



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO SILVIO BERNARDO DE FARIAS FILHO

SOBRE ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA
ESCALAR NULA

FORTALEZA

2018

FRANCISCO SILVIO BERNARDO DE FARIAS FILHO

SOBRE ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA ESCALAR
NULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F238s Farias Filho, Francisco Silvio Bernardo de.
Sobre estabilidade de hipersuperfícies com curvatura escalar nula / Francisco Silvio
Bernardo de Farias Filho. – 2018.
128 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares .

1. Curvatura escalar. 2. Curvatura de Gauss-Kronecker. 3. Curvatura média. 4.
Estabilidade . 5. Vizinhança tubular. I. Título.

CDD 510

FRANCISCO SILVIO BERNARDO DE FARIAS FILHO

SOBRE ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES
COM CURVATURA ESCALAR NULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 16 / 07 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Gervasio Colares (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Suplente)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco
Universidade Nacional Autónoma do México (UNAM)

Aos meus pais, Silvio e Rita, a todos os meus amigos e, por mais louco que isso seja, aos obstáculos que enfrentei para chegar até aqui. Sem tal combinação, não teria histórias para contar.

AGRADECIMENTOS

Clarence, em *A Felicidade não se compra* (*It's a Wonderful Life*, de Frank Capra - Liberty Films, 1946), escreveu um bilhete com a seguinte frase no final: "Lembre-se de que ninguém é um fracasso se tem amigos."

A lista de nomes a seguir me faz ver o quanto ele está certo.

Agradeço aos meus pais, Sílvio e Rita por todo o amor que me dão e por nunca terem desistido de incentivar meus estudos, dando-me forças nos momentos mais difíceis em que cogitei desistir. Tudo o que sou, devo a vocês.

Aos meus grandes amigos - que considero irmãos - Alexandre Lima e Eriane Brito pela força, principalmente nos momentos de fraqueza, proporcionando-me icônicos momentos de convívio ao longo desses oito anos em que nos conhecemos. Agradeço também a paciência e compreensão que tiveram nos momentos em que não pude estar junto deles por obrigações de estudo/trabalho.

Ao João Benigno por ter me proporcionado ótimas conversas sobre Literatura Brasileira e Internacional e por vários momentos de convívio em que sempre revela a sua sabedoria de vida.

Ao Elzon Cezar e Victor Gomes, amigos que comecei a ganhar no fim da graduação e fortaleci no decorrer desse curso de mestrado e pretendo levar para o resto da vida. Aprendi muito vendo as várias discussões (sadias) deles sobre questões de Matemática.

Ao (Erivan)Berto, grande amizade que se formou aos poucos pelo simples convívio diário, oriundo da hora do café na Alpha e Ômega e que rendeu sempre as conversas mais engraçadas que me ajudaram a aliviar as tensões da rotina. Agradeço também a enorme ajuda que ele me ofereceu para contornar minhas dificuldades no LaTeX.

Ao Israel pelas ótimas conversas que tivemos sobre filmes e séries, principalmente as animadas discussões (sempre sadias) sobre a qualidade dos filmes da DC Comics em comparação com os da Marvel.

Ao Diego Sousa e ao Elisafã pelos constantes auxílios que me deram ao longo de todo o curso e no desenrolar desta dissertação.

A todos os meus demais colegas do curso de Mestrado em Matemática da UFC, que não listarei os nomes aqui para não correr riscos de esquecimentos. Aprendi muito com vocês ao longo das disciplinas, nos corredores do departamento e na Alpha e Ômega, tomando nosso religioso café. Minha eterna gratidão.

Ao meu orientador, Professor Dr. Gervásio Colares que, ao longo desses seis anos de parceria, iniciada ainda na graduação, sempre foi paciente comigo, incentivou-me nos momentos mais difíceis e me fez desenvolver a disciplina de estudo independente que hoje possuo.

Ao Professor Gregório Silva Neto, autor do artigo que fundamenta esta dis-

sertação, agradeço pela atenção dada a mim na ocasião de sua presença no XI Workshop de Análise Geométrica realizado na UFC em abril deste ano.

Aos meus professores da graduação, com especial destaque para os professores Fernando Pimentel, Francisco Pimentel, Abdênago Barros e Alberto Maia, e aos professores do curso de mestrado, em especial Raimundo Leitão, Antônio Caminha, Ernani Ribeiro, Diego Moreira e Ederson Braga, todos listados aqui por conta das ótimas aulas, proporcionando-me, em certos casos, formas totalmente novas de se entender Matemática.

Aos meus colegas professores da Escola Gerardo Milton de Sá pelo ótimo convívio no intervalo das aulas e em reuniões, com especial destaque para Sérgio Bessa e Vanda Faustino: se não fosse por vocês, a árdua tarefa de conciliar trabalho e estudo teria sido bem mais difícil.

Aos integrantes do grupo de leitura Quartinha Literária (o qual infelizmente está parado no momento), que além de terem me ensinado muito sobre o universo dos livros, proporcionaram-me momentos de icônica descontração, ajudando a aliviar as tensões dos estudos e do trabalho.

A todos os meus colegas aprendizes de sapateado da Usina M, com destaque para o meu professor Henrique, pela paciência em ensinar essa complexa dança e também pela compreensão diante das minhas várias ausências nas aulas por conta da escrita desta dissertação. Ênfase especial também para Aspásia Mariana (minha primeira professora de sapateado) e Roseli Amorim (para mim, "Dory"), grandes amigas que a dança colocou em minha vida.

À Andréa Dantas na Secretaria e à equipe da Biblioteca do Curso de Matemática da UFC por toda a ajuda que me deram quando precisei ao longo do curso.

Ao Pedro Edson pelo excelente trabalho de confecção das figuras desta dissertação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

”Uma linha reta pode ser a distância mais curta entre dois pontos, mas não é de certo a mais interessante.”

(Doutor, personagem da Série Clássica Doctor Who, 1974).

RESUMO

Provaremos que não existem hipersuperfícies completas e estáveis de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula, crescimento de volume polinomial e tal que $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, para alguma constante $c > 0$, onde K denota a curvatura de Gauss-Kronecker e H denota a curvatura média da imersão $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, onde M^n é variedade riemanniana. Nosso segundo resultado é do tipo Bernstein, o qual garante que não existem gráficos inteiros de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula e tais que $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto. Por fim, será mostrado que, se existe uma hipersuperfície estável com curvatura escalar nula e $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, isto é, com crescimento de volume superior ao polinomial, então sua vizinhança tubular não é mergulhada por raios suaves.

Palavras-chave: Curvatura escalar. Curvatura de Gauss-Kronecker. Curvatura média. Estabilidade. Gráficos. Vizinhança tubular. Volume.

ABSTRACT

We will prove that there are no stable complete hypersurfaces of \mathbb{R}^4 with zero scalar curvature, polynomial volume growth and such that $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ everywhere, for some constant $c > 0$, where K denotes the Gauss-Kronecker curvature and H denotes the mean curvature of the immersion $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, where M^3 is a Riemannian manifold. Our second result is the Bernstein type one: there is no entire graph of \mathbb{R}^4 with zero scalar curvature such that $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ everywhere. At last, it will be proved that, if there exists a stable hypersurface with zero scalar curvature and $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ everywhere, that is, with volume growth greater than polynomial, then its tubular neighborhood is not embedded for suitable radius.

Keywords: Scalar curvature. Gauss-Kronecker curvature. Mean curvature. Stability. Graphs. Tubular neighbourhood. Volume.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de um campo de vetores em uma variedade.	19
Figura 2 – A aplicação exponencial.	22
Figura 3 – Representação de bolas geodésicas.	22
Figura 4 – Variação X_t	63
Figura 5 – Representação do domínio N_ω de $\frac{-K}{H^3}$ sobre \mathbb{S}^2 , considerando o quociente como uma função algébrica de seus autovalores. Este domínio se trata da intersecção do plano $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ com \mathbb{S}^2 . A hipótese suprime apenas três pequenas vizinhanças em torno dos eixos coordenados. . . .	117

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	17
2.1	Métricas Riemannianas	17
2.2	Conexões afins; conexão riemanniana; geodésicas	18
2.3	Operadores diferenciais sobre variedades riemannianas	23
2.3.1	Gradiente	23
2.3.2	Divergente	25
2.3.3	Laplaciano e hessiano	27
2.4	Curvaturas	28
2.5	Segunda forma fundamental	31
3	O OPERADOR L_r E O OPERADOR LINEARIZADO	36
3.1	A r -ésima transformação de Newton	36
3.2	O operador L_r e o operador linearizado: L_1	43
4	O PROBLEMA VARIACIONAL	63
5	RESULTADOS AUXILIARES	73
6	RESULTADOS PRINCIPAIS	93
6.1	Demonstração do TEOREMA A	93
6.2	Ambientação e demonstração do TEOREMA B	95
6.3	Exemplos	100
6.4	Ambientação e demonstração do TEOREMA C	103
7	CONCLUSÃO	111
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICE A - CÁLCULO DO INTERVALO DA CONDIÇÃO DE CURVATURA	116
	APÊNDICE B - SOBRE HIPERSUPERFÍCIES ESTÁVEIS NA ESFERA DE DIMENSÃO 4	120

1 INTRODUÇÃO

Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os autovalores associados à segunda forma fundamental, então a curvatura escalar R , a (não-normalizada) curvatura média H e a curvatura de Gauss-Kronecker K são dadas, respectivamente, por:

$$R = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad H = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad \text{e} \quad K = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad (1)$$

Hartman e Nirenberg mostraram em 1959 que as únicas superfícies com curvatura gaussiana nula no espaço euclidiano de dimensão três são os planos e os cilindros.

Esse fato foi generalizado por Cheng e Yau, em 1977, onde foi mostrado que as únicas hipersuperfícies completas, não-compactas, com curvatura escalar constante e curvatura seccional não-negativa no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} são os cilindros generalizados $\mathbb{S}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$.

Alencar, do Carmo e Elbert apresentaram em 2003 a seguinte

QUESTÃO: Existe alguma hipersuperfície estável e completa M^3 em \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula e curvatura de Gauss-Kronecker não-nula em todo ponto?

O objetivo principal desta dissertação é apresentar três resultados que respondem parcialmente a esse questionamento. As suas respectivas demonstrações serão fundamentadas no que foi feito por NETO (2014). Antes de apresentar esses resultados, faremos aqui um resumo do que será exposto nos próximos cinco capítulos e nos dois apêndices desta dissertação.

Capítulo 2 - PRELIMINARES: Nesse capítulo, apresentaremos alguns resultados conhecidos de Geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto e uma série de lemas e proposições que nos serão úteis nas demonstrações dos teoremas principais. Os resultados mais conhecidos terão suas provas omitidas, pois podem ser encontradas facilmente na literatura, como por exemplo em CARMO (2011. (Projeto Euclides), CHAVEL (2006. (Cambridge Tracts in Mathematics), PETERSEN (1988. (Graduate Texts in Mathematics) e LEE (2003. (Graduate Texts in Mathematics).

Capítulo 3 - O OPERADOR L_r E O OPERADOR LINEARIZADO: O objetivo desse capítulo é apresentar um apanhado sobre os polinômios simétricos elementares, a r -ésima transformação de Newton e o operador L_r , o qual, definido em termos da transformação de Newton, aparece naturalmente no estudo de estabilidade de hipersuperfícies com curvatura escalar nula. Determinados resultados gerais deste capítulo serão restringidos no decorrer da dissertação ao caso particular $r = 1$, o qual é chamado operador

linearizado: L_1 , e se trata de uma ferramenta de suma importância para o desenvolvimento dos resultados principais deste trabalho. Serão desenvolvidas duas abordagens do operador linearizado, com resultados oriundos de cada uma delas. A primeira, apresentada por Cheng e Yau em 1977, escreve o operador L_1 como:

$$L_1(f) = \sum_{i,j=1}^n (nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}, \quad (2)$$

ou seja, em função da curvatura média $H = \frac{S_1}{n}$, dos coeficientes h_{ij} da segunda forma fundamental e dos coeficientes f_{ij} da matriz hessiana de f , que é uma função de classe C^2 , com $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Como nesta dissertação consideraremos a curvatura média na forma não-normalizada, mostraremos que (2) se tornará:

$$L_1(f) = \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}, \quad (3)$$

pois nesse caso, teremos $H = S_1$, onde S_1 denota um polinômio simétrico.

A segunda abordagem, apresentada por ROSENBERG (1993), expressa o operador L_r da seguinte forma geral:

$$L_r(f) = \operatorname{div}(P_r \operatorname{grad}(f)). \quad (4)$$

onde div é o divergente de um campo vetorial, P_r denota a r -ésima transformação de Newton e $\operatorname{grad}(f)$ é o gradiente da função f .

Será visto em detalhes nesse capítulo que (3) é um caso particular de (4) e que o operador L_r se trata, na verdade, de uma generalização da ideia de Laplaciano que já conhecemos.

CAPÍTULO 4 - O PROBLEMA VARIACIONAL: Esse capítulo estará fundamentado no que foi feito por Barbosa e Colares em 1997 e seu objetivo é apresentar as fórmulas da primeira e segunda variação do volume e, em posse delas, introduzir o conceito de estabilidade para imersões e verificar a seguinte desigualdade:

$$-3 \int_M K f^2 dM \leq \int_M \langle P_1 \nabla f, \nabla f \rangle dM. \quad (5)$$

A importância de (5) residirá no fato de que ela será uma condição necessária e suficiente para uma imersão ser estável, de acordo com a definição de estabilidade que será adotada neste trabalho. Por conta disso, (5) é aqui chamada de Desigualdade de Estabilidade.

Capítulo 5 - RESULTADOS AUXILIARES: Os principais resultados desse capítulo são os seguintes:

Proposição 5.2: Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica com curvatura escalar nula, estável e tal que $K \neq 0$ em todo ponto. Se existe uma constante $c > 0$ tal que $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então para toda função suave ψ com suporte compacto em M , para todo $\delta > 0$ e para todo $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$, existem constantes $\Lambda_1(q), \Lambda_2(q) > 0$ tais que:

$$\int_M H^{5+2q} \left(\frac{-K}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) \psi^{5+2q} dM \leq \Lambda_2 \delta^{\frac{-(5+2q)}{2}} \int_M |\nabla \psi|^{5+2q} dM.$$

Corolário 5.1: (Desigualdade tipo Sobolev): Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica estável com curvatura escalar nula e tal que $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto. Então, para toda função ψ com suporte compacto em M , para todo $\delta > 0$ e $p \in \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}} \right)$, existe $C(p) > 0$ tal que

$$\int_M |A|^{2p} \psi^{2p} dM \leq C(p) \int_M |\nabla \psi|^{2p} dM.$$

Esses resultados terão muita utilidade na demonstração dos resultados-alvo desta dissertação. Os demais resultados desse capítulo tem por finalidade apresentar fatos que serão úteis na demonstração da Proposição 5.2.

Capítulo 6 - RESULTADOS PRINCIPAIS: Em posse do que foi apresentado nos capítulos anteriores, serão enfim demonstrados os resultados-alvo desta dissertação, que são os seguintes:

TEOREMA A: Não existem hipersuperfícies M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula, completas, estáveis, com crescimento de volume polinomial e tais que:

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto para alguma constante $c > 0$.

Uma consequência do **TEOREMA A** é o seguinte resultado tipo Bernstein:

TEOREMA B: Não existem gráficos inteiros M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula e tais que:

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto para alguma constante $c > 0$.

Adaptando-se o trabalho de Nelli e Soret em 2007, que envolveu o cenário da curvatura média constante, mostraremos que, se M^3 é uma hipersuperfície completa e estável de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula e tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então o tubo ao redor de M não é mergulhado para raios suaves. Precisamente, definiremos aqui o tubo de raio h ao redor de M como o conjunto:

$$T(M, h) = \{x \in \mathbb{R}^4; \exists p \in M, x = p + t\eta, t \leq h(p)\},$$

onde η é o campo de vetores normais à segunda forma fundamental de x e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva em todo ponto.

TEOREMA C: Seja M^3 uma hipersuperfície completa e estável de \mathbb{R}^4 , com curvatura escalar nula. Se a segunda forma fundamental da imersão é limitada e existe uma constante $c > 0$ tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então, para quaisquer constantes $0 < b_1 \leq 1$, $b_2 > 0$ e para qualquer função suave $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$h(p) \geq \inf \left\{ \frac{b_1}{|A(p)|}, b_2 \rho(p)^\delta \right\}, \delta > 0, \quad (6)$$

o tubo $T(m, h)$ não é mergulhado. Aqui, $\rho(p)$ denota a distância intrínseca em M de p a um ponto fixo $p_0 \in M$.

Antes das respectivas demonstrações desses teoremas, ainda será apresentada uma ambientação, isto é, noções e hipóteses necessárias para a compreensão desses resultados que não serão expostas nos capítulos anteriores por serem de caráter mais específico e para garantir maior comodidade de leitura.

Além disso, será dedicada uma seção para a apresentação de dois exemplos relacionados à classe de hipersuperfícies que está sendo abordada neste trabalho. O primeiro tem o objetivo de comprovar que a classe de hipersuperfícies tratada aqui é não-vazia e ainda pode ser visto em estudos sobre a Teoria da Relatividade. O segundo apresenta uma conhecida classe de hipersuperfícies estáveis com curvatura escalar nula. Tal classe nos mostra algumas condições em que a nulidade da curvatura de Gauss-Kronecker se faz necessária.

APÊNDICE A: Um dos resultados que serão apresentados sobre os polinômios simétricos no Capítulo 3 terá como consequência a seguinte desigualdade:

$$HK \leq \frac{1}{2}R^2.$$

Em posse dela e considerando K e H^3 como funções dos autovalores da segunda forma fundamental, conforme apresentado em (1), teremos como objetivo neste apêndice

verificar que:

$$0 < \frac{(-K)}{H^3} \leq \frac{4}{27}.$$

APÊNDICE B: Fundamentando-se no trabalho de Zhu e Fang em 2016, o objetivo deste apêndice é apresentar resultados semelhantes aos que serão demonstrados no Capítulo 6, só que, dessa vez, ambientados em outro espaço-forma de dimensão 4: a esfera \mathbb{S}^4 . Assim, o caminho natural desta linha de pesquisa consiste em desenvolver resultados semelhantes que tenham como espaço-forma ambiente o espaço hiperbólico de dimensão 4: \mathbb{H}^4 .

Aqui, será considerada a curvatura média H em sua forma normalizada. Assim, serão feitas adaptações específicas em certos resultados a serem apresentados nos Capítulos 3 e 4, com principal destaque para a Desigualdade de Estabilidade. Além disso, será apresentado de forma breve o conceito de curvatura r -média: H_r .

Serão demonstrados os seguintes teoremas:

TEOREMA B.1: Não existe hipersuperfície $M^3 \rightarrow \mathbb{S}^4$ completa, estável, não-compacta, com $H_2 = 0$, crescimento de volume polinomial e tal que a curvatura média H satisfaz:

$$|H| \leq \delta_1 \text{ e } \left| \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right| \leq \delta_2,$$

onde δ_1 e δ_2 são constantes positivas quaisquer.

TEOREMA B.2: Não existe hipersuperfície M^3 em \mathbb{S}^4 estável, completa, não-compacta, com $H_2 = 0$, crescimento de volume polinomial e tal que:

$$\frac{-K}{H^3} \geq \delta_1 \text{ e } \left| \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right| \leq \delta_2,$$

onde δ_1 e δ_2 são constantes positivas quaisquer, onde H e K são as curvaturas média e de Gauss-Kronecker, respectivamente.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados conhecidos de Geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto e uma série de lemas e proposições que nos serão úteis nas demonstrações dos teoremas principais. Os resultados mais conhecidos terão suas provas omitidas, pois podem ser encontradas facilmente na literatura, como, por exemplo, em CARMO (2011. (Projeto Euclides), CHAVEL (2006. (Cambridge Tracts in Mathematics), PETERSEN (1988. (Graduate Texts in Mathematics) e LEE (2003. (Graduate Texts in Mathematics).

2.1 Métricas Riemannianas

Neste trabalho, o conceito de variedades (que assumiremos ser do conhecimento do leitor, mas que, se necessário, pode ser encontrado com todos os seus detalhes em LEE (2003. (Graduate Texts in Mathematics)) será visto por meio da variedade como objeto munido de uma noção de distância. Tal distância é dada por um elemento chamado métrica, que nada mais é do que um produto interno introduzido em cada espaço tangente.

Definição 2.1 *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma dada variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Sempre que não houver possibilidade de confusão, deixaremos de escrever o índice p em $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ para não carregar desnecessariamente a notação, mas sempre lembrando que a métrica está sendo considerada no espaço tangente do ponto dado.

Definição 2.2 *As funções $g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ são chamadas componentes da métrica riemanniana no sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$.*

Definição 2.3 *Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana.*

O principal objeto de estudo desta dissertação chama-se hipersuperfície, mas antes de definí-lo, precisamos da seguinte

Definição 2.4 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado de isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M, u, v \in T_p M$.

Exemplo 2.1 (Variedades imersas): Uma aplicação $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ é uma imersão, se f é diferenciável e $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva para todo p em M . Chamamos k de codimensão da imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, u, v \in T_p M$. Como df_p é injetiva, \langle, \rangle_p é positivo definido. As demais condições da Definição 2.4 são facilmente verificadas. A métrica de M é chamada, então, de métrica induzida por f , e f é uma imersão isométrica.

Definição 2.5 *Quando a codimensão da imersão é 1, i.e., $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}; f(M) \subset \overline{M}$ é chamada de hipersuperfície.*

A próxima definição nos apresentará um tipo especial de imersão.

Definição 2.6 *Sejam M e N variedades diferenciáveis com ou sem bordo. Um mergulho suave de M em N é uma imersão suave $f : M \rightarrow N$ que é um mergulho topológico, isto é, um homeomorfismo sobre sua imagem $f(M) \subseteq N$ na topologia do subespaço.*

2.2 Conexões afins; conexão riemanniana; geodésicas

Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 2.7 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

a qual indicaremos por $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
 - ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
 - iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
- onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

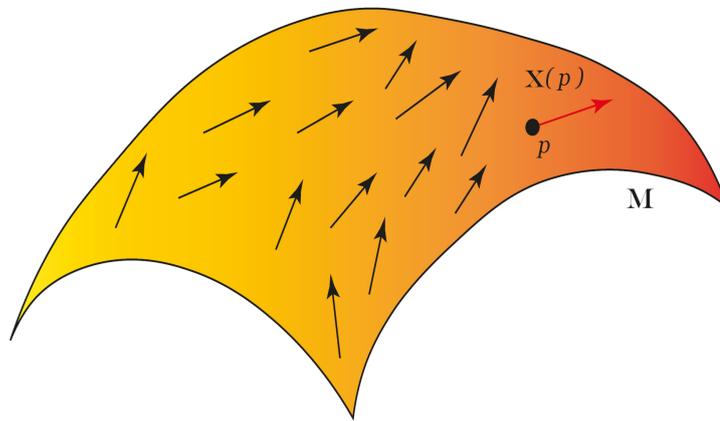
Definição 2.8 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma cor-*

respondência que, a cada ponto $p \in M$, associa a um vetor $X(p) \in T_pM$, onde T_pM é o plano tangente a M no ponto p .

Definição 2.9 Um campo de vetores é dito diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável, onde TM é o fibrado tangente de M , o qual é a união disjunta dos espaços tangentes a M em todos os pontos de M , isto é:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Figura 1 – Representação de um campo de vetores em uma variedade.



Definição 2.10 Um campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um vetor $V(t) \in T_{c(t)}M$.

Definição 2.11 Dizemos que um campo de vetores V ao longo de uma curva é diferenciável se, para toda função f em M , a função $t \mapsto V(t)f$ é uma curva diferenciável em I .

A próxima proposição mostra que a escolha de uma conexão afim ∇ em M dá origem, de forma bem definida, a uma derivada de campos de vetores.

Proposição 2.1 Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado covariante de V ao longo de c , tal que:

- $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .
- Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$$

Definição 2.12 *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado de paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Proposição 2.2 *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e., $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$, ($V(t)$ é chamado de o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c).*

Definição 2.13 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.14 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $[X, Y] = XY - YX$.

Teorema 2.1 *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- a) ∇ é simétrica;
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

A conexão dada pelo teorema acima é chamada de *conexão de Levi-Civita* ou conexão Riemanniana de M . A partir daqui, ∇ indicará a conexão de Levi-Civita e M será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

Definição 2.15 *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 . Se γ é geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. É comum, por abuso de linguagem, chamarmos de geodésica à imagem $\gamma(I)$ de uma geodésica γ .*

Definição 2.16 *Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado de minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$, onde $l(\cdot)$ denota o comprimento de uma curva e c é qualquer curva dife-*

reenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Definição 2.17 Um conjunto $S \subset M$ é chamado de fortemente convexo se para quaisquer dois pontos p, q do fecho de S existe uma única geodésica minimizante γ ligando p a q , cujo interior está contido em S .

É possível provar que todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança fortemente convexa.

O próximo resultado permite que o conceito de aplicação exponencial seja introduzido.

Proposição 2.3 Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável,

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M,$$

onde $\mathcal{U} = \{(p, w) \in TM; p \in V, w \in T_pM, |w| < \epsilon\}$, tal que $t \rightarrow \gamma(t, p, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade w , para cada $p \in V$ e cada $w \in T_pM$, $|w| < \epsilon$.

