcal{F}$  tal que para qualquer subconjunto finito  $\{B_1, B_2, \dots, B_m\} \subset \mathcal{F}$ , temos*

$$A - \bigcup_{k=1}^m B_k \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} - \{B_1, B_2, \dots, B_m\}} \hat{B}.$$

*Demonstração.* Construa  $\mathcal{G}$  como na demonstração do *Teorema da Cobertura de Vitalli*. Agora tomemos  $\{B_1, B_2, \dots, B_m\} \subset \mathcal{F}$ . Note que se  $A \subset \bigcup_{k=1}^m B_k$  o resultado segue, pois,  $A - \bigcup_{k=1}^m B_k = \emptyset$  e o vazio está contido em todos os conjuntos. Por outro lado, se  $A - \bigcup_{k=1}^m B_k \neq \emptyset$ , tome  $x \in A - \bigcup_{k=1}^m B_k$ . Uma vez que

$$\inf\{\text{diam}(B); x \in B, B \in \mathcal{F}\} = 0,$$

segue que dado  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min\{\text{diam}(B_1), \text{diam}(B_2), \dots, \text{diam}(B_m)\}$  existe  $B_x \in \mathcal{F}$  tal que  $x \in B_x$  e  $\text{diam}(B_x) < \varepsilon$ . Claramente,  $B_x \cap B_k = \emptyset$  para todo  $k = 1, 2, \dots, m$ . Com isso, conseguimos uma cobertura para  $A - \bigcup_{k=1}^m B_k$  por bolas de  $\mathcal{F}^* := \mathcal{F} - \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ . De maneira similar a afirmação feita na demonstração do *Teorema da Cobertura de Vitali* temos que para cada  $B \in \mathcal{F}^*$  existe  $B' \in \mathcal{G}$  tal que  $B \cap B' = \emptyset$  e  $\hat{B}' \supset B$ .

Com isso,

$$A - \bigcup_{k=1}^m B_k \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} - \{B_1, B_2, \dots, B_m\}} \hat{B}.$$

■

**Corolário 2.3.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $\delta > 0$ . Então existe uma família enumerável  $\mathcal{G}$  de bolas disjuntas em  $U$  tal que  $\text{diam}(B) \leq \delta$ , para toda  $B \in \mathcal{G}$  e*

$$\mathcal{L}^n \left( U - \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) = 0$$

*Demonstração.* A principio tomemos  $\theta$  tal que

$$1 - \frac{1}{5^n} < \theta < 1$$

e assumamos que  $\mathcal{L}^n(U) < \infty$ .

Mostraremos que existe uma coleção finita  $\{B_i\}_{i=1}^{M_1}$  de bolas disjuntas e fechadas

em  $\mathbf{U}$  tal que  $\text{diam}(\mathbf{B}_i) < \delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, M_1$ , e

$$\mathcal{L}^n \left( \mathbf{U} - \bigcup_{i=1}^{M_1} \mathbf{B}_i \right) \leq \theta \mathcal{L}^n(\mathbf{U}).$$

Com efeito, seja  $\mathcal{F}_1 := \{\mathbf{B}; \mathbf{B} \subset \mathbf{U}, \text{diam}(\mathbf{B}) < \delta\}$  Pelo *Teorema da Cobertura de Vitali*, existe uma família de bolas fechadas e disjuntas  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}_1$  tal que

$$\mathbf{U} \subset \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \hat{\mathbf{B}}.$$

Assim,

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{U}) \leq \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \hat{\mathbf{B}} \right) = \sum_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathcal{L}^n(\hat{\mathbf{B}}) = 5^n \sum_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathcal{L}^n(\mathbf{B}) = 5^n \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) &\geq \frac{1}{5^n} \mathcal{L}^n(\mathbf{U}) \\ \Rightarrow -\mathcal{L}^n \left( \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) &\leq -\frac{1}{5^n} \mathcal{L}^n(\mathbf{U}). \end{aligned} \quad (4)$$

Somando  $\mathcal{L}^n(\mathbf{U})$  em ambos os lados de (4) vem que

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{U}) - \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) \leq \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \mathcal{L}^n(\mathbf{U}).$$

Uma vez que  $\mathbf{U} = (\mathbf{U} - \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B}) \cup \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B}$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n \left[ \left( \mathbf{U} - \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) \cup \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right] - \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) &\leq \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \mathcal{L}^n(\mathbf{U}) \\ \Rightarrow \mathcal{L}^n \left( \mathbf{U} - \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) + \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) - \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) &\leq \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \mathcal{L}^n(\mathbf{U}) \\ \Rightarrow \mathcal{L}^n \left( \mathbf{U} - \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) &\leq \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \mathcal{L}^n(\mathbf{U}) \\ \Rightarrow \mathcal{L}^n \left( \mathbf{U} - \bigcup_{\mathbf{B} \in \mathcal{G}_1} \mathbf{B} \right) &\leq \theta \mathcal{L}^n(\mathbf{U}). \end{aligned} \quad (5)$$

Seja  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  uma enumeração de  $\mathcal{G}_1$  então,  $A_k := \bigcup_{i=1}^k B_i$  "cresce" para  $\bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B$ , isto é,  $A_k \nearrow \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B$ . Por outro lado,

$$(U - A_k) \searrow \left( U - \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B \right).$$

Observe que para cada  $k$ ,  $U - A_k$  é um boreliano limitado, logo  $\mathcal{L}^n(U - A_k) < \infty$ . Portanto,

$$\mathcal{L}^n \left( U - \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(U - A_k).$$

Daí, existe um  $M_1 \gg 1$  tal que da estimativa em (5) temos que

$$\mathcal{L}^n(U - A_{M_1}) \leq \theta \mathcal{L}^n(U).$$

Ou seja,

$$\mathcal{L}^n \left( U - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i \right) \leq \theta \mathcal{L}^n(U).$$

Como queríamos mostrar.

Contudo, agora seja

$$U_2 := U - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i$$

e

$$\mathcal{F}_2 := \{B; B \subset U_2, \text{diam}(B) < \delta\}.$$

Do mesmo modo, pelo *Teorema da Cobertura de Vitali*, existe uma família de bolas fechadas e disjuntas  $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}_2$  tal que

$$U_2 \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}_2} \hat{B}.$$

De maneira similar ao passos anteriores vemos que,

$$\mathcal{L}^n \left( U_2 - \bigcup_{B \in \mathcal{G}_2} B \right) \leq \theta \mathcal{L}^n(U_2).$$

em particular, existe uma coleção  $\{B_{M_1+1}, B_{M_1+2}, \dots, B_{M_2}\}$ , tal que

$$\mathcal{L}^n \left( U_2 - \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i \right) \leq \theta \mathcal{L}^n(U_2)$$

Doravante, considere  $\bigcup_{i=1}^{M_2} B_i$  onde, se  $B_i$  é tal que  $i \in \{1, 2, \dots, M_1\}$  então  $B_i \subset U - U_2$ ,

se  $i \in \{M_1 + 1, M_1 + 2, \dots, M_2\}$  então  $B_i \subset U_2$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^n \left( U - \bigcup_{i=1}^{M_2} B_i \right) &= \mathcal{L}^n \left[ \left( U_2 \cup \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i \right) - \bigcup_{i=1}^{M_2} B_i \right] \\
 &= \mathcal{L}^n \left( U_2 - \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i \right) \\
 &\leq \theta \mathcal{L}^n(U_2) \\
 &= \theta \mathcal{L}^n \left( U - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i \right) \\
 &\leq \theta^2 \mathcal{L}^n(U).
 \end{aligned}$$

Note que repetindo esse processo obtemos para cada  $k$ , uma coleção de bolas disjuntas tais que

$$\mathcal{L}^n \left( U - \bigcup_{i=1}^{M_k} B_i \right) \leq \theta^k \mathcal{L}^n(U).$$

Em particular quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\theta^k \rightarrow 0$  uma vez que  $0 < \theta < 1$ . Portanto, isso prova o desejado para o caso em que  $\mathcal{L}^n(U) < \infty$ . Se  $\mathcal{L}^n(U) = \infty$  então, defina para cada  $m$  inteiro negativo

$$U_m := \{x \in U; m < |x| < m + 1\}$$

Claramente,  $U = \bigcup_{m=0}^{\infty} U_m$ , e  $\mathcal{L}^n(U_m) < \infty$ . Então basta repetir o mesmo procedimento para cada  $U_m$  e o desejado segue. ■

### 2.2.2 Teorema da cobertura de Besicovitch

**Teorema 2.23** (Teorema da Cobertura de Besicovitch). *Existe uma constante  $N_n$ , que só depende de  $n$ , com a seguinte propriedade: se  $\mathcal{F}$  é uma coleção qualquer de bolas fechadas não degeneradas no  $\mathbb{R}^n$  com*

$$\sup\{\text{diam}(B); B \in \mathcal{F}\} < \infty$$

*e  $A$  é o conjunto dos centros das bolas em  $\mathcal{F}$  então existem,  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{N_n} \subset \mathcal{F}$  tal que cada  $\mathcal{G}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_n$  é uma coleção de bolas disjuntas de  $\mathcal{F}$  e*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B$$

*Demonstração.* Suponha que  $A$  é limitado. Seja  $D := \sup\{\text{diam}(B); B \subset \mathcal{F}\}$  e defina

$$B_1 = B(\mathbf{a}_1, r_1)$$

onde  $\mathbf{a}_1 \in A$  e  $r_1 \geq \frac{3}{8}D$ . Tome agora,

$$A_2 = A - B_1$$

e  $B_2 = B(\mathbf{a}_2, r_2)$  tal que  $\mathbf{a}_2 \in A$  e  $r_2 \geq \frac{3}{4} \sup\{r; B(\mathbf{a}, r) \in \mathcal{F}, \mathbf{a} \in A_2\}$ . Então, tome

$$A_3 = A - B_1 \cup B_2$$

e do mesmo modo tomemos  $B_3 = B(\mathbf{a}_3, r_3)$  com  $\mathbf{a}_3 \in A_3$  e  $r_3 \geq \frac{3}{4} \sup\{r; B(\mathbf{a}, r) \in \mathcal{F}, \mathbf{a} \in A_3\}$ . Mais geral, para  $j \geq 2$  definamos:

$$A_j = A - \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i$$

e  $B_j = B(\mathbf{a}_j, r_j)$  com  $\mathbf{a}_j \in A_j$  e  $r_j \geq \frac{3}{4} \sup\{r; B(\mathbf{a}, r) \in \mathcal{F}, \mathbf{a} \in A_j\}$ .

Por outro lado, se para algum  $j$ ,  $A_j = \emptyset$  defina  $J := j - 1$ , mas se para todo  $j$ ,  $A_j \neq \emptyset$  então defina  $J := \infty$ .

Observe que dadas  $B_i, B_j$ , com  $j > i$  então  $r_j \leq \frac{4}{3}r_i$ . De fato, como  $j > i$  temos que  $A_j \subset A_i$ . Em particular, o centro  $\mathbf{a}_j$  de  $B_j$  pertence a  $A_i$ . Logo,

$$r_j \leq \sup\{r; B(\mathbf{a}, r) \in \mathcal{F}, \mathbf{a} \in A_i\}.$$

Daí,

$$r_i \geq \frac{3}{4} \sup\{r; B(\mathbf{a}, r) \in \mathcal{F}, \mathbf{a} \in A_i\} \geq \frac{3}{4}r_j.$$

Portanto,

$$r_j \leq \frac{4}{3}r_i. \quad (6)$$

Adiante, mostraremos que as bolas  $\{B(\mathbf{a}_i, \frac{r_i}{3})\}_{i=1}^J$  são disjuntas. Com efeito, sejam  $B_i, B_j$ , com  $j > i$ , logo,  $A_j \subset A_i$ . Então,  $\mathbf{a}_j$  que é centro de  $B_j$  não pertence a  $B_i$ , ou seja,

$$|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| > r_i = \frac{r_i}{3} + \frac{2r_i}{3} \geq \frac{r_i}{3} + \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right) r_j = \frac{r_i}{3} + \frac{1}{2}r_j > \frac{r_i}{3} + \frac{r_j}{3}. \quad (7)$$

Ou seja,  $\{B(\mathbf{a}_i, \frac{r_i}{3})\}_{i=1}^J$  são disjuntas o que mostra o desejado.

Note que se  $J = \infty$  então  $r_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Suponha que não, ou

seja, existe um  $\eta > 0$  tal que pra todo  $j$ ,  $r_j \geq \eta$ . Por outro lado, como  $A$  é limitado, então existe uma subsequência  $(a_{i_k})_k$  de  $(a_i)_i$  e um número  $\hat{a} \in \mathbb{R}$  tal  $a_{i_k} \rightarrow \hat{a}$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo,  $(a_{i_k})_k$  é de Cauchy. Em particular, para  $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}\eta$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $j, s \geq k_0$  temos daí e de (7) que

$$\varepsilon > |a_{i_j} - a_{i_s}| > \frac{r_{i_j}}{3} + \frac{r_{i_s}}{3} > \frac{2}{3}\eta.$$

Absurdo. Portanto,  $r_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ .

Mostraremos agora que  $A \subset \bigcup_{j=1}^J B_j$ . Com efeito, por construção, se  $J < \infty$  então,  $A_{J+1} = \emptyset$ . Ou seja,

$$A - \bigcup_{j=1}^J B_j = \emptyset.$$

Disso,  $A \subset \bigcup_{j=1}^J B_j$ . Seja agora,  $J = \infty$  e tomemos  $a \in A$  daí existe  $r_a$  tal que  $B(a, r_a) \in \mathcal{F}$ . Logo, ou  $a \in A_j$ , ou  $a \in B_i$  com  $1 \leq i \leq j-1$ . Mas se este último acontece para todo  $a \in A$ , temos o desejado. Portanto, tenhamos em vista,  $a \in A_j$ . Com isso,

$$r_j \geq \frac{3}{4} \sup\{r; B(a, r) \in \mathcal{F}, a \in A_j\} \geq \frac{3}{4}r_a$$

como  $J = \infty$  segue que  $r_j \rightarrow 0$ . Logo, existe  $j_0$  tal que

$$\frac{3}{4}r_a > r_{j_0} \geq \frac{3}{4} \sup\{r; B(a, r) \in \mathcal{F}, a \in A_{j_0}\}.$$

Dessa forma,

$$a \in \bigcup_{j=1}^{j_0-1} B_j. \quad (8)$$

Logo, para cada  $a \in A$  existe um  $j_0$  tal que vale (8). Portanto,  $A \subset \bigcup_{j=1}^J B_j$ .

Claramente, exibimos uma nova cobertura para  $A$  partir de  $\mathcal{F}$ . Iremos organizar essas bolas de modo a obter o desejado. Para isso, fixemos  $B_k \in \{B_j\}_{j=1}^J$  com  $k > 1$  e defina

$$I = \{j; 1 \leq j < k, B_j \cap B_k \neq \emptyset\}.$$

Estimaremos a cardinalidade de  $I$ , em particular, mostraremos que a mesma é controlada por uma constante que só depende de  $n$ . Após, utilizaremos tal constante para construir as coleções  $\mathcal{G}_i$ . Doravante, seja

$$K = I \cap \{j; r_j < 4r_k\}.$$

Seja  $B_j$  tal que  $j \in K$ , então tome  $x \in B(a_j, \frac{r_j}{3})$ . Então,



$$|x - a_k| \leq |x - a_j| + |a_j - a_k| \leq \frac{r_j}{3} + r_j + r_k = \frac{4}{3}r_j + r_k < \frac{4.3.r_k}{3} + r_k = 5r_k$$

Logo,  $B(a_j, \frac{r_j}{3}) \subset B(a_k, 5r_k)$  para cada  $j \in K$ . Disso temos que

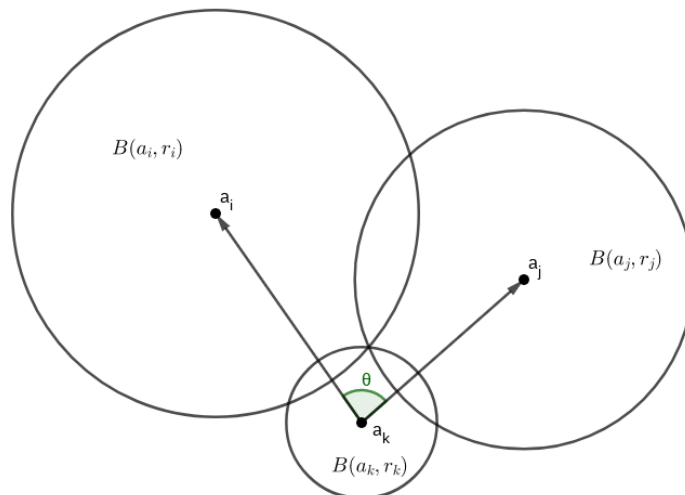
$$\begin{aligned} \alpha(n)5^n(r_k)^n &= \mathcal{L}^n(B(a_k, 5r_k)) \\ &\geq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j \in K} B(a_j, \frac{r_j}{3})\right) \\ &= \sum_{j \in K} \mathcal{L}^n\left(B(a_j, \frac{r_j}{3})\right) \\ &= \sum_{j \in K} \alpha(n) \left(\frac{r_j}{3}\right)^n \\ &\geq \sum_{j \in K} \alpha(n) \left(\frac{r_k}{4}\right)^n, \quad (\text{por (6)}) \\ &= \text{Card}(K)\alpha(n)(r_k)^n \frac{1}{4^n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{Card}(K) \leq 20^n.$$

Agora iremos estimar a  $\text{Card}(I - K)$ . A afirmação abaixo irá nos auxiliar.

Figura 2 – Ilustração para auxiliar na compreensão do argumento para estimar  $I - K$ .



Fonte: Acervo próprio

**Afirmação:** Sejam  $B_i, B_j$  bolas tais que  $i, j \in I - K$ , com  $i \neq j$  e  $a_i, a_j$  seus respectivos centros. Tome  $\theta$  como o ângulo entre os vetores  $a_i$  e  $a_j$ . Então,  $\theta \geq \arccos\left(\frac{61}{64}\right)$ .

**Prova da Afirmação:** A menos de uma isometria podemos considerar  $B_k$  centrada na origem. Note que se  $i, j \in I - K$  então  $i, j < k$  e por construção,  $a_k \notin B_i \cup B_j$ . Daí,

$$|a_i - a_k| = |a_i| > r_i$$

e

$$|a_j - a_k| = |a_j| > r_j.$$

Temos ainda que  $B_i \cap B_k \neq \emptyset$  e  $B_j \cap B_k \neq \emptyset$ . Logo,

$$|a_i - a_k| = |a_i| \leq r_i + r_k$$

e

$$|a_j - a_k| = |a_j| \leq r_j + r_k.$$

Além disso,  $r_i > 3r_k$  e  $r_j > 3r_k$ . Consideremos  $|a_i| \leq |a_j|$ . Em suma,

$$\begin{cases} 3r_k < r_i < |a_i| \leq r_i + r_k, \\ 3r_k < r_j < |a_j| \leq r_j + r_k, \\ |a_i| \leq |a_j|. \end{cases} \quad (9)$$

Faremos algumas estimativas. Observe que se  $\cos(\theta) > \frac{5}{6}$  então  $a_i \in B_j$ . De fato, se  $a_i \notin B_j$ , temos duas situações a serem estudadas. A primeira é que  $|a_i - a_j| \geq |a_j|$ . Neste caso, temos pela Lei dos cossenos que

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{|a_i|^2 + |a_j|^2 - |a_i - a_j|^2}{2|a_i||a_j|} \\ &= \frac{|a_i|^2}{2|a_i||a_j|} + \frac{|a_j|^2 - |a_i - a_j|^2}{2|a_i||a_j|} \\ &\leq \frac{|a_i|}{2|a_j|} \leq \frac{1}{2} < \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

O segundo caso é  $r_j < |a_i - a_j| \leq |a_j|$ . Então,

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{|\mathbf{a}_i|^2 + |\mathbf{a}_j|^2 - |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|^2}{2|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|} \\
&= \frac{|\mathbf{a}_i|^2}{2|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|} + \frac{|\mathbf{a}_j|^2 - |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|^2}{2|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{(|\mathbf{a}_j| - |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|)(|\mathbf{a}_j| + |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|)}{2|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{(|\mathbf{a}_j| - |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|2|\mathbf{a}_j|)}{2|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{|\mathbf{a}_j| - |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|}{|\mathbf{a}_i|} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{r_j + r_k - r_j}{r_i}, \quad (\text{Por (9)}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{r_k}{r_i} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{\frac{r_i}{3}}{r_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Logo, se  $\cos(\theta) > \frac{5}{6}$  então  $\mathbf{a}_i \in B_j$ . Para obtermos o desejado é necessário mostrar que se  $\mathbf{a}_i \in B_j$ , então

$$0 \leq |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| + |\mathbf{a}_i| - |\mathbf{a}_j| \leq |\mathbf{a}_j| \left( \frac{8}{3}(1 - \cos(\theta)) \right). \quad (10)$$

Com efeito, desde que  $\mathbf{a}_i \in B_j$ , temos por construção que  $i < j$ , e  $\mathbf{a}_j \notin B_i$ , daí,  $|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k| > r_i$ . Assim, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| + |\mathbf{a}_i| - |\mathbf{a}_j|}{\alpha_j} &= \frac{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| + |\mathbf{a}_i| - |\mathbf{a}_j|}{\alpha_j} \cdot \frac{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| - |\mathbf{a}_i| + |\mathbf{a}_j|}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| - (|\mathbf{a}_i| - |\mathbf{a}_j|)} \\
&\leq \frac{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| + |\mathbf{a}_i| - |\mathbf{a}_j|}{\alpha_j} \cdot \frac{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| - |\mathbf{a}_i| + |\mathbf{a}_j|}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|} \quad (\text{Por (9)})
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| + |\mathbf{a}_i| - |\mathbf{a}_j|}{|\mathbf{a}_j|} &= \frac{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|^2 - (|\mathbf{a}_i| - |\mathbf{a}_j|)^2}{|\mathbf{a}_j||\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|} \\
&= \frac{|\mathbf{a}_i|^2 + |\mathbf{a}_j|^2 - 2|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|\cos(\theta) - |\mathbf{a}_i|^2 - |\mathbf{a}_j|^2 + 2|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|}{|\mathbf{a}_j||\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|} \\
&= \frac{2|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|(1 - \cos(\theta))}{|\mathbf{a}_j||\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|} \\
&= \frac{2|\mathbf{a}_i|(1 - \cos(\theta))}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|} \\
&\leq \frac{2(r_i + r_k)(1 - \cos(\theta))}{r_i}, \quad (\text{Por (9)}) \\
&\leq \frac{2\left(r_i + \frac{r_i}{3}\right)(1 - \cos(\theta))}{r_i} \\
&= 2\left(1 + \frac{1}{3}\right)(1 - \cos(\theta)) \\
&= \frac{8}{3}(1 - \cos(\theta)).
\end{aligned}$$

Vemos com uma simples aplicação da desigualdade triangular, que  $0 \leq |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| + |\mathbf{a}_i| - |\mathbf{a}_j|$ . Logo, (10) segue. Tal estimativa estabelece um controle entre os centros de  $B_i$  e  $B_j$  em função de  $\theta$ .

Por fim, do fato, de  $\mathbf{a}_i \in B_j$  e  $\mathbf{a}_j \notin B_j$ , temos que

$$r_i < |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \leq r_j.$$

Sabemos que se  $i < j$  então,  $r_j \leq \frac{4}{3}r_i$ . Logo,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| + |\mathbf{a}_i| - |\mathbf{a}_j| &\geq r_i + r_i - (r_j + r_k) = 2r_i - r_j - r_k \geq 2 \cdot \frac{3}{4}r_j - r_j - r_k \\
&= \frac{1}{2}r_j - r_k, \quad (\text{Por (9)}) \\
&\geq \frac{1}{2}r_j - \frac{1}{3}r_j = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{4}r_j = \frac{1}{6} \left( \frac{3}{4 + \frac{1}{4}} \right) r_j = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \right) r_j \\
&= \frac{1}{8} \left( r_j + \frac{r_j}{3} \right) \\
&\geq \frac{1}{8}(r_j + r_k) \geq \frac{1}{8}|\mathbf{a}_j| \quad (\text{Por (9)}).
\end{aligned}$$

Daí e por (10), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}|\mathbf{a}_j| &\leq |\mathbf{a}_j| \left( \frac{8}{3}(1 - \cos(\theta)) \right) \\
\Rightarrow \frac{1}{8} &\leq \left( \frac{8}{3}(1 - \cos(\theta)) \right) \\
\Rightarrow \frac{3}{64} &\leq 1 - \cos(\theta) \\
\Rightarrow \cos(\theta) &\leq 1 - \frac{3}{64} \\
\Rightarrow \cos(\theta) &\leq \frac{61}{64}.
\end{aligned}$$

Isso prova a afirmação. Agora podemos estabelecer um critério para estimar a cardinalidade de  $I - K$ . Pois, se  $B_i$  e  $B_j$  são tais que  $i, j \in I - K$  então, o ângulo entre os centros de  $B_i$  e  $B_j$  é maior ou igual a  $\arccos\left(\frac{61}{64}\right)$ .

**Afirmação:** Existe uma constante positiva  $L = L(n)$  tal que  $\text{Card}(I - K) \leq L$ .

**Prova da Afirmação:** Com efeito, defina  $\theta_0 = \arccos\left(\frac{61}{64}\right)$ , e considere, a menos de uma isometria,  $B_k$  centrada na origem do  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\varphi : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \partial B(0, r_k)$  dada por  $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}r_k$ . Em particular, defina

$$\mathcal{A}_{I-K} = \{\varphi(\mathbf{a}_j); B_j = B(\mathbf{a}_j, r_j), j \in I - K\}$$

Claramente, os elementos de  $\mathcal{A}_{I-K}$  são as projeções sobre  $\partial B(0, r_k)$  dos centros das bolas cujo índice pertence a  $I - K$ . Dados  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{A}_{I-K}$ , temos que os mesmos são da forma  $\frac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|}r_k, \frac{\mathbf{a}_j}{|\mathbf{a}_j|}r_k$  com  $i \neq j$ , respectivamente. Logo,

$$\cos(\angle(\mathbf{y}, \mathbf{z})) = \frac{\frac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|}r_k \cdot \frac{\mathbf{a}_j}{|\mathbf{a}_j|}r_k}{(r_k)^2} = \frac{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j}{|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|} = \cos(\angle(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)).$$

Dessa estimativa e da afirmação anterior segue que  $\angle(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq \theta_0$ . Assim, tendo em vista a Lei dos cossenos,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 &= |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 - 2|\mathbf{y}||\mathbf{z}|\cos(\angle(\mathbf{y}, \mathbf{z})) \\
&= 2(r_k)^2(1 - \cos(\angle(\mathbf{y}, \mathbf{z}))) \\
&\geq 2(r_k)^2(1 - \cos(\theta_0)).
\end{aligned}$$

Então,

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}| \geq r_k \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\theta_0)}.$$

Assim, seja  $\delta = \frac{r_k \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\theta_0)}}{4}$ . Portanto, tome para cada  $\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{I-k}$ ,  $B(\mathbf{y}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ . Por construção,  $\bigcup_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{I-k}} B(\mathbf{y}, \delta)$  é uma união de bolas disjuntas. Por outro lado, seja  $\lambda = r_k + \delta$  e considere a bola  $B(0, \lambda)$ . Claramente,  $\bigcup_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{I-k}} B(\mathbf{y}, \delta) \subset B(0, \lambda)$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \alpha(n)\lambda^n &= \mathcal{L}^n(B(0, \lambda)) \\
 &\geq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{I-k}} B(\mathbf{y}, \delta)\right) \\
 &= \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{I-k}} \mathcal{L}^n(B(\mathbf{y}, \delta)) \\
 &= \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{I-k}} \alpha(n)\delta^n \\
 &= \text{Card}(\mathcal{A}_{I-k})\alpha(n)\delta^n.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \text{Card}(\mathcal{A}_{I-k}) &\leq \frac{\lambda^n}{\delta^n} \\
 &= \left(\frac{r_k + \delta}{\delta}\right)^n \\
 &= \left(\frac{r_k}{\delta} + \frac{\delta}{\delta}\right)^n \\
 &= \left(\frac{r_k}{\frac{r_k \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\theta_0)}}{4}} + 1\right)^n \\
 &= \left(\frac{4}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\theta_0)}} + 1\right)^n \\
 &= \left(\frac{4}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{61}{64}}} + 1\right)^n, \quad \left(\theta_0 = \arccos\left(\frac{61}{64}\right)\right) \\
 &= \left(\frac{4}{\sqrt{\frac{3}{32}}} + 1\right)^n \\
 &= \left(\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 1\right)^n \\
 &= \left(\frac{16\sqrt{6} + 3}{3}\right)^n.
 \end{aligned}$$

Portanto, tome  $L := \left\lfloor \left(\frac{16\sqrt{6}+3}{3}\right)^n \right\rfloor + 1$ , donde segue a afirmação.

Com isso em mãos, seja  $M_n = 20^n + \left\lfloor \left( \frac{16\sqrt{6}+3}{3} \right)^n \right\rfloor + 2$ . Logo,

$$\text{Card}(I) = \text{Card}(K) + \text{Card}(I - K) < M_n.$$

Claramente, a constante  $M_n$  nesta estimativa não depende da bola  $B_k$  tomanda para definir  $I$ . Isso é de fundamental importância para a construção de nossas coleções  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{M_n}$  que é o que iremos fazer agora.

Primeiro considere  $J = \infty$ . Tome  $\mathfrak{B} = \{B_j\}_{j=1}^J$  e defina  $\varphi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $B_j \mapsto \varphi(B_j) = j$ . Também defina a relação  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, \dots, M_n\}$  dada por  $\alpha(j) = j$ , se  $j \in \{1, 2, \dots, M_n\}$ . Para  $k \geq M_n$ , defina indutivamente  $\alpha(k+1)$  da seguinte maneira: note que

$$\text{Card}(\{j; 1 \leq j \leq M_n, B_j \cap B_{k+1} \neq \emptyset\}) \leq \text{Card}(\{j; 1 \leq j \leq k, B_j \cap B_{k+1} \neq \emptyset\}) < M_n.$$

Logo, existe  $l \in \{1, 2, \dots, M_n\}$  tal que  $B_l \cap B_{k+1} = \emptyset$ . A princípio, não sabemos se  $l$  é único. Contudo, queremos definir  $\alpha$  apenas como uma relação, logo, tome  $\alpha(k+1) = l$ , tal que  $B_l \cap B_{k+1} = \emptyset$  e  $l \leq M_n$ . Assim, tome  $\sigma := \alpha \circ \varphi$ , ou seja,  $\sigma$  é uma relação de  $\mathfrak{B}$  em  $\{1, 2, \dots, M_n\}$ . Em particular,  $\sigma^{-1}(j)$  é uma coleção de bolas disjuntas para cada  $j \in \{1, 2, \dots, M_n\}$ . Portanto, seja para cada  $j \in \{1, 2, \dots, M_n\}$ ,

$$\mathcal{G}_j = \{B_i; \sigma(B_i) = j\}.$$

O caso  $J < \infty$  é similar.

Claramente,  $\bigcup_{j=1}^J B_j = \bigcup_{i=1}^{M_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B$ . Portanto,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{M_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B.$$

O que prova o caso onde  $A$  é limitado.

Seja  $A$  ilimitado. Defina para  $l \geq 1$

$$A_l = A \cap \{x; 3D(l-1) \leq |x| < 3Dl\}.$$

Observe que para cada  $l$ ,  $A_l$  é limitado. Logo existem coleções  $\mathcal{G}_i^l$ ,  $i \in 1, 2, \dots, M_n$ , tais que

$$A_l \subset \bigcup_{i=1}^{M_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i^l} B.$$

Como  $A = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l$ , utilizaremos essas coleções  $\mathcal{G}_i^l$  de  $A_l$  para definir coleções  $\mathcal{G}_i$  para  $A$ . Em particular, não temos controle sobre a localização de  $\mathcal{G}_i^l$ , logo não podemos definir os  $\mathcal{G}_i$  de qualquer maneira, pois poderíamos por em risco a propriedade de que cada

$\mathcal{G}_i$  seja uma coleção de bolas disjuntas. Logo, definamos os  $\mathcal{G}_i$  da seguinte maneira,

$$\mathcal{G}_i = \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_i^{2^l-1}, \quad i \in \{1, 2, \dots, M_n\}$$

e

$$\mathcal{G}_{i+M_n} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_i^{2^l}, \quad i \in \{1, 2, \dots, M_n\}.$$

Dessa forma, teremos  $2M_n$  coleções  $\mathcal{G}_i$  de bolas disjuntas. Por fim, defina  $N_n = 2M_n$ . O que prova o desejado.  $\blacksquare$

**Corolário 2.4.** *Seja  $\mu$  uma medida de borel sobre o  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{F}$  uma coleção qualquer de bolas fechadas não degeneradas do  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $A$  o conjunto dos centros das bolas de  $\mathcal{F}$ , tal que  $\mu(A) < \infty$  e para cada  $a \in A$ ,*

$$\inf\{r; B(a, r) \in \mathcal{F}\} = 0$$

Então, para cada aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , existe uma coleção  $\mathcal{G}$  de bolas disjuntas de  $\mathcal{F}$  tal que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \subset U$$

e

$$\mu \left( (A \cap U) - \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) = 0.$$

*Demonstração.* Fixe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $1 - \frac{1}{N_n} < \theta < 1$ , onde  $N_n$  é a constante do Teorema da Cobertura de Besicovitch.

**Afirmção:** Existe uma coleção  $\{B_1, B_2, \dots, B_{M_1}\}$  de bolas disjuntas e fechadas, em  $U$  tal que

$$\mu \left( (A \cap U) - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i \right) \leq \theta \mu(A \cap U).$$

**Prova da Afirmção:** Seja  $\mathcal{F}_1 = \{B; B \in \mathcal{F}, \text{diam}(B) \leq 1, B \subset U\}$ . Pelo Teorema da Cobertura de Besicovitch, existe uma constante  $N_n = N_n(n)$  e uma família  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{N_n}$  de bolas disjuntas de  $\mathcal{F}_1$  tal que

$$A \cap U \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B.$$



Assim,

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap \mathcal{U}) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N_n} (A \cap \mathcal{U}) \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_n} \mu\left((A \cap \mathcal{U}) \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_n} \max_{1 \leq j \leq N_n} \mu\left((A \cap \mathcal{U}) \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} B\right) \\
&= N_n \max_{1 \leq j \leq N_n} \mu\left((A \cap \mathcal{U}) \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} B\right).
\end{aligned}$$

Seja  $j_0 \in \{1, 2, \dots, N_n\}$  tal que

$$\mu\left((A \cap \mathcal{U}) \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_{j_0}} B\right) = \max_{1 \leq j \leq N_n} \mu\left((A \cap \mathcal{U}) \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} B\right).$$

Logo, pelo que já foi estimado,

$$\mu\left((A \cap \mathcal{U}) \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_{j_0}} B\right) \geq \frac{1}{N_n} \mu(A \cap \mathcal{U}).$$

Como  $1 - \frac{1}{N_n} < \theta < 1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{N_n} > -\theta > -1 \Rightarrow \frac{1}{N_n} > (1 - \theta) > 0$ , temos que

$$\mu\left((A \cap \mathcal{U}) \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_{j_0}} B\right) > (1 - \theta) \mu(A \cap \mathcal{U}). \quad (11)$$

Por outro lado, suponhamos que  $\mathcal{G}_{j_0}$  seja um conjunto infinito. Seja  $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{G}_{j_0}$  e defina para cada  $k$

$$A_k = \bigcup_{i=1}^k B_i.$$

Claramente,

$$A_k \subset A_{k+1} \quad \text{e} \quad A_k \nearrow \bigcup_{B \in \mathcal{G}_{j_0}} B.$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G}_{j_0}} B\right).$$

Logo, por (11)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu((A \cap U) \cap A_k) > (1 - \theta)\mu(A \cap U).$$

Então, existe  $M_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i\right) > (1 - \theta)\mu(A \cap U). \quad (12)$$

uma vez que,  $A_{M_1} = \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i$ .

Assim, temos que  $\bigcup_{i=1}^{M_1} B_i$  é um boreliano, logo é  $\mu$ -mensurável. Dessa forma, para todo  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\mu(E) = \mu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i\right) + \mu\left(E - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i\right),$$

em particular,

$$\mu(A \cap U) = \mu\left((A \cap U) \cap \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i\right) + \mu\left((A \cap U) - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i\right).$$

Daí e de (12),

$$\mu(A \cap U) - \mu\left((A \cap U) - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i\right) > (1 - \theta)\mu(A \cap U).$$

Assim,

$$\mu\left((A \cap U) - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i\right) \leq \theta\mu(A \cap U).$$

O que prova a afirmação.

Seja agora,

$$U_2 = U - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_2 = \{B \in \mathcal{F}; \text{diam}(B) \leq 1, B \subset U_2\}.$$

Assim, seguindo os mesmos procedimentos da demonstração da afirmação anterior, obtemos uma coleção  $\{B_{M_1+1}, B_{M_1+2}, \dots, B_{M_2}\}$  tal que

$$\mu\left((A \cap U_2) - \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i\right) \leq \theta\mu(A \cap U_2).$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\mu \left( (A \cap U) - \bigcup_{i=1}^{M_2} B_i \right) &= \mu \left( (A \cap U_2) - \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i \right) \\
&\leq \theta \mu(A \cap U_2) \\
&= \theta \mu \left( A \cap \left( U - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i \right) \right) \\
&= \theta \mu \left( (A \cap U) - \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i \right) \\
&\leq \theta^2 \mu(A \cap U).
\end{aligned}$$

Logo, repetindo indutivamente esse processo, temos que

$$\mu \left( (A \cap U) - \bigcup_{i=1}^{M_k} B_i \right) \leq \theta^k \mu(A \cap U).$$

Daí, quando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\mu \left( (A \cap U) - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \mu \left( (A \cap U) - \bigcup_{B \in \mathcal{G}_{j_0}} B \right) = 0$$

uma vez que  $\theta \in (0, 1)$ . Por fim, tome  $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{j_0}$ . ■

### 2.3 Diferenciação de medidas de Radon

Sejam  $\mu$  e  $\nu$  medidas de Radon sobre o  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.25.** Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , definamos:

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}, & \text{se } \mu(B(x, r)) > 0, \text{ para todo } r. \\ +\infty, & \text{se } \mu(B(x, r)) = 0, \text{ para algum } r. \end{cases}$$

$$\underline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}, & \text{se } \mu(B(x, r)) > 0, \text{ para todo } r. \\ +\infty, & \text{se } \mu(B(x, r)) = 0, \text{ para algum } r. \end{cases}$$

**Definição 2.26.** Se  $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < \infty$ , dizemos que  $\nu$  é diferenciável com respeito a  $\mu$  no ponto  $x$  e escrevemos

$$D_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x),$$

onde  $D_\mu \nu$  é a derivada de  $\nu$  com respeito a  $\mu$ . Também chamamos  $D_\mu \nu$  de densidade de

$\nu$  com respeito a  $\mu$ .

Mostremos que  $D_\mu \nu$  está bem definida. Para isso será necessário o Lema abaixo. O mesmo é de fundamental importância para esse tópico.

**Lema 2.1.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  qualquer e fixe  $0 < \alpha < \infty$ . Então,*

- (i) *Se  $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \underline{D}_\mu \nu \leq \alpha\}$  temos que  $\nu(A) \leq \alpha \mu(A)$ .*
- (ii) *Se  $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \overline{D}_\mu \nu \geq \alpha\}$  temos que  $\nu(A) \geq \alpha \mu(A)$ .*

*Demonstração.* Começaremos por (i), considere a princípio que  $\mu(\mathbb{R}^n)$  e  $\nu(\mathbb{R}^n)$  sejam finitos. Fixemos  $\varepsilon > 0$ . Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto tal que  $A \subset U$ . Defina,

$$\mathcal{F} = \{B; B = B(a, r), a \in A, B \subset U, \nu(B) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu(B)\}$$

**Afirmção:** Se  $A \neq \emptyset$  então  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ .

**Prova da Afirmção:** Fixe  $a \in A$ . Por hipótese do lema, temos que  $\underline{D}_\mu \nu(a) \leq \alpha$ . Ou seja,

$$\sup_{\delta > 0} \inf_{r \in (0, \delta)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))} \leq \alpha. \quad (13)$$

Note que para o  $\varepsilon$  já tomado existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que

$$\sup_{\delta > 0} \inf_{r \in (0, \delta)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))} - \varepsilon < \inf_{r \in (0, \delta_\varepsilon)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))} \leq \sup_{\delta > 0} \inf_{r \in (0, \delta)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))}.$$

Somando  $\varepsilon$  na estimativa acima e usando (13), segue que

$$\inf_{r \in (0, \delta_\varepsilon)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))} + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon.$$

Pela definição de ínfimo, existe  $r_\varepsilon > 0$  tal que

$$\alpha + \varepsilon > \varepsilon + \inf_{r \in (0, \delta_\varepsilon)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))} \geq \frac{\nu(B(a, r_\varepsilon))}{\mu(B(a, r_\varepsilon))}.$$

Daí,

$$\nu(B(a, r_\varepsilon)) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu(B(a, r_\varepsilon)).$$

Por outro lado, seja  $r_0 > 0$  tal que  $B(a, r_0) \subset U$ , tal bola existe pois  $U$  é aberto. Se  $r_0 \geq r_\varepsilon$ , então a afirmação está provada, pois,  $B(a, r_\varepsilon) \subset B(a, r_0)$ . Caso contrário se  $r_0 < r_\varepsilon$ , então temos que  $r_0 < \delta_\varepsilon$ , daí,

$$\inf_{r \in (0, \delta_\varepsilon)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))} \leq \inf_{r \in (0, r_0)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))}.$$

Em particular,

$$\inf_{r \in (0, \delta_\varepsilon)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))} \leq \sup_{\delta > 0} \inf_{r \in (0, \delta)} \frac{\nu(B(a, r))}{\mu(B(a, r))} \leq \alpha.$$

Somando  $\varepsilon$ , temos que

$$\inf_{r \in (0, \delta_\varepsilon)} \frac{\nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}, r))}{\mu(\mathbf{B}(\mathbf{a}, r))} + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon.$$

Dessa forma, pela definição de ínfimo, existe  $\bar{r}_\varepsilon \leq r_0$  tal que

$$\frac{\nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}, \bar{r}_\varepsilon))}{\mu(\mathbf{B}(\mathbf{a}, \bar{r}_\varepsilon))} \leq \alpha + \varepsilon.$$

Claramente,  $\mathbf{B}(\mathbf{a}, \bar{r}_\varepsilon) \subset \mathbf{B}(\mathbf{a}, r_0) \subset \mathbf{U}$ , e  $\nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}, \bar{r}_\varepsilon)) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu(\mathbf{B}(\mathbf{a}, \bar{r}_\varepsilon))$ .

Portanto,  $(\mathbf{B}(\mathbf{a}, \bar{r}_\varepsilon) \in \mathcal{F}$ . O que prova a afirmação.

Suponhamos agora que exista  $\mathbf{a}_0 \in \mathbf{A}$  tal que  $\inf\{r; \mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r) \in \mathcal{F}\} = \lambda > 0$ . Se  $\lambda \in \{r; \mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r) \in \mathcal{F}\}$  seja  $0 < \delta < \lambda$ . Claramente,  $\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \delta) \subset \mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \lambda) \subset \mathbf{U}$ , como  $\delta$  é o ínfimo dos raios temos que  $\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \delta) \notin \mathcal{F}$ , em particular,

$$\nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \delta)) > (\alpha + \varepsilon)\mu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \delta)). \quad (14)$$

Assim, defina  $\{r_i\}_{i=1}^\infty = (\mathbb{Q} \cap [\delta, \lambda]) \cup \{\delta, \lambda\}$ , com  $r_i < r_{i+1}$ . Logo, tomemos  $\{\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r_i)\}_{i=1}^\infty$ . Note que a estimativa em (14) vale para cada  $r_i < \lambda$  além disso,  $\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r_i) \nearrow \mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \lambda)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \lambda)) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r_i)) \\ &> (\alpha + \varepsilon) \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r_i)) \\ &= \mu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \lambda)). \end{aligned}$$

Daí temos uma contradição. Se  $\lambda \in \{r; \mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r) \in \mathcal{F}\}$  então

$$\nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \lambda)) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \lambda)).$$

Por outro lado, suponha que  $\lambda \notin \{r; \mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r) \in \mathcal{F}\}$ . Neste caso,

$$\nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \lambda)) > (\alpha + \varepsilon)\mu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \lambda)).$$

Note que para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe  $r_k \in \{r; \mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r) \in \mathcal{F}\}$  tal que

$$\lambda < r_k < \lambda + \frac{1}{k}.$$

Disso,

$$\nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, \lambda)) \leq \nu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r_k)) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu(\mathbf{B}(\mathbf{a}_0, r_k)) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu\left(\mathbf{B}\left(\mathbf{a}_0, \lambda + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Como  $B(\mathbf{a}_0, \lambda + \frac{1}{k}) \searrow B(\mathbf{a}_0, \lambda)$ , e  $\mu(B(\mathbf{a}_0, r_1)) < \infty$  temos que

$$\begin{aligned} \nu(B(\mathbf{a}_0, \lambda)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(B(\mathbf{a}_0, \lambda)) \\ &\leq (\alpha + \varepsilon) \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(B\left(\mathbf{a}_0, \lambda + \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= (\alpha + \varepsilon)\mu(\mathbf{a}_0, \lambda). \end{aligned}$$

Outra contradição. Dessa forma para todo  $\mathbf{a} \in A$  o  $\inf\{r; B(\mathbf{a}, r) \in \mathcal{F}\} = 0$ .

Com isso estamos nas hipóteses do *Corolário do Teorema da cobertura de Besicovitch*. Portanto, existe uma coleção de bolas disjuntas  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  enumerável tal que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \subset U$$

e

$$\nu\left(A \cap U - \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) = \nu\left(A - \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) = 0.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu\left(A - \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \cup \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) \\ &= \nu\left(A - \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) + \nu\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) \\ &= \nu\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{G}} \nu(B) \\ &\leq (\alpha + \varepsilon) \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B) \\ &\leq (\alpha + \varepsilon)\mu(U). \end{aligned}$$

Como  $U$  é um aberto qualquer que contém  $A$  e por  $\mu$  ser na medida de Radon temos que

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U); U \supset A \text{ e } U \text{ é aberto}\}.$$

Logo,

$$\nu(A) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu(A).$$

Pela arbitrariedade do  $\varepsilon$ , temos que

$$\nu(A) \leq \alpha\mu(A). \tag{15}$$

Se  $\nu(\mathbb{R}^n) = \mu(\mathbb{R}^n) = \infty$  defina

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}^n; j < |x| \leq j + 1\}.$$

Claramente,  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$  e  $E_i \cap E_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ . Com isso temos que para cada  $j$ ,  $\nu|_{E_j}(\mathbb{R}^n) < \infty$ , isto é estamos na situação anterior onde a medida do  $\mathbb{R}^n$  era finita. O mesmo vale para  $\mu$ . Logo,

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu|_{E_j}(A) \\ &\leq \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \mu|_{E_j}(A), \quad (\text{por (15)}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap E_j) \\ &= \alpha \mu(A). \end{aligned}$$

Isso prova (i), a prova de (ii) é similar. ■

Antes enunciarmos e provarmos o próximo resultado a respeito de densidade de medidas de Radon, se faz necessário, um breve repasso as funções semi contínuas.

**Definição 2.27.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dado  $x_0 \in U$  dizemos que  $f$  é semi contínua superiormente em  $x_0$ , se*

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

*De maneira similar, dizemos que  $f$  semi contínua inferiormente em  $x_0$  se*

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

**Lema 2.2.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é semi contínua superiormente se e somente se para todo  $a \in \mathbb{R}$  o conjunto  $\{x \in U; f(x) \geq a\}$  é fechado.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Fixe  $a \in \mathbb{R}$  e seja  $x_0 \in \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq a\}}$  então existe  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq a\}$  tal que  $x_k \rightarrow x_0$ . Logo, temos que

$$f(x_k) \geq a \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Daí, e do fato de  $f$  ser semi contínua superiormente em  $x_0$ , temos que

$$\alpha \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq f(x_0).$$

Logo,  $x_0 \in \{x \in U; f(x) \geq \alpha\}$ . Portanto,  $\{x \in U; f(x) \geq \alpha\}$  é fechado.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos por absurdo, que  $f$  não seja semi contínua em  $x_0 \in U \cap \bar{U}$ . Logo,

$$f(x_0) < \limsup_{y \rightarrow x_0} f(y).$$

Assim, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_0) < M$ . Veja que, da maneira com que  $x_0$  foi tomado existe  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U$  tal que  $x_k \rightarrow x_0$ . Por outro lado, por  $f$  não ser semi contínua superiormente em  $x_0$  temos que para todo  $\delta > 0$ , se  $x \in B(x_0, \delta)$  então,  $f(x) \geq M$ . Portanto, fixemos  $\delta_0 > 0$  e para esse  $\delta_0$  existe  $k(\delta_0) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k > k(\delta_0)$ ,  $x_k \in B(x_0, \delta_0)$ . Daí,

$$f(x_k) \geq M, \quad \forall k > k(\delta_0).$$

Com isso,  $\{x \in U; f(x) \geq M\}$  não é fechado, pois  $x_k \in \{x \in U; f(x) \geq M\}$  e  $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \notin \{x \in U; f(x) \geq M\}$ . Absurdo! E o mesmo está no fato de supormos que  $f$  não é semi contínua superiormente.  $\blacksquare$

Com o próximo resultado mostraremos que  $D_\mu \nu$  está bem definida.

**Teorema 2.24.** *Sejam  $\mu$  e  $\nu$  medidas de Radon sobre o  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $D_\mu \nu$  existe e é finita  $\mu$ -q.t.p.*

*Demonstração.* Como no Lema (2.1), assumamos que  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$  e  $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$ . Provaremos o teorema com três afirmações.

**Afirmação 1:**  $D_\mu \nu$  existe e é finita  $\mu$ -q.t.p

**Prova da Afirmação 1:** Seja

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n; \bar{D}_\mu \nu(x) = \infty\}.$$

Note que para cada  $\alpha > 0$

$$I \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \bar{D}_\mu \nu(x) \geq \alpha\}.$$

Pelo Lema em (2.1) temos que

$$\nu(I) \geq \alpha \mu(I).$$

Portanto,

$$\mu(I) \leq \frac{1}{\alpha} \nu(I).$$

Fazendo  $\alpha \rightarrow \infty$  temos que  $\mu(I) = 0$ .

Logo,  $\bar{D}_\mu \nu$  é finito  $\mu$ -q.t.p, em particular  $\underline{D}_\mu \nu$  também o é. Pois,  $\underline{D}_\mu \nu(x) \leq \bar{D}_\mu \nu(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Agora mostraremos que  $D_\mu \nu$  existe  $\mu$ -q.t.p. Com efeito, para todo



$0 < a < b$  defina

$$R(a, b) = \{x; \underline{D}_\mu v(x) < a < b < \overline{D}_\mu v(x) < \infty\}.$$

Novamente pelo Lema (2.1),

$$\begin{cases} v(R(a, b)) < a\mu(R(a, b)), \\ v(R(a, b)) > b\mu(R(a, b)). \end{cases}$$

Daí, temos que

$$b\mu(R(a, b)) \leq v(R(a, b)) \leq a\mu(R(a, b)).$$

Como  $b > a > 0$  segue que  $\mu(R(a, b)) = 0$ . Por outro lado observe que

$$\bigcup_{\substack{0 < a < b \\ a, b \in \mathbb{Q}}} R(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n; \underline{D}_\mu v(x) < \overline{D}_\mu v(x)\}.$$

Então,  $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n; \underline{D}_\mu v(x) < \overline{D}_\mu v(x)\}) = 0$ . Portanto,  $D_\mu v$  existe e é finita,  $\mu$ -q.t.p. .

**Afirmção 2:** Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$

$$\limsup_{y \rightarrow x} \mu(B(y, r)) \leq \mu(B(x, r)).$$

O mesmo vale para  $v$ .

**Prova da Afirmção 2:** Dado  $x \in \mathbb{R}^n$  seja  $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $y_k \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Definamos  $f_k := \chi_{B(y_k, r)}$  e  $f := \chi_{B(x, r)}$ . Note que  $f_k$  converge pontualmente para  $f$ . Veja que, para cada  $w \in \mathbb{R}^n$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(w) \leq f(w).$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\liminf_{k \rightarrow \infty} -f_k &\leq f \\ \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} -f_k &\geq -f \\ \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} (\chi_{B(x, 2r)} - f_k) &\geq \chi_{B(x, 2r)} - f. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu(B(x, 2r)) - \mu(B(x, r)) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{B(x, 2r)} - f) d\mu \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} (\chi_{B(x, 2r)} - f_k) d\mu \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{B(x, 2r)} - f_k) d\mu, \quad (\text{pelo Lema de Fatou}) \\
&= \liminf_{k \rightarrow \infty} (\mu(B(x, 2r)) - \mu(B(y_k, r))) \\
&= \mu(B(x, 2r)) - \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu(B(y_k, r)).
\end{aligned}$$

Daí temos claramente que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu(B(y_k, r)) \leq \mu(B(x, r)),$$

o que prova a segunda afirmação.

Essa segunda afirmação nos garante por (2.2) que  $\mu(B(x, r))$  é semi contínua superiormente. Usaremos tal fato na próxima afirmação.

**Afirmação 3:**  $D_\mu \nu$  é  $\mu$ -mensurável.

**Prova da Afirmação 3:** Pela afirmação anterior para todo  $r > 0$  as funções

$$x \mapsto \mu(B(x, r)) \quad \text{e} \quad x \mapsto \nu(B(x, r))$$

são semi contínuas superiormente. Portanto, são borelianas. Disso temos que para cada  $r > 0$

$$f_r(x) := \begin{cases} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}, & \text{se } \mu(B(x, r)) > 0, \\ +\infty & \text{se } \mu(B(x, r)) = 0 \end{cases}$$

é  $\mu$ -mensurável. Logo, de

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_r(x) = D_\mu \nu(x), \quad \mu\text{-q.t.p}$$

segue que  $D_\mu \nu$  é  $\mu$ -mensurável, uma vez que limite de  $\mu$ -mensurável é  $\mu$ -mensurável. O que prova o desejado. ■

**Definição 2.28.** *Sejam  $\mu$  e  $\nu$  medidas sobre o  $\mathbb{R}^n$  dizemos que  $\nu$  é absolutamente contínua com respeito a  $\mu$ , denotemos por,  $\nu \ll \mu$  se para todo  $A \subset \mathbb{R}^n$  com  $\mu(A) = 0$  então,  $\nu(A) = 0$ .*

**Definição 2.29.** *Sejam  $\mu$  e  $\nu$  medidas sobre o  $\mathbb{R}^n$  dizemos que  $\nu$  é mutuamente singular a  $\mu$ , denotemos por,  $\nu \perp \mu$  se existe  $B \subset \mathbb{R}^n$  boreliano tal que  $\mu(\mathbb{R}^n - B) = \nu(B) = 0$ .*

**Teorema 2.25** (Teorema da diferenciação para Medidas de Radon). *Sejam  $\mu$  e  $\nu$  medidas*

de Radon em  $\mathbb{R}^n$ , com  $\nu \ll \mu$ . Então,

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \, d\mu$$

para todo  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -mensurável.

*Demonstração.* Começaremos com a seguinte afirmação:

**Afirmção:** Todo  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -mensurável é  $\nu$ -mensurável.

**Prova da Afirmção:** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -mensurável. Então, por  $\mu$  ser uma medida de Radon temos que existe  $B \subset \mathbb{R}^n$  boreliano tal que  $A \subset B$  e  $\mu(A) = \mu(B)$ . Daí,  $\mu(B - A) = 0$ . Como  $\nu \ll \mu$ , então,  $\nu(B - A) = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \nu((B - A) \cup A) \\ &= \nu(B - A) + \nu(A) \\ &= \nu(A). \end{aligned}$$

Portanto,  $A$  é  $\nu$ -mensurável.

Agora, seja

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^n; D_\mu \nu = 0\} \quad \text{e} \quad I := \{x \in \mathbb{R}^n; D_\mu \nu = \infty\}$$

uma vez que  $D_\mu \nu$  é  $\mu$ -mensurável, temos que  $Z$  e  $I$  também o são.

Pelo teorema anterior,  $\mu(I) = 0$  logo,  $\nu(I) = 0$ . Note que para todo,  $\alpha > 0$

$$Z \subset \{x; \underline{D}_\mu \nu(x) \leq \alpha\}.$$

Assim, pelo Lema (2.1),

$$\nu(Z) \leq \alpha \mu(Z).$$

Fazendo  $\alpha \rightarrow 0$ , segue que  $\nu(Z) = 0$ . Daí,

$$\int_Z D_\mu \nu \, d\mu = \int_Z 0 \, d\mu = 0 = \nu(Z)$$

e

$$\int_I D_\mu \nu \, d\mu = 0 = \nu(I).$$

Por outro lado, seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$ -mensurável e fixemos  $1 < t < +\infty$ . Definamos para cada  $m \in \mathbb{Z}$

$$A_m = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n; t^m \leq D_\mu \nu(x) < t^{m+1}\}.$$

Por construção,  $A_m$  é  $\mu$ -mensurável e pela afirmação provada também é  $\nu$ -

mensurável. Ainda por construção,

$$\left( A - \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \right) \subset Z \cup I \cup \{x \in \mathbb{R}^n; \bar{D}_\mu v(x) \neq \underline{D}_\mu v(x)\} := M.$$

Como  $\mu(M) = 0$  então,  $\mu(A - \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} A_m) = 0$ . Logo,  $v(A - \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} A_m) = 0$ .

Daí,

$$\begin{aligned} v(A) &= v\left(\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} A_m\right) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(A_m) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N v(A_m) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N t^{m+1} \mu(A_m) \quad (\text{por (2.1)}). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} v(A) &\leq t \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N t^m \mu(A_m) \\ &= t \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \int_{A_m} t^m d\mu \\ &\leq t \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \int_{A_m} D_\mu v d\mu \\ &= t \int_A D_\mu v d\mu. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu\left(\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} A_m\right) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \nu(A_m) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \nu(A_m) \\
&\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N t^m \mu(A_m), \quad (\text{por (2.1)}) \\
&= \frac{1}{t} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N t^{m+1} \mu(A_m) \\
&= \frac{1}{t} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \int_{A_m} t^{m+1} d\mu \\
&\geq \frac{1}{t} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \int_{A_m} D_\mu \nu d\mu \\
&= \frac{1}{t} \int_A D_\mu \nu d\mu.
\end{aligned}$$

Das estimativas acima, temos que

$$\frac{1}{t} \int_A D_\mu \nu d\mu \leq \nu(A) \leq t \int_A D_\mu \nu d\mu, \quad \forall 1 < t < +\infty.$$

Fazendo  $t \rightarrow 1^+$ , temos que

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu d\mu.$$

■

O próximo resultado é crucial para lidarmos com funções de Variação Limitada (BV) e funções convexas no  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.26** (Teorema da Decomposição de Lebesgue). *Sejam,  $\mu$  e  $\nu$  medidas de Radon sobre o  $\mathbb{R}^n$ . Então, existem medidas de Radon  $\nu_{ac}$  e  $\nu_s$  tais que  $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ , onde*

$$\nu_{ac} \ll \mu \quad e \quad \nu_s \perp \mu.$$

Em particular,

$$D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac} \quad e \quad D_\mu \nu_s = 0, \quad \mu\text{-q.t.p}$$

e conseqüentemente,

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu_{ac} \, d\mu + \nu_s(A)$$

para cada boreliano  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.30.** Chamamos  $\nu_{ac}$  a parte absolutamente contínua e  $\nu_s$  a parte singular de  $\nu$  com respeito a  $\mu$ .

*Demonstração.* Assumamos como nos resultados anteriores que  $\mu(\mathbb{R}^n)$  e  $\nu(\mathbb{R}^n)$  sejam finitos e definamos

$$\mathcal{E} = \{A \subset \mathbb{R}^n; A \text{ é boreliano, } \mu(\mathbb{R}^n - A) = 0\}$$

note que  $\mathcal{E} \neq \emptyset$ , uma vez que  $\mu$  é uma medida de Radon.

Consideremos agora o seguinte número  $\inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A)$ . Logo, para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe  $B_k \in \mathcal{E}$  tal que

$$\nu(B_k) \leq \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A) + \frac{1}{k}.$$

Daí, defina  $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_k$ . Observe que

$$\mathbb{R}^n - B = \mathbb{R}^n - \bigcap_{i=1}^{\infty} B_k = \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} B_k \right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_k^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n - B_k).$$

Então

$$\mu(\mathbb{R}^n - B) = \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n - B_k) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathbb{R}^n - B_k) = 0.$$

Dessa forma  $B \in \mathcal{E}$ . Por outro lado, temos que

$$\nu(B) \leq \nu(B_k) \leq \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A) + \frac{1}{k} \leq \nu(B) + \frac{1}{k}.$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$  segue que  $\nu(B) = \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A)$ .

Com isso em mãos, defina

$$\nu_{ac} := \nu|_B \quad \text{e} \quad \nu_s := \nu|_{(\mathbb{R}^n - B)}.$$

**Afirmação:**  $\nu_{ac} \ll \mu$ .

**Prova da Afirmação:** Suponha por absurdo que exista  $A \subset B$  com  $\mu(A) = 0$  e  $\nu(A) > 0$ .

Então,

$$\mu(\mathbb{R}^n - (B - A)) = \mu((\mathbb{R}^n - B) \cup A) \leq \mu(\mathbb{R}^n - B) + \mu(A) = 0$$

Logo,  $(B - A) \in \mathcal{E}$  e

$$\nu(B - A) = \nu(B) - \nu(A) < \nu(B).$$

O que contradiz o fato de  $\nu(B) = \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A)$ . Logo,  $\nu_{ac} \ll \mu$ .

**Afirmção:**  $\nu_s \perp \mu$ .

**Prova da Afirmção:** Se  $\mu(\mathbb{R}^n - B) = 0$  temos por construção que

$$\nu_s(B) = \nu|_{(\mathbb{R}^n - B)}(B) = \nu((\mathbb{R}^n - B) \cap B) = \nu(\emptyset) = 0 = \mu(\mathbb{R}^n - B).$$

Portanto,  $\nu_s \perp \mu$ .

**Afirmção:**  $D_\mu \nu_{ac} = D_\mu \nu$ ,  $\mu$ -q.t.p..

**Prova da Afirmção:** Note que para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} D_\mu \nu(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu_{ac}(B(x, r)) + \nu_s(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu_{ac}(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu_s(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} \\ &= D_\mu \nu_{ac}(x) + D_\mu \nu_s(x). \end{aligned}$$

Logo, para obtermos o desejado, basta mostrar que,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n; D_\mu \nu_s(x) > 0\}) = 0.$$

Claramente,  $\{x \in \mathbb{R}^n; D_\mu \nu_s(x) > 0\} = \{x \in B; D_\mu \nu_s(x) > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n - B; D_\mu \nu_s(x) > 0\}$ .

Como  $\mu(\mathbb{R}^n - B) = 0$ , segue que  $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n - B; D_\mu \nu_s(x) > 0\}) = 0$ . Logo, basta estimarmos a medida do seguinte conjunto,  $\{x \in B; D_\mu \nu_s(x) > 0\}$ .

Ora, fixe  $k \in \mathbb{N}$  e defina

$$C_k = \left\{ x \in B; D_\mu \nu_s(x) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Claramente,  $C_k \subset B$ , logo, pelo Lema (2.1),

$$\frac{1}{k}\mu(C_k) < \nu(C_k) \leq \nu(B) = 0.$$

Daí,  $\mu(C_k) = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto,

$$\mu(\{x \in B; D_\mu \nu_s(x) > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = 0.$$

Isso prova a afirmação.

Por fim, temos para cada boreliano  $A \subset \mathbb{R}^n$  que

$$\nu(A) = \nu_{ac}(A) + \nu_s(A) = \int_A D_\mu \nu \, d\mu + \nu_s(A).$$

■

## 2.4 Teorema da diferenciação de Lebesgue

Nesta subseção, denotamos a média de uma função  $f$  integrável sobre  $E \subset \mathbb{R}^n$  com respeito  $\mu$ , por,

$$\int_E f \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu$$

uma vez que  $0 < \mu(E) < +\infty$ .

A seguir temos um teorema poderoso e sua prova torna se simples com a matemática que desenvolvemos até aqui.

**Teorema 2.27** (Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch). *Seja  $\mu$  uma medida de Radon em  $\mathbb{R}^n$  e  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n; \mu)$ . Então,*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} f(y) \, d\mu(y) = f(x)$$

para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , com respeito a  $\mu$ .

*Demonstração.* Para cada boreliano  $B \subset \mathbb{R}^n$ , defina

$$\begin{aligned} \nu^+(B) &= \int_B f^+ \, d\mu, \\ \nu^-(B) &= \int_B f^- \, d\mu \end{aligned}$$

e para cada  $A \subset \mathbb{R}^n$  qualquer seja,

$$\nu^+(A) = \inf\{\nu^+(B); A \subset B, B \text{ é boreliano}\}$$



e

$$\nu^-(A) = \inf\{\nu^-(B); A \subset B, B \text{ é boreliano}\}.$$

Claramente,  $\nu^+$  e  $\nu^-$  são medidas de Radon. Além disso, temos que para todo  $A \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $\mu(A) = 0$  tem se que

$$\nu^+(A) = \int_A f^+ d\mu = 0,$$

e o mesmo vale para  $\nu^-$ . Portanto,  $\nu^+ \ll \mu$  e  $\nu^- \ll \mu$ . Logo, pelo *Teorema da Diferenciação para Medidas de Radon* segue para todo  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -mensurável que

$$\nu^+(A) = \int_A D_\mu \nu^+ d\mu = \int_A f^+ d\mu$$

e

$$\nu^-(A) = \int_A D_\mu \nu^- d\mu = \int_A f^- d\mu.$$

Daí segue que

$$\int_A (f^+ - D_\mu \nu^+) d\mu = 0 \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n, \mu\text{-mensurável}.$$

Portanto,  $f^+ = D_\mu \nu^+$ ,  $\mu$ -q.t.p.. De maneira análoga temos que  $f^- = D_\mu \nu^-$ ,  $\mu$ -q.t.p.. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} f d\mu &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \left( \int_{B(x,r)} f^+ d\mu - \int_{B(x,r)} f^- d\mu \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} [\nu^+(B(x,r)) - \nu^-(B(x,r))] \\ &= D_\mu \nu^+(x) - D_\mu \nu^-(x) \\ &= f^+(x) - f^-(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$  com respeito a  $\mu$ . ■

**Corolário 2.5.** *Seja  $\mu$  uma medida de Radon sobre  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p < \infty$  e  $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mu)$ . Então*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|^p d\mu = 0, \tag{16}$$

para quase todo ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , com respeito a  $\mu$ .