Sejam $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela proposição anterior. Então a aplicação $exp : \mathcal{U} \rightarrow M$, dada por

$$exp(p, v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right), (p, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada de aplicação exponencial em \mathcal{U} .

A aplicação exponencial é diferenciável e usaremos a restrição da exponencial a um aberto do espaço tangente T_pM , isto é, definiremos

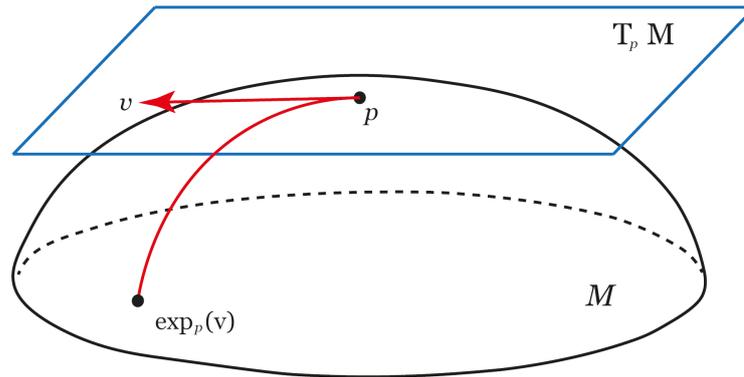
$$exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$$

por $exp_p(v) = exp(p, v)$. Indicaremos por $B_\epsilon(0)$ a bola aberta de centro na origem 0 de T_pM e de raio ϵ . Além da exp_p ser diferenciável, temos que $exp_p(0) = p$. Geometricamente, $exp_p(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de p , sobre a geodésica que passa com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Proposição 2.4 Dado $p \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$ é um difeomorfismo da bola $B_\epsilon(0)$ de centro na origem de T_pM e raio ϵ sobre um aberto de M .

Exemplo 2.2: Se $M = \mathbb{R}^n$, a derivação covariante coincide com a usual. Assim, as

Figura 2 – A aplicação exponencial.



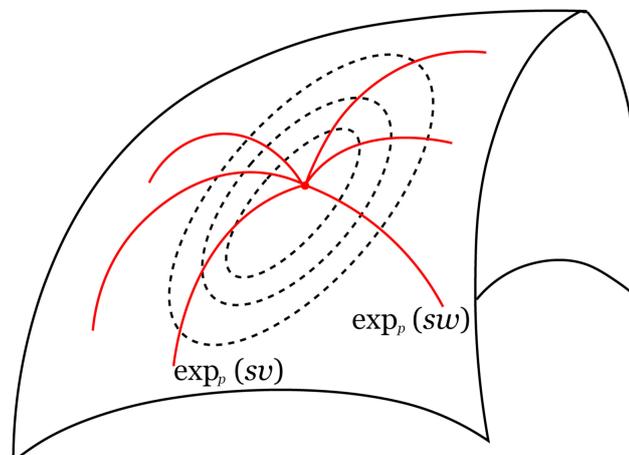
geodésicas são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco e a exponencial é a identidade.

Lema 2.1 (de Gauss) *Sejam $p \in M$ e $v \in T_p M$ tal que $\exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_p M \approx T_v(T_p M)$. Então*

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Seja $V \subset T_p M$ uma vizinhança da origem tal que $\exp_p|_V$ é um difeomorfismo. O conjunto $U = \exp_p(V)$ é denominado de vizinhança normal (ou geodésica) de p . Se $B_\epsilon(0)$ é a bola de centro na origem de $T_p M$ e raio ϵ , então $B_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(0))$ é denominado bola normal (ou geodésica) de centro p e raio ϵ . Decorre do lema de Gauss que a fronteira de uma bola normal $S_\epsilon(p) = \exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ é uma hipersuperfície em M ortogonal às geodésicas que partem de p , a qual denominamos esfera geodésica de centro p e raio ϵ .

Figura 3 – Representação de bolas geodésicas.



Apresentaremos agora a definição de referencial geodésico, que será útil no decorrer deste trabalho.

Seja $p \in M$ e U uma vizinhança fortemente convexa de p . Fixada uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ para T_pM , existem n campos de vetores diferenciáveis E_1, \dots, E_n tais que

- a) $E_i(p) = e_i(p)$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
- b) $\{E_1(q), \dots, E_n(q)\}$ é uma base ortonormal para T_qM , para todo $q \in U$;
- c) $\nabla_{E_i} E_j = 0$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Para construir tais campos, dado $q \in U$, considere uma geodésica minimizante γ ligando p a q . Seja $E_i(q)$ o transporte paralelo de e_i ao longo de γ . Pode-se mostrar que os campos E_i construídos dessa forma satisfazem as condições a), b) e c). Então $\{E_1(q), \dots, E_n(q)\}$ é chamado de referencial geodésico.

Quando não houver risco de equívocos, usaremos letras minúsculas na representação de um referencial geodésico, isto é, escreveremos o referencial geodésico da seguinte forma: $\{e_1, \dots, e_n\}$, ao invés de $\{E_1, \dots, E_n\}$ (em concordância com o item (a) acima).

A definição a seguir será necessária no Capítulo 6.

Definição 2.18 *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se, para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, \exp_p , está definida para todo $v \in T_pM$, i.e., se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Uma das equivalências que o Teorema de Hopf-Rinow nos garante é a seguinte:

Proposição 2.5 *M é (geodesicamente) completa se, e somente se, existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ e $\bigcup K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \rightarrow \infty$, onde d representa a distância entre os pontos p e q_n , que aqui deve ser entendida como o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p e q_n .*

2.3 Operadores diferenciais sobre variedades riemannianas

2.3.1 Gradiente

Definição 2.19 *Sejam M uma variedade Riemanniana, $f \in \mathcal{D}(M)$ e $p \in M$. Definimos o gradiente de f como o campo vetorial $\text{grad}(f)$ em M tal que:*

$$\langle \text{grad}(f), X \rangle := X(f) = df(X), \text{ para todo } X \in \mathcal{X}(M).$$

Proposição 2.6 *O gradiente satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\text{grad}(f + g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.
2. $\text{grad}(fg) = f\text{grad}(g) + g(\text{grad}(f))$.

Demonstração: 1) Temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{grad}(f + g), X \rangle &= X(f + g) \\
 &= fX(g) + gX(f) \\
 &= f\langle \text{grad}(g), X \rangle + g\langle \text{grad}(f), X \rangle \\
 &= \langle f\text{grad}(g), X \rangle + \langle g(\text{grad}(f)), X \rangle \\
 &= \langle f\text{grad}(g) + g(\text{grad}(f)), X \rangle.
 \end{aligned}$$

Segue-se então o resultado.

2) Com efeito:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{grad}(fg), X \rangle &= X(fg) \\
 &= fX(g) + gX(f) \\
 &= f\langle \text{grad}(g), X \rangle + g\langle \text{grad}(f), X \rangle \\
 &= \langle f\text{grad}(g) + g(\text{grad}(f)), X \rangle,
 \end{aligned}$$

garantindo-nos o resultado.

Proposição 2.7 *Seja $\{E_i\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, um referencial geodésico em $p \in M$. Então vale*

$$\text{grad}f(p) = \sum_i (E_i(f)) E_i(p).$$

Demonstração: Como $\{E_i\}$ é, por definição, uma base ortonormal, temos:

$$\text{grad}f(p) = \sum_i a_i(p) E_i(p) \Rightarrow a_i(p) = \langle \text{grad}f(p), E_i(p) \rangle.$$

Mas por definição,

$$\langle \text{grad}f(p), E_i(p) \rangle = E_i(p)f.$$

Assim,

$$\text{grad}f(p) = \sum_i (E_i(f)) E_i(p),$$

o que prova a igualdade.

2.3.2 Divergente

Definição 2.20 *Sejam M uma variedade Riemanniana, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$. Definimos a divergência de X como a função $divX : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $divX(p) = tr(Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p))$, onde tr denota o traço da aplicação linear $Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$ e $Y \in T_p M$.*

Proposição 2.8 *Para quaisquer $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer $f \in \mathcal{D}(M)$, o divergente satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $div(X + Z) = div(X) + div(Z)$.
2. $div(fX) = fdiv(X) + \langle grad(f), X \rangle$.

Demonstração: 1) Pela definição acima, segue-se que:

$$\begin{aligned}
 div(X + Z) &= tr(Y \mapsto \nabla_Y(X + Z)) \\
 &= tr(Y \mapsto \nabla_Y X + \nabla_Y Z) \\
 &= tr(Y \mapsto \nabla_Y X) + tr(Y \mapsto \nabla_Y Z) \\
 &= div(X) + div(Z),
 \end{aligned}$$

seguinte-se o resultado.

2) Partindo-se mais uma vez da definição, segue-se que:

$$\begin{aligned}
 div(fX) &= tr(Y \mapsto \nabla_Y(fX)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle e_i, \nabla_{e_i}(fX) \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle e_i, f\nabla_{e_i}X + e_i(f)X \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle e_i, f\nabla_{e_i}X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i(f)X \rangle \\
 &= f \sum_{i=1}^n \langle e_i, \nabla_{e_i}X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i(f)X \rangle \\
 &= f[tr(Y \mapsto \nabla_Y(X))] + \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i(f)X \rangle \\
 &= fdiv(X) + \langle grad(f), X \rangle,
 \end{aligned}$$

o que nos fornece a igualdade desejada.

Agora abriremos nesta seção um breve parêntese para apresentar certas noções que serão úteis para embasar o Teorema 2.3 a seguir e também no decorrer desta dissertação, com especial destaque para os resultados principais do Capítulo 6.

Definição 2.21 *Considere a função real $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Chamamos de suporte de f , denotado por $\text{supp}(f)$, o fecho do conjunto dos pontos de M onde f não se anula, isto é:*

$$\text{supp}(f) = \overline{\{p \in M; f(p) \neq 0\}}.$$

Definição 2.22 *Dizemos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ possui suporte compacto quando $\text{supp}(f)$ é um conjunto compacto.*

Exemplo 2.3: Considere $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\psi(\rho(p)) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in B_r \\ \frac{2r - \rho(p)}{r}, & \text{se } p \in B_{2r} \setminus B_r \\ 0, & \text{se } p \in M \setminus B_{2r} \end{cases},$$

onde $\rho(p) = \rho(p, p_0)$ é a função distância de M e B_r e B_{2r} são bolas geodésicas centradas na origem de raio r e $2r$ respectivamente.

Perceba que $\text{supp}(\psi) = B_{2r}$. Assim ψ possui suporte compacto. Esta função será bastante útil no Capítulo 6.

Definição 2.23 *Sendo X um campo vetorial em M , o suporte de X é definido como o fecho do conjunto $\{p \in M; X_p \neq 0\}$ e dizemos que o campo X possui suporte compacto quando o fecho do conjunto suporte é compacto.*

A noção de suporte compacto nos permite apresentar o conceito de partição da unidade, o qual será útil no Capítulo 4.

Considere M um espaço topológico e seja $\chi = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de M indexada por um conjunto A .

Definição 2.24 *Uma partição da unidade subordinada a χ é uma família indexada de funções contínuas $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$, com $\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$, para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in M$;
2. $\text{supp}(\psi_\alpha) \subseteq X_\alpha$, para cada $\alpha \in A$;
3. A família de suportes $(\text{supp}\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ é localmente finita, significando que todo ponto possui uma vizinhança que intersecta $\text{supp}\psi_\alpha$ em uma quantidade finita de valores de α ;

$$4. \sum_{\alpha \in A} \psi_{\alpha}(x) = 1, \text{ para todo } x \in M.$$

Teorema 2.2 (*Existência de partições da unidade*): Seja M uma variedade suave com ou sem bordo, e $\chi = (X_{\alpha})_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta indexada qualquer de M . Então existirá uma partição da unidade suave (a qual consiste em cada ψ_{α} ser suave) subordinada a χ .

Teorema 2.3 (*Teorema da Divergência*) Seja (M, g) uma variedade riemanniana orientável com bordo, munida com a métrica g . Para qualquer campo vetorial diferenciável com suporte compacto X em M , temos:

$$\int_M (\operatorname{div}(X)) dV_{\tilde{g}} = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle_g dV_{\tilde{g}},$$

onde N é o campo normal unitário exterior a ∂M e \tilde{g} é métrica riemanniana induzida em ∂M .

Corolário 2.1 Sejam $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta sem bordo, orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então

$$\int_M \operatorname{div} X dA = 0.$$

2.3.3 Laplaciano e hessiano

Estes dois operadores serão apresentados na mesma seção porque a abordagem que deles faremos agora será bastante breve, pois eles serão pouco mencionados no restante do texto desta dissertação.

Definição 2.25 Seja M uma variedade Riemanniana. Defina um operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$, chamado de o Laplaciano de M , por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)), \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Definição 2.26 Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow \mathcal{D}(M).$$

Definição 2.27 Seja M uma variedade riemanniana munida da conexão ∇ e $f \in \mathcal{D}(M)$. Definimos o Hessiano de f em $p \in M$, denotado por $\operatorname{Hess}(f)_p$ como o tensor de ordem

2, dado por:

$$(Hess(f))(X, Y) = XY(f) - \nabla_X Y(f),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 2.9 Dada $f \in \mathcal{D}(M)$, o Hessiano é um tensor simétrico, isto é, $Hessf(X, Y) = Hessf(Y, X)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} Hessf(X, Y) - Hessf(Y, X) &= (XY - YX)(f) + (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(f) \\ &= [X, Y](f) + [Y, X](f) \\ &= [X, Y](f) - [X, Y](f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposição 2.10 Seja M uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Então

$$Hessf(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle.$$

Demonstração: Basta fazer a simples manipulação:

$$\begin{aligned} Hessf(X, Y) &= XY(f) - \nabla_X Y(f) \\ &= X\langle \text{grad}(f), Y \rangle - \langle \text{grad}(f), \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle + \langle \text{grad}(f), \nabla_X Y \rangle - \langle \text{grad}(f), \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle. \end{aligned}$$

Observação 2.1: Podemos ver o Hessiano como o operador

$$\begin{aligned} Hessf : T_p M &\rightarrow T_p M \\ X &\mapsto Hessf(X) = \nabla_X \text{grad}(f). \end{aligned}$$

2.4 Curvaturas

Definição 2.28 A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência

que associa a cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, \dots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do \mathbb{R}^n , obteremos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n),$$

de onde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n),$$

o que implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0,$$

como afirmado.

Proposição 2.11 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) *Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dado um espaço vetorial V , indicaremos por $\|x \wedge y\|$ a expressão

$$\sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinada pelo par de vetores $x, y \in V$.

Proposição 2.12 *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\|x \wedge y\|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 2.29 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado de curvatura seccional de σ em p .*

Lema 2.2 *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina um aplicação trilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M .

Proposição 2.13 *Seja M^n uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante c . Então:*

$$R(X, Y)Z = c[\langle Z, X \rangle Y - \langle Z, Y \rangle X],$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Definição 2.30 *Dada uma variedade Riemanniana M e $p \in M$, consideramos uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_n\}$ de $T_p M$. Então, para quaisquer $X, Y \in T_p M$ definimos o tensor de Ricci, denotado por Ric , como o tensor do tipo $(0, 2)$ dado por*

$$Ric(X, Y) = \sum_i \langle R(X, z_i)Y, z_i \rangle .$$

Além disso, se $\|X\| = 1$, então $Ric(X, X)$ é chamado de curvatura de Ricci na direção de X .

É válido observar que esta definição não depende da escolha da base ortonormal escolhida para $T_p M$.

Definição 2.31 *Dada uma variedade Riemanniana M e $p \in M$, consideramos uma base*

ortonormal $\{z_1, \dots, z_n\}$ de $T_p M$. Definimos a curvatura escalar S em p por

$$S(p) = \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle .$$

No restante do texto, conforme já havia sido mencionado na Introdução desta dissertação, denotaremos a curvatura escalar pela letra R ao invés de S . Neste capítulo fizemos tal troca para dar uma exposição mais clássica sobre a curvatura seccional.

2.5 Segunda forma fundamental

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} . Isso nos diz que existe um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto $V \subset \mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \cap \mathbb{R}^k$. Isso nos permite identificar U com $f(U)$ e cada $v \in T_p M, p \in U$ com $df_p(v) \in T_{f(p)} \overline{M}$, de modo a facilitar a notação. Também identificamos para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em \overline{U}) de vetores em \overline{M} . Dessa forma, para cada $p \in M$, $T_p M$ é considerado um subespaço vetorial de $T_p \overline{M}$ de dimensão n . Assim, se considerarmos o espaço m -dimensional $(T_p M)^\perp = \{v \in T_p \overline{M}; \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in T_p M\}$, podemos escrever

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp.$$

O espaço $(T_p M)^\perp$ é chamado de espaço normal à M em p . Assim, dado $v \in T_p \overline{M}, p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p M, \quad v^N \in (T_p M)^\perp.$$

A conexão Riemanniana de \overline{M} será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M , e \overline{X} e \overline{Y} são extensões locais a \overline{M} , definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

Não é difícil verificar que esta é a conexão Riemanniana relativa a métrica induzida de M . Temos então:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^N = \nabla_X Y + (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^N.$$

Definição 2.32 *Sejam X e Y campos locais de vetores em M , e \overline{X} e \overline{Y} extensões locais a \overline{M} . Definimos a segunda forma fundamental da imersão f como sendo a aplicação*

$B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ definida por

$$B(X, Y) = (\bar{\nabla}_X \bar{Y})^N = \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y.$$

Proposição 2.14 A segunda forma fundamental $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ definida por

$$B(X, Y) = (\bar{\nabla}_X \bar{Y})^N = \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Definição 2.33 Seja $\eta \in (T_p M)^\perp$. À segunda forma fundamental e a η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ definida por

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = \langle B(x, y), \eta \rangle,$$

que chamamos de operador forma (shape operator). Quando não houver perigo de confusão, indicaremos $A_\eta(X)$ por AX .

A matriz de A com respeito à base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ é dada por

$$(h_{ij}) = (\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, \eta \rangle), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Proposição 2.15 Sejam $p \in M$, $x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então

$$A_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Observação 2.2: Se a codimensão da imersão for 1, isto é, $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ e N for uma extensão local de η tal que $\langle N, N \rangle = 1$, então

$$0 = X \langle N, N \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}_X N \text{ é tangente à } M \Rightarrow (\bar{\nabla}_X N)^T = \bar{\nabla}_X N.$$

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com autovalores reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, i.e., $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, com $i \in \{1, \dots, n\}$. Se M e \bar{M} são orientáveis, escolhendo uma orientação para ambas, o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de \bar{M} , se $\{e_1, \dots, e_n\}$ for uma base na orientação de M . Neste caso, chamamos os e_i de direções principais e os λ_i de curvaturas principais de f .

Definição 2.34 Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, para todo $\eta \in (T_p M)^\perp$, a segunda forma fundamental é identicamente nula em p . A imersão f é dita totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$. A razão dessa terminologia é que f ser geodésica em p é equivalente a dizer que toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de \overline{M} em p .

Definição 2.35 Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base ortonormal de $T_p M$ de direções principais de f e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ suas curvaturas principais. Então definimos a curvatura média, denotada por $H(p)$, no ponto p por

$$H(p) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

Observação 2.3: Como o traço de um operador independe da base na qual escrevemos, temos que

$$H = \frac{1}{n} \text{tr} A.$$

em qualquer referencial ortonormal em uma vizinhança de p que diagonalize o operador forma A em p .

Observação 2.4: Nesta dissertação, com exceção do Apêndice B, trabalharemos com a curvatura média H em sua forma não-normalizada, isto é:

$$H(p) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Definição 2.36 Definimos a curvatura de Gauss-Kronecker como sendo o $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$. A partir do Capítulo 3, passaremos a denotar a curvatura de Gauss-Kronecker pela letra K .

É comum o uso sistemático das letras latinas X, Y, Z , etc., para indicar os campos diferenciáveis, tanto em M quanto em \overline{M} , desde que fique claro que estaremos considerando suas respectivas extensões, e as letras gregas η, ξ, ζ , etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Proposição 2.16 (Equação de Gauss) Sejam $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão, B a segunda forma fundamental, X, Y, Z, T campos diferenciáveis, R e \overline{R} as curvaturas de M e \overline{M} , respectivamente. Então vale:

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle.$$

Observação 2.5: A Equação de Gauss admite uma expressão mais simples. Sendo $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM . Então:

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

Assim, no caso de uma hipersuperfície $f : M^n \rightarrow M^{n+1}$, sendo $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^\perp$, com $|\eta| = 1$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual o operador forma é diagonal, isto é $A(e_i) = \lambda_i e_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A . Então: $\langle B(e_i, e_i), \eta \rangle = \lambda_i$ e $\langle B(e_i, e_j), \eta \rangle = 0$, se $i \neq j$. Portanto: $K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j$.

Dados X e η , já vimos que a componente tangente de $\bar{\nabla}_X \eta$ é dada por $(\bar{\nabla}_X \eta)^T = -A_\eta(X)$. A componente normal de $\bar{\nabla}_X \eta$ é chamada de conexão normal da imersão e é denotada por ∇^\perp . Explicitamente,

$$\nabla_X^\perp \eta = (\bar{\nabla}_X \eta)^N = \bar{\nabla}_X \eta - (\bar{\nabla}_X \eta)^T = \bar{\nabla}_X \eta + A_\eta(X).$$

Verifica-se facilmente que a conexão normal ∇^\perp possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é, é linear em X , aditiva em η , e

$$\nabla_X^\perp(f\eta) = f\nabla_X^\perp \eta + X(f)\eta, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Dada uma imersão isométrica, é conveniente denotar por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M . Podemos considerar a segunda forma fundamental da imersão como um tensor

$$B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle.$$

Podemos definir a derivada covariante deste tensor da maneira natural:

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta).$$

Proposição 2.17 (*Equação de Codazzi*) *Com a notação acima, vale*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Observação 2.6: Se o espaço ambiente \bar{M} tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se escreve como

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta).$$

Se a codimensão da imersão é 1, temos pela Observação 2.2 que:

$$\nabla_X^\perp \eta = \bar{\nabla}_X \eta - (\bar{\nabla}_X \eta)^T = \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_X \eta = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) &= X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) \\ &= X\langle B(Y, Z), \eta \rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle \\ &= X\langle AY, Z \rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z \rangle - \langle AY, \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X(AY), Z \rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z \rangle \text{ e, analogamente,} \end{aligned}$$

$$(\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) = \langle \nabla_Y(AX), Z \rangle - \langle A(\nabla_Y X), Z \rangle.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) &= (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) \\ \Rightarrow \langle \nabla_X(AY), Z \rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z \rangle &= \langle \nabla_Y(AX), Z \rangle - \langle A(\nabla_Y X), Z \rangle \\ \Rightarrow \langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX), Z \rangle &= \langle A(\nabla_X Y) - A(\nabla_Y X), Z \rangle \\ \Rightarrow \langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX), Z \rangle &= \langle A(\nabla_X Y - \nabla_Y X), Z \rangle \\ \Rightarrow \langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX), Z \rangle &= \langle A([X, Y]), Z \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) = A([X, Y]).$$

3 O OPERADOR L_r E O OPERADOR LINEARIZADO

O objetivo deste capítulo é apresentar um apanhado sobre a r -ésima transformação de Newton e o operador L_r , o qual, definido em termos da transformação de Newton, aparece naturalmente no estudo de estabilidade de hipersuperfícies com curvatura escalar nula. Ao longo desta etapa e do restante da dissertação, determinados resultados gerais que serão apresentados a seguir serão restringidos ao caso particular $r = 1$, o chamado operador linearizado L_1 , que será uma ferramenta de suma importância para o desenvolvimento dos resultados principais desta dissertação, a serem demonstrados no Capítulo 6.

3.1 A r -ésima transformação de Newton

Definição 3.1 *Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, temos que f é chamada de função simétrica quando é invariante por permutação de suas variáveis independentes, isto é: $f(x_1, \dots, x_n) = f(\sigma(x_1, \dots, x_n))$, onde σ é uma permutação qualquer de (x_1, \dots, x_n) .*

Exemplo 3.1: As funções $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dadas respectivamente por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^2,$$

$$h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x_j)^2,$$

são exemplos de funções simétricas.

Definição 3.2 *Um polinômio S , com coeficientes em um corpo ou em um anel associativo e comutativo K com uma unidade, é dito simétrico quando S for uma função simétrica.*

Definição 3.3 *Os polinômios simétricos elementares $S_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são definidos como:*

$$S_k(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, & \text{se } 1 \leq k \leq n \\ 0, & \text{se } k > n \end{cases} .$$

Em posse dessas noções iniciais, considere M^n e \overline{M}^{n+1} variedades riemannianas orientáveis e $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ imersão isométrica. Temos então a

Definição 3.4 Sendo A o operador linear associado à segunda forma fundamental e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores do operador auto-adjunto A , o r -ésimo polinômio simétrico associado a A , $S_r(A) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é definido como:

$$S_r(A)(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0 \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r}, & \text{se } r \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{se } r > n \end{cases} .$$

Observação 3.1: Uma outra maneira de se definir os polinômios simétricos é por meio do polinômio característico de A , isto é:

$$\det(tI - A) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r}.$$

O resultado a seguir relaciona a curvatura escalar R e o polinômio simétrico no caso $r = 2$, S_2 :

Proposição 3.1 Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão. Sendo \overline{M}^{n+1} uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante c , então: $n(n-1)(R-c) = 2S_2(A)$. Em particular, $S_2 = 0$ se, e somente se, $R = c$.