*Demonstração.* Seja  $\{r_i\}_{i=1}^\infty = \mathbb{Q}$ . Temos pelo *Teorema da Diferenciação de Lebesgue-*

*Besicovitch* que para cada  $i$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - r_i|^p d\mu = |f(x) - r_i|^p, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - A_i,$$

onde  $\mu(A_i) = 0$ .

Seja  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , claramente,  $\mu(A) = 0$ . Logo, dado  $x \in \mathbb{R}^n - A$ , temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - r_i|^p d\mu = |f(x) - r_i|^p, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Assim, fixemos  $x \in \mathbb{R} - A$  e  $\varepsilon > 0$ . Tome  $r_i$  de modo que

$$|f(x) - r_i|^p < \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

A escolha desse  $r_i$  é possível por causa da densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|^p d\mu &= \int_{B(x,r)} |f - r_i - (f(x) - r_i)|^p d\mu \\ &\leq \int_{B(x,r)} (|f - r_i| + |f(x) - r_i|)^p d\mu \\ &\leq \int_{B(x,r)} 2^{p-1} (|f - r_i|^p + |f(x) - r_i|^p) d\mu \\ &= 2^{p-1} \left( \int_{B(x,r)} |f - r_i|^p d\mu + \int_{B(x,r)} |f(x) - r_i|^p d\mu \right) \\ &< 2^{p-1} \left( \int_{B(x,r)} |f - r_i|^p d\mu + \frac{\varepsilon}{2^p} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|^p d\mu < \lim_{r \rightarrow 0} 2^{p-1} \left( \int_{B(x,r)} |f - r_i|^p d\mu + \frac{\varepsilon}{2^p} \right) < \varepsilon.$$

Logo,  $\limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|^p d\mu = 0$ , uma vez que  $\varepsilon > 0$  foi arbitrário. Evidentemente,  $\liminf_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|^p d\mu \geq 0$ . Daí,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|^p d\mu = 0.$$

■

**Definição 2.31.** *Os pontos para os quais valem (16) são chamados pontos de Lebesgue de  $f$  com respeito a  $\mu$ .*

**Corolário 2.6.** Se  $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  para algum  $1 \leq p < \infty$  então,

$$\lim_{\mathcal{B} \downarrow \{x\}} \int_{\mathcal{B}} |f - f(x)|^p dy = 0$$

para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$  na medida  $n$ -dimensional de Lebesgue. Onde o limite é tomado sobre todas as bolas fechadas que contém  $x$  com  $\text{diam}(\mathcal{B}) \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* De fato, seja  $x_0$  um ponto de Lebesgue de  $f$  e  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  uma sequência de bolas,  $B_k = B(a_k, r_k)$ , tais que  $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$  e  $\text{diam}(B_k) \rightarrow 0$ . Defina  $d_k := \text{diam}(B_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $\hat{B}_k = \overline{B(x_0, d_k)}$ . Observe que dado  $y \in B_k$ ,

$$|x_0 - y| \leq |x_0 - a_k| + |a_k - y| \leq 2r_k = d_k,$$

uma vez que  $r_k = \frac{d_k}{2}$ . Portanto, para cada  $k$ ,  $B_k \subset \hat{B}_k$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_k)} \int_{B_k} |f(y) - f(x_0)| dy &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_k)} \int_{\hat{B}_k} |f(y) - f(x_0)| dy \\ &= \frac{\mathcal{L}^n(\hat{B}_k)}{\mathcal{L}^n(B_k)} \int_{\hat{B}_k} |f(y) - f(x_0)| dy \\ &= \frac{\alpha(n) d_k^n}{\alpha(n) \frac{d_k^n}{2^n}} \int_{\hat{B}_k} |f(y) - f(x_0)| dy \\ &= 2^n \int_{\hat{B}_k} |f(y) - f(x_0)| dy. \end{aligned}$$

Daí, pelo Corolário anterior,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} |f(y) - f(x_0)| dy \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} 2^n \int_{\hat{B}_k} |f(y) - f(x_0)| dy = 0.$$

Certamente,  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} |f(y) - f(x_0)| dy \geq 0$ . Dessa forma,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} |f(y) - f(x_0)| dy = 0,$$

donde segue o desejado. ■

**Corolário 2.7.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Então,

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 1, & x \in E, \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0, & x \in \mathbb{R}^n - E, \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Defina  $f := \chi_E$  e aplique o Teorema da diferenciação de Lebesgue. ■

**Definição 2.32.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  é dito um ponto de densidade 1 para

E, se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 1$$

e é um ponto de densidade 0 para E se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

**Definição 2.33.** Seja  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Então,

$$f^*(x) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x, r)} f(y) dy, & \text{se este limite é finito.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

é a representação precisa de  $f$ .

Esta última definição, recupera a noção de valor pontual de uma função  $L^1_{\text{loc}}$ . Em particular, ela é quem melhor representa a classe de equivalência  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ .

## 2.5 Limites aproximados

**Definição 2.34.** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dizemos que  $l \in \mathbb{R}^m$  é limite aproximado de  $f$  quando  $y \rightarrow x$  e escrevemos,

$$\text{ap } \lim_{y \rightarrow x} f(y) = l$$

se para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{|f - l| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

Portanto, segue da definição que  $l$  é o limite aproximado de  $f$  em  $x$ , se para cada  $\varepsilon > 0$  o conjunto dos pontos onde  $|f - l| \geq \varepsilon$  tem densidade 0.

**Teorema 2.28.** O limite aproximado é único.

*Demonstração.* Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dado  $x \in \mathbb{R}^n$  suponhamos por absurdo que existam  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $l_1 \neq l_2$ , tais que

$$\begin{cases} \text{ap } \lim_{y \rightarrow x} f(y) = l_1 \\ \text{ap } \lim_{y \rightarrow x} f(y) = l_2. \end{cases}$$

Daí, para todo  $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{|f - l_1| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{|f - l_2| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Então, tome  $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$  note que dado  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$

$$3\varepsilon = |l_1 - l_2| \leq |f(\mathbf{y}) - l_1| + |f(\mathbf{y}) - l_2|.$$

Logo, se  $|f(\mathbf{y}) - l_1| \leq \varepsilon$  então,

$$\begin{aligned} 3\varepsilon &\leq |f(\mathbf{y}) - l_1| + |f(\mathbf{y}) - l_2| \\ &\leq \varepsilon + |f(\mathbf{y}) - l_2|. \end{aligned}$$

Dessa forma,  $|f(\mathbf{y}) - l_2| \geq 2\varepsilon$ . De maneira similar se  $|f(\mathbf{y}) - l_2| \leq \varepsilon$ , temos que  $|f(\mathbf{y}) - l_1| \geq 2\varepsilon$ . Assim,

$$B(\mathbf{x}, r) \subset \{|f - l_1| \geq 2\varepsilon\} \cup \{|f - l_2| \geq 2\varepsilon\}.$$

Em particular

$$B(\mathbf{x}, r) \subset \{|f - l_1| \geq \varepsilon\} \cup \{|f - l_2| \geq \varepsilon\}.$$

Donde segue que

$$B(\mathbf{x}, r) = B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - l_1| \geq \varepsilon\} \cup B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - l_2| \geq \varepsilon\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r)) &= \mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - l_1| \geq \varepsilon\} \cup B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - l_2| \geq \varepsilon\}) \\ &\leq \mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - l_1| \geq \varepsilon\}) + \mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - l_2| \geq \varepsilon\}). \end{aligned}$$

Dividindo a desigualdade acima por  $\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r))$ , vem que

$$1 \leq \frac{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - l_1| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r))} + \frac{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - l_2| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r))}.$$

Fazendo  $r \rightarrow 0$ , temos por (17) um absurdo. Logo,  $l_1 = l_2$ . ■

**Teorema 2.29** (Algumas propriedades do Limite Aproximado).

*Se-*

*jam*  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tais que em  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  os limites aproximados nesse ponto são respectivamente,  $L$  e  $M$ . Então,

(i)  $\text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} [f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y})] = L + M$

(ii) Se  $m = 1$  então  $\text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}) = LM$

(iii) Se  $m = 1$  e  $f \leq g$  em  $\mathbb{R}^n$  então,  $L \leq M$ .

*Demonstração.* Precisamos mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{|f + g - (L + M)| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))} = 0.$$

Com efeito, temos por hipótese, que dado  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))} = 0$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{|g - M| \geq \frac{\varepsilon}{2}\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))} = 0.$$

Tome  $\mathbf{y} \in \{|f + g - (L + M)| \geq \varepsilon\}$ . Então,

$$\varepsilon = |f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) - (L + M)| \leq |f(\mathbf{y}) - L| + |g(\mathbf{y}) - M|.$$

Se  $|f(\mathbf{y}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  então,

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + |g(\mathbf{y}) - M|.$$

Logo,  $|g(\mathbf{y}) - M| > \frac{\varepsilon}{2}$ . Assim  $\mathbf{y} \in \{|g - M| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ . De maneira análoga, vem que se  $|g(\mathbf{y}) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$  então  $\mathbf{y} \in \{|f - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ . Portanto,

$$\{|f + g - (L + M)| \geq \varepsilon\} \subset \{|f - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|g - M| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{|f + g - (L + M)| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))} &\leq \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{|f - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))} \\ &+ \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{|g - M| \geq \frac{\varepsilon}{2}\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))}. \end{aligned}$$

Então, fazendo  $r \rightarrow 0$ , segue a prova de (i).

Para (ii) queremos mostrar que dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{|fg - LM| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))} = 0.$$

Seja  $\mathbf{y} \in \{|fg - LM| \geq \varepsilon\}$ , logo,

$$\varepsilon \leq |f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}) - LM| = |f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}) + f(\mathbf{y})M - f(\mathbf{y})M - LM| \leq |f(\mathbf{y})||g(\mathbf{y}) + M| + |M||f(\mathbf{y}) - L|.$$

Observe que se  $\mathbf{y} \in \{|f - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}\}$ , temos que

$$|f(\mathbf{y})| = |f(\mathbf{y}) - L + L| \leq \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} + |L|,$$

em particular,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f(\mathbf{y})||g(\mathbf{y}) + M| + |M||f(\mathbf{y}) - L| \\ &\leq \left( \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} + |L| \right) |g(\mathbf{y}) - M| + \frac{|M|\varepsilon}{2(|M| + 1)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, com cálculos simples

$$|g(\mathbf{y}) - M| \geq \frac{\varepsilon(|M| + 2)}{\varepsilon + 2|L|(|M| + 1)}.$$

Então,  $\mathbf{y} \in \{|g - M| \geq \frac{\varepsilon(|M|+2)}{\varepsilon+2|L|(|M|+1)}\}$ .

De maneira similar, fazendo as mudanças necessárias, temos que se  $\mathbf{y} \in \{|g - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\}$  então,  $\mathbf{y} \in \{|f - L| \geq \frac{\varepsilon(|L|+2)}{\varepsilon+2|M|(|L|+1)}\}$ . Portanto,

$$\{|fg - LM| \geq \varepsilon\} \subset \left\{ |f - L| \geq \frac{\varepsilon(|L| + 2)}{\varepsilon + 2|M|(|L| + 1)} \right\} \cup \left\{ |g - M| \geq \frac{\varepsilon(|M| + 2)}{\varepsilon + 2|L|(|M| + 1)} \right\}.$$

Daí,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{|fg - LM| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))} = 0.$$

Por fim, mostraremos (iii). Suponha por absurdo que  $L > M$  então, tome  $\varepsilon := \frac{L-M}{6}$ . Pela escolha do  $\varepsilon$ , temos que  $L - \varepsilon > M + \varepsilon$ . Agora, observe que  $\mathbf{x}$  tem densidade positiva em  $\{|f - L| < \varepsilon\}$  e o mesmo é verdade em  $\{|g - M| < \varepsilon\}$ . Assim, se  $\mathbf{y} \in \{|f - L| < \varepsilon\}$  temos que

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{y}) - L| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < f(\mathbf{y}) - L < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow L - \varepsilon < f(\mathbf{y}) < \varepsilon + L, \end{aligned}$$

em particular,  $f(\mathbf{y}) > M + \varepsilon$ . E se  $\mathbf{y} \in \{|g - M| < \varepsilon\}$ , de maneira análoga, vemos que  $g(\mathbf{y}) < M + \varepsilon$ . Então,

$$\{|f - L| < \varepsilon\} \cup \{|g - M| < \varepsilon\} \subset \{f > g\} = \emptyset.$$

Absurdo! Logo,  $L \leq M$ . ■

Gostariamos de ressaltar que em (iii) do teorema acima, poderíamos enfraquecer as hipóteses, ao invés de pedirmos  $f \leq g$  em  $\mathbb{R}^n$ , poderíamos pedir que a densidade de  $\mathbf{x}$  em  $\{f > g\}$  seja 0. A demonstração é idêntica a essa apresentada e o absurdo seria

que a densidade de  $x$  em  $\{|f - L| < \varepsilon\} \cup \{|g - M| < \varepsilon\}$  iria ser nula. Contrariando as hipóteses sobre  $f$  e  $g$ .

**Definição 2.35.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $l$  é o limite superior aproximado de  $f$  quando  $y \rightarrow x$ , escrevemos,*

$$\text{ap } \limsup_{y \rightarrow x} f(y) = l$$

se  $l$  é o ínfimo de todos os números reais  $t$  tais que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{f > t\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

De maneira similar,

$$\text{ap } \liminf_{y \rightarrow x} f(y) = l,$$

se  $l$  é supremo dos  $t$  reais tais que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{f < t\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

**Definição 2.36.** *Dizemos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é aproximadamente contínua em  $x \in \mathbb{R}^n$  se*

$$\text{ap } \lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x).$$

**Teorema 2.30.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f$  é  $\mathcal{L}^n$ -mensurável se, e somente se,  $f$  é aproximadamente contínua a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.*

*Demonstração.* Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $\mathcal{L}^n$ -mensurável.

**Afirmção:** Existe uma família de compactos disjuntos  $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$  tal que

$$\mathcal{L}^n \left( \mathbb{R}^n - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \right) = 0$$

e  $f|_{K_i} \in C(K_i)$ , para cada  $i$ .

**Prova da Afirmção:** Para cada  $m \in \mathbb{N}$  seja  $B_m := B(0, m)$ . Considere  $f|_{B_1}$ , pelo *Teorema de Lusin*, existe  $K_1 \subset B_1$  tal que  $\mathcal{L}^n(B_1 - K_1) < 1$  e  $f|_{K_1} \in C(K_1)$ . Olhando para  $f|_{B_2 - K_1}$  existe  $K_2 \subset B_2 - K_1$  tal que  $\mathcal{L}^n((B_2 - K_1) - K_2) = \mathcal{L}^n(B_2 - K_1 \cup K_2) < \frac{1}{2}$  e  $f|_{K_2} \in C(K_2)$ .

Então, para  $m \geq 2$  existe  $K_{m+1} \subset B_{m+1} - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$  tal que  $f|_{K_{m+1}} \in C(K_{m+1})$  e

$$\mathcal{L}^n \left( \left( B_{m+1} - \bigcup_{i=1}^m K_i \right) - K_{m+1} \right) = \mathcal{L}^n \left( B_{m+1} - \bigcup_{i=1}^{m+1} K_i \right) \leq \frac{1}{m+1}.$$



Assim, fazendo  $m \rightarrow \infty$ , vem que

$$\mathcal{L}^n \left( \mathbb{R}^n - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \right) = 0.$$

e  $f|_{K_i} \in C(K_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots$ . O que prova a afirmação.

Agora, observe que a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula, se  $x \in K_i$  então,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) - K_i)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n - K_i))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0. \quad (18)$$

Defina

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R}^n; x \in K_i, \text{ para algum } i \text{ e (18) se verifica}\}.$$

Por construção,  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathcal{A}) = 0$ . Se  $x \in \mathcal{A}$  então  $x \in K_i$  para algum  $i$  e (18) é válida. Seja  $\varepsilon > 0$  pela continuidade de  $f|_{K_i}$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in B(x, \delta) \cap K_i$ ,

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Daí para  $0 < r < \delta$  temos que

$$B(x, \delta) \cap \{|f - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset B(x, r) - K_i.$$

Logo,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{|f - f(x)| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0$$

pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$

$$\text{ap } \lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x).$$

Agora seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  aproximadamente contínua a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Suponhamos sem perda de generalidade que o conjunto dos pontos onde  $f$  não é aproximadamente contínua seja vazio. Pois, do contrário, definiríamos  $g := f|_{\mathbb{R}^n - \mathcal{A}}$ , onde neste caso,  $\mathcal{A}$  denota o conjunto dos pontos onde  $f$  não é aproximadamente contínua.

Com isso, seja  $W \subset \mathbb{R}^m$  aberto. Se  $W \cap f(\mathbb{R}^n) = \emptyset$  não há o que fazer, pois  $f^{-1}(W) = \emptyset$ . Caso contrário, dado  $\varepsilon > 0$  mostraremos que existe um aberto  $O_\varepsilon$  tal que  $f^{-1}(W) \subset O_\varepsilon$  e

$$\mathcal{L}^n(O_\varepsilon - f^{-1}(W)) < \varepsilon.$$

Com efeito, suponhamos primeiro que  $f^{-1}(W)$  é limitado. Dado  $\varepsilon > 0$  para cada  $x \in f^{-1}(W)$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{|f - f(y)| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

Então, para cada  $x \in f^{-1}(W)$  existe  $0 < r_x < \varepsilon$  tal que

$$\mathcal{L}^n(B(x, r_x) \cap \{|f - f(y)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon^n \alpha(n) r_x^n.$$

Dessa forma, a família  $\{B(x, r_x)\}_{x \in f^{-1}(W)}$  é uma cobertura para  $f^{-1}(W)$ . Seja  $r_0 = \frac{1}{2} \sup_{x \in f^{-1}(W)} r_x$ . Então,  $\partial f^{-1}(W) \subset \bigcup_{x \in \partial f^{-1}(W)} B(x, r_0)$ . Dessa forma,

$$\overline{f^{-1}(W)} \subset \left( \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} B(x, r_x) \right) \cup \left( \bigcup_{x \in \partial f^{-1}(W)} B(x, r_0) \right)$$

pela compacidade de  $\overline{f^{-1}(W)}$  existe uma família finita de bola  $\{B_i\}_{i=1}^{N_1}$ ,  $B_i = B(x_i, r_i)$  dessa cobertura tal que

$$\overline{f^{-1}(W)} \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i.$$

Claramente,  $\{B_i\}_{i=1}^{N_1}$  é uma cobertura para  $f^{-1}(W)$ . Então pelo *Teorema da cobertura de Vitali* existe uma família enumerável de bolas disjuntas de  $\{B_i\}_{i=1}^{N_1}$ , isto é,  $\{B_i\}_{i=1}^{N_2}$ , de modo que

$$\bigcup_{i=1}^{N_1} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{N_2} B(x_i, 5r_i).$$

Defina então  $O_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{N_1} B(x_i, 5r_i)$ . Como

$$\bigcup_{i=1}^{N_1} B_i \cap \{y \in W; |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset f^{-1}(W)$$

segue que

$$O_\varepsilon - f^{-1}(W) \subset O_\varepsilon - \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i \cap \{y \in W; |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(O_\varepsilon - f^{-1}(W)) &\leq \mathcal{L}^n(O_\varepsilon) - \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{N_1} B_i \cap \{y \in W; |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \\ &\leq \mathcal{L}^n(O_\varepsilon) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_2} \alpha(n) 5^n r_i^n \\ &< C \varepsilon^n, \end{aligned}$$

onde  $C := \alpha(n) 5^n N_2$ . Portanto, se  $f^{-1}(W)$  é limitado então ó mesmo é  $\mathcal{L}^n$ -mensurável.

Agora suponha  $f^{-1}(W)$  não é limitado, defina para cada  $i$

$$\mathcal{A}_i := f^{-1}(W) \cap B(0, i).$$

cada  $\mathcal{A}_i$  é limitado segue pelo caso anterior que  $\mathcal{A}_i$  é  $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Então

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$$

é  $\mathcal{L}^n$ -mensurável. ■

**Proposição 2.1.** *Seja  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  então, todo ponto de Lebesgue de  $f$  é ponto de continuidade aproximada.*

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  ponto de Lebesgue de  $f$  e  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{|f - f(x)| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} &= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r) \cap \{|f - f(x)| \geq \varepsilon\}} 1 \, dy \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B(x, r) \cap \{|f - f(x)| \geq \varepsilon\}} |f(y) - f(x)| \, dy \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| \, dy, \end{aligned}$$

fazendo  $r \rightarrow 0$  vem o desejado. ■

## 2.6 Teorema da representação de Riesz

O teorema da Representação de Riesz é um resultado crucial para o estudo das Funções de Variação Limitada (BV).

**Lema 2.3.** *Seja  $\mu$  uma medida de Radon em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mu$ -mensurável com suporte compacto no  $\mathbb{R}^n$ . Então,*

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(x); \mu(f^{-1}(x)) > 0, x \in \mathbb{R}\}$$

é enumerável.

*Demonstração.* Defina para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{A}_j = \{f^{-1}(x); x \in \mathbb{R}, \mu(f^{-1}(x)) \in (2^{-j+1}, 2^j]\}.$$

**Afirmção:**  $\mathcal{A}_j$  é finito.

**Prova da Afirmção:** Fixe  $j \in \mathbb{N}$  e suponha por absurdo que  $\text{Card}(\mathcal{A}_j) = \infty$ . Observe

que

$$\begin{aligned}
\infty &> \mu(\text{spt}(f)) \\
&\geq \mu\left(\bigcup_{f^{-1}(x) \in \mathcal{A}_j} \mu(f^{-1}(x))\right) \\
&= \sum_{f^{-1}(x) \in \mathcal{A}_j} \mu(f^{-1}(x)), \quad (f^{-1}(x) \cap f^{-1}(y) = \emptyset, \forall x, y \text{ distintos}) \\
&\geq \text{Card}(\mathcal{A}_j)2^{-j+1}.
\end{aligned}$$

Contradição! Uma vez que  $\mu$  é uma medida de Radon, a medida  $\mu$  de qualquer compacto é finita. Portanto,  $\mathcal{A}_j$  é finito. Em particular,  $\mathcal{A}$  é enumerável, pois,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j.$$

■

**Teorema 2.31.** *Seja  $L : C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear tal que*

$$\sup\{L(f); f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, \text{spt}(f) \subset K\} < \infty \quad (19)$$

para cada  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Então existe uma medida de Radon  $\mu$  sobre  $\mathbb{R}^n$  e uma função  $\mu$ -mensurável,  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

- (i)  $|\sigma(x)| = 1$  quase sempre com respeito a  $\mu$ ,
- (ii)  $L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma \, d\mu$ , para toda  $f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ .

**Definição 2.37.** Chamamos  $\mu$  de medida de variação definida para qualquer aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(V) = \sup\{L(f); f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, \text{spt}(f) \subset V\}. \quad (20)$$

*Demonstração.* Seja  $\mu$  como na definição acima e definamos para  $A \subset \mathbb{R}^n$  arbitrário:

$$\mu = \inf\{\mu(V); A \subset V, V \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto}\}. \quad (21)$$

Mostraremos que  $\mu$  é uma medida. Com efeito, seja  $V$  e  $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$  aberto do  $\mathbb{R}^n$  de modo que

$$V \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

Tomemos  $g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  tal que  $|g| \leq 1$  e  $\text{spt}(g) \subset V$ . Da compacidade do  $\text{spt}(g)$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{spt}(g) \subset \bigcup_{i=1}^k V_i.$$

Por outro lado, seja  $\{\zeta_i\}_{i=1}^k$  uma seqüência finita de funções suaves tal que  $\text{spt}(\zeta_j) \subset V_j$ , com  $1 \leq j \leq k$  e  $\sum_{j=1}^k \zeta_j = 1$ , em  $\text{spt}(g)$ . Logo, podemos escrever  $g$  como

$$g = \sum_{j=1}^k g\zeta_j$$

assim,

$$|\mathbb{L}(g)| = |\mathbb{L}(\sum_{j=1}^k g\zeta_j)| = |\sum_{j=1}^k \mathbb{L}(g\zeta_j)| \leq \sum_{j=1}^k |\mathbb{L}(g\zeta_j)|.$$

Note que para cada  $j \in 1, \dots, k$ , tem se

$$\mu(V_j) = \sup\{\mathbb{L}(g\zeta_j); g\zeta_j \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) | g\zeta_j| \leq 1, \text{spt}(g\zeta_j) \subset V_j\}$$

donde,

$$|\mathbb{L}(g)| \leq \sum_{j=1}^k |\mathbb{L}(g\zeta_j)| \leq \sum_{j=1}^k \mu(V_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \mu(V_j)$$

logo, tomando o supremo com respeito a  $g$ , no lado esquerdo da desigualdade acima, temos que

$$\mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_j). \quad (22)$$

Agora, seja  $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$  uma seqüência arbitrária de conjuntos tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Fixemos  $\varepsilon > 0$ , e escolhamos abertos  $V_j$  tais que  $A_j \subset V_j$  e

$$\mu(V_j) \leq \mu A_j + \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad \text{para cada } j,$$

assim,

$$\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j) + \varepsilon.$$

Com isso, mostramos que  $\mu$  é uma medida.

Seguiremos a demonstração mostrando que  $\mu$  é uma medida de Radon. Para isso, é preciso mostrar que  $\mu$  é uma medida borel regular, e que para cada  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto, tem se  $\mu(K) < \infty$ . Primeiro, provemos que  $\mu$  é uma medida boreliana.

Com efeito, sejam  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  abertos tais que  $\text{dist}(U_1, U_2) > 0$ . Logo, tendo em vista a medida definida em (20), pois  $U_1$  e  $U_2$  são abertos,

$$\mu(U_1 \cup U_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2). \quad (23)$$

Queremos mostrar a igualdade. Para isso, tomemos  $f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ ,  $|f| \leq 1$  e  $\text{spt}(f) \subset U_1 \cup U_2$  e sejam  $\zeta_i$ ,  $i = 1, 2$  funções suaves com  $\text{spt}(\zeta_i) \subset U_i$ ,  $|\zeta_i| \leq 1$  e  $\zeta_1 + \zeta_2 = 1$ . Logo,

$$f = f\zeta_1 + f\zeta_2.$$

Assim,

$$\mu(U_1 \cup U_2) \geq L(f) = L(f\zeta_1) + L(f\zeta_2) \geq \mu(U_1) + \mu(U_2).$$

Daí, e de (23), a igualdade segue.

Agora, dados  $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$  arbitrários, tal que  $\text{dist}(A_1, A_2) > 0$  temos que

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2). \quad (24)$$

Mostraremos que vale a igualdade. Para isso, seja  $\varepsilon > 0$ , e  $V \subset \mathbb{R}^n$  aberto, tal que  $A_1 \cup A_2 \subset V$  e

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(V) + \varepsilon.$$

Seja  $r = d(A_1, A_2) > 0$ . Logo, definamos

$$\overline{V}_1 = \bigcup_{x \in A_1} B\left(x, \frac{r}{2}\right) \quad \text{e} \quad \overline{V}_2 = \bigcup_{x \in A_2} B\left(x, \frac{r}{2}\right)$$

e tomemos  $V_i = \overline{V}_i \cap V$ ,  $i = 1, 2$ , que são abertos com  $d(V_1, V_2) > 0$  e  $V_i \subset V$ . Desta forma,

$$\mu(V_1) + \mu(V_2) = \mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V) \leq \mu(A_1 \cup A_2) + \varepsilon$$

fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos que

$$\mu(V_1) + \mu(V_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2).$$

Daí e de (24) a igualdade segue. Portanto, pelo *Cr terio de Carathéodory*  $\mu$    uma medida de Borel. Além disso, por (21),  $\mu$    uma medida Borel regular. Pois, dado  $A \subset \mathbb{R}^n$  existem abertos  $V_k$  com  $A \subset V_k$ , de modo que  $V_{k+1} \subset V_k$  e

$$\mu(A) \leq \mu(V_k) \leq \mu(V_k) + \frac{1}{k}.$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(V_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}.$$

Então,

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k\right) \leq \mu(A).$$

Assim,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k\right).$$

Por hipótese, temos que para cada  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto,  $\mu(K) < \infty$ . Portanto,  $\mu$  é uma medida de Radon.

Nosso próximo passo, é introduzir um objeto que será necessário para a continuar a prova do teorema e provar umas propriedades do mesmo. Logo, considere

$$C_c^+(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_c(\mathbb{R}^n); f \geq 0\}$$

e para toda  $f \in C_c^+(\mathbb{R}^n)$ , definamos:

$$\lambda(f) = \sup\{|L(g)|; g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |g| \leq f\}. \quad (25)$$

Note que dadas  $f_1, f_2 \in C_c^+(\mathbb{R}^n)$ , tais que  $f_1 \leq f_2$ , temos que  $\lambda(f_1) \leq \lambda(f_2)$  e para todo  $c > 0$  e  $f \in C_c^+(\mathbb{R}^n)$  segue que  $\lambda(cf) = c\lambda(f)$ . Agora iremos mostrar que dadas  $f_1, f_2 \in C_c^+(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\lambda(f_1 + f_2) = \lambda(f_1) + \lambda(f_2). \quad (26)$$

Com efeito, sejam  $g_1, g_2 \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  tais que  $|g_1| \leq f_1$  e  $|g_2| \leq f_2$ . Temos que

$$f_1 + f_2 \geq |g_1| + |g_2| \geq |g_1 + g_2|. \quad (27)$$

Observe que podemos considerar  $L(g_1)$  e  $L(g_2)$  não negativos. Pois, caso contrário, tendo em vista a linearidade de  $L$  definiríamos,  $\overline{g_1} = -g_1$  e  $\overline{g_2} = -g_2$  e teríamos o desejado. Assim, olhando para (27), tomemos supremo com respeito as  $g_1$  e  $g_2$ , com  $g_1, g_2 \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  temos

$$\lambda(f_1) + \lambda(f_2) \leq \lambda(f_1 + f_2). \quad (28)$$

Por outro lado, tome  $g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  tal que  $|g| \leq f_1 + f_2$  e defina para  $i = 1, 2$

$$g_i = \begin{cases} \frac{f_i g}{f_1 + f_2} & \text{se } f_1 + f_2 > 0, \\ 0 & \text{se } f_1 + f_2 = 0. \end{cases}$$

Não é difícil ver que  $g_i \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  e se  $f_1 + f_2 > 0$  temos que

$$g_1 + g_2 = \frac{f_1 g}{f_1 + f_2} + \frac{f_2 g}{f_1 + f_2} = g \frac{f_1 + f_2}{f_1 + f_2} = g.$$

Além disso, para  $i = 1, 2$

$$|g_i| = \left| \frac{f_i g}{f_1 + f_2} \right| \leq |f_i| \left| \frac{f_1 + f_2}{f_1 + f_2} \right| = |f_i|.$$

Desse modo,

$$|L(g)| = |L(g_1 + g_2)| = |L(g_1) + L(g_2)| \leq |L(g_1)| + |L(g_2)| \leq \lambda(f_1) + \lambda(f_2).$$

Tomando o supremo nas  $g$  temos que

$$\lambda(f_1 + f_2) \leq \lambda(f_1) + \lambda(f_2). \quad (29)$$

De (28) e (29), segue a igualdade, para toda  $f_1, f_2 \in C_c^+(\mathbb{R}^n)$ .

Mostraremos agora que

$$\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \quad f \in C_c^+(\mathbb{R}^n). \quad (30)$$

De fato, seja  $\varepsilon > 0$  e escolhamos

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 2\|f\|_{L^\infty}, \quad t_i \in \mathbb{R}$$

com  $0 < t_i - t_{i-1} < \varepsilon$  e  $\mu(f^{-1}\{t_i\}) = 0$ .

Note que a existência de tais  $t_i$  é garantida pelo Lema (2.3). Dessa forma, seja  $U_j = f^{-1}((t_{j-1}, t_j))$ , observe que  $U_j$  é aberto e  $\mu(U_j) < \infty$ . Como  $\mu$  é uma medida de Radon  $\exists K_j \subset U_j$  compacto tal que

$$\mu(U_j - K_j) < \frac{\varepsilon}{N} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Além disso, existem funções  $g_j \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  com  $|g_j| \leq 1$ ,  $\text{spt}(g_j) \subset U_j$  tal que

$$|L(g_j)| \geq \mu(U_j) - \frac{\varepsilon}{N}$$

tendo em vista a definição de  $\mu$ .

Note ainda que, existem funções  $h_j \in C_c^+(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\text{spt}(h_j) \subset U_j$ ,  $0 \leq h_j \leq 1$  e  $h_j(x) = 1$  para todo  $x \in K_j \cup \text{spt}(g_j)$ . Então,

$$\lambda(h_j) \geq |L(g_j)| \geq \mu(U_j) - \frac{\varepsilon}{N}.$$



Como,

$$\begin{aligned}\lambda(h_j) &= \sup\{|L(g)|; g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |g| \leq h_j\} \\ &\leq \sup\{|L(g)|; g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |g| \leq 1, \text{spt}(g) \subset U_j\} \\ &= \mu(U_j)\end{aligned}$$

segue que,

$$\mu(U_j) - \frac{\varepsilon}{N} \leq \lambda(h_j) \leq \mu(U_j).$$

Doravante, seja

$$A = \left\{ x; f(x) \left( 1 - \sum_{j=1}^N h_j(x) \right) > 0 \right\}.$$

Veja que pela continuidade de  $f$ ,  $A$  é aberto. Agora considere as seguintes estimativas

$$\lambda \left( f - f \sum_{i=1}^N h_i \right) = \sup \left\{ |L(g)|; g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |g| \leq \left( f - f \sum_{j=1}^n h_j \right) \right\}.$$

A princípio temos que

$$f(x) - f(x) \sum_{j=1}^N h_j(x) > 0 \text{ se e somente se } x \in A.$$

Logo,

$$f(x) - f(x) \sum_{j=1}^N h_j(x) = f(x) \left( 1 - \sum_{j=1}^N h_j(x) \right) \leq \|f\|_{L^\infty} \chi_A.$$

Em particular,

$$\left\{ g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m); f - f \sum_{j=1}^N h_j \right\} \subset \left\{ g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) | g| \leq \|f\|_{L^\infty} \chi_A \right\}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\lambda \left( f - f \sum_{j=1}^N h_j \right) &\leq \sup\{|L(g)|; g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |g| \leq \|f\|_{L^\infty} \chi_A\} \\ &= \lambda(\|f\|_{L^\infty} \chi_A) \\ &= \|f\|_{L^\infty} \lambda(\chi_A) \\ &= \|f\|_{L^\infty} \sup\{|L(g)|; g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |g| \leq \chi_A\} \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \sup\{|L(g)|; g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |g| \leq 1, \text{spt}(g) \subset A\}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lambda\left(f - f \sum_{j=1}^N\right) &\leq \|f\|_{L^\infty} \mu(A) \\
&\leq \|f\|_{L^\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathbf{U}_j - \text{spt}(g_j) \cup K_j)\right) \\
&\leq \|f\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathbf{U}_j - \text{spt}(g_j) \cup K_j) \\
&\leq \|f\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathbf{U}_j - \cup K_j) \\
&< \|f\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{N} \\
&= \|f\|_{L^\infty} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\lambda(f) &= \lambda\left(f + f \sum_{j=1}^N h_j - f \sum_{j=1}^N h_j\right) \\
&= \lambda\left(f - f \sum_{j=1}^N h_j\right) + \lambda\left(f \sum_{j=1}^N h_j\right) \\
&\leq \varepsilon \|f\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^N \lambda(fh_j) \\
&\leq \varepsilon \|f\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^N \lambda(t_j h_j) \\
&= \varepsilon \|f\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^N t_j \lambda(h_j) \\
&\leq \varepsilon \|f\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^N t_j \mu(\mathbf{U}_j).
\end{aligned} \tag{31}$$

Por outro lado, de (31),

$$\lambda\left(f \sum_{j=1}^N h_j\right) = \lambda(f) - \lambda\left(f - f \sum_{j=1}^N h_j\right) \leq \lambda(f).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lambda(f) &\geq \sum_{j=1}^N \lambda(fh_j) \\
&\geq \sum_{j=1}^N \lambda(t_{j-1}h_j) \\
&= \sum_{j=1}^N t_{j-1}\lambda(h_j) \\
&\geq \sum_{j=1}^N t_{j-1} \left( \mu(\mathbf{U}_j) - \frac{\varepsilon}{N} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N t_{j-1}\mu(\mathbf{U}_j) - \sum_{j=1}^N t_{j-1} \frac{\varepsilon}{N} \\
&\geq \sum_{j=1}^N t_{j-1}\mu(\mathbf{U}_j) - t_N\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por fim, observe que

$$\sum_{j=1}^N t_{j-1}\mu(\mathbf{U}_j) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \sum_{j=1}^N t_j\mu(\mathbf{U}_j). \quad (32)$$

Multiplicando (32), por  $-1$ , temos

$$-\sum_{j=1}^N t_{j-1}\mu(\mathbf{U}_j) \geq -\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \geq -\sum_{j=1}^N t_j\mu(\mathbf{U}_j). \quad (33)$$

Além disso,

$$\sum_{j=1}^N t_{j-1}\mu(\mathbf{U}_j) - t_N\varepsilon \leq \lambda(f) \leq \sum_{j=1}^N t_j\mu(\mathbf{U}_j) + \varepsilon\|f\|_{L^\infty}. \quad (34)$$

Logo, somando (33) com (34), vem que

$$\sum_{j=1}^N t_{j-1}\mu(\mathbf{U}_j) - \sum_{j=1}^N t_j\mu(\mathbf{U}_j) - t_N\varepsilon \leq \lambda(f) - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \sum_{j=1}^N t_j\mu(\mathbf{U}_j) - \sum_{j=1}^N t_{j-1}\mu(\mathbf{U}_j) + \varepsilon\|f\|_{L^\infty}$$

então,

$$\sum_{j=1}^N (t_{j-1} - t_j)\mu(\mathbf{U}_j) - t_N\varepsilon \leq \lambda(f) - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1})\mu(\mathbf{U}_j) + \varepsilon\|f\|_{L^\infty}$$

assim,

$$-\left(\sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1})\mu(\mathbf{U}_j) + t_N \varepsilon + \varepsilon \|f\|_{L^\infty}\right) \leq \lambda(f) - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1})\mu(\mathbf{U}_j) + \varepsilon \|f\|_{L^\infty} + \varepsilon t_N$$

e daí,

$$\begin{aligned} |\lambda(f) - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu| &\leq \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1})\mu(\mathbf{U}_j) + t_N \varepsilon + \varepsilon \|f\|_{L^\infty} \\ &= \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1})\mu(\mathbf{U}_j) + 3\varepsilon \|f\|_{L^\infty} \\ &\leq \sum_{j=1}^N \varepsilon \mu(\mathbf{U}_j) + 3\varepsilon \|f\|_{L^\infty} \\ &\leq \varepsilon \mu(\text{spt}(f)) + 3\varepsilon \|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de  $\varepsilon$  temos o desejado.

Usaremos isso para mostrar a existência da aplicação  $\mu$ -mensurável,  $\sigma$  de  $\mathbb{R}^n$  no  $\mathbb{R}^m$  tal que

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma d\mu.$$

De fato, seja  $e \in \mathbb{R}^m$  com  $|e| = 1$ . Definamos

$$\lambda_e : C_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde  $f \longmapsto \lambda_e(f) = L(fe)$ .

Pela linearidade de  $L$  temos a de  $\lambda_e$ . Além disso,

$$\begin{aligned} |\lambda_e(f)| &= |L(fe)| \\ &\leq \sup\{|L(g)|; g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), |g| \leq 1\} \\ &= \lambda(|f|) = \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Claramente,  $|\lambda_e(f)| \leq \|f\|_1, \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ . O teorema de Hahn-Banach garante a existência de uma extensão para  $\lambda_e$ . Com isso, a estenderemos para  $L_\mu^1(\mathbb{R}^n)$ . Ou seja,

$$\overline{\lambda_e} : L_\mu^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde  $f \longmapsto \overline{\lambda_e}(f) = (fe)$ .

Como  $\overline{\lambda_e} \in (L_\mu^1(\mathbb{R}^n))'$ , temos que existe pelo Teorema (2.20) uma função em

$L_\mu^\infty(\mathbb{R}^n)$ , a denotemos por  $\sigma_e$  tal que

$$\overline{\lambda_e}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \sigma_e d\mu, \quad \forall f \in L_\mu^1(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n).$$

Em particular, para toda  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ .

Seja agora  $\{e_i\}_{i=1}^m$  a base canônica de  $\mathbb{R}^m$  e  $f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ . Logo,

$$\begin{aligned} L(f) &= L\left(\sum_{j=1}^m \langle f, e_j \rangle e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^m L((f \cdot e_j) e_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \overline{\lambda_{e_j}}(f \cdot e_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot e_j) \sigma_{e_j} d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m (f \cdot e_j) \sigma_{e_j} d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma d\mu, \end{aligned}$$

onde  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $\sigma(x) = (\sigma_{e_1}(x), \sigma_{e_2}(x), \dots, \sigma_{e_m}(x))$ .

Por fim, mostremos que  $|\sigma| = 1$ , quase sempre com respeito a  $\mu$ . Com efeito, seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $\mu(U) < \infty$ . Por definição,

$$\mu(U) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma d\mu; f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, \text{spt}(f) \subset U \right\}.$$

Uma vez que  $\sigma$  é  $\mu$ -mensurável, podemos construir, usando o Corolário 1 do Teorema de Lusin, uma sequência  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  com  $\text{spt}(f_k) \subset U$  e  $|f_k|$  para todo  $k$  tal que

$$f_k \cdot \sigma \rightarrow |\sigma|$$

quase sempre com respeito a  $\mu$ .

Como  $|\sigma| \in L_\mu^\infty(\mathbb{R}^n)$ , temos que  $|f_k \cdot \sigma| \leq \|\sigma\|_\infty$ . Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_U |\sigma| d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k \cdot \sigma d\mu.$$

Mas, para cada  $k$ ,

$$\int_{\mathbf{U}} f_k \cdot \sigma d\mu \leq \mu(\mathbf{U}).$$

Logo,

$$\int_{\mathbf{U}} |\sigma| d\mu \leq \mu(\mathbf{U}). \quad (35)$$

Por outro lado, tomando  $f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  e  $|f| \leq 1$ ,  $\text{spt}(f) \subset \mathbf{U}$ , obtemos que

$$\int_{\mathbf{U}} f \cdot \sigma d\mu \leq \left| \int_{\mathbf{U}} f \cdot \sigma d\mu \right| \leq \int_{\mathbf{U}} |f \cdot \sigma| d\mu \leq \int_{\mathbf{U}} |\sigma| d\mu.$$

Assim,

$$\mu(\mathbf{U}) \leq \int_{\mathbf{U}} |\sigma| d\mu. \quad (36)$$

Como  $\mu(\mathbf{U}) = \int_{\mathbf{U}} 1 d\mu$ , temos de (35) e (36) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{U}} |\sigma| d\mu &= \int_{\mathbf{U}} 1 d\mu \\ \Leftrightarrow \int_{\mathbf{U}} |\sigma| - 1 d\mu &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $|\sigma| - 1 = 0$ , ou seja,  $|\sigma| = 1$  quase sempre com respeito a  $\mu$ . ■

**Corolário 2.8.** *Seja  $L : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  linear e não negativo, de modo que*

$$L(f) \geq 0, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), f \geq 0.$$

*Então, existe uma medida  $\mu$  de Radon sobre  $\mathbb{R}^n$  tal que*

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

*Demonstração.* Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto e seja  $\zeta$  uma função suave com suporte compacto em  $\mathbb{R}^n$  com  $0 \leq \zeta \leq 1$  e  $\zeta = 1$  sobre  $K$ . Agora, dada  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  com  $\text{spt}(f) \subset K$ , definamos

$$g := \|f\|_\infty \zeta - f \geq 0.$$

Em particular,  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Logo, avaliando  $g$  em  $L$ , temos que

$$0 \leq L(g) = L(\|f\|_\infty \zeta - f) = \|f\|_\infty L(\zeta) - L(f).$$

Portanto,  $L(f) \leq C\|f\|_\infty$  onde  $C = L(\zeta)$ . Dessa forma, pelo Teorema de Hahn-

Banach, podemos estender  $L$  para

$$\bar{L} : C_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Além disso se  $|f| \leq 1$ , então,

$$L(f) \leq C.$$

Logo,

$$\sup\{L(f); f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), |f| \leq 1, \text{spt}(f) \subset K\} < \infty.$$

Usando um argumento de densidade podemos exprimir o resultado acima para  $\bar{L}$ . Com isso, estamos nas hipóteses do Teorema (2.31). Portanto, existe uma medida  $\mu$  de Radon e uma função  $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  com  $|\sigma| = 1$  quase sempre com respeito  $\mu$ , tal que

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma d\mu \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Pela hipótese, segue que  $\sigma = 1$ . Dessa forma, temos o desejado. ■

## 2.7 Convergência fraca e compacidade para medidas de Radon

**Definição 2.38.** *Sejam  $\mu$  e  $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$  medidas de Radon em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $\mu_k$  converge fraco para  $\mu$ , denotamos por  $\mu_k \rightharpoonup \mu$ , se para toda  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

**Teorema 2.32.** *Sejam  $\mu$  e  $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$  medidas de Radon em  $\mathbb{R}^n$ . São equivalentes:*

- (i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$  para toda  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$
- (ii)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K) \leq \mu(K)$  para cada compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  e  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U) \geq \mu(U)$  para cada aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ .
- (iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B) = \mu(B)$  para cada boreliano  $B \subset \mathbb{R}^n$  com  $\mu(\partial B) = 0$ .

*Demonstração.* Façamos (i)  $\Rightarrow$  (ii). Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$  seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $K \subset U$  compacto. Seja  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  tal que  $0 \leq f \leq 1$ ,  $\text{spt}(f) \subset U$ , e  $f = 1$  em  $K$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \int_K f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_U f d\mu_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_U 1 d\mu_k \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U). \end{aligned}$$

Pela regularidade de  $\mu$ ,

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K); K \subset U \text{ compacto}\} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U).$$

Por outro lado, de  $\mu_k(K) = \int_K 1 \, d\mu_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k$  segue que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_U f \, d\mu \leq \int_U 1 \, d\mu = \mu(U).$$

Da regularidade de  $\mu$  vem que

$$\mu(K) = \inf\{\mu(U); K \subset U \text{ aberto}\}.$$

Então,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K) \leq \mu(K).$$

Agora façamos (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Seja  $B \subset \mathbb{R}^n$  um boreliano limitado tal que  $\mu(\partial B) = 0$ . Então, sendo  $B^\circ := \text{int}(B)$ ,

$$\mu(B) = \mu(B - B^\circ \cup B) = \mu(B - B^\circ) + \mu(B^\circ) = \mu(B^\circ).$$

Usando (ii), temos que

$$\mu(B) = \mu(B^\circ) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B^\circ) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\bar{B}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\bar{B}) \leq \mu(\bar{B}) = \mu(B \cup \partial B) \leq \mu(B).$$

Daí,

$$\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B).$$

Por fim, (iii)  $\Rightarrow$  (i). Dado  $\varepsilon > 0$  seja  $f \in C^+(\mathbb{R}^n)$ . Seja  $R > 0$  tal que  $\text{spt}(f) \subset B(0, R)$  e  $\mu(\partial B(0, R)) = 0$ . Podemos garantir a existência desse  $R > 0$ . Observe que da compacidade do suporte de  $f$ , existe um  $R_0 > 0$  tal que,  $\text{spt}(f) \subset B(0, R_0)$ .

**Afirmção:**  $\mathcal{A} = \{R \geq R_0; \mu(\partial B(0, R)) > 0\}$  é enumerável.

**Prova da Afirmção:** Defina a priori, para cada  $q \in \mathbb{Q} \cap (R_0, \infty]$ ,

$$\mathcal{A}_q := \{q > R \geq R_0; \mu(\partial B(0, R)) > 0\}$$

claramente,  $\mathcal{A} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (R_0, \infty]} \mathcal{A}_q$ .

Agora fixado  $q \in \mathbb{Q} \cap (R_0, \infty]$ , seja para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{A}_{q,j} := \{q > R \geq R_0; 2^{-j+1} < \mu(\partial B(0, R)) \leq 2^j\}.$$

Suponhamos por absurdo que  $\text{Card}(\mathcal{A}_{q,j}) = \infty$ . Então,

$$\mu(B(0, q)) \geq \mu\left(\bigcup_{R \in \mathcal{A}_{q,j}} \mu(\partial B(0, R))\right) = \sum_{R \in \mathcal{A}_{q,j}} \mu(\partial B(0, R)) > \sum_{R \in \mathcal{A}_{q,j}} 2^{-j+1} = \text{Card}(\mathcal{A}_{q,j})2^{-j+1}.$$



Assim,  $\mu(B(0, q)) = \infty$ . Absurdo! Pois,  $\mu$  é uma medida de Radon. Logo, temos que  $\text{Card}(\mathcal{A}_{q,j}) < \infty$ . Dessa forma, como  $\mathcal{A}_q = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{q,j}$  vemos que  $\mathcal{A}_q$  é enumerável. Em particular,  $\mathcal{A}$  é enumerável. O que prova a afirmação.

Como  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$  é enumerável, temos que o mesmo possui interior vazio. Com isso, se  $R_0$  não é tal que  $\mu(\partial B(0, R_0)) = 0$ , então  $R_0 \in \mathcal{A}$ . Então, existe um  $R > R_0$  pertencente a uma vizinhança de  $R_0$  tal que  $R \in \mathbb{R} - \mathcal{A}$ . O que garante a existência do  $R$  com a propriedade em questão.

Agora, tomemos  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$  tal que  $t_N := 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  e  $0 < t_i - t_{i-1} < \varepsilon$  e  $\mu(f^{-1}\{t_i\}) = 0$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . A existência desses  $t_i$  é garantida, pelo Lema (2.3). Agora, defina para  $i \geq 2$ ,  $B_i := f^{-1}(t_{i-1}, t_i]$ .

**Afirmção:**  $\mu(\partial B_i) = 0$  para  $i = 2, 3, \dots, N$ .

**Prova da Afirmção:** Note que

$$\begin{aligned}\overline{B_i} &= \overline{f^{-1}(t_{i-1}, t_i)} \cup f^{-1}\{t_i\} \\ B_i &= f^{-1}(t_{i-1}, t_i) \cup f^{-1}\{t_i\} \\ f^{-1}[t_{i-1}, t_i] &= f^{-1}(t_{i-1}, t_i) \cup f^{-1}\{t_{i-1}\} \cup f^{-1}\{t_i\}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\mu(\overline{B_i}) &= \mu(\overline{f^{-1}(t_{i-1}, t_i)}) \\ \mu(B_i) &= \mu(f^{-1}(t_{i-1}, t_i)) \\ \mu(f^{-1}[t_{i-1}, t_i]) &= \mu(f^{-1}(t_{i-1}, t_i)).\end{aligned}$$

Por outro lado, temos também que

$$\mu(\overline{B_i}) = \mu(\overline{f^{-1}[t_{i-1}, t_i]}).$$

Como  $f^{-1}[t_{i-1}, t_i]$  é fechado, segue que  $f^{-1}[t_{i-1}, t_i] = \overline{f^{-1}[t_{i-1}, t_i]}$ . Então,  $\mu(\overline{B_i}) = \mu(f^{-1}[t_{i-1}, t_i])$ . Pelas igualdades já estabelecidas,

$$\mu(B_i) = \mu(\overline{B_i}),$$

donde vem que  $\mu(\partial B_i) = 0$ .

Prosseguindo, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N t_{i-1} \mu_k(B_i) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \leq \sum_{i=2}^N t_i \mu_k(B_i) + t_1 \mu_k(B_1) \\ \Rightarrow \sum_{i=2}^N t_{i-1} \mu_k(B_i) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \leq \sum_{i=2}^N t_i \mu_k(B_i) + t_1 \mu_k(B(0, R)). \end{aligned}$$

De maneira similar, vem que

$$\sum_{i=2}^N t_{i-1} \mu(B_i) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \leq \sum_{i=2}^N t_i \mu(B_i) + t_1 \mu(B(0, R)).$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^N t_{i-1} \mu_k(B_i) - t_i \mu(B_i) - t_1 \mu(B(0, R)) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \leq \sum_{i=2}^N t_i \mu_k(B_i) \\ &\quad - t_{i-1} \mu(B_i) \\ &\quad + t_1 \mu_k(B(0, R)) \\ - \left( \sum_{i=2}^N t_i \mu(B_i) - t_{i-1} \mu_k(B_i) + t_1 \mu(B(0, R)) \right) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \leq \sum_{i=2}^N t_i \mu_k(B_i) \\ &\quad - t_{i-1} \mu(B_i) \\ &\quad + t_1 \mu_k(B(0, R)) \end{aligned}$$

Passando o “lim sup” na desigualdade acima temos por (iii) que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} - \left( \sum_{i=2}^N t_i \mu(B_i) - t_{i-1} \mu_k(B_i) + t_1 \mu(B(0, R)) \right) = - \left( \sum_{i=2}^N t_i \mu(B_i) - t_{i-1} \mu(B_i) + t_1 \mu(B(0, R)) \right)$$

e

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^N t_i \mu_k(B_i) - t_{i-1} \mu(B_i) + t_1 \mu_k(B(0, R)) = \sum_{i=2}^N t_i \mu(B_i) - t_{i-1} \mu(B_i) + t_1 \mu(B(0, R)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left| \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| &\leq \sum_{i=2}^N t_i \mu(B_i) - t_{i-1} \mu(B_i) + t_1 \mu(B(0, R)) \\
&= \sum_{i=2}^N (t_i - t_{i-1}) \mu(B_i) + t_1 \mu(B(0, R)) \\
&< \sum_{i=2}^N \varepsilon \mu(B_i) + t_1 \mu(B(0, R)) \\
&< \varepsilon \mu(B(0, R)) + \varepsilon \mu(B(0, R)) \\
&= 2\varepsilon \mu(B(0, R)).
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$  temos que

$$\left| \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| = 0.$$

Assim,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right) = 0.$$

Note que (iii) garante essa mesma estimativa para o “lim inf”, isto é,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right) = 0.$$

Então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$

Assim, se  $f$  for contínua com suporte compacto no  $\mathbb{R}^n$  e não negativa, temos que (iii)  $\Rightarrow$  (i). Para o caso geral, seja  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  então, note que  $f^+$  e  $f^-$  também pertence a  $C_c(\mathbb{R}^n)$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - f^- \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - f^- \, d\mu \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, d\mu \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, d\mu \right|.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| = 0.$$

Como

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| \geq 0.$$

Temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$

O que finaliza a prova do teorema. ■

**Teorema 2.33** (Compacidade Fraca para medidas de Radon). *Seja  $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$  uma seqüência de medidas de Radon em  $\mathbb{R}^n$  tal que*

$$\sup_k \mu_k(K) < \infty$$

para cada compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Então, existe uma subsequência  $\{\mu_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$  tal que

$$\mu_{k_j} \rightharpoonup \mu.$$

*Demonstração.* Seja  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  um subconjunto denso de  $C_c(\mathbb{R}^n)$  e suponhamos que

$$\sup_k \mu_k(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

Defina para cada  $j$ ,  $x_j = \int_{\mathbb{R}^n} f_1 \, d\mu_j$ . Então fixado  $j$

$$|x_j| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_1 \, d\mu_j \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_1| \, d\mu_j \leq \|f_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mu_j(\mathbb{R}^n) \leq \|f_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sup_j \mu_j(\mathbb{R}^n) < \infty. \quad (37)$$

Logo,  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  é uma seqüência de números reais limitada. Logo, existem  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  e uma subsequência de  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  a qual denotaremos por  $\{x_j^1\}_{j=1}^{\infty}$ . De modo que  $x_j^1 \rightarrow \alpha_1$ . Evidentemente,  $\{x_j^1\}_{j=1}^{\infty}$  está induzida por uma subsequência de  $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$  a qual denotaremos por  $\{\mu_j^1\}_{j=1}^{\infty}$ .

Se ao invés de considerarmos  $f_1$  na construção de  $x_j$ , considerarmos  $f_2$  e no lugar de  $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$  considerarmos a subsequência  $\{\mu_j^1\}_{j=1}^{\infty}$  obteremos seguindo o mesmo raciocínio, uma subsequência  $\{\mu_j^2\}_{j=1}^{\infty}$  e um número real  $\alpha_2$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_2 \, d\mu_j^2 \rightarrow \alpha_2$$

quando  $j \rightarrow \infty$ . Indutivamente para  $k \geq 3$  existe uma subsequência  $\{\mu_j^k\}_{j=1}^{\infty}$  de  $\{\mu_j^{k-1}\}_{j=1}^{\infty}$  e um  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha_2$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu_j^k \rightarrow \alpha_k$$

quando  $j \rightarrow \infty$ .

Observe que, por construção

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 \, d\mu_j^k \rightarrow \alpha_1$$

quando  $j \rightarrow \infty$  para todo  $k \geq 1$ . Mais geral,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_i \, d\mu_j^k \rightarrow a_i$$

quando  $j \rightarrow \infty$  para todo  $k \geq i$ .

Dessa forma, definamos  $\nu_j := \mu_j^j$ . Fixemos  $k_0 \geq 1$  então, para  $j \geq k_0$ ,  $\nu_j \in \{\mu_j^{k_0}\}_{j=1}^\infty$ , em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{k_0} \, d\nu_j \rightarrow a_{k_0}$$

quando  $j \rightarrow \infty$ . Ou seja, dado  $k \geq 1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\nu_j \rightarrow a_k$$

quando  $j \rightarrow \infty$ .

Assim, construímos uma candidata a subsequência desejada. Caminharemos para mostrar que  $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$  é de fato tal subsequência.

Definamos,  $\mathcal{C} := \{f_k\}_{k=1}^\infty$  e o funcional linear  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f_k \mapsto L(f_k) = a_k$ . Vemos, de maneira similar a (37), que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu_j^k \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k| \, d\mu_j^k \leq \|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mu_j^k(\mathbb{R}^n) \leq \sup_j \mu_j(\mathbb{R}^n) \|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Fazendo  $j \rightarrow \infty$  temos que

$$|L(f_k)| \leq C \|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

onde  $C := \sup_j \mu_j(\mathbb{R}^n)$ .

Então, pelo *Teorema de Hahn-Banach* existe uma extensão para o funcional linear  $L$ . Em particular, extenderemos o funcional  $L$  para o funcional  $\bar{L} : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , usando a densidade de  $\mathcal{C}$  em  $C_c(\mathbb{R}^n)$ . Isto é, dada  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  temos que existe  $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{C}$  tal que  $f_{k_j}$  converge uniformemente para  $f$ . Então defina,

$$\bar{L}(f) := \lim_{j \rightarrow \infty} L(f_{k_j}).$$

Pela desigualdade acima, isto é,  $|L(f_k)| \leq C \|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ , temos que  $\bar{L}$  está bem definido. Além disso,

$$|\bar{L}(f)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |L(f_{k_j})| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} C \|f_{k_j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Dessa desigualdade acima segue que para cada  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto,

$$\sup\{\bar{L}(f); f \in C_c(\mathbb{R}^n), |f| \leq 1, \text{spt}(f) \subset K\} < \infty.$$

Então, pelo *Teorema da Representação de Riez* existe uma medida  $\bar{\mu}$  de Radon e uma função  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|\sigma(x)| = 1$  para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$  com respeito a  $\bar{\mu}$ , e

$$\bar{L}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \sigma \, d\bar{\mu} = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu,$$

para toda  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  onde  $\mu := \bar{\mu}|_{\sigma}$ .

**Afirmção:**  $\nu_j \rightarrow \mu$ .

**Prova da Afirmção:** Com efeito, seja  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ , por densidade de  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  existe uma subsequência  $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$  tal que  $f_{k_i} \rightarrow f$  uniformemente. Em particular, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $i_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\forall i \geq i_0$ ,

$$\|f - f_{k_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \text{spt}(f_{k_i}) \subset \text{spt}(f).$$

Fixado  $i \in \mathbb{N}$ , temos para o mesmo  $\varepsilon > 0$  existe um  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall j \geq j_0$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_i} \, d\nu_j - a_{k_i} \right| < \varepsilon.$$

Tomemos  $J_0 = \max\{i_0, j_0\}$ , então, para  $i, j \geq J_0$ , segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\nu_j - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\nu_j + \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_i} \, d\nu_j - \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_i} \, d\nu_j - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_{k_i}) \, d\nu_j \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_i} \, d\nu_j - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_{k_i}) \, d\nu_j \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_i} \, d\nu_j - \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_i} \, d\mu \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_{k_i}) \, d\mu \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_{k_i}) \, d\nu_j \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_i} \, d\nu_j - a_{k_i} \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_{k_i}) \, d\mu \right| \\ &< \|f - f_{k_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \nu_j(\mathbb{R}^n) + \varepsilon + \left| \int_{\text{spt}(f)} (f - f_{k_i}) \, d\mu \right| \\ &< \varepsilon C + \varepsilon + \|f - f_{k_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mu(\text{spt}(f)) \\ &< \varepsilon C + \varepsilon + \varepsilon \mu(\text{spt}(f)) \\ &= \varepsilon(C + 1 + \mu(\text{spt}(f))). \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\nu_j - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| = 0.$$

Como  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  foi qualquer. Segue a afirmação. Para o caso geral temos que nem

sempre é verdade a restrição que fizemos inicialmente. Contudo, temos por hipótese que

$$\sup_k \mu_k(K) < \infty$$

para cada  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Com isso, defina para  $k=1, 2, \dots$

$$\mu_k^1 := \mu_k|_{B(0,1)}$$

e use um argumento diagonal. ■

**Definição 2.39.** Uma sequência  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  em  $L^p(\mathbf{U})$ ,  $1 \leq p < \infty$  converge fraco para  $f$  em  $L^p(\mathbf{U})$  escrevemos  $f_k \rightharpoonup f$  se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{U}} f_k g \, dx = \int_{\mathbf{U}} f g \, dx$$

para toda  $g \in L^q(\mathbf{U})$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 < q \leq \infty$ .

**Teorema 2.34** (Compacidade fraca em  $L^p$ ). Suponhamos  $1 < p < \infty$ . Seja  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  uma sequência de funções em  $L^p(\mathbf{U})$ ,  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$  aberto, tal que

$$\sup_k \|f_k\|_{L^p(\mathbf{U})} < \infty.$$

Então, existe uma subsequência  $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$  e uma função  $f \in L^p(\mathbf{U})$  tal que  $f_{k_j} \rightharpoonup f$  em  $L^p(\mathbf{U})$ .

*Demonstração.* Se  $\mathbf{U} \neq \mathbb{R}^n$  estenderemos cada função  $f_k$  para ser 0 em  $\mathbb{R}^n - \mathbf{U}$ . Disso podemos assumir sem perda de generalidade que  $\mathbf{U} = \mathbb{R}^n$ . Além disso, podemos assumir sem perda de generalidade que para cada  $k$   $f_k \geq 0$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p.. Caso contrário, aplicaríamos o que segue para  $f_k^+$  e  $f_k^-$ . Com isso, defina para cada  $k$ ,

$$\mu_k := \mathcal{L}^n|_{f_k}$$

então, para cada  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto, note que

$$\mu_k(K) = \int_K f_k \, dx \leq \|f_k\|_{L^p(K)} \mathcal{L}^n(K)^{1-\frac{1}{p}} \leq \sup_k \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}^n(K)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Daí,

$$\sup_k \mu_k(K) < \infty$$

para cada  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto.

Assim, pelo teorema anterior existe  $\{\mu_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$  e  $\mu$  tal que

$$\mu_{k_j} \rightharpoonup \mu$$

quando  $j \rightarrow \infty$ .

**Afirmação:**  $\mu \ll \mathcal{L}^n$ .

**Prova da Afirmação:** De fato, seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  limitado tal que  $\mathcal{L}^n(A) = 0$ . Fixemos  $\varepsilon > 0$  e tomemos,  $V \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado tal que  $A \subset V$  e  $\mathcal{L}^n(V) < \varepsilon$ . Pela regularidade de  $\{\mu_{k_j}\}_{j=1}^\infty$  segue que

$$\mu(A) \leq \mu(V) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu(V) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_V f_{k_j} \, d\mu$$

pela *Desigualdade de Hölder*,

$$\mu(A) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \left( \int_V f_{k_j}^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} (\mathcal{L}^n(V))^{1-\frac{1}{p}} < \sup_k \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \varepsilon^{1-\frac{1}{p}}$$

pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$ , temos que  $\mu(A) = 0$ . Logo, segue a afirmação.

Portanto, pelo *Teorema da Diferenciação de Medidas de Radon* temos que existe  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\mu(A) = \int_A f \, d\mu$$

para todo  $A \subset \mathbb{R}^n$  boreliano.

**Afirmação:**  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Prova da Afirmação:** Com efeito, seja  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ . Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f_{k_j} \, d\mu$$

pela desigualdade de Holder, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \, d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j}^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \, d\mu \leq \sup_k \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

onde,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $1 < q < \infty$ .

Assim,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \, d\mu; \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \right\} < \infty.$$

**Afirmação:**  $f_{k_j} \rightarrow f$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Prova da Afirmação:** Sabemos que



$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} \varphi \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx$$

para toda  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ .

Dada  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$  e  $\varepsilon > 0$  existe  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|\varphi - g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Logo, tendo em vista a desigualdade de Holder,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} g \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f g \, dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f g \, dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} (\varphi - g) \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f (\varphi - g) \, dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} (\varphi - g) \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx \right| + \|\varphi - g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \sup_k \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) \\ &< \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx \right| + \varepsilon (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sup_k \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}). \end{aligned}$$

Passando o “lim sup” vem que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} g \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f g \, dx \right| < \varepsilon (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sup_k \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}).$$

Pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$ . Temos que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} g \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f g \, dx \right| = 0.$$

Então,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_j} g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f g \, dx.$$

Pela arbitrariedade da  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  temos o desejado. ■

## 2.8 Medida de Hausdorff

**Definição 2.40.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,  $0 < \delta \leq \infty$ . Defina*

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(C_j)}{2} \right)^s ; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam}(C_j) \leq \delta \right\}$$

onde  $\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$ . Com  $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por,  $\Gamma(s) := \int_0^{\infty} \exp(-x)x^{s-1} dx$ .  
Assim, para  $A$  e  $s$  como acima, define

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(A).$$

Nós chamamos  $\mathcal{H}^s$  de medida  $s$ -dimensional de Hausdorff em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.35.**  $\mathcal{H}^s$  é uma medida Borel regular, ( $0 \leq s < \infty$ ).

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 61. ■

**Teorema 2.36** (Propriedades Elementares da Medida de Hausdorff).

- (i)  $\mathcal{H}^0$  é a medida de contagem,
- (ii)  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$  em  $\mathbb{R}$ ,
- (iii)  $\mathcal{H}^s = 0$  em  $\mathbb{R}^n$  para todo  $s > n$ ,
- (iv)  $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$  para todo  $\lambda > 0$ , e  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,
- (v)  $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$  para cada isometria afim,  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 63. ■

**Lema 2.4.** Suponha  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{H}_{\delta}^s(A) = 0$  para algum  $0 < \delta \leq \infty$ . Então,  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ .

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 64. ■

**Lema 2.5.** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $0 \leq s < t < \infty$ .

- (i) Se  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ , então  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ ,
- (ii) Se  $\mathcal{H}^t(A) > 0$ , então  $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ .

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 65. ■

**Definição 2.41.** A dimensão de Hausdorff de um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é definida por

$$\mathcal{H}_{\dim}(A) = \inf\{0 \leq s < \infty; \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

**Teorema 2.37.**  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 70. ■

## 2.9 Fórmulas da área e coarea

**Definição 2.42.** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  é chamada Lipschitz se existe  $C > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

para todo  $x, y \in A$ . Além disso, se  $f$  é Lipschitz, definimos

$$\text{Lip}(f) := \sup_{\substack{x, y \in A \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Dizemos que  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  é localmente Lipschitz se para cada  $K \subset A$  compacto, existe  $C_K > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C_K |x - y|$$

para todo  $x, y \in K$ .

**Teorema 2.38** (Extensão de funções Lipschitz). *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lipschitz. Então existe uma função  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que*

- (i)  $\bar{f} = f$  em  $A$ ,
- (ii)  $\text{Lip}(\bar{f}) \leq \sqrt{m} \text{Lip}(f)$ .

*Demonstração.* Inicialmente seja  $m = 1$ . Então,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é Lipschitz. Defina,  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\bar{f}(x) := \inf_{a \in A} \{f(a) + \text{Lip}(f)|x - a|\}.$$

Se  $b \in A$ , temos que

$$\bar{f}(b) = \inf_{a \in A} \{f(a) + \text{Lip}(f)|b - a|\}.$$

Note que

$$f(b) \leq f(x) + \text{Lip}(f)|b - x|$$

para todo  $x \in A$ . Então

$$f(b) \leq \inf_{a \in A} \{f(a) + \text{Lip}(f)|b - a|\}$$

como  $f(b) \in \{f(a) + \text{Lip}(f)|b - a|; a \in A\}$ , temos que

$$\bar{f}(b) = f(b).$$

Logo,  $\bar{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in A$ .

Agora seja  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \inf_{a \in A} \{f(a) + \text{Lip}(f)|x - a|\} \\ &\leq \inf_{a \in A} \{f(a) + \text{Lip}(f)(|x - y| + |y - a|)\} \\ &\leq \inf_{a \in A} \{f(a) + \text{Lip}(f)|y - a|\} + \text{Lip}(f)|x - y| \\ &= \bar{f}(y) + \text{Lip}(f)|x - y|. \end{aligned}$$

Então,

$$\bar{f}(x) - \bar{f}(y) \leq \text{Lip}(f)|x - y|.$$

De maneira similar, vemos que

$$\bar{f}(y) - \bar{f}(x) \leq \text{Lip}(f)|x - y|.$$

Logo,

$$\bar{f}(x) - f(y) \geq -\text{Lip}(f)|x - y|.$$

Portanto,

$$|f(x) - f(y)| \leq \text{Lip}(f)|x - y|.$$

Daí,  $\text{Lip}(\bar{f}) \leq \text{Lip}(f)$ .

Para o caso geral, seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f := (f_1, f_2, \dots, f_m)$ . Definamos  $\bar{f} := (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m)$ . Isto é, para  $i = 1, 2, \dots, m$

$$f_i(x) = \inf_{a \in A} \{f_i(a) + \text{Lip}|x - a|\}.$$

Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , então,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|^2 &= \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m (\text{Lip}(f))^2 |x_i - y_i|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m (\text{Lip}(f))^2 |x - y|^2 \\ &= m(\text{Lip}(f))^2 |x - y|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq \sqrt{m} \text{Lip}(f)|x - y|.$$

Ressaltamos que neste caso geral, é imediato da construção que  $\bar{f}|_A = f$ . ■

**Teorema 2.39** (Teorema de Rademacher). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função localmente Lipschitz. Então  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^n$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.*

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 81. ■

No último capítulo desse trabalho, daremos uma prova para esse teorema utilizando as ferramentas desenvolvidas nos próximos capítulos.

### 2.9.1 Aplicações lineares

**Definição 2.43.**

- (i) Uma aplicação linear  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é ortogonal se  $Ox \cdot Oy = x \cdot y$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
- (ii) Uma aplicação linear  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é simétrica se  $x \cdot Sy = Sx \cdot y$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
- (iii) Uma aplicação linear  $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diagonal se existe  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$  tal que  $Dx = (d_1x_1, \dots, d_nx_n)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (iv) Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear. O adjunto de  $A$  é a aplicação linear  $A^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $x \cdot A^*y = Ax \cdot y$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ .

**Teorema 2.40** (Decomposição Polar). *Seja  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação linear*

- (i) *Se  $n \leq m$ , existe uma aplicação simétrica  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e uma ortogonal  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que*

$$L = O \circ S.$$

- (ii) *Se  $n \geq m$ , existe uma aplicação simétrica  $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  e uma ortogonal  $O : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que*

$$L = S \circ O^*.$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariépy (?), pág. 87. ■

**Definição 2.44.** *Seja  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação linear*

- (i) *Se  $n \leq m$ , então  $L = O \circ S$ . Definimos o Jacobiano de  $L$  por*

$$[L] = |\det(S)|.$$

- (ii) *Se  $n \geq m$ , então  $L = S \circ O^*$ . Definimos o Jacobiano de  $L$  por*

$$[L] = |\det(S)|.$$

**Teorema 2.41.** *Seja  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação linear*

- (i) *Se  $n \leq m$  então*

$$[L]^2 = \det(L^* \circ L).$$

- (ii) *Se  $n \geq m$  então*

$$[L]^2 = \det(L \circ L^*).$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariépy (?), pág. 89. ■

**Definição 2.45.**

- (i) *Se  $n \leq m$  definimos*

$$\Lambda(m, n) := \{\lambda : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}; \lambda \text{ é crescente}\}.$$

- (ii) *E para cada  $\lambda \in \Lambda(m, n)$ , definimos  $P_\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  por*

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_m) := (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(n)}).$$

**Teorema 2.42** (Fórmula de Binet-Cauchy). *Seja  $n \leq m$  e  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação linear. Então,*

$$[L]^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} (\det(P_\lambda \circ L))^2.$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 90. ■

### 2.9.2 Jacobianos

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função Lipschitz. Sabemos que pelo *Teorema de Rademacher*  $f$  é diferenciável a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Em particular,  $Df(x)$  existe  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. e  $Df(x)$  é uma aplicação linear de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^m$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p.

**Definição 2.46.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação Lipschitz definimos o Jacobiano de  $f$ , por*

$$Jf(x) := [Df(x)].$$

### 2.9.3 Fórmula da área

**Teorema 2.43** (Fórmula da Área). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função Lipschitz,  $n \leq m$ . Então para cada  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -mensurável,*

$$\int_A Jf(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y)) \, d\mathcal{H}^n(y).$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 96. ■

**Teorema 2.44** (Mudanças de Variáveis). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , uma função Lipschitz,  $n \leq m$ , Então para cada  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) \right] d\mathcal{H}^n(y).$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 99. ■

### 2.9.4 Fórmula da coarea

**Teorema 2.45.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função Lipschitz,  $n \geq m$ . Então para cada  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -mensurável,*

$$\int_A Jf(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y)) \, dy.$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 112. ■

**Teorema 2.46** (Mudanças de Variáveis). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , uma função Lipschitz,  $n \geq m$ . Então para cada  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$g|_f^{-1}(\mathbf{y})$$

*é  $\mathcal{H}^{n-m}$ -somável, para cada  $\mathbf{y}$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. E*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) Jf(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \int_{f^{-1}(\mathbf{y})} g(\mathbf{x}) \, d\mathcal{H}^{n-m}(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{y}.$$

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 117. ■

**Proposição 2.2** (Coordenadas Polares). *Seja  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_0^\infty \left( \int_{\partial B(0,r)} g \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) dr.$$

*Em particular,*

$$\frac{d}{dr} \left( \int_{B(0,r)} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\partial B(0,r)} g \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

*para cada  $r > 0$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^1$  nula.*

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 118. ■

## 2.10 Outros resultados preliminares

**Teorema 2.47** (Partição da Unidade). *Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{G}$  uma coleção de conjuntos abertos  $U$  tal que  $E \subset \bigcup_{U \in \mathcal{G}} U$ . Então, existe uma família  $\mathcal{F}$  de funções  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  não negativas tais que  $0 \leq f \leq 1$  e*

- (i) *para cada  $f \in \mathcal{F}$ , existe  $U \in \mathcal{G}$  tal que  $\text{spt}(f) \subset U$ ,*
- (ii) *se  $K \subset E$  é compacto, então  $\text{spt}(f) \cap K = \emptyset$ , para uma quantidade finita de  $f \in \mathcal{F}$ .*
- (iii)  $\sum_{f \in \mathcal{F}} f(\mathbf{x}) = 1$  *para cada  $\mathbf{x} \in E$ .*

*Demonstração.* Ver Ziemer (?), pág. 53. ■

**Teorema 2.48** (Gauss-Green). *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado com fronteira Lipschitz e  $\varphi \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$  então*

$$\int_U \text{div} \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\partial U} \varphi \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

*onde  $\mathbf{v}$  é o vetor normal unitário exterior a  $\partial U$ .*

*Demonstração.* Ver Evans e Gariepy (?), pág. 209. ■

**Teorema 2.49** (Integração por partes). *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado com fronteira*

*Lipschitzs e  $f, g \in C^1(\bar{U})$  então*

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = - \int_U f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial U} f g \nu_i \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

*onde  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

*Demonstração.* Aplique o teorema anterior pra  $\varphi := f g e_i$  onde  $e_i$  é um vetor da base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . ■



### 3 FUNÇÕES DE SOBOLEV $W^{1,p}$

**Definição 3.1.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$  e  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dizemos que  $g_i \in L^1_{\text{loc}}(U)$  é uma derivada parcial fraca de  $f$  com respeito a  $x_i$  em  $U$  se,*

$$\int_U f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_U g_i \varphi dx \quad (38)$$

para toda  $\varphi \in C_c^1(U)$ .

**Proposição 3.1.** *A derivada parcial fraca é única.*

*Demonstração.* Suponha que  $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, possua duas derivadas parciais fracas com respeito  $x_i$ , para algum  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , digamos  $g_1$  e  $g_2$ . Claramente, por (38),

$$\int_U g_1 \varphi dx = \int_U g_2 \varphi dx$$

para toda  $\varphi \in C_c^1(U)$ . Isto é,

$$\int_U (g_1 - g_2) \varphi dx = 0$$

para toda  $\varphi \in C_c^1(U)$ . Então,  $g_1 - g_2 = 0$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Logo,  $g_1 = g_2$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p.. ■

Se (38), vale para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  então escrevemos  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$  e

$$Df = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

é o gradiente fraco da  $f$ .

**Definição 3.2.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ .*

- (i) *Uma função  $f$  está no espaço de Sobolev, o denotaremos por  $W^{1,p}(U)$  se  $f \in L^p(U)$  e as derivadas parciais fracas de  $f$ , isto é,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , existem e são funções  $L^p(U)$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*
- (ii) *Uma função  $f$  pertence a  $W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$  se  $f \in W^{1,p}(V)$  para cada  $V \subset\subset U$ .*
- (iii) *Dizemos que  $f$  é de Sobolev se  $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$  para algum  $1 \leq p \leq \infty$ .*

Muniremos  $W^{1,p}(U)$  com a seguinte norma

$$\begin{cases} \|f\|_{W^{1,p}(U)} = \left( \int_U (|f|^p + |Df|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{W^{1,\infty}(U)} = \text{ess sup}_U (|f| + |Df|), & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

### 3.1 Sobre densidade de funções suaves em $W^{1,p}$

#### 3.1.1 O mollifier canônico

Dado  $\varepsilon > 0$  definamos  $\mathbf{U}_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbf{U} \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\mathbf{U}) > \varepsilon\}$ . Definamos agora,

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2-1}\right), & \text{se } |\mathbf{x}| < 1. \\ 0, & \text{se } |\mathbf{x}| \geq 1. \end{cases}$$

onde  $c = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}\right)^{-1}$ . Em particular, seja para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\varepsilon > 0$

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$$

Nos referiremos a  $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  como o *Mollifier* Canônico. Se  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{U})$ , defina sobre  $\mathbf{U}_\varepsilon$ ,  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$ , ou seja,

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

**Teorema 3.1** (Propriedades da Convolução com  $\eta_\varepsilon$ ). *Seja  $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  definida com acima então:*

- (i) Para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $f^\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{U}_\varepsilon)$ .
- (ii) Se  $f \in C(\mathbf{U})$  então,  $f^\varepsilon \rightarrow f$  uniformemente, sobre cada compacto contido em  $\mathbf{U}$ .
- (iii) Se  $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{U})$  para algum  $1 \leq p < \infty$  então,  $f^\varepsilon \rightarrow f$  em  $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{U})$ .
- (iv) Além disso,  $f^\varepsilon(\mathbf{x}) \rightarrow f$  se  $\mathbf{x}$  é ponto de Lebesgue de  $f$ , em particular,  $f^\varepsilon \rightarrow f$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.
- (v) Se  $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbf{U})$  para algum  $1 \leq p < \infty$  então para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} = \eta_\varepsilon * \frac{\partial f}{\partial x_i}$  sobre  $\mathbf{U}_\varepsilon$ .
- (vi) Em particular, se  $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbf{U})$  para algum  $1 \leq p < \infty$ , segue que  $f^\varepsilon \rightarrow f$  em  $W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbf{U})$ .

*Demonstração.* Fixe  $\mathbf{x} \in \mathbf{U}_\varepsilon$  e escolha  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Seja  $\mathbf{e}_i$  um vetor da base canônica do  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}$ , com  $|\mathbf{h}| \ll 1$  de modo que  $\mathbf{x} + \mathbf{h}\mathbf{e}_i \in \mathbf{U}_\varepsilon$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{f^\varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{h}\mathbf{e}_i) - f^\varepsilon(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbf{U}} \frac{1}{\mathbf{h}} \left[ \eta\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{h}\mathbf{e}_i - \mathbf{y}}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon}\right) \right] f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbf{V}} \frac{1}{\mathbf{h}} \left[ \eta\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{h}\mathbf{e}_i - \mathbf{y}}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon}\right) \right] f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (39) \end{aligned}$$

para algum  $V \subset\subset U$ . Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \eta \left( \frac{x + h e_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) \\ &= \varepsilon^n \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) \\ &= \varepsilon^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} (x - y) \end{aligned}$$

para cada  $y \in V$ .

Agora, olhando para o integrando em (39), temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \left[ \eta \left( \frac{x + h e_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] \right| |f(y)| &= \left| \varepsilon^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} (x - y + \theta e_i) \right| |f(y)| \\ &= \left| \varepsilon^n \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left( \frac{x - y + \theta e_i}{\varepsilon} \right) \right| |f(y)| \\ &\leq \|D\eta\|_{L^\infty(U)} |f(y)| \end{aligned}$$

para algum  $\theta \in (0, 1)$ . Logo, o integrando em questão é controlado por uma função  $L^1(V)$ .

Portanto, pelo *Teorema da Convergência Dominada*

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\varepsilon(x + h e_i) - f^\varepsilon(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[ \eta \left( \frac{x + h e_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] f(y) \, dy \\ &= \int_V \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{h} \left[ \eta \left( \frac{x + h e_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] f(y) \, dy \\ &= \int_V \frac{1}{\varepsilon^n} \varepsilon^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} (x - y) f(y) \, dy \\ &= \int_V \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} (x - y) f(y) \, dy. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial x_i} (x) = \int_V \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} (x - y) f(y) \, dy.$$

Observe que esse argumento pode ser reproduzido para derivadas parciais de  $f^\varepsilon$  de qualquer ordem. Portanto, isso prova (i).

Para provar (ii), tome  $V \subset\subset U$  e  $W \subset\subset U$  tal que  $V \subset\subset W \subset\subset U$ . Seja  $x \in V$ , então,

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \eta \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) f(y) \, dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x, \varepsilon)} \eta \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) f(y) \, dy. \end{aligned}$$

Fazendo  $z = \frac{x - y}{\varepsilon}$ , temos que

$$\begin{cases} dz = \frac{1}{\varepsilon^n} dy, \\ y = x - \varepsilon z, \\ |z| \leq 1. \end{cases}$$

Assim,

$$f^\varepsilon(x) = \int_{B(0,1)} \eta(z) f(x - \varepsilon z) dz.$$

Dessa forma, usando o fato que  $\int_{B(0,1)} \eta(x) dx = 1$ , segue que

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(0,1)} \eta(z) f(x - \varepsilon z) dz - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{B(0,1)} \eta(z) f(x - \varepsilon z) dz - \int_{B(0,1)} \eta(z) f(x) dz \right| \\ &\leq \int_{B(0,1)} \eta(z) |f(x - \varepsilon z) - f(x)| dz. \end{aligned}$$

Da continuidade uniforme de  $f$  sobre  $W$  segue (ii). Doravante, seja  $1 \leq p < \infty$  e  $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{U})$ . Então, tome  $V \subset\subset W \subset\subset \mathbf{U}$ ,  $x \in V$  e  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Observe que para  $1 < p < \infty$ .

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B(0,1)} \eta(z) |f(x - \varepsilon z)| dz \\ &= \int_{B(0,1)} [\eta(z)]^{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}} |f(x - \varepsilon z)| dz \\ &= \int_{B(0,1)} [\eta(z)]^{1 - \frac{1}{p}} [\eta(z)]^{\frac{1}{p}} |f(x - \varepsilon z)| dz \\ &\leq \left( \int_{B(0,1)} [\eta(z)]^{(1 - \frac{1}{p})(\frac{p}{p-1})} dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B(0,1)} \eta(z) |f(x - \varepsilon z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{B(0,1)} \eta(z) |f(x - \varepsilon z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos para  $1 \leq p < \infty$  que

$$|f^\varepsilon(x)|^p \leq \int_{B(0,1)} \eta(z) |f(x - \varepsilon z)|^p dz.$$

Passando a integral sobre  $V$  com respeito a  $x$ , segue que

$$\begin{aligned}
 \int_V |f^\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_V \int_{B(0,1)} \eta(z) |f(x - \varepsilon z)|^p dz dx \\
 &= \int_{B(0,1)} \eta(z) \int_V |f(x - \varepsilon z)|^p dx dz \\
 &\leq \int_{B(0,1)} \eta(z) \int_W |f(y)|^p dy dz \\
 &= \int_W |f(y)|^p dy.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, dado  $\delta > 0$  existe uma função  $g \in C_c(\overline{W})$  tal que  $\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta$ . Observe que  $\eta_\varepsilon * (f - g) = (\eta_\varepsilon * f) - (\eta_\varepsilon * g) = f^\varepsilon - g^\varepsilon$ , portanto da estimativa anterior,

$$\begin{aligned}
 \|f - g\|_{L^p(V)} &= \left( \int_V |f^\varepsilon(x) - g^\varepsilon(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left( \int_W |f(y) - g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|f - g\|_{L^p(W)} \\
 &< \delta.
 \end{aligned}$$

Com isso em mãos veja que,

$$\begin{aligned}
 \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &= \|f^\varepsilon - g^\varepsilon + g^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \\
 &\leq \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \\
 &< \delta + \|g^\varepsilon - g + g - f\|_{L^p(V)} \\
 &< 2\delta + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)}
 \end{aligned}$$

e por (ii) temos o desejado. Isto é a convergência uniforme de  $g^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Agora provaremos (iv), seja  $x \in U$  ponto de Lebesgue de  $f \in L^1_{loc}(U)$ . Então,

$$\begin{aligned}
 |f^\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy - f(x) \right| \\
 &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy - \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(x) dy \right| \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |f(y) - f(x)| dy \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \|\eta\|_{L^\infty} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| dy \\
 &= \alpha(n) \|\eta\|_{L^\infty} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| dy.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} |f^\varepsilon(x) - f(x)| \leq 0.$$

Em particular, temos que  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |f^\varepsilon(x) - f(x)| \geq 0$ . Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |f^\varepsilon(x) - f(x)| = 0.$$

Como isso é verdade para qualquer ponto de Lebesgue de  $f$ , segue o desejado.

Por fim, seja  $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{U})$  para algum,  $1 \leq p < \infty$ . Fixado  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $x \in \mathbf{U}_\varepsilon$ , temos por (i), que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \int_{\mathbf{U}} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y) \, dy \\ &= - \int_{\mathbf{U}} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y) f(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbf{U}} \eta_\varepsilon(x-y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) \, dy \\ &= \left( \eta_\varepsilon * \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)(x) \end{aligned}$$

o que prova (v). Note que da regularidade da  $f$ , (iii) e (v), segue (vi). ■

### 3.1.2 Resultados de aproximação

**Teorema 3.2** (Aproximação Local por Funções Suaves). *Seja  $f \in W^{1,p}(\mathbf{U})$  para algum  $1 \leq p < \infty$ . Então, existe uma seqüência de funções,  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset W^{1,p}(\mathbf{U}) \cap C^\infty(\mathbf{U})$  tal que  $f_k \rightarrow f$  em  $W_{1,p}(\mathbf{U})$ .*

*Demonstração.* Fixemos  $\varepsilon > 0$  e para cada  $k$  defina

$$\begin{cases} \mathbf{U}_k = \left\{ x \in \mathbf{U}; \text{dist}(x, \partial\mathbf{U}) > \frac{1}{k} \right\} \cap \mathbf{B}(0, k), \\ \mathbf{U}_0 = \emptyset. \end{cases}$$

Seja então, para cada  $k$ ,  $\mathbf{V}_k = \mathbf{U}_{k+1} - \bar{\mathbf{U}}_{k-1}$  e tomemos  $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$  uma seqüência de funções suaves tais que

$$\begin{cases} \zeta_k \in C_c^\infty(\mathbf{V}_k), \quad 0 \leq \zeta_k \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ \sum_{k=1}^\infty \zeta_k = 1 \text{ em } \mathbf{U}. \end{cases}$$

Observe que fixado  $k$ ,  $f\zeta_k \in W^{1,p}(\mathbf{U})$ , uma vez que, dada  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U})$ , e  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{U}} f \zeta_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\mathbf{U}} f \zeta_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\
&= \int_{\mathbf{U}} f \left( \frac{\partial(\zeta_k \varphi)}{\partial x_i} - \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \varphi \right) dx \\
&= \int_{\mathbf{U}} f \frac{\partial(\zeta_k \varphi)}{\partial x_i} dx - \int_{\mathbf{U}} f \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \varphi dx \\
&= - \int_{\mathbf{U}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \zeta_k \varphi dx - \int_{\mathbf{U}} f \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \varphi dx \\
&= - \int_{\mathbf{U}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \zeta_k + f \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \right) \varphi dx.
\end{aligned}$$

Daí,  $\frac{\partial f \zeta_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \zeta_k + f \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}$  pertence a  $L^p(\mathbf{U})$ , tendo em vista, a regularidade de  $f$  e  $\zeta_k$ . Além disso, temos evidentemente que  $\text{spt}(f \zeta_k) \subset V_k$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$  e que  $f = \sum_{k=1}^{\infty} f \zeta_k$  em  $\mathbf{U}$ .

Por outro lado, seja  $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  o *Mollifier* Canônico. Em virtude das propriedades da convolução com  $\eta_\varepsilon$ , segue que existe  $\varepsilon_k > 0$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{spt}(\eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k)) \subset V_k, \\ \left( \int_{\mathbf{U}} |\eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k) - f \zeta_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2^k}, \\ \left( \int_{\mathbf{U}} |\eta_{\varepsilon_k} * D(f \zeta_k) - D(f \zeta_k)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{array} \right. \quad (40)$$

Portanto, defina  $f_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k)$ , por construção  $f_\varepsilon$  está bem definida e  $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{U})$ . Logo, por (40),

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbf{U})} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^N \eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k) - f \zeta_k \right\|_{L^p(\mathbf{U})} \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \|\eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k) - f \zeta_k\|_{L^p(\mathbf{U})} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left( \int_{\mathbf{U}} |\eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k) - f \zeta_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2^k} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$  temos que  $f_\varepsilon \rightarrow f$  em  $L^p(\mathbf{U})$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . De maneira similar, segue também que  $Df_\varepsilon \rightarrow Df$  em  $L^p(\mathbf{U})$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Portanto,  $f_\varepsilon \rightarrow f$  em  $W^{1,p}(\mathbf{U})$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . ■

Dada uma  $f \in W^{1,p}(\mathbf{U})$  sendo  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado. Quando existe uma família de funções suaves até o fecho de  $\mathbf{U}$  que converge para  $f$  em  $W^{1,p}(\mathbf{U})$ ? O exemplo abaixo nos mostra que não é em todo domínio que podemos ter tal aproximação.

**Exemplo:** Considere  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < |x_1| < 1, 0 < x_2 < 1\}$  e definamos  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_1 > 0 \\ 0, & \text{se } x_1 < 0 \end{cases}$$

Observe que dada  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \, dx &= \int_{-1}^1 \int_0^1 u(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 u(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\ &\quad + \int_{-1}^0 \int_0^1 u(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \int_0^1 \varphi(1, x_2) - \varphi(0, x_2) \, dx_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue então, que  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$  e de maneira análoga,  $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$ . Então,  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , para todo  $1 \leq p < \infty$  e  $Du = (0, 0)$ .

Agora, suponha que dado  $\varepsilon > 0$  exista  $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  tal que

$$\|u - \psi\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Doravante, seja

$$L = \{(x_1, x_2); -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\} \quad \text{e} \quad R = \{(x_1, x_2); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Por construção,  $\overline{\Omega} = L \cup R$ . Com isso, observe que

$$\begin{aligned} \int_L |\psi| \, dx &\leq \int_L |\psi - u| \, dx + \underbrace{\int_L |u| \, dx}_{=0} \\ &\leq [\mathcal{L}^2(L)]^{\frac{p-1}{p}} \|\psi - u\|_{L^p(L)} \\ &= \|\psi - u\|_{L^p(L)} \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{41}$$



De maneira similar,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |1 - \psi| \, dx &\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |1 - u| \, dx}_{=0} + \int_{\mathbb{R}} |u - \psi| \, dx \\
 &\leq [\mathcal{L}^2(\mathbb{R})]^{\frac{p-1}{p}} \|u - \psi\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &= \|u - \psi\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &< \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Em particular, por (42)

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} 1 \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |1 - \psi| \, dx + \int_{\mathbb{R}} |\psi| \, dx \\
 &< \varepsilon + \int_{\mathbb{R}} |\psi| \, dx.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |\psi| \, dx &> \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) - \varepsilon \\
 &= 1 - \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Agora, defina  $\phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(x_1) = \int_0^1 \psi(x_1, x_2) \, dx_2.$$

Note que existe  $\mathbf{a} \in [-1, 0]$  tal que  $\phi(\mathbf{a}) < \varepsilon$ . Pois caso contrário se para todo  $x_1 \in [-1, 0]$ ,  $\phi(x_1) \geq \varepsilon$ . Então,

$$\varepsilon = \int_{-1}^0 \varepsilon \, dx_1 \leq \int_{-1}^0 \phi(x_1) \, dx_1 = \int_{-1}^0 \int_0^1 \psi(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 \leq \int_{\mathbb{L}} |\psi| \, dx$$

que contradiz (41).

Do mesmo modo, existe  $\mathbf{b} \in [0, 1]$  tal que  $\phi(\mathbf{b}) > 1 - \varepsilon$ , pois caso contrário, isto é, se para todo  $x_1 \in [0, 1]$ ,  $\phi(x_1) \leq 1 - \varepsilon$ , temos que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \, dx = \int_0^1 \int_0^1 \psi(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 = \int_0^1 \phi(x_1) \, dx_1 \leq \int_0^1 (1 - \varepsilon) \, dx_1 = 1 - \varepsilon.$$

Daí,

$$\varepsilon \leq \int_{\mathbb{R}} 1 - \psi(x) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |1 - \psi(x)| \, dx$$

o que contradiz (42).

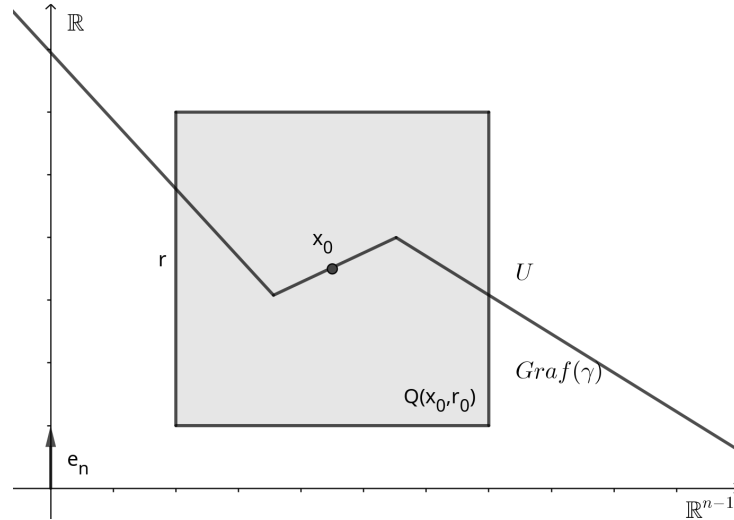
Por fim, tome  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Logo,  $0 < 1 - 2\varepsilon$ , e

$$\begin{aligned}
0 < 1 - 2\varepsilon &= 0 < 1 - 2\varepsilon + \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{b}) \\
&= \phi(\mathbf{b}) - 2\varepsilon - (\phi(\mathbf{b}) - 1) \\
&< \phi(\mathbf{b}) - 2\varepsilon + \varepsilon, \quad (\text{ pois, } \phi(\mathbf{b}) > 1 - \varepsilon) \\
&= \phi(\mathbf{b}) - \varepsilon \\
&< \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}), \quad (\text{ pois, } \phi(\mathbf{a}) < \varepsilon) \\
&\leq |\phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})| \\
&= \left| \int_0^1 \psi(\mathbf{b}, x_2) dx_1 dx_2 - \int_0^1 \psi(\mathbf{a}, x_2) dx_1 dx_2 \right| \\
&\leq \int_0^1 |\psi(\mathbf{b}, x_2) - \psi(\mathbf{a}, x_2)| dx_2 \\
&= \int_0^1 \left| \int_a^b \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 \right| dx_2 \\
&\leq \int_0^1 \int_a^b \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right| dx_1 dx_2 \\
&\leq [\mathcal{L}^2([a, b] \times [0, 1])]^{\frac{p-1}{p}} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\|_{\mathcal{L}^p([a, b] \times [0, 1])} \\
&\leq [\mathcal{L}^2(\Omega)]^{\frac{p-1}{p}} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \\
&= 2^{\frac{p-1}{p}} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \\
&= 2^{\frac{p-1}{p}} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \quad (\text{ pois, } \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0) \\
&\leq 2^{\frac{p-1}{p}} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,  $1 - 2\varepsilon < 2^{\frac{p-1}{p}} \varepsilon$ , o que implica em  $\varepsilon > \frac{1}{2 + 2^{\frac{p-1}{p}}}$ . Ferindo a arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$ .

**Definição 3.3.** Dado  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ ,  $Q(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n; |x_i - y_i| < r \ 1 \leq i \leq n\}$  denota o cubo  $n$ -dimensional de lado  $r$ .

Figura 3 – Ilustração da definição de fronteira Lipschitz



Fonte: Acervo próprio

**Definição 3.4.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado. Dizemos que a fronteira de  $U$  é Lipschitz se para cada  $x \in \partial U$ , existem  $r > 0$  e  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal que a menos de uma rotação ou reordenação dos eixos

$$U \cap Q(x, r) = \{y \in U; \gamma(y') < y_n\} \cap Q(x, r). \quad (43)$$

**Teorema 3.3** (Aproximação global por funções suaves). Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado com  $\partial U$  Lipschitz. Então, se  $f \in W^{1,p}(U)$ , para algum  $1 \leq p < \infty$ , existe uma sequência  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset W^{1,p}(U) \cap C^\infty(\bar{U})$  tal que  $f_k \rightarrow f$  em  $W^{1,p}(U)$ .

*Demonstração.* Tomemos  $x \in \partial U$ , como  $\partial U$  é Lipschitz existem  $r > 0$  e  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tais que

$$U \cap Q(x, r) = \{y \in U; \gamma(y') < y_n\} \cap Q(x, r)$$

e

$$\partial U \cap Q(x, r) = \{y \in \partial U; y = y' + \gamma(y')e_n\} \cap Q(x, r).$$

Façamos  $Q := Q(x, r)$  e  $Q' := Q\left(x, \frac{r}{2}\right)$ . Seja  $f \in W^{1,p}(U)$ , a priori estudaremos  $f$  em  $U \cap Q(x, r)$ . Em particular, suponhamos que  $f$  se anula numa vizinhança de  $\partial Q' \cap U$ .

Agora, para  $y \in U \cap Q'$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\alpha > 0$ . Definamos

$$y^\varepsilon := y + \varepsilon \alpha e_n.$$

**Afirmção:** Existem  $\varepsilon \ll 1$  e  $\alpha \gg 1$  que só dependem da geometria de  $U$  tal que  $B(y^\varepsilon, \varepsilon) \subset U \cap Q$ .

**Prova da Afirmação:** Da compacidade de  $\partial\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}$  e continuidade da função  $\mathbf{y} \mapsto \text{dist}(\mathbf{y}, \partial\mathbf{U} \cap \mathbf{Q})$  existe  $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}$  tal que

$$\text{dist}(\mathbf{y}^\varepsilon, \partial\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}) = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}^\varepsilon|.$$

Tomando  $\theta := \angle(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{y}^\varepsilon)$ , temos pela *Lei dos cossenos* que

$$\begin{aligned} 0 < |\mathbf{y}^\varepsilon - \mathbf{x}_0|^2 &= (\alpha\varepsilon)^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|^2 - 2\alpha\varepsilon|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|\cos(\theta) \\ &= (\alpha\varepsilon)^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|^2 - 2\alpha\varepsilon|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|\alpha\varepsilon\frac{\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{y})}{\alpha\varepsilon|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|} \\ &= (\alpha\varepsilon)^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|^2 - 2\alpha\varepsilon(\gamma(\mathbf{x}'_0) - \mathbf{y}_n) \\ &\leq (\alpha\varepsilon)^2 + (|\mathbf{y}^\varepsilon - \mathbf{x}_0| + \alpha\varepsilon)^2 - 2\alpha\varepsilon(\gamma(\mathbf{x}'_0) - \mathbf{y}_n) \\ &= 2(\alpha\varepsilon)^2 + 2\alpha\varepsilon|\mathbf{y}^\varepsilon - \mathbf{x}_0| + |\mathbf{y}^\varepsilon - \mathbf{x}_0|^2 - 2\alpha\varepsilon(\gamma(\mathbf{x}'_0) - \mathbf{y}_n). \end{aligned}$$

Daí adicionando  $-|\mathbf{y}^\varepsilon - \mathbf{x}_0|^2$  em ambos lados da desigualdade temos que

$$0 < 2(\alpha\varepsilon)^2 + 2\alpha\varepsilon|\mathbf{y}^\varepsilon - \mathbf{x}_0| - 2\alpha\varepsilon(\gamma(\mathbf{x}'_0) - \mathbf{y}_n).$$

Por outro lado, para obtermos  $\mathbf{y}^\varepsilon \in \mathbf{U} \cap \mathbf{Q}$  é necessário que  $\alpha\varepsilon < \frac{r}{2}$  isto é,  $\varepsilon < \frac{r}{2\alpha}$ . Em particular tomemos  $\varepsilon < \min\left\{r, \frac{r}{2\alpha}\right\}$ . Observe que com essa restrição estabelecida segue que

$$\varepsilon^2 \leq \varepsilon r \leq r\varepsilon\sqrt{n}.$$

Daí e do fato de  $|\mathbf{y}^\varepsilon - \mathbf{x}_0| < r\sqrt{n}$ , temos que

$$\begin{aligned} 0 &< 2(\alpha\varepsilon)^2 + 2\alpha\varepsilon|\mathbf{y}^\varepsilon - \mathbf{x}_0| - 2\alpha\varepsilon(\gamma(\mathbf{x}'_0) - \mathbf{y}_n) \\ &< 2\alpha^2\varepsilon r\sqrt{n} + 2\alpha\varepsilon r\sqrt{n} - 2\alpha\varepsilon(\gamma(\mathbf{x}'_0) - \mathbf{y}_n). \end{aligned}$$

Então,

$$2\alpha^2\varepsilon r\sqrt{n} > 2\alpha\varepsilon(\gamma(\mathbf{x}'_0) - \mathbf{y}_n) - 2\alpha\varepsilon r\sqrt{n}.$$

Portanto,

$$\alpha > \frac{\gamma(\mathbf{x}'_0) - \mathbf{y}_n}{r\sqrt{n}} - 1.$$

Agora note que

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma(x'_0) - y_n}{r\sqrt{n}} - 1 &< \frac{\gamma(x'_0) - \gamma(y')}{r\sqrt{n}} - 1, \quad \text{pois } y \in \mathbf{U} \cap \mathbf{Q}(x, r) \\
&\leq \frac{|\gamma(x'_0) - \gamma(y')|}{r\sqrt{n}} - 1 \\
&< \frac{|\gamma(x'_0) - \gamma(y')|}{r\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{\text{Lip}(\gamma)|x'_0 - y'|}{r\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{\text{Lip}(\gamma)r\sqrt{n}}{r\sqrt{n}} \\
&= \text{Lip}(\gamma)
\end{aligned}$$

onde  $\text{Lip}(\gamma)$  denota a constante Lipschitz de  $\gamma$ .

Como queremos  $\alpha \gg 1$  tomemos  $\alpha \geq \text{Lip}(\gamma)$ . Observe que  $\alpha$  e  $\varepsilon$  escolhidos dessa forma, dependem somente da geometria da fronteira de  $\mathbf{U}$ . Isso mostra a afirmação.

Continuando com a prova do teorema, defina para auxiliar a seguinte função  $g : \mathbf{U} \cap \mathbf{Q}' \rightarrow \mathbf{U} \cap \mathbf{Q}$  dada por,  $y \mapsto g(y) = y + \alpha\varepsilon e_n = y^\varepsilon$  com  $\alpha$  e  $\varepsilon$  como na afirmação. Daí, definamos para  $y \in \mathbf{U} \cap \mathbf{Q}'$ ,

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon(y) &= (\eta_\varepsilon * f)(g(y)) \\
&= \int_{\mathbf{U}} \eta_\varepsilon(g(y) - w) f(w) dw \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbf{U}} \eta_\varepsilon\left(\frac{y^\varepsilon - w}{\varepsilon}\right) f(w) dw \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbf{U}} \eta_\varepsilon\left(\frac{y - w}{\varepsilon} + \alpha e_n\right) f(w) dw.
\end{aligned}$$

Prova se de maneira similar as propriedades do *Mollifier* Canônico, que  $f_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}'})$  e que  $f_\varepsilon \rightarrow f$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  em  $W^{1,p}(\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}')$ .

Observe que como  $f = 0$  numa vizinhança de  $\partial\mathbf{Q}' \cap \mathbf{U}$  temos que para  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $f_\varepsilon = 0$  numa vizinhança de  $\partial\mathbf{Q}' \cap \mathbf{U}$ . Dessa forma, estendamos  $f_\varepsilon = 0$  em  $\mathbf{U} - \mathbf{Q}'$ .

De modo mais geral, note que para cada  $x \in \partial\mathbf{U}$  existe  $r_x > 0$  e  $\gamma_x : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz. Em particular,  $\partial\mathbf{U} \subset \bigcup_{x \in \partial\mathbf{U}} \mathbf{Q}\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$ . Como a fronteira de  $\mathbf{U}$  é compacta segue pelo *Teorema de Borel Lebesgue* que, existe uma quantidade finita de cubos  $\mathbf{Q}\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$  a qual denotaremos  $\left\{\mathbf{Q}\left(x_i, \frac{r_i}{2}\right)\right\}_{i=1}^N$ , tal que  $\partial\mathbf{U} \subset \bigcup_{i=1}^N \mathbf{Q}\left(x_i, \frac{r_i}{2}\right)$ .

Seja agora  $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$  uma família de funções suaves tais que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, \text{ spt}(\zeta_i) \subset \mathbf{U} \cap \mathbf{Q}\left(x_i \frac{r_i}{2}\right), i = 1, 2, \dots, N. \\ 0 \leq \zeta_0 \leq 1, \text{ spt}(\zeta_0) \subset \mathbf{U}. \\ \sum_{i=0}^N \zeta_i = 1 \text{ em } \mathbf{U}. \end{cases}$$

Defina,  $f^i := f\zeta_i$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Claramente,  $\text{spt}(f_i) \subset \mathbf{U} \cap \mathbf{Q}\left(x_i \frac{r_i}{2}\right)$ . Fixemos  $\delta > 0$  tomemos  $g^i := (f^i)_{\varepsilon_i} \in C^\infty(\bar{\mathbf{U}})$  onde  $(f^i)_{\varepsilon_i}$  é definida como anteriormente, de modo que

$$\begin{cases} \text{spt}(g^i) \subset \bar{\mathbf{U}} \cap \mathbf{Q}\left(x_i \frac{r_i}{2}\right), \\ \|g^i - f^i\|_{W^{1,p}(\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}(x_i \frac{r_i}{2}))} < \frac{\delta}{2N}. \end{cases}$$

Para  $i = 0$ , considere  $g^0 := f^0 * \eta_\varepsilon$  note que como no teorema anterior podemos tomar  $\varepsilon \ll 1$ , de modo que  $g^0 \in C_c(\mathbf{U})$  e

$$\|g^0 - f^0\|_{W^{1,p}(\mathbf{U})} < \frac{\delta}{2}.$$

Por fim, seja  $g := \sum_{i=0}^N g_i$  que por construção pertence a  $C^\infty(\bar{\mathbf{U}})$ . Agora observe que

$$\begin{aligned} \|g - f\|_{W^{1,p}(\mathbf{U})} &= \left\| \sum_{i=0}^N (g^i - f^i) \right\|_{W^{1,p}(\mathbf{U})} \\ &\leq \sum_{i=0}^N \|g^i - f^i\|_{W^{1,p}(\mathbf{U})} \\ &= \|g^0 - f^0\|_{W^{1,p}(\mathbf{U})} + \sum_{i=1}^N \|g^i - f^i\|_{W^{1,p}(\mathbf{U})} \\ &< \frac{\delta}{2} + N \frac{\delta}{2N} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

pela arbitrariedade do  $\delta > 0$  segue o teorema. ■

### 3.2 Operações clássicas

**Teorema 3.4** (Regra do Produto). *Se  $f, g \in W^{1,p}(\mathbf{U}) \cap L^\infty(\mathbf{U})$  então, o produto  $fg \in W^{1,p}(\mathbf{U}) \cap L^\infty(\mathbf{U})$  e*

$$\frac{\partial fg}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

*a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.*

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U})$  com  $\text{spt}(\varphi) \subset V \subset\subset \mathbf{U}$ . Seja  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$ ,  $g^\varepsilon := \eta_\varepsilon * g$ .

Observe que  $\int_V fg \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ , pois

$$\left| \int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \int_V fg \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq \int_V |f^\varepsilon g^\varepsilon - fg| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx \leq \|f^\varepsilon g^\varepsilon - fg\|_{L^p(V)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}(V)}.$$

Daí, e pelas propriedades do *Mollifier* Canônico,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \varphi dx - \int_V fg \varphi dx \right| \leq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{U}} fg \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_V fg \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V \frac{\partial(f^\varepsilon g^\varepsilon)}{\partial x_i} \varphi dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V \left( \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} g^\varepsilon + f^\varepsilon \frac{\partial g^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \varphi dx.. \end{aligned}$$

Agora observe que  $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} g^\varepsilon \varphi \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} g \varphi$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Como para  $\varepsilon \ll 1$

temos que  $|g^\varepsilon| \leq \|g\|_\infty$ , a menos de um conjunto de medida nula, então,  $\left| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} g^\varepsilon \varphi \right| \leq \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} \|g\|_\infty \|\varphi\|_\infty$ . Portanto, pelo *Teorema da Convergência Dominada Generalizado*,

$$\int_V \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} g^\varepsilon \varphi dx \rightarrow \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} g \varphi dx.$$

Por um argumento análogo, segue que

$$\int_V \frac{\partial g^\varepsilon}{\partial x_i} f^\varepsilon \varphi dx \rightarrow \int_V \frac{\partial g}{\partial x_i} f \varphi dx.$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{U}} fg \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V \left( \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} g^\varepsilon + f^\varepsilon \frac{\partial g^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \varphi dx \\ &= - \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \varphi dx \\ &= - \int_{\mathbf{U}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \varphi dx. \end{aligned}$$

Agora resta nos mostrar que  $\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$  pertence a  $L^p(\mathbf{U})$ . De fato,

$$\int_{\mathbf{U}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} g \right|^p dx \leq (\|g\|_{L^\infty})^p \int_{\mathbf{U}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^p dx < \infty,$$

e de maneira análoga mostra se  $f \frac{\partial g}{\partial x_i}$  pertence a  $L^p(\mathbf{U})$ . Então segue o desejado. ■

**Teorema 3.5** (Regra da cadeia). *Se  $f \in W^{1,p}(\mathbf{U})$  e  $F \in C^1(\mathbb{R})$  com  $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $F(0) = 0$  então  $F(f) \in W^{1,p}(\mathbf{U})$  e*

$$\frac{\partial F(f)}{\partial x_i} = F'(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U})$ , tal que  $\text{spt}(\varphi) \subset V \subset\subset \mathbf{U}$  e  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$ . Ora,

$$\int_{\mathbf{U}} F(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_V F(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_V \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(f^\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Note que  $F(f^\varepsilon) \rightarrow F(f)$  pontualmente, pela continuidade da  $F$ . Além disso, como  $F \in C^1(\mathbb{R})$  temos que

$$\left| F(f^\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = |F(f^\varepsilon) - F(0)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \left| \int_0^{f^\varepsilon} F'(t) dt \right| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq \|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} f^\varepsilon \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|. \quad (44)$$

Assim, pelo *Teorema da Convergência Dominada Generalizado*,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{U}} F(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_V \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(f^\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V F(f^\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V F'(f^\varepsilon) \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} \varphi dx. \end{aligned}$$

Observe que

$$\left| F'(f^\varepsilon) \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} \varphi \right| \leq \|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} \right|.$$

Então, pelo *Teorema da Convergência Dominada Generalizado*,

$$\int_{\mathbf{U}} F(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V F'(f^\varepsilon) \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_V \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F'(f^\varepsilon) \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_V F'(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx$$

pela arbitrariedade da  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U})$  segue o teorema. ■

Ressaltamos que nas hipóteses do teorema anterior poderíamos retirar a exigência  $F(0) = 0$ . Contudo, teríamos que exigir que  $\mathcal{L}^n(\mathbf{U}) < \infty$ . Alterando então a sentença em



(44). Com efeito,

$$\left| F(f^\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = |F(f^\varepsilon) - F(0) + F(0)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \left| \int_0^{f^\varepsilon} F'(t) dt + F(0) \right| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq \|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} f^\varepsilon \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|.$$

**Teorema 3.6.** Se  $f \in W^{1,p}(\mathbf{U})$  então,  $f^+, f^-, |f| \in W^{1,p}(\mathbf{U})$  e

$$Df^+ = \begin{cases} Df & \text{em } \{f > 0\} \quad \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \\ 0 & \text{em } \{f \leq 0\} \quad \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \end{cases}$$

$$Df^- = \begin{cases} 0 & \text{em } \{f \geq 0\} \quad \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \\ -Df & \text{em } \{f < 0\} \quad \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \end{cases}$$

$$D|f| = \begin{cases} Df & \text{em } \{f > 0\} \quad \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \\ 0 & \text{em } \{f = 0\} \quad \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \\ -Df & \text{em } \{f < 0\} \quad \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Fixemos  $\varepsilon > 0$  e definamos

$$F_\varepsilon(r) = \begin{cases} (r^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon, & \text{se } r \geq 0. \\ 0, & \text{se } r < 0. \end{cases}$$

Note que  $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ , uma vez que o  $\varepsilon$  corrige a não diferenciabilidade de  $t \mapsto \sqrt{t}$  na origem. Em particular, se  $r \geq 0$

$$F'_\varepsilon(r) = \frac{r}{(r^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Logo,  $F'_\varepsilon(0) = 0$  além de que  $F_\varepsilon(0) = 0$  e  $\|F'_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$ . Portanto,  $F_\varepsilon$  é nas condições da *Regra da Cadeia*. Assim, para toda  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U})$ .

$$\int_{\mathbf{U}} F_\varepsilon(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbf{U}} F'_\varepsilon(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Então,

$$\int_{\mathbf{U} \cap \{f > 0\}} \left( (f^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbf{U} \cap \{f > 0\}} \frac{f}{(f^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\int_{\mathbf{U} \cap \{f > 0\}} f^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbf{U} \cap \{f > 0\}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx. \quad (45)$$

Definindo,  $g := -f$  temos que

$$\int_{\mathbf{U} \cap \{g > 0\}} g^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbf{U} \cap \{g > 0\}} \frac{\partial g}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Como  $g^+ = \{-f\}^+ = f^-$ , temos que

$$\mathbf{U} \cap \{g > 0\} = \mathbf{U} \cap \{f < 0\}.$$

Então,

$$\int_{\mathbf{U} \cap \{f < 0\}} f^- \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbf{U} \cap \{f < 0\}} \left( -\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx. \quad (46)$$

De (45) e (46), temos respectivamente que

$$Df^+ = \begin{cases} Df & \text{em } \{f > 0\} & \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \\ 0 & \text{em } \{f \leq 0\} & \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \end{cases}$$

$$Df^- = \begin{cases} 0 & \text{em } \{f \geq 0\} & \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \\ -Df & \text{em } \{f < 0\} & \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \end{cases}$$

Note que  $|f| = f^+ + f^-$  então, dada  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{U}} |f| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\mathbf{U}} f^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\mathbf{U}} f^- \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \int_{\mathbf{U} \cap \{f > 0\}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{\mathbf{U} \cap \{f < 0\}} \left( -\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx. \end{aligned}$$

Claramente,  $Df = 0$  em  $\mathbf{U} \cap \{f = 0\}$ . Dessa forma,

$$D|f| = \begin{cases} Df & \text{em } \{f > 0\} & \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \\ 0 & \text{em } \{f = 0\} & \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \\ -Df & \text{em } \{f < 0\} & \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.} \end{cases}$$

■

**Corolário 3.1.** *Se  $f \in W^{1,p}(\mathbf{U})$ , então  $Df = 0$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. sobre  $\{f = 0\}$ .*

*Demonstração.* Do teorema anterior temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{U}} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\mathbf{U}} f^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \int_{\mathbf{U}} f^- \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \left( \int_{\mathbf{U} \cap \{f > 0\}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{\mathbf{U} \cap \{f < 0\}} \left( -\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx \right). \end{aligned}$$

Daí,  $Df = Df^+ - Df^-$ , então  $Df = 0$  se, e somente se,  $Df^+ = Df^-$ . Contudo,  $Df^+ = Df^-$  ocorre em  $\mathbf{U} \cap \{f = 0\}$ . Logo o resultado segue. ■

### 3.3 $W^{1,\infty}$ e as funções Lipschitz

**Teorema 3.7.** *Seja  $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,  $f$  é localmente Lipschitz se, e somente se,  $f \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbf{U})$ .*

*Demonstração.* Primeiro mostraremos que se  $f$  é localmente Lipschitz então  $f \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbf{U})$ . Logo, fixemos  $1 \leq i \leq n$  e sejam  $V$  e  $W$  tais que  $V \subset\subset W \subset\subset \mathbf{U}$  e tomemos  $h > 0$  tal que  $h < \text{dist}(V, \partial W)$ . Definamos em  $V$ ,

$$g_i^h(x) = \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

Note que por construção

$$|g_i^h(x)| \leq \text{Lip}(f|_W) < \infty.$$

Logo,  $g_i^h \in L^\infty(V)$  para todo  $h$ , e como  $\mathcal{L}^n(V) < \infty$  temos que  $g_i^h \in L^p(V)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Em particular,

$$\left( \int_V |g_i^h|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \text{Lip}(f|_W) (\mathcal{L}^n(V))^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo,

$$\sup_{h>0} \|g_i^h\|_{L^p(V)} < \infty.$$

Portanto, pelo *Teorema da Compacidade Fraca em  $L^p$*  existe uma função  $g_i \in L^p(V)$  tal que  $g_i^h \rightharpoonup g_i$  em  $L^p(V)$  quando  $h \rightarrow 0$ .

**Afirmção:**  $g_i$  não depende de  $p$ .

**Prova da Afirmção:** Sejam  $1 \leq p, q < \infty$ . Sejam  $g_i^p$  e  $g_i^q$  tais que  $g_i^h \rightharpoonup g_i^p$  em  $L^p(V)$  e  $g_i^h \rightharpoonup g_i^q$  em  $L^q(V)$ . Dada  $\varphi \in C_c(V)$ , note que

$$\int_V (g_i^p - g_i^q) \varphi dx = \int_V (g_i^p - g_i^h) \varphi dx + \int_V (g_i^h - g_i^q) \varphi dx$$

para todo  $h > 0$ . Em particular, fazendo  $h \rightarrow 0$  temos, uma vez que  $C_c(V) \subset L^p(V)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ , que

$$\int_V (g_i^p - g_i^q) \varphi dx = 0$$

para toda  $\varphi \in C_c(V)$ . Logo,  $(g_i^p - g_i^q) = 0$ . De onde segue a afirmação.

Da afirmação provada, vem que  $g_i^h \rightharpoonup g_i$  em  $L^p(V)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ .

**Afirmção:**  $g_i \in L^\infty(V)$ .

**Prova da Afirmção:** Seja  $\varphi \in C_c(V)$  então,

$$\int_V g_i \varphi \, dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_V g_i^h \varphi \, dx \leq \|\varphi\|_{L^1(V)} \text{Lip}(f|_W) < \infty.$$

Então,

$$\|g_i\|_{L^\infty(V)} = \sup \left\{ \int_V g_i \varphi \, dx; \varphi \in C_c(V), \|\varphi\|_{L^1(V)} \leq 1 \right\} < \infty.$$

O que prova a afirmação.

Por outro lado, seja  $\varphi \in C_c^1(V)$ , logo,

$$\begin{aligned} \int_V f(x) \frac{\varphi(x + h e_i) - \varphi(x)}{h} \, dx &= \frac{1}{h} \int_V f(x) (\varphi(x + h e_i) - \varphi(x)) + f(x + h e_i) \varphi(x + h e_i) \, dx \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_V f(x + h e_i) \varphi(x + h e_i) \, dx \\ &= \frac{1}{h} \int_V (f(x) - f(x + h e_i)) \varphi \, dx \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_V f(x + h e_i) \varphi(x + h e_i) - f(x) \varphi(x) \, dx. \end{aligned}$$

Como a integral de Lebesgue é invariante por translação temos que a segunda parcela da última igualdade é zero. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_V f(x) \frac{\varphi(x + h e_i) - \varphi(x)}{h} \, dx &= \frac{1}{h} \int_V (f(x) - f(x + h e_i)) \varphi(x) \, dx \\ &= - \int_V g_i^h(x) \varphi(x) \, dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $h \rightarrow 0$  temos que

$$\int_V f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx = - \int_V g_i(x) \varphi(x) \, dx.$$

Pela arbitrariedade da  $\varphi \in C_c^1(V)$ ,  $f \in W^{1,\infty}(V)$ . Em particular,  $f \in W_{loc}^{1,\infty}(U)$ .

Por fim, agora mostraremos que se  $f \in W_{loc}^{1,\infty}(U)$  então,  $f$  é localmente Lipschitz. De fato, seja  $B \subset\subset U$  uma bola fechada, e  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$ . Seja  $\varepsilon_0$  suficientemente pequeno de modo que para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\text{spt}(f^\varepsilon) \subset B$ . Em particular, nos restringindo a  $B$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , sabemos que dado  $x \in B$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \eta_\varepsilon(x-y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right| \, dy \\ &\leq \|Df\|_{L^\infty(B)} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) \, dy \\ &= \|Df\|_{L^\infty(B)}. \end{aligned}$$

Então, para todo  $\mathbf{x} \in B$  e  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$|\mathbf{D}f^\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{D}f\|_{L^\infty(B)} \Rightarrow \|\mathbf{D}f^\varepsilon\|_{L^\infty(B)} \leq \|\mathbf{D}f\|_{L^\infty(B)}.$$

Dessa forma,

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \|\mathbf{D}f^\varepsilon\|_{L^\infty(B)} \leq \|\mathbf{D}f\|_{L^\infty(B)} < \infty.$$

Agora sejam  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$ . Pela regularidade de  $f^\varepsilon$ ,

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) - f^\varepsilon(\mathbf{y}) = \int_0^1 \mathbf{D}f^\varepsilon(\mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y})) dt \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Daí,

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(\mathbf{x}) - f^\varepsilon(\mathbf{y})| &= \left| \int_0^1 \mathbf{D}f^\varepsilon(\mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y})) dt \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 \mathbf{D}f^\varepsilon(\mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y})) dt \right| |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \\ &\leq \int_0^1 |\mathbf{D}f^\varepsilon(\mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y}))| dt |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \\ &\leq \int_0^1 \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \|\mathbf{D}f^\varepsilon\|_{L^\infty(B)} dt |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \\ &= C |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \end{aligned}$$

onde,  $C := \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \|\mathbf{D}f^\varepsilon\|_{L^\infty(B)}$ .

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos que para todos pontos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$  de Lebesgue,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq C |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

**Afirmção:**  $f$  é Lipschitz para todos os pontos da bola  $B$ .

**Prova da Afirmção:** É suficiente mostrar que  $f^\varepsilon$  converge uniformemente para  $f$  quando

$\varepsilon \rightarrow 0$  em  $B$ . Seja  $x \in B$ , então,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta(w) f(x + w\varepsilon) \, dw - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta(w) (f(x + w\varepsilon) - f(x)) \, dw \right| \\
&\leq \int_{B(0,1)} \eta(w) |f(x + w\varepsilon) - f(x)| \, dw \\
&\leq \int_{B(0,1)} \eta(w) C|x + w\varepsilon - x| \, dw \quad (f \text{ é localmente Lipschitz } \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.}) \\
&\leq \int_{B(0,1)} \eta(w) |w\varepsilon| \, dw \\
&< \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(w) \, dw \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Então,

$$\sup_B |f^\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Com isso temos a convergência uniforme.

Assim, dados quaisquer  $x, y \in B$ , temos que

$$|f^\varepsilon(x) - f^\varepsilon(y)| \leq C|x - y|.$$

Fazendo,  $\varepsilon \rightarrow 0$  vem que  $f$  é Lipschitz em  $B$ . O que prova a afirmação. E finaliza a prova do teorema. ■

### 3.4 Operador do traço para funções $W^{1,p}$

**Teorema 3.8** (Teorema do Traço). *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado com  $\partial U$  Lipschitz,  $1 \leq p < \infty$ . Existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$$

tal que

$$Tf = f \text{ em } \partial U$$

para toda  $f \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ .

Além disso, para toda  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  e  $f \in W^{1,p}(U)$ ,

$$\int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_U Df \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial U} Tf \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

onde  $\nu$  é o vetor normal unitário exterior a  $\partial U$ .

*Demonstração.* Assuma que  $f \in C^1(\bar{\mathbf{U}})$ . Como a fronteira de  $\mathbf{U}$  é Lipschitz, temos que dado  $x \in \partial\mathbf{U}$  existe  $r > 0$  e  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz, tal que a menos de uma rotação e ou reordenação dos eixos,

$$\mathbf{U} \cap Q(x, r) = \{y \in \mathbf{U}; \gamma(y') < y_n\} \cap Q(x, r).$$

Escrevamos  $Q := Q(x, r)$  e suponhamos que  $f = 0$  em  $\mathbf{U} - Q$ . Dado  $y \in \partial\mathbf{U} \cap Q$ , seja  $\nu(y)$  o vetor unitário normal exterior a  $\partial\mathbf{U} \cap Q$  no ponto  $y$ . Agora, defina para  $z \in \mathbb{R}^n$   $F(z', z_n) = \gamma(z') - z_n$ . Então,

$$\partial\mathbf{U} \cap Q = Q \cap \{F = 0\}.$$

Em particular,

$$\nu(y) = \frac{DF(y', y_n)}{|DF(y', y_n)|} = \frac{(D\gamma(y'), -1)}{(1 + |D\gamma|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dessa forma,

$$-e_n \cdot \nu(y) = -\left(\frac{-1}{(1 + |D\gamma|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{(1 + |D\gamma|^2)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{(1 + (\text{Lip}(\gamma))^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Então

$$1 \leq (1 + (\text{Lip}(\gamma))^2)^{\frac{1}{2}}(-e_n \cdot \nu(y)) \quad (47)$$

para quase todo  $y \in \partial\mathbf{U} \cap Q$  com respeito a  $\mathcal{H}^{n-1}$ .

Por outro lado, fixemos  $\varepsilon > 0$  e defina para  $t \in \mathbb{R}$

$$\beta_\varepsilon(t) := (t^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon.$$

Daí, tendo em vista (47)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbf{U}} \beta_\varepsilon(f) d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\partial\mathbf{U} \cap Q} \beta_\varepsilon(f) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \int_{\partial\mathbf{U} \cap Q} \beta_\varepsilon(f) (1 + (\text{Lip}(\gamma))^2)^{\frac{1}{2}} (-e_n \cdot \nu) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= -C \int_{\partial\mathbf{U} \cap Q} \beta_\varepsilon(f) e_n \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

onde  $C := (1 + (\text{Lip}(\gamma))^2)^{\frac{1}{2}}$ . Note que pelo *Teorema da Divergência*

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbf{U} \cap Q} \beta_\varepsilon(f) e_n \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\mathbf{U} \cap Q} \frac{\partial \beta_\varepsilon(f)}{\partial x_i} dy \\ &= \int_{\mathbf{U} \cap Q} \beta'_\varepsilon(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} dy. \end{aligned}$$

Assim, passando o módulo

$$0 \leq \int_{\partial\mathbf{U}} \beta_\varepsilon(f) \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \int_{\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}} |\beta'_\varepsilon(f)| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \, d\mathbf{y} \leq C \int_{\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}} |\beta'_\varepsilon(f)| |\mathbf{D}f| \, d\mathbf{y} \leq C \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{D}f| \, d\mathbf{y},$$

uma vez que  $|\beta'_\varepsilon(t)| \leq 1$ .

Agora observe que  $\beta_\varepsilon(f) \searrow |f|$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Logo pelo *Teorema da convergência monótona*,

$$\int_{\partial\mathbf{U}} |f| \, d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\mathbf{U}} \beta_\varepsilon(f) \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{D}f| \, d\mathbf{y}.$$

Diminuindo as restrições sobre  $f$ , isto é, pedindo apenas que  $f \in C^1(\bar{\mathbf{U}})$ . Segue da compacidade da fronteira de  $\mathbf{U}$  que existe uma família finita  $\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^N$  de cubos centrados em  $\partial\mathbf{U}$ , tais que  $\partial\mathbf{U} \subset \bigcup_{i=1}^N \mathbf{Q}_i$ . Dessa forma, seja  $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$  tais que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, \text{ spt}(\zeta_i) \subset \mathbf{U} \cap \mathbf{Q}_i, \, i = 1, 2, \dots, N. \\ 0 \leq \zeta_0 \leq 1, \text{ spt}(\zeta_0) \subset \mathbf{U}. \\ \sum_{i=0}^N \zeta_i = 1 \text{ em } \mathbf{U}. \end{cases}$$

Defina,  $f_i := f\zeta_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Então  $f = \sum_{i=0}^N f_i$  em  $\mathbf{U}$ . Neste caso, pelo que foi visto,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbf{U}} |f| \, d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \sum_{i=0}^N \int_{\partial\mathbf{U}} |f_i| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \sum_{i=0}^N C_i \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{D}f_i| \, d\mathbf{y} \\ &= \sum_{i=0}^N C_i \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{D}f\zeta_i + f\mathbf{D}\zeta_i| \, d\mathbf{y} \\ &\leq \sum_{i=0}^N C_i \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{D}f|\zeta_i \, d\mathbf{y} + \sum_{i=0}^N C_i \int_{\mathbf{U}} |f|\|\mathbf{D}\zeta_i\| \, d\mathbf{y} \\ &\leq \sum_{i=0}^N C_i \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{D}f| \, d\mathbf{y} + \sum_{i=0}^N C_i \int_{\mathbf{U}} |f|\|\mathbf{D}\zeta_i\|_{L^\infty(\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}_i)} \, d\mathbf{y} \\ &\leq C_1 \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{D}f| + |f| \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

onde  $C_1 := \max \left\{ \sum_{i=0}^N C_i, \sum_{i=0}^N C_i \|\mathbf{D}\zeta_i\|_{L^\infty(\mathbf{U} \cap \mathbf{Q}_i)} \right\}$ .