Demonstração: Considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base ortonormal de $T_p M$ que diagonaliza A . Temos por definição que

$$R(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Ric_p(e_j).$$

Sabendo-se que

$$Ric_p(e_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} \langle R(e_j, e_i) e_j, e_i \rangle,$$

temos então o seguinte:

$$\begin{aligned}
R(p) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i \neq j} \langle R(e_j, e_i) e_j, e_i \rangle \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \sum_{j=1}^n \langle R(e_i, e_j) e_i, e_j \rangle \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \sum_{j=1}^n K(e_i, e_j).
\end{aligned}$$

Como $K(e_i, e_j) = c + \lambda_i \lambda_j$, em consequência da Observação 2.5, segue-se que:

$$\begin{aligned}
n(n-1)R(p) &= \sum_{i \neq j} \sum_{j=1}^n (c + \lambda_i \lambda_j) \\
&= cn(n-1) + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j.
\end{aligned}$$

Logo: $n(n-1)(R(p) - c) = 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = 2S_2(A)$, seguindo-se o resultado. ■

Da definição do r -ésimo polinômio simétrico, seguem-se dois resultados que serão muito úteis no decorrer desta dissertação, a saber:

$$S_1(A)^2 = |A|^2 + 2S_2(A) \tag{7}$$

e

$$2S_1 S_3 \leq S_2^2. \tag{8}$$

Para verificar (7), é preciso lembrar que a norma de um operador A é definida como: $|A|^2 = \text{tr}(AA^T)$, onde A^T denota a matriz transposta de A . Assim, no caso em que A denota o operador associado à segunda forma fundamental, teremos

$$|A|^2 = \text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
S_1(A)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \\
&= |A|^2 + 2S_2(A).
\end{aligned}$$

Agora, para provar (8) é preciso ver que, por um lado, temos:

$$2S_1S_3 = 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2(\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2).$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} S_2^2 &= (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)^2 \\ &= (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + 2(\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2) \\ &= (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + 2S_1S_3, \end{aligned}$$

seguindo-se a desigualdade (8).

Observação 3.2: Como estamos considerando nesta dissertação a curvatura média H em sua forma não-normalizada, teremos que $S_1 = H$. A Proposição 3.1, quando $n = 3$ e $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^4$ (particularizações que serão feitas nos próximos capítulos), nos garante $S_2 = R$ e, quando se considera uma variedade riemanniana M^3 , temos por definição $S_3 = K$. Assim, (7) e (8) podem ser reescritas respectivamente da seguinte forma:

$$H^2 = |A|^2 + 2R \tag{9}$$

e

$$HK \leq \frac{1}{2}R^2. \tag{10}$$

Podemos, enfim, apresentar a r -ésima transformação de Newton associada ao operador A :

Definição 3.5 A r -ésima transformação de Newton $P_r(A) : T_pM \rightarrow T_pM$, para cada $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ é definida recursivamente da seguinte forma:

$$P_0(A) = I$$

$$P_1(A) = S_1I - A$$

$$P_r(A) = S_rI - AP_{r-1}(A), \text{ para } 2 \leq r \leq n-1,$$

onde I é a identidade. Mais geralmente:

$$P_r(A) = \begin{cases} I, & \text{se } r = 0 \\ \sum_{j=0}^r (-1)^j S_{r-j}(A)A^j, & \text{se } r \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ 0, & \text{se } r \geq n \end{cases}, \quad (11)$$

onde 0 denota a transformação linear identicamente nula.

As duas proposições a seguir apresentam determinadas propriedades da r -ésima transformação de Newton que nos serão úteis no decorrer deste capítulo.

Proposição 3.2 *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades riemannianas e seja A o operador linear associado à sua segunda forma fundamental. A r -ésima transformação de Newton associada a A satisfaz:*

1. $P_r(A)A = AP_r(A)$;
2. $P_{r+1}(A) = S_{r+1}(A)I - AP_r(A)$, para todo $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$;
3. P_r é auto-adjunto;
4. P_r é simétrico.

Demonstração: 1) A verificação será feita por indução sobre r . Para $r = 0$, temos: $P_0A = IA = A = AI = AP_0$. Agora, suponha que $P_{r-1}A = AP_{r-1}$. Assim:

$$\begin{aligned} AP_r &= A(S_r I - AP_{r-1}) \\ \text{hipótese indutiva } \rightarrow &= A(S_r I - P_{r-1}A) \\ &= S_r A - AP_{r-1}A \\ &= (S_r I - AP_{r-1})A = P_r A. \end{aligned}$$

2) Pela definição mais geral dada por (11), temos que:

$$\begin{aligned} P_{r+1}(A) &= S_{r+1}(A)I - S_r(A)A + S_{r-1}(A)A^2 - \dots + (-1)^r S_1(A)A^r + (-1)^{r+1} A^{r+1} \\ &= S_{r+1}(A)I - A(S_r(A)I - S_{r-1}(A)A + \dots + (-1)^{r-1} S_1(A)A^{r-1} + (-1)^r A^r) \\ &= S_{r+1}(A)I - AP_r(A). \end{aligned}$$

3) Novamente, usaremos indução sobre r . Para $r = 0$, temos: $P_0 = I$. Logo:

$$\langle P_0 X, Y \rangle = \langle IX, Y \rangle = \langle X, IY \rangle = \langle X, P_0 Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Suponha agora que vale: $\langle P_{r-1} X, Y \rangle = \langle X, P_{r-1} Y \rangle$.

Sendo A um operador auto-adjunto, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle P_r X, Y \rangle &= \langle (S_r I - A P_{r-1}) X, Y \rangle \\
 &= \langle S_r X, Y \rangle - \langle A P_{r-1} X, Y \rangle \\
 &= \langle X, S_r Y \rangle - \langle P_{r-1} X, A Y \rangle \\
 \text{hipótese indutiva} \rightarrow &= \langle X, S_r Y \rangle - \langle X, P_{r-1} A Y \rangle \\
 &= \langle X, S_r Y - P_{r-1} A Y \rangle \\
 &= \langle X, (S_r I - P_{r-1} A) Y \rangle \\
 &= \langle X, P_r Y \rangle.
 \end{aligned}$$

4) Temos que P_r será simétrico se, e somente se, $[P_r]_\beta$ for uma matriz simétrica, em qualquer base ortonormal β de $\mathfrak{X}(M)$.

Assim, dada uma base ortonormal de $\mathfrak{X}(M)$, (e_1, \dots, e_n) , temos que a matriz do operador P_r é dada por $[P_r] = (\langle P_r e_i, e_j \rangle)_{ij}$. Logo, para $[P_r]$ ser simétrica, sendo $[P_r]^T$ a matriz transposta de P_r , devemos ter $[P_r] = [P_r]^T$, isto é: $\langle P_r e_i, e_j \rangle = \langle e_i, P_r e_j \rangle$, para todo $i \neq j$ em $\{1, \dots, n\}$. Mas isso é verdade pelo que verificamos no item anterior: P_r é auto-adjunto.

As noções a seguir serão úteis para se compreender a Proposição 3.3.

Considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal que diagonaliza o operador linear A associado à segunda forma fundamental da imersão $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$, isto é, $A(e_i) = \lambda_i e_i$. Denotaremos por A_i a restrição do operador A ao subespaço normal a e_i , e por $S_r(A_i)$ o r -ésimo polinômio simétrico elementar associado a A , isto é:

$$S_r(A_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0 \\ S_r(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_n), & \text{se } r \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ 0, & \text{se } r \geq n \end{cases} \quad ,$$

onde $\hat{\lambda}_i$ indica que a função λ_i foi omitida.

Dessa forma, sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalores de A , fixado λ_i , temos $S_r(A_i) = S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i)$.

Para verificar isso, perceba que podemos escrever S_r como soma de duas parcelas: uma onde λ_i aparece, C_1 , e outra onde λ_i não aparece, C_2 :

$$S_r = C_1 + \lambda_i C_2.$$

Temos então que C_1 é exatamente $S_r(A_i)$ e C_2 é a soma cujas parcelas são somas de todos os produtos de $(r-1)$ curvaturas principais, quando se omite λ_i , ou seja:

$S_{r-1}(A_i)$. Logo: $S_r(A) = S_r(A_i) + \lambda_i S_{r-1}(A_i)$.

Em posse dessas noções, podemos então apresentar a

Proposição 3.3 *Para cada $1 \leq r \leq n - 1$, tem-se:*

1. $P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base que diagonaliza A em p ;
2. $\text{tr}(P_r) = (n - r)S_r$;
3. $\text{tr}(AP_r) = (r + 1)S_{r+1}$;
4. $\text{tr}(A^2P_r) = S_1S_{r+1} - (r + 2)S_{r+2}$.

Demonstração: 1) A verificação será, mais uma vez, por indução sobre r . Para $r = 1$, temos:

$$P_1 = S_1I - A \implies P_1(e_i) = S_1e_i - A(e_i) = (S_1 - \lambda_i)e_i = S_1(A_i)e_i.$$

Supondo-se que o resultado seja válido para $r-1$, temos: $P_{r-1}(e_i) = S_{r-1}(A_i)e_i$.

Assim:

$$\begin{aligned} P_r(e_i) &= S_r e_i - AP_{r-1}(e_i) \\ &= S_r e_i - A(S_{r-1}(A_i)e_i) \\ &= (S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i))e_i \\ &= S_r(A_i)e_i. \end{aligned}$$

2) Temos que:

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_r) &= \sum_{i=1}^n \langle P_r(e_i), e_i \rangle \\ \text{pelo item 1 desta proposição} \rightarrow &= \sum_{i=1}^n \langle S_r(A_i)e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n S_r(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r}, \end{aligned}$$

para todo $i_j \neq i$, com $j \in \{1, \dots, r\}$.

Logo:

$$\text{tr}(P_r) = (n - r) \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} = (n - r)S_r.$$

3) Da igualdade $P_{r-1} = S_{r+1}I - AP_r$, temos: $AP_r = S_{r+1}I - P_{r+1}$. Logo:

$$\begin{aligned} \text{tr}(AP_r) &= \text{tr}(S_{r+1}I - P_{r+1}) \\ &= \text{tr}(S_{r+1}I) - \text{tr}(P_{r+1}) \\ &= nS_{r+1} - (n - r - 1)S_{r+1} \\ &= (r + 1)S_{r+1}. \end{aligned}$$

4) Temos que:

$$\begin{aligned} \text{tr}(AP_{r+1}) &= \text{tr}(A(S_{r+1}I - AP_r)) \\ &= \text{tr}(S_{r+1}A) - \text{tr}(A^2P_r). \end{aligned}$$

Observando que $\text{tr}(A) = S_1$, por conta da definição, segue-se que:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^2P_r) &= S_1S_{r+1} - \text{tr}(AP_{r+1}) \\ \text{pelo item 3 desta proposição} \rightarrow &= S_1S_{r+1} - (r + 2)S_{r+2}. \end{aligned}$$

3.2 O operador L_r e o operador linearizado: L_1

Os operadores L_r apareceram pela primeira vez, não ainda na forma como veremos aqui, no trabalho de K. Voss, em 1956. R. Reilly, em 1973 relacionou o operador L_r com a derivada da $(r + 1)$ -ésima função simétrica S_{r+1} , trabalho relacionado a problemas variacionais.

Cheng e Yau, em 1977, restringiram-se ao caso $r = 1$ e escreveram o operador L_1 como:

$$L_1(f) = \sum_{i,j=1}^n (nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}, \quad (12)$$

ou seja, em função da curvatura média $H = \frac{S_1}{n}$, dos coeficientes h_{ij} da segunda forma fundamental e dos coeficientes f_{ij} da matriz hessiana de f , que é uma função de classe C^2 , com $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Como nesta dissertação estamos considerando a curvatura média na forma não-normalizada, temos que (12) se tornará aqui:

$$L_1(f) = \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}, \quad (13)$$

pois nesse caso, temos $H = S_1$.

Veremos que tal expressão é uma particularização do seguinte resultado obtido por Rosenberg em 1993:

$$L_r(f) = \text{div}(P_r \text{grad}(f)). \quad (14)$$

Feitas tais considerações, o operador L_r será apresentado por meio da seguinte

Definição 3.6 *Dada uma função diferenciável $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{N}$, com $0 \leq r \leq n - 1$, definimos o operador diferencial de segunda ordem L_r em M^n por:*

$$L_r(f)(p) = \text{tr}[P_r(A)\text{Hess}f(p)],$$

onde tr e Hess significam traço e Hessiano, respectivamente.

A fim de demonstrar a expressão para o operador L_r apresentada em (14), consideremos um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ que diagonaliza o operador linear A associado à segunda forma fundamental de uma imersão $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$, num ponto $p \in M$ e, com isso, verifiquemos as duas próximas proposições, cujas demonstrações podem ser encontradas em AQUINO (2003), mas que serão apresentadas aqui para maior completude desta dissertação e, além disso, mostrar determinados passos em maiores detalhes.

Proposição 3.4 *Sejam $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre as variedades riemannianas M^n e \overline{M}^{n+1} e η um campo normal a M . Então, para cada $r \in \{1, \dots, n - 1\}$ e qualquer campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale a seguinte igualdade:*

$$\text{tr}[X \mapsto (\nabla_X P_r)Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \lambda_i^{j-1} \langle \overline{R}(e_i, P_{r-j}Y)\eta, e_i \rangle, \quad (15)$$

onde \overline{R} é o tensor curvatura de \overline{M} .

Demonstração: Precisamos inicialmente verificar a seguinte:

Afirmção 1:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{e_i} P_r)Y, e_i \rangle &= e_i(S_r)Y_i - P_{r-1}Y(\lambda_i) + \langle \overline{R}(e_i, P_{r-1}Y)\eta, e_i \rangle - \lambda_i \langle (\nabla_{e_i} P_{r-1})Y, e_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^r [e_i(S_{r-j+1})\lambda_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i] + \sum_{j=1}^r (-1)^j P_{r-j}Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^j \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \lambda_i^{j-1} \langle \overline{R}(e_i, P_{r-j}Y)\eta, e_i \rangle, \end{aligned}$$

onde $Y_i = \langle Y, e_i \rangle$.

Prova da Afirmação 1: Procederemos por indução em r . Para $r = 1$, obtemos:

$$(\nabla_{e_i} P_1)Y = \nabla_{e_i}(S_1 I - A)Y = (\nabla_{e_i} S_1 I)Y - (\nabla_{e_i} A)Y. \quad (16)$$

Aplicando-se à primeira parcela do terceiro membro da igualdade (16) as propriedades de derivadas covariantes de tensores e da conexão riemanniana ∇ de M , segue-se que:

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_i} S_1 I)Y &= \nabla_{e_i}(S_1 I(Y)) - S_1 I(\nabla_{e_i} Y) \\ &= \nabla_{e_i}(S_1 Y) - S_1(\nabla_{e_i} Y) \\ &= e_i(S_1)Y + S_1 \nabla_{e_i} Y - S_1 \nabla_{e_i} Y \\ &= e_i(S_1)Y. \end{aligned}$$

Assim, (16) se torna:

$$(\nabla_{e_i} P_1)Y = e_i(S_1)Y - (\nabla_{e_i} A)Y. \quad (17)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{e_i} P_1)Y, e_i \rangle &= \langle e_i(S_1)Y - (\nabla_{e_i} A)Y, e_i \rangle \\ &= e_i(S_1)\langle Y, e_i \rangle - \langle (\nabla_{e_i} A)Y, e_i \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

A Equação de Codazzi é testemunha que:

$$\langle \bar{R}(e_i, Y)\eta, e_i \rangle = \langle (\nabla_Y A)e_i, e_i \rangle - \langle (\nabla_{e_i} A)Y, e_i \rangle. \quad (19)$$

Assim, substituindo-se (19) em (18), obtemos:

$$\langle (\nabla_{e_i} P_1)Y, e_i \rangle = e_i(S_1)\langle Y, e_i \rangle + \langle \bar{R}(e_i, Y)\eta, e_i \rangle - \langle (\nabla_Y A)e_i, e_i \rangle. \quad (20)$$

Observando que $(\nabla_Y A)e_i = \nabla_Y A(e_i) - A(\nabla_Y e_i)$, $A(e_i) = \lambda_i e_i$ e A é auto-

adjunto, teremos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_Y A)e_i, e_i \rangle &= \langle \nabla_Y A(e_i) - A(\nabla_Y e_i), e_i \rangle \\
&= \langle \nabla_Y A(e_i), e_i \rangle - \langle A(\nabla_Y e_i), e_i \rangle \\
&= \langle \nabla_Y(\lambda_i e_i), e_i \rangle - \langle \nabla_Y e_i, A(e_i) \rangle \\
&= \langle Y(\lambda_i)e_i + \lambda_i \nabla_Y e_i, e_i \rangle - \lambda_i \langle \nabla_Y e_i, e_i \rangle \\
&= Y(\lambda_i) \langle e_i, e_i \rangle + \lambda_i \langle \nabla_Y e_i, e_i \rangle - \lambda_i \langle \nabla_Y e_i, e_i \rangle \\
&= Y(\lambda_i) \langle e_i, e_i \rangle \\
&= Y(\lambda_i).
\end{aligned}$$

Assim, (20) se torna:

$$\langle (\nabla_{e_i} P_1)Y, e_i \rangle = e_i(S_1) \langle Y, e_i \rangle + \langle \bar{R}(e_i, Y)\eta, e_i \rangle - Y(\lambda_i), \quad (21)$$

que é exatamente a igualdade da Afirmação 1 para o caso $r = 1$.

Agora, suponha que a igualdade que queremos verificar nesta afirmação seja verdadeira para $r - 1$. Sabendo-se por definição que $P_r = S_r - AP_{r-1}$, temos então o seguinte:

$$(\nabla_{e_i} P_r)Y = \nabla_{e_i}(S_r I - A)Y = (\nabla_{e_i} S_r I)Y - (\nabla_{e_i} A P_{r-1})Y. \quad (22)$$

Fazendo-se uso mais uma vez das propriedades da derivada covariante de tensores e da conexão riemanniana ∇ de M , agora na primeira parcela do terceiro membro de (22), obtemos:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{e_i} S_r I)Y &= \nabla_{e_i}(S_r I(Y)) - S_r I(\nabla_{e_i} Y) \\
&= \nabla_{e_i}(S_r Y) - S_r(\nabla_{e_i} Y) \\
&= e_i(S_r)Y + S_r \nabla_{e_i} Y - S_r \nabla_{e_i} Y \\
&= e_i(S_r)Y.
\end{aligned}$$

Assim, (22) se torna:

$$(\nabla_{e_i} P_r)Y = e_i(S_r)Y - (\nabla_{e_i} A P_{r-1})Y. \quad (23)$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{e_i} P_r)Y, e_i \rangle &= \langle e_i(S_r)Y - (\nabla_{e_i} A P_{r-1})Y, e_i \rangle \\
&= \langle e_i(S_r)Y, e_i \rangle - \langle (\nabla_{e_i} A P_{r-1})Y, e_i \rangle \\
&= e_i(S_r) \langle Y, e_i \rangle - \langle (\nabla_{e_i} A P_{r-1})Y, e_i \rangle.
\end{aligned} \quad (24)$$

Agora, observe que:

$$(\nabla_{e_i} A P_{r-1})Y = \nabla_{e_i} A P_{r-1}Y - A P_{r-1}(\nabla_{e_i} Y) \quad (25)$$

e

$$(\nabla_{e_i} A)P_{r-1}Y = \nabla_{e_i} A P_{r-1}Y - A(\nabla_{e_i} P_{r-1}Y). \quad (26)$$

Assim, (25) e (26) nos fornecem:

$$(\nabla_{e_i} A P_{r-1})Y = A(\nabla_{e_i} P_{r-1}Y) - A P_{r-1}(\nabla_{e_i} Y) + (\nabla_{e_i} A)P_{r-1}Y.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{e_i} A P_{r-1})Y, e_i \rangle &= \langle A(\nabla_{e_i} P_{r-1}Y) - A P_{r-1}(\nabla_{e_i} Y) + (\nabla_{e_i} A)P_{r-1}Y, e_i \rangle \\ &= \langle A(\nabla_{e_i} P_{r-1}Y), e_i \rangle - \langle A P_{r-1}(\nabla_{e_i} Y), e_i \rangle + \langle (\nabla_{e_i} A)P_{r-1}Y, e_i \rangle \\ \text{por } A \text{ ser auto-adjunto } \rightarrow &= \langle \nabla_{e_i} P_{r-1}Y, A(e_i) \rangle - \langle P_{r-1}(\nabla_{e_i} Y), A(e_i) \rangle + \langle (\nabla_{e_i} A)P_{r-1}Y, e_i \rangle \\ &= \lambda_i \langle \nabla_{e_i} P_{r-1}Y, e_i \rangle - \lambda_i \langle P_{r-1}(\nabla_{e_i} Y), e_i \rangle + \langle (\nabla_{e_i} A)P_{r-1}Y, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Observando que: $(\nabla_{e_i} P_{r-1})Y = \nabla_{e_i} P_{r-1}Y - P_{r-1}(\nabla_{e_i} Y)$, obtemos:

$$\langle (\nabla_{e_i} A P_{r-1})Y, e_i \rangle = \lambda_i \langle (\nabla_{e_i} P_{r-1})Y, e_i \rangle + \langle (\nabla_{e_i} A)P_{r-1}Y, e_i \rangle.$$

E assim, (24) se torna:

$$\langle (\nabla_{e_i} P_r)Y, e_i \rangle = e_i(S_r)\langle Y, e_i \rangle - \lambda_i \langle (\nabla_{e_i} P_{r-1})Y, e_i \rangle - \langle (\nabla_{e_i} A)P_{r-1}Y, e_i \rangle. \quad (27)$$

Fazendo uso mais uma vez da equação de Codazzi, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{e_i} P_r)Y, e_i \rangle &= e_i(S_r)\langle Y, e_i \rangle - \lambda_i \langle (\nabla_{e_i} P_{r-1})Y, e_i \rangle + \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1}Y)\eta, e_i \rangle \\ &\quad - \langle (\nabla_{P_{r-1}Y} A)e_i, e_i \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

Agora, notando que:

$$\begin{aligned} (\nabla_{P_{r-1}Y} A)(e_i) &= \nabla_{P_{r-1}Y} A(e_i) - A(\nabla_{P_{r-1}Y} e_i) \\ &= \nabla_{P_{r-1}Y}(\lambda_i e_i) - A(\nabla_{P_{r-1}Y} e_i) \\ &= P_{r-1}Y(\lambda_i) e_i + \lambda_i \nabla_{P_{r-1}Y} e_i - A(\nabla_{P_{r-1}Y} e_i), \end{aligned}$$

segue-se que:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{P_{r-1}Y}A)(e_i), e_i \rangle &= \langle P_{r-1}Y(\lambda_i)e_i + \lambda_i \nabla_{P_{r-1}Y}e_i - A(\nabla_{P_{r-1}Y}e_i), e_i \rangle \\
&= \langle P_{r-1}Y(\lambda_i)e_i, e_i \rangle + \langle \lambda_i \nabla_{P_{r-1}Y}e_i, e_i \rangle - \langle A(\nabla_{P_{r-1}Y}e_i), e_i \rangle \\
\text{por } A \text{ ser auto-adjunto } \rightarrow &= \langle P_{r-1}Y(\lambda_i)e_i, e_i \rangle + \langle \lambda_i \nabla_{P_{r-1}Y}e_i, e_i \rangle - \langle \nabla_{P_{r-1}Y}e_i, A(e_i) \rangle \\
&= \langle P_{r-1}Y(\lambda_i)e_i, e_i \rangle + \langle \lambda_i \nabla_{P_{r-1}Y}e_i, e_i \rangle - \langle \nabla_{P_{r-1}Y}e_i, \lambda_i e_i \rangle \\
&= \langle P_{r-1}Y(\lambda_i)e_i, e_i \rangle \\
&= P_{r-1}Y(\lambda_i) \langle e_i, e_i \rangle \\
&= P_{r-1}Y(\lambda_i).
\end{aligned}$$

Dessa forma, (28) se torna:

$$\langle (\nabla_{e_i}P_r)Y, e_i \rangle = e_i(S_r)Y_i + \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1}Y)\eta, e_i \rangle - P_{r-1}Y(\lambda_i) - \lambda_i \langle (\nabla_{e_i}P_{r-1})Y, e_i \rangle,$$

onde $Y_i = \langle Y, e_i \rangle$.

A hipótese indutiva nos garante que:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{e_i}P_{r-1})Y, e_i \rangle &= \sum_{j=1}^{r-1} [e_i(S_{r-1-j+1})\lambda_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i] + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j P_{r-1-j}Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^j \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j-1} \lambda_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1-j}Y)\eta, e_i \rangle.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{e_i} P_r) Y, e_i \rangle &= e_i(S_r) Y_i + \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1} Y) \eta, e_i \rangle - P_{r-1} Y(\lambda_i) \\
&\quad - \lambda_i \sum_{j=1}^{r-1} [e_i(S_{r-1-j+1}) \lambda_i^{j-1} (-1)^{j-1} Y_i] - \lambda_i \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j P_{r-1-j} Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^j \right) \\
&\quad - \lambda_i \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j-1} \lambda_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1-j} Y) \eta, e_i \rangle \\
&= e_i(S_r) Y_i + \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1} Y) \eta, e_i \rangle - P_{r-1} Y(\lambda_i) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r-1} [e_i(S_{r-1-j+1}) \lambda_i^j (-1)^j Y_i] + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j+1} P_{r-1-j} Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^{j+1} \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j \lambda_i^j \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1-j} Y) \eta, e_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^r [e_i(S_{r-j+1}) \lambda_i^{j-1} (-1)^{j-1} Y_i] + \sum_{j=1}^r (-1)^j P_{r-j} Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^j \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \lambda_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-j} Y) \eta, e_i \rangle, \tag{29}
\end{aligned}$$

o que nos garante o resultado da Afirmação 1, e em posse dele, continuaremos a demonstração desta proposição.