Dessa forma, se  $f \in C^1(\bar{U})$ ,

$$\|f\|_{L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})} \leq C_1 \|f\|_{W^{1,1}(U)}.$$

Agora suponha que  $1 < p < \infty$  e apliquemos a estimativa acima para  $|f|^p$ . Então, tenha em vista a desigualdade de Young

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} |f|^p d\mathcal{H}^{n-1} &\leq C_1 \int_U p|f|^{p-1}|Df| + |f|^p dy \\ &\leq C_1 \int_U p \frac{p-1}{p} (|f|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} + p \frac{1}{p} |Df|^p + |f|^p dy \\ &\leq C_1 \int_U (p-1)|f|^p + |Df|^p + |f|^p dy \\ &= C_1 \int_U |Df|^p + p|f|^p dy \\ &\leq C_2 \int_U |Df|^p + |f|^p dy \end{aligned}$$

onde  $C_2 := pC_1$ . Elevando a  $\frac{1}{p}$  ambos os lados da desigualdade acima temos que se  $f \in C^1(\bar{U})$ ,

$$\|f\|_{L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})} \leq C_3 \|f\|_{W^{1,p}(U)} \quad (48)$$

onde  $C_3 := C_2^{\frac{1}{p}}$ . Em particular, isso é verdade para todo  $1 \leq p < \infty$ .

Portanto, defina

$$T : C^1(\bar{U}) \longrightarrow L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$$

onde  $Tf := f|_{\partial U}$ .

Note que  $T$  é linear, pois sejam  $f, g \in C^1(\bar{U})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  então,

$$T(\alpha f + g) = (\alpha f + g)|_{\partial U} = \alpha f|_{\partial U} + g|_{\partial U} = \alpha Tf + Tg.$$

Com isso, por (48),  $T$  é contínuo. Usando (48) estenderemos  $T$  para  $W^{1,p}(U)$  tendo em vista a densidade de  $C^1(\bar{U})$ . Logo, dada  $f \in W^{1,p}(U)$  existe  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset W^{1,p}(U) \cap C^1(\bar{U})$  tal que  $f_k$  converge para  $f$  em  $W^{1,p}(U)$ . Logo,  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  é de Cauchy em  $W^{1,p}(U)$ , assim, por (48),

$$\|f_m - f_l\|_{L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})} \leq C_3 \|f_m - f_l\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Dessa estimativa,  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  é de Cauchy em  $L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$ . Portanto, existe uma função em  $L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$  a qual definiremos como  $Tf$ , onde  $f_k \longrightarrow Tf$  em  $L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$ .

**Afirmção:** Se  $f \in W^{1,p}(U)$ ,  $Tf$  independe da sequência de funções em  $C^1(\bar{U})$ .

**Prova da Afirmção:** Seja  $f \in W^{1,p}(U)$  e  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C^1(\bar{U})$ , tais que ambas

convergem para  $f$  em  $W^{1,p}(\mathbf{U})$ . Seja  $\mathbf{T}f_1$  o traço dado por  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  e  $\mathbf{T}f_2$  o dado por  $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ . Então,

$$\|\mathbf{T}f_1 - \mathbf{T}f_2\|_{L^p(\partial\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - g_k\|_{L^p(\partial\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1})} \leq C_3 \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - g_k\|_{W^{1,p}(\mathbf{U})} = 0.$$

Portanto,  $\mathbf{T}f_1 = \mathbf{T}f_2$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{H}^{n-1}$  nula. O que prova a afirmação. Dessa forma,

$$\mathbf{T} : W^{1,p}(\mathbf{U}) \longrightarrow L^p(\partial\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1})$$

está bem definido. Além disso, segue da densidade de  $C^1(\bar{\mathbf{U}})$ , da estimativa em (48) que  $\mathbf{T}$  é linear e limitado.

Por fim, dada  $f \in W^{1,p}(\mathbf{U})$  seja para  $\varepsilon > 0$ ,  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$  onde  $\eta_\varepsilon$  é o *Mollifier* Canônico. Logo, seja  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ , então usando integração por partes,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{U}} f^\varepsilon \operatorname{div} \varphi \, dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{U}} f^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left( - \int_{\mathbf{U}} \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} \varphi_i \, dx + \int_{\partial\mathbf{U}} f^\varepsilon \varphi_i \cdot \nu_i \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) \\ &= - \int_{\mathbf{U}} Df^\varepsilon \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\mathbf{U}} f^\varepsilon \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

onde  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  é um vetor normal unitário exterior a  $\partial\mathbf{U}$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vem que

$$\int_{\mathbf{U}} f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\mathbf{U}} Df \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\mathbf{U}} \mathbf{T}f \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

■

**Definição 3.5.** A função  $\mathbf{T}f$  é única a menos de conjuntos de medida  $\mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\mathbf{U}}$  é chamado o traço de  $f$  em  $\partial\mathbf{U}$ . Interpretamos  $\mathbf{T}f$  como os valores de fronteira de  $f$  em  $\partial\mathbf{U}$ .

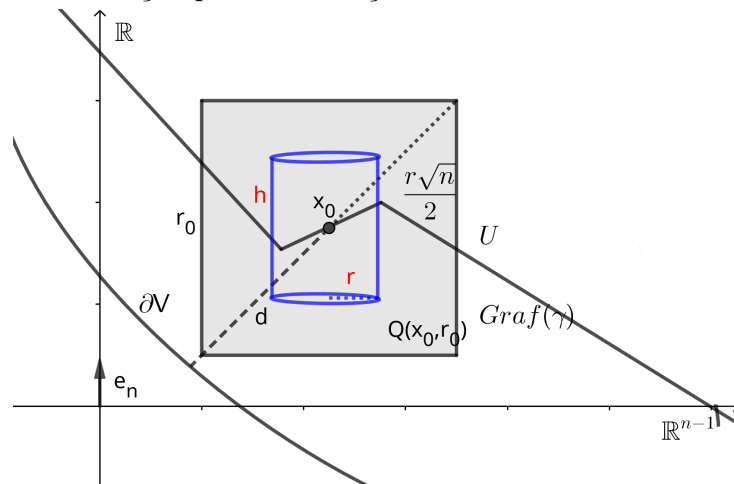
### 3.5 Operador de extensão para funções $W^{1,p}$

Antes de enuciar e provarmos o *Teorema de Extensão*, faremos uma construção de um cilindro que depende da geometria da  $\partial\mathbf{U}$ , necessário para a prova do teorema em questão.

Seja  $\mathbf{U} \subset\subset \mathbf{V} \subset\subset \mathbb{R}^n$ , onde a fronteira de  $\mathbf{U}$  é Lipschitz. Logo, fixemos  $x_0 \in \partial\mathbf{U}$  e tomemos  $d := \operatorname{dist}(x_0, \partial\mathbf{V})$ . Pela definição, existe  $r_0 > 0$  e uma função  $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal que a menos de uma rotação ou reordenação dos eixos,

$$\mathbf{U} \cap Q(x_0, r_0) = \{y \in \mathbf{U}; \gamma(y') < y_n\} \cap Q(x_0, r_0)$$

Figura 4 – Ilustração para construção do Cilindro.



Fonte: Acervo próprio

Se a metade da diagonal do cubo  $Q(x_0, r_0)$ , isto é,  $\frac{1}{2}r_0\sqrt{n}$  é maior do que  $d$  então, tome  $r_1 > 0$  tal que

$$\frac{r_1\sqrt{n}}{2} < \frac{d}{2}.$$

Então

$$r_1 < \frac{r_0}{\sqrt{n}}.$$

Se  $r_0$  já satisfaz  $\frac{r_0\sqrt{n}}{2} < d$  então, tome  $r_1 = \frac{r_0}{2}$ .

Note que  $Q(x_0, r_1) \subset\subset V$ , em particular,  $(Q(x_0, r_1) - U) \subset V$ . Dessa forma, defina  $h = r_1$  que irá ser a “altura” do cilindro. Determinaremos a  $r > 0$  que será o raio da bola na base de modo que

$$\max_{|x_0 - y| \leq r} |\gamma(x'_0) - y'| < \frac{h}{4}.$$

Com efeito, veja que

$$|\gamma(x'_0) - \gamma(y')| = \text{Lip}(\gamma)|y' - x'_0| \leq r \text{Lip}(\gamma).$$

Dáí, seja  $r > 0$  de modo que

$$r \text{Lip}(\gamma) < \frac{h}{4}.$$

Então,

$$r < \frac{h}{4 \text{Lip}(\gamma)}.$$

Como não temos controle sobre a constante Lipschitz de  $\gamma$ , tome  $r := \min \left\{ \frac{h}{4}, \frac{h}{4 \text{Lip}(\gamma)} \right\}$ .

Por fim, denotaremos esse cilindro, por  $C(x_0, r, h)$  e observe também, que

$U \cap C(x_0, r, h) \subset\subset U \cap Q(x_0, r_0)$  e se  $y \in U \cap C(x_0, r, h)$  temos, sendo  $x_{0,n} := e_n \cdot x_0$  que

$$\begin{aligned} \gamma(y') < y_n &= y_n - x_{0,n} + x_{0,n} \\ &\leq |x_{0,n} - y_n| + x_{0,n} \\ &\leq |x_{0,n} - \gamma(y')| + x_{0,n} \\ &\leq \frac{h}{4} + x_{0,n} \\ &< x_{0,n} + h. \end{aligned}$$

Então,

$$U \cap C(x_0, r, h) = \{y \in U; |x'_0 - y'| < r, \gamma(y') < y_n < x_{0,n} + h\}.$$

Claramente, temos que  $C(x_0, r, h) \subset\subset V$ . Isso finaliza a construção do cilindro.

**Teorema 3.9** (Teorema de Extensão). *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado com fronteira Lipschitz,  $1 \leq p < \infty$  Seja  $V \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $U \subset\subset V$ . Então, existe um operador linear limitado,*

$$E : W^{1,p}(U) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que  $Ef = f$  em  $U$  e  $\text{spt}(Ef) \subset V$  para toda  $f \in W^{1,p}(U)$ .

*Demonstração.* Dado  $x \in \partial U$  existem  $r, h > 0$  e  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$  e um cilindro  $C(x, r, h)$  como na construção anterior. Isto é,

$$\begin{cases} \max_{|x'-y'| < r} |\gamma(y') - x_n| < \frac{h}{4}, \\ U \cap C(x, r, h) = \{y \in U; |x' - y'| < r, \gamma(y') < y_n < x_n + h\}, \\ C(x, r, h) \subset V. \end{cases}$$

Denotemos então,

$$C := C(x, r, h) \quad \text{e} \quad C' := C\left(x, \frac{r}{2}, \frac{h}{2}\right)$$

$$U^+ := C' \cap U \quad \text{e} \quad U^- := C' - U.$$

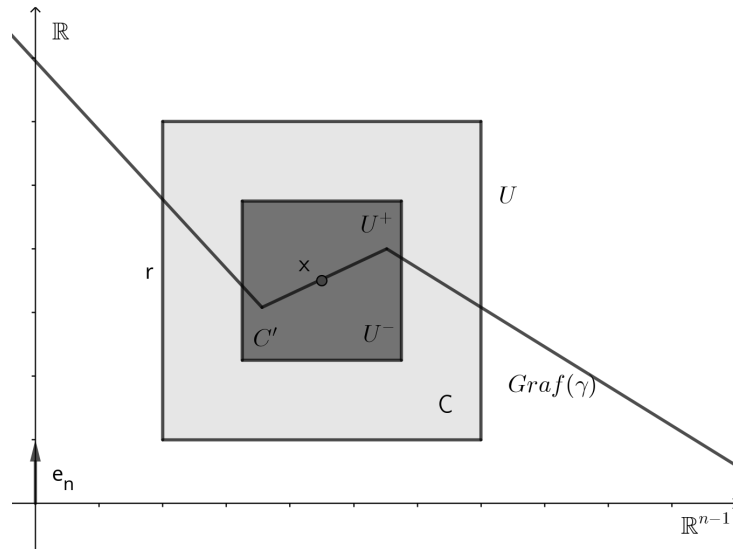
Seja  $f \in C^1(\bar{U})$  e suponhamos que  $\text{spt}(f) \subset C' \cap \bar{U}$ . Assim, defina

$$\begin{aligned} f^+(y) &= f(y) && \text{se } y \in \bar{U}^+, \\ f^-(y) &= f(y', 2\gamma(y') - y_n) && \text{se } y \in \bar{U}^-. \end{aligned}$$

É fácil ver que  $f^+ = f^- = f$  em  $\partial U \cap C'$ . Verificaremos que  $f^-$  está bem definida.

**Afirmção:**  $(y', 2\gamma(y') - y_n) \in U \cap C$  para todo  $y \in \bar{U}^-$ .

**Prova da Afirmção:** Note que se  $(y', 2\gamma(y') - y_n) \in U \cap C$  então,

Figura 5 – Ilustração para os conjuntos  $U^+$  e  $U^-$ .

Fonte: Acervo próprio

$$\gamma(y') < 2\gamma(y') - y_n < x_n + h.$$

Suponha por absurdo que existe  $z \in \overline{U}^-$  tal que

$$\gamma(z') > 2\gamma(z') - z_n > x_n + h.$$

Temos de  $2\gamma(z') - z_n > x_n + h$  que

$$\begin{aligned} h &< 2\gamma(z') - z_n - x_n \\ &= \gamma(z') - x_n + \gamma(z') - z_n \\ &\leq |\gamma(z') - x_n + \gamma(z') - z_n| \\ &\leq |\gamma(z') - x_n| + |\gamma(z') - z_n| \\ &< \frac{h}{4} + |\gamma(z') - z_n| \\ &= \frac{h}{4} + |\gamma(z') - x_n + x_n - z_n| \\ &\leq \frac{h}{4} + |\gamma(z') - x_n| + |x_n - z_n| \\ &< \frac{h}{4} + \frac{h}{4} + |x_n - z_n| \\ &< \frac{h}{4} + \frac{h}{4} + \frac{h}{2} \\ &= h. \end{aligned}$$

Então,  $h < h$ , absurdo! E de  $\gamma(z') > 2\gamma(z') - z_n$ , vem que  $z_n > \gamma(z')$ . Absurdo, pois  $z \in \overline{U}^-$ . Portanto, a afirmação segue.

Como essa afirmação vemos que  $f^-$  está bem definida em  $\overline{U}^-$ .

**Afirmação:**  $\|f^-\|_{W^{1,p}(U^-)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$ .

**Prova da Afirmação:** Com efeito, seja  $\varphi \in C_c^1(U^-)$  e  $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$  uma seqüência de funções  $C^\infty$  tal que

$$\begin{cases} \gamma_k \geq \gamma, \\ \gamma_k \longrightarrow \gamma \text{ uniformemente,} \\ D\gamma_k \longrightarrow D\gamma \text{ quase sempre,} \\ \sup_k \|D\gamma_k\|_{L^\infty} < \infty. \end{cases}$$

A construção dessa seqüência de funções é da seguinte maneira. Seja para cada  $k$ ,  $\eta_{\frac{1}{k}}$  o *Mollifier* canônico, e defina  $\psi_k := \eta_{\frac{1}{k}} * \gamma$ . Por construção,  $\psi_k$  converge uniformemente para  $\gamma$ . Defina então, para  $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\gamma_k(y') := \sup_{j \geq k} \psi_j(y').$$

Logo, é imediato que  $\gamma_k \geq \gamma$  e pelas propriedades do *Mollifier* canônico que  $\gamma_k \longrightarrow \gamma$  uniformemente e  $D\gamma_k \longrightarrow D\gamma$  quase sempre. Fixemos  $k$  então, para  $z' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\begin{aligned} |D\psi_k(z')| &= \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta_{\frac{1}{k}}(z' - y') D\gamma(y') \, dy' \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta_{\frac{1}{k}}(z' - y') |D\gamma(y')| \, dy' \leq \|D\gamma\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}. \end{aligned}$$

uma vez que  $\gamma \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{n-1})$ . Assim,

$$\sup_k \|D\psi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty.$$

Como  $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$  é uma subsequência o mesmo segue para ela. Logo,  $\sup_k \|D\gamma_k\|_{L^\infty} < \infty$ .

Seguindo em frente, fixemos  $1 \leq i \leq n-1$ , então,

$$\begin{aligned}
\int_{U^-} f^-(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy &= \int_{U^-} f(y', 2\gamma(y') - y_n) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U^-} f(y', 2\gamma_k(y') - y_n) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy \\
&= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U^-} \frac{\partial f(y', 2\gamma_k(y') - y_n)}{\partial y_i} \varphi dy \\
&= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U^-} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y', 2\gamma_k(y') - y_n) \frac{\partial (y_j)}{\partial y_i} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial f}{\partial x_n}(y', 2\gamma_k(y') - y_n) \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_i} \right) \varphi dy \\
&= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U^-} \left( \frac{\partial f}{\partial y_i}(y', 2\gamma_k(y') - y_n) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial f}{\partial x_n}(y', 2\gamma_k(y') - y_n) \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_i} \right) \varphi dy \\
&= - \int_{U^-} \left( \frac{\partial f}{\partial y_i}(y', 2\gamma(y') - y_n) + 2 \frac{\partial f}{\partial x_n}(y', 2\gamma(y') - y_n) \frac{\partial \gamma}{\partial y_i} \right) \varphi dy.
\end{aligned}$$

Dessa forma, então para  $1 \leq i \leq n-1$  a derivada fraca é dada por

$$\frac{\partial f(y', 2\gamma(y') - y_n)}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i}(y', 2\gamma(y') - y_n) + 2 \frac{\partial f}{\partial x_n}(y', 2\gamma(y') - y_n) \frac{\partial \gamma}{\partial y_i}$$

e pela regularidade de  $f$  e  $\gamma$  a mesma pertence a  $L^p(U^-)$ . Para  $i = n$  vem de maneira similar,

$$\begin{aligned}
\int_{U^-} f^-(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} dy &= \int_{U^-} f(y', 2\gamma(y') - y_n) \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} dy \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U^-} f(y', 2\gamma_k(y') - y_n) \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} dy \\
&= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U^-} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y', 2\gamma_k(y') - y_n) \frac{\partial (y_j)}{\partial y_n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_n}(y', 2\gamma_k(y') - y_n)(-1) \right) \varphi dy \\
&= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U^-} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n}(y', 2\gamma_k(y') - y_n)(-1) \right) \varphi dy \\
&= - \int_{U^-} - \frac{\partial f}{\partial x_n}(y', 2\gamma(y') - y_n) \varphi dy.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial f(y', 2\gamma(y') - y_n)}{\partial y_n} = - \frac{\partial f}{\partial x_n}(y', 2\gamma(y') - y_n)$$

que pela regularidade da  $f$  e da  $\gamma$  pertence a  $L^p(U^-)$ . Assim,  $f^- \in W^{1,p}(U^-)$ .

Agora, seja  $T : \bar{U}^- \rightarrow U$  tal que  $\mathbf{y} \mapsto T(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}', 2\gamma(\mathbf{y}') - \mathbf{y}_n)$ . Note que  $T$  é Lipschitz. Então, a matriz jacobiana de  $T$  existe a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Logo,

$$JT(\mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \gamma}{\partial y_1}(\mathbf{y}') \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \gamma}{\partial y_2}(\mathbf{y}') \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{\partial \gamma}{\partial y_3}(\mathbf{y}') \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\partial \gamma}{\partial y_{n-1}}(\mathbf{y}') \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

que pelo *Desenvolvimento de Laplace*,

$$JT(\mathbf{y}) = \left| \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma}{\partial y_j}(\mathbf{y}') (-1)^{n+j} \det(A_j) + (-1)^{2n} (-1) \det(I_{n-1}) \right|,$$

onde  $A_j$  é a matriz que resta ao omitirmos a linha e a coluna no qual  $\frac{\partial \gamma}{\partial y_j}(\mathbf{y}')$  pertence. Note ainda que para cada  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , a matriz  $A_j$  possui uma coluna nula, dessa forma,

$$\det(A_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Com isso,

$$JT(\mathbf{y}) = |(-1)^{2n} (-1)| = 1.$$

Por outro lado, temos que  $f^-(\mathbf{y}) = f(T(\mathbf{y}))$ . Logo,

$$\begin{aligned} |Df^-(\mathbf{y})|^p = |Df(T(\mathbf{y}))|^p &\leq \left( \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(T(\mathbf{y})) + 2 \frac{\partial f}{\partial y_n}(T(\mathbf{y})) \frac{\partial \gamma}{\partial y_i}(\mathbf{y}') \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y_n}(T(\mathbf{y})) \right| \right)^p \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(T(\mathbf{y})) \right| + 2 \left| \frac{\partial f}{\partial y_n}(T(\mathbf{y})) \right| \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial y_i}(\mathbf{y}') \right| \right)^p \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(T(\mathbf{y})) \right| + 2 \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(T(\mathbf{y})) \right| \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial y_i}(\mathbf{y}') \right| \right)^p \\ &\leq \mathbf{n}^p (1 + 2\mathbf{n} |\mathbf{D}\gamma(\mathbf{y}')|)^p |Df(T(\mathbf{y}))|^p \\ &\leq \mathbf{n}^p (1 + 2\mathbf{n} \text{Lip}(\gamma))^p \\ &= C |Df(T(\mathbf{y}))|^p \end{aligned}$$

onde  $C := \mathbf{n}^p (1 + 2\mathbf{n} \text{Lip}(\gamma))^p$ . Passando a integral sobre  $U^-$  temos que

$$\int_{U^-} |Df^-(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \leq C \int_{U^-} |Df(T(\mathbf{y}))|^p d\mathbf{y}.$$

Usaremos a mudança de variáveis oriunda da *Fórmula da Área*, na integral do



lado direito da desigualdade. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{U}^-} |\mathbf{Df}(\mathbf{T}(\mathbf{y}))|^p \, d\mathbf{y} &= \int_{\mathbf{U}^-} |\mathbf{Df}(\mathbf{T}(\mathbf{y}))|^p \mathbf{JT}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
 &= \int_{\mathbf{U}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{T}^{-1}(z)} |\mathbf{Df}(\mathbf{T}(\mathbf{y}))|^p \, d\mathcal{H}^n(z) \\
 &= \int_{\mathbf{U}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{T}^{-1}(z)} |\mathbf{Df}(z)|^p \, dz \\
 &= \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{Df}(z)|^p \mathcal{H}^0(\mathbf{T}^{-1}(z)) \, dz.
 \end{aligned}$$

Agora veja que para cada  $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -mensurável com  $\mathcal{L}^n(\mathbf{A}) < \infty$ , temos pela *Fórmula da Área* que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(\mathbf{A} \cap \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{A}} \mathbf{JT}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{A}} 1 \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(\mathbf{A} \cap \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})) - \chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0.$$

Então,  $\mathcal{H}^0(\mathbf{A} \cap \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})) = \chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{y})$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Fazendo  $\mathbf{A} = \mathbf{U}$ , vem que

$$\int_{\mathbf{U}} |\mathbf{Df}(z)|^p \mathcal{H}^0(\mathbf{T}^{-1}(z)) \, dz = \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{Df}(z)|^p \chi_{\mathbf{U}}(z) \, dz = \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{Df}(z)|^p \, dz.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbf{U}^-} |\mathbf{Df}^-(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} \leq C \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{Df}(z)|^p \, dz.$$

De maneira similar, vemos também que usando a mudança de variáveis,

$$\int_{\mathbf{U}^-} |f^-(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{U}} |f(z)|^p \, dz.$$

Logo,

$$\int_{\mathbf{U}^-} |\mathbf{Df}^-(\mathbf{y})|^p + |f^-(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} \leq C \int_{\mathbf{U}} |\mathbf{Df}(z)|^p + |f(z)|^p \, dz.$$

de onde vem que  $\|f^-\|_{W^{1,p}(\mathbf{U}^-)} \leq C_1 \|f\|_{W^{1,p}(\mathbf{U})}$ ,  $C_1 := C^{\frac{1}{p}}$ . Provando então a afirmação.

Doravante, seja

$$\bar{f} := \begin{cases} f^+ & \text{em } \bar{\mathbf{U}}^+ \\ f^- & \text{em } \bar{\mathbf{U}}^- \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n - (\bar{\mathbf{U}}^+ \cup \bar{\mathbf{U}}^-). \end{cases}$$

Observe que

$$\bar{f} = f^+ \chi_{\bar{u}^+} + f^- \chi_{\bar{u}^-} - f \chi_{\partial u \cap C'}.$$

Claramente,  $\bar{f}$  é uma extensão de  $f$ , temos que  $\bar{f}$  é contínua, pois poderia haver problemas em  $\partial U \cap C'$ , contudo, temos por construção, que  $f^+ = f^-$  em  $\partial U \cap C'$ .

**Afirmção:**  $\bar{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**Prova da Afirmção:** É suficiente, tomar  $\varphi \in C_c^1(C')$  pois,  $\text{spt}(\bar{f}) \subset C'$ . Assim, para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy &= \int_{C'} \bar{f} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy \\ &= \int_{C'} (f^+ \chi_{\bar{u}^+} + f^- \chi_{\bar{u}^-} - f \chi_{\partial u \cap C'}) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy \\ &= \int_{\bar{u}^+} f^+ \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy + \int_{\bar{u}^-} f^- \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy - \int_{\partial u \cap C'} f \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy \\ &= \int_{\bar{u}^+} f^+ \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy + \int_{\bar{u}^-} f^- \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy &= - \int_{\bar{u}^+} \frac{\partial f^+}{\partial y_i} \varphi dy + \int_{\partial u^+} T f^+ \varphi \nu_i d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\bar{u}^-} \frac{\partial f^-}{\partial y_i} \varphi dy \\ &\quad + \int_{\partial u^-} T f^- \varphi (-\nu_i) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\bar{u}^+} \frac{\partial f^+}{\partial y_i} \varphi dy - \int_{\bar{u}^-} \frac{\partial f^-}{\partial y_i} \varphi dy + \int_{\partial u \cap C'} T f \varphi \nu_i + T f \varphi (-\nu_i) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\bar{u}^+} \frac{\partial f^+}{\partial y_i} \varphi dy - \int_{\bar{u}^-} \frac{\partial f^-}{\partial y_i} \varphi dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial f^+}{\partial y_i} \chi_{\bar{u}^+} + \frac{\partial f^-}{\partial y_i} \chi_{\bar{u}^-} \right) \varphi dy. \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  sendo  $e_{i=1}^n$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$

$$D\bar{f} := \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f^+}{\partial y_i} \chi_{\bar{u}^+} + \frac{\partial f^-}{\partial y_i} \chi_{\bar{u}^-} \right) e_i$$

o que prova a afirmação.

Agora, tomando o módulo, elevando a  $p$  e passando a integral sobre  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{D}\bar{f}|^p \, dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f^+}{\partial y_i} \right| \chi_{u^+} + \left| \frac{\partial f^-}{\partial y_i} \right| \chi_{\bar{u}^-} \right)^p \, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (n|Df^+|\chi_{u^+} + n|Df^-|\chi_{\bar{u}^-})^p \, dy \\
&\leq n^p 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |Df^+|^p \chi_{u^+} + |Df^-|^p \chi_{\bar{u}^-} \, dy \\
&= n^p 2^{p-1} \left( \int_{u^+} |Df^+|^p \, dy + \int_{\bar{u}^-} |Df^-|^p \, dy \right) \\
&\leq n^p 2^{p-1} \left( \int_{u_{unc'}} |Df|^p \, dy + C \int_{u_{unc'}} |Df|^p \, dy \right) \\
&= n^p 2^{p-1} (1 + C) \int_{u_{unc'}} |Df|^p \, dy \\
&= C_2 \int_{u_{unc'}} |Df|^p \, dy,
\end{aligned}$$

onde  $C_2 := n^p 2^{p-1} (1 + C)$ .

De maneira similar, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}|^p \, dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |f^+ \chi_{\bar{u}^+} + f^- \chi_{\bar{u}^-} - f \chi_{\partial u_{unc'}}|^p \, dy \\
&\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f^+ \chi_{\bar{u}^+} + f^- \chi_{\bar{u}^-}|^p + |f \chi_{\partial u_{unc'}}|^p \, dy \\
&= 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f^+ \chi_{\bar{u}^+} + f^- \chi_{\bar{u}^-}|^p \, dy \\
&\leq 2^{2(p-1)} \int_{\mathbb{R}^n} |f^+ \chi_{\bar{u}^+}|^p + |f^- \chi_{\bar{u}^-}|^p \, dy \\
&= 2^{2(p-1)} \left( \int_{\bar{u}^+} |f^+|^p \, dy + \int_{\bar{u}^-} |f^-|^p \, dy \right) \\
&\leq 2^{2(p-1)} \left( \int_u |f|^p \, dy + \int_u |f|^p \, dy \right) \\
&= 2^{2(p-1)+1} \int_u |f|^p \, dy.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{D}\bar{f}|^p + |\bar{f}|^p \, dy &\leq C_2 \int_{u_{unc'}} |Df|^p \, dy + \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}|^p \, dy \\
&\leq C_2 \int_u |Df|^p \, dy + 2^{2(p-1)+1} \int_u |f|^p \, dy \\
&\leq C_3 \int_u |Df|^p + |f|^p \, dy.
\end{aligned}$$

onde  $C_3 := \max\{C_2, 2^{2(p-1)+1}\}$ . Ou seja,

$$\|\bar{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \|f\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Nosso objetivo a priori é aprimorar essa estimativa, ou seja, mostraremos que se  $f \in C^1(\bar{U})$  então, vale a estimativa acima. Anteriormente, em adição, pediamos que  $\text{spt}(f) \subset U \cap C'$ .

Para esse caso mais geral aproveitaremos da definição de fronteira e Lipschitz e compacidade de  $\partial U$  para construir uma cobertura finita por cilindros que dependem da geometria de  $\partial U$ . Com efeito, para cada  $x \in \partial U$  existem  $r_x, h_x > 0$  e  $\gamma_x : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , e uma família de cubos abertos  $\{C_x\}_{x \in \partial U}$ ,  $C_x := C(x, r_x, h_x)$  tais que

$$\partial U \subset \bigcup_{x \in \partial U} C'_x, \quad \text{onde } C'_x := C\left(x, \frac{r_x}{2}, \frac{h_x}{2}\right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{|x'-y'| < r_x} |\gamma_x(y') - x_n| < \frac{h_x}{4}, \\ U \cap C_x = \{y \in U; |x' - y'| < r_x, \gamma(y') < y_n < x_n + h_x\}, \\ C_x \subset V. \end{array} \right.$$

Em particular, existem  $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \partial U$  tal que a família  $\{C'_i\}_{i=1}^N$ ,  $C'_i := (x_i, r_i, h_i)$ ,  $r_i := r_{x_i}$  e  $h_i := h_{x_i}$  é uma cobertura pra  $\partial U$ , ou seja,

$$\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N C'_i$$

neste caso  $C'_i := C'_{x_i}$ .

Com isso, sejam  $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$  funções suaves tais que,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \zeta_i \leq 1, \text{ spt}(\zeta_i) \subset C'_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \\ 0 \leq \zeta_0 \leq 1, \text{ spt}(\zeta_0) \subset U. \\ \sum_{i=0}^N \zeta_i = 1 \text{ em } U \cup \bigcup_{i=1}^N C'_i. \end{array} \right.$$

Definamos então

$$U_i^+ := C'_i \cap U \quad \text{e} \quad C_i^- := C' - U.$$

Seja  $f \in C^1(\bar{U})$ , tome para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $f_i := f\zeta_i$ , e

$$\begin{array}{ll} f_i^+(y) = f_i(y) & \text{se } y \in \bar{U}_i^+ \\ f_i^-(y) = f_i(y', 2\gamma_i(y') - y_n) & \text{se } y \in \bar{U}_i^- \end{array}$$

onde  $\gamma_i := \gamma_{x_i}$ .

Neste caso, tome para  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\bar{f}_i := \begin{cases} f_i^+ & \text{em } \bar{U}^+ \\ f_i^- & \text{em } \bar{U}^- \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n - (\bar{U}^+ \cup \bar{U}^-). \end{cases}$$

Observe também que para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\bar{f}_i = f_i^+ \chi_{\bar{U}_i^+} + f_i^- \chi_{\bar{U}_i^-} - f_i \chi_{\partial U_i \cap C'}$$

e

$$\bar{f}_0(\mathbf{y}) := f_0 \chi_U(\mathbf{y}) = \begin{cases} f_0(\mathbf{y}) & \text{se } \mathbf{y} \in U. \\ 0 & \text{se } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n - U. \end{cases}$$

Tome então,

$$\bar{f} := \sum_{i=0}^N \bar{f}_i = \sum_{i=1}^N f_i^+ \chi_{\bar{U}_i^+} + f_i^- \chi_{\bar{U}_i^-} - f_i \chi_{\partial U_i \cap C'} + f_0 \chi_U.$$

Note que  $\bar{f}$  está bem definida é contínua e estende  $f$ . Por construção,  $\bar{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  e

$$D\bar{f} = \sum_{i=1}^N Df_i^+ \chi_{\bar{U}_i^+} + Df_i^- \chi_{\bar{U}_i^-} + Df_0 \chi_U.$$

Então passando o módulo e elevando a  $p$ , vem que

$$\begin{aligned}
|\overline{Df}|^p &= \left| \sum_{i=1}^N Df_i^+ \chi_{\overline{U}_i^+} + Df_i^- \chi_{\overline{U}_i^-} + Df_0 \chi_U \right|^p \\
&\leq \left( \left| \sum_{i=1}^N Df_i^+ \chi_{\overline{U}_i^+} + Df_i^- \chi_{\overline{U}_i^-} \right| + |Df_0| \chi_U \right)^p \\
&\leq 2^{p-1} \left( \left| \sum_{i=1}^N Df_i^+ \chi_{\overline{U}_i^+} + Df_i^- \chi_{\overline{U}_i^-} \right|^p + |Df_0|^p \chi_U \right) \\
&\leq 2^{p-1} \left[ \left( \sum_{i=1}^N |Df_i^+ \chi_{\overline{U}_i^+} + Df_i^- \chi_{\overline{U}_i^-}| \right)^p + |Df_0|^p \chi_U \right] \\
&\leq 2^{p-1} \left( 2^{(N-1)(p-1)} \sum_{i=1}^N |Df_i^+ \chi_{\overline{U}_i^+} + Df_i^- \chi_{\overline{U}_i^-}|^p + |Df_0|^p \chi_U \right) \\
&\leq 2^{p-1} \left( 2^{(N-1)(p-1)} \sum_{i=1}^N (|Df_i^+| \chi_{\overline{U}_i^+} + |Df_i^-| \chi_{\overline{U}_i^-})^p + |Df_0|^p \chi_U \right) \\
&\leq 2^{p-1} \left( 2^{(N-1)(p-1)} \sum_{i=1}^N 2^{p-1} (|Df_i^+|^p \chi_{\overline{U}_i^+} + |Df_i^-|^p \chi_{\overline{U}_i^-}) + |Df_0|^p \chi_U \right) \\
&\leq 2^{p-1} \left( 2^{N(p-1)} \sum_{i=1}^N |Df_i^+|^p \chi_{\overline{U}_i^+} + |Df_i^-|^p \chi_{\overline{U}_i^-} + 2^{N(p-1)} |Df_0|^p \chi_U \right) \\
&= 2^{(N+1)(p-1)} \left( \sum_{i=1}^N |Df_i^+|^p \chi_{\overline{U}_i^+} + |Df_i^-|^p \chi_{\overline{U}_i^-} + |Df_0|^p \chi_U \right).
\end{aligned}$$

Passando integral sobre o  $\mathbb{R}^n$  vem que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{D}\bar{f}|^p \, dy &\leq 2^{(N+1)(p-1)} \left( \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{D}f_i^+|^p \chi_{\bar{u}_i^+} \, dy + \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{D}f_i^-|^p \chi_{\bar{u}_i^-} \, dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{D}f_0|^p \chi_U \, dy \right) \\
&= 2^{(N+1)(p-1)} \left( \sum_{i=1}^N \int_{\bar{u}_i^+} |\mathbf{D}f_i^+|^p \, dy + \int_{\bar{u}_i^-} |\mathbf{D}f_i^-|^p \, dy + \int_U |\mathbf{D}f_0|^p \, dy \right) \\
&\leq 2^{(N+1)(p-1)} \left( \sum_{i=1}^N \int_U |\mathbf{D}f_i|^p \, dy + C_i \int_U |\mathbf{D}f_i|^p \, dy + \int_U |\mathbf{D}f_0|^p \, dy \right) \\
&= 2^{(N+1)(p-1)} \left( \sum_{i=1}^N (1 + C_i) \int_U |\mathbf{D}f_i|^p \, dy + \int_U |\mathbf{D}f_0|^p \, dy \right) \\
&= 2^{(N+1)(p-1)} \left( \sum_{i=1}^N (1 + C_i) \int_U |\mathbf{D}f_i|^p \, dy + (1 + 0) \int_U |\mathbf{D}f_0|^p \, dy \right) \\
&= 2^{(N+1)(p-1)} \sum_{i=0}^N (1 + C_i) \int_U |\mathbf{D}f_i|^p \, dy, \quad \text{tomando } C_0 = 0 \\
&\leq 2^{(N+1)(p-1)} \sum_{i=0}^N (1 + C_i) \int_U |\mathbf{D}f\zeta_i + \mathbf{D}\zeta_i f|^p \, dy \\
&\leq 2^{(N+1)(p-1)} \sum_{i=0}^N (1 + C_i) \int_U (|\mathbf{D}f\zeta_i| + |\mathbf{D}\zeta_i f|)^p \, dy \\
&\leq 2^{(N+2)(p-1)} \sum_{i=0}^N (1 + C_i) \int_U |\mathbf{D}f\zeta_i|^p + |\mathbf{D}\zeta_i f|^p \, dy \\
&\leq 2^{(N+2)(p-1)} \sum_{i=0}^N (1 + C_i) \int_U |\mathbf{D}f|^p + \|\mathbf{D}\zeta_i\|_{L^\infty(C'_i)}^p |f|^p \, dy \\
&\leq 2^{(N+2)(p-1)} \sum_{i=0}^N (1 + C_i) \max \left\{ 1, \|\mathbf{D}\zeta_i\|_{L^\infty(C'_i)}^p \right\} \int_U |\mathbf{D}f|^p + |f|^p \, dy \\
&= C_4 \int_U |\mathbf{D}f|^p + |f|^p \, dy
\end{aligned}$$

onde  $C_4 := 2^{(N+2)(p-1)} \sum_{i=0}^N (1 + C_i) \max \left\{ 1, \|\mathbf{D}\zeta_i\|_{L^\infty(C'_i)}^p \right\}$ .

Agora nos voltando para  $\bar{f}$ , temos para cada  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
|\bar{f}_i|^p &= |f_i^+ \chi_{\bar{u}_i^+} + f_i^- \chi_{\bar{u}_i^-} - f_i \chi_{\partial u_i \cap C'}|^p \\
&\leq (|f_i^+ \chi_{\bar{u}_i^+} + f_i^- \chi_{\bar{u}_i^-}| + |f_i \chi_{\partial u_i \cap C'}|)^p \\
&\leq 2^{p-1} (|f_i^+ \chi_{\bar{u}_i^+} + f_i^- \chi_{\bar{u}_i^-}|^p + |f_i|^p \chi_{\partial u_i \cap C'}) \\
&\leq 2^{p-1} (|f_i^+|^p \chi_{\bar{u}_i^+} + |f_i^-|^p \chi_{\bar{u}_i^-}) + |f_i|^p \chi_{\partial u_i \cap C'} \\
&\leq 2^{2(p-1)} (|f_i^+|^p \chi_{\bar{u}_i^+} + |f_i^-|^p \chi_{\bar{u}_i^-} + |f_i|^p \chi_{\partial u_i \cap C'}).
\end{aligned}$$

Tomando a integral sobre o  $\mathbb{R}^n$ , vem que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}_i|^p \, dy &\leq 2^{2(p-1)} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f_i^+|^p \chi_{\bar{u}_i^+} \, dy + \int_{\mathbb{R}^n} |f_i^-|^p \chi_{\bar{u}_i^-} \, dy + \int_{\mathbb{R}^n} |f_i|^p \chi_{\partial u_i \cap C'} \, dy \right) \\
&\leq 2^{2(p-1)} \left( \int_{\bar{u}_i^+} |f_i^+|^p \, dy + \int_{\bar{u}_i^-} |f_i^-|^p \, dy \right) \\
&\leq 2^{2(p-1)} \left( \int_U |f|^p \, dy + \int_U |f|^p \, dy \right), \quad \text{usando mudança de variáveis.} \\
&\leq 2^{2(p-1)+1} \int_U |f|^p \, dy.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}|^p \, dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=1}^N \bar{f}_i + \bar{f}_0 \right|^p \, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \left| \sum_{i=1}^N \bar{f}_i \right| + |\bar{f}_0| \right)^p \, dy \\
&\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=1}^N \bar{f}_i \right|^p + |\bar{f}_0|^p \, dy \\
&\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{i=1}^N |\bar{f}_i| \right)^p \, dy + 2^{p-1} \int_U |f|^p \, dy \\
&\leq 2^{N(p-1)} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}_i|^p \, dy + 2^{p-1} \int_U |f|^p \, dy \\
&\leq 2^{N(p-1)} \sum_{i=1}^N 2^{2(p-1)+1} \int_U |f|^p \, dy + 2^{p-1} \int_U |f|^p \, dy \\
&\leq N 2^{N(p-1)} 2^{2(p-1)+1} \int_U |f|^p \, dy + 2^{p-1} \int_U |f|^p \, dy \\
&= 2N 2^{N(p-1)} 2^{2(p-1)+1} \int_U |f|^p \, dy = C_5 \int_U |f|^p \, dy
\end{aligned}$$



onde  $C_5 := 2N2^{N(p-1)}2^{2(p-1)+1}$ .

Como essas estimativas temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |D\bar{f}|^p + |\bar{f}|^p \, d\mathbf{y} &\leq C_4 \int_{\mathbf{U}} |Df|^p + |f|^p \, d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}|^p \, d\mathbf{y} \\ &\leq C_4 \int_{\mathbf{U}} |Df|^p + |f|^p \, d\mathbf{y} + C_5 \int_{\mathbf{U}} |f|^p \, d\mathbf{y} \\ &= C_4 \int_{\mathbf{U}} |Df|^p \, d\mathbf{y} + (C_4 + C_5) \int_{\mathbf{U}} |f|^p \, d\mathbf{y} \\ &\leq C_6 \int_{\mathbf{U}} |Df|^p + |f|^p \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

onde  $C_6 := C_4 + C_5$ .

Dessa forma,

$$\|D\bar{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_7 \|Df\|_{W^{1,p}(\mathbf{U})}$$

com  $C_7 := C_6^{\frac{1}{p}}$ .

Por fim, defina

$$E : C^1(\bar{\mathbf{U}}) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

dada por  $Ef := \bar{f}$ .

Mostraremos que  $E$  é linear, em particular, pela estimativa acima  $E$  é um operador linear limitado. De fato, sejam  $f, g \in C^1(\bar{\mathbf{U}})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  então,

$$\begin{aligned} E(\alpha f + g) &= \overline{\alpha f + g} \\ &= \sum_{i=1}^N (\alpha f + g)_i^+ \chi_{\bar{\mathbf{U}}_i^+} + (\alpha f + g)_i^- \chi_{\bar{\mathbf{U}}_i^-} - (\alpha f + g)_i \chi_{\partial \mathbf{U}_i \cap C'} + (\alpha f + g)_0 \chi_{\mathbf{U}} \\ &= \alpha \bar{f} + \bar{g} \\ &= \alpha Ef + Eg \end{aligned}$$

o que mostra a linearidade de  $E$ .

A extensão do operador  $E$  para o espaço  $W^{1,p}(\mathbf{U})$  é similar ao do *Operador do Traço*. O argumento segue de maneira similar, claramente, fazendo as mudanças necessárias. Finalizamos aqui o teorema em questão. ■

### 3.6 Desigualdades de Sobolev

#### 3.6.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

**Definição 3.6.** Para  $1 \leq p < n$  chamamos

$$p^* := \frac{np}{n-p}$$

o conjugado de Sobolev de  $p$ . Claramente,  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ .

**Teorema 3.10** (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Seja  $1 \leq p < n$ . Então, existe uma constante  $C > 0$ , tal que  $C = C(n, p)$  e*

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para toda  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

*Demonstração.* Seja  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ . Fixado  $i = 1, 2, \dots, n$  defina  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\lambda(x_i) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  claramente  $\lambda \in C_c^1(\mathbb{R})$ . Logo, para cada  $y_i \in \mathbb{R}$ , vem que

$$\lambda(x_i) - \lambda(y_i) = \int_{y_i}^{x_i} \lambda'(t_i) dt_i.$$

Fazendo  $t \rightarrow -\infty$ , vem que

$$\lambda(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \lambda'(t_i) dt_i.$$

Logo, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n) dt_i.$$

Então,

$$\begin{aligned} |f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)| &\leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n) \right| dt_i \\ &= \int_{-\infty}^{x_i} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n) \cdot e_i| dt_i \\ &\leq \int_{-\infty}^{x_i} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i. \end{aligned}$$

Logo, para  $i = 1, 2, \dots, n$

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i. \quad 1$$

Elevando ambos os lados a  $\frac{1}{n-1}$  vem que

$$|f(x)|^{\frac{1}{n-1}} \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
|f(\mathbf{x})|^{\frac{1}{n-1}} &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
\Rightarrow |f(\mathbf{x})|^{\frac{2}{n-1}} &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} |f(\mathbf{x})| \\
\Rightarrow |f(\mathbf{x})|^{\frac{2}{n-1}} &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\quad \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\quad \vdots \\
\Rightarrow |f(\mathbf{x})|^{\frac{n}{n-1}} &\leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (49)
\end{aligned}$$

Integrando com respeito a  $x_1$  em  $\mathbb{R}$  a desigualdade em (49) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\mathbf{x})|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(t_1, x_2, \dots, x_n)| dt_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \quad (50)
\end{aligned}$$

Olhando para (50), para  $i = 2, 3, \dots, n$ , faça

$$g_i(x_1) := \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{e} \quad g := \prod_{i=2}^n g_i.$$

Claramente,  $g, g_i \in C_c^1(\mathbb{R})$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , logo,  $g, g_i \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Como  $1 = \underbrace{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-1}}_{n-1 \text{ vezes}}$  temos pela *Desigualdade de Holder Generalizada* que

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \prod_{i=2}^n \|g_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R})}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}(n-1)} dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
 &= \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right) dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
 &= \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dx_1 dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
 &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(t_1, x_2, \dots, x_n)| dt_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
 &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
 &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(t_1, x_2, \dots, x_n)| dt_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
 &\quad \cdot \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dx_1 dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Agora integrando a desigualdade acima com respeito a  $x_2$ , temos pelo mesmo argumento, fazendo as mudanças necessárias que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(t_1, x_2, \dots, x_n)| dt_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
 &\quad \cdot \prod_{i=3}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dx_1 dx_2 dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Indutivamente, procedendo de maneira análoga,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |Df(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dx_1 \cdots dt_i \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
 &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{1^*} dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)| dx.$$

O que prova o desejado para  $\mathbf{p} = 1$ .

Agora seja  $1 < \mathbf{p} < \mathbf{n}$  e definamos  $\mathbf{g} := |f|^\gamma$ , com  $\gamma > 0$  uma constante a ser determinada. Formalmente, aplicando a desigualdade obtida anteriormente, tendo em vista a *Desigualdade de Hölder*, temos que

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{g}(\mathbf{x})|^{\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-1}} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \\ \Rightarrow & \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^{\gamma \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-1}} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}}} \leq \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^{\gamma-1} |\mathbf{D}f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \\ \Rightarrow & \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^{\gamma \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-1}} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}}} \leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^{(\gamma-1) \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}-1}} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{\mathbf{p}-1}{\mathbf{p}}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{D}f(\mathbf{x})|^\mathbf{p} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}}} \\ \Rightarrow & \frac{\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^{\gamma \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-1}} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}}}}{\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^{(\gamma-1) \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}-1}} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{\mathbf{p}-1}{\mathbf{p}}}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{D}f(\mathbf{x})|^\mathbf{p} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}}}. \end{aligned}$$

Logo, é razoável pedirmos que  $\gamma$  seja tal que

$$\gamma \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-1} = (\gamma-1) \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \gamma &= (\gamma-1) \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}(\mathbf{p}-1)} \\ &= \frac{\gamma\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}(\mathbf{p}-1)} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}(\mathbf{p}-1)} \\ \Rightarrow 0 &= \frac{\gamma\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}(\mathbf{p}-1)} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}(\mathbf{p}-1)} - \gamma \\ 0 &= \gamma \left( \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}(\mathbf{p}-1)} - 1 \right) - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}(\mathbf{p}-1)} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{\frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}(\mathbf{p}-1)}}{\left( \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}(\mathbf{p}-1)} - 1 \right)} \\ &= \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1) - \mathbf{n}(\mathbf{p}-1)} \\ &= \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}-\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Com isso, vem que

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-1} &= \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}-\mathbf{p}} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-1} \\ &= \frac{\mathbf{np}}{\mathbf{n}-\mathbf{p}} = \mathbf{p}^*. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\gamma - 1) \frac{p}{p-1} &= \left( \frac{p(n-1)}{n-p} - 1 \right) \frac{p}{p-1} \\
&= \frac{n(p-1)}{n-p} \frac{p}{p-1} \\
&= \frac{np}{n-p} = p^*.
\end{aligned}$$

Portanto, defina  $\gamma := \frac{p(n-1)}{n-p}$  então,

$$\begin{aligned}
\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{n-1-(p-1)}{n}} &\leq \frac{p(n-1)}{n-p} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\Rightarrow \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq \frac{p(n-1)}{n-p} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Tome  $C := \frac{p(n-1)}{n-p}$ . Portanto, o resultado segue. ■

### 3.6.2 Desigualdade de Poincaré em bolas

**Lema 3.1.** *Para cada  $1 \leq p < \infty$  existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que*

$$\int_{B(x, r)} |f(y) - f(z)|^p dy \leq Cr^{n+p-1} \int_{B(x, r)} |Df(y)|^p |y - z|^{1-n} dy$$

para cada  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(B(x, r))$  e  $z \in B(x, r)$ .

*Demonstração.* Dados  $y, z \in B(x, r)$ , temos que

$$\begin{aligned}
f(y) - f(z) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(z + t(y - z)) dt \\
&= \int_0^1 Df(z + t(y - z)) \cdot (y - z) dt \\
&= \int_0^1 Df(z + t(y - z)) dt \cdot (y - z).
\end{aligned}$$

Passando o módulo e elevando a  $p$ , temos que

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(z)|^p &= \left| \int_0^1 Df(z + t(y - z)) dt \cdot (y - z) \right|^p \\
&\leq \left| \int_0^1 Df(z + t(y - z)) dt \right|^p |y - z|^p \\
&\leq |y - z|^p \int_0^1 |Df(z + t(y - z))|^p dt.
\end{aligned}$$

Assim, para  $s > 0$  temos que

$$\begin{aligned}
& \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,s)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\
& \leq \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,s)} |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^p \int_0^1 |\mathbf{D}f(\mathbf{z} + t(\mathbf{y} - \mathbf{z}))|^p \, dt \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\
& \leq \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,s)} s^p \int_0^1 |\mathbf{D}f(\mathbf{z} + t(\mathbf{y} - \mathbf{z}))|^p \, dt \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\
& = s^p \int_0^1 \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,s)} |\mathbf{D}f(\mathbf{z} + t(\mathbf{y} - \mathbf{z}))|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \, dt.
\end{aligned}$$

Fazendo  $\mathbf{w} = \mathbf{z} + t\mathbf{y} - tz$  então,  $d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{w}) = t^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y})$ . Note também que,  $|\mathbf{z} - \mathbf{w}| = t|\mathbf{y} - \mathbf{z}| \leq ts$ . Logo,

$$\begin{aligned}
& \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,s)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\
& \leq s^p \int_0^1 \frac{1}{t^{n-1}} \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,ts)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{w}) \, dt \\
& = s^{p+n-1} \int_0^1 \frac{1}{(ts)^{n-1}} \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,ts)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{w}) \, dt \\
& = s^{p+n-1} \int_0^1 \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,ts)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p (ts)^{1-n} \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{w}) \, dt \\
& = s^{p+n-1} \int_0^1 \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,ts)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{w}) \, dt.
\end{aligned}$$

Considerando  $\alpha = st$  temos que  $d\alpha = sdt$ . Logo, pela *Coordenadas Polares*,

$$\begin{aligned}
& \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,s)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\
& \leq s^{p+n-2} \int_0^s \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,\alpha)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{w}) \, d\alpha \\
& = s^{p+n-2} \int_{B(x,r) \cap B(z,s)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\int_0^{+\infty} \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,s)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \, ds = \int_{B(x,r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})|^p \, d\mathbf{y}.$$

Em particular, é suficiente considerar a integral com respeito a variável  $s$ , no intervalo

$[0, 3r]$ , uma vez que  $\partial B(z, s) \cap B(x, r) = \emptyset$  para todo  $2r < s \leq 3r$ . Então,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})|^p \, d\mathbf{y} &= \int_0^{3r} \int_{B(x,r) \cap \partial B(z,s)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \, ds \\
&\leq \int_0^{3r} s^{p+n-2} \int_{B(x,r) \cap B(z,s)} |Df(\mathbf{w})|^p |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathbf{w} \, ds \\
&\leq \int_0^{3r} s^{p+n-2} \int_{B(x,r)} |Df(\mathbf{w})|^p |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathbf{w} \, ds \\
&= \int_0^{3r} s^{p+n-2} \, ds \int_{B(x,r)} |Df(\mathbf{w})|^p |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathbf{w} \\
&= \frac{3^{p+n-1}}{p+n-1} r^{p+n-1} \int_{B(x,r)} |Df(\mathbf{w})|^p |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathbf{w} \\
&= Cr^{p+n-1} \int_{B(x,r)} |Df(\mathbf{w})|^p |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathbf{w},
\end{aligned}$$

onde  $C := \frac{3^{p+n-1}}{p+n-1}$ . ■

**Teorema 3.11** (Desigualdade de Poincaré). *Para cada  $1 \leq p < n$  existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que*

$$\left( \int_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^{p^*} \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq Cr \left( \int_{B(x,r)} |Df|^p \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in W^{1,p}(B(x, r))$  e  $(f)_{x,r} := \int_{B(x,r)} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$ .

*Demonstração.* Por densidade, podemos assumir  $f \in C^1(B(x, r))$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} |f(\mathbf{y}) - (f)_{x,r}|^p \, d\mathbf{y} &= \int_{B(x,r)} \left| \int_{B(x,r)} (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})) \, d\mathbf{z} \right|^p \, d\mathbf{y} \\
&\leq \int_{B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})|^p \, d\mathbf{z} \, d\mathbf{y} \\
&= \int_{B(x,r)} \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})|^p \, d\mathbf{z} \, d\mathbf{y} \\
&\leq \int_{B(x,r)} \frac{Cr^{n+p-1}}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} |Df(\mathbf{z})|^p |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathbf{z} \, d\mathbf{y} \\
&= \int_{B(x,r)} \frac{Cr^{p-1}}{\alpha(n)} |Df(\mathbf{z})|^p \int_{B(x,r)} |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^{1-n} \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{z}.
\end{aligned}$$



Fazendo  $w = y - z$ ,  $dw = dy$  e  $|w| = |y - z| \leq |y - x| + |z - x| = 2r$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} |f(y) - (f)_{x,r}|^p dy &\leq \int_{B(x,r)} \frac{Cr^{p-1}}{\alpha(n)} |Df(z)|^p \int_{B(0,2r)} |w|^{1-n} dw dz \\
&= \int_{B(x,r)} \frac{Cr^{p-1}}{\alpha(n)} |Df(z)|^p \int_0^{2r} \int_{\partial B(0,t)} |w|^{1-n} d\mathcal{H}^{n-1}(w) dt dz \\
&= \int_{B(x,r)} \frac{Cr^{p-1}}{\alpha(n)} |Df(z)|^p \int_0^{2r} t^{1-n} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,s)) dt dz \\
&= \int_{B(x,r)} \frac{Cr^{p-1}}{\alpha(n)} |Df(z)|^p \int_0^{2r} n\alpha(n)t^{n-1}t^{1-n} dt dz \\
&= \int_{B(x,r)} nCr^{p-1} |Df(z)|^p \int_0^{2r} dt dz \\
&= 2nCr^p \int_{B(x,r)} |Df(z)|^p dz \\
&= C_1 r^p \int_{B(x,r)} |Df(z)|^p dz,
\end{aligned}$$

onde  $C_1 := 2nC$ .

**Afirmação:** Existe uma constante  $C_5 = C_5(n, p)$  tal que

$$\left( \int_{B(x,r)} |g|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_5 \left( \int_{B(x,r)} |Dg|^p dy + \int_{B(x,r)} |g|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda  $g \in W^{1,p}(B(x, r))$ .

**Prova da Afirmação:** A princípio consideremos  $g \in W^{1,p}(B(0, 1))$  pela regularidade da fronteira de  $\partial B(0, 1)$ , temos que existe uma constante  $C_2$  e  $\bar{g} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\bar{g}|_{B(0,1)} = g$  e

$$\|\bar{g}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|g\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left( \int_{B(0,1)} |g|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{g}|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq C_3 \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D\bar{g}|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_3 \left( \int_{B(0,r)} |D\bar{g}|^p + |\bar{g}|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_3 C_2 \left( \int_{B(0,1)} |Dg|^p + |g|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_4 \left( \int_{B(0,1)} |Dg|^p + |g|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

onde  $C_4 := C_3 C_2$ .

Suponha agora que  $g \in W^{1,p}(B(x, r))$ . Então, defina  $h : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(y) = g(x + ry)$  e para  $\varepsilon > 0$   $g_\varepsilon := \eta_\varepsilon * g$  onde  $\eta_\varepsilon$  é o *Mollifier* Canônico. Seja  $\varphi \in C_c^1(B(0, 1))$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ . Note que dado  $y \in B(0, 1)$  e  $t > 0$ . Temos pelo *Teorema do Valor Médio* que existe  $\theta \in (0, 1)$

$$\left| h(y) \left( \frac{\varphi(y + te_i) - \varphi(y)}{t} \right) \right| = \left| h(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y + \theta e_i) \right| \leq |h(y)| \|D\varphi\|_{L^\infty(B(0,1))}.$$

Como  $|h| \|D\varphi\|_{L^\infty(B(0,1))} \in L^1(B(0, 1))$  e  $h(y) \left( \frac{\varphi(y + te_i) - \varphi(y)}{t} \right) \rightarrow h(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}$  quando  $t \rightarrow 0$  temos pelo *Teorema da Convergência Dominada* que

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} h(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B(0,1)} g(x + ry) \left( \frac{\varphi(y + te_i) - \varphi(y)}{t} \right) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} \frac{1}{r^n} g(z) \left( \frac{\varphi\left(\frac{z-x}{r} + te_i\right) - \varphi\left(\frac{z-x}{r}\right)}{t} \right) dz \\ &= \frac{1}{r} \int_{B(x,r)} \frac{1}{r^n} g(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \left( \frac{z-x}{r} \right) dz \\ &= -\frac{1}{r} \int_{B(x,r)} \frac{1}{r^n} \frac{\partial g}{\partial z_i}(z) \varphi \left( \frac{z-x}{r} \right) dz \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{B(x,r)} \frac{1}{r^n} \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z_i}(z) \varphi \left( \frac{z-x}{r} \right) dz \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{B(x,r)} \frac{1}{r^n} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{g_\varepsilon(z + te_i) - g_\varepsilon(z)}{t} \right) \varphi \left( \frac{z-x}{r} \right) dz. \end{aligned}$$

Como argumentamos anteriormente,

$$\left| \left( \frac{g_\varepsilon(z + te_i) - g_\varepsilon(z)}{t} \right) \varphi \left( \frac{z-x}{r} \right) \right| \leq \|Dg_\varepsilon\|_{L^\infty(B(x,r))} \left| \varphi \left( \frac{z-x}{r} \right) \right|.$$

Então, novamente, pelo *Teorema da Convergência Dominada*

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} h(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{B(x,r)} \frac{1}{r^n} \left( \frac{g_\varepsilon(z + te_i) - g_\varepsilon(z)}{t} \right) \varphi \left( \frac{z-x}{r} \right) dz \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{B(0,1)} \left( \frac{g_\varepsilon(x + ry + te_i) - g_\varepsilon(x + ry)}{t} \right) \varphi(y) dy \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{B(0,1)} r \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y_i}(x + ry) \varphi(y) dy \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,1)} \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y_i}(x + ry) \varphi(y) dy \\ &= -\int_{B(0,1)} \frac{\partial g}{\partial y_i}(x + ry) \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Então,  $h \in W^{1,p}(B(0,1))$ . Aplicando a desigualdade obtida anteriormente, temos que

$$\underbrace{\left( \int_{B(0,1)} |h|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}}}_{(i)} \leq C_4 \underbrace{\left( \int_{B(0,1)} |Dh|^p + |h|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}}_{(ii)}.$$

Olhando para (i),

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(0,1)} |h|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} &= \left( \int_{B(0,1)} |g(x+ry)|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \left( \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |g(z)|^{p^*} dz \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= (\alpha(n))^{\frac{1}{p^*}} \left( \int_{B(x,r)} |g(z)|^{p^*} dz \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Agora de (ii), temos que

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(0,1)} |Dh|^p + |h|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_{B(0,1)} |Dg(x+ry)|^p + |g(x+ry)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{B(0,1)} r^p |Dg(x+ry)|^p dy + \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |g(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} r^p |Dg(z)|^p dz + \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |g(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\alpha(n))^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B(x,r)} r^p |Dg(z)|^p + |g(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(x,r)} |g(z)|^{p^*} dz \right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq \frac{(\alpha(n))^{\frac{1}{p}}}{(\alpha(n))^{\frac{1}{p^*}}} C_4 \left( \int_{B(x,r)} r^p |Dg(z)|^p + |g(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_5 \left( \int_{B(x,r)} r^p |Dg(z)|^p + |g(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

onde  $C_5 := (\alpha(n))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}} C_4 = (\alpha(n))^{\frac{1}{n}} C_4$ . O que prova a afirmação.

Por fim, apliquemos a estimativa da afirmação provada anteriormente, em

$g := f - (f)_{x,r}$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
\left( \int_{B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}|^{p^*} dz \right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq C_5 \left( \int_{B(x,r)} r^p |D(f(z) - (f)_{x,r})|^p + |f(z) - (f)_{x,r}|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_5 \left( \int_{B(x,r)} r^p |Df(z)|^p dz + \int_{B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_5 \left( \int_{B(x,r)} r^p |Df(z)|^p dz + C_1 r^p \int_{B(x,r)} |Df(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_5 (1 + C_1)^{\frac{1}{p}} r \left( \int_{B(x,r)} |Df(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_6 r \left( \int_{B(x,r)} |Df(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

onde  $C_6 := C_5(1 + C_1)^{\frac{1}{p}}$ . ■

### 3.6.3 Desigualdade de Morrey

**Definição 3.7.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $0 < \alpha \leq 1$ . Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é Hölder contínua, com expoente  $\alpha$  se*

$$[f]_{C^{0,\alpha}(U)} := \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Denotamos por  $C^{0,\alpha}(U)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  o espaço das funções Hölder contínua em  $\mathbb{R}^n$ . Muniremos  $C^{0,\alpha}$  com a seguinte norma,

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \sup_{x \in U} |f(x)| + [f]_{C^{0,\alpha}(U)}, \quad f \in C^{0,\alpha}(U).$$

Em particular,  $(C^{0,\alpha}(U), \|\cdot\|_{C^{0,\alpha}})$  é um espaço de Banach.

**Teorema 3.12** (Desigualdade de Morrey). *Para cada  $n < p < \infty$  existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que*

$$|f(y) - f(z)| \leq Cr \left( \int_{B(x,r)} |Df|^p dw \right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in W^{1,p}(B(x, r))$  e  $y, z \in B(x, r)$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Em particular, se  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  então, o limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} (f)_{x,r} = f^*(x)$$

existe para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f^*$  é Hölder contínua com expoente  $1 - \frac{n}{p}$ .

*Demonstração.* Primeiro assumamos que  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Sejam  $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n$ . Então,

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})| \leq |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{w})| + |f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{z})|.$$

Tomando a média em  $B(\mathbf{x}, r)$  com respeito a  $\mathbf{w}$ , vem que

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})| &\leq \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{w})| \, d\mathbf{w} + \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{z})| \, d\mathbf{w} \\ &\leq \frac{Cr^{n+1-1}}{\alpha(n)r^n} \left( \int_{B(\mathbf{x}, r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})| |\mathbf{y} - \mathbf{w}|^{1-n} \, d\mathbf{w} + \int_{B(\mathbf{x}, r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})| |\mathbf{z} - \mathbf{w}|^{1-n} \, d\mathbf{w} \right) \\ &= \frac{C}{\alpha(n)} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})| (|\mathbf{y} - \mathbf{w}|^{1-n} + |\mathbf{z} - \mathbf{w}|^{1-n}) \, d\mathbf{w} \\ &\leq \frac{C}{\alpha(n)} \left( \int_{B(\mathbf{x}, r)} (|\mathbf{y} - \mathbf{w}|^{1-n} + |\mathbf{z} - \mathbf{w}|^{1-n})^{\frac{p-1}{p}} \, d\mathbf{w} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \cdot \left( \int_{B(\mathbf{x}, r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p \, d\mathbf{w} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{C}{\alpha(n)} \left( 2^{\frac{1}{p-1}} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |\mathbf{w} - \mathbf{y}|^{\frac{(1-n)p}{p-1}} \, d\mathbf{w} + 2^{\frac{1}{p-1}} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^{\frac{(1-n)p}{p-1}} \, d\mathbf{w} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \cdot \left( \int_{B(\mathbf{x}, r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p \, d\mathbf{w} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Fazendo,  $\xi_1 = \mathbf{w} - \mathbf{y}$  e  $\xi_2 = \mathbf{w} - \mathbf{z}$  então, respectivamente,  $d\xi_1 = d\mathbf{w}$  e  $d\xi_2 = d\mathbf{w}$ . Além

disso,  $|\xi_1|, |\xi_2| \leq 2r$ . Então,

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(z)| &\leq \frac{C}{\alpha(n)} \left( 2^{\frac{1}{p-1}} \int_{B(0,2r)} |\xi_1|^{\frac{(1-n)p}{p-1}} d\xi_1 + 2^{\frac{1}{p-1}} \int_{B(0,2r)} |\xi_2|^{\frac{(1-n)p}{p-1}} d\xi_2 \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \cdot \left( \int_{B(x,r)} |Df(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{C}{\alpha(n)} \left( 2^{\frac{1}{p-1}} \int_0^{2r} \left( \int_{\partial B(0,t)} |\xi_1|^{\frac{(1-n)p}{p-1}} d\mathcal{H}^{n-1}(\xi_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{\partial B(0,t)} |\xi_2|^{\frac{(1-n)p}{p-1}} d\mathcal{H}^{n-1}(\xi_2) \right) dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Df(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{C}{\alpha(n)} \left( 2^{\frac{1}{p-1}+1} n \alpha(n) \int_0^{2r} t^{n-1} t^{\frac{(1-n)p}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Df(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{C}{\alpha(n)} \left( 2^{\frac{p}{p-1}} n \alpha(n) \int_0^{2r} t^{\frac{(1-n)p}{p-1}+n-1} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Df(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{C}{\alpha(n)} \left( 2^{\frac{p}{p-1}} n \alpha(n) \frac{(2r)^{\frac{(1-n)p}{p-1}+n}}{\frac{(1-n)p}{p-1}+n} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Df(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{C}{\alpha(n)} \left( 2^{\frac{p}{p-1}} n \alpha(n) \frac{2^{\frac{(1-n)p}{p-1}+n}}{\frac{(1-n)p}{p-1}+n} \right)^{\frac{p-1}{p}} r^{\left(\frac{(1-n)p+n(p-1)}{p-1}\right) \frac{p-1}{p}} \\
&\quad \cdot \left( \int_{B(x,r)} |Df(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_1 r^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Df(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

onde  $C_1 := \frac{C}{\alpha(n)} \left( 2^{\frac{p}{p-1}} n \alpha(n) \frac{2^{\frac{(1-n)p}{p-1}+n}}{\frac{(1-n)p}{p-1}+n} \right)^{\frac{p-1}{p}}$ .

Agora seja  $f \in W^{1,p}(B(x,r))$  e  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$ . Tome  $y, z \in B(x,r)$  pontos de Lebesgue de  $f$ . Então,

$$|f^\varepsilon(y) - f^\varepsilon(z)| \leq C_1 r^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Df^\varepsilon(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vem que

$$|f(y) - f(z)| \leq C_1 r^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Df(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (51)$$

a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Em particular,

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})| &\leq C_1 r^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(\mathbf{x},r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p d\mathbf{w} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_1 (\alpha(n))^{\frac{1}{p}} r \left( \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(\mathbf{x},r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p d\mathbf{w} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_2 r \left( \int_{B(\mathbf{x},r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p d\mathbf{w} \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

onde  $C_2 := C_1 (\alpha(n))^{\frac{1}{p}}$ .

**Afirmação:** Seja  $n < p < \infty$  e  $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\alpha := 1 - \frac{n}{p}$ , então, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

**Prova da Afirmação:** Sejam  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  pontos de Lebesgue de  $f$  e tome  $r := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ . Por (51), vem que

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| &\leq C_1 r^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(\mathbf{x},r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p d\mathbf{w} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(\mathbf{x},r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{w})|^p d\mathbf{w} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_1 \|\mathbf{D}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-\frac{n}{p}} \\ &= C_3 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-\frac{n}{p}}. \end{aligned}$$

onde  $C_3 := C_1 \|\mathbf{D}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ . Logo,

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-\frac{n}{p}}} \leq C_3 < \infty.$$

Por outro lado, seja  $r > 0$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , tome  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$ . Logo,

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x})| &\leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| + |f(\mathbf{y})| \\ &\leq \int_{B(\mathbf{x},r)} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} + \int_{B(\mathbf{x},r)} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &\leq C \int_{B(\mathbf{x},r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{y})| |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-n} d\mathbf{y} + (\alpha(n)r^n)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \left( \int_{B(\mathbf{x},r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B(\mathbf{x},r)} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{(1-n)\frac{p}{p-1}} d\mathbf{y} \right)^{\frac{p-1}{p}} + (\alpha(n)r^n)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq C \|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left( n\alpha(n) \frac{2^{\frac{(1-n)p}{p-1}+n}}{\frac{(1-n)p}{p-1}+n} \right)^{\frac{p-1}{p}} r^{1-\frac{n}{p}} + (\alpha(n)r^n)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \left( C \left( n\alpha(n) \frac{2^{\frac{(1-n)p}{p-1}+n}}{\frac{(1-n)p}{p-1}+n} \right)^{\frac{p-1}{p}} r^{1-\frac{n}{p}} + (\alpha(n)r^n)^{\frac{p-1}{p}} \right) \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_4 \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

$$\text{onde } C_4 := \left( C \left( n\alpha(n) \frac{2^{\frac{(1-n)p}{p-1}+n}}{\frac{(1-n)p}{p-1}+n} \right)^{\frac{p-1}{p}} r^{1-\frac{n}{p}} + (\alpha(n)r^n)^{\frac{p-1}{p}} \right).$$

Tomando  $r = 1$ , vem que para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|f(x)| \leq C_5 \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$  onde

$$C_5 := \left( C \left( n\alpha(n) \frac{2^{\frac{(1-n)p}{p-1}+n}}{\frac{(1-n)p}{p-1}+n} \right)^{\frac{p-1}{p}} + (\alpha(n))^{\frac{p-1}{p}} \right). \text{ Ent\~{a}o,}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \leq C_5 \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Dai,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} &\leq (C_4 + C_5) \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&= C_6 \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

com  $C_6 := C_4 + C_5$  o que prova a afirma\~{c}o.

Por fim,  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  seja  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $f_k \rightarrow f$  em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Em particular,  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  \u00e9 de Cauchy em  $W^{1,p}$ . Claramente, por (51), para cada  $k$ ,  $f_k \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ . Ent\~{a}o, pela afirma\~{c}o, para cada  $k$  e  $l$

$$\|f_k - f_l\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C_5 \|f_k - f_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Logo,  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  \u00e9 de Cauchy em  $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ . Dessa forma, existe  $\bar{f} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $f_k$  converge em  $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  para  $\bar{f}$ . Consequentemente,  $f_k$  converge uniformemente para  $\bar{f}$ .

Observe ent\~{a}o, que

$$\|f - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f - f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f_k - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todo  $k$ . Dessa forma, fazendo  $k \rightarrow \infty$  vem que  $\|f - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$ . Ent\~{a}o,  $f = \bar{f}$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.

Note tamb\u00e9m que,  $f^* = \bar{f}$  em quase todo ponto. Ou seja,



$$f^*(x) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} (f)_{x,r} = \bar{f}(x), & \text{se o limite existe.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja  $\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R}^n; f^*(x) \neq \bar{f}(x)\}$ . Claramente,

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n; \bar{f}(x) > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n; \bar{f}(x) < 0\}$$

e  $\mathcal{L}^n(\mathcal{A}) = 0$ . Suponhamos que  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  existe  $x_0 \in \mathcal{A}$ , digamos que  $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n; \bar{f}(x) > 0\}$ , pela continuidade de  $\bar{f}$  existe um bola aberta  $B$  contida em  $\mathcal{A}$ . Logo,  $0 < \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(\mathcal{A}) = 0$ , absurdo! Portanto,  $\mathcal{A} = \emptyset$ . Portanto,  $f^*(x) = \bar{f}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Isso implica que se  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  o  $\lim_{r \rightarrow 0} (f)_{x,r}$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . ■

#### 4 FUNÇÕES DE VARIAÇÃO LIMITADA BV

O conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  sempre será um aberto do  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 4.1.** Uma função  $f \in L^1(U)$  possui Variação Limitada em  $U$  se

$$\sup \left\{ \int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx; \varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Usaremos a notação  $BV(U)$  para representar o espaço das funções de Variação Limitada em  $U$ . A sigla  $BV$  vem do inglês *Bounded Variation*.

**Definição 4.2.** Um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{L}^n$ -mensurável possui Perímetro Finito em  $U$  se  $\chi_E \in BV(U)$ .

Os conjuntos de Perímetro Finito, também são conhecidos como Conjuntos de Caccioppoli.

**Definição 4.3.** Uma função  $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$  possui localmente Variação Limitada em  $U$  se para cada  $V \subset\subset U$

$$\sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \varphi \, dx; \varphi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Usaremos a notação  $BV_{\text{loc}}(U)$  para denotar o espaço das funções  $f \in L^1_{\text{loc}}$  que satisfazem essa propriedade.

**Definição 4.4.** Um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{L}^n$ -mensurável possui localmente Perímetro Finito em  $U$  se  $\chi_E \in BV_{\text{loc}}(U)$ .

**Teorema 4.1** (Teorema de Estrutura para funções  $BV_{\text{loc}}$ ). *Seja  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ . Então existe uma medida de Radon  $\mu$  sobre  $U$  e uma função  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $\mu$ -mensurável tal que,*

$$(i) \quad |\sigma(x)| = 1 \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

$$(ii) \quad \int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_U \varphi \cdot \sigma \, d\mu$$

para toda  $\varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ .

*Demonstração.* Defina  $L : C_c^1(U; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $\varphi \mapsto - \int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx$ . Como  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$  temos que

$$C(V) := \sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \varphi \, dx; \varphi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty$$

para cada  $V \subset\subset U$ . Logo, fixado  $V$  temos que

$$|L(\varphi)| \leq C(V) \|\varphi\|_{L^\infty(V)}. \quad (52)$$

Por outro lado, seja  $K \subset U$  compacto e  $V$  aberto, de modo que  $K \subset V \subset\subset U$ .

Queremos estender o funcional  $L$  para um  $\bar{L}$  definido sobre  $C_c(\mathbf{U}, \mathbb{R}^n)$ . Por (52), temos que o *Teorema de Hahn-Banach* garante a existência dessa extensão. Enfim, seja  $\varphi \in C_c(\mathbf{V}; \mathbb{R}^n)$  com  $\text{spt}(\varphi) \subset \mathbf{K}$  e  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  uma sequência de funções  $C_c^1(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n)$  que converge uniformemente para  $\varphi$ . Portanto, defina

$$\bar{L}(\varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} L(\varphi_k).$$

Observe que (52) garante que  $\bar{L}(\varphi)$  não depende da escolha da sequência. Em particular,  $\bar{L}$  está bem definido e

$$|\bar{L}(\varphi)| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} L(\varphi_k) \right| \leq C(\mathbf{V}) \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_\infty = \|\varphi\|_\infty.$$

Dessa forma,

$$\sup \{ \bar{L}(\varphi); \varphi \in C_c(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1, \text{spt}(\varphi) \subset \mathbf{K} \} < \infty.$$

Portanto, estamos nas hipóteses do *Teorema da Representação de Riesz* e o mesmo garante a existência de  $\mu$  e  $\sigma$ , de modo a satisfazer (i) e (ii). ■

Com tal resultado, temos que se uma função é de variação limitada em  $\mathbf{U}$ , existe uma medida de Radon  $\mu$  e uma função  $\sigma : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  associada a mesma. Denotaremos a medida  $\mu$  por  $\|Df\|$  e sua restrição a  $\sigma$ , isto é  $\|Df\|_{\lfloor \sigma}$ , por  $[Df]$ . Com esta notação, temos que (ii), no teorema acima pode ser escrita assim,

$$\int_{\mathbf{U}} f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot \sigma \, d\|Df\| = - \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[DF], \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n).$$

Por outro lado, quando  $f = \chi_E$ , onde  $E \subset \mathbb{R}^n$ , e possui Perímetro finito localmente em  $\mathbf{U}$  usaremos  $\|\partial E\|$  para denotar a medida associada a  $f$  e  $\nu_E$  para denotar  $-\sigma$ . Daí, (ii) do teorema acima, se reescreve dessa forma,

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\|, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n).$$

Assim,  $\|Df\|$  é a medida de variação de  $f$  em  $\mathbf{U}$  e  $\|\partial E\|$  é a medida do perímetro de  $E$  em  $\mathbf{U}$ . Segue do teorema acima que,

$$\begin{aligned} \|Df\|(\mathbf{V}) &= \sup \left\{ \int_{\mathbf{V}} f \operatorname{div} \varphi \, dx; \varphi \in C_c^1(\mathbf{V}; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\}, \\ \|\partial E\|(\mathbf{V}) &= \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx; \varphi \in C_c^1(\mathbf{V}; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{V} \subset \subset \mathbf{U}$ . Além disso, se  $f \in \mathbf{BV}_{\text{loc}}(\mathbf{U}) \cap L^1(\mathbf{U})$  então  $f \in L^1(\mathbf{U})$  se, e somente

se,  $\|\mathbf{Df}\|(\mathbf{U}) < \infty$ . Neste caso munimos  $\mathbf{BV}(\mathbf{U})$  com a seguinte norma,

$$\|f\|_{\mathbf{BV}(\mathbf{U})} = \|f\|_{L^1(\mathbf{U})} + \|\mathbf{Df}\|(\mathbf{U}).$$

Mais ainda, seja  $f \in \mathbf{BV}_{\text{loc}}(\mathbf{U})$ , escrevamos,

$$\mu^i = \|\mathbf{Df}\|_{\sigma^i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

onde  $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^n)$  é a função  $\|\mathbf{Df}\|$ -mensurável associada a  $f$ . Ou seja, fixado  $i$ ,

$$\mu^i(\mathbf{K}) = \int_{\mathbf{K}} \sigma^i d\|\mathbf{Df}\|,$$

para cada  $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Logo, pelo *Teorema da Decomposição de Lebesgue*  $\mu^i = \mu_{\text{ac}}^i + \mu_s^i$  onde,

$$\mu_{\text{ac}}^i \ll \mathcal{L}^n \quad \text{e} \quad \mu_s^i \perp \mathcal{L}^n$$

Olhando então para  $\mu_{\text{ac}}^i$ , temos pelo *Teorema da Diferenciação de Medidas de Radon*, que existe uma função  $f_i \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{U})$  tal que  $\mu_{\text{ac}}^i = \mathcal{L}^n|_{f_i}$ . Logo, para cada  $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^n$  compacto,

$$\mu_{\text{ac}}^i(\mathbf{K}) = \int_{\mathbf{K}} f_i \, d\mathcal{L}^n$$

Em particular,

$$f_i(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_{\text{ac}}^i(\mathbf{B}(x, r))}{\alpha(n)r^n} = D_{\mathcal{L}^n} \mu_{\text{ac}}^i(x).$$

Com isso em mãos definimos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} := f_i, & i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ \mathbf{Df} := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \\ [\mathbf{Df}]_{\text{ac}} := (\mu_{\text{ac}}^1, \mu_{\text{ac}}^2, \dots, \mu_{\text{ac}}^n) = \mathcal{L}^n|_{\mathbf{Df}}, \\ [\mathbf{Df}]_s := (\mu_s^1, \mu_s^2, \dots, \mu_s^n). \end{cases}$$

Logo,  $\mathbf{Df} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n)$  é a densidade de parte absolutamente contínua de  $[\mathbf{Df}]$  com respeito a  $\mathcal{L}^n$ .

**Exemplo:** Seja  $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbf{U})$ . Neste exemplo denotaremos o gradiente fraco de  $f$  por  $\nabla f$ .

Então, para cada  $\mathbf{V} \subset\subset \mathbf{U}$  e  $\varphi \in C^1_c(\mathbf{V}; \mathbb{R}^m)$ , com  $|\varphi| \leq 1$ , temos que

$$\int_{\mathbf{U}} f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\mathbf{U}} \nabla f \cdot \varphi \, dx \leq \int_{\mathbf{V}} |\nabla f| \, dx < \infty.$$

Tomando o supremo nas  $\varphi$  temos que

$$\|Df\|(V) \leq \|\nabla f\|_{L^1(V)}.$$

Daí segue toda função de  $W_{\text{loc}}^{1,1}(U)$  é de variação limitada.

Mostraremos que

$$\|Df\|(V) = \int_V |\nabla f| \, dx.$$

Primeiro, seja  $K \subset V$  compacto e  $\zeta \in C_c^1(V)$  com  $0 \leq \zeta \leq 1$  e  $\zeta(x) = 1$  sobre  $K$ . Logo, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$-\int_K f_{x_i} \zeta \, dx = \int_K f \zeta_{x_i} \, dx = -\int_K \zeta \, d\mu^i.$$

onde a primeira igualdade decorre do fato de  $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(U)$  e a segunda da definição de função variação limitada uma vez que a mesma também o é. Portanto,

$$\int_K f_{x_i} \, dx = \int_K d\mu^i,$$

logo,  $\mathcal{L}^n \lfloor_{f_{x_i}}(K) = \mu^i(K)$ . Como  $V$  é aberto, tomando o supremos nos  $K \subset V$  compacto segue que

$$\mathcal{L}^n \lfloor_{f_{x_i}}(V) = \mu^i(V).$$

Daí temos que se  $Z \subset \mathbb{R}^n$  é tal que  $\mathcal{L}^n(A) = 0$  então  $\mu^i(A) = 0$ . Portanto,  $\mu^i \ll \mathcal{L}^n$  segue então pelo *Teorema da Diferenciação de Medidas de Radon* que

$$\mu^i(A) = \int_A D_{\mathcal{L}^n} \mu^i \, dx$$

para todo  $A$   $\mu^i$ -mensurável. Dessa forma temos que  $\int_A f_{x_i} - D_{\mathcal{L}^n} \mu^i \, dx = 0$  para todo  $A$   $\mu^i$ -mensurável. Portanto,  $f_{x_i} = D_{\mathcal{L}^n} \mu^i$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p.. Com isso, temos que  $Df = \nabla f$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p.

Por outro lado, fixe  $\varepsilon > 0$ . Defina para cada  $k$

$$\hat{V}_k = \left\{ x \in V; \text{dist}(x, \partial V) > \frac{1}{k} \right\} \quad \text{e} \quad V_0 = \emptyset.$$

Defina  $V_k = \hat{V}_{k+1} - \hat{V}_{k-1}$ . Seja agora  $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$  uma seqüência de funções suaves tais que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_k \leq 1. \\ \text{spt}(\zeta_k) \subset V_k. \\ \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = 1, \text{ em } V. \end{cases}$$

Observe que  $f_{x_i} \zeta_k \in L^1(V)$ , em particular,  $f_{x_i} = \sum_{k=1}^{i_n} x_i \zeta_k$  e  $\text{spt}(f_{x_i} \zeta_k) \subset V_k$ . Agora considere  $\eta$  o *mollifier* canônico e definamos

$$f_{x_i}^\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_\varepsilon * (f_{x_i} \zeta_k).$$

Defina para cada  $N \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{N,i}^\varepsilon = \sum_{k=1}^N \eta_\varepsilon * (f_{x_i} \zeta_k).$$

Por construção  $\varphi_{N,i}^\varepsilon$  converge para  $f_{x_i}^\varepsilon$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Por fim, seja

$$\varphi_N^\varepsilon := (\varphi_{N,1}^\varepsilon, \varphi_{N,2}^\varepsilon, \dots, \varphi_{N,n}^\varepsilon) \quad \text{e} \quad \psi_N^\varepsilon := \frac{\varphi_N^\varepsilon}{|\varphi_N^\varepsilon|}.$$

Note que, por construção, segue que  $\psi_N^\varepsilon \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\psi_N^\varepsilon| \leq 1$  e fazendo  $N \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\psi_N^\varepsilon \rightarrow \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

Veja também que

$$\int_V \nabla f \cdot \psi_N^\varepsilon \, dx = - \int_V \psi_N^\varepsilon \cdot \sigma \, d\|\mathbf{D}f\| \leq \|\mathbf{D}f\|(V)$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ . Logo, quando  $N \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos que

$$\int_V \frac{\nabla f \cdot \nabla f}{|\nabla f|} \, dx = \int_V |\nabla f| \, dx \leq \|\mathbf{D}f\|(V).$$

Com isso,  $\int_V |\nabla f| \, dx = \|\mathbf{D}f\|(V)$ . Portanto,  $\mathcal{L}^n \llcorner_{|\nabla f|}(V) = \|\mathbf{D}f\|(V)$ . Assim, temos que para toda  $\varphi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ , com  $|\varphi| \leq 1$ ,

$$\int_V \nabla f \cdot \varphi \, dx = - \int_V \varphi \cdot \sigma \, dx = - \int_V (\varphi \cdot \sigma) |\nabla f| \, dx.$$

Daí, defina

$$\sigma := \begin{cases} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, & \text{se } |\nabla f| \neq 0. \\ 0, & \text{se } |\nabla f| = 0. \end{cases}$$

**Exemplo:** Seja  $E$  aberto no  $\mathbb{R}^n$  e com fronteira suave tal que para cada  $K \subset U$  compacto,  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U) < \infty$ . Sejam  $V$  e  $\varphi$  como no exemplo anterior. Em particular pelo *Teorema Da Divergência*

$$\int_E \text{div} \varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal exterior á  $\partial E$ . Assim,

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E \cap V} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial \cap V) < \infty.$$

Disso temos que  $\chi_E \in \mathbf{BV}_{\text{loc}}(\mathbf{U})$ . Logo,  $E$  possui Perímetro finito. Em particular, da estimativa acima, segue que

$$\|\partial E\|(V) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap V).$$

Por outro lado, como no exemplo anterior pode se mostrar que  $\|\partial E\|(V) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap V)$ . A idéia é similar, ou seja, construir uma família de funções suaves com suporte compacto em  $V$  com valores em  $\mathbb{R}^n$  e norma euclidiana menor ou igual a um, de tal sorte que tenhamos a desigualdade contrária para cada uma delas. Neste caso, as mesmas são construídas a partir do vetor  $\nu$ .

Por fim, temos que para toda  $\varphi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$  com  $|\varphi| \leq 1$ ,

$$\int_{\partial E \cap V} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_V \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| = \int_V (\varphi \cdot \nu_E) \chi_{\partial E} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Portanto,

$$\int_{\partial E \cap V} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E \cap V} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

donde segue que  $\varphi \cdot (\nu - \nu_E) = 0$ ,  $\mathcal{H}^{n-1}$ -q.t.p. para toda  $\varphi$ . Logo,  $\nu = \nu_E$  em todo ponto a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{H}^{n-1}$  nula.

#### 4.1 Resultados de aproximação para funções BV

**Teorema 4.2** (Semi continuidade inferior da Medida de Variação). *Seja  $f, f_k \in \mathbf{BV}(\mathbf{U})$  para cada  $k$  com  $f_k \rightarrow f$  em  $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{U})$ . Então,*

$$\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{D}f_k\|(\mathbf{U}).$$

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n)$  com  $|\varphi| \leq 1$ . Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{U}} f \operatorname{div} \varphi \, dx &= \int_{\mathbf{U}} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \operatorname{div} \varphi \, dx \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{U}} f_k \operatorname{div} \varphi \, dx \\
&= \liminf_{k \rightarrow \infty} - \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot \sigma_k \, d\|Df_k\| \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| - \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot \sigma_k \, d\|Df_k\| \right| \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{U}} |\varphi \cdot \sigma_k| \, d\|Df_k\| \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{U}} d\|Df_k\| \\
&= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(\mathbf{U}).
\end{aligned}$$

Agora basta tomar o supremo sobre as  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n)$  com  $|\varphi| \leq 1$  donde segue que

$$\|Df\|(\mathbf{U}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(\mathbf{U}).$$

■

**Teorema 4.3** (Aproximação Local por funções suaves). *Seja  $f \in \operatorname{BV}(\mathbf{U})$ . Então existem  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \operatorname{BV}(\mathbf{U}) \cap C^{\infty}(\mathbf{U})$  tal que*

- (i)  $f_k \rightarrow f$  em  $L^1(\mathbf{U})$ ,
- (ii)  $\|Df_k\| \rightarrow \|Df\|$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Fixe  $\varepsilon > 0$ . A priori tomemos  $m \in \mathbb{Z}^+$  e definamos os abertos

$$\mathbf{U}_k = \left\{ x \in \mathbf{U}; \operatorname{dist}(x, \partial\mathbf{U}) > \frac{1}{m+k} \right\} \cap B(0, k+m).$$

Note que  $\mathbf{U}_k \nearrow \mathbf{U}$ . Então  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Df\|(\mathbf{U}_k) = \|Df\|(\mathbf{U})$ . Assim, para o  $\varepsilon$  fixado, existe um  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq k_0$  tem-se  $\|Df\|(\mathbf{U}) - \|Df\|(\mathbf{U}_k) < \varepsilon$ . Como  $\|Df\|(\mathbf{U}_k) < \infty$  temos que

$$\|Df\|(\mathbf{U} - \mathbf{U}_k) < \varepsilon. \quad (53)$$

Portanto, na construção dos conjuntos  $\mathbf{U}_k$  tome  $m = k_0$ .

Doravante, defina  $\mathbf{U}_0 = \emptyset$  e para cada  $k$  natural,  $\mathbf{V}_k = \mathbf{U}_{k+1} - \overline{\mathbf{U}_{k-1}}$ . Seja



$\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$  uma sequência de funções suaves tais que

$$\begin{cases} \text{spt}(\zeta_k) \subset V_k, & k = 1, 2, \dots, \\ 0 \leq \zeta_k \leq 1, & k = 1, 2, \dots, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = 1 \text{ em } \mathbf{U}. \end{cases}$$

Claramente,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f\zeta_k.$$

Por outro lado, considere o *mollifier* canônico  $\eta_\varepsilon$ . Então para cada  $k$  tome  $0 < \varepsilon_k \ll 1$  tal que

$$\begin{cases} \text{spt}(\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k)) \subset V_k, & k = 1, 2, \dots, \\ \int_{\mathbf{U}} |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| \, dx < \frac{\varepsilon}{2^k}, \\ \int_{\mathbf{U}} |\eta_{\varepsilon_k} * (fD\zeta_k) - fD\zeta_k| \, dx < \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{cases} \quad (54)$$

onde

$$\eta_{\varepsilon_k} * (fD\zeta_k) = \left( \eta_{\varepsilon_k} * \left( f \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_1} \right), \eta_{\varepsilon_k} * \left( f \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_2} \right), \dots, \eta_{\varepsilon_k} * \left( f \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_n} \right) \right).$$

Defina

$$f_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k).$$

Por construção  $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{U})$ . E de (54),

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - f\|_{L^1(\mathbf{U})} &= \int_{\mathbf{U}} |f_\varepsilon - f| \, dx \\ &= \int_{\mathbf{U}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - \sum_{k=1}^{\infty} f\zeta_k \right| \, dx \\ &= \int_{\mathbf{U}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^N (\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k) \right| \, dx \\ &\leq \int_{\mathbf{U}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| \, dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{U}} \sum_{k=1}^N |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| \, dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| \, dx \\ &< \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad \text{por (54)} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

uma vez que pelo *Teorema da Convergência Monótona* podemos permutar o limite com a integral. Pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$ , temos (i).

Agora iremos provar (ii). Com efeito, por (i), temos do Teorema anterior que

$$\|Df\|(\mathbf{U}) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Df_\varepsilon\|(\mathbf{U}). \quad (55)$$

Por outro lado, seja  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n)$  com  $|\varphi| \leq 1$ . Então,

$$\int_{\mathbf{U}} f_\varepsilon \operatorname{div} \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{U}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k) \operatorname{div} \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (56)$$

Note que, tomando  $g_k(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) \chi_{V_k}(\mathbf{y})$ , temos que

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \eta_{\varepsilon_k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\varepsilon_k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon_k^n} \eta\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon_k}\right) g_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Logo, fazendo  $w = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon_k}$ , então,  $dw = -\frac{1}{\varepsilon_k^n} d\mathbf{y}$  e  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \varepsilon_k w$ , segue que

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} \eta(w) g_k(\mathbf{x} - w \varepsilon_k) \, dw.$$

Dáí,

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)| &= \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} \eta(w) g_k(x - w\varepsilon_k) dw \right| \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |\eta(w) g_k(x - w\varepsilon_k)| dw \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |g_k(x - w\varepsilon_k)| dw \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - w\varepsilon_k) \zeta((x - w\varepsilon_k)) \chi_{V_k}(x - w\varepsilon_k)| dw \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{V_k} |f(x - w\varepsilon_k)| dw \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{V_k} |f(w)| dw \\
&= \|f\|_{L^1(u)}
\end{aligned}$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Portanto em (56) podemos usar o *Teorema da Convergência Dominada*,

logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{U}} f_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{U}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} \eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} \int_{\mathbf{U}} \eta_{\varepsilon_k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} \sum_{i=1}^n \left( \int_{\mathbf{U}} \eta_{\varepsilon_k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) \left( \int_{\mathbf{U}} \eta_{\varepsilon_k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \right) \, d\mathbf{y} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) \left( \eta_{\varepsilon_k} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{y}) \right) \, d\mathbf{y} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi(\mathbf{y}))_{y_i} \, d\mathbf{y} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) \sum_{i=1}^n (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi(\mathbf{y}))_{y_i} \, d\mathbf{y} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) \operatorname{div} (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Veja que  $\zeta_k \operatorname{div} (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi) = \operatorname{div} (\zeta_k (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)) - D \zeta_k \cdot (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)$ , então a igualdade da estimativa anterior segue como

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \zeta_k(\mathbf{y}) \operatorname{div} (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) [\operatorname{div} (\zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) - D \zeta_k(\mathbf{y}) \cdot (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})] \, d\mathbf{y} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left( \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div} (\zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} - \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) D \zeta_k(\mathbf{y}) \cdot (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left[ \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div} (\zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta_k}{\partial y_i}(\mathbf{y}) \eta_{\varepsilon_k} * \varphi_i(\mathbf{y}) \right) \, d\mathbf{y} \right].
\end{aligned}$$

Assim, continuando a igualdade,

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left[ \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta_k}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{y}) \int_{\mathbf{U}} \eta_{\varepsilon_k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \, d\mathbf{y} \right] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left[ \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbf{U}} \sum_{i=1}^n \left( \int_{\mathbf{U}} \eta_{\varepsilon_k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \frac{\partial \zeta_k}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{y}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x} \right] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left[ \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbf{U}} \sum_{i=1}^n \left( \int_{\mathbf{U}} \eta_{\varepsilon_k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \frac{\partial \zeta_k}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left[ \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbf{U}} \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) \left( \eta_{\varepsilon_k} * \left( f \frac{\partial \zeta_k}{\partial \mathbf{y}_i} \right) \right) (\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \\
&\quad - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \eta_{\varepsilon_k} * (fD\zeta_k)(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \cdot fD\zeta_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
&= \underbrace{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_k(\mathbf{y}) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y}}_{\mathcal{I}_{1,\varepsilon}} \\
&\quad - \underbrace{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} \varphi(\mathbf{x}) \cdot [\eta_{\varepsilon_k} * (fD\zeta_k)(\mathbf{x}) - fD\zeta_k(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}_{\mathcal{I}_{2,\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Note que a adiçao de  $-fD\zeta_k$  em  $\mathcal{I}_{2,\varepsilon}$  nao perturba a igualdade, uma vez que  $\sum_{k=1}^{\infty} D\zeta_k = 0$  sobre  $\mathbf{U}$ . Ainda olhando para  $\mathcal{I}_{2,\varepsilon}$ , temos de (54) que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_{2,\varepsilon}| &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} |\varphi(\mathbf{x}) \cdot [\eta_{\varepsilon_k} * (fD\zeta_k)(\mathbf{x}) - fD\zeta_k(\mathbf{x})]| \, d\mathbf{x} \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} |\eta_{\varepsilon_k} * (fD\zeta_k)(\mathbf{x}) - fD\zeta_k(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} < \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Agora voltando nossa atenção para  $\mathcal{I}_{1,\varepsilon}$  temos que para cada  $k$ ,

$$|\zeta_k(\mathbf{y})(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})| \leq |(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbf{U})} \|\eta_{\varepsilon_k}\|_{L^1(\mathbf{U})} \leq 1.$$

Então,

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{1,\varepsilon}| &= \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_k(\mathbf{y})(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \right| \\ &= \left| \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_1(\mathbf{y})(\eta_{\varepsilon_1} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_k(\mathbf{y})(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_1(\mathbf{y})(\eta_{\varepsilon_1} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \right| + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N \left| \int_{\mathbf{U}} f(\mathbf{y}) \operatorname{div}(\zeta_k(\mathbf{y})(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U}) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{V}_k). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^N \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{V}_k) &= \sum_{k=2}^N \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_{k+1} - \bar{\mathbf{u}}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=2}^N (\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_{k+1}) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_{k-1})) \\ &= (\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_3) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_1)) + (\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_4) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_2)) \\ &+ \cdots + (\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_{N-1})) + (\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_{N+1}) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_{N-1})) \\ &= \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_{N+1}) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_1) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_2) \\ &\leq \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_{N+1}) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_1) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_1), \quad (\mathbf{u}_1 \subset \mathbf{u}_2) \\ &= \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}_1) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_{N+1}) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_1) \\ &= \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}_1) + \|\mathbf{D}f\|((\mathbf{u}_{N+1} - \mathbf{u}_N) \cup \mathbf{u}_N) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_1) \\ &= \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}_1) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_{N+1} - \mathbf{u}_N) - \|\mathbf{D}f\|(\bar{\mathbf{u}}_1) \\ &= \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}_1) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}_1) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_{N+1} - \mathbf{u}_N) \\ &= 2\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}_1) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_{N+1} - \mathbf{u}_N) \\ &\leq 2\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}_1) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{\infty} \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{V}_k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{V}_k) \\
 &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} 2\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U}_N - \bar{\mathbf{U}}_1) + \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}_1) \\
 &= 3\|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}_1) \\
 &< 3\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\mathcal{I}_{1,\varepsilon}| \leq \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U}) + 3\varepsilon.$$

Tendo em vista o que estimamos

$$\int_{\mathbf{U}} f_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq |\mathcal{I}_{1,\varepsilon} - \mathcal{I}_{2,\varepsilon}| \leq |\mathcal{I}_{1,\varepsilon}| + |\mathcal{I}_{2,\varepsilon}| \leq \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U}) + 4\varepsilon.$$

Tomando o supremo nas  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n)$ , com  $|\varphi| \leq 1$ , temos que

$$\|\mathbf{D}f_{\varepsilon}\|(\mathbf{U}) \leq \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U}) + 4\varepsilon.$$

Em particular,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{D}f_{\varepsilon}\|(\mathbf{U}) \leq \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U}).$$

Daí e de (55) segue (ii) o que finaliza a prova do teorema. ■

**Teorema 4.4.** *Seja  $f \in \mathbf{BV}(\mathbf{U})$  e  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{BV}(\mathbf{U}) \cap C^{\infty}(\mathbf{U})$  tal que*

$$\begin{cases} f_k \longrightarrow f, & \text{em } L^1(\mathbf{U}), \\ \|\mathbf{D}f_k\|(\mathbf{U}) \longrightarrow \|\mathbf{D}f\|(\mathbf{U}) & \text{quando } k \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

*Defina para cada  $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$  boreliano as medidas vetoriais de Radon*

$$\mu_k(\mathbf{B}) := \int_{\mathbf{U} \cap \mathbf{B}} \mathbf{D}f_k \, d\mathbf{x}$$

e

$$\mu(\mathbf{B}) := \int_{\mathbf{U} \cap \mathbf{B}} d[\mathbf{D}f].$$

Então,

$$\mu_k \rightharpoonup \mu$$

quando  $k \longrightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Tome  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  com  $\varepsilon > 0$ . Seja  $\mathbf{U}_1 \subset\subset \mathbf{U}$ , e como no teorema

anterior seja  $m \gg 1$ , tal que

$$\mathbf{U}_1 : \left\{ x \in \mathbf{U}; \text{dist}(x, \partial\mathbf{U}) > \frac{1}{m+1} \cap B(0, 1+m) \right\}$$

e  $\|\mathbf{Df}\|(\mathbf{U} - \mathbf{U}_1) < \varepsilon$ .

Seja  $\zeta$  uma função suave tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, \text{ spt}(\zeta) \subset \mathbf{U}, \\ \zeta = 1, \text{ em } \mathbf{U}_1. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_k &= \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot \mathbf{D}f_k \, dx \\ &= \int_{\mathbf{U}} (1 - \zeta + \zeta) \varphi \cdot \mathbf{D}f_k \, dx \\ &= \int_{\mathbf{U}} (1 - \zeta) \varphi \cdot \mathbf{D}f_k \, dx + \int_{\mathbf{U}} \zeta \varphi \cdot \mathbf{D}f_k \, dx \\ &= \underbrace{- \int_{\mathbf{U}} \text{div}(\zeta \varphi) f_k \, dx}_{(i)} + \underbrace{\int_{\mathbf{U}} (1 - \zeta) \varphi \cdot \mathbf{D}f_k \, dx}_{(ii)}. \end{aligned}$$

Nos voltando para (i), temos que

$$- \int_{\mathbf{U}} \text{div}(\zeta \varphi) f_k \, dx \longrightarrow - \int_{\mathbf{U}} \text{div}(\zeta \varphi) f \, dx,$$

uma vez que  $f_k \longrightarrow f$  em  $L^1(\mathbf{U})$ . Em particular,

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbf{U}} \text{div}(\zeta \varphi) f \, dx &= \int_{\mathbf{U}} \zeta \varphi \cdot d[\mathbf{D}f] \\ &= \int_{\mathbf{U}} (1 - 1 + \zeta) \varphi \cdot d[\mathbf{D}f] \\ &= \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[\mathbf{D}f] + \underbrace{\int_{\mathbf{U}} (\zeta - 1) \varphi \cdot d[\mathbf{D}f]}_{(iii)}. \end{aligned}$$

Observe que daí,

$$\int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[\mathbf{D}f] = - \int_{\mathbf{U}} \text{div}(\zeta \varphi) f \, dx - \int_{\mathbf{U}} (\zeta - 1) \varphi \cdot d[\mathbf{D}f].$$



Por outro lado de (iii), vem que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{U}} (\zeta - 1) \varphi \cdot d[\mathbf{Df}] &= \int_{\mathbf{U} - \mathbf{U}_1} (\zeta - 1) \varphi \cdot d[\mathbf{Df}] \\
&= \int_{\mathbf{U} - \mathbf{U}_1} \varphi \cdot \sigma d\|\mathbf{Df}\| \\
&\leq \int_{\mathbf{U} - \mathbf{U}_1} |\varphi| d\|\mathbf{Df}\| \\
&\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{Df}\|(\mathbf{U} - \mathbf{U}_1) \\
&< \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tendo em vista (ii) vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{U}} (1 - \zeta) \varphi \cdot \mathbf{Df}_k \, dx &= \int_{\mathbf{U} - \mathbf{U}_1} (1 - \zeta) \varphi \cdot \mathbf{Df}_k \, dx \\
&\leq \int_{\mathbf{U} - \mathbf{U}_1} |\varphi| |\mathbf{Df}_k| \, dx \\
&\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{Df}_k\|(\mathbf{U} - \mathbf{U}_1).
\end{aligned}$$

Em particular, pelo teorema anterior para  $k \gg 1$ , segue que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{Df}_k\|(\mathbf{U} - \mathbf{U}_1) < \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varepsilon.$$

Logo a partir destas estimativas, temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \mathbf{Df}_k \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot d[\mathbf{Df}] \right| \\
&= \left| - \int_{\mathbf{U}} \operatorname{div}(\zeta \varphi)(f - f_k) \, dx + \int_{\mathbf{U}} (1 - \zeta) \varphi \cdot \mathbf{Df}_k \, dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbf{U}} (\zeta - 1) \varphi \cdot d[\mathbf{Df}] \right| \\
&< C \|f_k - f\|_{L^1(\mathbf{U})} + \varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{Df}_k\|(\mathbf{U} - \mathbf{U}_1),
\end{aligned}$$

onde  $C = C(\zeta, \varphi)$ . Então,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu \right| < 2\varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$ ,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu \right| = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu$$

para toda  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ , uma vez que, “lim inf” é não negativo.

Por fim, seja  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ , e defina para  $\varepsilon > 0$ ,  $\varphi_\varepsilon := \eta_\varepsilon * \varphi$ , por construção,  $\varphi_\varepsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$  e converge uniformemente para  $\varphi$  quando  $\varepsilon$  tende a 0. Em particular, pela *Desigualdade de Hölder*

$$|\varphi_\varepsilon(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\varphi(y) \, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\eta_\varepsilon(x-y)\varphi(y)| \, dy \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Então, pelo *Teorema da Convergência Dominada*,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \, d\mu_k \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \, d\mu_k \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu. \end{aligned}$$

Assim, para toda  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu.$$

Portanto,  $\mu_k \rightharpoonup \mu$ . ■

## 4.2 Operador do traço para funções BV

**Teorema 4.5** (Operador do Traço (BV)). *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado com  $\partial U$  Lipschitz. Então, existe um operador linear contínuo, tal que*

$$T : BV(U) \longrightarrow L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$$

e para toda  $f \in BV(U)$  e  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_U \varphi \cdot d[Df] + \int_{\partial U} T f \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal exterior a  $\partial U$ .

*Demonstração.* Primeiro, assumamos que  $f \in BV(U) \cap C^\infty(U)$ . Dado  $x \in \partial U$  pela definição de fronteira Lipschitz com cilindros, existem  $r > 0$ ,  $h > 0$  e  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal

que, a menos de uma rotação ou reordenação dos eixos,

$$\begin{cases} \max_{|x'-y'|<r} |\gamma(y') - x_n| < \frac{h}{4}, \\ \mathbf{U} \cap \mathbf{C}(x, r, h) = \{y \in \mathbf{U}; |x' - y'| < r, \gamma(y') < y_n < x_n + h\}. \end{cases}$$

Escreva  $\mathbf{C} := \mathbf{C}(x, r, h)$  e fixemos  $0 < \varepsilon < \frac{h}{2}$  e para cada  $\partial\mathbf{U} \cap \mathbf{C}$  defina,

$$f_\varepsilon(y) = f(y', \gamma(y') + \varepsilon).$$

Note que  $f_\varepsilon$ , está bem definida. Com efeito, é suficiente mostrar que,

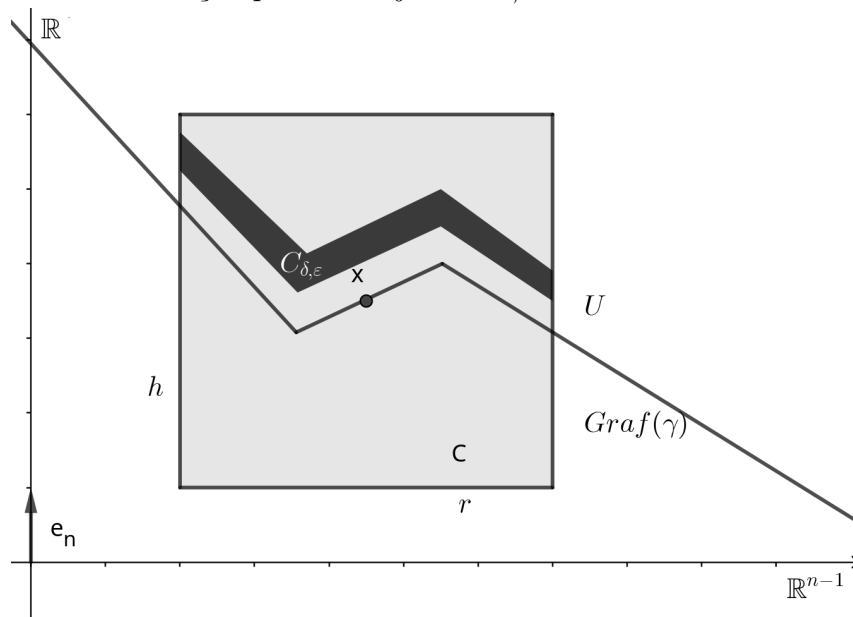
$$(y', \gamma(y') + \varepsilon) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{C}.$$

Ora, já temos que  $|x' - y'| < r$ , além disso,

$$\begin{aligned} \gamma(y') < \gamma(y') + \varepsilon < \gamma(y') + \frac{h}{2} &= x_n + (\gamma(y') - x_n) + \frac{h}{2} \\ &\leq x_n + |\gamma(y') - x_n| + \frac{h}{2} \\ &< x_n + \frac{h}{4} + \frac{h}{2} \\ &= x_n + \frac{3h}{4} \\ &< x_n + h. \end{aligned}$$

Então,  $(y', \gamma(y') + \varepsilon) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{C}$ . Logo,  $f_\varepsilon$  está bem definida.

Figura 6 – Ilustração para o conjunto  $\mathbf{C}_{\delta, \varepsilon}$ .



Fonte: Acervo próprio

Agora seja

$$C_{\delta,\varepsilon} = \{\mathbf{y} \in C; \gamma(\mathbf{y}') + \delta < y_n < \gamma(\mathbf{y}') + \varepsilon\}$$

com  $0 \leq \delta < \varepsilon < \frac{h}{2}$ . Tome  $C^\varepsilon := (C \cap U) - C_{0,\varepsilon}$ . Então,

$$\begin{aligned} |f_\delta(\mathbf{y}) - f_\varepsilon(\mathbf{y})| &= |f(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + \delta) - f(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + \varepsilon)| \\ &= \left| \int_\delta^\varepsilon \frac{\partial f}{\partial y_n}(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t) dt \right| \\ &\leq \int_\delta^\varepsilon \left| \frac{\partial f}{\partial y_n}(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t) \right| dt \\ &= \int_\delta^\varepsilon |Df(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t) \cdot \mathbf{e}_n| dt \\ &\leq \int_\delta^\varepsilon |Df(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t)| dt. \end{aligned}$$

Passando a integral em  $\partial U \cap C$ , vem que

$$\begin{aligned} \int_{\partial U \cap C} |f_\delta(\mathbf{y}) - f_\varepsilon(\mathbf{y})| d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) &\leq \int_{\partial U \cap C} \int_\delta^\varepsilon |Df(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t)| dt d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\ &= \int_\delta^\varepsilon \int_{\partial U \cap C} |Df(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t)| d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) dt. \end{aligned}$$

Iremos usar a *Mudança de Variáveis* para estimar esta última igualdade. Para isso, defina  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por  $T(\mathbf{y}) := (\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t)$ . Claramente,  $T$  é Lipschitz. Note que a matriz jacobiana de  $T$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & D\gamma & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Obtemos o Jacobiano utilizando a *Fórmula de Binet-Cauchy*, tendo em vista as submatrizes  $(n-1) \times (n-1)$ , vem que

$$(JT(\mathbf{y}))^2 = 1 + |D\gamma(\mathbf{y})|^2 \Rightarrow JT(\mathbf{y}) = \sqrt{1 + |D\gamma(\mathbf{y})|^2}.$$

Claramente  $J\mathbb{T}(\mathbf{y}) \geq 1$ , então,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} |\mathbf{Df}(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + \mathbf{t})| \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) &\leq \int_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} |\mathbf{Df}(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + \mathbf{t})| \sqrt{1 + |\mathbf{D}\gamma(\mathbf{y})|^2} \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} |\mathbf{Df}(\mathbb{T}(\mathbf{y}'))| \sqrt{1 + |\mathbf{D}\gamma(\mathbf{y})|^2} \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{z \in \mathbb{T}^{-1}(z) \cap \partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} |\mathbf{Df}(\mathbb{T}(\mathbf{y}'))| \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{Df}(z)| \mathcal{H}^0(\mathbb{T}^{-1}(z) \cap \partial\mathbf{u} \cap \mathbf{C}) \, d\mathcal{H}^{n-1}(z).
\end{aligned}$$

Agora observe que para todo  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^{n-1}$ -mensurável temos pela *Fórmula da Área* que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap \mathbb{T}^{-1}(z)) \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) = \int_A \sqrt{1 + |\mathbf{D}\gamma(z)|^2} \, d\mathcal{H}^{n-1}(z).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0((\partial\mathbf{u} \cap \mathbf{C}) \cap \mathbb{T}^{-1}(z)) \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) &= \int_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} \sqrt{1 + |\mathbf{D}\gamma(z)|^2} \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} \sqrt{1 + |\mathbf{D}\gamma(z)|^2} \, d\mathcal{H}^{n-1}(z).
\end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{H}^0((\partial\mathbf{u} \cap \mathbf{C}) \cap \mathbb{T}^{-1}(z)) = \chi_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} \sqrt{1 + |\mathbf{D}\gamma(z)|^2}$ ,  $\mathcal{H}^{n-1}$  em quase todo ponto. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} |\mathbf{Df}(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + \mathbf{t})| \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{Df}(z)| \mathcal{H}^0(\mathbb{T}^{-1}(z) \cap \partial\mathbf{u} \cap \mathbf{C}) \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{Df}(z)| \chi_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} \sqrt{1 + |\mathbf{D}\gamma(z)|^2} \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\
&= \int_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} |\mathbf{Df}(z)| \sqrt{1 + |\mathbf{D}\gamma(z)|^2} \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\
&\leq \sqrt{1 + \text{Lip}(\gamma)^2} \int_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} |\mathbf{Df}(z)| \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\
&= C_1 \int_{\partial\mathbf{u}\cap\mathbf{C}} |\mathbf{Df}(z)| \, d\mathcal{H}^{n-1}(z),
\end{aligned}$$

onde  $C_1 := \sqrt{1 + \text{Lip}(\gamma)^2}$ .

Com isso, vem que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\text{uNC}} |f_\delta(\mathbf{y}) - f_\varepsilon(\mathbf{y})| d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) &\leq \int_\delta^\varepsilon \int_{\partial\text{uNC}} |\mathbf{D}f(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + \mathbf{t})| d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) dt \\
&\leq C_1 \int_\delta^\varepsilon \int_{\partial\text{uNC}} |\mathbf{D}f(\mathbf{z})| d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{z}) dt \\
&= C_1 \int_{C_{\delta,\varepsilon}} |\mathbf{D}f(\mathbf{z})| dz \\
&= C_1 \|\mathbf{D}f\|(C_{\delta,\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Então, fazendo  $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ , temos da desigualdade acima que  $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  é de Cauchy em  $L^1(\partial\mathbf{U} \cap \mathbf{C}; \mathcal{H}^{n-1})$ . Como esse espaço é Banach temos que existe  $\bar{f} \in L^1(\partial\mathbf{U} \cap \mathbf{C}; \mathcal{H}^{n-1})$  tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_\varepsilon - \bar{f}\|_{L^1(\partial\text{uNC}; \mathcal{H}^{n-1})} = 0.$$

Façamos então,  $\mathbf{T}f := \bar{f}$ . Ainda da desigualdade acima,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\text{uNC}} |\mathbf{T}f - f_\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \int_{\partial\text{uNC}} |\mathbf{T}f - f_\delta| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial\text{uNC}} |f_\delta - f_\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \int_{\partial\text{uNC}} |\mathbf{T}f - f_\delta| d\mathcal{H}^{n-1} + C_1 \|\mathbf{D}f\|(C_{\delta,\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$

$$\int_{\partial\text{uNC}} |\mathbf{T}f - f_\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \leq C_1 \|\mathbf{D}f\|(C_{0,\varepsilon}). \quad (57)$$

Por outro lado, fixemos  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{C}; \mathbb{R}^n)$ . Então,

$$\int_{C^\varepsilon} f \operatorname{div} \varphi d\mathbf{y} = - \int_{C^\varepsilon} \varphi \cdot \mathbf{D}f d\mathbf{y} + \int_{\partial C^\varepsilon} f \varphi \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^{n-1},$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor unitário normal exterior a  $\partial C^\varepsilon$ . Relembre que  $C^\varepsilon = (\mathbf{U} \cap \mathbf{C}) - C_{0,\varepsilon}$ , logo, se  $\mathbf{y} \in \partial C^\varepsilon$ , então,  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + \varepsilon)$ . Ou seja,

$$\int_{C^\varepsilon} f \operatorname{div} \varphi d\mathbf{y} = - \int_{C^\varepsilon} \varphi \cdot \mathbf{D}f d\mathbf{y} + \int_{\partial\text{uNC}} f(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + \varepsilon) \varphi(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + \varepsilon) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}').$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\text{uNC}} f \operatorname{div} \varphi d\mathbf{y} &= - \int_{\text{uNC}} \varphi \cdot \mathbf{D}f d\mathbf{y} + \int_{\partial\text{uNC}} f \varphi \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= - \int_{\text{uNC}} \varphi \cdot d[\mathbf{D}f] + \int_{\partial\text{uNC}} f \varphi \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

uma vez que  $\chi_{C^\varepsilon} \rightarrow \chi_{\text{uNC}}$ .

Mais geral, para cada  $\mathbf{x} \in \partial\mathbf{U}$  existem  $\gamma_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz e  $r_{\mathbf{x}}, h_{\mathbf{x}} > 0$

tais que a menos de uma rotação ou reordenação dos eixos

$$C_x \cap U := \{y \in U; |x' - y'| < r_x, \gamma_x(y') < y_n < x_n + h\}.$$

onde  $C_x := C(x, r_x, h_x)$ , e  $\max_{|x'-y'| < r_x} |\gamma(y') - x_n| < \frac{h}{4}$ .

Claramente a família  $\{C_x\}_{x \in \partial U}$  é uma cobertura para  $\partial U$ . Então, da compacidade de  $\partial U$ , existe uma cobertura finita  $\{C_i\}_{i=1}^N$  tal que

$$\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N C_i,$$

onde  $C_i = (x_i, r_{x_i}, h_{x_i})$ .

Seja  $0 < \varepsilon < \min_{1 \leq i \leq N} \frac{h_{x_i}}{2}$  e defina, para  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$C_i^\varepsilon := \{y \in C_i; \gamma_{x_i}(y') < y_n < \gamma(y') + \varepsilon\}.$$

Consideremos então, uma família de funções suaves  $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$  tais que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, \text{ spt}(\zeta_i) \subset C_i, i = 1, 2, \dots, N, \\ 0 \leq \zeta_0 \leq 1, \text{ spt}(\zeta_0) \subset U, \\ \sum_{i=0}^N \zeta_i = 1 \text{ em } U \cup \bigcup_{i=1}^N C_i. \end{cases}$$

Logo, tome para  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$f_i := \begin{cases} f\zeta_i|_{U \cap C_i} & \text{em } C_i \cap U. \\ 0 & \text{em } U - C_i. \end{cases}$$

e  $f_0 := f\zeta_0$ . Por construção,

$$f = \sum_{i=0}^N f_i \quad \text{em } U.$$

Observe que se  $y \in \partial U$ , então,  $y \in \partial U \cap C_j$  para algum  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Portanto, defina

$$f_\varepsilon(y) := \sum_{i=1}^N f_i^\varepsilon(y) = \sum_{i=1}^N f_i(y', \gamma_{x_i}(y') + \varepsilon).$$

Tomando  $0 \leq \delta < \varepsilon$ , seja para  $i = 1, 2, \dots, N$

$$C_{\delta, \varepsilon}^i := \{y \in C_i; \gamma_{x_i}(y') + \delta < y_n < \gamma_{x_i}(y') + \varepsilon\}.$$

Dessa forma pelo que já fizemos,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbf{U}} |f_\delta - f_\varepsilon| \, d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\partial\mathbf{U}} \left| \sum_{i=1}^N (f_i^\delta(\mathbf{y}) - f_i^\varepsilon(\mathbf{y})) \right| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{\partial\mathbf{U}} |f_i^\delta(\mathbf{y}) - f_i^\varepsilon(\mathbf{y})| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^N C_i \|Df_i\|(C_{\delta,\varepsilon}^i).
\end{aligned}$$

Observe que dada  $\varphi_i \in C_c^1(C_{\delta,\varepsilon}^i; \mathbb{R}^n)$ , com  $|\varphi_i| \leq 1$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ , temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_{C_{\delta,\varepsilon}^i} f_i \operatorname{div} \varphi_i \, d\mathbf{y} &= - \sum_{i=1}^N \int_{C_{\delta,\varepsilon}^i} (Df \zeta_i + f D\zeta_i) \cdot \varphi_i \, d\mathbf{y} \\
&= - \sum_{i=1}^N \int_{C_{\delta,\varepsilon}^i} Df \cdot \varphi_i \, d\mathbf{y} \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{C_{\delta,\varepsilon}^i} f \operatorname{div} \varphi_i \, d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\sum_{i=1}^N \|Df_i\|(C_{\delta,\varepsilon}^i) = \sum_{i=1}^N \|Df\|(C_{\delta,\varepsilon}^i).$$

Em particular,

$$\int_{\partial\mathbf{U}} |f_\delta - f_\varepsilon| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \sum_{i=1}^N C_i \|Df\|(C_{\delta,\varepsilon}^i).$$

Fazendo,  $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ , vemos que  $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  é de Cauchy em  $L^1(\partial\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1})$ . Logo, existe uma função  $\bar{f}$  pertencente a  $L^1(\partial\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1})$  onde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\bar{f} - f_\varepsilon\|_{L^1(\partial\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1})} = 0.$$

Então, faça  $Tf := \bar{f}$ . Em particular, como em (57), vem quando  $\delta \rightarrow 0$  que

$$\int_{\partial\mathbf{U}} |Tf - f_\varepsilon| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \sum_{i=1}^N C_i \|Df\|(C_{0,\varepsilon}^i).$$



Agora seja  $C_i^\varepsilon := \mathbf{U} \cap C_i - C_{0,\varepsilon}^i$  e  $C^\varepsilon := \bigcup_{i=1}^N C_i^\varepsilon$ . Tome  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , então,

$$\begin{aligned} \int_{C^\varepsilon} f \operatorname{div} \varphi \, dy &= \sum_{i=0}^N \int_{C_i^\varepsilon} f_i \operatorname{div} \varphi \, dy \\ &= - \sum_{i=0}^N \int_{C_i^\varepsilon} Df_i \cdot \varphi \, dy + \sum_{i=0}^N \int_{\partial C_i^\varepsilon} f_i \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \sum_{i=0}^N \int_{C_i^\varepsilon} (Df \zeta_i + f D\zeta_i) \cdot \varphi \, dy + \sum_{i=0}^N \int_{\partial \mathbf{U} \cap C_i} f_i^\varepsilon \varphi(y', \gamma_i(y') + \varepsilon) \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{C^\varepsilon} Df \cdot \varphi \, dy + \sum_{i=0}^N \int_{\partial \mathbf{U} \cap C_i} f_i^\varepsilon \varphi(y', \gamma_i(y') + \varepsilon) \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

onde  $\nu$  é o vetor normal unitário exterior a  $\partial \mathbf{U}$ . Logo, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{U}} f \operatorname{div} \varphi \, dy &= - \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot Df \, dy + \int_{\partial \mathbf{U}} Tf \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[Df] + \int_{\partial \mathbf{U}} Tf \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, existe um operador

$$T : BV(\mathbf{U}) \cap C^\infty(\mathbf{U}) \longrightarrow L^1(\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1}),$$

onde  $f \mapsto Tf$ .

Verificaremos a linearidade de  $T$ , sejam  $f, g \in BV(\mathbf{U}) \cap C^\infty(\mathbf{U})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Note que

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)_\varepsilon(y) &= \sum_{i=1}^N (\alpha f + g) \zeta_i(y', \gamma_{x_j}(y') + \varepsilon) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^N f \zeta_i(y', \gamma_{x_j}(y') + \varepsilon) + \sum_{i=1}^N g \zeta_i(y', \gamma_{x_j}(y') + \varepsilon) \\ &= \alpha f_\varepsilon(y) + g_\varepsilon(y). \end{aligned}$$

Como  $\{(\alpha f + g)_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ,  $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  e  $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  convergem, respectivamente, para  $T(\alpha f +$

$g$ ),  $Tf$  e  $Tg$  em  $L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$ . Temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U} |T(\alpha f + g) - (\alpha Tf + Tg)| d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \int_{\partial U} |T(\alpha f + g) - (\alpha f + g)_\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\
&+ \int_{\partial U} |(\alpha f + g)_\varepsilon - (\alpha Tf + Tg)| d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \int_{\partial U} |T(\alpha f + g) - (\alpha f + g)_\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\
&+ \int_{\partial U} |\alpha f_\varepsilon + g_\varepsilon - \alpha Tf - Tg| d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \int_{\partial U} |T(\alpha f + g) - (\alpha f + g)_\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\
&+ \int_{\partial U} |\alpha f_\varepsilon - \alpha Tf| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial U} |g_\varepsilon - Tg| d\mathcal{H}^{n-1}
\end{aligned}$$

para todo  $0 < \varepsilon < \min_{1 \leq i \leq N} \frac{h_{x_i}}{2}$ . Em particular, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vem que

$$\int_{\partial U} |T(\alpha f + g) - (\alpha Tf + Tg)| d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Portanto,  $T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{H}^{n-1}|_{\partial U}$  nula.

Agora trabalharemos para estender esse operador linear para o espaço  $BV(U)$ , após buscaremos mostrar que esse operador é linear e contínuo.

Com efeito, dada  $f \in BV(U)$  existe uma sequência de funções,  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset BV(U) \cap C^\infty(U)$  tal que,

$$\begin{cases} f_k \rightarrow f \text{ em } L^1(U), \\ \|Df_k\|(U) \rightarrow \|Df\|(U), \\ \mu_k \rightarrow \mu. \end{cases}$$

onde  $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$  e  $\mu$  são definidas como no teorema anterior. Pelo que fizemos antes para cada  $k$ , existe  $Tf_k \in L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$ .

**Afirmção:** A sequência  $\{Tf_k\}_{k=1}^\infty$  é de Cauchy em  $L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$ .

**Prova da Afirmção:** Primeiro, mostraremos localmente, após faremos globalmente.

Dado  $x \in \partial U$  existem  $r, h > 0$  e  $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal que a menos de uma rotação ou reordenação dos eixos,

$$U \cap C = \{y \in U; |y' - x'| < r, \gamma(y') < y_n < y_n + h\}.$$

Logo, dado  $\varepsilon > 0$  e  $y \in \partial U$  defina,

$$f_k^\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f_k(y', \gamma(y') + t) dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (f_k)(y, t) dt.$$

onde  $(f_k)(\mathbf{y}, t) := f_k(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t)$ .

Note que é razoável definir  $f_k^\varepsilon$ , dessa forma, pois pelo *Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch* vem que quando  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f_k^\varepsilon \rightarrow f_k(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial u_{\text{NC}}} |Tf_k - f_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\partial u_{\text{NC}}} \left| Tf_k - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (f_k)(\mathbf{y}, t) dt \right| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial u_{\text{NC}}} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon Tf_k - (f_k)(\mathbf{y}, t) dt \right| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \int_{\partial u_{\text{NC}}} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |Tf_k - (f_k)(\mathbf{y}, t)| dt d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_{\partial u_{\text{NC}}} |Tf_k - f_k(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t)| d\mathcal{H}^{n-1} dt \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon C \|Df_k\|(C_{0,t}) dt \quad \text{por (57)} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon C \|Df_k\|(C_{0,\varepsilon}) dt \quad (t < \varepsilon) \\ &= C \|Df_k\|(C_{0,\varepsilon}). \end{aligned}$$

Então, dessa estimativa vem que

$$\begin{aligned} \int_{\partial u_{\text{NC}}} |Tf_k - Tf_l| d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \int_{\partial u_{\text{NC}}} |Tf_k - f_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial u_{\text{NC}}} |f_k^\varepsilon - f_l^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial u_{\text{NC}}} |Tf_l - f_l^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq C(\|Df_k\| + \|Df_l\|)(C_{0,\varepsilon}) + \int_{\partial u_{\text{NC}}} |f_k^\varepsilon - f_l^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{U}\cap\mathcal{C}} |\mathbb{T}f_k - \mathbb{T}f_l| \, d\mathcal{H}^{n-1} &\leq C(\|\mathbb{D}f_k\| + \|\mathbb{D}f_l\|)(\mathcal{C}_{0,\varepsilon}) \\
&+ \int_{\partial\mathcal{U}\cap\mathcal{C}} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (f_k)(\mathbf{y}, t) - (f_l)(\mathbf{y}, t) \, dt \right| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq C(\|\mathbb{D}f_k\| + \|\mathbb{D}f_l\|)(\mathcal{C}_{0,\varepsilon}) \\
&+ \int_{\partial\mathcal{U}\cap\mathcal{C}} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |(f_k)(\mathbf{y}, t) - (f_l)(\mathbf{y}, t)| \, dt \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= C(\|\mathbb{D}f_k\| + \|\mathbb{D}f_l\|)(\mathcal{C}_{0,\varepsilon}) \\
&+ \int_{\partial\mathcal{U}\cap\mathcal{C}} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |f_k(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t) - f_l(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t)| \, dt \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= C(\|\mathbb{D}f_k\| + \|\mathbb{D}f_l\|)(\mathcal{C}_{0,\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathcal{C}_{0,\varepsilon}} |f_k - f_l| \, d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\limsup_{k,l \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathcal{U}\cap\mathcal{C}} |\mathbb{T}f_k - \mathbb{T}f_l| \, d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \limsup_{k,l \rightarrow \infty} \left( C(\|\mathbb{D}f_k\| + \|\mathbb{D}f_l\|)(\mathcal{C}_{0,\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathcal{C}_{0,\varepsilon}} |f_k - f_l| \, d\mathbf{y} \right) \\
&\leq C \limsup_{k,l \rightarrow \infty} \|\mathbb{D}f_k\|(\mathcal{C}_{0,\varepsilon}) + C \limsup_{k,l \rightarrow \infty} \|\mathbb{D}f_l\|(\mathcal{C}_{0,\varepsilon}) \\
&\leq C \limsup_{k,l \rightarrow \infty} \|\mathbb{D}f_k\|(\overline{\mathcal{C}}_{0,\varepsilon}) + C \limsup_{k,l \rightarrow \infty} \|\mathbb{D}f_l\|(\overline{\mathcal{C}}_{0,\varepsilon}) \\
&\leq 2C \|\mathbb{D}f\|(\overline{\mathcal{C}}_{0,\varepsilon} \cap \mathcal{U}) \quad (\text{pois, } \mu_k \rightharpoonup \mu).
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  segue que

$$\limsup_{k,l \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathcal{U}\cap\mathcal{C}} |\mathbb{T}f_k - \mathbb{T}f_l| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq 0.$$

Dessa forma,  $\{\mathbb{T}f_k\}_{k=1}^\infty$  é de Cauchy em  $L^1(\partial\mathcal{U} \cap \mathcal{C}; \mathcal{H}^{n-1})$ . Agora mostraremos globalmente. Para isso, segue novamente da compacidade e regularidade da  $\partial\mathcal{U}$ , existem  $\mathbf{x}_i \in \partial\mathcal{U}$ ,  $r_i, h_i > 0$  e  $\gamma_i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz,  $i = 1, 2, \dots, N$  tais que

$$\mathcal{C}_i \cap \mathcal{U} := \{\mathbf{y} \in \mathcal{U}; |\mathbf{x}'_i - \mathbf{y}'| < r_i, \gamma_i(\mathbf{y}') < y_n < (\mathbf{x}_n)_i + h_i\},$$

a menos de uma rotação ou reordenação dos eixos, com  $\mathcal{C}_i := \mathcal{C}(\mathbf{x}_i, r_i, h_i)$ .