Observe que:

$$tr[X \mapsto (\nabla_X P_r) Y] = \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_r) Y, e_i \rangle. \tag{30}$$

Assim, substituindo-se (29) em (30), segue-se que:

$$\begin{aligned}
tr[X \mapsto (\nabla_X P_r) Y] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r [e_i(S_{r-j+1}) \lambda_i^{j-1} (-1)^{j-1} Y_i] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^j P_{r-j} Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^j \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \lambda_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-j} Y) \eta, e_i \rangle. \tag{31}
\end{aligned}$$

Veja agora que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r [e_i(S_{r-j+1}) \lambda_i^{j-1} (-1)^{j-1} Y_i] &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n [e_i(S_{r-j+1}) \lambda_i^{j-1} (-1)^{j-1} Y_i] \\
&= \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^n [e_i(S_{r-j+1}) \lambda_i^{j-1} Y_i]. \tag{32}
\end{aligned}$$

Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal, temos que:

$$\text{grad}(S_{r+1-j}) = \sum_{k=1}^n e_k(S_{r+1-j})e_k.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}(S_{r+1-j}), e_i \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n e_k(S_{r+1-j})e_k, e_i \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n e_k(S_{r+1-j}) \langle e_k, e_i \rangle \\ &= e_i(S_{r+1-j}). \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^n Y_i e_i$ e usando o fato que $A^{j-1}(e_i) = \lambda_i^{j-1} e_i$, temos que (32) se torna:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r [e_i(S_{r-j+1}) \lambda_i^{j-1} (-1)^{j-1} Y_i] = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \langle \text{grad}(S_{r+1-j}), A^{j-1} Y \rangle. \quad (33)$$

Agora, perceba que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^j P_{r-j} Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^j \right) = \sum_{j=1}^r (-1)^j \sum_{i=1}^n P_{r-j} Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^j \right). \quad (34)$$

Além disso:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{r-j} Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^j \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{j} (P_{r-j} Y)(\lambda_i^j) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{j} \langle P_{r-j} Y, \text{grad}(\lambda_i^j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle P_{r-j} Y, \frac{1}{j} \text{grad}(\lambda_i^j) \right\rangle \\ &= \left\langle P_{r-j} Y, \frac{1}{j} \text{grad} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim, (34) se torna:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^j P_{r-j} Y \left(\frac{1}{j} \lambda_i^j \right) = \sum_{j=1}^r (-1)^j \left\langle P_{r-j} Y, \frac{1}{j} \text{grad} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right) \right\rangle. \quad (35)$$

Substituindo-se (33) e (35), em (31), segue-se que:

$$\begin{aligned}
tr[X \mapsto (\nabla_X P_r)Y] &= \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \langle grad(S_{r+1-j}), A^{j-1}Y \rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^r (-1)^j \left\langle P_{r-j}Y, \frac{1}{j} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right) \right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \lambda_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-j}Y)\eta, e_i \rangle. \tag{36}
\end{aligned}$$

Considerando:

$$T_1 = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \langle grad(S_{r+1-j}), A^{j-1}Y \rangle$$

e

$$T_2 = \sum_{j=1}^r (-1)^j \left\langle P_{r-j}Y, \frac{1}{j} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right) \right\rangle,$$

teremos a conclusão da demonstração desta proposição após verificarmos que $T_1 + T_2 = 0$.

Em vista disso, observe inicialmente que a definição de P_r , para cada $j \in \{1, \dots, r\}$, fornece-nos o seguinte:

$$P_{r-j} = \sum_{l=0}^{r-j} (-1)^l S_{r-j-l} A^l. \tag{37}$$

Substituindo-se (37) na expressão de T_2 , obtemos:

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{j=1}^r (-1)^j \left\langle \sum_{l=0}^{r-j} (-1)^l S_{r-j-l} A^l Y, \frac{1}{j} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right) \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^r (-1)^j \sum_{l=0}^{r-j} (-1)^l S_{r-j-l} \left\langle A^l Y, \frac{1}{j} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right) \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^r \left\langle A^l Y, \sum_{l=0}^{r-j} (-1)^l S_{r-j-l} \frac{(-1)^j}{j} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Fazendo $l = k - 1$, obtemos:

$$T_2 = \sum_{k=1}^r \left\langle A^{k-1}Y, \sum_{j=1}^{r-k+1} (-1)^{k-1} S_{r-k-j+1} \frac{(-1)^j}{j} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right) \right\rangle.$$

Afirmação 2: $grad(S_{r+1-k}) = \sum_{j=1}^{r-k+1} (-1)^{k-1} \frac{(-1)^j}{j} S_{r-k-j+1} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right)$.

Prova da Afirmação 2: Perceba inicialmente que verificar o resultado desta afirmação é equivalente a verificar que:

$$grad(S_r) = \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1}}{j} S_{r-j} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right). \quad (38)$$

Para provarmos a igualdade (38), será feito uso de indução em r e a seguinte identidade de Jacobi:

$$S_r = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{r-1} \left((-1)^{l-1} S_{r-l} \sum_{i=1}^n \lambda_i^l \right). \quad (39)$$

Para $r = 1$, temos claramente que a identidade em (38) é satisfeita. Calculando o gradiente de S_r na expressão (39), obtemos:

$$grad(S_r) = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{r-1} \left((-1)^{l-1} grad(S_{r-l}) \sum_{i=1}^n \lambda_i^l \right) + \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \left((-1)^{l-1} S_{r-l} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^l \right) \right).$$

Observe ainda que, quando $l = r$, temos $S_{r-l} = S_0 = 1$ e com isso $grad(S_0) = 0$.

Dado $r \in \{1, \dots, n\}$, suponha que a igualdade (38) seja verdadeira para todo $j \in \{1, \dots, r-1\}$. Considere então:

$$W_1 = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{r-1} \left((-1)^{l-1} grad(S_{r-l}) \sum_{i=1}^n \lambda_i^l \right) \quad (40)$$

e

$$W_2 = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \left((-1)^{l-1} S_{r-l} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^l \right) \right). \quad (41)$$

Pela hipótese indutiva, segue-se que (40) se torna:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{r-1} \left((-1)^{l-1} \left[\sum_{j=1}^{r-l} \frac{(-1)^{j-1}}{j} S_{r-l-j} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j \right) \right] \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i^l \right] \right) \\ \text{reordenando os termos} \rightarrow &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left(\left[\frac{(-1)^{k-1}}{k} (r-k) S_{r-k} \right] grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \right) \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Assim, somando-se as expressões (41) e (42), obtemos:

$$\begin{aligned}
W_1 + W_2 &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left(\left[\frac{(-1)^{k-1}}{k} (r-k) S_{r-k} \right] grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left((-1)^{k-1} S_{r-k} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \right) \right) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left((-1)^{k-1} \left[\frac{r-k}{k} + 1 \right] S_{r-k} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \right) \right) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left((-1)^{k-1} \binom{r}{k} S_{r-k} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^r \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} S_{r-k} grad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \right) \right).
\end{aligned}$$

Temos então garantida a igualdade (38) e, conseqüentemente, temos o resultado da Afirmação 2.

Dessa forma, segue-se que:

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{j=1}^r (-1)^j \langle A^{j-1} Y, grad(S_{r+1-j}) \rangle \\
&= - \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \langle A^{j-1} Y, grad(S_{r+1-j}) \rangle = -T_1.
\end{aligned}$$

Portanto, $T_1 + T_2 = 0$, o que conclui a demonstração desta proposição.

Proposição 3.5 *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se \overline{M}^{n+1} tem curvatura seccional constante, então $L_r(f) = div(P_r grad(f))$, para toda $f \in \mathcal{D}(M)$.*

Demonstração: Considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal que diagonaliza a segunda forma fundamental A da imersão x num ponto $p \in M$. Por definição, temos que:

$$div X = tr[Y \mapsto \nabla_X Y],$$

para todo $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$.

Então, pela ortonormalidade da base $\{e_i\}_{i=1}^n$, segue-se que:

$$div(P_r grad(f)) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(P_r grad(f)), e_i \rangle.$$

Observando que: $(\nabla_{e_i} P_r) grad(f) = \nabla_{e_i}(P_r grad(f)) + P_r(\nabla_{e_i}(grad(f)))$, obte-

mos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P_r \operatorname{grad}(f)) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(P_r \operatorname{grad}(f)) + P_r(\nabla_{e_i}(\operatorname{grad}(f))), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_r) \operatorname{grad}(f), e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i}(\operatorname{grad}(f))), e_i \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$L_r(f) = \operatorname{tr}(P_r \operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^n \langle (P_r \operatorname{Hess} f) e_i, e_i \rangle.$$

Como $(\operatorname{Hess} f) e_i = \nabla_{e_i}(\operatorname{grad}(f))$, obtemos:

$$L_r(f) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i}(\operatorname{grad}(f))), e_i \rangle.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P_r \operatorname{grad}(f)) &= L_r(f) + \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_r) \operatorname{grad}(f), e_i \rangle \\ &= L_r(f) + \operatorname{tr}((\nabla P_r)(\operatorname{grad}(f))). \end{aligned}$$

Agora, observe que a Proposição 3.4 nos garante que:

$$\operatorname{tr}((\nabla P_r)(\operatorname{grad}(f))) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \lambda_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-j} \operatorname{grad}(f)) \eta, e_i \rangle,$$

onde \bar{R} é o tensor curvatura de \bar{M} e η é normal a M .

Como \bar{M} tem curvatura seccional constante, temos pela Proposição 2.13 que $\bar{R}(e_i, P_{r-j} \operatorname{grad}(f)) \eta = 0$.

Segue-se, então, o resultado.

Observação 3.3: Perceba que, quando $r = 0$, $L_0(f) = \operatorname{div}(P_0 \operatorname{grad}(f)) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \Delta(f)$, o Laplaciano na forma com já conhecemos. Ou seja, o operador L_r consiste na generalização da ideia de Laplaciano.

A partir de agora, por comodidade de escrita, denotaremos o gradiente de $f \in \mathcal{D}(M)$ por ∇ , sempre que não houver riscos de confusão com a notação da conexão riemanniana de M .

Uma consequência muito útil da Proposição 3.5 é dada pela

Proposição 3.6 *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se M for compacta e sem bordo ou se M não for compacta, com $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ possuindo suporte compacto, teremos então que:*

1. $\int_M L_r(f) dM = 0;$
2. $\int_M f L_r(f) dM = - \int_M \langle P_r \nabla f, \nabla f \rangle dM.$

Demonstração: 1) Como a Proposição 3.5 nos garante que $L_r(f) = \text{div}(P_r \nabla f)$, segue-se diretamente do Teorema da Divergência que

$$\int_M L_r(f) dM = 0.$$

2) Agora, observe as propriedades do operador divergente nos garantem que:

$$\text{div}(f P_r \nabla f) = f L_r(f) + \langle \nabla f, P_r \nabla f \rangle.$$

Mais uma vez usando o Teorema da Divergência, teremos que:

$$0 = \int_M \text{div}(f P_r \nabla f) dM = \int_M f L_r(f) dM + \int_M \langle \nabla f, P_r \nabla f \rangle dM.$$

Daí, segue-se que:

$$\int_M f L_r(f) dM = - \int_M \langle P_r \nabla f, \nabla f \rangle dM. \quad (43)$$

Verifiquemos agora que, quando $r = 1$, $L_1 = \text{div}(P_1 \nabla f)$ coincide com o operador de Cheng e Yau:

$$L_1(f) = \sum_{i,j=1}^n (H \delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij}.$$

Tal expressão para o operador L_1 , que chamaremos aqui de operador linearizado, será útil na demonstração do Lema 5.1, o qual será apresentado no Capítulo 5 desta dissertação.

Sabemos que $\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ e $P_1 = S_1 I - A = H I - A$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é o referencial geodésico.

Daí:

$$P_1 \nabla f = \sum_{i=1}^n (HI - A) f_i e_i = \sum_{i=1}^n (H f_i e_i - f_i A e_i).$$

Como $A e_i = \sum_{j=1}^n h_{ji} e_j$, temos:

$$\begin{aligned} P_1 \nabla f &= \sum_{i=1}^n \left(H f_i e_i - f_i \sum_{j=1}^n h_{ji} e_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (H \delta_{ij} - h_{ji}) f_i e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (H \delta_{ij} - h_{ij}) f_i \right) e_j. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P_1 \nabla f) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (H_j \delta_{ij} - h_{ijj}) \right) f_i + \sum_{i,j=1}^n (H \delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n H_j \delta_{ij} \right) f_i - \sum_{i,j=1}^n h_{ijj} f_i + \sum_{i,j=1}^n (H \delta_{ij} - h_{ijj}) f_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n H_j \delta_{ij} f_i - \sum_{i=1}^n H_i f_i + \sum_{i,j=1}^n (H \delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n H_i f_i - \sum_{i=1}^n H_i f_i + \sum_{i,j=1}^n (H \delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n (H \delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij}. \end{aligned}$$

Segue-se então o resultado.

Tal forma de escrever o operador linearizado nos permite garantir o seguinte:

Lema 3.1 *Sendo $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se então que:*

$$L_1(fg) = f L_1(g) + g L_1(f) + 2 \langle \nabla f, P_1(\nabla g) \rangle.$$

Demonstração: É preciso observar inicialmente que:

$$\begin{aligned}(fg)_{kl} &= ((fg)_k)_l = (gf_k + fg_k)_l \\ &= (gf_k)_l + (fg_k)_l \\ &= g_l f_k + f_{kl} g + f_l g_k + f g_{kl}.\end{aligned}$$

Portanto:

$$(fg)_{kl} = g_l f_k + f_{kl} g + f_l g_k + f g_{kl}. \quad (44)$$

Usando-se (44) na expressão (13) do operador linearizado, para o produto fg , e ainda lembrando que $H = \sum_i h_{ii}$, segue-se que:

$$\begin{aligned}L_1(fg) &= \sum_{k,l} (H\delta_{kl} - h_{kl})(fg)_{kl} \\ &= \sum_{k,l} (H\delta_{kl} - h_{kl})(g_l f_k + f_{kl} g + f_l g_k + f g_{kl}) \\ &= \sum_{k,l} (H\delta_{kl} - h_{kl})g_l f_k + g \sum_{k,l} (H\delta_{kl} - h_{kl})f_{kl} \\ &\quad + \sum_{k,l} (H\delta_{kl} - h_{kl})f_l g_k + f \sum_{k,l} (H\delta_{kl} - h_{kl})g_{kl} \\ &= fL_1(g) + gL_1(f) + \sum_{k,l} (H\delta_{kl} - h_{kl})f_k g_l + \sum_{k,l} (H\delta_{kl} - h_{kl})f_l g_k \\ &= fL_1(g) + gL_1(f) + H \sum_{k,l} \delta_{kl} f_k g_l - \sum_{k,l} h_{kl} f_k g_l \\ &\quad + H \sum_{k,l} \delta_{kl} f_l g_k - \sum_{k,l} h_{kl} f_l g_k \\ &= fL_1(g) + gL_1(f) + 2H \sum_k f_k g_k - 2 \sum_{k,l} h_{kl} f_k g_l \\ &= fL_1(g) + gL_1(f) + 2\langle P_1(\nabla f), \nabla g \rangle\end{aligned}$$

por P_1 ser auto-adjunto $\rightarrow = fL_1(g) + gL_1(f) + 2\langle \nabla f, P_1(\nabla g) \rangle$.

Assim, temos o resultado.

Proposição 3.7 *Seja N o vetor normal a M^n . Então:*

1. $L_1(N) = (-S_1 S_2 + 3S_3)N - \frac{1}{2}n(n-1) \sum_{k=1}^n R_k e_k$;
2. $L_1(\langle N, v \rangle) = (-S_1 S_2 + 3S_3)\langle N, v \rangle - \frac{1}{2}n(n-1) \sum_{k=1}^n R_k \langle e_k, v \rangle$, onde v é um vetor fixo

em \mathbb{R}^{n+1} ;

Demonstração: 1) Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em M . Então: $\nabla_{e_i} X = e_i$.
Daí:

$$X_{ij} = \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} X = \nabla_{e_i} e_j = h_{ij} N \quad (45)$$

Além disso: $\langle N, e_k \rangle = 0$ e $\langle N, N \rangle = 1$. Dessas igualdades, concluímos que $\langle N_i, e_k \rangle = -h_{ki}$ e $\langle N_i, N \rangle = 0$.

Assim:

$$N_i = - \sum_{k=1}^n h_{ki} e_k.$$

Logo:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= - \sum_{k=1}^n h_{kij} e_k - \sum_{k=1}^n h_{ki} \nabla_{e_j} e_k \\ &= - \sum_{k=1}^n h_{kij} e_k - \sum_{k=1}^n h_{ki} h_{kj} N. \end{aligned} \quad (46)$$

Calculemos agora $L_1(N)$. Por definição, temos que:

$$\begin{aligned} L_1(N) &= \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij}) N_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij}) \left(- \sum_{k=1}^n h_{kij} e_k - \sum_{k=1}^n h_{ki} h_{kj} N \right) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij}) \left(\sum_{k=1}^n h_{ki} h_{kj} \right) N \\ &\quad - \sum_{i,j,k=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij}) h_{kij} e_k. \end{aligned}$$

Usando Codazzi e bilinearidade da segunda forma fundamental, segue-se que:

$$\begin{aligned}
L_1(N) &= - \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij}) \left(\sum_{k=1}^n h_{ki}h_{kj} \right) N \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \left(HH_k - \sum_{i,j=1}^n h_{ij}h_{kij} \right) e_k \\
&= - \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij}) \left(\sum_{k=1}^n h_{ki}h_{kj} \right) N \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}n(n-1)R_k e_k \\
&= \left(- \sum_{i,j,k=1}^n H\delta_{ij}h_{ik}h_{kj} + \sum_{i,j,k=1}^n h_{ki}h_{kj}h_{ij} \right) N \\
&\quad - \frac{1}{2}n(n-1) \sum_{k=1}^n R_k e_k \\
&= (-H|A|^2 + \text{tr}A^3)N - \frac{1}{2}n(n-1) \sum_{k=1}^n R_k e_k.
\end{aligned}$$

Perceba que a Proposição 3.3, item 4, nos fornece: $\text{tr}A^3 = H|A^2| - S_1S_2 + 3S_3$, temos:

$$L_1(N) = (-S_1S_2 + 3S_3)N - \frac{1}{2}n(n-1) \sum_{k=1}^n R_k e_k,$$

segundo-se o resultado.

2) Verifiquemos inicialmente a seguinte:

Afirmção: $L_1(\langle N, v \rangle) = \langle L_1(N), v \rangle$.

Demonstração da Afirmção: Para isso, temos os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
L_1(\langle N, v \rangle) &= \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij}) \langle N, v \rangle_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij}) \langle N_{ij}, v \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i,j=1}^n (H\delta_{ij} - h_{ij}) N_{ij}, v \right\rangle \\
&= \langle L_1(N), v \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, usando-se o resultado obtido no item 1 desta proposição no resultado da Afirmação acima, segue-se que:

$$\begin{aligned} L_1(\langle N, v \rangle) &= \left\langle (-S_1S_2 + 3S_3)N - \frac{1}{2}n(n-1) \sum_{k=1}^n R_k e_k, v \right\rangle \\ &= (-S_1S_2 + 3S_3)\langle N, v \rangle - \frac{1}{2}n(n-1) \sum_{k=1}^n R_k \langle e_k, v \rangle, \end{aligned}$$

o que nos garante o resultado do item 2 desta proposição.

Verifiquemos agora que P_1 é positivo-definido. Tal fato será muito útil no Capítulo 5. A proposição a seguir nos fornece uma condição necessária e suficiente para que P_r seja positivo-definido.

Proposição 3.8 L_r é elíptico se, e somente se, P_r for positivo definido.

Demonstração: Supondo-se L_r elíptico, temos por definição que existe $\theta > 0$ tal que:

$$\sum_{i,j} \left\langle P_r \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p) v_i v_j \geq \theta |v|^2, \right.$$

para quase todo $p \in M$ e para todo $v \in T_p M$ (Para maiores detalhes sobre operadores elípticos, recomendamos a leitura de EVANS (1998. (Graduate Studies in Mathematics), páginas 293-295). Para provarmos que P_r é positivo definido, devemos mostrar, por definição, que $v^T a_r(p) v > 0$, para quase todo ponto $p \in M$ e para todo $v \in T_p M$, $v \neq 0$, onde $(a_r(p))$ é a matriz do operador P_r . Mas note que, dado $p \in M$ e $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p M$:

$$\begin{aligned} v^T a_r(p) v &= \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\langle P_r \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right\rangle & \dots & \left\langle P_r \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle P_r \left(\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right\rangle & \dots & \left\langle P_r \left(\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j} \left\langle P_r \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p) v_i v_j \geq \theta |v|^2 > 0, \right. \end{aligned}$$

pois $v \neq 0$ e $\theta > 0$. Portanto, P_r é positivo definido.

Reciprocamente, supondo-se P_r positivo definido, teremos que $S_r(A_i) > 0$,

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e, dessa forma, $\min\{S_r(A_i); 1 \leq i \leq n\} > 0$. Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \left\langle P_r \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle (p) v_i v_j &= \left\langle P_r \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i e_i \right), \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \tilde{v}_i \tilde{v}_j \langle P_r(e_i), e_j \rangle \\
\text{pelo item 1 da Proposição 3.3} \rightarrow &= \sum_{i,j=1}^n \tilde{v}_i \tilde{v}_j S_r(A_i) \langle e_i, e_j \rangle \\
&\geq \min\{S_r(A_i); 1 \leq i \leq n\} \sum_{i,j=1}^n \tilde{v}_i \tilde{v}_j \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \min\{S_r(A_i); 1 \leq i \leq n\} \langle v, v \rangle \\
&= \min\{S_r(A_i); 1 \leq i \leq n\} |v|^2.
\end{aligned}$$

Assim, tomando $\theta = \min\{S_r(A_i); 1 \leq i \leq n\}$, temos L_r elíptico.

Hounie e Leite em 1999a, Proposição 1.5, página 873, nos garantem que, sendo M^3 uma hipersuperfície em \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula (particularizando o resultado), o operador linearizado L_1 será elíptico em um ponto $p \in M^3$ se, e somente se, tivermos curvatura de Gauss-Kronecker $K \neq 0$ em p .

No cenário dos Capítulos 5 e 6 desta dissertação, consideraremos hipersuperfícies M^3 imersas em \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula e curvatura de Gauss-Kronecker não-nula em todo ponto. Assim, o resultado de Hounie e Leite nos garantirá que L_1 é elíptico e a Proposição 3.8, por sua vez, nos garantirá que P_1 é positivo-definido.

Para maior completude desta dissertação, terminaremos este capítulo apresentando uma demonstração alternativa de que P_1 é positivo-definido, no cenário em que consideramos uma imersão isométrica $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, ou seja M^3 é uma hipersuperfície. Já vimos que, nesse caso, temos $R = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$, $H = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $K = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ e, em consequência da noção de polinômios simétricos, que $HK \leq \frac{1}{2}R^2$.

Em posse disso, considerando $R = 0$ e escolhendo uma orientação para M tal que $H > 0$, observe que, pela definição de P_1 , mostrar que ele é positivo-definido é equivalente a verificar que $H - \lambda_i > 0$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Faremos aqui os cálculos para verificar o caso $i = 1$. Os demais são análogos. Inicialmente, veja que:

$$\lambda_1^2(H - \lambda_1) = \lambda_1^2(\lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3. \quad (47)$$

Uma vez que $R = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0$, segue-se que:

$$\begin{aligned}
 0 = \lambda_1 R &= \lambda_1(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \\
 &= \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
 &= \lambda_1^2(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
 \text{por (47)} \rightarrow &= \lambda_1^2(H - \lambda_1) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3.
 \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\lambda_1^2(H - \lambda_1) = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -K.$$

Observe que $R = 0$, $H > 0$ e $HK \leq \frac{1}{2}R^2$ nos garantem $K \leq 0$. Assim:
 $\lambda_1^2(H - \lambda_1) > 0 \implies H - \lambda_1 > 0$.

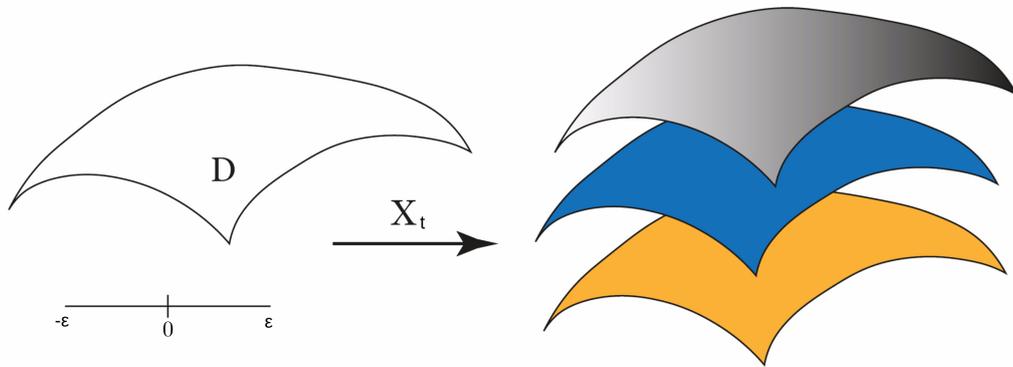
4 O PROBLEMA VARIACIONAL

Fundamentando-se no trabalho de Barbosa e Colares em 1997 e na exposição feita por MELO (2012), o objetivo deste capítulo é apresentar as fórmulas da primeira e segunda variação do volume e, em posse delas, desenvolver a chamada Desigualdade de Estabilidade, a qual se apresentará como uma condição necessária e suficiente para uma imersão ser estável.