Seja  $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$  uma família de funções suaves tais que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, \text{ spt}(\zeta_i) \subset \mathcal{C}_i, \, i = 1, 2, \dots, N, \\ 0 \leq \zeta_0 \leq 1, \text{ spt}(\zeta_0) \subset \mathcal{U}, \\ \sum_{i=0}^N \zeta_i = 1 \text{ em } \mathcal{U} \cup \bigcup_{i=1}^N \mathcal{C}_i. \end{cases}$$

Definamos então, para cada  $k \in \mathbb{N}$  e  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$f_{k,i}(\mathbf{y}) := \begin{cases} f_k \zeta_i|_{\mathbf{U} \cap C_i} & \text{se } \mathbf{y} \in \mathbf{U} \cap C_i. \\ 0 & \text{se } \mathbf{y} \in \mathbf{U} - C_i. \end{cases}$$

$$Tf_{k,i}(\mathbf{y}) := \begin{cases} Tf_k \zeta_i|_{\partial \mathbf{U} \cap C_i} & \text{se } \mathbf{y} \in \partial \mathbf{U} \cap C_i. \\ 0 & \text{se } \mathbf{y} \in \partial \mathbf{U} - C_i. \end{cases}$$

e  $f_{k,0} := f_k \zeta_0$ . Por construção, para cada  $k$ ,  $f_k = \sum_{k=0}^N f_{k,i}$  em  $\mathbf{U}$  e  $Tf_k = \sum_{k=1}^N Tf_{k,i}$  em  $\partial \mathbf{U}$ .

Tome  $0 < \varepsilon < \min_{1 \leq i \leq N} \frac{h_i}{2}$  e observe que se  $\mathbf{y} \in \partial \mathbf{U}$  então,  $\mathbf{y} \in \partial \mathbf{U} \cap C_j$  para algum  $j$ , então defina

$$f_k^\varepsilon(\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f_{k,i}(\mathbf{y}', \gamma_j(\mathbf{y}') + t) dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbf{U}} |Tf_k - f_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \sum_{i=1}^N \int_{\partial \mathbf{U}} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |Tf_{k,i} - f_{k,i}(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t)| dt d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_{\partial \mathbf{U} \cap C_i} |Tf_{k,i} - f_{k,i}(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}') + t)| d\mathcal{H}^{n-1} dt \\ &\leq \sum_{i=1}^N C_i \|Df_{k,i}\|(C_{0,\varepsilon}^i), \end{aligned}$$

onde  $C_{0,\varepsilon}^i := \{\mathbf{y} \in \mathbf{U}; |\mathbf{x}'_i - \mathbf{y}| < r_i, \gamma(\mathbf{y}') < \mathbf{y}_n < \gamma(\mathbf{y}') + \varepsilon\}$ . Como anteriormente, seja  $\varphi_i \in C_c^1(C_{0,\varepsilon}^i; \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{C_{0,\varepsilon}^i} f_{k,i} \operatorname{div} \varphi_i d\mathbf{y} &= - \sum_{i=1}^N \int_{C_{0,\varepsilon}^i} (Df_k \zeta_i + f D\zeta_i) \cdot \varphi_i d\mathbf{y} \\ &= - \sum_{i=1}^N \int_{C_{0,\varepsilon}^i} Df_k \cdot \varphi_i d\mathbf{y} \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{C_{0,\varepsilon}^i} f_k \operatorname{div} \varphi_i d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Dessa estimativa, segue que

$$\sum_{i=1}^N \|Df_{k,i}\|(C_{0,\varepsilon}^i) = \sum_{i=1}^N \|Df_k\|(C_{0,\varepsilon}^i).$$

Em particular,

$$\int_{\partial \mathbf{u}} |\mathbb{T}f_k - f_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \sum_{i=1}^N C_i \|Df_k\| (C_{0,\varepsilon}^i).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbf{u}} |\mathbb{T}f_k - \mathbb{T}f_l| d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \int_{\partial \mathbf{u}} |\mathbb{T}f_k - f_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial \mathbf{u}} |f_k^\varepsilon - f_l^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial \mathbf{u}} |\mathbb{T}f_l - f_l^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^N C_i (\|Df_k\| + \|Df_l\|) (C_{0,\varepsilon}^i) + \int_{\partial \mathbf{u}} |f_k^\varepsilon - f_l^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^N C_i (\|Df_k\| + \|Df_l\|) (C_{0,\varepsilon}^i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{\partial \mathbf{u} \cap C_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |f_{k,i}(y', \gamma(y') + t) - f_{l,i}(y', \gamma(y') + t)| dt d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^N C_i (\|Df_k\| + \|Df_l\|) (C_{0,\varepsilon}^i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{\partial \mathbf{u} \cap C_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |f_k(y', \gamma(y') + t) - f_l(y', \gamma(y') + t)| dt d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^N C_i (\|Df_k\| + \|Df_l\|) (C_{0,\varepsilon}^i) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_{C_{0,\varepsilon}^i} |f_k - f_l| dy \\ &\leq \sum_{i=1}^N C_i (\|Df_k\| + \|Df_l\|) (C_{0,\varepsilon}^i) + \frac{N}{\varepsilon} \int_{\mathbf{u}} |f_k - f_l| dy. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \limsup_{k,l \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathbf{u}} |\mathbb{T}f_k - \mathbb{T}f_l| d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \limsup_{k,l \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N C_i (\|Df_k\| + \|Df_l\|) (C_{0,\varepsilon}^i) + \frac{N}{\varepsilon} \int_{\mathbf{u}} |f_k - f_l| dy \right) \\ &\leq \limsup_{k,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N C_i (\|Df_k\| + \|Df_l\|) (C_{0,\varepsilon}^i) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \limsup_{k,l \rightarrow \infty} C_i (\|Df_k\| + \|Df_l\|) (\bar{C}_{0,\varepsilon}^i) \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^N C_i \|Df\| (\bar{C}_{0,\varepsilon}^i \cap \mathbf{u}) \\ &\leq 2N \max_{1 \leq i \leq N} C_i \|Df\| (\bar{C}_{0,\varepsilon}^i \cap \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  segue que

$$\limsup_{k,l \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathbf{u}} |\mathbb{T}f_k - \mathbb{T}f_l| d\mathcal{H}^{n-1} \leq 0.$$

Portanto,  $\{Tf_k\}_{k=1}^\infty$  é de Cauchy em  $L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$ . Logo existe uma função  $\bar{f}$  em  $L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Tf_k - \bar{f}\|_{L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})} = 0.$$

Então, defina  $Tf = \bar{f}$ .

**Afirmção:**  $Tf$  independe da escolha da sequência  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ .

**Prova da Afirmção:** Sejam  $\{f_k\}_{k=1}^\infty, \{g_k\}_{k=1}^\infty \subset BV(U) \cap C^\infty(U)$  tais que

$$\begin{cases} f_k, g_k \longrightarrow f \text{ em } L^1(U), \\ \|Df_k\|(U), \|Dg_k\|(U) \longrightarrow \|Df\|(U). \end{cases}$$

Seja  $T_1f$  o traço dado por  $f_k$  e  $T_2f$  o traço dado por  $g_k$ , então,

$$\int_{\partial U} |T_1f - T_2f| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \underbrace{\int_{\partial U} |Tf - Tf_k| d\mathcal{H}^{n-1}}_{(i)} + \underbrace{\int_{\partial U} |Tf_k - Tg_k| d\mathcal{H}^{n-1}}_{(ii)} + \underbrace{\int_{\partial U} |Tf - Tg_k| d\mathcal{H}^{n-1}}_{(iii)}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular passando o “lim sup” com  $k \rightarrow \infty$ , note que fazendo isso, (i) e (iii) se anulam, então,

$$\int_{\partial U} |T_1f - T_2f| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial U} |Tf_k - Tg_k| d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Ora, tendo em vista as estimativas anteriores

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} |Tf_k - Tg_k| d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \int_{\partial U} |Tf_k - f_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial U} |f_k^\varepsilon - g_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial U} |Tg_k - g_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^N C_i(\|Df_k\| + \|Dg_k\|)(C_{0,\varepsilon}^i) + \frac{N}{\varepsilon} \int_U |f_k - g_k| dy. \end{aligned}$$

Logo,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial U} |Tf_k - Tg_k| d\mathcal{H}^{n-1} \leq 0.$$

Então,

$$\int_{\partial U} |T_1f - T_2f| d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Portanto,  $T_1f = T_2f$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{H}^{n-1}|_{\partial U}$  nula.

**Afirmção:** O operador  $T : BV(U) \rightarrow L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$  dado por  $f \mapsto Tf$  é linear e contínuo.

**Prova da Afirmção:** Sejam  $f, g \in BV(U)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Claramente, existem  $\{f_k\}_{k=1}^\infty, \{g_k\}_{k=1}^\infty \subset$

$BV(\mathbf{U}) \cap C^\infty(\mathbf{U})$  tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k \longrightarrow f \text{ em } L^1(\mathbf{U}), \\ g_k \longrightarrow g \text{ em } L^1(\mathbf{U}), \\ \|Df_k\|(\mathbf{U}) \longrightarrow \|Df\|(\mathbf{U}), \\ \|Dg_k\|(\mathbf{U}) \longrightarrow \|Dg\|(\mathbf{U}), \\ Tf_k \longrightarrow Tf \text{ em } L^1(\partial\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1}), \\ Tg_k \longrightarrow Tg \text{ em } L^1(\partial\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1}). \end{array} \right.$$

Sabemos que  $(\alpha f_k + g_k)$  converge em  $L^1(\mathbf{U})$  para  $(\alpha f + g)$  em  $L^1(\mathbf{U})$ . Logo,  $T(\alpha f_k + g_k)$  converge em  $L^1(\mathbf{U})$  para  $T(\alpha f + g)$  em  $L^1(\partial\mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1})$ . Em particular pelo que já vimos anteriormente  $T(\alpha f_k + g_k) = \alpha Tf_k + Tg_k$  para todo  $k$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbf{U}} |T(\alpha f + g) - (\alpha Tf + Tg)| d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \int_{\partial\mathbf{U}} |T(\alpha f + g) - T(\alpha f_k + g_k)| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &+ \int_{\partial\mathbf{U}} |T(\alpha f_k + g_k) - (\alpha Tf + Tg)| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial\mathbf{U}} |T(\alpha f + g) - T(\alpha f_k + g_k)| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &+ \int_{\partial\mathbf{U}} |\alpha Tf_k + Tg_k - \alpha Tf - Tg| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \int_{\partial\mathbf{U}} |T(\alpha f + g) - T(\alpha f_k + g_k)| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &+ \int_{\partial\mathbf{U}} |\alpha Tf_k - \alpha Tf| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial\mathbf{U}} |Tg_k - Tg| d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

para todo  $k$ . Em particular, passando o  $\limsup$  com  $k \longrightarrow \infty$  temos que

$$\int_{\partial\mathbf{U}} |T(\alpha f + g) - (\alpha Tf + Tg)| d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Portanto,  $T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\mathbf{U}}$  nula. Isso mostra a linearidade. Verificaremos a continuidade do operador  $T$ . Com efeito, seja  $f \in BV(\mathbf{U})$  como acima. Logo, fixe  $0 < \varepsilon < \min_{1 \leq i \leq N} \frac{h_i}{2}$ , então

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbf{U}} |Tf_k| d\mathcal{H}^{n-1} &\leq \int_{\partial\mathbf{U}} |Tf_k - f_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial\mathbf{U}} |f_k^\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^N C_i \|Df_k\|(C_{0,\varepsilon}^i) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon} \int_{C_{0,\varepsilon}^i} |f_k| dy \\ &\leq \sum_{i=1}^N C_i \|Df_k\|(\mathbf{U}) + \frac{N}{\varepsilon} \int_{\mathbf{U}} |f_k| dy \\ &\leq C_1 \left( \|Df_k\|(\mathbf{U}) + \int_{\mathbf{U}} |f_k| dy \right), \end{aligned}$$



onde  $C_1 := \max \left\{ \sum_{i=1}^N C_i, \frac{N}{\varepsilon} \right\}$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$  vem que

$$\int_{\partial U} |\mathbb{T}f| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq C_1 \left( \|Df\|(\mathbf{U}) + \int_{\mathbf{U}} |f| \, dy \right).$$

O que prova da afirmação. Por fim, seja  $f \in \text{BV}(\mathbf{U})$  como acima e  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  então, para cada  $k$  temos que

$$\int_{\mathbf{U}} f_k \operatorname{div} \varphi \, dy = - \int_{\mathbf{U}} Df_k \cdot \varphi \, dy + \int_{\partial U} \mathbb{T}f_k \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

onde  $\nu$  é o vetor normal unitário exterior a  $\partial U$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , vem que

$$\int_{\mathbf{U}} f \operatorname{div} \varphi \, dy = - \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[Df] + \int_{\partial U} \mathbb{T}f \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

uma vez que  $\mu_k \rightarrow \mu$ . Como queríamos demonstrar. ■

**Lema 4.1.** *Volume do cone  $n$ -dimensional*

*Demonstração.* Sejam  $a, b > 0$ , e defina  $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $x \mapsto -a|x| + b$ . Observe que o gráfico da  $\psi$  é um cone e que  $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{b}{a}$ . Então, defina

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{se } x \in B(0, \frac{b}{a}). \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^{n-1} - B(0, \frac{b}{a}). \end{cases}$$

Em particular, o volume desse cone é dado por,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x) \, dx &= \int_{B(0, \frac{b}{a})} -a|x| + b \, dx \\ &= -a \int_{B(0, \frac{b}{a})} |x| \, dx + b\alpha(n-1) \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \\ &= -a \int_0^{\frac{b}{a}} \int_{\partial B(0,t)} |x| \, d\mathcal{H}^{n-2}(x) \, dt + b\alpha(n-1) \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \\ &= -a \int_0^{\frac{b}{a}} \int_{\partial B(0,t)} t \, d\mathcal{H}^{n-2}(x) \, dt + b\alpha(n-1) \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \\ &= -a \int_0^{\frac{b}{a}} (n-1)\alpha(n-2)t^{n-2}t \, dt + b\alpha(n-1) \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \\ &= -a(n-1)\alpha(n-2) \int_0^{\frac{b}{a}} t^{n-1} \, dt + b\alpha(n-1) \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \\ &= -a \left(\frac{n-1}{n}\right) \alpha(n-2) \left(\frac{b}{a}\right)^n + b\alpha(n-1) \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \left[ b\alpha(n-1) - a \left(\frac{n-1}{n}\right) \alpha(n-2) \left(\frac{b}{a}\right) \right] \\ &= \frac{b^n}{a^{n-1}} \left[ \alpha(n-1) - \left(\frac{n-1}{n}\right) \alpha(n-2) \right]. \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.6.** *Seja  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado com  $\partial\mathbf{U}$  Lipschitz. Suponha que  $f \in BV(\mathbf{U})$ . Então, para quase todo  $\mathbf{x} \in \partial\mathbf{U}$ , com respeito a  $\mathcal{H}^{n-1}$ ,*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbf{U}} |f - Tf(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} = 0$$

e então,

$$Tf(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbf{U}} f \, d\mathbf{y}.$$

*Demonstração.* Primeiro mostraremos que a densidade da variação de  $f$  com respeito a  $\mathcal{H}^{n-1}$  é nula para  $\mathbf{x} \in \partial\mathbf{U}$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{H}^{n-1}$  nula. Ou seja,

**Afirmção:** Para quase todo  $\mathbf{x} \in \partial\mathbf{U}$ , com respeito a medida  $\mathcal{H}^{n-1}$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\|Df\|(\mathbf{U} \cap B(\mathbf{x}, r))}{r^{n-1}} = 0.$$

**Prova da Afirmção:** Fixemos  $\beta > 0$ ,  $\delta > \varepsilon > 0$  e defina

$$A_\beta := \left\{ \mathbf{x} \in \partial\mathbf{U}; \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\|Df\|(\mathbf{U} \cap B(\mathbf{x}, r))}{r^{n-1}} > \beta \right\}.$$

Mostraremos que  $\mathcal{H}^{n-1}(A_\beta) = 0$ . Dado  $\mathbf{x} \in A$  note que existe  $r \in (0, \varepsilon)$  tal que

$$\frac{\|Df\|(\mathbf{U} \cap B(\mathbf{x}, r))}{r^{n-1}} \geq \beta,$$

pois, caso contrário se para todo  $r \in (0, \varepsilon)$

$$\frac{\|Df\|(\mathbf{U} \cap B(\mathbf{x}, r))}{r^{n-1}} \leq \beta.$$

Então,

$$\sup_{r \in (0, \varepsilon)} \frac{\|Df\|(\mathbf{U} \cap B(\mathbf{x}, r))}{r^{n-1}} \leq \beta.$$

Dessa forma,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\|Df\|(\mathbf{U} \cap B(\mathbf{x}, r))}{r^{n-1}} \leq \sup_{r \in (0, \varepsilon)} \frac{\|Df\|(\mathbf{U} \cap B(\mathbf{x}, r))}{r^{n-1}} \leq \beta.$$

Mas  $x \in A_\beta$ . Logo, temos uma contradição. Portanto, para cada  $x \in \partial U$  existe  $r_x \in (0, \varepsilon)$  tal que

$$\frac{\|Df\|(\mathbf{U} \cap B(x, r_x))}{r_x^{n-1}} \geq \beta. \quad (58)$$

Assim,  $\{B(x, r_x)\}_{x \in A_\beta}$  é uma cobertura para  $A_\beta$ . Com o

$$\sup\{\text{diam}(B(x, r_x)); x \in A_\beta\} \leq \varepsilon < \infty.$$

Logo, pelo *Teorema da Cobertura de Vitali* existe uma coleção enumerável de bolas disjuntas de  $\{B(x, r_x)\}_{x \in A_\beta}$ , a qual denotamos por,  $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^\infty$  tal que

$$A \subset \bigcup_{x \in A_\beta} B(x, r_x) \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, 5r_i).$$

Tendo em vista que  $0 < r < \varepsilon < \delta$ , segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{10\delta}^{n-1}(A_\beta) &\leq \sum_{i=1}^\infty \alpha(n-1)(5r_i)^{n-1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \alpha(n-1)(5r_i)^{n-1} \\ &= \alpha(n-1)5^{n-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N r_i^{n-1} \\ &\leq \frac{\alpha(n-1)5^{n-1}}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \|Df\|(\mathbf{U} \cap B(x_i, r_i)), \quad \text{por (58)}. \end{aligned}$$

Note que  $\bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i) \subset \{x \in \mathbf{U}; \text{dist}(x, \partial \mathbf{U}) > \varepsilon\} := \mathbf{U}^\varepsilon$ . Então,

$$\mathcal{H}_{10\delta}^{n-1}(A_\beta) \leq C \|Df\|(\mathbf{U}^\varepsilon),$$

onde  $C := \frac{\alpha(n-1)5^{n-1}}{\beta}$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos que  $\mathcal{H}_{10\delta}^{n-1}(A_\beta) = 0$  para todo  $\delta > 0$ , logo,

$$\mathcal{H}^{n-1}(A_\beta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{10\delta}^{n-1}(A_\beta) = 0.$$

Portanto, para cada  $k$ ,  $\mathcal{H}^{n-1}(A_{\frac{1}{k}}) = 0$ . Daí,

$$\mathcal{H}^{n-1} \left( \left\{ x \in \partial \mathbf{U}; \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\|Df\|(\mathbf{U} \cap B(x, r))}{r^{n-1}} > 0 \right\} \right) = \mathcal{H}^{n-1} \left( \bigcup_{k=1}^\infty A_{\frac{1}{k}} \right) = 0.$$

O que prova a afirmação.

Doravante, seja  $x \in \partial \mathbf{U}$  um ponto de Lebesgue de  $Tf$  que satisfaz a afirmação

anterior. Tal ponto existe, pois, do contrário, se a interseção entre o conjunto dos pontos de Lebesgue de  $Tf$  e os que satisfazem a afirmação for vazia, segue que ambos teriam medida nula, absurdo. Logo, tal  $x$  existe. Portanto para esse  $x$

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\|Df\|(\mathbb{B}(x, r) \cap \mathbb{U})}{r^{n-1}} = 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathbb{B}(x, r) \cap \partial \mathbb{U}} |Tf - Tf(x)| d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \end{cases} \quad (59)$$

Por outro lado, para esse mesmo  $x \in \partial \mathbb{U}$  existem  $r_0 > 0$  e uma função Lipschitz  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}(x, r_0) = \{y \in \mathbb{U}; \gamma(y') < y_n\} \cap \mathbb{Q}(x, r_0).$$

Em particular, sabemos que existem  $r_x, h_x > 0$  tais que  $\mathbb{C}(x, r_x, h_x) \subset \mathbb{Q}(x, r_0)$  e,

$$\begin{cases} \max_{|x' - y'| < r_x} |\gamma(y') - x_n| < \frac{h_x}{4}, \\ \mathbb{U} \cap \mathbb{C}(x, r_x, h_x) = \{y \in \mathbb{U}; |x' - y'| < r_x, \gamma(y') < y_n < x_n + h_x\}. \end{cases}$$

Para prosseguirmos na demonstração do teorema, precisamos contruir um cilindro centrado em  $x$  que dependa somente da geometria da  $\partial \mathbb{U}$  e um parâmetro  $r > 0$ , além de que, contenha uma bola centrada em  $x$  e raio  $r$ , e para  $r \ll 1$  esteja contido em  $\mathbb{C}(x, r_x, h_x)$ .

Observe que tomado,  $0 < r \leq r_0$ , e definindo  $h(r) = 2r$ , temos que o cilindro  $\mathbb{C}(x, r, h(r)) \supset \mathbb{B}(x, r)$ . Note que esse cilindro depende da geometria de  $\partial \mathbb{U}$ , por outro lado, não sabemos se para  $r$  suficientemente pequeno,  $\mathbb{C}(x, r, h(r)) \subset \mathbb{C}(x, r_x, h_x)$ . Assim, note que da construção feita no Capítulo de Funções de Sobolev,

$$|\gamma(y') - x_n| \leq \text{Lip}(\gamma)|x' - y'| < r_x \text{Lip}(\gamma) \leq \frac{h_x}{4}. \quad (60)$$

Então,  $4r_x \text{Lip}(\gamma) \leq h_x$ . Isso nos sugere que tomar  $h(r) \geq 4r \text{Lip}(\gamma)$  é uma boa escolha. Dessa forma, considere  $h(r) = 2 \max\{1, 4 \text{Lip}(\gamma)\}r$ . Ora,

$$\begin{aligned} h(r) &\leq h_x \\ \Leftrightarrow r &\leq \frac{h_x}{2 \max\{1, 4 \text{Lip}(\gamma)\}} \\ \Leftrightarrow r &\leq \frac{h_x}{8 \text{Lip}(\gamma)}. \end{aligned}$$

De (60) temos que  $\frac{r_x}{2} < \frac{h_x}{8 \text{Lip}(\gamma)}$ . Então para  $h(r) = 2 \max\{1, 4 \text{Lip}(\gamma)\}r$ , e  $r < \frac{r_x}{2}$ , o cilindro  $\mathbb{C}(x, r, h(r)) \subset \mathbb{C}(x, r_x, h_x)$  e contém  $\mathbb{B}(x, r)$ . Defina então,  $\mathbb{C}(r) := \mathbb{C}(x, r, h(r))$ .

Agora seja  $0 < \varepsilon < \frac{h(r)}{2}$  e  $r < \frac{r_x}{2}$ . Defina para cada  $y \in \partial U \cap C(r)$

$$f_\varepsilon(y) := f(y', \gamma(y')) + \varepsilon$$

e

$$C_{0,\varepsilon}(r) := \{y \in U; \gamma(y') < y_n < \gamma(y') + \varepsilon\}.$$

**Afirmação:** Existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\int_{\partial U \cap C(r)} |Tf - f_\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \|Df\|(\mathbf{U} \cap C(r)).$$

**Prova da Afirmação:** Como  $f \in BV(\mathbf{U})$  existe  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  tal que a menos de uma subseqüência,

$$\begin{cases} f_k \longrightarrow f \text{ em } L^1(\mathbf{U}), \\ Tf_k \longrightarrow Tf \text{ em } L^1(\partial \mathbf{U}; \mathcal{H}^{n-1}), \\ f_k \longrightarrow f \quad \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.}, \\ Tf_k \longrightarrow Tf \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-q.t.p.}, \\ \|Df_k\|(\mathbf{U}) \longrightarrow \|Df\|(\mathbf{U}). \end{cases}$$

Pelo *Lema de Fatou*, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_{\partial U \cap C(r)} |Tf - f_\varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\partial U \cap C(r)} \liminf_{k \rightarrow \infty} |Tf_k - f_k(y', \gamma(y')) + \varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial U \cap C(r)} |Tf_k - f_k(y', \gamma(y')) + \varepsilon| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} C \|Df_k\|(C_{0,\varepsilon}(r)) \quad \text{por (57)} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} C \|Df_k\|(\mathbf{U} \cap C(r)) \\ &= C \|Df\|(\mathbf{U} \cap C(r)), \end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Agora iremos trabalhar para estabelecer uma estimativa para

$$\int_{B(x,r) \cap U} |Tf(y', \gamma(y')) - f(y)| dy$$

tendo em vista que  $B(x, r) \subset C(r)$  por construção.

Antes disso, seja  $\varphi : \mathbf{U} \cap B(x, r) \longrightarrow \partial \mathbf{U} \cap B(x, r)$ , dada por  $y \longmapsto (y', \gamma(y'))$ .

Logo,  $\varphi$  é uma projeção de  $\mathbf{U} \cap B(x, r)$  em  $\partial \mathbf{U} \cap B(x, r)$ . Além disso,

$$J\varphi(y) = \sqrt{\det[(D\varphi \circ D\varphi^t)(y)]},$$

onde  $D\varphi^t$  é a matriz transposta de  $D\varphi$ . Note que

$$D\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} & \frac{\partial\gamma}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\gamma}{\partial x_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad \text{e} \quad D\varphi^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{\partial\gamma}{\partial x_{n-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n \times n)}$$

Dessa forma

$$D\varphi \circ D\varphi^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{\partial\gamma}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} & \frac{\partial\gamma}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\gamma}{\partial x_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}_{(n \times n)}$$

Então, pelo desenvolvimento de Laplace,

$$\det(D\varphi \circ D\varphi^t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{nj} \det(M_j),$$

onde  $\{a_{nj}\}_{j=1}^n$  são os elementos da última linha da matriz  $D\varphi \circ D\varphi^t$ . É de fácil verificação que  $\det(M_j) = (-1)^{1+j} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$  se  $j = 1, 2, \dots, n-1$  e  $\det(M_n) = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \det(D\varphi \circ D\varphi^t) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{1+j} \frac{\partial\gamma}{\partial x_j} (-1)^{1+j} \frac{\partial\gamma}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{2(1+j)} \left( \frac{\partial\gamma}{\partial x_j} \right)^2 \\ &= |D\gamma|^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$J\varphi(\mathbf{y}) = \sqrt{|D\gamma(\mathbf{y})|^2} = |D\gamma(\mathbf{y})|.$$

**Afirmação:** Existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que

$$\int_{B(x,r) \cap U} |Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \leq C_1 r \|Df\| (U \cap C(r)).$$

**Prova da Afirmação:** Formalmente, seja  $\lambda$  tal que

$$Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y}) + \lambda = [Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})] J\varphi(\mathbf{y}).$$

Então,

$$\lambda = [Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})](J\varphi(\mathbf{y}) - 1).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r) \cap U} |Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} &= \int_{B(x,r) \cap U} |Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y}) + \lambda| \, d\mathbf{y} + \int_{B(x,r) \cap U} |\lambda| \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{B(x,r) \cap U} |Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})| J\varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{B(x,r) \cap U} |Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})| |J\varphi(\mathbf{y}) - 1| \, d\mathbf{y} \\ &\leq \int_{B(x,r) \cap U} |Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})| J\varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{B(x,r) \cap U} |Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})| J\varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= 2 \int_{B(x,r) \cap U} |Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})| J\varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Então, pela *Fórmula da Coarea*

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r) \cap U} |Tf(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) - f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} &\leq 2 \int_{\partial U \cap B(x,r)} \int_{\varphi^{-1}(\mathbf{y})} |Tf \circ \varphi - f| \, d\mathcal{H}^1 \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= 2 \int_{\partial U \cap B(x,r)} \int_{\varphi^{-1}(\mathbf{y})} |Tf(\mathbf{y}') - f(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) + t| \, dt \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\ &\leq 2 \int_{\partial U \cap B(x,r)} \int_0^{\frac{h(\mathbf{r})}{2}} |Tf(\mathbf{y}') - f(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) + t| \, dt \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \\ &= 2 \int_0^{\frac{h(\mathbf{r})}{2}} \int_{\partial U \cap B(x,r)} |Tf(\mathbf{y}') - f(\mathbf{y}', \gamma(\mathbf{y}')) + t| \, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) \, dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{h(\mathbf{r})}{2}} C \|Df\|(\mathbf{U} \cap C(\mathbf{r})) \, dt \\ &= Ch(\mathbf{r}) \|Df\|(\mathbf{U} \cap C(\mathbf{r})) \\ &= C_2 r \max\{1, 4 \operatorname{Lip}(\gamma)\} \|Df\|(\mathbf{U} \cap C(\mathbf{r})) \\ &= C_1 r \|Df\|(\mathbf{U} \cap C(\mathbf{r})), \end{aligned}$$

onde  $C_1 := 2C \max\{1, 4 \operatorname{Lip}(\gamma)\}$ .

Por fim,

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r) \cap U} |f(y) - Tf(x)| \, dy &\leq \underbrace{\int_{B(x,r) \cap U} |Tf(y', \gamma(y')) - f(y)| \, dy}_{(i)} \\ &+ \underbrace{\int_{B(x,r) \cap U} |Tf(y', \gamma(y')) - Tf(x)| \, dy}_{(ii)} \end{aligned}$$

Olhando para (i), temos que

$$\int_{B(x,r) \cap U} |Tf(y', \gamma(y')) - f(y)| \, dy \leq \frac{C_1 r \|Df\|(\mathbf{U} \cap C(r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \mathbf{U})}.$$

Por outro lado, dados  $z, y \in C(r)$  temos que

$$|z - y| \leq \sqrt{(h(r))^2 + 4r^2} = \sqrt{(2r \max\{1, 4 \operatorname{Lip}(\gamma)\})^2 + 4r^2} = rC_2,$$

onde  $C_2 := \sqrt{(2 \max\{1, 4 \operatorname{Lip}(\gamma)\})^2 + 4}$ . Então,  $C(r) \subset B(x, rC_2)$ . Logo,

$$\int_{B(x,r) \cap U} |Tf(y', \gamma(y')) - f(y)| \, dy \leq \frac{C_1 r \|Df\|(\mathbf{U} \cap B(x, rC_2))}{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \mathbf{U})}.$$

Nos voltando para (ii) fazendo como anteriormente, usando o  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} &\int_{B(x,r) \cap U} |Tf(y', \gamma(y')) - Tf(x)| \, dy \\ &\leq 2 \int_{B(x,r) \cap U} |Tf(y', \gamma(y')) - Tf(x)| |J\varphi(y)| \, dy \\ &= \frac{2}{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \mathbf{U})} \int_{\partial U \cap B(x, r)} \int_{\varphi^{-1}(y)} |Tf(y) - Tf(x)| \, d\mathcal{H}^1 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \frac{2}{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \mathbf{U})} \int_{\partial U \cap B(x, r)} \int_0^{\frac{h(r)}{2}} dt |Tf(y) - Tf(x)| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \frac{h(r)}{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \mathbf{U})} \int_{\partial U \cap B(x, r)} |Tf(y) - Tf(x)| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \frac{2r \max\{1, \operatorname{Lip}(\gamma)\}}{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \mathbf{U})} \int_{\partial U \cap C(r)} |Tf(y) - Tf(x)| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \frac{rC_3}{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \mathbf{U})} \int_{\partial U \cap B(x, r)} |Tf(y) - Tf(x)| \, d\mathcal{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

onde  $C_3 := 2 \max\{1, \operatorname{Lip}(\gamma)\}$ .



Agora observe que para todo  $\mathbf{y}' \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{y}') &= \gamma(\mathbf{y}') - \gamma(\mathbf{x}') + \gamma(\mathbf{x}') \\ &\leq |\gamma(\mathbf{y}') - \gamma(\mathbf{x}')| + \mathbf{x}_n \\ &\leq \text{Lip}(\gamma)|\mathbf{y}' - \mathbf{x}'| + \mathbf{x}_n.\end{aligned}$$

Dessa estimativa vemos que em  $B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbf{U}$  existe um cone  $\mathbf{K}$  com vértice em  $\mathbf{x}$ . Em particular, o mesmo tem altura  $r \sin(\theta_0)$ , onde  $\theta_0 := \arctan(\text{Lip}(\gamma))$  pelo lema que antecede esse teorema, sendo  $\mathbf{a} = \text{Lip}(\gamma)$  e  $\mathbf{b} = r \sin(\theta_0)$ , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(\mathbf{K}) &= \frac{\mathbf{b}^n}{\mathbf{a}^{n-1}} \left[ \alpha(n-1) - \binom{n-1}{n} \alpha(n-2) \right] \\ &= \frac{(r \sin(\theta_0))^n}{(\text{Lip}(\gamma))^{n-1}} \left[ \alpha(n-1) - \binom{n-1}{n} \alpha(n-2) \right] \\ &= r^n \mathbf{C}_4,\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{C}_4 := \frac{(\sin(\theta_0))^n}{(\text{Lip}(\gamma))^{n-1}} \left[ \alpha(n-1) - \binom{n-1}{n} \alpha(n-2) \right]$ .

Como  $\mathbf{K} \subset B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbf{U}$  temos que  $\mathcal{L}^n(\mathbf{K}) \leq \mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbf{U})$ . Em particular,

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbf{U})} \leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{K})}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbf{U}} |f(\mathbf{y}) - \text{Tf}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} &\leq \frac{\mathbf{C}_1 r \|\text{Df}\|(U \cap B(\mathbf{x}, r\mathbf{C}_2))}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbf{U})} \\ &+ \frac{r\mathbf{C}_3}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbf{U})} \int_{\partial U \cap B(\mathbf{x}, r)} |\text{Tf}(\mathbf{y}) - \text{Tf}(\mathbf{x})| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \frac{\mathbf{C}_1 r \|\text{Df}\|(U \cap B(\mathbf{x}, r\mathbf{C}_2))}{\mathcal{L}^n(\mathbf{K})} \\ &+ \frac{r\mathbf{C}_3}{\mathcal{L}^n(\mathbf{K})} \int_{\partial U \cap B(\mathbf{x}, r)} |\text{Tf}(\mathbf{y}) - \text{Tf}(\mathbf{x})| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \frac{\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_4 \|\text{Df}\|(U \cap B(\mathbf{x}, r\mathbf{C}_2))}{r^{n-1}} \\ &+ \frac{\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_4}{r^{n-1}} \int_{\partial U \cap B(\mathbf{x}, r)} |\text{Tf}(\mathbf{y}) - \text{Tf}(\mathbf{x})| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \frac{\mathbf{C}_5 \|\text{Df}\|(U \cap B(\mathbf{x}, r\mathbf{C}_2))}{(r\mathbf{C}_2)^{n-1}} \\ &+ \frac{\mathbf{C}_6}{\alpha(n-1)r^{n-1}} \int_{\partial U \cap B(\mathbf{x}, r)} |\text{Tf}(\mathbf{y}) - \text{Tf}(\mathbf{x})| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \frac{\mathbf{C}_5 \|\text{Df}\|(U \cap B(\mathbf{x}, r\mathbf{C}_2))}{(r\mathbf{C}_2)^{n-1}} + \mathbf{C}_6 \int_{\partial U \cap B(\mathbf{x}, r)} |\text{Tf}(\mathbf{y}) - \text{Tf}(\mathbf{x})| \, d\mathcal{H}^{n-1},\end{aligned}$$

onde  $C_5 := C_1 C_4 (C_2)^{n-1}$  e  $C_6 := C_3 C_4 \alpha(n-1)$ .

Tendo em vista a escolha do  $x \in \partial U$ , temos que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r) \cap \partial U} |f(y) - Tf(x)| \, dy \leq 0.$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r) \cap \partial U} |f(y) - Tf(x)| \, dy = 0,$$

e conseqüentemente

$$Tf(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r) \cap \partial U} f(y) \, dy$$

como queríamos demonstrar. ■

Observe que como consequência desse Teorema tem-se que se  $f \in BV(U) \cap C(\bar{U})$  então,  $Tf = f|_{\partial U}$ .

### 4.3 Extensão para funções BV

**Teorema 4.7.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado, com fronteira Lipschitz. Seja  $f_1 \in BV(U)$  e  $f_2 \in BV(\mathbb{R}^n - \bar{U})$ . Defina*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in U, \\ f_2(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - \bar{U}. \end{cases}$$

Então,  $\bar{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$  e

$$\|D\bar{f}\|(\mathbb{R}^n) = \|Df_1\|(U) + \|Df_2\|(\mathbb{R}^n - \bar{U}) + \int_{\partial U} |Tf_1 - Tf_2| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\varphi| \leq 1$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \operatorname{div} \varphi \, dx &= \int_U f_1 \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n - \bar{U}} f_2 \operatorname{div} \varphi \, dx \\ &= - \int_U \varphi \cdot d[Df_1] + \int_{\partial U} Tf_1 \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\mathbb{R}^n - \bar{U}} \varphi \cdot d[Df_2] \\ &\quad + \int_{\partial U} Tf_2 \varphi \cdot (-\nu) \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_U \varphi \cdot d[Df_1] - \int_{\mathbb{R}^n - \bar{U}} \varphi \cdot d[Df_2] + \int_{\partial U} (Tf_1 - Tf_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \left| - \int_U \varphi \cdot d[Df_1] - \int_{\mathbb{R}^n - \bar{U}} \varphi \cdot d[Df_2] + \int_{\partial U} (Tf_1 - Tf_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \right|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \operatorname{div} \varphi \, dx &\leq \left| \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[\mathbf{D}f_1] \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}} \varphi \cdot d[\mathbf{D}f_2] \right| + \left| \int_{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{T}f_1 - \mathbf{T}f_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\
&= \left| \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot \sigma_1 \, d\|\mathbf{D}f_1\| \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}} \varphi \cdot \sigma_2 \, d\|\mathbf{D}f_2\| \right| \\
&\quad + \left| \int_{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{T}f_1 - \mathbf{T}f_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\
&= \|\mathbf{D}f_1\|(\mathbf{U}) + \|\mathbf{D}f_2\|(\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}) + \int_{\partial \mathbf{U}} |\mathbf{T}f_1 - \mathbf{T}f_2| \, d\mathcal{H}^{n-1},
\end{aligned}$$

onde  $\nu$  é o vetor normal unitário exterior a  $\partial \mathbf{U}$ . Daí tomando o supremo sobre as  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  vem que

$$\|\mathbf{D}\bar{f}\|(\mathbb{R}^n) \leq \|\mathbf{D}f_1\|(\mathbf{U}) + \|\mathbf{D}f_2\|(\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}) + \int_{\partial \mathbf{U}} |\mathbf{T}f_1 - \mathbf{T}f_2| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Portanto,  $\bar{f} \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$ . Agora observe que dada  $\varphi \in C_c^1(\mathbf{U}; \mathbb{R}^n)$ ,

$$-\int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[\mathbf{D}\bar{f}] = \int_{\mathbf{U}} \bar{f} \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\mathbf{U}} f_1 \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[\mathbf{D}f_1].$$

De maneira similar vemos que

$$-\int_{\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}} \varphi \cdot d[\mathbf{D}\bar{f}] = -\int_{\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}} \varphi \cdot d[\mathbf{D}f_2].$$

Portanto,

$$[\mathbf{D}\bar{f}] = \begin{cases} [\mathbf{D}f_1] & \text{em } \mathbf{U}, \\ [\mathbf{D}f_2] & \text{em } \mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}. \end{cases}$$

Em particular,

$$\begin{cases} \|\mathbf{D}\bar{f}\|(\mathbf{U}) = \|\mathbf{D}f_1\|(\mathbf{U}), \\ \|\mathbf{D}\bar{f}\|(\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}) = \|\mathbf{D}f_2\|(\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}). \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{D}\bar{f}\|(\mathbb{R}^n) &= \|\mathbf{D}\bar{f}\|(\mathbf{U}) + \|\mathbf{D}\bar{f}\|(\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}) + \|\mathbf{D}\bar{f}\|(\partial \mathbf{U}) \\
&= \|\mathbf{D}f_1\|(\mathbf{U}) + \|\mathbf{D}f_2\|(\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}) + \|\mathbf{D}\bar{f}\|(\partial \mathbf{U}).
\end{aligned}$$

Resta nos provar que

$$\|\mathbf{D}\bar{f}\|(\partial \mathbf{U}) = \int_{\partial \mathbf{U}} |\mathbf{T}f_1 - \mathbf{T}f_2| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Com efeito, seja  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ , com  $|\varphi| \leq 1$  então, de

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot d[D\bar{f}] &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \operatorname{div} \varphi \, dx \\ &= - \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[Df_1] - \int_{\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}} \varphi \cdot d[Df_2] + \int_{\partial \mathbf{U}} (Tf_1 - Tf_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbf{U}} (Tf_1 - Tf_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \operatorname{div} \varphi \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot d[D\bar{f}] - \int_{\mathbf{U}} \varphi \cdot d[Df_1] - \int_{\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}} \varphi \cdot d[Df_2] \\ &= - \int_{\partial \mathbf{U}} \varphi \cdot d[D\bar{f}]. \end{aligned}$$

Por um lado,

$$\int_{\partial \mathbf{U}} \varphi \cdot d[D\bar{f}] = \int_{\partial \mathbf{U}} (Tf_1 - Tf_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \left| \int_{\partial \mathbf{U}} (Tf_1 - Tf_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \right| \leq \int_{\partial \mathbf{U}} |Tf_1 - Tf_2| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Tomando o supremo sobre as  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , com  $|\varphi| \leq 1$ , segue que

$$\|D\bar{f}\|(\partial \mathbf{U}) \leq \int_{\partial \mathbf{U}} |Tf_1 - Tf_2| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Por outro lado,

$$\int_{\partial \mathbf{U}} (Tf_1 - Tf_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial \mathbf{U}} \varphi \cdot d[D\bar{f}] \leq \left| \int_{\partial \mathbf{U}} \varphi \cdot d[D\bar{f}] \right| \leq \|D\bar{f}\|(\partial \mathbf{U}).$$

Tomando o supremo sobre as  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , com  $|\varphi| \leq 1$ , segue que

$$\int_{\partial \mathbf{U}} |Tf_1 - Tf_2| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \|D\bar{f}\|(\partial \mathbf{U}),$$

uma vez que

$$\sup_{\substack{\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \\ |\varphi| \leq 1}} \int_{\partial \mathbf{U}} (Tf_1 - Tf_2) \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial \mathbf{U}} |Tf_1 - Tf_2| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Tal fato pode ser verificado, utilizando-se de que  $\|g\|_{L^1} = \sup_{\substack{\psi \in L^\infty \\ \|\psi\|_{L^\infty} \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} g\psi \, dy$  e

da densidade das funções simples em  $L^p$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .

Portanto,

$$\|D\bar{f}\|(\partial \mathbf{U}) = \int_{\partial \mathbf{U}} |Tf_1 - Tf_2| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Logo,

$$\|D\bar{f}\|(\mathbb{R}^n) = \|Df_2\|(\mathbf{U}) + \|Df_2\|(\mathbb{R}^n - \bar{\mathbf{U}}) + \int_{\partial\mathbf{U}} |Tf_1 - Tf_2| d\mathcal{H}^{n-1},$$

como queríamos demonstrar. ■

Claramente, esse teorema nos diz que podemos estender uma função BV por qualquer outra função de Variação limitada definida no complementar do fecho do domínio da função a qual queremos estender.

Portanto, a extensão mais simples que podemos fazer para uma  $f \in \text{BV}(\mathbf{U})$ ,  $\mathbf{U} \subset \text{aberto limitado}$ , é definimos

$$\bar{f} = \begin{cases} f & \text{em } \mathbf{U}. \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n - \mathbf{U}. \end{cases}$$

Segue do teorema provado que  $\bar{f} \in \text{BV}(\mathbb{R}^n)$  e  $\|D\bar{f}\|(\mathbb{R}^n) = \|Df\|(\mathbf{U})$ .

#### 4.4 Desigualdades de Sobolev e Poincaré para funções BV

**Teorema 4.8** (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (BV)). *Existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que*

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|Df\|(\mathbb{R}^n).$$

para toda  $f \in \text{BV}(\mathbb{R}^n)$ .

*Demonstração.* Seja  $\{\bar{f}_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{BV}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que a menos de uma subsequência, temos que

$$\begin{cases} f_k \longrightarrow f \text{ em } L^1(\mathbb{R}^n), \\ f_k \longrightarrow f \quad \mathcal{L}^n\text{-q.t.p.}, \\ \|Df_k\|(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \|Df\|(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Ora, pelo *Lema de Fatou*,

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_k|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \left[ \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f_k|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n} \frac{n}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \left[ \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |Df_k| dx \right)^{\frac{n}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} \quad (\text{por (3.10)}) \\ &= \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} (C_1 \|Df_k\|(\mathbb{R}^n))^{\frac{n}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} = C_1 \|Df\|(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

■

**Corolário 4.1** (Desigualdade Isoperimétrica). *Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto de perímetro finito, então*

$$(\mathcal{L}^n(E))^{1-\frac{1}{n}} \leq C_1 \|\partial E\|(\mathbb{R}^n).$$

*Demonstração.* Tome  $f := \chi_E$  e aplique o teorema anterior. ■

**Teorema 4.9** (Desigualdade de Poincaré (BV)). *Existe uma constante  $C_2 > 0$  tal que*

$$\|f - (f)_{x,r}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(B(x,r))} \leq C_2 \|Df\|(B(x,r)),$$

para toda  $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  onde  $(f)_{x,r} := \int_{B(x,r)} f \, dy$ .

*Demonstração.* Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  e  $g \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Então,  $g \in BV(B(x,r))$ . Defina

$$\bar{g} := \begin{cases} g & \text{em } B(x,r). \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n - B(x,r). \end{cases}$$

Logo,  $\|D\bar{g}\|(\mathbb{R}^n) = \|Dg\|(B(x,r))$ .

Dessa forma, tendo em vista o teorema anterior,

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(x,r)} |g|^{\frac{n}{n-1}} \, dy \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{g}|^{\frac{n}{n-1}} \, dy \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq C_1 \|D\bar{g}\|(\mathbb{R}^n) \\ &= C_1 \|Dg\|(B(x,r)). \end{aligned}$$

Logo, façamos  $g := f - (f)_{x,r}$  então,

$$\left( \int_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^{\frac{n}{n-1}} \, dy \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_1 \|D(f - (f)_{x,r})\|(B(x,r)) = C_1 \|Df\|(B(x,r)).$$

Basta definir  $C_2 := C_1$  ■

**Teorema 4.10.** *Para cada  $0 < \alpha \leq 1$ , existe uma constante  $C_3 > 0$  tal que  $C_3 = C_3(\alpha)$ ,*

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(B(x,r))} \leq C_3 \|Df\|(B(x,r)),$$

para toda bola  $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$  e  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  satisfazendo,

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap \{f = 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \geq \alpha.$$

*Demonstração.* Seja  $f \in \mathbf{BV}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , suponha que exista  $0 < \alpha \leq 1$  tal que

$$\frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r) \cap \{f = 0\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \geq \alpha.$$

Então, considere a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))} &\leq \|f - (f)_{x, r}\|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))} \| (f)_{x, r} \|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))} \\ &\leq C_2 \|Df\|(\mathbf{B}(x, r)) + \underbrace{\| (f)_{x, r} \|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))}}_{(i)}. \end{aligned}$$

Nos voltando para (i), temos que

$$\begin{aligned} \| (f)_{x, r} \|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))} &= \left( \int_{\mathbf{B}(x, r)} |(f)_{x, r}|^{\frac{n}{n-1}} dy \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= |(f)_{x, r}| (\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r)))^{1-\frac{1}{n}} \\ &= \left| \int_{\mathbf{B}(x, r)} f(w) dw \right| (\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r)))^{1-\frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{1}{(\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r)))^{\frac{1}{n}}} \int_{\mathbf{B}(x, r)} |f(w)| dw \\ &= \frac{1}{(\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r)))^{\frac{1}{n}}} \int_{\mathbf{B}(x, r) \cap \{f \neq 0\}} |f(w)| dw \\ &\leq \frac{(\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r) \cap \{f \neq 0\}))^{\frac{1}{n}}}{(\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r)))^{\frac{1}{n}}} \left( \int_{\mathbf{B}(x, r)} |f(w)|^{\frac{n}{n-1}} dw \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \left( 1 - \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r) \cap \{f = 0\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \int_{\mathbf{B}(x, r)} |f(w)|^{\frac{n}{n-1}} dw \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}} \left( \int_{\mathbf{B}(x, r)} |f(w)|^{\frac{n}{n-1}} dw \right)^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Retornando a estimativa anterior, temos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))} &\leq C_2 \|Df\|(\mathbf{B}(x, r)) + (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}} \|f\|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))} \\ \Rightarrow \|f\|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))} \left[ 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}} \right] &\leq C_2 \|Df\|(\mathbf{B}(x, r)) \\ \Rightarrow \|f\|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))} &\leq \frac{C_2}{1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}}} \|Df\|(\mathbf{B}(x, r)) \\ \Rightarrow \|f\|_{\mathbf{L}^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{B}(x, r))} &\leq C_3 \|Df\|(\mathbf{B}(x, r)), \end{aligned}$$

onde  $C_3 := \frac{C_2}{1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}}}$ . ■

## 5 RESULTADOS DE DIFERENCIABILIDADE E APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES $C^1$

### 5.1 Diferenciabilidade $L^{p^*}$

#### 5.1.1 Diferenciabilidade $L^{1^*}$ para funções BV

Relembre que se  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  então associada está uma medida vetorial de Radon,

$$[Df] = [Df]_{\text{ac}} + [Df]_s,$$

onde  $[Df]_{\text{ac}} \ll \mathcal{L}^n$  e  $[Df]_s \perp \mathcal{L}^n$ . Ou seja,

$$[Df] = \mathcal{L}^n \llcorner_{Df} + [Df]_s,$$

onde  $Df \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  é a densidade de  $[Df]_{\text{ac}}$  com respeito a  $\mathcal{L}^n$ .

**Teorema 5.1.** *Seja  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Então, a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula, se  $x \in \mathbb{R}^n$  então,*

$$\left( \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)|^{1^*} dx \right)^{\frac{1}{1^*}} = o(r)$$

quando  $r \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Dada  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , observe que pelo que já fizemos para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p.

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \text{ (por (2.27)) ,} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |Df(y) - Df(x)| dy = 0 \text{ (por (2.27)) ,} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|[Df]_s|(B(x,r))}{r^n} = 0 \text{ (por (2.26)).} \end{cases} \quad (61)$$

Seja  $x \in \mathbb{R}^n$ , tal que (61) se verifique. Em particular, a menos de uma isometria podemos assumir que  $x = 0$ . Tome  $\varepsilon, r > 0$  e tenha em vista,  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$  onde  $\eta_\varepsilon$  é o *Mollifier* canônico. Fixe  $y \in B(0, r)$  e defina  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $t \mapsto f^\varepsilon(ty)$ . Então, pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*,

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(s) ds.$$



Logo,

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(\mathbf{y}) &= f^\varepsilon(\mathbf{0}) + \int_0^1 Df^\varepsilon(s\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \, ds \\ &= f^\varepsilon(\mathbf{0}) + Df(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{y} + \int_0^1 (Df^\varepsilon(s\mathbf{y}) - Df(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{y} \, ds. \end{aligned}$$

Então,

$$f^\varepsilon(\mathbf{y}) - f^\varepsilon(\mathbf{0}) - Df(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{y} = \int_0^1 (Df^\varepsilon(s\mathbf{y}) - Df(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{y} \, ds.$$

Seja  $\varphi \in C_c^1(B(\mathbf{0}, r))$  com  $|\varphi| \leq 1$ . Então multiplique a igualdade acima por  $\varphi$  e tome a média com respeito a  $\mathbf{y}$  em  $B(\mathbf{0}, r)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{0}, r)} \varphi(\mathbf{y}) [f^\varepsilon(\mathbf{y}) - f^\varepsilon(\mathbf{0}) - Df(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{y}] \, d\mathbf{y} &= \int_{B(\mathbf{0}, r)} \varphi(\mathbf{y}) \int_0^1 (Df^\varepsilon(s\mathbf{y}) - Df(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{y} \, ds \, d\mathbf{y} \\ &= \int_0^1 \int_{B(\mathbf{0}, r)} \varphi(\mathbf{y}) (Df^\varepsilon(s\mathbf{y}) - Df(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{y} \, ds. \end{aligned}$$

Fazendo  $\mathbf{z} = s\mathbf{y}$  temos que

$$\begin{cases} d\mathbf{z} = s^n \, d\mathbf{y}, \\ \mathbf{y} = \frac{\mathbf{z}}{s}, \\ |\mathbf{z}| = |\mathbf{y}s| \leq rs. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{0}, r)} \varphi(\mathbf{y}) [f^\varepsilon(\mathbf{y}) - f^\varepsilon(\mathbf{0}) - Df(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{y}] \, d\mathbf{y} &= \int_0^1 \int_{B(\mathbf{0}, r)} \varphi(\mathbf{y}) (Df^\varepsilon(s\mathbf{y}) - Df(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{y} \, ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \int_{B(\mathbf{0}, rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (Df^\varepsilon(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} \right] ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \int_{B(\mathbf{0}, rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df^\varepsilon(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} \right. \\ &\quad \left. - \int_{B(\mathbf{0}, rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} \right] ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \frac{h_\varepsilon(s)}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{0}, rs))} \right. \\ &\quad \left. - \int_{B(\mathbf{0}, rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} \right] ds, \end{aligned}$$

onde  $h_\varepsilon(s) := \int_{B(\mathbf{0}, rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df^\varepsilon(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z}$ . Temos a intenção de utilizar o *Teorema da*

*Convergência Dominada* na integral com respeito a  $s$ . Dessa forma, note que

$$\begin{aligned}
 h_\varepsilon(s) &= \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{z}{s}\right) Df^\varepsilon(z) \cdot z \, dz \\
 &= \int_{B(0,rs)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial z_i}(z) \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z_i \, dz \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{B(0,rs)} \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial z_i}(z) \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z_i \, dz \\
 &= - \sum_{i=1}^n \int_{B(0,rs)} f^\varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z_i} \left( \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z_i \right) \, dz \\
 &= - \int_{B(0,rs)} f^\varepsilon(z) \operatorname{div} \left( \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z \right) \, dz.
 \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(s) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,rs)} f^\varepsilon(z) \operatorname{div} \left( \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z \right) \, dz \\
 &= - \int_{B(0,rs)} f(z) \operatorname{div} \left( \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z \right) \, dz \\
 &= \int_{B(0,rs)} \left( \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z \right) \cdot d[Df] \\
 &= \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{z}{s}\right) Df(z) \cdot z \, dz + \int_{B(0,rs)} \left( \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z \right) \cdot d[Df]_s \\
 &:= h(s).
 \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
 |h_\varepsilon(s)| &= \left| \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{z}{s}\right) Df^\varepsilon(z) \cdot z \, dz \right| \\
 &\leq \int_{B(0,rs)} \left| \varphi\left(\frac{z}{s}\right) \right| |Df^\varepsilon(z) \cdot z| \, dz \\
 &\leq \int_{B(0,rs)} \left| \varphi\left(\frac{z}{s}\right) \right| |Df^\varepsilon(z)| |z| \, dz \\
 &\leq rs \int_{B(0,rs)} |Df^\varepsilon(z)| \, dz \\
 &= rs \int_{B(0,rs)} \left| \int_{\mathbb{R}^n} D\eta_\varepsilon(z-y) f(y) \, dy \right| \, dz \\
 &= \frac{rs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs)} \left| \sum_{i=1}^n \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \frac{\partial \eta}{\partial z_i} \left( \frac{z-y}{\varepsilon} \right) f(y) \, dy e_i \right| \, dz \\
 &= \frac{rs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs)} \left| \sum_{i=1}^n \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \eta \left( \frac{z-y}{\varepsilon} \right) \sigma_i \, d\|Df\|(y) e_i \right| \, dz.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|h_\varepsilon(s)| &\leq \frac{nrs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs)} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \eta\left(\frac{z-y}{\varepsilon}\right) d\|Df\|(y) dz \\
&\leq \frac{nrs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \int_{B(0,rs) \cap B(y,\varepsilon)} \eta\left(\frac{z-y}{\varepsilon}\right) dz d\|Df\|(y) \\
&\leq \frac{nrs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \int_{B(0,rs) \cap B(y,\varepsilon)} dz d\|Df\|(y) \\
&= \frac{nrs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \mathcal{L}^n(B(0,rs) \cap B(y,\varepsilon)) d\|Df\|(y) \\
&\leq \frac{nrs2^n \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} d\|Df\|(y) \\
&\leq \frac{nrs2^n \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{\varepsilon^n} \|Df\|(B(0,rs+\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Observe que para  $r, \varepsilon > 0$  suficientemente pequenos, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|Df\|(B(0,rs+\varepsilon)) \leq C(rs+\varepsilon)^n.$$

Pois,

$$\lim_{r,\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|Df\|(B(0,rs+\varepsilon))}{(rs+\varepsilon)^n} = \beta \geq 0.$$

Em particular, para  $\delta = 1$  existe  $r_0, \varepsilon_0$  tais que para todo  $r < r_0$  e  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,

$$\left| \frac{\|Df\|(B(0,rs+\varepsilon))}{(rs+\varepsilon)^n} - \beta \right| < 1.$$

Então,

$$\|Df\|(B(0,rs+\varepsilon))(rs+\varepsilon)^n < (1+\beta)(rs+\varepsilon)^n$$

para  $r, \varepsilon \ll 1$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
|h_\varepsilon(s)| &\leq \frac{nrs2^n \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}C}{\varepsilon^n} (rs+\varepsilon)^n \quad \text{onde } C := 1 + \beta \text{ e } r, \varepsilon \ll 1 \\
&= \frac{C_1 rs \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{\varepsilon^n} (rs+\varepsilon)^n,
\end{aligned}$$

onde  $C_1 := n2^n C$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{|h_\varepsilon(s)|}{s^{n+1}} &\leq \frac{C_1 rs \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^{n+1} \varepsilon^n} (rs+\varepsilon)^n \\
&\leq \frac{C_1 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^n \varepsilon^n} 2^n ((rs)^n + \varepsilon^n) \\
&= \frac{C_2 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^n \varepsilon^n} (rs)^n + \frac{C_2 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^n \varepsilon^n} \varepsilon^n \\
&= \frac{C_2 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{\varepsilon^n} r^n + \frac{C_2 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^n} \leq \frac{C_2 r \varepsilon^n}{\varepsilon^n} r^n + \frac{C_2 r (rs)^n}{s^n} = 2C_2 r^{n+1},
\end{aligned}$$

onde  $C_2 := 2^n C_1$ .

Logo,  $\frac{|h_\varepsilon(s)|}{s^{n+1}}$  é controlado por uma função integrável com respeito  $s$  em  $[0, 1]$ . Portanto, passando o limite com  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos pelo *Teorema da Convergência Dominada* que

$$\begin{aligned}
& \int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y}) [f(\mathbf{y}) - f(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y}] d\mathbf{y} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y}) (Df^\varepsilon(s\mathbf{y}) - Df(0)) \cdot \mathbf{y} d\mathbf{y} ds \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \frac{h_\varepsilon(s)}{\mathcal{L}^n(B(0,rs))} - \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df(0) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{z} \right] ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \frac{h(s)}{\mathcal{L}^n(B(0,rs))} - \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df(0) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{z} \right] ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (Df(\mathbf{z}) - Df(0)) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{z} \right. \\
&\quad \left. + \int_{B(0,rs)} \left( \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) \mathbf{z} \right) \cdot d[Df]_s \right] ds \\
&\leq \left| \int_0^1 \frac{1}{s} \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (Df(\mathbf{z}) - Df(0)) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{z} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \frac{1}{s} \int_{B(0,rs)} \left( \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) \mathbf{z} \right) \cdot d[Df]_s ds \right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \int_{B(0,rs)} |Df(\mathbf{z}) - Df(0)| |\mathbf{z}| d\mathbf{z} + \int_{B(0,rs)} |\mathbf{z}| |d[Df]_s| \right] ds \\
&\leq \int_0^1 r \left[ \int_{B(0,rs)} |Df(\mathbf{z}) - Df(0)| d\mathbf{z} + \frac{|[Df]_s|(B(0,rs))|}{\alpha(n)(rs)^n} \right] ds \\
&= \underbrace{\int_0^r \int_{B(0,t)} |Df(\mathbf{z}) - Df(0)| d\mathbf{z} dt}_{(i)} + \underbrace{\int_0^r \frac{|[Df]_s|(B(0,t))|}{\alpha(n)t^n} dt}_{(ii)}.
\end{aligned}$$

Olhando para (i) e (ii) como funções de  $t$ , temos por (61), ambas são contínuas em  $t = 0$ . Logo, pelo *Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch*, segue que

$$\int_0^r \int_{B(0,t)} |Df(\mathbf{z}) - Df(0)| d\mathbf{z} dt + \int_0^r \frac{|[Df]_s|(B(0,t))|}{\alpha(n)t^n} dt = o(r)$$

quando  $r \rightarrow 0$ . Portanto,

$$\int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y}) [f(\mathbf{y}) - f(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y}] d\mathbf{y} = o(r)$$

quando  $r \rightarrow 0$ , para toda  $\varphi \in C_c^1(B(0,r))$  com  $|\varphi| \leq 1$ . Então, tomando o supremo nas

$\varphi$  com tal propriedade, vem que

$$\int_{B(0,r)} |f(\mathbf{y}) - f(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y}| \, d\mathbf{y} = o(r) \quad (62)$$

quando  $r \rightarrow 0$ .

Por fim, defina  $\bar{f}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{y}) - f(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y}$ , então,

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^{1^*} \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{1^*}} &\leq \left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y}) - (\bar{f})_{0,r}|^{1^*} \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{1^*}} + \left( \int_{B(0,r)} |(\bar{f})_{0,r}|^{1^*} \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{1^*}} \\ &\leq (\mathcal{L}^n(B(0,r)))^{-\frac{1}{1^*}} C_2 \|D\bar{f}\|(B(0,r)) + |(\bar{f})_{0,r}| \\ &\leq \left( \frac{1}{\alpha(n)r^n} \right)^{\frac{n-1}{n}} C_2 \|D\bar{f}\|(B(0,r)) + o(r) \quad \text{por (62)} \\ &= C_3 \frac{1}{r^{n-1}} \underbrace{\|D\bar{f}\|(B(0,r))}_{(iii)} + o(r), \end{aligned}$$

onde  $C_3 := \left( \frac{1}{\alpha(n)} \right)^{\frac{n-1}{n}} C_2$ .