Ao longo deste capítulo, M^n denotará uma variedade riemanniana orientável compacta, conexa, sem bordo; $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ será uma imersão isométrica e c será a curvatura seccional de \overline{M}^{n+1} (a Observação 4.1, na reta final deste capítulo, apresentará uma explicação importante sobre como os resultados que serão demonstrados nesta etapa serão válidos para auxiliarem nas demonstrações dos resultados dos capítulos 5 e 6 desta dissertação).

Definição 4.1 *Uma variação de x é uma aplicação diferenciável $X : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ tal que, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, a aplicação $X_t(\cdot) = X(t, \cdot) : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ é uma imersão e $X_0 = x$.*

Figura 4 – Variação X_t .



A função volume associada à variação X é a função $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$V(t) = \int_{[0,t] \times M} X^* d\overline{M}.$$

Dizemos que a variação X preserva volume se $V(t) = V(0)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Definição 4.2 *O campo $\frac{\partial X}{\partial t}(t, p)$ é chamado de campo variacional de X . Denotaremos por $\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T$ a componente tangencial do campo variacional de X .*

Seja N um campo vetorial normal unitário ao longo de x . Ao longo deste capítulo, usaremos a seguinte notação:

$$f = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t, p) \Big|_{t=0}, N \right\rangle.$$

Para cada $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ considere os funcionais:

$$\mathcal{A}_r = \int_M F_r(S_1, \dots, S_r) dM,$$

onde as funções F_r são definidas recursivamente por:

$$F_0 = 1$$

$$F_1 = S_1$$

$$F_r = S_r + \frac{c(n-r+1)}{r-1} F_{r-2}, \text{ para } 2 \leq r \leq n-1.$$

Vamos considerar o problema variacional de minimizar \mathcal{A}_r para variações de x que preservam volume.

Para resolvermos tal problema, precisamos supor inicialmente que um de seus pontos críticos é a imersão dada x . Assim, com relação às variações que preservam volume, a imersão dada x deve ser um ponto crítico da função:

$$\mathcal{A}_r(t) = \int_M F_r(S_1, \dots, S_r) dM_t,$$

onde dM_t é o elemento de volume da métrica induzida em M por X_t .

Para podermos encontrar os pontos críticos deste problema, usaremos um procedimento padrão que consiste em olhar para os pontos críticos de $J_r(t) = \mathcal{A}_r(t) + \lambda V(t)$, onde λ é uma constante.

Para calcular $J'_r(0) = 0$, é necessário inicialmente determinar a derivada de $S_r(t)$ com respeito a t , em $t = 0$. Isso nos é fornecido por REILLY (1973), páginas 471-472, Proposição C, a qual nos garante a

Proposição 4.1 *Sob as notações anteriores, vale:*

$$S'_{r+1} = L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}) f + c(n-r) S_r f + D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T} S_{r+1}.$$

Os três lemas a seguir serão úteis na demonstração da primeira e da segunda fórmula da variação do volume. O primeiro deles pode ser facilmente encontrado também em REILLY (1973) e terá sua prova omitida nesta dissertação.

Lema 4.1 *Seja X uma variação da imersão x . Então:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(dM_t) = \left(-S_1 f + \operatorname{div} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) dM_t,$$

onde $f = f(t) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle$.

Lema 4.2 *Seja X uma variação da imersão x . Então:*

$$V'(t) = \int_M f(t) dM_t.$$

Demonstração: Fixemos um ponto $p \in M$ e escolheremos aqui um referencial ortonormal adaptado positivo $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N\}$ numa vizinhança de $x(p)$. Então:

$$X^*(d\bar{M}) = a(t, p) dt \wedge dM.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} a(t, p) &= X^*(d\bar{M}) \left(\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \dots, e_n \right) \\ &= d\bar{M} \left(\frac{\partial X}{\partial t}, dX_1(e_1), \dots, dX_n(e_n) \right) \\ &= \operatorname{vol} \left(\frac{\partial X}{\partial t}, dX_1(e_1), \dots, dX_n(e_n) \right) \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle = f, \end{aligned}$$

onde N_t é um campo de vetores unitário e normal à imersão X_t . Dessa forma, segue-se que:

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{[0, t] \times M} a(t, p) dt \wedge dM \right) \\ &= \int_M a(t, p) dM_t \\ &= \int_M f(t) dM_t, \end{aligned}$$

e assim temos o resultado.

Quando a variação preserva volume, o resultado acima é testemunha que:

$$\int_M f(t) dM_t = 0.$$

No que se segue, vamos considerar apenas variações que preservam volume.

Lema 4.3 *Para qualquer r :*

$$\mathcal{A}'_r(t) = -(r+1) \int_M S_{r+1}(t) f(t) dM_t.$$

Demonstração: Analisaremos dois casos:

Caso 1: r é par.

Fazendo-se indução sobre r , quando $r = 0$, temos que:

$$\mathcal{A}'_0(t) = \int_M \frac{\partial}{\partial t}(dM_t) = \int_M \left(-S_1 f(t) + \operatorname{div} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) dM_t,$$

onde usamos a definição do funcional \mathcal{A}_r e o Lema 4.1.

Uma vez que M é compacta, segue-se do Teorema da Divergência que:

$$\mathcal{A}'_0(t) = - \int_M S_1 f(t) dM_t.$$

Agora, supondo-se que o lema seja válido para $r - 2$, isto é:

$$\mathcal{A}'_{r-2}(t) = -(r-1) \int_M S_{r-1} f(t) dM_t,$$

provaremos que o resultado é válido para r .

Fazendo uso das definições de $\mathcal{A}_r(t)$ e F_r , obtemos:

$$\mathcal{A}_r(t) = \int_M S_r(t) dM_t + \frac{c(n-r+1)}{r-1} \mathcal{A}_{r-2}(t).$$

E assim:

$$\mathcal{A}'_r(t) = \int_M S'_r(t) dM_t + \int_M S_r \frac{\partial}{\partial t}(dM_t) + \frac{c(n-r+1)}{r-1} \mathcal{A}'_{r-2}(t).$$

Usando-se a hipótese indutiva em conjunto com a Proposição 4.1 e o Lema 4.1, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_r(t) &= \int_M \left(L_{r-1}(f) + [S_1 S_r - (r+1) S_{r+1}] f + c[n-r+1] S_{r-1} f + D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T} S_r \right) dM_t \\ &\quad + \int_M \left(-S_1 f + \operatorname{div} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) S_r dM_t - c(n-r+1) \int_M S_{r-1} f(t) dM_t. \end{aligned}$$

Por outro lado, das propriedades da divergência, temos que:

$$\operatorname{div} \left(S_r \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) = S_r \operatorname{div} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T + D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T} S_r.$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_r(t) &= \int_M \left((L_{r-1}(f) - (r+1)S_{r+1})f + D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T} S_r \right) dM_t \\ &\quad + \int_M \operatorname{div} \left(S_r \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) dM_t - \int_M D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T} S_r dM_t. \end{aligned}$$

Usando-se o fato que o operador L_r pode ser escrito na forma divergente e o Teorema da divergência, obtemos:

$$\int_M L_{r-1}(f) dM_t = 0$$

e

$$\int_M \operatorname{div} \left(S_r \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) dM_t = 0.$$

$$\text{Portanto: } \mathcal{A}'_r(t) = - \int_M (r+1)S_{r+1}f dM_t.$$

Caso 2: r é ímpar.

Novamente, iremos verificar o resultado fazendo indução sobre r . No caso $r = 1$, temos:

$$\mathcal{A}'_1(t) = \int_M S'_1(t) dM_t + \int_M S_1 \frac{\partial}{\partial t} (dM_t).$$

Segue-se da Proposição 4.1 e do Lema 4.1 que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_1(t) &= \int_M \left(L_0(f) + [S_1 S_1 - 2S_2]f + cnf + D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T} S_1 \right) dM_t \\ &\quad + \int_M S_1 \left(-S_1 f + \operatorname{div} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) dM_t. \end{aligned}$$

Por outro lado, das propriedades da divergência, segue-se que:

$$\operatorname{div} \left(S_1 \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) = S_1 \operatorname{div} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T + D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T} S_1.$$

Assim:

$$\mathcal{A}'_1(t) = \int_M \left(L_0(f) - 2S_2 f + cnf + \operatorname{div} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) dM_t.$$

Usando que $L_0 = \Delta$ (Laplaciano) e o Teorema da Divergência, obtemos:

$$\int_M L_0(f) dM_t = \int_M \operatorname{div} \left(S_1 \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^T \right) dM_t = 0.$$

Finalmente, como a variação preserva volume, concluímos que:

$$\mathcal{A}'_1(t) = -2 \int_M S_2 f dM_t.$$

O restante da demonstração é análogo ao que foi na demonstração do caso em que r é par.

Proposição 4.2 (*Fórmula da primeira variação*): *Para qualquer variação de x , vale a igualdade:*

$$J'_r(0) = \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda) f dM_t,$$

onde λ é uma constante e f é a projeção normal do campo variacional.

Demonstração: Como $J_r(t) = \mathcal{A}_r(t) + \lambda V(t)$, temos: $J'_r(t) = \mathcal{A}'_r(t) + \lambda V'(t)$. Fazendo uso dos Lemas 4.2 e 4.3, segue-se que:

$$J'_r(t) = \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda) dM_t.$$

Em particular, vale para $t = 0$.

O Lema 4.4 e a Proposição 4.3 a seguir serão necessários para a demonstração da Segunda Forma da Variação. A demonstração do Lema 4.4 foi apresentada por Barbosa, do Carmo e Eschenburg em 1988 e pode ser encontrada em 2012. p. 291-306, página 294, e será omitida aqui.

Lema 4.4 *Para dada função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\int_M f dM = 0$, existe uma variação normal que preserva volume, cujo campo variacional é fN .*

Proposição 4.3 *Sejam $A = \int_M dM$, $\gamma = A^{-1} \int_M S_{r+1} dM$ e $\lambda = (r+1)\gamma$. Se $J'_r(0) = 0$ para qualquer variação de x , então $\Gamma = \lambda - (r+1)S_{r+1} = 0$.*

Demonstração: Vamos assumir que existe um ponto $p \in M$ onde $\Gamma(p) \neq 0$. Assim, podemos considerar $\Gamma(p) > 0$. Defina os conjuntos abaixo:

$$D^+ := \{q \in M; \Gamma(q) > 0\} \text{ e } D^- := \{q \in M; \Gamma(q) < 0\}.$$

Como Γ é contínua, temos que D^+ é aberto e existe um aberto U tal que $\bar{U} \subset D^+$. Usando-se partição da unidade, é possível mostrar que existe uma função suave $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

1. $0 \leq \phi \leq 1$;
2. $\phi = 1$ em U ;
3. $\text{supp}(\phi) \subset D^+$.

Dessa forma: $\alpha_1 = \int_M \phi \Gamma dM > 0$.

Agora, sendo:

$$\int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda) dM = -(r+1) \int_M S_{r+1} dM + (r+1)A\gamma = 0,$$

temos que existe um aberto V tal que $\bar{V} \subset D^-$.

Usando-se mais uma vez a partição da unidade, garantimos a existência de uma função suave $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

1. $0 \leq \psi \leq 1$;
2. $\psi = 1$ em V ;
3. $\text{supp}(\psi) \subset D^-$.

Dessa forma: $\alpha_2 = \int_M \psi \Gamma dM < 0$.

Tome então $\alpha = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \psi > 0$. Assim:

$$\int_M (\phi + \alpha) \Gamma dM = \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \alpha_2 = 0.$$

Pelo Lema 4.4, temos que existe uma variação da imersão x que preserva volume cujo vetor variacional é $(\phi + \alpha)\Gamma.N$. Assim, pela Fórmula da Primeira Variação, segue-se que:

$$0 = \int_M (\phi + \alpha) \Gamma^2 dM > 0.$$

Tal contradição oriunda do fato de supormos a existência de um ponto $p \in M$, onde $\Gamma(p) \neq 0$. Desta forma, $\lambda = (r+1)S_{r+1}$, o que completa a demonstração.

A Proposição 4.3 acima nos diz que os pontos críticos para o problema variacional são imersões com curvatura média constante. A fim de decidir se a imersão é ou não um mínimo local, calcularemos a segunda derivada de $\mathcal{A}_r(t)$ em $t = 0$.

Observe que, para variações que preservam volume, temos $J'_r(t) = \mathcal{A}'_r(t)$. Assim, para calcular $\mathcal{A}''_r(0)$ é suficiente calcular $J''_r(0)$.

Proposição 4.4 (*Fórmula da segunda variação*) Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica com S_{r+1} constante e c a curvatura seccional de \overline{M}^{n+1} . Para variações que preservam volume, a segunda derivada de \mathcal{A}_r em $t = 0$ é dada por:

$$\mathcal{A}_r''(0) = -(r+1) \int_M f[L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f] dM. \quad (48)$$

Demonstração: Da Proposição 4.2, temos:

$$J_r'(t) = \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda)f dM_t.$$

Derivando $J_r'(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} J_r''(t) &= \int_M \frac{\partial}{\partial t} (-(r+1)S_{r+1} + \lambda)f(t) dM_t \\ &\quad + \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda)f'(t) dM_t \\ &\quad + \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda)f(t) \frac{\partial}{\partial t} (dM_t). \end{aligned}$$

Observe que, para $t = 0$ as duas últimas integrais da igualdade acima se anulam, pois $\lambda = (r+1)S_{r+1}$, pela Proposição 4.3.

Da Proposição 4.1, segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (-(r+1)S_{r+1} + \lambda)|_{t=0} &= -(r+1)S_{r+1}'(0) \\ &= -(r+1)[L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f]. \end{aligned}$$

Tal igualdade nos fornece o resultado desejado.

Vejamos agora a já mencionada

Observação 4.1: NETO (2014), artigo-base desta dissertação, trabalha com uma versão diferente da Definição 4.1 de variações apresentada neste capítulo, a qual consiste em:

Definição (de variação com suporte compacto): Seja $D \subset M^3$ um domínio regular em uma variedade riemanniana M^3 imersa em \mathbb{R}^4 , isto é, D é um domínio com fecho compacto e bordo suave por partes. Uma variação com suporte compacto de uma imersão x é uma aplicação diferenciável $X : (-\epsilon, \epsilon) \times D \rightarrow \mathbb{R}^4$, com $\epsilon > 0$, tal que, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. $X_t : D \rightarrow \mathbb{R}^4$, com $X_t(p) = X(t, p)$ é uma imersão satisfazendo $X_0 = x|_D$ e X_t fixa o bordo, isto é: $X_t|_{\partial D} = X_0|_{\partial D}$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Essa versão da definição de variação se faz necessária porque nos Capítulos

5 e 6 desta dissertação passaremos a trabalhar com variedades riemannianas M^3 não-compactas. Assim, se analisarmos esse cenário de não-compactidade em restrições onde a variedade M^3 será compacta, por meio da noção de suporte compacto, teremos que os resultados demonstrados neste capítulo continuarão válidos no restante do texto. Além disso, perceba que a consideração feita no início deste capítulo de que a variedade M não possui bordo é adaptada nessa nova versão da definição de variação por meio da noção de bordo fixado. Ou seja, independente da versão adotada, o bordo não influenciará nos resultados.

Estamos, enfim, em condições de contemplar a definição de estabilidade (a qual será dada de acordo com Alencar, do Carmo e Elbert em 2003) e de que forma ela será explorada nesta dissertação.

Definição 4.3 *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Escolhendo-se uma orientação para M^n tal que $H > 0$ em todo ponto, dizemos que a imersão será estável se $\mathcal{A}_1''(0) > 0$, sob todas as variações com suporte compacto. Analogamente, escolhendo uma orientação tal que $H < 0$, a imersão será dita estável se $\mathcal{A}_1''(0) < 0$, também sob todas as variações com suporte compacto.*

Considerando $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica estável, tal que $R = 0$, $r = 1$ e $\overline{M}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^4$, teremos $n = 3$, $c = 0$, $S_2 = 0$, pela Proposição 3.1 e $S_3 = K$, pela definição da curvatura de Gauss-Kronecker. Dessa forma, (48) se torna:

$$\mathcal{A}_1''(0) = -2 \int_M f(L_1(f) - 3Kf)dM > 0.$$

E assim, ganhamos:

$$\int_M f(L_1(f) - 3Kf)dM \leq 0. \quad (49)$$

A Proposição 3.6, no caso $r = 1$, é testemunha que

$$\int_M fL_1(f)dM = - \int_M \langle P_1 \nabla f, \nabla f \rangle dM. \quad (50)$$

Combinando (49) e (50), segue-se que:

$$0 \geq \int_M f(L_1(f) - 3Kf)dM = - \int_M (\langle P_1 \nabla f, \nabla f \rangle + 3Kf^2)dM.$$

Assim:

$$-\int_M \langle P_1 \nabla f, \nabla f \rangle dM - \int_M 3K f^2 dM \leq 0,$$

e portanto:

$$-3 \int_M K f^2 dM \leq \int_M \langle P_1 \nabla f, \nabla f \rangle dM. \quad (51)$$

Perceba que essa última sequência de cálculos também é verdadeira quando partimos da desigualdade (51) e voltamos para a desigualdade (49), que segue diretamente da definição de estabilidade. Ou seja, a desigualdade (51) nos garante uma condição necessária e suficiente para uma imersão ser estável (dentro do que foi considerado até o momento), de acordo com a Definição 4.3. Por essa importância, (51) será de agora em diante chamada de Desigualdade de Estabilidade e será muito útil no Capítulo 5 a seguir.

No Apêndice B, veremos que a Desigualdade de Estabilidade muda de acordo com o tipo de hipersuperfícies que é considerado inicialmente.

Observação 4.2: Quando $H < 0$, temos então que $K > 0$ e P_1 é negativo definido. Nesse caso, a Desigualdade de Estabilidade mostrada em (51) se torna:

$$3 \int_M K f^2 dM \leq \int_M \langle (-P_1)(\nabla f), \nabla f \rangle dM. \quad (52)$$

5 RESULTADOS AUXILIARES

Os principais resultados deste capítulo são a Proposição 5.2 e o seu posterior Corolário 5.1. Eles serão determinantes na demonstrações dos resultados-alvo desta dissertação, que serão apresentados no próximo capítulo. Mas, para entendê-los, será preciso apresentar antes os dois resultados a seguir.

Proposição 5.1 *Se $R = 0$ e existe $c > 0$ tal que $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então existe $c_0 > 0$, dependendo apenas de c , tal que:*

$$|\nabla A|^2 - |\nabla H|^2 \geq \frac{2}{1 + 2c_0^2} |\nabla H|^2,$$

onde ∇H é o gradiente de H .

Demonstração: Considere $p \in M$ e escolha $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ tal que $h_{ij}(p) = \lambda_i(p)\delta_{ij}$, onde $h_{ij} = \langle A(e_i), e_j \rangle$, $\lambda_i(p)$ denotam os autovalores de A em p e δ_{ij} é o delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Estendendo esta base via transporte paralelo ao longo de geodésicas partindo de p para um referencial em uma vizinhança de p , temos $\nabla_{e_i(p)} e_j(p) = 0$, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$. Este referencial é chamado de referencial geodésico em p .

Vamos denotar por $h_{ij;k} = (h_{ij})_k := e_k(h_{ij})$ as derivadas covariantes da função h_{ij} , e por h_{ijk} os componentes do tensor ∇A no referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$, isto é, $h_{ijk} = \nabla A(e_1, e_2, e_3)$. Visto que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é um referencial geodésico, temos:

$$\begin{aligned} h_{ijk} &= \nabla A(e_i, e_j, e_k) = \langle \nabla_{e_k} (A(e_i)) - A(\nabla_{e_k} e_i), e_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_k} (A(e_i)), e_j \rangle - \underbrace{\langle A(\nabla_{e_k} e_i), e_j \rangle}_{=0} \\ &= \langle \nabla_{e_k} (A(e_i)), e_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_k} (A(e_i)), e_j \rangle + \langle A(e_i), \nabla_{e_k} e_j \rangle - \langle A(e_i), \nabla_{e_k} e_j \rangle \\ &= e_k(\langle A(e_i), e_j \rangle) - \underbrace{\langle A(e_i), \nabla_{e_k} e_j \rangle}_{=0} \\ &= e_k(\langle A(e_i), e_j \rangle) \\ &= e_k(h_{ij}) \\ &= h_{ij;k}, \end{aligned}$$

isto é,

$$h_{ijk} = h_{ij;k}.$$

Como $R = 0$, temos que $H^2 = |A|^2$ (lembrando que $H^2 = |A|^2 + 2R$). Usando este fato, temos:

$$\begin{aligned} 4H^2|\nabla H|^2 &= 4H^2\langle\nabla H, \nabla H\rangle \\ &= \langle 2H\nabla H, 2H\nabla H\rangle \\ \text{regra da cadeia } \rightarrow &= \langle \nabla(H^2), \nabla(H^2)\rangle \\ &= |\nabla(H^2)|^2 \\ &= |\nabla(|A|^2)|^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{i,j=1}^3 h_{ij}^2 \right)_k \right]^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i,j=1}^3 2h_{ij}h_{ij;k} \right)^2 \\ &= 4 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 h_{ii}h_{ii;k} \right)^2. \end{aligned}$$

Em seguida, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 h_{ii}h_{ii;k} \right)^2 &\leq 4 \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{i=1}^3 h_{ii}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^3 h_{ii;k}^2 \right) \right] \\ &= 4|A|^2 \left(\sum_{i,k=1}^3 h_{ii;k}^2 \right) \\ &= 4H^2 \left(\sum_{i,k=1}^3 h_{ii;k}^2 \right). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} 4H^2|\nabla H|^2 &\leq 4H^2 \left(\sum_{i,k=1}^3 h_{ii;k}^2 \right) \\ \Rightarrow |\nabla H|^2 &\leq \sum_{i,k=1}^3 h_{ii;k}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabendo-se que $R = h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 = 0$, temos, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
0 &= (h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2)_k \\
&= h_{11k}h_{22} + h_{11}h_{22k} + h_{11k}h_{33} + h_{11}h_{33k} + h_{22k}h_{33} + h_{22}h_{33k} - \underbrace{2h_{12}h_{12k}}_{=0} - \underbrace{2h_{13}h_{13k}}_{=0} - \underbrace{2h_{23}h_{23k}}_{=0} \\
&= h_{11k}(h_{22} + h_{33}) + h_{22k}(h_{11} + h_{33}) + h_{33k}(h_{11} + h_{22}) \\
&= h_{11k}(H - h_{11}) + h_{22k}(H - h_{22}) + h_{33k}(H - h_{33}).
\end{aligned}$$

Logo:

$$h_{11k}(H - h_{11}) + h_{22k}(H - h_{22}) + h_{33k}(H - h_{33}) = 0. \quad (53)$$

Escolhendo $k = 1$ em (53), temos:

$$h_{111}(H - h_{11}) = -h_{221}(H - h_{22}) - h_{331}(H - h_{33}).$$

E assim:

$$h_{111} = \frac{-1}{H - h_{11}} [h_{221}(H - h_{22}) + h_{331}(H - h_{33})]. \quad (54)$$

Analogamente, para $k = 2$ e $k = 3$ respectivamente, obtemos:

$$h_{222} = \frac{-1}{H - h_{22}} [h_{112}(H - h_{11}) + h_{332}(H - h_{33})] \quad (55)$$

e

$$h_{333} = \frac{-1}{H - h_{33}} [h_{113}(H - h_{11}) + h_{223}(H - h_{22})]. \quad (56)$$

Agora, elevando-se ao quadrado e somando as igualdades (54), (55) e (56), teremos:

$$\begin{aligned}
h_{111}^2 + h_{222}^2 + h_{333}^2 &= \frac{1}{(H - h_{11})^2} [h_{221}(H - h_{22}) + h_{331}(H - h_{33})]^2 \\
&\quad + \frac{1}{(H - h_{22})^2} [h_{112}(H - h_{11}) + h_{332}(H - h_{33})]^2 \\
&\quad + \frac{1}{(H - h_{33})^2} [h_{113}(H - h_{11}) + h_{223}(H - h_{22})]^2.
\end{aligned} \quad (57)$$

Agora, usando a desigualdade $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, (57) se torna:

$$h_{111}^2 + h_{222}^2 + h_{333}^2 \leq 2 \left[\frac{(H - h_{22})^2}{(H - h_{11})^2} h_{221}^2 + \frac{(H - h_{33})^2}{(H - h_{11})^2} h_{331}^2 + \frac{(H - h_{33})^2}{(H - h_{22})^2} h_{112}^2 \right] + 2 \left[\frac{(H - h_{33})^2}{(H - h_{22})^2} h_{332}^2 + \frac{(H - h_{11})^2}{(H - h_{33})^2} h_{113}^2 + \frac{(H - h_{22})^2}{(H - h_{33})^2} h_{223}^2 \right]. \quad (58)$$

Defina $g_{ij} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g_{ij}(h_{11}, h_{22}, h_{33}) = \left(\frac{H - h_{ii}}{H - h_{jj}} \right)^2$, para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Observemos o caso em que $i = 1$ e $j = 2$. Como $H = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = h_{11} + h_{22} + h_{33}$, segue-se que $H - h_{11} = h_{22} + h_{33}$ e $H - h_{22} = h_{11} + h_{33}$. Dessa forma:

$$g_{12}(h_{11}, h_{22}, h_{33}) = \left(\frac{H - h_{11}}{H - h_{22}} \right)^2 = \frac{h_{22}^2 + 2h_{22}h_{33} + h_{33}^2}{h_{11}^2 + 2h_{11}h_{33} + h_{33}^2}.$$

E assim:

$$\begin{aligned} g_{12}(th_{11}, th_{22}, th_{33}) &= \frac{t^2 h_{22}^2 + 2t^2 h_{22} h_{33} + t^2 h_{33}^2}{t^2 h_{11}^2 + 2t^2 h_{11} h_{33} + t^2 h_{33}^2} \\ &= \frac{t^2 (h_{22}^2 + 2h_{22} h_{33} + h_{33}^2)}{t^2 (h_{11}^2 + 2h_{11} h_{33} + h_{33}^2)} \\ &= \frac{h_{22}^2 + 2h_{22} h_{33} + h_{33}^2}{h_{11}^2 + 2h_{11} h_{33} + h_{33}^2} \\ &= g_{12}(h_{11}, h_{22}, h_{33}). \end{aligned}$$

Fazendo-se cálculos análogos para qualquer combinação de i e j em $\{1, 2, 3\}$, poderemos concluir que as funções g_{ij} são quocientes de polinômios homogêneos de grau 2. Assim, os valores de g_{ij} dependem apenas de sua restrição a \mathbb{S}^2 .

Como $\{(h_{11}, h_{22}, h_{33}) \in \mathbb{R}^3; R = 0\}$ é fechado em \mathbb{R}^3 , segue-se que $\{(h_{11}, h_{22}, h_{33}) \in \mathbb{R}^3; \frac{-K}{H^3} \geq c > 0\} = \{(h_{11}, h_{22}, h_{33}) \in \mathbb{S}^2; \frac{-K}{H^3} \geq c > 0\}$ é compacto em \mathbb{R}^3 . Assim, a interseção $\{(h_{11}, h_{22}, h_{33}) \in \mathbb{S}^2; \frac{-K}{H^3} \geq c > 0\} \cap \mathbb{S}^2$ é um subconjunto compacto de \mathbb{S}^2 . Portanto, todas as funções g_{ij} tem um máximo e um mínimo em \mathbb{S}^2 . Considerando $c_0 > 0$ o maior dos valores máximos das funções $g_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, então (58) se torna:

$$h_{111}^2 + h_{222}^2 + h_{333}^2 \leq 2c_0^2 (h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{221}^2 + h_{223}^2 + h_{331}^2 + h_{332}^2). \quad (59)$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
|\nabla H|^2 &\leq \sum_{i,k=1}^3 h_{ii;k}^2 = h_{111}^2 + h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{221}^2 + h_{222}^2 + h_{223}^2 + h_{331}^2 + h_{332}^2 + h_{333}^2 \\
&= 2c_0^2 (h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{221}^2 + h_{223}^2 + h_{331}^2 + h_{332}^2) \\
&\quad + h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{221}^2 + h_{223}^2 + h_{331}^2 + h_{332}^2 \\
&= (1 + 2c_0^2) (h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{221}^2 + h_{223}^2 + h_{331}^2 + h_{332}^2) \\
&\leq (1 + 2c_0^2) \left[\frac{1}{2} (h_{121}^2 + h_{211}^2) + \frac{1}{2} (h_{131}^2 + h_{311}^2) + \frac{1}{2} (h_{212}^2 + h_{122}^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (h_{232}^2 + h_{322}^2) + \frac{1}{2} (h_{313}^2 + h_{133}^2) + \frac{1}{2} (h_{323}^2 + h_{233}^2) \right] \\
&= \frac{(1 + 2c_0^2)}{2} \left[h_{121}^2 + h_{211}^2 + h_{131}^2 + h_{311}^2 + h_{212}^2 + h_{122}^2 + h_{232}^2 + h_{322}^2 \right. \\
&\quad \left. + h_{313}^2 + h_{133}^2 + h_{323}^2 + h_{233}^2 \right] \\
&= \frac{(1 + 2c_0^2)}{2} \left[\sum_{i \neq k=1}^3 h_{iki}^2 + \sum_{i \neq k=1}^3 h_{kii}^2 \right].
\end{aligned}$$

Logo:

$$\sum_{i \neq k=1}^3 h_{iki}^2 + \sum_{i \neq k=1}^3 h_{kii}^2 \geq \frac{2}{(1 + 2c_0^2)} |\nabla H|^2. \quad (60)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
|\nabla A|^2 &= \sum_{i,j,k=1}^3 h_{ijk}^2 \geq \sum_{i,k=1}^3 h_{iik}^2 + \sum_{i \neq k=1}^3 h_{iki}^2 + \sum_{i \neq k=1}^3 h_{kii}^2 \\
\text{por (60)} \rightarrow &\geq |\nabla H|^2 + \frac{2}{(1 + 2c_0^2)} |\nabla H|^2,
\end{aligned}$$

segundo-se o resultado.

A demonstração do Lema 5.1 a seguir pode ser encontrada em AQUINO (2003), porém será exposta aqui não apenas por questão de comodidade de leitura, mas também para apresentar o mesmo resultado com uma demonstração adaptada para o cenário em que trabalhamos com a curvatura média H não-normalizada.

Lema 5.1 *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica, onde \overline{M}^{n+1} possui curvatura seccional constante e igual a c e M^n tem curvatura escalar nula. Então:*

$$L_1(H) = |\nabla A|^2 - |\nabla H|^2 + 3S_3H + c(n|A|^2 + H^2) + n(n-1)(R-c) \left(|A|^2 - \frac{1}{2}H^2 \right),$$

onde A é a segunda forma fundamental e $H = S_1$ é a curvatura média não-normalizada.

Demonstração: Temos por (7) e pela Proposição 3.1 que $H^2 - |A|^2 = 2S_2 = n(n-1)(R-c)$. Então, em termos de um referencial ortonormal (e_1, \dots, e_{n+1}) , considerando $f \in \mathcal{D}(M)$ segue-se que:

$$L_1(f) = \sum_{i,j=1}^n (S_1 \delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij},$$

onde h_{ij} são os elementos da matriz da segunda forma fundamental associada à x .

Assim:

$$H^2 - \sum_{k,l=1}^n h_{kl}^2 = n(n-1)(R-c). \quad (61)$$

Sendo R constante e igual a zero, derivando covariantemente ambos os membros da equação (61), segue-se que:

$$2HH_i - 2 \sum_{k,l=1}^n h_{kl} h_{kli} = 0.$$

E assim:

$$HH_i - \sum_{k,l=1}^n h_{kl} h_{kli} = 0. \quad (62)$$

Derivando mais uma vez, obtemos:

$$H_i H_j + HH_{ij} - \sum_{k,l=1}^n h_{kli} h_{klj} - \sum_{k,l=1}^n h_{kl} h_{klij} = 0. \quad (63)$$

E fazendo $i = j$ em (63), teremos:

$$H_i^2 + HH_{ii} - \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 - \sum_{k,l=1}^n h_{kl} h_{klii} = 0. \quad (64)$$

Usando o fato que $h_{ijk} = h_{ikj}$, temos:

$$H_i = \sum_{k=1}^n h_{kki} = \sum_{k=1}^n h_{kik}.$$

Logo:

$$H_{ii} = \sum_{k=1}^n h_{kkii} = \sum_{k=1}^n h_{kiiik}.$$

Então, (64) se torna:

$$H_i^2 - \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 = -H \sum_{k=1}^n h_{kiki} + \sum_{k,l=1}^n h_{kl} h_{ilki}. \quad (65)$$

Usando o fato de que:

$$h_{jyki} - h_{jlik} = - \sum_{m=1}^n h_{ml} R_{mjik} - \sum_{m=1}^n h_{jm} R_{mlik},$$

obtemos:

$$h_{ikki} = h_{ikik} - \sum_{m=1}^n h_{mk} R_{miik} - \sum_{m=1}^n h_{im} R_{mkik} \quad (66)$$

e

$$h_{ilki} = h_{ilik} - \sum_{m=1}^n h_{ml} R_{miik} - \sum_{m=1}^n h_{im} R_{mlik}. \quad (67)$$

Substituindo (66) e (67) em (65), obtemos:

$$\begin{aligned} H_i^2 - \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 &= -H \sum_{k=1}^n \left[h_{ikik} - \sum_{m=1}^n h_{mk} R_{miik} - \sum_{m=1}^n h_{im} R_{mkik} \right] \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^n \left[h_{kl} h_{ilki} - h_{kl} \sum_{m=1}^n h_{ml} R_{miik} - h_{kl} \sum_{m=1}^n h_{im} R_{mlik} \right]. \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} H_i^2 - \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 &= -H \sum_{k,l=1}^n \delta_{kl} h_{iikl} + \sum_{k,l=1}^n h_{kl} h_{iilk} \\ &\quad + H \sum_{k,m=1}^n [h_{mk} R_{miik} + h_{im} R_{mkik}] \\ &\quad - \sum_{k,l,m=1}^n [h_{kl} h_{ml} R_{miik} + h_{kl} h_{im} R_{mlik}]. \end{aligned}$$

Observe ainda que $L_1(h_{ii}) = \sum_{k,l=1}^n [H\delta_{kl} - h_{kl}] h_{iikl}$ (operador linearizado na abordagem de Cheng e Yau, apresentada em (13), no Capítulo 3).

Assim:

$$\begin{aligned}
L_1(h_{ii}) &= \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 - H_i^2 + H \sum_{k,m=1}^n [h_{mk}R_{mii} + h_{im}R_{mki}] \\
&\quad - \sum_{k,l,m=1}^n [h_{kl}h_{ml}R_{mii} + h_{kl}h_{im}R_{mli}]. \tag{68}
\end{aligned}$$

A Equação de Gauss é testemunha que:

$$R_{mii} = \bar{R}_{mii} - (h_{mk}h_{ii} - h_{mi}h_{ik}) \tag{69}$$

e

$$R_{mli} = \bar{R}_{mli} - (h_{mk}h_{li} - h_{mi}h_{lk}). \tag{70}$$

Substituindo (69) e (70) em (68), obtemos:

$$\begin{aligned}
L_1(h_{ii}) &= \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 - H_i^2 + H \sum_{k,m=1}^n h_{mk}\bar{R}_{mii} + H \sum_{k,m=1}^n h_{mk}h_{mi}h_{ik} \\
&\quad - H \sum_{k,m=1}^n h_{mk}^2 h_{ii} + H \sum_{k,m=1}^n h_{im}\bar{R}_{mki} + H \sum_{k,m=1}^n h_{im}^2 h_{kk} \\
&\quad - H \sum_{k,m=1}^n h_{im}h_{mk}h_{ki} - \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl}h_{ml}\bar{R}_{mii} \\
&\quad - \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl}h_{ml}h_{mi}h_{ik} + \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl}h_{ml}h_{mk}h_{ii} \\
&\quad - \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl}h_{im}\bar{R}_{mli} - \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl}h_{im}^2 h_{kl} + \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl}h_{im}h_{mk}h_{li}. \tag{71}
\end{aligned}$$

Observando-se que $|A|^2 = \sum_{k,l=1}^n h_{kl}^2$, $H = \sum_{k=1}^n h_{kk}$ e que algumas parcelas de (71)

se anulam, obtemos:

$$\begin{aligned}
L_1(h_{ii}) &= \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 - H_i^2 + H \sum_{k,m=1}^n h_{mk} \bar{R}_{mii} \\
&+ H \sum_{k,m=1}^n h_{im} \bar{R}_{mkik} + H^2 \sum_{k,m=1}^n h_{im}^2 \\
&- \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl} h_{ml} \bar{R}_{mii} + (\text{tr} A^3) h_{ii} \\
&- |A|^2 \sum_{m=1}^n h_{im}^2 - H |A|^2 h_{ii} - \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl} h_{im} \bar{R}_{mlik}. \tag{72}
\end{aligned}$$

Uma vez que \bar{M}^{n+1} tem curvatura seccional constante por hipótese, temos que $\bar{R}_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$. Usando o fato de que $H^2 - |A|^2 = 2S_2 = n(n-1)(R-c)$, temos que (72) se torna:

$$\begin{aligned}
L_1(h_{ii}) &= \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 - H_i^2 + Hc \sum_{k,m=1}^n h_{mk} (\delta_{mi}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ii}) \\
&+ Hc \sum_{k,m=1}^n h_{im} (\delta_{mi}\delta_{kk} - \delta_{mk}\delta_{ik}) - H |A|^2 h_{ii} \\
&- c \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl} h_{ml} (\delta_{mi}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ii}) + (\text{tr} A^3) h_{ii} \\
&+ n(n-1)(R-c) \sum_{m=1}^n h_{im}^2 - c \sum_{k,l,m=1}^n h_{kl} h_{im} (\delta_{mi}\delta_{lk} - \delta_{mk}\delta_{li}). \tag{73}
\end{aligned}$$

Observando que:

$$\delta_{mi}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ii} = \begin{cases} -1, & \text{se } m = k \\ 0, & \text{se } m \neq k \end{cases}, \tag{74}$$

$$\delta_{mi}\delta_{lk} - \delta_{mk}\delta_{li} = \begin{cases} 1, & \text{se } l = k \\ 0, & \text{se } l \neq k \end{cases}, \tag{75}$$

e

$$\delta_{mi}\delta_{ll} - \delta_{mk}\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = i \\ 0, & \text{se } m \neq i \end{cases}, \quad (76)$$

substituindo (74), (75) e (76) em (73) será equivalente a:

$$\begin{aligned} L_1(h_{ii}) &= \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 - H_i^2 - Hc \sum_{k=1}^n h_{kk} + Hch_{ii} \\ &+ c \sum_{k,l=1}^n h_{kl}^2 - H|A|^2 h_{ii} + (\text{tr} A^3) h_{ii} \\ &+ n(n-1)(R-c) \sum_{m=1}^n h_{im}^2 - c \sum_{k=1}^n h_{kk} h_{ii}. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} L_1(h_{ii}) &= \sum_{k,l=1}^n h_{kli}^2 - H_i^2 - cH^2 + Hch_{ii} \\ &+ c|A|^2 - H|A|^2 h_{ii} + (\text{tr} A^3) h_{ii} \\ &+ n(n-1)(R-c) \sum_{m=1}^n h_{im}^2 + cnHh_{ii}. \end{aligned}$$

Como $H = \sum_{i=1}^n h_{ii}$, temos $L_1(H) = \sum_{i=1}^n L_1(h_{ii})$ e, portanto:

$$\begin{aligned} L_1(H) &= \sum_{k,l,i=1}^n h_{kli}^2 - \sum_{i=1}^n H_i^2 - cnH^2 + cH^2 \\ &+ cn|A|^2 - H^2|A|^2 + (\text{tr} A^3)H \\ &+ n(n-1)(R-c)|A|^2 + cnH^2. \end{aligned}$$

Sabendo-se, por meio da definição do operador P_1 , que $A^3 = HA^2 - A^2P_1$, tomando-se o traço, obtemos: $\text{tr}(A^3) = H\text{tr}(A^2) - \text{tr}(A^2P_1)$. Além disso, $\text{tr}(A^2P_r) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$, pela Proposição 3.3, item 4.

Assim, fazendo $r = 0$ e $r = 1$, obtemos: $\text{tr}(A^3) = H(H^2 - 2S_2) - HS_2 + 3S_3$.

Como $2S_2 = n(n-1)(R-c)$, temos que:

$$\text{tr}(A^3) = H|A|^2 - \frac{1}{2}n(n-1)(R-c)H + 3S_3.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
L_1(H) &= |\nabla A|^2 - |\nabla H|^2 - cnH^2 + cH^2 \\
&\quad + cn|A|^2 - H^2|A|^2 + \left(H|A|^2 - \frac{1}{2}n(n-1)(R-c)H + 3S_3 \right) H \\
&\quad + n(n-1)(R-c)|A|^2 + cnH^2 \\
&= |\nabla A|^2 - |\nabla H|^2 + c(n|A|^2 + H^2) \\
&\quad - H^2|A|^2 + H^2|A|^2 - \frac{1}{2}n(n-1)(R-c)H^2 \\
&\quad + 3S_3H + n(n-1)(R-c)|A|^2.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
L_1(H) &= |\nabla A|^2 - |\nabla H|^2 + 3S_3H + c(n|A|^2 + H^2) \\
&\quad + n(n-1)(R-c) \left(|A|^2 - \frac{1}{2}H^2 \right),
\end{aligned}$$

como queríamos.

Estamos, enfim, em condições de demonstrar os dois resultados principais deste capítulo, sendo que o primeiro deles consiste na seguinte

Proposição 5.2 *Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica com curvatura escalar nula, estável e tal que $K \neq 0$ em todo ponto. Se existe uma constante $c > 0$ tal que $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então para toda função suave ψ com suporte compacto em M , para todo $\delta > 0$ e para todo $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$, existem constantes $\Lambda_1(q), \Lambda_2(q) > 0$ tais que:*

$$\int_M H^{5+2q} \left(\frac{-K}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) \psi^{5+2q} dM \leq \Lambda_2 \delta^{\frac{-(5+2q)}{2}} \int_M |\nabla \psi|^{5+2q} dM. \quad (77)$$

Demonstração: Vamos escolher uma orientação para M tal que $H > 0$ e aplicar a Desigualdade de Estabilidade (51):

$$3 \int_M (-K) f^2 dM \leq \int_M \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle dM,$$

para $f = H^{1+q}\varphi$, onde $q > 0$ e φ é uma função suave com suporte compacto em M .

Inicialmente, notemos que a Proposição 2.6, item 2 (propriedade do gradiente) nos garante:

$$\nabla f = \nabla(H^{1+q}\varphi) = (1+q)H^q\varphi\nabla H + H^{1+q}\nabla\varphi.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle &= \langle P_1((1+q)H^q\varphi\nabla H + H^{1+q}\nabla\varphi), (1+q)H^q\varphi\nabla H + H^{1+q}\nabla\varphi \rangle \\
&= \langle (1+q)H^q\varphi P_1(\nabla H) + H^{1+q}P_1(\nabla\varphi), (1+q)H^q\varphi\nabla H + H^{1+q}\nabla\varphi \rangle \\
&= \langle (1+q)H^q\varphi P_1(\nabla H), (1+q)H^q\varphi\nabla H \rangle + \langle (1+q)H^q\varphi P_1(\nabla H), H^{1+q}\nabla\varphi \rangle \\
&\quad + \langle H^{1+q}P_1(\nabla\varphi), (1+q)H^q\varphi\nabla H \rangle + \langle H^{1+q}P_1(\nabla\varphi), H^{1+q}\nabla\varphi \rangle \\
&= (1+q)^2 H^{2q}\varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle + 2(1+q)H^{1+2q}\varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla\varphi \rangle \\
&\quad + H^{2+2q} \langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle &= (1+q)^2 H^{2q}\varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle + 2(1+q)H^{1+2q}\varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla\varphi \rangle \\
&\quad + H^{2+2q} \langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle. \tag{78}
\end{aligned}$$

A seguir, vamos estimar a segunda parcela do membro direito da igualdade (78). Pelo fato de P_1 ser positivo-definido, conforme foi mostrado no Capítulo 3, temos que existe $\sqrt{P_1}$, que também será auto-adjunto e, além disso, $P_1 = (\sqrt{P_1})(\sqrt{P_1})$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, seguida pela desigualdade $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, a qual é válida para todo $x, y \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
H^{1+2q}\varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla\varphi \rangle &= H^{2q} \langle \varphi P_1(\nabla H), H\nabla\varphi \rangle \\
&= H^{2q} \langle \sqrt{\beta}\varphi P_1(\nabla H), (1/\sqrt{\beta})H\nabla\varphi \rangle \\
\text{por } \sqrt{P_1} \text{ ser auto-adjunto:} &= H^{2q} \langle \sqrt{\beta}\varphi\sqrt{P_1}(\nabla H), (1/\sqrt{\beta})H\sqrt{P_1}(\nabla\varphi) \rangle \\
&\leq H^{2q} \|\sqrt{\beta}\varphi\sqrt{P_1}(\nabla H)\| \|(1/\sqrt{\beta})H\sqrt{P_1}(\nabla\varphi)\| \\
&\leq H^{2q} \left(\frac{\|\sqrt{\beta}\varphi\sqrt{P_1}(\nabla H)\|^2}{2} + \frac{\|(1/\sqrt{\beta})H\sqrt{P_1}(\nabla\varphi)\|^2}{2} \right) \\
&= H^{2q} \left(\frac{\beta\varphi^2}{2} \|\sqrt{P_1}(\nabla H)\|^2 + \frac{H^2}{2\beta} \|\sqrt{P_1}(\nabla\varphi)\|^2 \right) \\
&= H^{2q} \left(\frac{\beta\varphi^2}{2} \langle \sqrt{P_1}(\nabla H), \sqrt{P_1}(\nabla H) \rangle + \frac{H^2}{2\beta} \langle \sqrt{P_1}(\nabla\varphi), \sqrt{P_1}(\nabla\varphi) \rangle \right) \\
&= H^{2q} \left(\frac{\beta\varphi^2}{2} \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle + \frac{H^2}{2\beta} \langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle \right) \\
&= \frac{\beta}{2} H^{2q}\varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle + \frac{1}{2\beta} H^{2+2q}\varphi^2 \langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$H^{1+2q}\varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla\varphi \rangle \leq \frac{\beta}{2} H^{2q}\varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle + \frac{1}{2\beta} H^{2+2q}\varphi^2 \langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle, \tag{79}$$

para qualquer constante $\beta > 0$.

Dessa forma, combinando a Desigualdade de Estabilidade com o que foi encontrado em (78) e em (79), obtemos:

$$\begin{aligned}
3 \int_M (-K) H^{2+2q} \varphi^2 dM &\leq \int_M \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle dM \\
&= (1+q)^2 \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \\
&\quad + 2(1+q) \int_M H^{1+2q} \varphi \langle P_1(\nabla H), \nabla \varphi \rangle dM \\
&\quad + \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM \\
&\leq (1+q)^2 \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \\
&\quad + 2(1+q) \frac{\beta}{2} \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle \\
&\quad + 2(1+q) \frac{1}{2\beta} \int_M H^{2+2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle \\
&\quad + \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM \\
&= ((1+q)^2 + (1+q)\beta) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \\
&\quad + \left(1 + \frac{(1+q)}{\beta}\right) \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
3 \int_M (-K) H^{2+2q} \varphi^2 dM &\leq ((1+q)^2 + (1+q)\beta) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \quad (80) \\
&\quad + \left(1 + \frac{(1+q)}{\beta}\right) \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM.
\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar:

$$\int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM.$$

O Lema 3.1 é testemunha que:

$$L_1(fg) = \operatorname{div}(P_1(\nabla(fg))) = fL_1g + gL_1f + 2\langle \nabla f, P_1(\nabla g) \rangle.$$

Assim, usando a propriedade do divergente:

$$\operatorname{div}(fP_1(\nabla g)) = f\operatorname{div}(P_1(\nabla g)) + \langle \nabla f, P_1(\nabla g) \rangle,$$

segue-se que:

$$\begin{aligned} L_1(fg) &= fL_1g + gL_1f + 2\langle \nabla f, P_1(\nabla g) \rangle \\ &= f\operatorname{div}(P_1(\nabla g)) + gL_1f + 2\langle \nabla f, P_1(\nabla g) \rangle \\ &= \operatorname{div}(fP_1(\nabla g)) - \langle \nabla f, P_1(\nabla g) \rangle + gL_1f + 2\langle \nabla f, P_1(\nabla g) \rangle \\ &= \operatorname{div}(fP_1(\nabla g)) + gL_1f + \langle \nabla f, P_1(\nabla g) \rangle \\ \text{por } P_1 \text{ ser auto-adjunto } \rightarrow &= \operatorname{div}(fP_1(\nabla g)) + gL_1f + \langle P_1(\nabla f), \nabla g \rangle. \end{aligned} \quad (81)$$

Fazendo $f = H$ e $g = H^{1+2q}\varphi^2$ em (81), segue-se que:

$$\begin{aligned} L_1(H^{2+2q}\varphi^2) &= \operatorname{div}(HP_1(\nabla(H^{1+2q}\varphi^2))) + H^{1+2q}\varphi^2L_1(H) + \langle P_1(\nabla H), \nabla(H^{1+2q}\varphi^2) \rangle \\ &= \operatorname{div}(HP_1(\nabla(H^{1+2q}\varphi^2))) + H^{1+2q}\varphi^2L_1(H) \\ &\quad + \langle P_1(\nabla H), (1+2q)H^{2q}\nabla H\varphi^2 + 2H^{1+2q}\varphi\nabla\varphi \rangle \\ &= \operatorname{div}(HP_1(\nabla(H^{1+2q}\varphi^2))) + H^{1+2q}\varphi^2L_1(H) \\ &\quad + (1+2q)H^{2q}\varphi^2\langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle + 2H^{1+2q}\varphi\langle P_1(\nabla H), \nabla\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} L_1(H^{2+2q}\varphi^2) &= \operatorname{div}(HP_1(\nabla(H^{1+2q}\varphi^2))) + H^{1+2q}\varphi^2L_1(H) \\ &\quad + (1+2q)H^{2q}\varphi^2\langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle + 2H^{1+2q}\varphi\langle P_1(\nabla H), \nabla\varphi \rangle. \end{aligned} \quad (82)$$

Integrando-se ambos os lados de (82) em M , usando o Teorema da Divergência e a Proposição 3.6, item 1, obtemos:

$$\begin{aligned} (1+2q) \int_M H^{2q}\varphi^2\langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM &= - \int_M H^{1+2q}\varphi^2L_1(H) dM \\ &\quad - 2 \int_M H^{1+2q}\varphi\langle P_1(\nabla H), \nabla\varphi \rangle dM. \end{aligned} \quad (83)$$

Usando a desigualdade (79) em (83), segue-se que:

$$\begin{aligned} (1+2q) \int_M H^{2q}\varphi^2\langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM &\leq - \int_M H^{1+2q}\varphi^2L_1(H) dM \\ &\quad + \beta \int_M H^{2q}\varphi^2\langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \int_M H^{2+2q}\langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle dM, \end{aligned}$$

isto é:

$$(1 + 2q - \beta) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \leq - \int_M H^{1+2q} \varphi^2 L_1(H) dM \quad (84)$$

$$+ \frac{1}{\beta} \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM.$$

O Lema 5.1 é testemunha que $-L_1(H) = |\nabla H|^2 - |\nabla A|^2 - 3HK$, uma vez que $M^{n+1} = \mathbb{R}^4$, e assim, $n = 3$ e $c = 0$, nas hipóteses desse lema. Além disso, sendo P_1 positivo definido, obtemos a desigualdade:

$$\langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle \leq (\text{tr} P_1) |\nabla H|^2 = 2H |\nabla H|^2. \quad (85)$$

Para verificarmos (85), observe inicialmente que, partindo da definição de P_1 , teremos o seguinte:

$$\begin{aligned} P_1 &= HI - A = S_1 I - A \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda_2 + \lambda_3) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo: $\text{tr}(P_1) = 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 2H$.