Agora trabalharemos para obter uma estimativa para (iii). Com efeito, seja  $\varphi \in C_c^1(B(0,r))$  e  $|\varphi| \leq 1$ , então,

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} \bar{f} \operatorname{div} \varphi \, d\mathbf{y} &= \int_{B(0,r)} (f(\mathbf{y}) - f(0)) \operatorname{div} \varphi \, d\mathbf{y} - \int_{B(0,r)} (Df(0) \cdot \mathbf{y}) \operatorname{div} \varphi \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_{B(0,r)} \varphi \cdot d[Df] - \int_{B(0,r)} (Df(0) \cdot \mathbf{y}) \operatorname{div} \varphi \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_{B(0,r)} \varphi \cdot d[Df] - \int_{B(0,r)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(0) y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_{B(0,r)} \varphi \cdot d[Df] + \int_{B(0,r)} Df(0) \cdot \varphi \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_{B(0,r)} \varphi \cdot Df(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{B(0,r)} \varphi \cdot d[Df]_s + \int_{B(0,r)} Df(0) \cdot \varphi \, d\mathbf{y} \\ &\leq \left| - \int_{B(0,r)} \varphi \cdot Df(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{B(0,r)} \varphi \cdot d[Df]_s + \int_{B(0,r)} Df(0) \cdot \varphi \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \int_{B(0,r)} |\varphi| |Df(\mathbf{y}) - Df(0)| \, d\mathbf{y} + \left| \int_{B(0,r)} \varphi \cdot d[Df]_s \right| \\ &\leq \int_{B(0,r)} |Df(\mathbf{y}) - Df(0)| \, d\mathbf{y} + |[Df]_s|(B(0,r)). \end{aligned}$$

Então, passando o supremo nas  $\varphi$  como acima, vem que

$$\|D\bar{f}\|(B(0,r)) \leq \int_{B(0,r)} |Df(\mathbf{y}) - Df(0)| \, d\mathbf{y} + |[Df]_s|(B(0,r)).$$

Portanto,

$$\left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^{1^*} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C_3 \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(0,r)} |Df(\mathbf{y}) - Df(0)| d\mathbf{y} + C_3 \frac{||[Df]_s|(B(0,r))||}{r^{n-1}} + o(r).$$

Logo, por (61),

$$\left( \int_{B(0,r)} |f(\mathbf{y}) - f(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y}|^{1^*} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{1^*}} = o(r).$$

■

### 5.1.2 Diferenciabilidade $L^{p^*}$ para funções $W^{1,p}$ , ( $1 \leq p < n$ )

**Teorema 5.2.** *Seja  $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , para algum  $1 \leq p < n$ . Então, a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.*

$$\left( \int_{B(x,r)} |f(\mathbf{y}) - f(x) - Df(x) \cdot (\mathbf{y} - x)|^{p^*} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p^*}} = o(r)$$

quando  $r \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Dada  $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  observe que para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. tem se

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(\mathbf{y}) - f(x)|^p d\mathbf{y} = 0 \text{ (por (2.27)) ,} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |Df(\mathbf{y}) - Df(x)|^p d\mathbf{y} = 0 \text{ (por (2.27)) .} \end{cases} \quad (63)$$

Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que (63) seja satisfeito. A menos de uma isometria podemos assumir que  $x = 0$ . Tome  $\varphi \in C_c^1(B(0,r))$  tal que  $\|\varphi\|_{L^{p'}(B(0,r))} \leq 1$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Tal  $\varphi$  existe pois dada  $\psi \in C_c^1(B(0,r))$ , claramente,  $\psi \in L^{p'}(B(0,r))$  então, defina  $\varphi := C\psi$  onde  $C = (\|\psi\|_{L^{p'}(B(0,r))})^{-1}$ . Por construção,  $\|\varphi\|_{L^{p'}(B(0,r))} = 1$ . Tome  $\mathbf{y} \in B(0,r)$  e tome  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$  onde  $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  é o *Mollifier* canônico. Seja  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(t) = f_\varepsilon(\mathbf{y}t)$ . Claramente,

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(s) ds.$$

Então,

$$f_\varepsilon(\mathbf{y}) = f_\varepsilon(0) + \int_0^1 Df_\varepsilon(s\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} ds.$$

Daí,

$$f_\varepsilon(\mathbf{y}) - f_\varepsilon(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y} = \int_0^1 (Df_\varepsilon(s\mathbf{y}) - Df(0)) \cdot \mathbf{y} ds.$$

Multiplicando por  $\varphi$  e tomando a média com respeito a  $\mathbf{y}$  em  $B(0, r)$ , vem que

$$\int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y})(f_\varepsilon(\mathbf{y}) - f_\varepsilon(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_0^1 \int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y})(Df_\varepsilon(s\mathbf{y}) - Df(0)) \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{y} \, ds.$$

Fazendo  $\mathbf{z} = s\mathbf{y}$ , vem que

$$\begin{cases} d\mathbf{z} = s^n \, d\mathbf{y}, \\ \mathbf{y} = \frac{\mathbf{z}}{s}, \\ |\mathbf{z}| \leq rs. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y})(f_\varepsilon(\mathbf{y}) - f_\varepsilon(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{s} \int_{B(0,r)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (Df_\varepsilon(\mathbf{z}) - Df(0)) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} \, ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \frac{h_\varepsilon(s)}{\mathcal{L}^n(B(0, rs))} - \int_{B(0,r)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df(0) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} \right] \, ds, \end{aligned}$$

onde  $h_\varepsilon(s) := \int_{B(0,r)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df_\varepsilon(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z}$ . Assim, como no teorema anterior queremos utilizar o *Teorema da Convergência Dominada*. Pelas propriedades da convolução com o *Mollifier* canônico, temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,r)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df_\varepsilon(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} = \int_{B(0,r)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) Df(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |h_\varepsilon(s)| &\leq \int_{B(0,rs)} |Df_\varepsilon(\mathbf{z})| |\mathbf{z}| \, d\mathbf{z} \\ &\leq rs \int_{B(0,rs)} |Df_\varepsilon(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z} \\ &\leq rs \int_{B(0,rs)} \left| \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{\mathbf{z}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) Df(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| \, d\mathbf{z} \\ &\leq \frac{rs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs)} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \eta\left(\frac{\mathbf{z}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) |Df(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{z} \\ &= \frac{rs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \int_{B(0,rs) \cap B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \eta\left(\frac{\mathbf{z}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) \, d\mathbf{z} |Df(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{rs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \int_{B(0,rs) \cap B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \, d\mathbf{z} |Df(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{rs}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \mathcal{L}^n(B(0, rs) \cap B(\mathbf{y}, \varepsilon)) |Df(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|h_\varepsilon(s)| &\leq \frac{2^n rs \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{\varepsilon^n} \int_{B(0, rs+\varepsilon)} |Df(y)| dy \\
&= \frac{2^n rs \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{\varepsilon^n} \|Df\|(B(0, rs + \varepsilon)), \quad (\text{pois } W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^n)) \\
&\leq \frac{2^n rs \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{\varepsilon^n} C(rs + \varepsilon)^n \\
&= \frac{C_1 rs \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{\varepsilon^n} (rs + \varepsilon)^n,
\end{aligned}$$

onde  $C_1 := 2^n C$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{|h_\varepsilon(s)|}{s^{n+1}} &\leq \frac{C_1 rs \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^{n+1} \varepsilon^n} (rs + \varepsilon)^n \\
&\leq \frac{C_1 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^n \varepsilon^n} 2^n ((rs)^n + \varepsilon^n) \\
&\leq \frac{C_2 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^n \varepsilon^n} ((rs)^n + \varepsilon^n) \quad C_2 := 2^n C_1 \\
&= \frac{C_2 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^n \varepsilon^n} (rs)^n + \frac{C_2 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^n \varepsilon^n} \varepsilon^n \\
&= \frac{C_2 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{\varepsilon^n} r^n + \frac{C_2 r \min\{(rs)^n, \varepsilon^n\}}{s^n} \\
&\leq \frac{C_2 r \varepsilon^n}{\varepsilon^n} r^n + \frac{C_2 r (rs)^n}{s^n} \\
&= 2C_2 r^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, pelo *Teorema da Convergência Dominada*, temos que fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \frac{h_\varepsilon(s)}{\mathcal{L}^n(B(0, rs))} - \int_{B(0,r)} \varphi\left(\frac{z}{s}\right) Df(0) \cdot z dz \right] ds \\
&\rightarrow \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{z}{s}\right) (Df(z) - Df(0)) \cdot z dz \right] ds.
\end{aligned}$$



Então, defina  $\bar{f}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{0}) - Df(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{y}$

$$\begin{aligned}
 \int_{B(\mathbf{0},r)} \varphi(\mathbf{y}) \bar{f}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ \int_{B(\mathbf{0},rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} \right] ds \\
 &\leq \left| \int_0^1 \frac{1}{s} \int_{B(\mathbf{0},rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} \, ds \right| \\
 &\leq \int_0^1 \frac{1}{s} \int_{B(\mathbf{0},rs)} \left| \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) \right| |(Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0}))| |\mathbf{z}| \, d\mathbf{z} \, ds \\
 &\leq r \int_0^1 \int_{B(\mathbf{0},rs)} \left| \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) \right| |(Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0}))| \, d\mathbf{z} \, ds \\
 &\leq r \int_0^1 \left( \int_{B(\mathbf{0},rs)} \left| \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) \right|^{p'} \, d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{B(\mathbf{0},rs)} |(Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0}))|^p \, d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} ds.
 \end{aligned}$$

Observe que a menos de uma mudança de variáveis nós temos que

$$\int_{B(\mathbf{0},rs)} \left| \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) \right|^{p'} \, d\mathbf{z} = \int_{B(\mathbf{0},r)} |\varphi(\mathbf{y})|^{p'} \, d\mathbf{y} \leq \frac{1}{\alpha(\mathbf{n})r^n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_{B(\mathbf{0},r)} \varphi(\mathbf{y}) \bar{f}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &\leq r \int_0^1 \left( \frac{1}{\alpha(\mathbf{n})r^n} \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{B(\mathbf{0},rs)} |(Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0}))|^p \, d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} ds \\
 &= (\alpha(\mathbf{n}))^{-\frac{1}{p'}} r^{1-\frac{n}{p'}} \int_0^1 \left( \int_{B(\mathbf{0},rs)} |(Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0}))|^p \, d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} ds \\
 &= (\alpha(\mathbf{n}))^{-\frac{1}{p'}} r^{-\frac{n}{p'}} \underbrace{\int_0^r \left( \int_{B(\mathbf{0},t)} |(Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0}))|^p \, d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} dt}_{(i)}.
 \end{aligned}$$

Olhando (i) como uma função em  $t$ , segue de (63) que

$$r^{-\frac{n}{p'}} \int_0^r \left( \int_{B(\mathbf{0},t)} |(Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{0}))|^p \, d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} dt = o(r^{1-\frac{n}{p'}})$$

quando  $r \rightarrow 0$ . Em particular,

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} \varphi(\mathbf{y}) \bar{f}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = o(r^{1-\frac{n}{p'}})$$

quando  $r \rightarrow 0$ , para toda  $\varphi \in C_c^1(B(\mathbf{0},r))$  com  $\|\varphi\|_{L^{p'}(B(\mathbf{0},r))} \leq 1$ . Tomando o supremo

nas  $\varphi$  com tal propriedade, vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha(\mathbf{n})r^n} \left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} &\leq (\alpha(\mathbf{n}))^{-\frac{1}{p}} r^{-\frac{n}{p}} \int_0^r \left( \int_{B(0,t)} |(\mathbf{D}f(\mathbf{z}) - \mathbf{D}f(0))|^p d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ \Rightarrow \frac{\alpha(\mathbf{n})^{\frac{1}{p}} r^{\frac{n}{p}}}{\alpha(\mathbf{n})r^n} \left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \int_0^r \left( \int_{B(0,t)} |(\mathbf{D}f(\mathbf{z}) - \mathbf{D}f(0))|^p d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ \Rightarrow \alpha(\mathbf{n})^{-\frac{1}{p}} r^{-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \int_0^r \left( \int_{B(0,t)} |(\mathbf{D}f(\mathbf{z}) - \mathbf{D}f(0))|^p d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ \Rightarrow \left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \int_0^r \left( \int_{B(0,t)} |(\mathbf{D}f(\mathbf{z}) - \mathbf{D}f(0))|^p d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} = o(r)$$

quando  $r \rightarrow 0$ .

Por fim,

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^{p^*} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq \left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y}) - (\bar{f})_{0,r}|^{p^*} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p^*}} + \left( \int_{B(0,r)} |(\bar{f})_{0,r}|^{p^*} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq Cr \left( \int_{B(0,r)} |\mathbf{D}\bar{f}(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} + \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{z})| d\mathbf{z} \\ &\leq Cr \left( \int_{B(0,r)} |\mathbf{D}\bar{f}(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{z})|^p d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Cr \underbrace{\left( \int_{B(0,r)} |\mathbf{D}\bar{f}(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}}_{(ii)} + o(r). \end{aligned}$$

Iremos melhorar a estimativa para (ii). Seja  $\varphi \in C_c^1(B(0,r))$  e fixe  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} \bar{f}(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \int_{B(0,r)} (f(\mathbf{y}) - f(0)) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{B(0,r)} \mathbf{D}f(0) \cdot \mathbf{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= - \int_{B(0,r)} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{B(0,r)} \frac{\partial f}{\partial y_i}(0) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= - \int_{B(0,r)} \left( \frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial y_i}(0) \right) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Dessa estimativa vemos que  $\mathbf{D}\bar{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}) - \mathbf{D}f(0)$ . Então,

$$\left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^{p^*} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq Cr \left( \int_{B(0,r)} |\mathbf{D}f(\mathbf{y}) - \mathbf{D}f(0)|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} + o(r),$$

que por (63) vem que

$$\left( \int_{B(0,r)} |\bar{f}(\mathbf{y})|^{p^*} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p^*}} = o(r)$$

quando  $r \rightarrow 0$ . ■

## 5.2 Diferenciabilidade aproximada

**Definição 5.1.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dizemos que  $f$  é aproximadamente diferenciável em  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , se existe uma aplicação linear  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que*

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - L(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0.$$

**Teorema 5.3.** *A derivada aproximada é única.*

*Demonstração.* Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  aproximadamente diferenciável. Suponha que existam  $L, L' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  aplicações lineares tais que

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - L(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0$$

e

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - L'(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0.$$

Note que

$$\frac{|L(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - L'(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \leq \frac{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - L(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} + \frac{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - L'(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}.$$

Dai,

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|L(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - L'(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0.$$

Doravante, seja  $T := L - L'$  pelo que já fizemos

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{|T(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|} = \text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|T(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0.$$

Então, para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(0, r) \cap \{|T(\mathbf{v})| > \varepsilon|\mathbf{v}|\})}{\mathcal{L}^n(B(0, r))} = 0.$$

Logo, dado  $0 < \varepsilon < 1$ , existe  $r_0$  tal que para todo  $r \leq r_0$

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(0, r) \cap \{|T(\mathbf{v})| > \varepsilon|\mathbf{v}|\})}{\mathcal{L}^n(B(0, r))} < \varepsilon^n.$$

Então, para  $r_0$ ,

$$\mathcal{L}^n(B(0, r_0) \cap \{|T(v)| > \varepsilon|v|\}) < \varepsilon^n \alpha(n) r_0^n.$$

Seja  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|y| = r_0 - \varepsilon r_0$ , note que dado  $x \in B(y, \varepsilon r_0)$  então,

$$|x| \leq |x - y| + |y| \leq r_0 \varepsilon + r_0 - r_0 \varepsilon = r_0.$$

Assim,  $B(y, r_0 \varepsilon) \subset B(0, r_0)$ . Em particular, existe  $z \in B(y, r_0 \varepsilon)$  tal que  $|T(z)| \leq \varepsilon|z|$ . Do contrário, isto é, se para todo  $z \in B(y, r_0 \varepsilon)$ ,  $|T(z)| > \varepsilon|z|$ . Então,

$$B(y, r_0 \varepsilon) = B(0, r_0) \cap \{|T(v)| > \varepsilon|v|\}.$$

Com isso,

$$\alpha(n) r_0^n \varepsilon^n = \mathcal{L}^n(B(0, r_0) \cap \{|T(v)| > \varepsilon|v|\}) < \alpha(n) r_0^n \varepsilon^n.$$

Absurdo! Logo, seja  $z \in B(y, r_0 \varepsilon)$ , tal que  $|T(z)| \leq \varepsilon|z|$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |T(y)| &\leq |T(y) - T(z)| + |T(z)| \\ &\leq \|T\| |y - z| + \varepsilon|z| \\ &\leq \|T\| r_0 \varepsilon + r_0 \varepsilon \\ &= \frac{\|T\| r_0 \varepsilon + r_0 \varepsilon}{r_0 - \varepsilon r_0} (r_0 - \varepsilon r_0) \\ &= |y| \left( \frac{(\|T\| + 1) \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left| T \left( \frac{y}{|y|} \right) \right| \leq (\|T\| + 1) \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

para todo  $y \in \partial B(0, r_0 - \varepsilon r_0)$ . Temos que  $\partial B(0, 1)$  e  $\partial B(0, r_0 - \varepsilon r_0)$  são homeomorfas. Como existe  $x_0 \in \partial B(0, 1)$  tal que  $|T(x_0)| = \|T\|$ , temos pelo homeomorfismo que existe um  $y_0 \in \partial B(0, r_0 - \varepsilon r_0)$  tal que  $x_0 = \frac{y_0}{|y_0|}$ . Então,

$$\|T\| = |T(x_0)| \leq (\|T\| + 1) \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

para todo  $1 > \varepsilon > 0$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  vem que  $\|T\| = 0$ . Então,  $L = L'$ . ■

Como  $L$  que satisfaz a definição de derivada aproximada é único, o denotaremos por  $\text{apD}f(x)$ .

**Proposição 5.1.** *Todo ponto de Diferenciabilidade Aproximada é ponto de Continuidade Aproximada.*

*Demonstração.* Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  aproximadamente diferenciável em  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ora, seja

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , então, defina  $\mathbf{r}(\mathbf{v}) := \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \text{apDf}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ . Note que

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|} = 0.$$

Em particular,

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} |\mathbf{r}(\mathbf{v})| = \text{ap} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|} |\mathbf{v}| = \text{ap} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|} \text{ap} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} |\mathbf{v}| = 0.$$

Assim,

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} |\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq \text{ap} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} |\mathbf{r}(\mathbf{v})| + \text{ap} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} |\text{apDf}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}| = 0.$$

Então, fazendo  $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ , vem que

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} |\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| = 0.$$

Portanto,  $\text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . ■

**Proposição 5.2.** *Seja  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  aproximadamente diferenciável em  $\mathbb{R}^n$ . Então  $\text{apDf}(\mathbf{x}) = 0$  em  $\{\mathbf{f} = 0\}$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.*

*Demonstração.* Da proposição anterior uma função aproximadamente diferenciável é  $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Logo,  $\{\mathbf{f} = 0\}$  é  $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Portanto, para quase todo  $\mathbf{x} \in \{\mathbf{f} = 0\}$  com respeito a  $\mathcal{L}^n$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{\mathbf{f} = 0\})}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))} = 1.$$

Seja  $\mathbf{x} \in \{\mathbf{f} = 0\}$ , tal que o limite acima se verifique. Veja que é suficiente mostrar que

$$\text{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|\text{apDf}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0.$$

Pois, a implicação que  $\text{apDf}(\mathbf{x}) = 0$  segue como na demonstração da unicidade da derivada aproximada. Com efeito, seja  $\varepsilon > 0$  então,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^n \left( \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \left\{ \frac{|\text{apDf}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \geq \varepsilon \right\} \right)}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))} &= \underbrace{\frac{\mathcal{L}^n \left( \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap \{\mathbf{f} = 0\} \cap \left\{ \frac{|\text{apDf}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \geq \varepsilon \right\} \right)}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))}}_{(i)} \\ &+ \underbrace{\frac{\mathcal{L}^n \left( \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n - \{\mathbf{f} = 0\}) \cap \left\{ \frac{|\text{apDf}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \geq \varepsilon \right\} \right)}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(\mathbf{x}, r))}}_{(ii)}. \end{aligned}$$

Fazendo  $r \rightarrow 0$  temos que (i) tende a zero, pela definição de derivada apro-

ximada e (ii) tende a zero pois  $\mathbf{x} \in \{f = 0\}$  e esse conjunto é  $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Então,

$$\operatorname{ap} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|\operatorname{ap} Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0.$$

■

**Teorema 5.4.** *Seja  $f \in \mathbf{BV}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Então,  $f$  é aproximadamente diferenciável e  $\operatorname{ap} Df = Df$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.*

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \, d\mathbf{y} = o(r)$$

quando  $r \rightarrow 0$ . A existência desse  $\mathbf{x}$  é garantida, pelo primeiro teorema desse capítulo. Agora suponha por absurdo que

$$\operatorname{ap} \limsup_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} > \theta > 0. \quad (64)$$

Nesse momento, vale a pena lembrar que

$$\operatorname{ap} \limsup_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}; \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \geq t|\mathbf{y} - \mathbf{x}|\})}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r))} = 0 \right\}.$$

Dessa forma, por (64) temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \geq \theta|\mathbf{y} - \mathbf{x}|\})}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r))} > 0.$$

Logo, seja  $\gamma > 0$  tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r) \cap \{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \geq \theta|\mathbf{y} - \mathbf{x}|\})}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r))} \geq \gamma > 0.$$

Seja  $\{r_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  tal que  $r_j \rightarrow 0$ , e a menos de uma subsequência podemos pedir que para cada  $j = 1, 2, \dots$

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r_j) \cap \{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \geq \theta|\mathbf{y} - \mathbf{x}|\})}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r_j))} \geq \frac{\gamma}{2}.$$

Agora tome  $\sigma \in (0, 1)$  tal que para todo  $j$

$$\frac{\mathcal{L}^n([B(\mathbf{x}, r_j) - B(\mathbf{x}, \sigma r_j)] \cap \{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \geq \theta|\mathbf{y} - \mathbf{x}|\})}{\mathcal{L}^n(B(\mathbf{x}, r_j))} \geq \frac{\gamma}{4}.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{4} &\leq \frac{\mathcal{L}^n([B(x, r_j) - B(x, \sigma r_j)] \cap \{|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \geq \theta|y - x|\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r_j))} \\
&\leq \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r_j) - B(x, \sigma r_j))}{\mathcal{L}^n(B(x, r_j))} \\
&\leq 1 - \frac{\alpha(n)r_j^n \sigma^n}{\alpha(n)r_j^n} \\
&= 1 - \sigma^n.
\end{aligned}$$

Assim,

$$0 < \sigma < \sqrt[n]{1 - \frac{\gamma}{4}}.$$

Por outro lado, temos que

$$[B(x, r_j) - B(x, \sigma r_j)] \cap \{|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \geq \theta|y - x|\},$$

está contido em

$$[B(x, r_j) - B(x, \sigma r_j)] \cap \{|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \geq \theta \sigma r_j\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{4} &\leq \frac{\mathcal{L}^n([B(x, r_j) - B(x, \sigma r_j)] \cap \{|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \geq \theta \sigma r_j\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r_j))} \\
&= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{[B(x, r_j) - B(x, \sigma r_j)] \cap \{|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \geq \theta \sigma r_j\}} 1 \, dy \\
&\leq \frac{1}{\theta \sigma r_j} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{[B(x, r_j) - B(x, \sigma r_j)] \cap \{|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \geq \theta \sigma r_j\}} |f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \, dy \\
&\leq \frac{1}{\theta \sigma r_j} \int_{[B(x, r_j)]} |f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \, dy.
\end{aligned}$$

Fazendo  $j \rightarrow \infty$  segue o absurdo. Logo,  $f$  é aproximadamente diferenciável e pela unicidade da derivada aproximada  $\text{ap}Df = Df$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p.. ■

Elencamos que o mesmo vale para funções  $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , uma vez que  $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset \text{BV}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .

### 5.3 Diferenciabilidade $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. para funções $W^{1,p}$ , ( $p > n$ )

**Definição 5.2.** Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $x \in \mathbb{R}^n$  se existe uma aplicação linear  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$|f(y) - f(x) - L(y - x)| = o(|y - x|)$$

quando  $y \rightarrow x$ .

**Teorema 5.5.** Seja  $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  para algum  $n < p \leq \infty$ . Então,  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^n$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Em particular, a derivada fraca é igual a derivada clássica,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p..

*Demonstração.* Note que podemos assumir que  $n < p < \infty$ . Pois,  $W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Sabemos que dada  $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula, tem se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |Df(z) - Df(x)|^p dz = 0.$$

Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  com tal propriedade e defina  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(y) := f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x).$$

Note que  $g \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , pois  $f$  também pertence e  $Df(x)$  é linear. Como  $n < p < \infty$ , podemos utilizar a *Desigualdade de Morrey*. Com efeito, sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , com  $x \neq y$ , então,

$$|g(y) - g(x)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Dg|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

com  $r := |y - x|$

Como  $g(x) = 0$  e  $Dg = Df - Df(x)$  temos que

$$|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Df(z) - Df(x)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)|}{|y - x|} &\leq Cr^{-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Df(z) - Df(x)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_1 \left( \int_{B(x,r)} |Df(z) - Df(x)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

onde  $C_1 := (\alpha(n))^p C$ . Faça  $y \rightarrow x$  o desejado segue. ■



**Corolário 5.1** (Teorema de Radamacher). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função localmente Lipschitz. Então  $f$  é diferenciável a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.*

*Demonstração.* Sabemos que uma função é localmente Lipschitz se, e somente se, pertence a  $W^{1,\infty}$ . Logo, do teorema anterior segue o desejado. ■

## 5.4 Funções convexas

**Definição 5.3.** *Dizemos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

para todo  $\lambda \in [0, 1]$  e  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 5.6.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa.*

(i) *Então,  $f$  é localmente Lipschitz em  $\mathbb{R}^n$  e existe uma constante  $C = C(n) > 0$  tal que*

$$\sup_{B(x, \frac{r}{2})} |f| \leq C \int_{B(x, r)} |f| \, dy$$

e

$$\text{ess sup}_{B(x, \frac{r}{2})} |Df| \leq \frac{C}{r} \int_{B(x, r)} |f| \, dy.$$

(ii) *Se  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  e é convexa então  $D^2f \geq 0$ , isto é, matriz hessiana de  $f$  é não negativa definida.*

*Demonstração.* Primeiro mostraremos que  $f$  é localmente Lipschitz.

**Afirmção:**  $f$  é localmente limitada

**Prova da Afirmção:** Seja  $L > 0$  e  $Q := [-L, L]^n$  um cubo e  $\{v_k\}_{k=1}^{2^n}$  os vértices de  $Q$ .

Pela convexidade de  $Q$ , dado  $x \in Q$ , podemos escrever  $x$  com uma combinação convexa dos  $v_k$ 's, isto é,  $x = \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_k v_k$  com  $0 \leq \lambda_k \leq 1$  e  $\sum_{k=1}^{2^n} \lambda_k = 1$ . Então, usando a convexidade de  $f$ , temos que

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_k f(v_k) \leq \max_{1 \leq k \leq 2^n} f(v_k).$$

Daí,

$$\sup_Q f(x) \leq \max_{1 \leq k \leq 2^n} f(v_k).$$

Por outro lado, dado  $x \in Q$ ,

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x).$$

Então,

$$\begin{aligned} f(0) &\leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) \\ &\leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2} \max_{1 \leq k \leq 2^n} f(v_k). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) \geq 2f(0) - \max_{1 \leq k \leq 2^n} f(v_k).$$

Portanto,

$$\inf_Q f(x) \geq 2f(0) - \max_{1 \leq k \leq 2^n} f(v_k).$$

Assim, temos que  $f$  é localmente limitada.

**Afirmção:**  $f$  é localmente Lipschitz.

**Prova da Afirmção:** Tome  $x, y \in B(0, \frac{r}{2})$ , com  $x \neq y$ . Considere, a semi reta,

$$x + \lambda(y - x), \quad \lambda \in (0, +\infty).$$

Claramente, existe  $\lambda_0$  tal que

$$z := x + \lambda_0(y - x) \in \partial B(0, r),$$

em particular,  $z - x = \lambda_0(y - x)$  então,

$$\lambda_0 = \frac{|z - x|}{|y - x|}.$$

Daí, temos que  $\lambda_0 > 1$  pois  $|z - x| > |y - x|$ . Além disso,

$$y = \frac{1}{\lambda_0}z + \left(1 - \frac{1}{\lambda_0}\right)x.$$

Avaliando  $\mathbf{y}$  em  $f$ , temos que

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{y}) &\leq \frac{1}{\lambda_0} f(\mathbf{z}) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_0}\right) f(\mathbf{x}) \\
 &= f(\mathbf{x}) + \frac{1}{\lambda_0} (f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})) \\
 &\leq f(\mathbf{x}) + \frac{1}{\lambda_0} |f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})| \\
 &\leq f(\mathbf{x}) + \frac{1}{\lambda_0} |f(\mathbf{z})| + |f(\mathbf{x})| \\
 &\leq f(\mathbf{x}) + \frac{1}{\lambda_0} 2 \sup_{B(0,r)} |f| \\
 &= f(\mathbf{x}) + \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|} 2 \sup_{B(0,r)} |f| \\
 &= f(\mathbf{x}) + \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{r} \sup_{B(0,r)} |f|.
 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \leq C|\mathbf{y} - \mathbf{x}|,$$

onde  $C := \frac{1}{r} \sup_{B(0,r)} |f|$ .

Para a segunda desigualdade basta trocar o  $\mathbf{x}$  por  $\mathbf{y}$  nas estimativas acima. Então,  $f$  é localmente Lipschitz.

Suponhamos que  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  é convexa. Fixemos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Para cada  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in (0, 1]$ ,

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) &= f((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \\
 &\leq f(\mathbf{x}) - \lambda(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})).
 \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{f(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x})}{\lambda} \leq f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}).$$

Fazendo  $\lambda \rightarrow 0$

$$Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}).$$

Logo,

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \text{para todos } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (65)$$

Agora seja  $B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n$ , fixe  $\mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \frac{r}{2})$ . Note que  $B(\mathbf{z}, \frac{r}{2}) \subset B(\mathbf{x}, r)$ , de (65)

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{z}) + Df(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}),$$

para todo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Tomando a média em  $B(\mathbf{z}, \frac{r}{2})$  com respeito a  $\mathbf{y}$ ,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &\leq \int_{B(\mathbf{z}, \frac{r}{2})} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{B(\mathbf{z}, \frac{r}{2})} Df(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{B(\mathbf{z}, \frac{r}{2})} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\leq 2^n \int_{B(\mathbf{z}, r)} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \\ &\leq C_1 \int_{B(\mathbf{z}, r)} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

com  $C_1 := 2^n$ . Uma vez que  $Df(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})$  é harmônica. Por outro lado, seja  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , tal que  $\text{spt}(\zeta) \subset B(\mathbf{x}, r)$  e

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, \\ |D\zeta| \leq \frac{C}{r}, \\ \zeta = 1 \text{ em } B(\mathbf{x}, \frac{r}{2}), \\ \zeta = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n - B(\mathbf{x}, r). \end{cases}$$

Mostraremos a existência da  $\zeta$ . Ora, considere  $B(\mathbf{x}, ar)$  onde  $a$  é uma constante positiva a ser determinada. Então defina para  $\varepsilon > 0$ ,

$$\zeta := \eta_\varepsilon * \chi_{B(\mathbf{x}, ar)}.$$

Por construção,

$$D\zeta = D\eta_\varepsilon * \chi_{B(\mathbf{x}, ar)}.$$

e

$$D\eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} D\eta\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$$

Observe que

$$\begin{aligned} |D\zeta| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D\eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \chi_{B(\mathbf{x}, ar)} \, d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \left| D\eta\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon}\right) \right| \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{B(0,1)} |D\eta(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z} \\ &= \frac{C_2}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde  $C_2 := \int_{B(0,1)} |D\eta(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z}$ .

Agora trabalharemos para determinar  $a > 0$ . Para os nossos fins é necessário impor que  $a < 1$  e  $\varepsilon < r$ . Como  $\text{spt}(\zeta) \subset B(0, \varepsilon) + B(\mathbf{x}, ar) = B(\mathbf{x}, ar + \varepsilon)$ . Sabemos que  $\zeta|_{B(\mathbf{x}, ar - \varepsilon)} = 1$ , uma vez que  $\varepsilon < r$ . Então, queremos que  $ar - \varepsilon = \frac{r}{2}$ . Daí, vem que

$\alpha > \frac{1}{2}$ . Logo, tome  $\alpha = \frac{2}{3}$ . Assim, com simples cálculos, vemos que  $\varepsilon = \frac{r}{6}$ ,  $\alpha r - \varepsilon = \frac{r}{2}$  e  $\alpha r + \varepsilon = \frac{5r}{6}$ . Dessa forma, defina

$$\zeta := \eta_{\frac{r}{6}} * \chi_{B(x, \frac{2r}{3})}.$$

Em particular,

$$|D\zeta| \leq \frac{C_3}{r}.$$

onde  $C_3 := 6C_2$ . E o  $\text{spt}(\zeta) \subset B(x, \frac{5r}{6}) \subset B(x, r)$ .

Sabendo disso, temos por (65) que

$$f(z) \geq f(y) + Df(y) \cdot (z - y).$$

Multiplicando a estimativa acima por  $\zeta(y)$  e integremos em  $B(x, r)$  com respeito a  $y$ ,

$$\int_{B(x, r)} f(z)\zeta(y) \, dy \geq \int_{B(x, r)} f(y)\zeta(y) \, dy + \int_{B(x, r)} Df(y) \cdot (z - y)\zeta(y) \, dy. \quad (66)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{B(x, r)} Df(y) \cdot (z - y)\zeta(y) \, dy &= \int_{B(x, r)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(z_i - y_i)\zeta(y) \, dy \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{B(x, r)} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)(z_i - y_i)\zeta(y) \, dy \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{B(x, r)} f(y) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y)(z_i - y_i) - \zeta(y) \right) \, dy \\ &= - \int_{B(x, r)} \sum_{i=1}^n f(y) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y)(z_i - y_i) - n f(y)\zeta(y) \, dy. \end{aligned}$$

Então podemos reescrever (66), da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} f(z)\zeta(y) \, dy &\geq \int_{B(x,r)} f(y)\zeta(y) \, dy - \int_{B(x,r)} \sum_{i=1}^n f(y) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y)(z_i - y_i) - nf(y)\zeta(y) \, dy \\
&= \int_{B(x,r)} f(y)\zeta(y) - \sum_{i=1}^n f(y) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y)(z_i - y_i) + nf(y)\zeta(y) \, dy \\
&= \int_{B(x,r)} f(y) \left[ \zeta(y) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y)(z_i - y_i) + n\zeta(y) \right] \, dy \\
&= \int_{B(x,r)} f(y) \left[ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y)(z_i - y_i) + (n+1)\zeta(y) \right] \, dy \\
&= - \int_{B(x,r)} f(y) \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y)(z_i - y_i) - (n+1)\zeta(y) \right] \, dy.
\end{aligned}$$

Veja que passando o módulo e utilizando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} f(y) \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y)(z_i - y_i) - (n+1)\zeta(y) \right] \, dy &\leq \int_{B(x,r)} |f(y)|(|D\eta|r + n+1) \, dy \\
&\leq \int_{B(x,r)} |f(y)|(C_3 + n+1) \, dy \\
&\leq C_4 \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy,
\end{aligned}$$

onde  $C_4 := C_3 + n + 1$ . Então,

$$\int_{B(x,r)} f(z)\zeta(y) \, dy \geq -C_4 \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy.$$

Agora se  $f(z) > 0$ , temos que

$$f(z) \int_{B(x,r)} \zeta(y) \, dy \leq f(z) \mathcal{L}^n(B(x,r)).$$

Logo,

$$f(z) \geq -C_4 \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy.$$

Por outro lado, se  $f(z) < 0$

$$f(z) \int_{B(x,r)} \zeta(y) \, dy \leq f(z) \int_{B(x, \frac{r}{2})} \zeta(y) \, dy = f(z) \mathcal{L}^n \left( B \left( x, \frac{r}{2} \right) \right).$$

Daí

$$f(z) \geq -2^n C_4 \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy.$$

Logo, em ambos os casos,

$$f(z) \geq -2^n C_4 \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy.$$

Seja  $C_5 = \max\{2^n C_4, C_1\}$ , então

$$|f(z)| \leq C_5 \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy.$$

Portanto,

$$\sup_{B(x, \frac{r}{2})} |f(z)| \leq C_5 \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy.$$

Agora iremos estabelecer a estimativa para o gradiente de  $f$ . De fato, se  $Df(z) = 0$  é imediato. Do contrário para  $z$  como anteriormente, defina,

$$S_z := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; \frac{r}{4} \leq |\mathbf{y} - z| \leq \frac{r}{2}, \frac{D(z)}{|Df(z)|} \cdot (\mathbf{y} - z) \geq \frac{1}{2} |\mathbf{y} - z| \right\}.$$

Claramente  $S_z$  é um cone de abertura  $\pi - 2\theta$  onde  $\theta := \arctan(\frac{1}{2})$  intersectado com  $B(z, \frac{r}{2}) - B(z, \frac{r}{4})$ . Em particular, no interior de  $S_z$  há um tronco de um cone onde seu volume é dado pela diferença entre dois cones  $K_1, K_2$  com vértices em  $z$  e abertura iguais a  $\pi - 2\theta$ . A altura de  $K_1$  é  $\frac{r}{4}$  e a de  $K_2$  é  $\frac{r \sin(\theta)}{2}$  e  $K_1 \subset K_2$ . Portanto, o volume do tronco contido em  $S_z$  é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(K_2) - \mathcal{L}^n(K_1) &= \frac{(\frac{r \sin(\theta)}{2})^n}{(\pi - 2\theta)^{n-1}} C_6 - \frac{(\frac{r}{4})^n}{(\pi - 2\theta)^{n-1}} C_6 \\ &= r^n C_6 \left( \frac{(\frac{\sin(\theta)}{2})^n - (\frac{r}{4})^n}{(\pi - 2\theta)^{n-1}} \right) \\ &= r^n C_7, \end{aligned}$$

onde  $C_6 := [\alpha(n-1) - (\frac{n-1}{n}) \alpha(n-2)]$  e  $C_7 := C_6 \left( \frac{(\frac{\sin(\theta)}{2})^n - (\frac{r}{4})^n}{(\pi - 2\theta)^{n-1}} \right)$ . Então,

$$\mathcal{L}^n(S_z) \geq r^n C_7.$$

Agora tomemos  $\mathbf{y} \in S_z$ , por (65),

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) &\geq f(z) + Df(z) \cdot (\mathbf{y} - z) \\ &\geq f(z) + \frac{1}{2} |Df(z)| |\mathbf{y} - z| \\ &\geq f(z) + \frac{r}{8} |Df(z)|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |Df(z)| &\leq \frac{8}{r}(f(\mathbf{y}) - f(z)) \\ &\leq \frac{8}{r}|f(\mathbf{y}) - f(z)|. \end{aligned}$$

Passando a média em  $S_z$ , com respeito a  $\mathbf{y}$ , temos que

$$\begin{aligned} |Df(z)| &\leq \frac{8}{r} \int_{S_z} |f(\mathbf{y}) - f(z)| \, d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{8}{r} \frac{1}{\mathcal{L}^n(S_z)} \int_{B(x, \frac{r}{2})} |f(\mathbf{y}) - f(z)| \, d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{8}{r} \frac{1}{r^n C_7} \int_{B(x, \frac{r}{2})} |f(\mathbf{y}) - f(z)| \, d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{C_8}{r} \int_{B(x, \frac{r}{2})} |f(\mathbf{y}) - f(z)| \, d\mathbf{y} \quad \text{onde, } C_8 := \frac{8\alpha(n)2^n}{C_7}, \\ &\leq \frac{C_8}{r} \left( |f(z)| + \int_{B(x, \frac{r}{2})} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \right) \\ &\leq \frac{C_8}{r} \left( C_5 \int_{B(x, r)} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} + \int_{B(x, \frac{r}{2})} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \right) \\ &\leq \frac{C_9}{r} \int_{B(x, r)} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

onde  $C_9 = 2C_8C_5$ . Assim,

$$\operatorname{ess\,sup}_{B(x, \frac{r}{2})} |Df(z)| \leq \frac{C_9}{r} \int_{B(x, r)} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}.$$

Isso prova (i) para o caso onde  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  é convexa.

Agora seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa. Considere para  $\varepsilon > 0$ ,  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$ .

**Afirmção:**  $f^\varepsilon$  é convexa. Fixemos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in [0, 1]$ . Note que para cada  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z} - (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})) &= f(\mathbf{z} - \lambda\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{z} - \lambda\mathbf{z} + \lambda\mathbf{z} - \lambda\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{y}) \\ &= f((1-\lambda)\mathbf{z} + (\mathbf{z} - \mathbf{x})\lambda - (1-\lambda)\mathbf{y}) \\ &= f((\mathbf{z} - \mathbf{x})\lambda + (1-\lambda)(\mathbf{z} - \mathbf{y})) \\ &\leq \lambda f(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{z} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Então,

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{z})f(\mathbf{z} - (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})) \leq \lambda\eta_\varepsilon f(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + (1-\lambda)\eta_\varepsilon f(\mathbf{z} - \mathbf{y}).$$



Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(z) f(z - (\lambda x + (1 - \lambda)y)) dz \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(z) f(z - x) dz + (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(z) f(z - y) dz,$$

ou seja,

$$f^\varepsilon(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f^\varepsilon(x) + (1 - \lambda)f^\varepsilon(y).$$

O que prova a afirmação.

Pela regularidade de  $f^\varepsilon$  vemos que a mesma é  $C^2(\mathbb{R}^n)$  e é convexa. Então as estimativas provadas anteriormente valem para  $f^\varepsilon$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{B(x, \frac{r}{2})} (|f^\varepsilon(y)| + r|Df^\varepsilon(y)|) &\leq \sup_{B(x, \frac{r}{2})} |f^\varepsilon(y)| + r \sup_{B(x, \frac{r}{2})} |Df^\varepsilon(y)| \\ &\leq C_{10} \int_{B(x, r)} |f^\varepsilon(y)| dy, \end{aligned}$$

onde  $C_{10} := C_5 + C_9$ .

Pelo fato de  $f$  ser localmente Lipschitz temos que sobre compactos  $f^\varepsilon$  converge uniformemente para  $f$  quando fazemos  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Portanto, as mesmas estimativas valem para  $f$  convexa. Isso prova (i).

Agora iremos provar (ii). Para isso, seja  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  convexa, então, tome  $x, y \in \mathbb{R}^n$  distintos e defina  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $\beta(t) = f(ty + (1 - t)x)$ . Claramente  $\beta \in C^2([0, 1])$ . Então pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*,

$$\begin{aligned} \beta(1) &= \beta(0) + \int_0^1 \beta'(t) dt \\ &= \beta(0) + t\beta'(t)|_0^1 - \int_0^1 t\beta''(t) dt \quad (\text{Integração por partes}) \\ &= \beta(0) + \beta'(1) - \int_0^1 t\beta''(t) dt \\ &= \beta(0) + \beta'(0) + \int_0^1 \beta''(y) dt - \int_0^1 t\beta''(t) dt \\ &= \beta(0) + \beta'(0) + \int_0^1 (1 - t)\beta''(t) dt. \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{cases} \beta(1) = f(y), \beta(0) = f(x), \\ \beta'(0) = Df(x) \cdot (y - x), \\ \beta''(t) = (y - x)^T \cdot D^2f(x + t(y - x)) \cdot (y - x). \end{cases}$$

Então,

$$f(y) = f(x) + Df(x) \cdot (y - x) + (y - x)^T \cdot \int_0^1 (1 - t)D^2f(x + t(y - x)) dt \cdot (y - x).$$

Daí

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})^\top \cdot \int_0^1 (1-t) D^2f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) dt \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Em particular, por (65),

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\top \cdot \int_0^1 (1-t) D^2f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) dt \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0,$$

para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

Assim, seja  $\xi \in \mathbb{R}^n$  qualquer e escreva  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + s\xi$  onde  $s > 0$ . Então,

$$(s\xi)^\top \cdot \int_0^1 (1-t) D^2f(\mathbf{x} + ts\xi) dt \cdot s\xi \geq 0.$$

Então,

$$\xi^\top \cdot \int_0^1 D^2f(\mathbf{x} + ts\xi) dt \cdot \xi \geq 0.$$

Fazendo  $s \rightarrow 0$ , temos que

$$\begin{aligned} & \xi^\top \cdot \int_0^1 (1-t) D^2f(\mathbf{x}) dt \cdot \xi \geq 0 \\ \Rightarrow & \xi^\top \cdot \frac{1}{2} D^2f(\mathbf{x}) \cdot \xi \geq 0 \\ \Rightarrow & \xi^\top \cdot D^2f(\mathbf{x}) \cdot \xi \geq 0. \end{aligned}$$

o que prova (ii). ■

**Teorema 5.7.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa. Então existem medida de Radon  $\mu^{ij} = \mu^{ji}$  tais que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu^{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

para toda  $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ . Além disso, as medidas  $\mu^{ii}$  são não negativas,  $i = 1, 2, \dots$ .

*Demonstração.* Tome  $\xi \in \mathbb{R}^n$  com  $|\xi| = 1$ . Seja  $f$  convexa e defina  $f^\epsilon := f * \eta_\epsilon$ . Pelo teorema anterior  $f^\epsilon$  é convexa e  $D^2f^\epsilon \geq 0$ .

Seja  $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$  com  $\varphi \geq 0$ , então

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \frac{\partial^2 f^\epsilon}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j dx \geq 0.$$

Então,

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j dx \geq 0,$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  como  $f$  é localmente Lipschitz temos que  $f^\varepsilon$  converge uniformemente para  $f$  então,

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \, dx \geq 0.$$

Dessa forma, defina  $L : C_c^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$L(\varphi) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \, dx.$$

Logo, pelo *Corolário do Teorema da Representação de Riesz* temos que existe uma medida  $\mu^\xi$  de Radon tal que

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu^\xi,$$

para toda  $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ .

Seja  $\{e_i\}_{i=1}^n$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . Defina  $\mu^{ii} := \mu^{e_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . E para  $i \neq j$  defina  $\xi = \frac{e_i + e_j}{\sqrt{2}}$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \xi_k \xi_l &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \xi_k \xi_l - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Multiplicando por  $f$  e integrando em  $\mathbb{R}^n$  vem que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \xi_k \xi_l \, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} \, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu^\xi - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu^{ii} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu^{jj} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d \left( \mu^\xi - \frac{1}{2} \mu^{ii} - \frac{1}{2} \mu^{jj} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu^{ij}, \end{aligned}$$

onde  $\mu^{ij} := \mu^\xi - \frac{1}{2} \mu^{ii} - \frac{1}{2} \mu^{jj}$ . ■

**Teorema 5.8.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Então,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in \text{BV}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

*Demonstração.* Seja  $V \subset\subset \mathbb{R}^n$  e  $\varphi \in C_c^2(V; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\varphi| \leq 1$ . Então, para  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \operatorname{div} \varphi \, dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \, dx \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_i} \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i \, d\mu^{ik} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mu^{ik}(V) < \infty. \end{aligned}$$

Tomando o supremo das  $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$  com  $|\varphi| \leq 1$ , temos o desejado. ■

#### 5.4.1 Notação para funções convexas

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa. Pelo que já provamos  $Df$  existe a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula, pois  $f$  é localmente Lipschitz. Além disso,  $Df \in \text{BV}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Disso, defina  $L : C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n^2}) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$L(\varphi) = - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \operatorname{div}(\varphi_i) \, dx.$$

De maneira similar a demonstração do *Teorema de Estrutura para funções BV*, mostra-se que existe uma medida de Radon a qual denotaremos por  $\|D^2f\|$  e uma função  $\Sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  com  $|\Sigma| \leq 1$  tal que

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \Sigma \, d\|D^2f\|.$$

Em particular, defina  $[D^2f] := \|D^2f\| \lfloor_{\Sigma}$ , logo,

$$[D^2f] = \begin{pmatrix} \|D^2f\| \lfloor_{\Sigma_{11}} & \dots & \|D^2f\| \lfloor_{\Sigma_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \|D^2f\| \lfloor_{\Sigma_{n1}} & \dots & \|D^2f\| \lfloor_{\Sigma_{nn}} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Afirmamos que  $\mu^{ij} = \|D^2f\| \lfloor_{\Sigma_{ij}}$ , para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Com efeito, seja  $\varphi \in$

$C_c^2(\mathbb{R}^n)$  então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu^{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx.$$

Agora defina para algum  $1 \leq i \leq n$  natural  $\psi_i := \varphi e_j$  onde  $e_j$  é um vetor da base canônica do  $\mathbb{R}^n$  e  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ , dada por  $\psi(x) = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n)$  onde para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$ ,  $\psi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\psi_k = 0$ . Então,  $\psi \in C_c^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n^2})$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu^{ij} &= - \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \operatorname{div} \psi_k \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi \cdot \Sigma \, d\|D^2 f\| \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{ij} \Sigma_{ij} \, d\|D^2 f\|. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu^{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \Sigma_{ij} \, d\|D^2 f\| = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\|D^2 f\|_{\Sigma_{ij}},$$

para toda  $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ . Portanto,  $\mu^{ij} = d\|D^2 f\|_{\Sigma_{ij}}$ .

Por outro lado, dado  $V \subset \mathbb{R}^n$  aberto, definimos

$$\|D^2 f\|(V) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} \operatorname{div} \varphi_i \, dx; \varphi \in C_c^2(V; \mathbb{R}^{n^2}), |\varphi| \leq 1 \right\}$$

como a medida de variação total de  $Df$ .

Denotaremos também,

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] = \mu^{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Então pelo *Teorema da Decomposição de Lebesgue*,

$$\mu^{ij} = \mu_{ac}^{ij} + \mu_s^{ij},$$

onde  $\mu_{ac}^{ij} \ll \mathcal{L}^n$  e  $\mu_s^{ij} \perp \mathcal{L}^n$ . Em particular,

$$\mu_{ac}^{ij} = \mathcal{L}^n|_{f^{ij}},$$

onde  $f^{ij} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  e defina

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := f^{ij}$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Com isso estabelecido, segue que

$$D^2f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

e

$$[D^2f]_{ac} = \begin{pmatrix} \mu_{ac}^{11} & \cdots & \mu_{ac}^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{ac}^{n1} & \cdots & \mu_{ac}^{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

e

$$[D^2f]_s = \begin{pmatrix} \mu_s^{11} & \cdots & \mu_s^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_s^{n1} & \cdots & \mu_s^{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Assim,  $[D^2f] = [D^2f]_{ac} + [D^2f]_s = \mathcal{L}^n \lfloor_{D^2f} + [D^2f]_s$  onde  $D^2f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n^2})$  é a densidade com respeito a  $\mathcal{L}^n$ .

**Exemplo:** Para ilustrar, seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Claramente,  $f$  é convexa, em particular,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Então, seja  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ , dessa forma, usando a integração por partes

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi'(x) \, dx = \int_0^{\infty} 2x\varphi'(x) \, dx = - \int_0^{\infty} 2\varphi(x) \, dx$$

para toda  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ . Então,

$$\|Df'\| := \mathcal{L}^1 \lfloor_{f''}.$$

Sendo  $n > 1$ , seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) = \begin{cases} x_1^2, & \text{se } x_1 > 0 \\ 0, & \text{se } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Claramente,  $f$  é convexa, em particular,

$$Df(x) = \begin{cases} \underbrace{(2x_1, 0, \dots, 0)}_{n \text{ vezes}}, & \text{se } x_1 > 0 \\ \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ vezes}}, & \text{se } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

e

$$D^2f(x) = \begin{pmatrix} 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

se  $x_1 > 0$  e  $D^2f(x)$  é uma matriz  $n \times n$  nula, se  $x_1 \leq 0$ . Assim, dada  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} 2x_1 \operatorname{div} \varphi \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} 2x_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} 2\varphi_1 \, dx$$

e para  $i = 2, 3, \dots, n$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \operatorname{div} \varphi \, dx = 0.$$

Em particular, em termos de medida,

$$\|D^2f\| = \mathcal{L}^n \lfloor_{D^2f}.$$

5.4.2 Existência de  $D^2f$  para funções convexas,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p.

**Teorema 5.9** (Teorema de Aleksandrov). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Então,  $f$  possui uma matriz hessiana clássica a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Mais precisamente,*

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \cdot D^2f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| = o(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)$$

quando  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.

*Demonstração.* Dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, observe que pelo que já fizemos para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{L}^n$ -q.t.p.

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |Df(\mathbf{y}) - Df(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} = 0 \text{ (por (2.27)) ,} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |D^2f(\mathbf{y}) - D^2f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} = 0 \text{ (por (2.27)) ,} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|[D^2f]_s|(B(\mathbf{x}, r))|}{r^n} = 0 \text{ (por (2.26)).} \end{cases} \quad (67)$$

Seja  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que (67) seja satisfeito. A menos de uma isometria podemos assumir  $\mathbf{x} = 0$ . Seja  $r > 0$ , considere  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$ , onde  $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  é o *Mollifier* canônico. Seja  $\mathbf{y} \in B(0, r)$ . Em particular,

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(\mathbf{y}) &= f^\varepsilon(0) + Df^\varepsilon(0) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \cdot \int_0^1 (1-s) D^2f^\varepsilon(s\mathbf{y}) \, ds \cdot \mathbf{y} \\ &= f^\varepsilon(0) + Df^\varepsilon(0) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \cdot \int_0^1 (1-s)(D^2f^\varepsilon(s\mathbf{y}) - D^2f(0)) \, ds \cdot \mathbf{y} \\ &\quad + \mathbf{y}^T \cdot \int_0^1 (1-s) D^2f(0) \, ds \cdot \mathbf{y} \\ &= f^\varepsilon(0) + Df^\varepsilon(0) \cdot \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \cdot D^2f(0) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \cdot \int_0^1 (1-s)(D^2f^\varepsilon(s\mathbf{y}) - D^2f(0)) \, ds \cdot \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Então,

$$f^\varepsilon(\mathbf{y}) - f^\varepsilon(0) - Df^\varepsilon(0) \cdot \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \cdot D^2f(0) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot \int_0^1 (1-s)(D^2f^\varepsilon(s\mathbf{y}) - D^2f(0)) \, ds \cdot \mathbf{y}.$$

Tome  $\varphi \in C_c^2(B(0, r))$  com  $|\varphi| \leq 1$ . Multiplique a estimativa acima por  $\varphi$  e



tomando a média com respeito a  $\mathbf{y}$  em  $B(0, r)$  temos que

$$\begin{aligned}
& \int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y}) \left( f^\varepsilon(\mathbf{y}) - f^\varepsilon(0) - Df^\varepsilon(0) \cdot \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \cdot D^2 f(0) \cdot \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} \\
&= \int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y}) \left( \mathbf{y}^\top \cdot \int_0^1 (1-s)(D^2 f^\varepsilon(s\mathbf{y}) - D^2 f(0)) ds \cdot \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} \\
&= \int_0^1 (1-s) \int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y}) (\mathbf{y}^\top \cdot (D^2 f^\varepsilon(s\mathbf{y}) - D^2 f(0)) \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y} ds \\
&= \int_0^1 \frac{(1-s)}{s^2} \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (\mathbf{z}^\top \cdot (D^2 f^\varepsilon(\mathbf{z}) - D^2 f(0)) \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z} ds \\
&= \int_0^1 \frac{(1-s)}{s^2} \left( \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (\mathbf{z}^\top \cdot D^2 f^\varepsilon(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z} - \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (\mathbf{z}^\top \cdot D^2 f(0) \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) ds \\
&= \int_0^1 \frac{(1-s)}{s^2} \left( \frac{h_\varepsilon(s)}{\mathcal{L}^n(B(0,rs))} - \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (\mathbf{z}^\top \cdot D^2 f(0) \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) ds,
\end{aligned}$$

onde  $h_\varepsilon(s) := \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (\mathbf{z}^\top \cdot D^2 f^\varepsilon(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z}$ .

Temos a intenção de utilizar o *Teorema da Convergência Dominada*. Então, note que

$$\begin{aligned}
h_\varepsilon(s) &= \int_{B(0,r)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (\mathbf{z}^\top \cdot D^2 f^\varepsilon(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) \frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial z_i \partial z_j}(\mathbf{z}) z_i z_j d\mathbf{z} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} f^\varepsilon(\mathbf{z}) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \left( \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z_i z_j \right) d\mathbf{z}.
\end{aligned}$$

Como  $f^\varepsilon$  converge uniformemente para  $f$  temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(s) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} f(\mathbf{z}) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \left( \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z_i z_j \right) d\mathbf{z} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z_i z_j d\mu^{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z_i z_j d\mu_{ac}^{ij} + \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z_i z_j d\mu_s^{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(\mathbf{z}) z_i z_j d\mathbf{z} + \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z_i z_j d\mu_s^{ij} \\
&= \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) \mathbf{z}^\top \cdot D^2 f(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{z} + \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z_i z_j d\mu_s^{ij}.
\end{aligned}$$

Agora precisamos mostrar que  $\frac{h_\varepsilon(s)}{s^{n+2}}$  é limitado. Com efeito,

$$\begin{aligned}
|h_\varepsilon(s)| &= \left| \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{z}{s}\right) (z^\top \cdot D^2 f^\varepsilon(z) \cdot z) \, dz \right| \\
&\leq \int_{B(0,rs)} |z^\top \cdot D^2 f^\varepsilon(z) \cdot z| \, dz \\
&\leq \int_{B(0,rs)} \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial z_i \partial z_j}(z) z_i z_j \right| \, dz \\
&\leq (rs)^2 \int_{B(0,rs)} |D^2 f^\varepsilon(z)| \, dz \\
&= (rs)^2 \int_{B(0,rs)} \left| \int_{B(0,rs+\varepsilon)} D^2 \eta_\varepsilon(z-y) f(y) \, dy \right| \, dz \\
&= \frac{(rs)^2}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs)} \left| \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \eta\left(\frac{z-y}{\varepsilon}\right) d[D^2 f] \right| \, dz \\
&= \frac{(rs)^2}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs)} \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \eta\left(\frac{z-y}{\varepsilon}\right) \Sigma_{ij} \, d\|D^2 f\|(y) e_{ij} \right| \, dz \\
&\leq \frac{(rsn)^2}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs)} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \eta\left(\frac{z-y}{\varepsilon}\right) \, d\|D^2 f\|(y) \, dz \\
&= \frac{(rsn)^2}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \int_{B(0,rs) \cap B(y,\varepsilon)} \eta\left(\frac{z-y}{\varepsilon}\right) \, dz \, d\|D^2 f\|(y) \\
&\leq \frac{(rsn)^2}{\varepsilon^n} \int_{B(0,rs+\varepsilon)} \mathcal{L}^n(B(0,rs) \cap B(y,\varepsilon)) \, d\|D^2 f\|(y) \\
&\leq \frac{2^n (rsn)^2}{\varepsilon^n} \min\{\varepsilon^n, (rs)^n\} \|D^2 f\|(B(0,rs+\varepsilon)).
\end{aligned}$$

De maneira similar ao do primeiro teorema desse capítulo, vemos que para  $r$  e  $\varepsilon$  suficientemente pequenos,

$$\|D^2 f\|(B(0,rs+\varepsilon)) \leq (1+\beta)(rs+\varepsilon)^n$$

onde  $\beta := \lim_{r,\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|D^2 f\|(B(0,rs+\varepsilon))}{(rs+\varepsilon)^n}$ . Então,

$$|h_\varepsilon(s)| \leq \frac{(rs)^2 C}{\varepsilon^n} \min\{\varepsilon^n, (rs)^n\} (rs+\varepsilon)^n, \quad C := (1+\beta)2^n n^2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{|h_\varepsilon(s)|}{s^{n+2}} &\leq \frac{(rs)^2 C}{\varepsilon^n s^{n+2}} \min\{\varepsilon^n, (rs)^n\} (rs + \varepsilon)^n \\
&\leq \frac{2^n r^2 C}{\varepsilon^n s^n} \min\{\varepsilon^n, (rs)^n\} ((rs)^n + (\varepsilon)^n) \\
&= \frac{2^n r^2 C}{\varepsilon^n s^n} \min\{\varepsilon^n, (rs)^n\} (rs)^n + \frac{2^n r^2 C}{\varepsilon^n s^n} \min\{\varepsilon^n, (rs)^n\} (\varepsilon)^n \\
&= \frac{2^n r^2 C}{\varepsilon^n} \min\{\varepsilon^n, (rs)^n\} r^n + \frac{2^n r^2 C}{s^n} \min\{\varepsilon^n, (rs)^n\} \\
&= 2^n r^2 C r^n + 2^n r^2 C r^n \\
&= 2^{n+1} r^{n+2} C.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos pelo *Teorema da Convergência Dominada* que

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y}) \left( f(\mathbf{y}) - f(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \cdot D^2 f(0) \cdot \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,r)} \varphi(\mathbf{y}) \left( f^\varepsilon(\mathbf{y}) - f^\varepsilon(0) - Df^\varepsilon(0) \cdot \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \cdot D^2 f(0) \cdot \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{(1-s)}{s^2} \left( \frac{h_\varepsilon(s)}{\mathcal{L}^n(B(0,rs))} - \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (z^\top \cdot D^2 f(0) \cdot z) dz \right) ds \\
&= \int_0^1 \frac{(1-s)}{s^2} \left( \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z^\top \cdot D^2 f(z) \cdot z dz + \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z_i z_j d\mu_s^{ij} \right. \\
&\quad \left. - \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) (z^\top \cdot D^2 f(0) \cdot z) dz \right) ds \\
&= \int_0^1 \frac{(1-s)}{s^2} \left( \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z^\top \cdot (D^2 f(z) - D^2 f(0)) \cdot z dz \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{\mathbf{z}}{s}\right) z_i z_j d\mu_s^{ij} \right) ds.
\end{aligned}$$

Continuando a estimativa, majorando pelo módulo,

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_0^1 \frac{(1-s)}{s^2} \left( \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z^\top \cdot (D^2f(z) - D^2f(0)) \cdot z \, dz \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \varphi\left(\frac{z}{s}\right) z_i z_j \, d\mu_s^{ij} \right) ds \right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{(1-s)}{s^2} \left( \int_{B(0,rs)} \left| \varphi\left(\frac{z}{s}\right) \right| |z^\top \cdot (D^2f(z) - D^2f(0)) \cdot z| \, dz \right. \\
&+ \left. \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} \left| \varphi\left(\frac{z}{s}\right) \right| |z_i z_j| \, d\mu_s^{ij} \right) ds \\
&\leq \int_0^1 \frac{(1-s)}{s^2} \left( (rs)^2 \int_{B(0,rs)} |D^2f(z) - D^2f(0)| \, dz + (rs)^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} 1 \, d\mu_s^{ij} \right) ds \\
&= \int_0^1 (1-s) \left( r^2 \int_{B(0,rs)} |D^2f(z) - D^2f(0)| \, dz + r^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{B(0,rs)} 1 \, d\mu_s^{ij} \right) ds \\
&\leq \int_0^1 (1-s) \left( r^2 \int_{B(0,rs)} |D^2f(z) - D^2f(0)| \, dz + r^2 \frac{\|D^2f\|(B(0,rs))}{\alpha(n)(rs)^n} \right) ds \\
&\leq \int_0^1 r^2 \int_{B(0,rs)} |D^2f(z) - D^2f(0)| \, dz \, ds + r^2 \int_0^1 \frac{\|D^2f\|(B(0,rs))}{\alpha(n)(rs)^n} \, ds \\
&= \underbrace{\int_0^r r \int_{B(0,t)} |D^2f(z) - D^2f(0)| \, dz \, dt}_{(i)} + r \underbrace{\int_0^r \frac{\|D^2f\|(B(0,t))}{\alpha(n)t^n} \, dt}_{(ii)}.
\end{aligned}$$

Note que por (67), (i) e (ii) são contínuas em  $t = 0$ . Ainda por (67) vem que ambas integrais são  $o(r^2)$  quando  $r \rightarrow 0$ . Então,

$$\int_{B(0,r)} \varphi(y) \left( f(y) - f(0) - Df(0) \cdot y - \frac{1}{2} y^\top \cdot D^2f(0) \cdot y \right) dy = o(r^2)$$

quando  $r \rightarrow 0$ , para toda  $\varphi \in C_c^2(B(0,r))$  e  $|\varphi| \leq 1$ . Então, tomando o supremo sobre essas  $\varphi$ , vem que

$$\int_{B(0,r)} \left| f(y) - f(0) - Df(0) \cdot y - \frac{1}{2} y^\top \cdot D^2f(0) \cdot y \right| dy = o(r^2)$$

quando  $r \rightarrow 0$ .

Defina  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\bar{f}(y) := f(y) - f(0) - Df(0) \cdot y - \frac{1}{2} y^\top \cdot D^2f(0) \cdot y.$$

**Afirmção:** Existe  $C > 0$  tal que

$$\sup_{B(0, \frac{r}{2})} |D\bar{f}| \leq \frac{C}{r} \int_{B(0, r)} |\bar{f}| \, dy + Cr$$

com  $r > 0$ .

**Prova da Afirmação:** Seja  $\Lambda := |D^2f(0)|$  e defina  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(y) = \bar{f}(y) + \frac{\Lambda}{2}|y|^2$ . Claramente,  $g$  é convexa. Então pelo primeiro teorema dessa seção,

$$\sup_{B(0, \frac{r}{2})} |Dg| \leq \frac{C_1}{r} \int_{B(0, r)} |g| \, dy.$$

Como  $\frac{\Lambda}{2} \geq 0$ , temos que

$$\sup_{B(0, \frac{r}{2})} |D\bar{f}| \leq \sup_{B(0, \frac{r}{2})} |Dg|.$$

Então,

$$\begin{aligned} \sup_{B(0, \frac{r}{2})} |D\bar{f}| &\leq \frac{C_1}{r} \int_{B(0, r)} |g| \, dy \\ &\leq \frac{C_1}{r} \int_{B(0, r)} |\bar{f}| \, dy + \frac{C_1}{r} \int_{B(0, r)} \frac{\Lambda}{2} |y|^2 \, dy \\ &\leq \frac{C_1}{r} \int_{B(0, r)} |\bar{f}| \, dy + \frac{C_1}{r} \int_{B(0, r)} \frac{\Lambda}{2} r^2 \, dy \\ &\leq \frac{C_1}{r} \int_{B(0, r)} |\bar{f}| \, dy + C_1 \frac{\Lambda}{2} r \\ &\leq \frac{C_2}{r} \int_{B(0, r)} |\bar{f}| \, dy + C_2 r, \end{aligned}$$

onde  $C_2 := \max\{C_1, C_1 \frac{\Lambda}{2}\}$ . Provando então a afirmação.

Por fim,

**Afirmação:**  $\sup_{B(0, \frac{r}{2})} |\bar{f}| = o(r^2)$

**Prova da Afirmação:** Tome  $0 < \varepsilon, \eta < 1$ , com  $\eta^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2}$ . Agora, note que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\{z \in B(0, r); |\bar{f}(z)| \geq \varepsilon r^2\}) &= \int_{B(0, r) \cap \{|\bar{f}| \geq \varepsilon r^2\}} 1 \, dz \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon r^2} \int_{B(0, r) \cap \{|\bar{f}| \geq \varepsilon r^2\}} |\bar{f}| \, dz \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon r^2} \int_{B(0, r)} |\bar{f}| \, dz \\ &= \frac{\mathcal{L}^n(B(0, r))}{\varepsilon r^2} \int_{B(0, r)} |\bar{f}| \, dz. \end{aligned}$$

Pelo que já fizemos  $\frac{1}{r^2} \int_{B(0, r)} |\bar{f}| \, dz \rightarrow 0$ , quando  $r \rightarrow 0$ , dessa forma, para  $\eta$  existe um

$r_0 = r_0(\eta, \varepsilon)$ , tal que para todo  $0 < r < r_0$

$$\frac{1}{\varepsilon r^2} \int_{B(0,r)} |\bar{f}| \, dy < \eta.$$

Então para  $0 < r < r_0$ ,

$$\mathcal{L}^n(\{z \in B(0, r); |\bar{f}(z)| \geq \varepsilon r^2\}) < \mathcal{L}^n(B(0, r))\eta.$$

Agora note que para  $0 < r < r_0$  vem que para cada  $y \in B(0, \frac{r}{2})$  existe  $z \in B(0, r)$  tal que

$$|f(z)| < \varepsilon r^2$$

e

$$|y - z| \leq \eta^{\frac{1}{n}} r.$$

Suponha por absurdo que exista  $y_0 \in B(0, \frac{r}{2})$  tal que para todo  $z \in B(0, r)$ ,  $|\bar{f}(z)| \geq \varepsilon r^2$  e  $|y_0 - z| \leq \eta^{\frac{1}{n}} r$  então,

$$B\left(y_0, \eta^{\frac{1}{n}} r\right) \subset B(0, r) \cap \{|\bar{f}| \geq \varepsilon r^2\}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^n(\{z \in B(0, r); |\bar{f}(z)| \geq \varepsilon r^2\}) \geq \mathcal{L}^n\left(B\left(y_0, \eta^{\frac{1}{n}} r\right)\right) = \alpha(n) \left(\eta^{\frac{1}{n}} r\right)^n = \eta \mathcal{L}^n(B(0, r)).$$

Absurdo!

Assim, tomemos  $y \in B(0, \frac{r}{2})$  e  $z \in B(0, r)$  tal que  $|\bar{f}(z)| < \varepsilon r^2$  e  $|y - z| \leq \eta^{\frac{1}{n}} r$ .

Então,

$$\begin{aligned} |\bar{f}(y)| &\leq |\bar{f}(z)| + |\bar{f}(y) - \bar{f}(z)| \\ &\leq \varepsilon r^2 + |y - z| \frac{|\bar{f}(y) - \bar{f}(z)|}{|y - z|} \\ &\leq \varepsilon r^2 + \eta^{\frac{1}{n}} r \frac{|\bar{f}(y) - \bar{f}(z)|}{|y - z|} \\ &\leq \varepsilon r^2 + \eta^{\frac{1}{n}} r \sup_{B(0,r)} |D\bar{f}| \\ &\leq \varepsilon r^2 + \eta^{\frac{1}{n}} r \left( \frac{C_2}{2r} \int_{B(0,2r)} |\bar{f}| \, dy + C_2 2r \right) \\ &= \varepsilon r^2 + \eta^{\frac{1}{n}} r^2 2C_2 \left( \frac{1}{4r^2} \int_{B(0,r)} |\bar{f}| \, dy + 1 \right) \\ &\leq \varepsilon r^2 + \eta^{\frac{1}{n}} r^2 4C_2, \quad (r \ll 1). \end{aligned}$$

Escolhendo  $\eta$  de modo que  $\eta^{\frac{1}{n}}4C_2 = \varepsilon$ , então,

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\mathbf{y})| &\leq \varepsilon r^2 + \varepsilon r^2 \\ &= 2\varepsilon r^2. \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{y} \in B(0, \frac{r}{2})$ . Então, para  $r \ll 1$ ,

$$\sup_{B(0, \frac{r}{2})} |\bar{f}(\mathbf{y})| \leq 2\varepsilon r^2.$$

Pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$ , temos que a afirmação segue.

Dessa afirmação vem que

$$\sup_{B(0, \frac{r}{2})} \left| f(\mathbf{y}) - f(0) - Df(0) \cdot \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \cdot D^2f(0) \cdot \mathbf{y} \right| = o(r^2)$$

Logo, a parte absolutamente contínua de  $[D^2f]$  com respeito a medida de  $\mathcal{L}^n$  é a hessiana de  $f$  no sentido clássico. Claramente, a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. ■

### 5.5 Teorema da extensão de Whitney

Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  fechado e sejam  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{d} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções dadas.

Defina,

$$(i) \quad R(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{d}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

(ii) Seja  $K \subset C$  compacto e defina

$$\rho_K(\delta) = \sup\{|R(\mathbf{y}, \mathbf{x})|; 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \delta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K\}.$$

**Teorema 5.10.** *Sejam  $f$  e  $\mathbf{d}$  contínuas e para cada  $K \subset C$  compacto*

$$\rho_K(\delta) \rightarrow 0$$

*quando  $\delta \rightarrow 0$ . Então, existe uma função  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$(i) \quad \bar{f} \in C^1(\mathbb{R}^n),$$

(ii)  $\bar{f} = f$ ,  $D\bar{f} = \mathbf{d}$  em  $C$ .

*Demonstração.* Defina  $U := \mathbb{R}^n - C$ . Claramente,  $U$  é aberto e defina

$$r(\mathbf{x}) = \frac{1}{20} \min\{1, \text{dist}(\mathbf{x}, C)\}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Então,

$$\mathbf{U} \subset \bigcup_{x \in \mathbf{U}} B(x, r(x)).$$

Pelo *Teorema da Cobertura de Vitali*, existe uma família de bolas disjuntas  $\{B(x_j, r(x_j))\}_{j=1}^{\infty}$  tal que

$$\mathbf{U} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 5r(x_j)).$$

Queremos mostrar que  $\mathbf{U} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 5r(x_j))$ . Suponha que exista  $x$  pertencente a  $\bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 5r(x_j))$  de modo que  $x \notin \mathbf{U}$ . Então,  $x \in C$ , dessa forma, existe  $j_0$  tal que  $x \in B(x_{j_0}, r(x_{j_0}))$ . Logo,

$$\begin{aligned} |x - x_{j_0}| &\leq \frac{5}{20} \min\{1, \text{dist}(x_{j_0}, C)\} \\ &\leq \frac{1}{4} \text{dist}(x_{j_0}, C) \\ &< \frac{1}{2} \text{dist}(x_{j_0}, C) \\ &\leq \frac{1}{2} |x - x_{j_0}|. \end{aligned}$$

Absurdo! Portanto, para todo  $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 5r(x_j))$ , temos que  $x \in \mathbf{U}$ . Assim,

$$\mathbf{U} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 5r(x_j)).$$

Seguindo em frente, para cada  $x \in \mathbf{U}$  seja

$$S_x := \{x_j; B(x, 10r(x)) \cap B(x_j, 10r(x_j)) \neq \emptyset\}.$$

**Afirmção:**  $\text{Card}(S_x) \leq (129)^n$  e  $\frac{1}{3} \leq \frac{r(x)}{r(x_j)} \leq 3$  se  $x_j \in S_x$ .

**Prova da Afirmção:** Fixe  $x \in \mathbf{U}$  e tome  $x_j \in S_x$  então,

$$B(x, 10r(x)) \cap B(x_j, 10r(x_j)) \neq \emptyset.$$

Como a função  $t \mapsto \min\{a, t\}$  para  $t \in \mathbb{R}$  e  $a$  uma constante real, é Lipschitz com



constante 1. Temos que

$$\begin{aligned}
 |r(x) - r(x_j)| &= \frac{1}{20} |\min\{1, \text{dist}(x, C)\} - \min\{1, \text{dist}(x_j, C)\}| \\
 &\leq \frac{1}{20} |\text{dist}(x_j, C) - \text{dist}(x, C)| \\
 &\leq \frac{1}{20} |x_j - x| \\
 &\leq \frac{1}{20} (|x_j - y| + |y - x|), \quad \text{onde } y \in B(x, 10r(x)) \cap B(x_j, 10r(x_j)) \\
 &\leq \frac{1}{2} (r(x) + r(x_j)) \\
 &= \frac{1}{2} r(x) + \frac{1}{2} r(x_j).
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 r(x) - r(x_j) &\leq \frac{1}{2} r(x) + \frac{1}{2} r(x_j) \\
 \Rightarrow r(x) - \frac{1}{2} r(x) &\leq r(x_j) + \frac{1}{2} r(x_j) \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} r(x) &\leq \frac{3}{2} r(x_j) \\
 \Rightarrow r(x) &\leq 3r(x_j)
 \end{aligned} \tag{68}$$

e

$$\begin{aligned}
 r(x_j) - r(x) &\leq \frac{1}{2} r(x) + \frac{1}{2} r(x_j) \\
 \Rightarrow r(x_j) - \frac{1}{2} r(x_j) &\leq r(x) + \frac{1}{2} r(x_j) \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} r(x_j) &\leq \frac{3}{2} r(x) \\
 \Rightarrow r(x_j) &\leq 3r(x).
 \end{aligned} \tag{69}$$

Assim, de (68) e (69)

$$\frac{r(x)}{r(x_j)} \leq \frac{3r(x_j)}{r(x_j)} = 3$$

e

$$\frac{r(x)}{r(x_j)} \geq \frac{r(x)}{3r(x)} = \frac{1}{3}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{r(x)}{r(x_j)} \leq 3,$$

para  $x_j \in S_x$ .

Por outro lado, seja  $\mathbf{y} \in B(x_j, r(x_j))$  e  $\mathbf{z} \in B(x, 10r(x)) \cap B(x_j, 10r(x_j))$ ,

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &\leq |\mathbf{x} - x_j| + |x_j - \mathbf{y}| \\
 &\leq |\mathbf{x} - x_j| + r(x_j) \\
 &\leq |\mathbf{x} - \mathbf{z}| + |\mathbf{z} - x_j| + r(x_j) \\
 &\leq 10r(x) + 10r(x_j) + r(x_j) \\
 &= 10r(x) + 11r(x_j) \\
 &\leq 10r(x) + 11(3r(x)) \quad (\text{por (69)}) \\
 &= 43r(x).
 \end{aligned}$$

Então,

$$B(x_j, r(x_j)) \subset B(x, 43r(x))$$

para todo  $x_j \in S_x$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 \alpha(n)(43)^n(r(x))^n &\geq \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{x_j \in S_x} B(x_j, r(x_j)) \right) \\
 &= \sum_{x_j \in S_x} \alpha(n)(r(x_j))^n \\
 &\geq \sum_{x_j \in S_x} \alpha(n) \left( \frac{r(x)}{3} \right)^n \\
 &= \text{Card}(S_x) \alpha(n) \frac{(r(x))^n}{3^n}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{Card}(S_x) \leq (43)^n 3^n = (129)^n.$$

O que prova a afirmação.

Agora seja  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ ,  $\mu(t) = 1$  se  $t \leq 1$  e  $\mu(t) = 0$ , se  $t \geq 2$ . Construiremos tal  $\mu$ . Com efeito, seja  $a > 0$  e  $0 < \varepsilon < a$  então defina,  $\bar{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\bar{\mu}(t) = (\eta_\varepsilon * \chi_{(-a,a)})(t).$$

Ressaltamos que, neste caso

$$\eta(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) & \text{se } t \in (-1, 1). \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} - (-1, 1). \end{cases}$$

e  $\eta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ . Determinaremos  $a$  e  $\varepsilon$  para que possamos definir  $\mu$  como a desejada. De

fato, sabemos que  $\text{spt}(\eta_\varepsilon) \subset (-(\mathbf{a} + \varepsilon), \mathbf{a} + \varepsilon)$  e pela escolha do  $\varepsilon$ ,  $\bar{\mu}|_{(-\mathbf{a}+\varepsilon, \mathbf{a}-\varepsilon)} = 1$ . Como queremos  $\mathbf{a} - \varepsilon = 1$  vem que  $\varepsilon = \mathbf{a} - 1 > 0$ . Daí,  $\mathbf{a} > 1$ , por outro lado queremos  $\mathbf{a} < 2$ . Então tomemos  $\mathbf{a} = \frac{3}{2}$  e então,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Assim, temos que  $\text{spt}(\bar{\mu}) \subset (-2, 2)$ , portanto, defina

$$\mu := \begin{cases} 1 & \text{em } (-\infty, 1]. \\ \eta_{\frac{1}{2}} * \chi_{(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})} & \text{em } (1, 2). \\ 0 & \text{em } [2, \infty). \end{cases}$$

Agora defina para cada  $j = 1, 2, \dots$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$u_j(\mathbf{x}) = \mu \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}{5r(\mathbf{x}_j)} \right).$$

Por construção  $u_j \in C^\infty$ , pois

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \mu' \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}{5r(\mathbf{x}_j)} \right) \frac{1}{5r(\mathbf{x}_j)} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{e}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}.$$

O problema que poderia haver é quando  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_j$ , contudo não ocorre pois, a derivada de  $\mu$  se anula, uma vez que  $\mu = 1$  em  $(-\infty, 1]$ . Além disso,  $0 \leq u_j \leq 1$ , para cada  $j$ . Observe também que se  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_j, 5r(\mathbf{x}_j))$  então,

$$\frac{|\mathbf{x} - 5\mathbf{x}_j|}{5r(\mathbf{x}_j)} \leq \frac{5r(\mathbf{x}_j)}{5r(\mathbf{x}_j)} = 1.$$

Então, para todo  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_j, 5r(\mathbf{x}_j))$   $u_j(\mathbf{x}) = 1$ . De maneira similar, vem que se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - B(\mathbf{x}_j, 10r(\mathbf{x}_j))$  então,

$$\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}{5r(\mathbf{x}_j)} \geq \frac{10r(\mathbf{x}_j)}{5r(\mathbf{x}_j)} = 2.$$

Logo, para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - B(\mathbf{x}_j, 10r(\mathbf{x}_j))$ ,  $u_j(\mathbf{x}) = 0$ . Então, temos para cada  $j$ ,

$$\begin{cases} u_j \in C^\infty, 0 \leq u_j \leq 1, \\ u_j = 1 \text{ em } B(\mathbf{x}_j, 5r(\mathbf{x}_j)), \\ u_j = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n - B(\mathbf{x}_j, 10r(\mathbf{x}_j)). \end{cases}$$

Além disso, sendo  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$  a base canônica

$$Du_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left( \mu' \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}{5r(\mathbf{x}_j)} \right) \frac{1}{5r(\mathbf{x}_j)} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{e}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \right) \mathbf{e}_i.$$

Logo, pela afirmação.

$$|Du_j(\mathbf{x})| \leq \sum_{i=1}^n \left| \mu' \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}{5r(\mathbf{x}_j)} \right) \frac{1}{5r(\mathbf{x}_j)} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{e}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \right| \leq \frac{n \|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{5r(\mathbf{x}_j)} \leq \frac{3n \|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{5r(\mathbf{x})} = \frac{C}{r(\mathbf{x})},$$

onde  $C := \frac{3n\|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{5}$ .

Agora defina  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\sigma(x) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x).$$

Observe que  $\sigma$  está bem definida, pois fixado  $x \in \mathbb{R}^n$  se  $x_j \notin S_x$ , temos que

$$|x - x_j| > 10r(x) \quad \text{e} \quad |x - x_j| > 10r(x_j).$$

Em particular, se  $y \in B(x, 10r(x))$ , vem que

$$\frac{|y - x_j|}{5r(x_j)} > \frac{10r(x_j)}{5r(x_j)} = 2.$$

Dessa forma,  $u_j(y) = 0$  para todo  $y \in B(x, 10r(x))$  se  $x_j \notin S_x$  e assim,

$$\sigma(y) = \sum_{x_j \in S_x} u_j(y), \quad \text{com } y \in B(x, 10r(x)).$$

Com isso, vem que se para algum  $y \in \mathbb{R}^n$  existem  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  tais que  $y \in B(x_1, 10r(x_1)) \cap B(x_2, 10r(x_2))$ . Então, se  $S_{x_1} = S_{x_2}$  não há o que fazer. Por outro lado, se  $S_{x_1} \neq S_{x_2}$ , digamos  $S_{x_1} \subset S_{x_2}$ . Então, existe  $x_{j_0} \in S_{x_2} - S_{x_1}$ . Logo,  $u_{j_0}(w) = 0$ , para todo  $w \in B(x_1, 10r(x_1))$ , em particular,  $u_{j_0}(y) = 0$ . Claramente, o mesmo vale para todo  $x_j \in S_{x_2} - S_{x_1}$ . Então,

$$\sigma(y) = \sum_{x_j \in S_{x_1}} u_j(y) = \sum_{x_j \in S_{x_1} \cup (S_{x_2} - S_{x_1})} u_j(y) = \sum_{x_j \in S_{x_2}} u_j(y).$$

Como  $\text{Card}(S_x) \leq (129)^n$  vem que  $\sigma \in C^\infty(U)$  e por construção  $\sigma \geq 1$  em  $U$ . Em particular, para cada  $x \in U$

$$|D\sigma(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x) \right| \leq \frac{(129)^n C}{r(x)} = \frac{C_1}{r(x)},$$

com  $C_1 := (129)^n C$ .

Seja  $v_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , dada por,

$$v_j(x) := \frac{u_j(x)}{\sigma(x)}.$$

Dessa forma, por construção,

$$\sum_{j=1}^{\infty} v_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j(x)}{\sigma(x)} = 1$$

e

$$Dv_j = \frac{Du_j}{\sigma} - u_j \frac{D\sigma}{\sigma^2}.$$

Então,

$$|Dv_j(x)| = \left| \frac{Du_j(x)}{\sigma(x)} \right| + \left| u_j(x) \frac{D\sigma(x)}{(\sigma(x))^2} \right| \leq |Du_j(x)| + |D\sigma(x)| \leq \frac{C_2}{r(x)},$$

com  $C_2 := C + C_1$ . Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{\infty} v_i = 1 \text{ em } \mathbf{U}, \\ \sum_{i=1}^{\infty} Dv_i = 0 \text{ em } \mathbf{U}, \\ |Dv_j(x)| \leq \frac{C_2}{r(x)}. \end{array} \right.$$

Ressaltamos ainda que  $\text{spt}(v_j) \subset B(x_j, 10r(x_j))$  e  $0 \leq v \leq 1$ , portanto, a família  $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$  é uma partição da unidade de  $\mathbf{U}$ .

Doravante, seja para cada  $j$ ,  $s_j \in C$  tal que

$$|x_j - s_j| = \text{dist}(x_j, C).$$

Finalmente, defina  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C. \\ \sum_{j=1}^{\infty} v_j(x)[f(s_j) + d(s_j) \cdot (x - s_j)] & \text{se } x \in \mathbf{U}. \end{cases}$$

Por construção,  $\bar{f}|_{\mathbf{U}} \in C^\infty(\mathbf{U})$ . Logo, para  $x \in \mathbf{U}$ ,

$$D\bar{f}(x) = \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[f(s_j) + d(s_j) \cdot (x - s_j)] + v_j(x)d(s_j).$$

**Afirmção:**  $D\bar{f}(a) = d(a)$  para todo  $a \in C$ .

**Prova da Afirmção:** Com efeito, fixemos  $a \in C$  e defina  $K = C \cap B(a, 1)$ . Claramente,  $K$  é compacto. Defina agora, para  $\delta > 0$ ,

$$\varphi(\delta) = \rho_K(\delta) + \sup\{|d(y) - d(x)|; x, y \in K, |x - y| \leq \delta\}.$$

Por hipótese,  $\rho_K(\delta) \rightarrow 0$  quando  $\delta \rightarrow 0$  e  $\mathbf{d}$  é contínua, e em  $K$  é uniformemente contínua. Dessa forma,

$$\varphi(\delta) \rightarrow 0.$$

quando  $\delta \rightarrow 0$ .

Por outro lado, se  $x \in K$ , então,

$$\begin{aligned} |\bar{f}(x) - \bar{f}(a) - \mathbf{d}(a) \cdot (x - a)| &= |f(x) - f(a) - \mathbf{d}(a) \cdot (x - a)| \\ &= \frac{|f(x) - f(a) - \mathbf{d}(a) \cdot (x - a)|}{|x - a|} |x - a| \\ &= R(x, a) |x - a| \\ &\leq \varphi(|x - a|) |x - a| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}(x) - \mathbf{d}(a)| &\leq \sup\{|\mathbf{d}(z) - \mathbf{d}(y)|; z, y \in K \text{ e } |z - y| < |x - a|\} \\ &\leq \varphi(|x - a|). \end{aligned}$$

Em particular,

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(a) - \mathbf{d}(a) \cdot (x - a)| = o(|x - a|),$$

quando  $x \rightarrow a$  em  $C$ .

Agora tomemos  $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$  tal que  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Logo,

$$\begin{aligned}
& |\bar{f}(\mathbf{x}) - \bar{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})| \\
= & |\bar{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})| \\
= & \left| \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) [f(\mathbf{s}_j) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{s}_j)] - f(\mathbf{a}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right| \\
= & \left| \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) [f(\mathbf{s}_j) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{s}_j)] - \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) f(\mathbf{a}) - \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) \mathbf{d}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right| \\
= & \left| \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) [f(\mathbf{s}_j) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{s}_j) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})] \right| \\
\leq & \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) |f(\mathbf{s}_j) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{s}_j) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})| \\
= & \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) |f(\mathbf{s}_j) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a} + \mathbf{a} - \mathbf{s}_j) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})| \\
= & \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) |f(\mathbf{s}_j) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{d}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{s}_j) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})| \\
= & \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) |f(\mathbf{s}_j) - f(\mathbf{a}) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{s}_j) + [\mathbf{d}(\mathbf{s}_j) - \mathbf{d}(\mathbf{a})] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})| \\
\leq & \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) |f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{s}_j) - \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{s}_j)| + \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) |[\mathbf{d}(\mathbf{s}_j) - \mathbf{d}(\mathbf{a})] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})| \\
\leq & \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) \varphi(|\mathbf{a} - \mathbf{s}_j|) |\mathbf{a} - \mathbf{s}_j| + \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(\mathbf{x}) \varphi(|\mathbf{a} - \mathbf{s}_j|) |\mathbf{x} - \mathbf{a}|.
\end{aligned}$$

Queremos uma estimativa para  $|\mathbf{a} - \mathbf{s}_j|$ . Como  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \varepsilon \leq 1$  então

$$r(\mathbf{x}) = \frac{1}{20} \min\{1, \text{dist}(\mathbf{x}_j, \mathbf{C})\} = \frac{1}{20} \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{C}) \leq \frac{1}{20} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

Logo, para  $\mathbf{x}_j \in S_x$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a} - \mathbf{s}_j| & \leq |\mathbf{a} - \mathbf{x}_j| + |\mathbf{x}_j - \mathbf{s}_j| \\
& = |\mathbf{a} - \mathbf{x}_j| + \text{dist}(\mathbf{x}_j, \mathbf{C}) \\
& \leq 2|\mathbf{a} - \mathbf{x}_j| \\
& \leq 2(|\mathbf{a} - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|) \\
& \leq 2(|\mathbf{x} - \mathbf{a}| + 10(r(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x}_j))) \\
& \leq 2(|\mathbf{x} - \mathbf{a}| + 10(r(\mathbf{x}) + 3r(\mathbf{x}))), \quad (r(\mathbf{x}_j) \leq 3r(\mathbf{x})) \\
& \leq 2(|\mathbf{x} - \mathbf{a}| + 40r(\mathbf{x})) \\
& \leq 2(|\mathbf{x} - \mathbf{a}| + 40 \frac{1}{20} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|) = 6|\mathbf{x} - \mathbf{a}|.
\end{aligned}$$

Usando esse fato,

$$\begin{aligned}
 |\bar{f}(x) - \bar{f}(a) - d(a) \cdot (x - a)| &\leq \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(x) \varphi(|a - s_j|) |a - s_j| \\
 &+ \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(x) \varphi(a - s_j) |x - a| \\
 &\leq \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(x) \varphi(6|x - a|) 6|x - a| \\
 &+ \sum_{x_j \in S_x} \nu_j(x) \varphi(6|x - a|) |x - a| \\
 &\leq 7(129)^n \varphi(6|x - a|) |x - a|.
 \end{aligned}$$

Dessa estimativa vem que

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(a) - d(a) \cdot (x - a)| = o(|x - a|)$$

quando  $x \rightarrow a$ . Dessa forma  $D\bar{f}(a)$  existe e é igual a  $d(a)$ .

**Afirmção:**  $\bar{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Prova da Afirmção:** Com efeito, fixemos  $a \in C$ , e seja  $x \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $|x - a| < \varepsilon \leq 1$ .

Se  $x \in C$ , então pela afirmção anterior.

$$|D\bar{f}(x) - D\bar{f}(a)| = |d(x) - d(a)| \leq \varphi(|x - a|).$$

Agora, se  $x \in U$  seja  $b \in C$  tal que  $|x - b| = \text{dist}(x, C)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 |D\bar{f}(x) - D\bar{f}(a)| &= |D\bar{f}(x) - d(a)| \\
 &\leq |D\bar{f}(x) - d(b)| + |d(b) - d(a)| \\
 &\leq |D\bar{f}(x) - d(b)| + \varphi(|b - a|)
 \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
 |b - a| &\leq |b - x| + |x - a| \\
 &\leq \text{dist}(x, C) + |x - a| \\
 &\leq 2|x - a|.
 \end{aligned}$$

Temos que

$$|D\bar{f}(x) - D\bar{f}(a)| \leq |D\bar{f}(x) - d(b)| + \varphi(2|x - a|).$$



Agora observe que

$$\begin{aligned}
& |D\bar{f}(x) - d(b)| \\
&= \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[f(s_j) + d(s_j) \cdot (x - s_j)] + v_j(x)d(s_j) - d(b) \right| \\
&= \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[f(s_j) + d(s_j) \cdot (x - s_j)] + v_j(x)[d(s_j) - d(b)] \right| \\
&= \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[f(s_j) + d(s_j) \cdot (x - s_j)] - \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)f(b) + \sum_{x_j \in S_x} v_j(x)[d(s_j) - d(b)] \right| \\
&\leq \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[f(s_j) + d(s_j) \cdot (x - s_j) - f(b)] \right| + \left| \sum_{x_j \in S_x} v_j(x)[d(s_j) - d(b)] \right| \\
&= \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[f(s_j) + d(s_j) \cdot (x - b + b - s_j) - f(b)] \right| + \left| \sum_{x_j \in S_x} v_j(x)[d(s_j) - d(b)] \right| \\
&= \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[f(s_j) - f(b) + d(s_j) \cdot (x - b) + d(s_j) \cdot (b - s_j)] \right| \\
&+ \left| \sum_{x_j \in S_x} v_j(x)[d(s_j) - d(b)] \right| \\
&\leq \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[f(s_j) - f(b) + d(s_j) \cdot (b - s_j)] \right| + \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)d(s_j) \cdot (x - b) \right| \\
&+ \left| \sum_{x_j \in S_x} v_j(x)[d(s_j) - d(b)] \right| \\
&= \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[f(s_j) - f(b) + d(s_j) \cdot (b - s_j)] \right| \\
&+ \left| \sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x)[d(s_j) \cdot (x - b) - d(b)(x - b)] \right| \\
&+ \left| \sum_{x_j \in S_x} v_j(x)[d(s_j) - d(b)] \right|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& |D\bar{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{d}(\mathbf{b})| \\
& \leq \left| \sum_{x_j \in S_x} D\mathbf{v}_j(\mathbf{x})[f(\mathbf{s}_j) - f(\mathbf{b}) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)] \right| + \left| \sum_{x_j \in S_x} D\mathbf{v}_j(\mathbf{x})[(\mathbf{d}(\mathbf{s}_j) - \mathbf{d}(\mathbf{b}))(\mathbf{x} - \mathbf{b})] \right| \\
& + \left| \sum_{x_j \in S_x} \mathbf{v}_j(\mathbf{x})[\mathbf{d}(\mathbf{s}_j) - \mathbf{d}(\mathbf{b})] \right| \\
& \leq \sum_{x_j \in S_x} |D\mathbf{v}_j(\mathbf{x})[f(\mathbf{s}_j) - f(\mathbf{b}) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)]| + \sum_{x_j \in S_x} |D\mathbf{v}_j(\mathbf{x})[(\mathbf{d}(\mathbf{s}_j) - \mathbf{d}(\mathbf{b}))(\mathbf{x} - \mathbf{b})]| \\
& + \sum_{x_j \in S_x} |\mathbf{v}_j(\mathbf{x})[\mathbf{d}(\mathbf{s}_j) - \mathbf{d}(\mathbf{b})]| \\
& \leq \frac{C_2}{r(\mathbf{x})} \left( \sum_{x_j \in S_x} |[f(\mathbf{s}_j) - f(\mathbf{b}) + \mathbf{d}(\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)]| + \sum_{x_j \in S_x} |\mathbf{d}(\mathbf{s}_j) - \mathbf{d}(\mathbf{b})||\mathbf{x} - \mathbf{b}| \right) \\
& + \sum_{x_j \in S_x} |\mathbf{d}(\mathbf{s}_j) - \mathbf{d}(\mathbf{b})| \\
& \leq \frac{C_2}{r(\mathbf{x})} \left( \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|\mathbf{b} - \mathbf{s}_j|)|\mathbf{b} - \mathbf{s}_j| + \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|\mathbf{b} - \mathbf{s}_j|)|\mathbf{x} - \mathbf{b}| \right) + \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|\mathbf{b} - \mathbf{s}_j|).
\end{aligned}$$

Veja que  $|\mathbf{x} - \mathbf{b}| = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{C}) \leq |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \varepsilon$ . Então,

$$r(\mathbf{x}) = \frac{1}{20} \min\{1, \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{C})\} = \frac{1}{20} |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \leq \frac{\varepsilon}{20}$$

Temos que se  $x_j \in S_x$ , então,

$$r(x_j) \leq 3r(\mathbf{x}) \leq \frac{3\varepsilon}{20} < \frac{3\varepsilon}{10}.$$

Como

$$r(x_j) = \frac{1}{20} \min\{1, \text{dist}(x_j, \mathbf{C})\} < \frac{3\varepsilon}{10} < 1.$$

Então,  $r(x_j) = \frac{1}{20} \text{dist}(x_j, \mathbf{C}) = \frac{1}{20} |x_j - s_j|$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{b} - \mathbf{s}_j| & \leq |\mathbf{b} - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{s}_j| \\
& \leq |\mathbf{b} - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - x_j| + |x_j - s_j| \\
& \leq 20r(\mathbf{x}) + 10(r(\mathbf{x}) + r(x_j)) + 20r(x_j) \\
& \leq 20r(\mathbf{x}) + 10r(\mathbf{x}) + 30r(\mathbf{x}) + 60r(\mathbf{x}) \\
& = 120r(\mathbf{x}) \\
& = 120 \frac{1}{20} |\mathbf{b} - \mathbf{x}| = 6 \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{C}) \leq 6|\mathbf{x} - \mathbf{a}|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& |D\bar{f}(x) - d(b)| \\
& \leq \frac{C_2}{r(x)} \left( \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) |b - s_j| + \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) |x - b| \right) + \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) \\
& = \frac{C_2}{r(x)} (|b - s_j| + |x - b|) \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) + \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) \\
& \leq \frac{C_2}{r(x)} 7|x - b| \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) + \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) \\
& = \left( \frac{C_2}{r(x)} 7|x - b| + 1 \right) \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) \\
& \leq \left( \frac{C_2}{r(x)} 7\varepsilon + 1 \right) \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) \quad (|x - b| \leq |x - a| \leq \varepsilon) \\
& \leq \left( \frac{20C_2}{\varepsilon} 7\varepsilon + 1 \right) \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) \quad (r(x) \leq \frac{\varepsilon}{20}) \\
& = (20C_2 7 + 1) \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) \tag{70} \\
& \leq (20C_2 7 + 1) \text{Card}(S_x) \varphi(6|x - a|) \\
& \leq C_3 \varphi(6|x - a|),
\end{aligned}$$

onde  $C_3 := (20C_2 7 + 1) \text{Card}(S_x)$ . Retornando a nossa estimativa anterior,

$$\begin{aligned}
|D\bar{f}(x) - D\bar{f}(a)| & \leq |D\bar{f}(x) - d(b)| + \varphi(2|x - a|) \\
& \leq C_3 \varphi(6|x - a|) + \varphi(6|x - a|) \\
& = C_4 \varphi(6|x - a|),
\end{aligned}$$

onde  $C_4 := C_3 + 1$ . Então,

$$|D\bar{f}(x) - D\bar{f}(a)| = o(1)$$

quando  $x \rightarrow a$ . O que prova a afirmação e finaliza o teorema. ■

## 5.6 Aproximação $C^1$ para funções Lipschitz, Sobolev e BV

### 5.6.1 Aproximação de funções Lipschitz

**Teorema 5.11.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz. Então para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma função  $C^1$ ,  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; \bar{f}(x) \neq f(x) \text{ ou } D\bar{f}(x) \neq Df(x)\}) \leq \varepsilon$$

e

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |D\bar{f}| \leq C \text{Lip}(f),$$

onde  $C = C(n, p)$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema de Radamacher  $f$  é diferenciável em um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - A) = 0$ . Seja  $A_1 = B(0, 1)$  e para  $j \geq 2$ , seja  $A_j = A \cap (B(0, j) - B(0, j-1))$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , para cada  $j = 1, 2, \dots$ , existe  $K_j \subset A_j$  tal que  $\mathcal{L}^n(A_j - K_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$  e  $Df|_{K_j}$  é contínua. Defina  $B := \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ . Assim,

$$\mathcal{L}^n(A - B) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j - K_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_j - K_j) \leq \varepsilon,$$

e  $Df|_B$  é contínua. Então, defina

$$d := Df|_B$$

e

$$R(y, x) := \frac{f(y) - f(x) - d(x) \cdot (y - x)}{|y - x|}$$

e definamos também,

$$\eta_k(x) := \sup \left\{ |R(y, x)|; y \in B, 0 < |x - y| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Da diferenciabilidade de  $f$  temos que para cada  $x \in B$ ,

$$\eta_k(x) \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

Por construção  $\eta_k$  é mensurável. Então usando o Teorema de Lusin como anteriormente existe um conjunto  $C \subset B$  fechado tal que  $\eta_k|_C$  é contínua e  $\mathcal{L}^n(B - C) \leq \varepsilon$ . Em particular,  $\eta_k(x) \rightarrow 0$  uniformemente em cada compacto  $K \subset C$ . Então, seja  $\rho_k \left(\frac{1}{j}\right) := \sup_K \eta_k(x)$ .

Assim, tenha em vista  $f|_C$  e  $d|_C$ , pelo que foi visto, estamos nas hipóteses do *Teorema da extensão de Whitney*. Então, existe uma função  $C^1$ ,  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\bar{f} = f$  em  $C$  e  $D\bar{f}(a) = d(a) = Df(a)$  para todo  $a \in C$ . Note que

$$\mathbb{R}^n - C = B - C \cup \mathbb{R}^n - B = B - C \cup A - B \cup \mathbb{R}^n - A.$$

Além disso,  $Z := \{x \in \mathbb{R}^n; \bar{f}(x) \neq f(x) \text{ ou } D\bar{f}(x) \neq Df(x)\} \subset \mathbb{R}^n - C$ , então,

$$\mathcal{L}^n(Z) \leq \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - C) = \mathcal{L}^n(B - C) + \mathcal{L}^n(A - B) + \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - A) \leq 2\varepsilon.$$

Agora resta nos provar que  $\sup_{\mathbb{R}^n} |D\bar{f}| \leq \hat{C} \text{Lip}(f)$ . Note que, por construção

$$\sup_C |d(x)| = \sup_C |Df(x)| \leq \text{Lip}(f).$$

Do mesmo modo, dados  $x, y \in C$ ,

$$\begin{aligned} \frac{|f(y) - f(x) - d(x) \cdot (y - x)|}{|y - x|} &\leq \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} + \frac{|d(x) \cdot (y - x)|}{|y - x|} \\ &\leq \text{Lip}(f) + |d(x)| \\ &\leq 2 \text{Lip}(f). \end{aligned}$$

Relembrando a notação da demonstração do *Teorema da extensão de Whitney* temos dessa estimativa, que

$$|R(y, x)| \leq 2 \text{Lip}(f),$$

para todo  $x, y \in C$  com  $x \neq y$ . Seja para  $K \subset C$  compacto e  $\delta > 0$ ,  $\varphi_K(\delta)$  como na demonstração do *Teorema da extensão de Whitney*. Dessa forma, temos que

$$\varphi_K(\delta) \leq 3 \text{Lip}(f)$$

para todo  $\delta > 0$ .

Enfim, seja  $x \in \mathbb{R}^n - C$  e  $b \in C$  tal que  $|x - b| = \text{dist}(x, C)$  temos por (70)

$$\begin{aligned} |D\bar{f}(x)| &\leq |D\bar{f}(x) - D\bar{f}(b)| + |D\bar{f}(b)| \\ &\leq (20C_27 + 1) \sum_{x_j \in S_x} \varphi(|b - s_j|) + |D\bar{f}(b)| \\ &\leq (20C_27 + 1) \text{Card}(S_x) \text{Lip}(f) + \text{Lip}(f) \\ &= C_4 \text{Lip}(f). \end{aligned}$$

Daí,

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |D\bar{f}| \leq C_4 \text{Lip}(f).$$



### 5.6.2 Aproximação de funções BV

**Teorema 5.12.** *Seja  $f \in \text{BV}(\mathbb{R}^n)$ . Então, para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma função Lipschitz  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; \bar{f}(x) \neq f(x)\}) \leq \varepsilon.$$

*Demonstração.* Seja  $\lambda > 0$ , definamos

$$\mathbb{R}^\lambda := \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \frac{\|Df\|(\mathbb{B}(x, r))}{r^n} \leq \lambda \text{ para todo } r > 0 \right\}.$$

**Afirmção:**  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) \leq \frac{\alpha(n)5^n}{\lambda} \|Df\|(\mathbb{R}^n)$ .

**Prova da Afirmção:** Note que para cada  $x \in \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda$  existe  $r_x > 0$  tal que

$$\frac{\|Df\|(\mathbb{B}(x, r_x))}{r_x^n} > \lambda.$$

Do contrário, teríamos que  $x \in \mathbb{R}^\lambda$ . Logo,

$$\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda \subset \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} \mathbb{B}(x, r_x).$$

Além disso, por construção

$$r_x \leq \sqrt[n]{\frac{\|Df\|(\mathbb{B}(x, r_x))}{\lambda}} \leq \sqrt[n]{\frac{\|Df\|(\mathbb{R}^n)}{\lambda}}.$$

Então,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} r_x < +\infty.$$

Dessa forma, pelo *Teorema da Cobertura de Vitali* existe uma família de bolas  $\{\mathbb{B}(x_i, r_{x_i})\}_{i=1}^\infty$  disjuntas de  $\{\mathbb{B}(x, r_x)\}_{x \in \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda}$  tais que

$$\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda \subset \bigcup_{i=1}^\infty \mathbb{B}(x_i, 5r_{x_i}).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) &\leq 5^n \alpha(n) \sum_{i=1}^{\infty} r_{x_i}^n \\
 &\leq 5^n \alpha(n) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|Df\|(B(x_i, r_{x_i}))}{\lambda} \\
 &= \frac{5^n \alpha(n)}{\lambda} \|Df\| \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_{x_i}) \right) \\
 &= \frac{5^n \alpha(n)}{\lambda} \|Df\|(\mathbb{R}^n).
 \end{aligned}$$

O que prova a afirmação.

**Afirmação:** Existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C\lambda|x - y|$$

para  $x, y \in \mathbb{R}^\lambda$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.

**Prova da Afirmação:** Seja  $x \in \mathbb{R}^\lambda$  e  $r > 0$ . Pela *Desigualdade de Poincaré para funções*

BV temos que

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{B(x)} |f - (f)_{x,r}| \, dy \right) &\leq \left( \int_{B(x)} |f - (f)_{x,r}|^{1^*} \, dy \right)^{\frac{1}{1^*}} \\
 &\leq \frac{1}{(\alpha(n)r^n)^{\frac{n-1}{n}}} \|Df\|(B(x, r)) \\
 &= C \frac{\|Df\|(B(x, r))}{r^{n-1}} \\
 &\leq Cr\lambda,
 \end{aligned}$$

onde  $C := \frac{1}{(\alpha(n))^{\frac{n-1}{n}}}$ .

Em particular, para cada  $k$

$$\begin{aligned}
 \left| (f)_{x, \frac{r}{2^{k+1}}} - (f)_{x, \frac{r}{2^k}} \right| &= \left| \int_{B(x, \frac{r}{2^{k+1}})} f(y) \, dy - (f)_{x, \frac{r}{2^k}} \right| \\
 &\leq \int_{B(x, \frac{r}{2^{k+1}})} \left| f(y) - (f)_{x, \frac{r}{2^k}} \right| \, dy \\
 &\leq \frac{1}{\alpha(n) \frac{r^n}{(2^{k+1})^n}} \int_{B(x, \frac{r}{2^k})} \left| f(y) - (f)_{x, \frac{r}{2^k}} \right| \, dy \\
 &= 2^n \int_{B(x, \frac{r}{2^k})} \left| f(y) - (f)_{x, \frac{r}{2^k}} \right| \, dy \\
 &\leq C_1 \lambda \frac{r}{2^k},
 \end{aligned}$$

onde  $C_1 := 2^n C$

Agora observe que para quase todo  $x \in \mathbb{R}^\lambda$ , temos pelo *Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch*, que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (f)_{x,r} = f(x).$$

Com isso, seja  $x \in \mathbb{R}^\lambda$  de modo que o limite acima seja satisfeito, então,

$$\begin{aligned} C_1 r \lambda &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_1 r \lambda}{2^k} \geq \sum_{j=0}^{\infty} |(f)_{x, \frac{r}{2^{k+1}}} - (f)_{\frac{r}{2^k}}| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N |(f)_{x, \frac{r}{2^{k+1}}} - (f)_{\frac{r}{2^k}}| \\ &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^N ((f)_{x, \frac{r}{2^{k+1}}} - (f)_{\frac{r}{2^k}}) \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| (f)_{x, \frac{r}{2}} - (f)_{x,r} + (f)_{x, \frac{r}{2^2}} - (f)_{x, \frac{r}{2}} + \cdots + (f)_{x, \frac{r}{2^{N+1}}} - (f)_{x, \frac{r}{2^N}} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| (f)_{x, \frac{r}{2^{N+1}}} - (f)_{x,r} \right| \\ &= |f(x) - (f)_{x,r}|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|f(x) - (f)_{x,r}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |(f)_{x, \frac{r}{2^{k+1}}} - (f)_{x, \frac{r}{2^k}}| \leq C_1 \lambda r.$$

Agora sejam  $x, y \in \mathbb{R}^\lambda$  distintos. Então, seja  $r := |x - y|$  e  $z \in B(y, r) \cap B(x, r)$ . Logo,

$$|(f)_{x,r} - (f)_{y,r}| \leq |f(z) - (f)_{x,r}| + |f(z) - (f)_{y,r}|.$$

Passando a média em  $B(y, r) \cap B(x, r)$  com respeito a  $z$ , vem que

$$\begin{aligned} |(f)_{x,r} - (f)_{y,r}| &\leq \int_{B(y,r) \cap B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}| \, dz + \int_{B(y,r) \cap B(x,r)} |f(z) - (f)_{y,r}| \, dz \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(y, r) \cap B(x, r))} \left( \int_{B(y,r) \cap B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}| \, dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{B(y,r) \cap B(x,r)} |f(z) - (f)_{y,r}| \, dz \right) \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(y, r) \cap B(x, r))} \left( \int_{B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}| \, dz + \int_{B(y,r)} |f(z) - (f)_{y,r}| \, dz \right). \end{aligned}$$

Note que existe um cubo  $Q$  contido em  $B(y, r) \cap B(x, r)$  de diagonal  $r$ , em particular, seja



$t$  o comprimento de sua aresta. Logo,  $r = \sqrt{nt}$ , portanto,  $t = \frac{r}{\sqrt{n}}$ . Assim,

$$\frac{r^n}{(\sqrt{n})^n} \leq \mathcal{L}^n(B(x, r) \cap B(y, r)).$$

Então,

$$\begin{aligned} |(f)_{x,r} - (f)_{y,r}| &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(y, r) \cap B(x, r))} \left( \int_{B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}| \, dz + \int_{B(y,r)} |f(z) - (f)_{y,r}| \, dz \right) \\ &\leq \frac{(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}}}{r^n} \left( \int_{B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}| \, dz + \int_{B(y,r)} |f(z) - (f)_{y,r}| \, dz \right) \\ &= (\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \alpha(n) \left( \int_{B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}| \, dz + \int_{B(y,r)} |f(z) - (f)_{y,r}| \, dz \right) \\ &\leq 2(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \alpha(n) C \lambda r \\ &= C_2 \lambda r, \end{aligned}$$

onde  $C_2 := 2(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \alpha(n) C$ .

Dessa forma pelo que já estimamos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - (f)_{x,r}| + |(f)_{y,r} - (f)_{x,r}| + |f(y) - (f)_{y,r}| \\ &\leq 2C \lambda r + C_2 \lambda r \\ &= C_3 \lambda r, \end{aligned}$$

onde  $C_3 = 2C + C_2$ .

Logo, para todos  $x, y \in \mathbb{R}^\lambda$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula, temos que

$$|f(y) - f(x)| \leq C_3 \lambda |x - y|.$$

Portanto, existe  $A \subset \mathbb{R}^\lambda$  tal que  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^\lambda) = 0$  e  $f|_A$  é Lipschitz. Usando o *Teorema de extensão para funções Lipschitz*, temos que existe  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal que  $\bar{f}|_A = f|_A$ . Em particular,  $Z := \{x \in \mathbb{R}^n; \bar{f}(x) \neq f(x)\} \subset \mathbb{R}^n - A$ . Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(Z) &\leq \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - A) \\ &= \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^\lambda - A \cup \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) \\ &\leq \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^\lambda - A) + \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) \\ &\leq \frac{5^n \alpha(n)}{\lambda} \|Df\|(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Seja  $\varepsilon > 0$  e defina  $\lambda := \frac{5^n \alpha(n) \|Df\|(\mathbb{R}^n)}{\varepsilon}$ . Então, existe  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; \bar{f}(x) \neq f(x)\}) \leq \frac{5^n \alpha(n)}{\lambda} \|Df\|(\mathbb{R}^n) = \varepsilon.$$

■

**Corolário 5.2.** *Seja  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ . Então, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$  tal que*

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq \bar{f}(x) \text{ ou } Df(x) \neq D\bar{f}(x)\}) \leq \varepsilon.$$

*Demonstração.* Pelo teorema anterior segue que dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma função  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq f_1(x)\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Defina  $g := f - f_1$  então, note que  $\{f = f_1\} = \{g = 0\}$ . Então, para quase todo  $x \in \{g = 0\}$  tem se que

$$\text{ap}Dg(x) = 0.$$

Daí,

$$\text{ap}Df(x) = \text{ap}Df_1(x.)$$

para quase todo ponto.

Dessa forma,  $Df(x) = Df_1(x)$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.

Assim,

$$\mathcal{L}^n(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq f_1(x) \text{ ou } Df(x) \neq Df_1(x)\}}_{Z_1}) \leq \mathcal{L}^n\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq \bar{f}(x)\} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, para o mesmo  $\varepsilon$  existe  $f_2 \in C^1(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\mathcal{L}^n(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n; f_1(x) \neq f_2(x) \text{ ou } Df_1(x) \neq Df_2(x)\}}_{Z_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular,

$$\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq f_2(x) \text{ ou } Df(x) \neq Df_2(x)\} \subset Z_1 \cup Z_2,$$

logo,

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq f_2(x) \text{ ou } Df(x) \neq Df_2(x)\}) \leq \varepsilon.$$

Tome  $\bar{f} := f_2$ . ■

### 5.6.3 Aproximação de funções de Sobolev

**Teorema 5.13.** *Seja  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  para algum  $1 \leq p < \infty$ . Então para cada  $\varepsilon > 0$ , existe uma função Lipschitz  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq \bar{f}(x)\}) \leq \varepsilon$$

e

$$\|f - \bar{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

*Demonstração.* Seja  $g := |f| + |Df|$  e para  $\lambda > 0$  defina

$$\mathbb{R}^\lambda := \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \int_{B(x,r)} g \, dy \leq \lambda \text{ para todo } r > 0 \right\}.$$

**Afirmção:**  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^p}\right)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Prova da Afirmção:** Usando o mesmo argumento do Teorema anterior. Segue pelo *Teorema da Cobertura de Vitali* que existe  $\{B(x_i, r_{x_i})\}_{i=1}^\infty$  disjuntas tais que

$$\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, 5r_{x_i})$$

e para cada  $i$

$$\int_{B(x_i, r_{x_i})} g \, dy > \lambda.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lambda &< \int_{B(x_i, r_{x_i})} g \, dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x_i, r_{x_i}))} \left( \int_{B(x_i, r_{x_i}) \cap \{g > \frac{\lambda}{2}\}} g \, dy + \int_{B(x_i, r_{x_i}) \cap \{g \leq \frac{\lambda}{2}\}} g \, dy \right) \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x_i, r_{x_i}))} \int_{B(x_i, r_{x_i}) \cap \{g > \frac{\lambda}{2}\}} g \, dy + \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x_i, r_{x_i}))} \int_{B(x_i, r_{x_i}) \cap \{g \leq \frac{\lambda}{2}\}} \frac{\lambda}{2} \, dy \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x_i, r_{x_i}))} \int_{B(x_i, r_{x_i}) \cap \{g > \frac{\lambda}{2}\}} g \, dy + \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Logo para cada  $i = 1, 2, \dots$ ,

$$\begin{aligned} \lambda - \frac{\lambda}{2} &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x_i, r_{x_i}))} \int_{B(x_i, r_{x_i}) \cap \{g > \frac{\lambda}{2}\}} g \, dy \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{2} \alpha(n) r_{x_i}^n &\leq \int_{B(x_i, r_{x_i}) \cap \{g > \frac{\lambda}{2}\}} g \, dy \\ \Rightarrow \alpha(n) r_{x_i}^n &\leq \frac{2}{\lambda} \int_{B(x_i, r_{x_i}) \cap \{g > \frac{\lambda}{2}\}} g \, dy. \end{aligned}$$

Dessa estimativa, temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n) 5^n r_{x_i}^n \\
 &\leq 5^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda} \int_{B(x_i, r_{x_i}) \cap \{g > \frac{\lambda}{2}\}} g \, dy \\
 &\leq \frac{5^n 2}{\lambda} \int_{\{g > \frac{\lambda}{2}\}} g \, dy \\
 &\leq \frac{5^n 2}{\lambda} \left( \int_{\{g > \frac{\lambda}{2}\}} g^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \mathcal{L}^n \left( \left\{ g > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \right)^{1 - \frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^n \left( \left\{ g > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) &= \int_{\{g > \frac{\lambda}{2}\}} dy \\
 &= \frac{2^p}{\lambda^p} \int_{\{g > \frac{\lambda}{2}\}} \frac{\lambda^p}{2^p} dy \\
 &\leq \frac{2^p}{\lambda^p} \int_{\{g > \frac{\lambda}{2}\}} g^p dy.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\left( \mathcal{L}^n \left( \left\{ g > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \right)^{1 - \frac{1}{p}} \leq \frac{2^{p-1}}{\lambda^{p-1}} \left( \int_{\{g > \frac{\lambda}{2}\}} g^p dy \right)^{1 - \frac{1}{p}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) &\leq \frac{5^n 2}{\lambda} \left( \int_{\{g > \frac{\lambda}{2}\}} g^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \frac{2^{p-1}}{\lambda^{p-1}} \left( \int_{\{g > \frac{\lambda}{2}\}} g^p dy \right)^{1 - \frac{1}{p}} \\
 &= \frac{2^p 5^n}{\lambda^p} \int_{\{|f| + |Df| > \frac{\lambda}{2}\}} (|f| + |Df|)^p dy \\
 &\leq \frac{2^{2p-1} 5^n}{\lambda^p} \int_{\{|f| + |Df| > \frac{\lambda}{2}\}} |f|^p + |Df|^p dy \\
 &= o \left( \frac{1}{\lambda^p} \right).
 \end{aligned}$$

Provando então a afirmação.

**Afirmação:** Existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x)| < \lambda \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| \leq C\lambda|x - y|,$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^\lambda$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula.

**Prova da Afirmação:** Note que para quase todo  $x \in \mathbb{R}^\lambda$ , pelo *Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch*

$$\lim_{r \rightarrow 0} (f)_{x,r} = 0.$$

Então, dado  $x \in \mathbb{R}^\lambda$  de modo que o limite acima seja satisfeito e  $r > 0$  temos que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - (f)_{x,r}| + |(f)_{x,r}| \\ &\leq |f(x) - (f)_{x,r}| + (|f| + |Df|)_{x,r} \\ &\leq |f(x) - (f)_{x,r}| + \lambda. \end{aligned}$$

Fazendo  $r \rightarrow 0$  temos para quase todo ponto  $x \in \mathbb{R}^\lambda$

$$|f(x)| \leq \lambda.$$

Agora observe que pela *Desigualdade de Poincaré* e  $x \in \mathbb{R}^\lambda$ .

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}| \, dy &\leq \left( \int_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^{1^*} \, dy \right)^{\frac{1}{1^*}} \\ &\leq r C_2 \int_{B(x,r)} |Df| \, dy \\ &\leq r C_2 \int_{B(x,r)} |f| + |Df| \, dy \\ &\leq r C_2 \lambda. \end{aligned}$$

Daí, para  $x \in \mathbb{R}^\lambda$

$$\begin{aligned} |(f)_{x, \frac{r}{2^{k+1}}} - (f)_{x, \frac{r}{2^k}}| &\leq \int_{B(x, \frac{r}{2^{k+1}})} |f - (f)_{x, \frac{r}{2^k}}| \, dy \\ &\leq 2^n \int_{B(x, \frac{r}{2^k})} |f - (f)_{x, \frac{r}{2^k}}| \, dy \\ &\leq 2^n C_2 \frac{r}{2^k} \lambda \\ &= C_3 \frac{r}{2^k} \lambda, \end{aligned}$$

onde  $C_3 := 2^n C_2$ . Daí, segue de maneira similar ao teorema anterior que

$$|f(x) - (f)_{x,r}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |(f)_{x, \frac{r}{2^{j+1}}} - (f)_{x, \frac{r}{2^j}}| \leq C_3 \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r}{2^i} = C_3 \lambda r.$$

Seja então,  $x, y \in \mathbb{R}^\lambda$  com  $x \neq y$  e defina  $r := |x - y|$  tome  $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$ .

tenha em vista o cubo  $Q$  de aresta  $\frac{r}{\sqrt{n}}$  que está contido em  $B(x, r) \cap B(y, r)$ . Então,

$$\begin{aligned}
 |(f)_{x,r} - (f)_{y,r}| &\leq \int_{B(x,r) \cap B(y,r)} |f(z) - (f)_{x,r}| \, dz + \int_{B(x,r) \cap B(y,r)} |f(z) - (f)_{y,r}| \, dz \\
 &\leq \frac{(\sqrt{n})^n}{r^n} \left( \int_{B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}| \, dz + \int_{B(y,r)} |f(z) - (f)_{y,r}| \, dz \right) \\
 &= \alpha(n)(\sqrt{n})^n \left( \int_{B(x,r)} |f(z) - (f)_{x,r}| \, dz + \int_{B(y,r)} |f(z) - (f)_{y,r}| \, dz \right) \\
 &\leq 2C_2\alpha(n)(\sqrt{n})^n r\lambda \\
 &= C_4 r\lambda,
 \end{aligned}$$

onde  $C_4 := 2C_2\alpha(n)(\sqrt{n})^n$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - (f)_{x,r}| + |(f)_{y,r} - (f)_{x,r}| + |f(y) - (f)_{y,r}| \\
 &\leq 2C_3 r\lambda + C_4 r\lambda \\
 &= C_5 \lambda r,
 \end{aligned}$$

onde  $C_5 := 2C_3 + C_4$ . Daí, temos  $x, y \in \mathbb{R}^\lambda$ , a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula,

$$|f(x) - f(y)| \leq C_5 \lambda |x - y|.$$

O que prova a afirmação.

Logo, existe  $A \subset \mathbb{R}^\lambda$ , tal que  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^\lambda - A) = 0$  e  $f|_A$  é Lipschitz. Pelo *Teorema Extensão para funções Lipschitz* existe uma função  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal que  $\bar{f}|_A = f|_A$ .

Agora observe que  $|\bar{f}(x)| \leq \lambda$  para todo ponto de  $A$ . Mostraremos que  $|\bar{f}(x)| \leq \lambda$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Com efeito, evidentemente basta verificar nos pontos de  $\mathbb{R}^n - A$ . Suponha por absurdo que exista  $x_0 \in \mathbb{R}^n - A$  tal que  $|\bar{f}(x_0)| > \lambda$ . Então, pela continuidade de  $\bar{f}$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\delta = \delta(\lambda)$ ,  $B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n - A$  e para todo  $x \in B(x_0, \delta)$ ,  $|\bar{f}(x)| > \delta$ . Logo,

$$\alpha(n)\delta^n = \mathcal{L}^n(B(x_0, \delta)) \leq \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) \leq \frac{2^{2p-1}5^n}{\lambda^p} \int_{\{|f|+|Df|>\frac{\lambda}{2}\}} |f|^p + |Df|^p \, dy.$$

Daí,

$$\alpha(n) \leq \frac{2^{2p-1}5^n}{\delta\lambda^p} \int_{\{|f|+|Df|>\frac{\lambda}{2}\}} |f|^p + |Df|^p \, dy,$$

então,  $\alpha(n) = o\left(\frac{1}{\delta^n \lambda^p}\right)$ . Absurdo! Logo,  $|\bar{f}(x)| \leq \lambda$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Então,

$$\begin{cases} |\bar{f}| \leq \lambda & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ \text{Lip}(\bar{f}) \leq C_5 \lambda & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ \bar{f} = f & \text{em } \mathbb{R}^\lambda, \mathcal{L}^n\text{-q.t.p..} \end{cases}$$

**Afirmação:**  $\|f - \bar{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = o(1)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Prova da Afirmação:** Como  $f = \bar{f}$  em  $\mathbb{R}^\lambda$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f - \bar{f}|^p \, dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} |f - \bar{f}|^p \, dy \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} |f|^p \, dy + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} |\bar{f}|^p \, dy \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} |f|^p \, dy + 2^{p-1} \lambda^p \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) \\ &= o(1), \end{aligned}$$

quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Pela primeira afirmação desse teorema. Do mesmo modo, temos que  $Df = D\bar{f}$  em  $\mathbb{R}^\lambda$  a menos de um conjunto de medida  $\mathcal{L}^n$  nula. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |Df - D\bar{f}|^p \, dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} |Df - D\bar{f}|^p \, dy \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} |Df|^p \, dy + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} |D\bar{f}|^p \, dy \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda} |Df|^p \, dy + 2^{p-1} \lambda^p C_5^p \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) \\ &= o(1), \end{aligned}$$

quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Pela primeira afirmação desse teorema. O que prova a afirmação.

Agora observe que  $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq \bar{f}(x)\} \subset \mathbb{R}^n - A$ , então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq \bar{f}(x)\}) &\leq \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - A) \\ &\leq \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^\lambda - A) + \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) \\ &= \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^\lambda) \\ &= o\left(\frac{1}{\lambda^p}\right). \end{aligned}$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\lambda$  suficientemente grande tal que  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Lipschitz tal que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq \bar{f}(x)\}) \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \|f - \bar{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

■

**Corolário 5.3.** *Seja  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  para algum  $1 \leq p < \infty$ . Então, para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma função  $\bar{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$  tal que*

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq \bar{f}(x) \text{ ou } Df(x) \neq D\bar{f}(x)\}) \leq \varepsilon$$

e

$$\|f - \bar{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

*Demonstração.* Do teorema anterior, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma função  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq f_1(x)\}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|f - f_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

Vemos como no Corolário anterior que  $Df = Df_1$  em  $\{f = f_1\}$ . Então,

$$\mathcal{L}^n(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq f_1(x) \text{ ou } Df(x) \neq Df_1(x)\}}_{Z_1}) \leq \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq f_1(x)\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, do fato de  $f_1$  ser Lipschitz existe uma função  $f_2 \in C^1(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\mathcal{L}^n(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n; f_2(x) \neq f_1(x) \text{ ou } Df_2(x) \neq Df_1(x)\}}_{Z_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq f_2(x) \text{ ou } Df(x) \neq Df_2(x)\}) \leq \mathcal{L}^n(Z_1) + \mathcal{L}^n(Z_2) \leq \varepsilon.$$

Por fim, temos que mostrar que  $\|f - f_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$ . Note que  $\int_{\mathbb{R}^n} |f - f_1|^p dy \leq$



$\varepsilon^p$ . Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f - f_2|^p \, dy &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_1|^p \, dy + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1 - f_2|^p \, dy \\
&\leq 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1 - f_2|^p \, dy \\
&= 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{p-1} \left( \int_{\mathbb{R}^n - Z_2} |f_1 - f_2|^p \, dy + \int_{Z_2} |f_1 - f_2|^p \, dy \right) \\
&= 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{p-1} \left( \int_{Z_2} |f_1 - f_2|^p \, dy \right) \\
&\leq 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{2(p-1)} \left( \int_{Z_2} |f_1|^p + |f_2|^p \, dy \right) \\
&\leq 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{2(p-1)} \left( (\text{Lip}(f_1))^p \mathcal{L}^n(Z_2) + (\text{Lip}(f_1))^p \mathcal{L}^n(Z_2) \right) \\
&\leq 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{2(p-1)+1} \text{Lip}(f_1)^p \varepsilon.
\end{aligned}$$

e do mesmo modo temos que  $\int_{\mathbb{R}^n} |Df - Df_1| \, dx \leq \varepsilon^p$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |Df - Df_2|^p \, dy &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |Df - Df_1|^p \, dy + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |Df_1 - Df_2|^p \, dy \\
&\leq 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |Df_1 - Df_2|^p \, dy \\
&= 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{p-1} \left( \int_{\mathbb{R}^n - Z_2} |Df_1 - Df_2|^p \, dy + \int_{Z_2} |Df_1 - Df_2|^p \, dy \right) \\
&= 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{p-1} \left( \int_{Z_2} |Df_1 - Df_2|^p \, dy \right) \\
&\leq 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{2(p-1)} \left( \int_{Z_2} |Df_1|^p + |Df_2|^p \, dy \right) \\
&\leq 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{2(p-1)} \left( (\text{Lip}(f_1))^p \mathcal{L}^n(Z_2) + (C \text{Lip}(f_1))^p \mathcal{L}^n(Z_2) \right) \\
&\leq 2^{p-1} \varepsilon^p + 2^{2(p-1)} \text{Lip}(f_1)^p (1 + C^p) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dessas estimativas segue o desejado. Logo, tome  $\bar{f} := f_2$ . ■

## 6 CONCLUSÃO

Apesar de estimativas mais densas, no final vemos que vale a pena o esforço de lidar com funções menos regulares, uma vez que podemos obter resultados fortes e alguns deles permanecem válidos quando a função tem mais regularidade ou até mesmo melhor. Ou ainda, termos informações sobre a regularidade da função em questão de maneira mais elegante utilizando apenas dimensão do espaço euclidiano em questão, além do impacto de aplicações de tais resultados.

A título de exemplo, podemos elencar as funções de Sobolev, digamos  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , dependendo da relação de ordem (usual de  $\mathbb{R}$ ) entre  $p$  e  $n$ , sabemos aferir sobre a regularidade dessa função em termos de diferenciabilidade e sobre em que sentido o gradiente está próximo a esta função.

Outro exemplo interessante é o segundo *Teorema do Traço para funções BV*, onde conseguimos estabelecer os valores pontuais de fronteira de uma função BV através de uma média, similar ao *Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch*, esse mesmo teorema se propaga para as Funções de Sobolev. Além de ainda termos pelo primeiro *Teorema do Traço para funções BV*, a veracidade da integração por partes para essas funções.

Por fim, vemos como uma poderosa aplicação da teoria desenvolvida, a demonstração do *Teorema de Aleksandrov* para funções convexas, e os resultados que a precedem. Tal teorema garante a existência de uma matriz hessiana em quase todo ponto, para funções convexas. A priori a matriz “hessiana” tinha em suas entradas Medidas de Radon, que a posteriori, nos forneceram como candidata a matriz hessiana clássica, a matriz constituída pelas funções que são a densidade da parte absolutamente contínua da medida de variação do gradiente de uma função convexa pela medida de Lebesgue.

## REFEÊNCIAS

ADAMS, R.A.; FOURNIER, J.J.F. **Sobolev spaces**, v. 140. New york, NY: Academic press, 2003.

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New york, NY: Springer Science & Business Media, 2010.

EVANS, L.C.; GARIEPY, R.F. **Measure theory and fine properties of functions**. Boca Raton, FL: CRC press, 1992.

FEDERER, H. **Geometric measure theory**. New york, NY: Springer, 1996.

FOLLAND, Gerald B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. New york, NY: John Wiley & Sons, 1999.

LEONI, G. **A first course in Sobolev spaces**. Providence, RI: American Mathematical Soc., 2009.

STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. **Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.

WHEEDEN, R.L.; ZYGMUND, A. **Measure and integration**. 1.ed. Boca Raton, FL: CRC press, 1977.

ZIEMER, W.P. **Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation**, v. 120. New york, NY: Springer Science & Business Media, 1989.