Além disso:

$$P_1^2 = \begin{pmatrix} (\lambda_2 + \lambda_3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1 + \lambda_3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \end{pmatrix}.$$

E assim:

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_1^2) &= (\lambda_2 + \lambda_3)^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \\ &= 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \\ &= 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 2R \end{aligned}$$

$$\text{pois } R = 0 \text{ por hipótese } \rightarrow = 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2). \quad (86)$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
(tr(P_1))^2 &= 4H^2 = 4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \\
&= 4[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)] \\
&= 4[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2R] \\
&= 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)
\end{aligned}$$

Assim, comparando-se com o que foi achado em (86), segue-se que: $tr(P_1^2) \leq (tr(P_1))^2$. Dessa forma, usando Cauchy-Schwarz e a definição da norma de uma matriz:

$$\begin{aligned}
\langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle &\leq |P_1(\nabla H)| |\nabla H| \\
&= \sqrt{tr(P_1^2(\nabla H))} |\nabla H| \\
&\leq \sqrt{tr(P_1^2(\nabla H))} |\nabla H|^2 \\
&\leq \sqrt{tr^2(P_1(\nabla H))} |\nabla H|^2 \\
&= tr(P_1(\nabla H)) |\nabla H|^2 \\
&= 2H |\nabla H|^2.
\end{aligned}$$

o que nos garante a validade de (85).

Observação 5.1: A verificação de (85) que foi feita para ∇H é exatamente a mesma para demonstrar (85) em sua generalidade, isto é: $\langle P_1(X), X \rangle \leq 2S_1|X|^2$, para todo $X \in T_pM$.

Dessa forma:

$$|\nabla H|^2 \geq \frac{1}{2H} \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle. \quad (87)$$

Usando a Proposição 5.1 e a desigualdade (87), obtemos:

$$-L_1(H) \leq \frac{-2}{1+2c_0^2} |\nabla H|^2 - 3HK \leq \frac{-1}{(1+2c_0^2)H} \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle - 3HK. \quad (88)$$

Dessa forma, substituindo (88) em (84), segue-se que:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta\right) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM &\leq 3 \int_M H^{2+2q} (-K) \varphi^2 dM \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \int_M H^{2+2q} \varphi \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM.
\end{aligned} \quad (89)$$

Substituindo-se a desigualdade (89) em (80), a Desigualdade de Estabilidade se torna:

$$\begin{aligned}
3 \int_M (-K) H^{2+2q} \varphi^2 dM &\leq ((1+q)^2 + (1+q)\beta) \int_M H^{2q} \varphi^2 \langle P_1(\nabla H), \nabla H \rangle dM \\
&\quad + \left(1 + \frac{(1+q)}{\beta}\right) \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM \\
&\leq \frac{3((1+q)^2 + (1+q)\beta)}{\left(1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta\right)} \int_M H^{2+2q} (-K) \varphi^2 dM \\
&\quad + \left(1 + \frac{1+q}{\beta} + \frac{((1+q)^2 + (1+q)\beta)}{\beta \left(1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta\right)}\right) \int_M H^{2+2q} \varphi \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
3 \int_M (-K) H^{2+2q} \varphi^2 dM &\leq 3C_1 \int_M H^{2+2q} (-K) \varphi^2 dM \\
&\quad + C_2 \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM.
\end{aligned}$$

Isto é:

$$3(1 - C_1) \int_M H^{2+2q} (-K) \varphi^2 dM \leq C_2 \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM,$$

onde:

$$C_1 = \frac{(1+q)^2 + (1+q)\beta}{\left(1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta\right)} \text{ e } C_2 = 1 + \frac{1+q}{\beta} + \frac{(1+q)^2 + (1+q)\beta}{\beta \left(1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta\right)},$$

$$0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}} \text{ por hipótese e } \beta \text{ é escolhido tal que } 0 < \beta < \frac{1}{\frac{1}{1+2c_0^2} - q^2} - q^2.$$

Essa escolha de β é necessária para termos $C_1 < 1$. Verifiquemos isto:

$$\begin{aligned}
\beta &< \frac{\frac{1}{1+2c_0^2} - q^2}{q+2} \implies \beta q + 2\beta < \frac{1}{1+2c_0^2} - q^2 \implies q^2 + \beta q + 2\beta < \frac{1}{1+2c_0^2} \\
\implies & q^2 + 2q + 1 - 2q - 1 + \beta q + 2\beta - \beta + \beta < \frac{1}{1+2c_0^2} \\
\implies & (1+q)^2 + \beta(1+q) < 1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta \\
\implies & \frac{(1+q)^2 + (1+q)\beta}{\left(1 + \frac{1}{1+2c_0^2} + 2q - \beta\right)} < 1 \implies C_1 < 1.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_M H^{2+2q}(-K)\varphi^2 dM \leq \frac{C_2}{3(1-C_1)} \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle dM. \quad (90)$$

Por outro lado, como P_1 é positivo definido, temos:

$$\langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle \leq (\text{tr} P_1) |\nabla\varphi|^2 \leq 2H |\nabla\varphi|^2. \quad (91)$$

Denotando por $C_3 = \frac{2C_2}{3(1-C_1)}$ e usando a desigualdade (91), (90) se torna:

$$\int_M H^{2+2q}(-K)\varphi^2 dM \leq \frac{C_3}{2} \int_M H^{2+2q} \langle P_1(\nabla\varphi), \nabla\varphi \rangle dM \leq C_3 \int_M H^{3+2q} |\nabla\varphi|^2 dM.$$

Escolhendo $\varphi = \psi^p$, onde $2p = 5 + 2q$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_M H^{2+2q}(-K)\psi^{5+2q} dM &\leq C_3 \int_M H^{3+2q} |\nabla(\psi^p)|^2 dM \\ &= C_3 \int_M H^{3+2q} \langle \nabla(\psi^p), \nabla(\psi^p) \rangle \\ &= C_3 \int_M H^{3+2q} \langle p\psi^{p-1} \nabla\psi, p\psi^{p-1} \nabla\psi \rangle dM \\ &= C_3 \int_M H^{3+2q} p^2 |\psi^{p-1} \nabla\psi|^2 dM \\ &= C_3 p^2 \int_M H^{3+2q} \psi^{2p-2} |\nabla\psi|^2 dM \\ &= C_3 p^2 \int_M H^{3+2q} \psi^{3+2q} |\nabla\psi|^2 dM. \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\int_M H^{2+2q}(-K)\psi^{5+2q} dM \leq C_3 p^2 \int_M H^{3+2q} \psi^{3+2q} |\nabla\psi|^2 dM. \quad (92)$$

Usando a desigualdade de Young:

$$xy \leq \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}, \text{ onde } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1,$$

para $x = \delta H^{3+2q} \psi^{3+2q}$, $y = \frac{|\nabla\psi|^2}{\delta}$, $a = \frac{5+2q}{3+2q}$, $b = \frac{5+2q}{2}$ e $\delta > 0$, obtemos:

$$\delta H^{3+2q} \psi^{3+2q} \frac{|\nabla\psi|^2}{\delta} \leq \frac{(\delta H^{3+2q} \psi^{3+2q})^{\frac{5+2q}{3+2q}}}{\frac{5+2q}{3+2q}} + \frac{\left(\frac{|\nabla\psi|^2}{\delta}\right)^{\frac{5+2q}{2}}}{\frac{5+2q}{2}}.$$

Isto implica que:

$$H^{3+2q}\psi^{3+2q}|\nabla\psi|^2 \leq \frac{3+2q}{5+2q}\delta^{\frac{5+2q}{3+2q}}H^{5+2q}\psi^{5+2q} + \frac{2}{5+2q}\delta^{\frac{-(5+2q)}{2}}|\nabla\psi|^{5+2q}. \quad (93)$$

Substituindo-se (93) na igualdade (92), segue-se que:

$$\begin{aligned} \int_M H^{2+2q}(-K)\psi^{5+2q}dM &\leq \frac{3+2q}{5+2q}p^2C_3\delta^{\frac{5+2q}{3+2q}}\int_M H^{5+2q}\psi^{5+2q}dM \\ &\quad + \frac{2}{5+2q}p^2C_3\delta^{\frac{-(5+2q)}{2}}\int_M |\nabla\psi|^{5+2q}dM. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\int_M H^{5+2q}\left(\frac{-K}{H^3} - \Lambda_1\delta^{\frac{5+2q}{3+2q}}\right)\psi^{5+2q}dM \leq \Lambda_2\delta^{\frac{-(5+2q)}{2}}\int_M |\nabla\psi|^{5+2q}dM,$$

onde teremos $\Lambda_1(q) = \frac{3+2q}{5+2q}p^2C_3$ e $\Lambda_2(q) = \frac{2p^2}{5+2q}C_3$, seguindo-se o resultado.

Observe ainda que, como $2p = 5 + 2q$, teremos Λ_1 e Λ_2 dependendo, de fato, de q .

Observação 5.2: Schoen, Simon e Yau obtiveram em 1975 a seguinte desigualdade tipo Sobolev para hipersuperfícies mínimas M^n imersas em R^{n+1} :

$$\int_M |A|^{2p}\psi^{2p}dM \leq C(n, p)\int_M |\nabla\psi|^{2p}dM, \quad (94)$$

para $p \in [2, 2 + \sqrt{2/n}]$, e para toda função $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto em M .

Usando a Proposição 5.2, podemos obter um resultado similar para hipersuperfícies M^3 imersas em \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula.

Com efeito, sendo $R = 0$ e escolhendo uma orientação para M tal que $H > 0$, teremos $H = |A|$. Considerando-se $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto e $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ função com suporte compacto em M , a Proposição 5.2 nos garante que, para todo $\delta > 0$ e $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$:

$$\int_M H^{5+2q}\left(\frac{-K}{H^3} - \Lambda_1\delta^{\frac{5+2q}{3+2q}}\right)\psi^{5+2q}dM \leq \Lambda_2\delta^{\frac{-(5+2q)}{2}}\int_M |\nabla\psi|^{5+2q}dM,$$

onde teremos $\Lambda_1(q)$ e $\Lambda_2(q)$, constantes positivas.

Usando a condição de curvatura $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$, segue-se que:

$$\int_M H^{5+2q}\left(c - \Lambda_1\delta^{\frac{5+2q}{3+2q}}\right)\psi^{5+2q}dM \leq \Lambda_2\delta^{\frac{-(5+2q)}{2}}\int_M |\nabla\psi|^{5+2q}dM.$$

Assim, usando-se mais uma vez que $2p = 5 + 2q$, de modo que dessa forma teremos $p \in \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}\right)$, e que $H = |A|$, segue-se que:

$$\int_M |A|^{2p} \psi^{2p} dM \leq C(p) \int_M |\nabla \psi|^{2p} dM,$$

onde $C(p) = \frac{\Lambda_2 \delta^{-p}}{\left(c - \Lambda_1 \delta^{\frac{-p}{p-1}}\right)}$.

De acordo com o que foi feito na Observação 5.2, podemos enunciar o

Corolário 5.1 (*Desigualdade tipo Sobolev*): *Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica estável com curvatura escalar nula e tal que $\frac{-K}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto. Então, para toda função ψ com suporte compacto em M , para todo $\delta > 0$ e $p \in \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}\right)$, existe $C(p) > 0$ tal que*

$$\int_M |A|^{2p} \psi^{2p} dM \leq C(p) \int_M |\nabla \psi|^{2p} dM. \quad (95)$$

Este corolário será muito útil na demonstração dos resultados principais desta dissertação no Capítulo 6 a seguir.

Observação 5.3: Ilias, Nelli e Soret obtiveram em 2012 resultados nessa direção para hipersuperfícies com curvatura média constante. O que foi feito aqui consistiu, basicamente, em adaptações para o cenário da curvatura escalar constante e igual a zero.

6 RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo, serão enfim apresentadas as demonstrações dos três teoremas principais desta dissertação, que foram enunciados no Introdução. No caso do **TEOREMA B** e do **TEOREMA C**, antes de suas respectivas demonstrações, ainda será apresentada uma ambientação, isto é, definições e resultados necessários para a compreensão desses teoremas. Tais ambientações não foram expostas nos capítulos anteriores por serem de caráter mais específico e para garantir maior comodidade de leitura.

Além disso, será dedicada uma seção para a apresentação de exemplos relacionados à classe de hipersuperfícies que está sendo abordada neste trabalho.

Antes da demonstração do **TEOREMA A**, vejamos a seguinte

Definição 6.1 *Dizemos que uma variedade riemanniana M^3 possui crescimento de volume polinomial se existe $\alpha \in [0, 4]$ tal que: $\frac{\text{vol}(B_r(p))}{r^\alpha} < \infty$, para todo $p \in M$, onde $B_r(p)$ é a bola geodésica de centro em p e raio r .*

6.1 Demonstração do **TEOREMA A**

TEOREMA A: Não existem hipersuperfícies M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula, completas, estáveis, com crescimento de volume polinomial e tais que:

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto, para alguma constante $c > 0$.

Demonstração: Suponha que existe uma hipersuperfície completa e estável satisfazendo as condições do enunciado acima. Estaremos, dessa forma, em condições de aplicar a Proposição 5.2. Para isso, escolhamos a função $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$\psi(\rho(p)) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in B_r \\ \frac{2r - \rho(p)}{r}, & \text{se } p \in B_{2r} \setminus B_r \\ 0, & \text{se } p \in M \setminus B_{2r} \end{cases}, \quad (96)$$

onde $\rho(p) = \rho(p, p_0)$ é a função distância de M .

Perceba que ψ possui suporte compacto pelo que foi verificado no Exemplo 2.3, no Capítulo 2 desta dissertação.

Usando esta função ψ na desigualdade (77) da Proposição 5.2, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} H^{5+2q} \left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) dM &\leq \int_{B_{2r}} H^{5+2q} \left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) \psi^{5+2q} dM \\
&\leq \Lambda_2 \delta^{-\frac{(5+2q)}{2}} \int_{B_{2r}} |\nabla \psi|^{5+2q} dM \\
(*) \rightarrow &\leq \Lambda_2 \delta^{-\frac{(5+2q)}{2}} \frac{\bar{C}^{5+2q}}{r^{5+2q}} \int_{B_{2r}} dM \\
&= \Lambda_2 \delta^{-\frac{(5+2q)}{2}} \frac{\bar{C}^{5+2q}}{r^{5+2q}} \text{vol}(B_{2r}) \\
&\leq \Lambda_2 \delta^{-\frac{(5+2q)}{2}} \frac{\text{vol}(B_{2r})}{r^{5+2q}}.
\end{aligned}$$

A passagem (*) indicada acontece pois, pela definição da função ψ , temos que:

$$\nabla \psi(\rho(p)) = \frac{-\nabla \rho}{r}.$$

E assim:

$$|\nabla \psi(\rho(p))| = \frac{|\nabla \rho|}{r} \leq \frac{\bar{C}}{r}, \quad (97)$$

com \bar{C} constante que não depende de p e que por conta disso foi anexada à constante Λ_2 .

Portanto:

$$\int_{B_r} H^{5+2q} \left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) dM \leq \Lambda_2 \delta^{-\frac{(5+2q)}{2}} \frac{\text{vol}(B_{2r})}{r^{5+2q}}, \quad (98)$$

para $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$.

Utilizando-se a hipótese $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ e escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno (o que é possível por conta do resultado da Proposição 5.2 valer para todo $\delta > 0$), podemos concluir que:

$$\left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) > 0. \quad (99)$$

Por hipótese, M tem crescimento de volume polinomial. Dessa forma a Definição 6.1 nos garante:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(B_r)}{r^\alpha} < \infty,$$

com $\alpha \in (0, 4]$.

Fazendo $r \rightarrow \infty$ na desigualdade (98), obtemos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r} H^{5+2q} \left(\frac{(-K)}{H^3} - \Lambda_1 \delta^{\frac{5+2q}{3+2q}} \right) dM \leq \Lambda_2 \delta^{-\frac{(5+2q)}{2}} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(B_{2r})}{r^\alpha} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{5+2q-\alpha}} = 0.$$

Assim, levando-se em conta (99), obtemos $H \equiv 0$, o que nos dá uma contradição. Segue-se, então, o resultado.

Observação 6.1: Na demonstração do **TEOREMA A**, M não precisa ser propriamente imersa, uma vez que estamos tomando bolas (geodésicas) intrínsecas. Uma vez que M é, por hipótese, completa, temos que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n}$ para alguma sequência $r_n \rightarrow \infty$, e assim podemos tomar $r \rightarrow \infty$ na desigualdade (98).

6.2 Ambientação e demonstração do **TEOREMA B**

Usando desigualdade tipo Sobolev (94), Schoen, Simon e Yau deram em 1975 uma nova demonstração para o Teorema de Bernstein para dimensão menor ou igual a 5, o qual garante que os únicos gráficos mínimos inteiros M^n em \mathbb{R}^{n+1} , com $n \leq 5$, são os hiperplanos. Usando a desigualdade tipo Sobolev (95), teremos que o **TEOREMA B** é um resultado tipo Bernstein. Feita essa consideração inicial, contemplemos a

Definição 6.2 *Dada uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, a hipersuperfície M^n em \mathbb{R}^{n+1} dada pelo gráfico de u é o que chamaremos aqui de gráfico inteiro.*

Tal definição é trabalhada com mais detalhes e em aspectos mais gerais por Alías, Colares e de Lima em 2015.

A proposição a seguir será determinante na demonstração do **TEOREMA B** e foi apresentada por Alencar, Santos e Zhou em 2010, página 3308. Devido a sua importância e visando a comodidade da leitura, será apresentada aqui junto com sua demonstração.

Proposição 6.1 *Seja M^n o gráfico inteiro de uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se $S_2 = 0$ e S_1 não muda de sinal em M^n , então M^n é uma hipersuperfície estável.*

Demonstração: Considere $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função suave com suporte compacto e seja $W = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Definindo $g = fW$, teremos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle &= \left\langle P_1 \left(\nabla \left(\frac{g}{W} \right) \right), \nabla \left(\frac{g}{W} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle P_1 \left(g \nabla \left(\frac{1}{W} \right) + (\nabla g) \frac{1}{W} \right), g \nabla \left(\frac{1}{W} \right) + (\nabla g) \frac{1}{W} \right\rangle \\
&= \left\langle g P_1 \left(\nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right) + \frac{1}{W} P_1(\nabla g), g \nabla \left(\frac{1}{W} \right) + (\nabla g) \frac{1}{W} \right\rangle \\
&= \left\langle g P_1 \left(\nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right), g \nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right\rangle + \left\langle g P_1 \left(\nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right), (\nabla g) \frac{1}{W} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{1}{W} P_1(\nabla g), g \nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right\rangle + \left\langle \frac{1}{W} P_1(\nabla g), (\nabla g) \frac{1}{W} \right\rangle \\
&= g^2 \left\langle P_1 \left(\nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right), \nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right\rangle + \frac{g}{W} \left\langle P_1 \left(\nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right), (\nabla g) \right\rangle \\
&\quad + \frac{g}{W} \left\langle P_1(\nabla g), \nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right\rangle + \frac{1}{W^2} \langle P_1(\nabla g), (\nabla g) \rangle.
\end{aligned}$$

Como P_1 é auto-adjunto, temos que $\langle P_1(\nabla g), \nabla \left(\frac{1}{W} \right) \rangle = \langle \nabla g, P_1 \left(\nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right) \rangle$, e assim:

$$\begin{aligned}
\langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle &= g^2 \left\langle P_1 \left(\nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right), \nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right\rangle + \frac{2g}{W} \left\langle P_1 \left(\nabla \left(\frac{1}{W} \right) \right), (\nabla g) \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{W^2} \langle P_1(\nabla g), (\nabla g) \rangle. \tag{100}
\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo (e_1, \dots, e_n) um referencial geodésico ao longo de M , temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(f g P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right) \right) &= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{e_i} \left(f g P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right) \right), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle f g_i P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right) + f_i g P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right) + f g \nabla_{e_i} \left(P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right) \right), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\left\langle f g_i P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), e_i \right\rangle + \left\langle f_i g P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), e_i \right\rangle \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left\langle f g \nabla_{e_i} \left(P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right) \right), e_i \right\rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez que $f = \frac{g}{W}$, segue-se que:

$$f_i = g_i \frac{1}{W} + g \left(\frac{1}{W} \right)_i \implies g f_i = g g_i \frac{1}{W} + g^2 \left(\frac{1}{W} \right)_i = f g_i + g^2 \left(\frac{1}{W} \right)_i.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(fgP_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right) \right) &= \sum_{i=1}^n \left[fg_i \left\langle P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), e_i \right\rangle + \left(fg_i + g^2 \left(\frac{1}{W} \right)_i \right) \left\langle P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), e_i \right\rangle \right] \\
&\quad + fgL_1 \left(\frac{1}{W} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[2fg_i \left\langle P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), e_i \right\rangle + g^2 \left(\frac{1}{W} \right)_i \left\langle P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), e_i \right\rangle \right] \\
&\quad + fgL_1 \left(\frac{1}{W} \right) \\
&= 2f \left\langle P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), \nabla g \right\rangle + g^2 \left\langle P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), \nabla \frac{1}{W} \right\rangle + fgL_1 \left(\frac{1}{W} \right) \\
&= 2 \frac{g}{W} \left\langle \nabla \frac{1}{W}, P_1(\nabla g) \right\rangle + g^2 \left\langle P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), \nabla \frac{1}{W} \right\rangle + f^2 W L_1 \left(\frac{1}{W} \right).
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
2 \frac{g}{W} \left\langle \nabla \frac{1}{W}, P_1(\nabla g) \right\rangle &= \operatorname{div} \left(fgP_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right) \right) - g^2 \left\langle P_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right), \nabla \frac{1}{W} \right\rangle \quad (101) \\
&\quad - f^2 W L_1 \left(\frac{1}{W} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo-se (101) em (100), obtemos:

$$\langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle = \operatorname{div} \left(fgP_1 \left(\nabla \frac{1}{W} \right) \right) - f^2 W L_1 \left(\frac{1}{W} \right) + \frac{1}{W^2} \langle P_1(\nabla g), (\nabla g) \rangle. \quad (102)$$

Integrando-se os membros da igualdade (100) em M e usando o Teorema da Divergência, obtemos:

$$\int_M \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle dM = - \int_M f^2 W L_1 \left(\frac{1}{W} \right) dM + \int_M \frac{1}{W^2} \langle P_1(\nabla g), (\nabla g) \rangle dM. \quad (103)$$

Escolha uma orientação para M tal que $S_1 \geq 0$. Uma vez que $S_1^2 - |A|^2 = 2S_2 \geq 0$, teremos $S_1 = |A|^2 + 2S_2 \implies S_1^2 \geq |A|^2 \implies S_1 \geq |A|$. Assim:

$$\begin{aligned}
\langle P_1(\nabla g), \nabla g \rangle &= \langle S_1(\nabla g) - A\nabla g, \nabla g \rangle \\
&= \langle S_1(\nabla g), \nabla g \rangle - \langle A(\nabla g), \nabla g \rangle \\
&= S_1 |\nabla g|^2 - \langle A(\nabla g), \nabla g \rangle \\
&\geq (S_1 - |A|) |\nabla g|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Assim, (103) se torna:

$$\int_M \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle dM \geq - \int_M f^2 W L_1 \left(\frac{1}{W} \right) dM. \quad (104)$$

Sendo $S_2 = 0$, a Proposição 3.7 nos garante que:

$$L_1 \left(\frac{1}{W} \right) = L_1(\langle N, e_{n+1} \rangle) = -(S_1 S_2 - 3S_3) \langle N, e_{n+1} \rangle = -(S_1 S_3 - 3S_3) \frac{1}{W},$$

onde N é o vetor normal de M e $e_{n+1} = (0, \dots, \pm 1)$, de acordo com a orientação escolhida para M .

Assim, (104) se torna:

$$\int_M \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle dM \geq \int_M (S_1 S_2 - 3S_3) f^2 dM,$$

para toda função f com suporte compacto.

Logo, se $S_2 = 0$, obtemos a Desigualdade de Estabilidade (51) e, portanto, M será estável, como queríamos.

TEOREMA B: Não existem gráficos inteiros M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula e tais que:

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto para alguma constante $c > 0$.

Demonstração: Suponha que existe um gráfico inteiro M satisfazendo as condições enunciadas.

Como $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^4$, o qual possui curvatura seccional nula, a hipótese $R = 0$ nos garante, por meio da Proposição 3.1, que $S_2 = 0$. Além disso, $R = 0$ implica em $|H|^2 = |A|^2$. Como $K \neq 0$ em todo ponto, temos que $|H|^2 = |A|^2 > 0$ e isto implica que H não muda de sinal. Como estamos considerando nesse trabalho H em sua forma não-normalizada, temos $H = S_1$. Logo, pelo que mostramos na Proposição 6.1, o gráfico inteiro M é estável.

Por outro lado, gráficos satisfazem $vol(B_r) \leq Cr^4$, para alguma constante $C > 0$. De fato, como M é um gráfico, se $\Omega_r = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq r^2, -r \leq x_4 \leq r\}$, então:

$$vol(B_r) \leq \int_{\Omega_r} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = Cr^4.$$

Para maiores detalhes sobre essa verificação, recomendamos a leitura da ex-

posição de Berger e Gostiaux em 2012. (Graduate Texts in Mathematics, página 208.

Agora, usando a hipótese $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ e considerando a função $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de suporte compacto usada no **TEOREMA A**, definida em (96), o Corolário 5.1 nos garante, para $M = B_{2r}$:

$$\int_{B_{2r}} |A|^{2p} \psi^{2p} dM \leq C(p) \int_{B_{2r}} |\nabla \psi|^{2p} dM. \quad (105)$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |A|^{2p} \psi^{2p} dM &= \int_{B_r} |A|^{2p} dM \\ &\leq \int_{B_{2r}} |A|^{2p} \psi^{2p} dM \\ \text{por (95)} \rightarrow &\leq C(p) \int_{B_{2r}} |\nabla \psi|^{2p} dM \\ (*) \rightarrow &\leq C(p) \frac{\bar{C}^{2p}}{r^{2p}} \int_{B_{2r}} dM \\ &= C(p) \frac{\text{vol}(B_{2r})}{r^{2p}} \\ &\leq C(p) \frac{r^4}{r^{2p}}. \end{aligned}$$

A passagem (*) indicada acontece pois:

$$\nabla \psi(\rho(p)) = \frac{-\nabla \rho}{r} \implies |\nabla \psi(\rho(p))| = \frac{|\nabla \rho|}{r} \leq \frac{\bar{C}}{r}, \text{ com } \bar{C} \text{ constante que não depende de } p.$$

Nas passagens seguintes, as constantes que não dependem de p que surgem nos cálculos foram incorporadas à constante $C(p)$ para facilitar a escrita e usamos o fato $\text{vol}(B_r) \leq Cr^4$.

Agora observando que $p \in \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}\right)$, existirá $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$ tal que $2p = 5 + 2q$.

Dessa forma:

$$\int_{B_r} |A|^{5+2q} dM \leq \frac{C(p)r^4}{r^{5+2q}} = \frac{C(p)}{r^{1+2q}}. \quad (106)$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$ em (106), obtemos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r} |A|^{5+2q} dM \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{C(p)}{r^{1+2q}} = 0.$$

Assim, teremos $|A| = 0$, o que nos dá uma contradição.

6.3 Exemplos

Nesta seção, apresentaremos dois exemplos. O primeiro tem o objetivo de comprovar que a classe de hipersuperfícies tratada aqui é não-vazia. O segundo, apresenta uma conhecida classe de hipersuperfícies estáveis com curvatura escalar nula. Tal classe nos mostra algumas condições em que a nulidade da curvatura de Gauss-Kronecker se faz necessária.

Exemplo 6.1: Seja $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ a hipersuperfície rotacional parametrizada por:

$$X(t, \theta, \varphi) = (f(t)\text{sen}\theta\text{cos}\varphi, f(t)\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, f(t)\text{cos}\theta, t),$$

onde $f(t) = \frac{t^2}{4m} + m$, com m sendo uma constante não-negativa.

Hounie e Leite apresentaram em 1999b que as curvaturas principais são dadas por:

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{f(1 + (f')^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (107)$$

$$k_3 = \frac{-f''}{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (108)$$

Fazendo-se então as devidas substituições, segue-se de (107) que:

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 &= \frac{1}{f(1 + (f')^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{f\left(1 + \left(\frac{2t}{4m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{f\left(1 + \left(\frac{t}{2m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{f\left(1 + \frac{t^2}{4m^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{f\left(\frac{4m^2 + t^2}{4m^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{f}{m^{1/2}}\left(m + \frac{t^2}{4m}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{m^{1/2}}{f f^{1/2}} = \frac{m^{1/2}}{f^{3/2}}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo as substituições em (108), obtemos:

$$\begin{aligned}
 k_3 &= \frac{-f''}{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{-1}{2m}}{\left(1 + \left(\frac{t}{2m}\right)^2\right)^{3/2}} \\
 &= \frac{-1}{2} \frac{\frac{1}{m}}{\left(1 + \frac{t^2}{4m^2}\right)^{3/2}} = \frac{-1}{2} \frac{\frac{1}{m}}{\left(\frac{4m^2+t^2}{4m^2}\right)^{3/2}} \\
 &= \frac{\frac{-1}{m}}{\frac{2}{m^{3/2}} \left(m + \frac{t^2}{4m}\right)^{3/2}} = \frac{-1}{2} \frac{m^{3/2}}{f^{3/2}} = \frac{-1}{2} \frac{m^{1/2}}{f^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Assim, teremos:

$$R = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \frac{m}{f^3} - \frac{m}{2f^3} - \frac{m}{2f^3} = \frac{m}{f^3} - \frac{m}{f^3} = 0;$$

$$H = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2\frac{m^{1/2}}{f^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{m^{1/2}}{f^{3/2}} = \frac{3m^{1/2}}{2f^{3/2}};$$

$$K = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{-1}{2} \frac{m}{f^3} \frac{m^{1/2}}{f^{3/2}} = \frac{-1}{2} \frac{m^{3/2}}{f^{9/2}}.$$

Logo: $\frac{-K}{H^3} = \frac{4}{27}$, em todo ponto.

Uma vez que M^3 é uma hipersuperfície rotacional e a sua curva geratriz é quadrática, temos que M possui crescimento de volume polinomial, e assim, pelo resultado do **TEOREMA A**, a imersão é instável.

Observação 6.2: Este exemplo aparece em Teoria da Relatividade, fazendo-se as devidas mudanças de variáveis, como o mergulho da variedade tipo-espaço de Schwarzschild de massa $m/2 > 0$. A importância dessa variedade reside no fato histórico dela ter sido a primeira solução não-trivial da Equação de Campo de Einstein, obtida por Schwarzschild em 1915. Para detalhes dos cálculos envolvidos e também dos aspectos históricos, recomendamos a leitura de Bray em 2001, Li e Wei 2017 e Heinicke e Hehl em 2015.

Exemplo 6.2: Seja $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ o cilindro parametrizado por:

$$x(u, v, t) = (u, v, \alpha(t), \beta(t)), u, v, t \in \mathbb{R},$$

onde $c(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ é uma curva parametrizada com curvatura positiva $k(t)$ em todo ponto.

Calculamos as suas curvaturas principais. Observe inicialmente que a curva c

e seu vetor normal η podem ser escritos respectivamente da seguinte maneira:

$$c = (0, 0, \alpha(t), \beta(t))$$

e

$$\eta = (0, 0, \alpha''(t), \beta''(t)).$$

Dessa forma:

$$k = |c''| = \sqrt{\alpha''(t)^2 + \beta''(t)^2}$$

e o vetor normal unitário será dado por:

$$N = -\frac{\eta}{|\eta|} = -\frac{(0, 0, \alpha''(t), \beta''(t))}{\sqrt{\alpha''(t)^2 + \beta''(t)^2}} = -\frac{(0, 0, \alpha''(t), \beta''(t))}{k}.$$

Derivando-se $\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2 = 1$ em relação a t , segue-se que:

$$2\alpha'(t)\alpha''(t) + 2\beta'(t)\beta''(t) = 0 \implies \alpha''(t)^2 + \alpha'(t)\alpha'''(t) + \beta'(t)\beta'''(t) + \beta''(t)^2 = 0,$$

e dessa forma:

$$\alpha'(t)\alpha'''(t) + \beta'(t)\beta'''(t) + k^2 = 0 \implies \alpha'(t)\alpha'''(t) + \beta'(t)\beta'''(t) = -k^2.$$

Assim:

$$\begin{aligned} dN &= -\frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha'''(t) & \beta'''(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha'(t) \\ 0 & 0 & \beta'(t) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo, as curvaturas principais serão dadas por $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = k(t)$ e, dessa forma, $R = 0$, $H > 0$ e $K = 0$ em todo ponto.

Portanto: M^3 é estável.

Observe ainda que, se $c(t) = (t, f(t))$, o cilindro M é o gráfico da função suave $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(u, v, t) = f(t)$. Em particular, tomando $f(t) = t^2$ ou $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, obtemos um gráfico inteiro com crescimento de volume polinomial, $R = 0$, $H > 0$ e $K = 0$ em todo ponto.

6.4 Ambientação e demonstração do TEOREMA C

Iniciemos com as seguintes noções:

Definição 6.3 *Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica. Definimos o tubo de raio h em torno de M por:*

$$T(M, h) = \{x \in \mathbb{R}^4; \exists p \in M, x = p + t\eta, t \leq h(p)\},$$

onde η é o campo de vetores normais à segunda forma fundamental de x e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva em todo ponto.

Definição 6.4 *Se $|A| \neq 0$ em todo ponto, definimos o tubo subfocal por:*

$$T\left(M, \frac{\epsilon}{|A|}\right); 0 < \epsilon \leq 1.$$

Considerando $M = B_r$ na Definição 6.3, denotemos por $T(r, h)$ o tubo de raio h em torno de $B_r \subset M$. Seja ainda:

$$V(r, h) = \int_{T(r, h)} dT,$$

onde dT denota o elemento de volume do tubo.

Se $R = 0$ e escolhermos uma orientação para M tal que $H > 0$, então $H = |A|$. Sob as condições da Proposição 5.2 e assumindo que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$, o cálculo que nos forneceu (106), nos fornecerá:

$$\int_{B_r} |A|^{5+2q} dM \leq C(q) \frac{\text{vol}(B_{2r})}{r^{5+2q}}. \quad (109)$$

Em posse disso, contemplemos o seguinte:

Lema 6.1 *Seja M^3 uma hipersuperfície de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula, completa, estável e tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto.*

1. *Para $r > 0$ suficientemente grande, existe uma constante $\alpha(q)$, dependendo apenas de $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$, tal que:*

$$\text{vol}(B_r) > \alpha(q)r^{5+2q}. \quad (110)$$

2. Para cada $\beta > 1$, $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$ e $r > 0$ satisfazendo a desigualdade (110), existe $\tilde{r} > r$ suficientemente grande tal que:

$$\text{vol}(B_{\tilde{r}}) - \text{vol}(B_{\tilde{r}/\beta}) > \alpha(q)r^{5+q}. \quad (111)$$

Demonstração: 1) Observe inicialmente que, para $0 < \epsilon < 2\sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}} - 2q$, teremos $p = \frac{5}{2} + q + \frac{\epsilon}{2} \in \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}\right)$.

Com efeito:

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon < 2\sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}} - 2q &\implies 0 < \frac{\epsilon}{2} < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}} - q \\ &\implies \frac{5}{2} + q < \frac{5}{2} + q + \frac{\epsilon}{2} < \frac{5}{2} + q + \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}} - q \\ &\implies \frac{5}{2} < \frac{5}{2} + q < \frac{5}{2} + q + \frac{\epsilon}{2} < \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}} \\ &\implies \frac{5}{2} < p < \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}, \end{aligned}$$

como queríamos.

Assim, o Corolário 5.1 nos fornece mais uma vez que:

$$\int_{B_r} |A|^{5+2q+\epsilon} \psi^{5+2q+\epsilon} dM \leq C(q) \int_{B_r} |\nabla \psi|^{5+2q+\epsilon} dM.$$

Supondo-se que $\text{vol}(B_r) \leq \alpha(q)r^{5+2q}$, e mais uma vez fazendo uso de cálculos análogos aos que nos deram a desigualdade (109), segue-se que:

$$\int_{B_r} |A|^{5+2q+\epsilon} dM \leq C(q) \frac{\text{vol}(B_r)}{r^{5+2q+\epsilon}} \leq C(q) \frac{\alpha(q)r^{5+2q}}{r^{5+2q+\epsilon}} = \frac{C(q)\alpha(q)}{r^\epsilon}.$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$, obtemos $|A| \equiv 0$ em M , o que nos dá uma contradição, pois $0 \neq H = |A|$.

2) Considerando $r > 0$ tal que $\text{vol}(B_r) > \alpha(q)r^{5+2q}$, com $0 < q < \sqrt{\frac{1}{1+2c_0^2}}$ e $\beta > 1$, defina a seguinte sequência:

$$r_1 = r, r_2 = \beta r_1, r_3 = \beta^2 r_1, \dots, r_k = \beta^{k-1} r, \dots$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \text{vol}(B_{r_k}) &= (\text{vol}(B_{r_k}) - \text{vol}(B_{r_{k-1}})) + (\text{vol}(B_{r_{k-1}}) - \text{vol}(B_{r_{k-2}})) \\ &\quad + \dots + (\text{vol}(B_{r_2}) - \text{vol}(B_{r_1})) + \text{vol}(B_{r_1}). \end{aligned}$$

Como $r_k \geq r$, temos $\text{vol}(B_{r_k}) > \alpha(q)r_k^{5+2q}$ e, dessa forma, existe $1 \leq j_k \leq k$ tal que:

$$\text{vol}(B_{r_{j_k}}) - \text{vol}(B_{r_{j_k-1}}) > \frac{\alpha(q)r_k^{5+2q}}{k}. \quad (112)$$

Observe que não podemos ter:

$$\text{vol}(B_r) = \text{vol}(B_{r_1}) > \frac{\alpha(q)r_k^{5+2q}}{k} = \frac{\alpha(q)(\beta^{k-1}r_1)^{5+2q}}{k},$$

uma vez que $r_1 = r$ é um valor fixado e o membro direito da desigualdade acima tende ao infinito quando $k \rightarrow \infty$.

Para k suficientemente grande, podemos escrever (54) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{vol}(B_{r_{j_k}}) - \text{vol}(B_{r_{j_k-1}}) &> \frac{\alpha(q)r_k^{5+2q}}{k} = \frac{\alpha(q)r_k^{5+q}r_k^q}{k} \\ &= \frac{\alpha(q)(\beta^{k-1}r)^{5+q}(\beta^{k-1}r)^q}{k} \\ &= \frac{\alpha(q)(\beta^{k-j_k+j_k-1}r)^{5+q}(\beta^{k-1})^q r^q}{k} \\ &\geq \alpha(q)(r_{j_k})^{5+q}. \end{aligned}$$

Denotando r_{j_k} por \tilde{r} , observemos que:

$$r_{j_k} = \beta^{j_k-1}r$$

e

$$r_{j_k-1} = \beta^{j_k-2}r = \beta^{j_k-1-1}r \implies r_{j_k-1} = r_{j_k}\beta^{-1} \implies r_{j_k-1} = \beta^{-1}\tilde{r}.$$

Dessa forma:

$$\text{vol}(B_{\tilde{r}}) - \text{vol}(B_{\beta^{-1}\tilde{r}}) \geq \alpha(q)\tilde{r}^{5+q} > \alpha(q)r^{5+q},$$

como queríamos.

Podemos agora demonstrar o:

TEOREMA C: Seja M^3 uma hipersuperfície completa e estável de \mathbb{R}^4 , com curvatura escalar nula. Se a segunda forma fundamental da imersão é limitada e existe uma constante $c > 0$ tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então, para quaisquer constantes $0 < b_1 \leq 1$, $b_2 > 0$ e para qualquer função suave $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$h(p) \geq \inf \left\{ \frac{b_1}{|A(p)|}, b_2 \rho(p)^\delta \right\}, \delta > 0, \quad (113)$$

o tubo $T(M, h)$ não é mergulhado. Aqui, $\rho(p)$ denota a distância intrínseca em M de p a um ponto fixo $p_0 \in M$.

Demonstração: Observe inicialmente que:

$$\det(1 - tA) = \prod_{j=1}^n (1 - tk_j) = 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j t^j S_j,$$

onde k_j são as curvaturas principais de M e S_j são os polinômios simétricos elementares de k_1, \dots, k_n e $S_0 = 1$. Assim, para $h(p) \geq \frac{b_1}{|A(p)|}$, e observando que $dM_t = \det(1 - tA)dM$ (ver GRAY (2012. (Progress in Mathematics), Lema 3.14, página 47, para maiores detalhes) segue-se que:

$$\begin{aligned} V(r, h) &= \int_{T(r, h)} dM_t dt \\ &= \int_{T(r, h)} \det(1 - tA) dM dt \\ &= \int_{T(r, h)} \left(1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j t^j S_j \right) dM dt \\ &= \int_{B_r} \int_0^{h(p)} \left(1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j t^j S_j \right) dM dt \\ &= \int_{B_r} \left(\int_0^{h(p)} 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j t^j S_j dt \right) dM \\ &= \int_{B_r} h(p) dM + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j+1} \int_{B_r} h(p)^{j+1} S_j dM. \end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo $n = 3$:

$$\begin{aligned} V(r, h) &= \int_{B_r} h(p) dM + \sum_{j=1}^3 \frac{(-1)^j}{j+1} \int_{B_r} h(p)^{j+1} S_j dM \\ &= \int_{B_r} h(p) dM + \frac{(-1)^1}{2} \int_{B_r} h(p)^2 S_1 dM \\ &\quad + \frac{(-1)^2}{3} \int_{B_r} h(p)^3 S_2 dM + \frac{(-1)^3}{4} \int_{B_r} h(p)^4 S_3 dM \end{aligned}$$

Portanto:

$$V(r, h) = \int_{B_r} h(p) dM - \frac{1}{2} \int_{B_r} h(p)^2 H(p) dM - \frac{1}{4} \int_{B_r} h(p)^4 K(p) dM. \quad (114)$$

Usando a desigualdade clássica entre as médias geométrica e quadrática, obtemos:

$$K = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \leq |\lambda_1| |\lambda_2| |\lambda_3| \leq \left(\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} |A|^3,$$

isto é:

$$K(p) \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |A|^3. \quad (115)$$

Seja B_r^+ o subconjunto de B_r tal que $\frac{b_1}{|A(p)|}$ é o ínfimo em (113) e $B_r^- = B_r \setminus B_r^+$.

Temos então que (114) se torna:

$$\begin{aligned} V(r, h) &\geq b_1 \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|} dM - \frac{b_1^2}{2} \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|^2} H dM - \frac{b_1^4}{4} \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|^4} K dM \\ &\quad + b_2 \int_{B_r^-} \rho^\delta dM - \frac{b_2^2}{2} \int_{B_r^-} \rho^{2\delta} H dM - \frac{b_2^4}{4} \int_{B_r^-} \rho^{4\delta} K dM. \end{aligned} \quad (116)$$

Visto que $H = |A|$ e usando (115), segue-se que (116) se torna:

$$\begin{aligned} V(r, h) &\geq \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}} \right) \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|} dM \\ &\quad + b_2 \int_{B_r^-} \rho^\delta dM - \frac{b_2^2}{2} \int_{B_r^-} \rho^{2\delta} H dM - \frac{b_2^4}{4} \int_{B_r^-} \rho^{4\delta} K dM. \end{aligned} \quad (117)$$

Agora, vamos estimar as integrais sobre B_r^- em (117). Observando que, em B_r^- , $b_2 \rho(p)^\delta$ se torna o ínfimo em (113), segue-se que:

$$b_2 \rho(p)^\delta \leq \frac{b_1}{|A(p)|} \implies \frac{b_2}{b_1} \rho(p)^\delta \leq \frac{1}{|A(p)|}$$

$$\implies |A(p)| \leq \frac{b_1}{b_2} \rho(p)^{-\delta} \implies -|A(p)|^3 \geq -\frac{b_1}{b_2} \rho(p)^{-\delta}.$$

Dessa forma:

$$-K \geq -\frac{1}{3\sqrt{3}} |A|^3 \geq -\frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{b_1}{b_2} \rho^{-3\delta} \implies -|H| = -|A| \geq \frac{b_1}{b_2} \rho^{-\delta}.$$

Visto que $|A|$ é limitado por hipótese, existe $a := \inf_M \frac{1}{|A|}$. Logo, (117) se torna:

$$\begin{aligned} V(r, h) &\geq \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}} \right) \int_{B_r^+} \frac{1}{|A|} dM \\ &\quad + \left(b_2 - \frac{b_1 b_2}{2} - \frac{b_1 b_2^3}{12\sqrt{3}} \right) \int_{B_r^-} \rho^\delta dM \\ &\geq a \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}} \right) \text{vol}(B_r^+) + \left(b_2 - \frac{b_1 b_2}{2} - \frac{b_1 b_2^3}{12\sqrt{3}} \right) \int_{B_r^-} \rho^\delta dM. \end{aligned}$$

Portanto:

$$V(r, h) \geq a \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}} \right) \text{vol}(B_r^+) + \left(b_2 - \frac{b_1 b_2}{2} - \frac{b_1 b_2^3}{12\sqrt{3}} \right) \int_{B_r^-} \rho^\delta dM. \quad (118)$$

Observe que, para r suficientemente grande:

$$\rho \geq \frac{r}{\beta} > 1 \implies \rho^\delta \geq \left(\frac{r}{\beta} \right)^\delta \geq 1$$

em $B_r^- \setminus B_{r/\beta}^-$. Logo:

$$\int_{B_r^- \setminus B_{r/\beta}^-} \rho^\delta dM \geq \int_{B_r^- \setminus B_{r/\beta}^-} \left(\frac{r}{\beta} \right)^\delta dM$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \int_{B_r^-} \rho^\delta dM &= \int_{B_r^- \setminus B_{r/\beta}^-} \rho^\delta dM + \int_{B_{r/\beta}^-} \rho^\delta dM \geq \int_{B_r^- \setminus B_{r/\beta}^-} \rho^\delta dM \\ &\geq \left(\frac{r}{\beta} \right)^\delta [\text{vol}(B_r^-) - \text{vol}(B_{r/\beta}^-)] \geq [\text{vol}(B_r^-) - \text{vol}(B_{r/\beta}^-)]. \end{aligned}$$

E assim, temos de (118) que:

$$\begin{aligned}
V(r, h) &\geq a \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}} \right) [vol(B_r^+) - vol(B_{r/\beta}^+) + vol(B_{r/\beta}^+)] \\
&\quad + \left(b_2 - \frac{b_1 b_2}{2} - \frac{b_1 b_2^3}{12\sqrt{3}} \right) [vol(B_r^-) - vol(B_{r/\beta}^-)] \\
&\geq a \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}} \right) [vol(B_r^+) - vol(B_{r/\beta}^+)] \\
&\quad + \left(b_2 - \frac{b_1 b_2}{2} - \frac{b_1 b_2^3}{12\sqrt{3}} \right) [vol(B_r^-) - vol(B_{r/\beta}^-)].
\end{aligned}$$

Sendo C uma constante tal que:

$$C \leq \min \left\{ a \left(b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{b_1^4}{12\sqrt{3}} \right), \left(b_2 - \frac{b_1 b_2}{2} - \frac{b_1 b_2^3}{12\sqrt{3}} \right) \right\},$$

temos:

$$\begin{aligned}
V(r, h) &\geq C[vol(B_r^+) - vol(B_{r/\beta}^+)] + C[vol(B_r^-) - vol(B_{r/\beta}^-)] \\
&= C[vol(B_r^+) - vol(B_{r/\beta}^+) + vol(B_r^-) - vol(B_{r/\beta}^-)] \\
&= C[vol(B_r) - vol(B_{r/\beta})].
\end{aligned}$$

E portanto:

$$V(r, h) \geq C[vol(B_r) - vol(B_{r/\beta})]. \quad (119)$$

O Lema 6.1, item 2, é testemunha que existe $\tilde{r} > r$ tal que:

$$V(\tilde{r}, h) \geq C\tilde{r}^{5+q}. \quad (120)$$

Visto que a distância euclidiana é menor ou igual a distância intrínseca, temos $B_r(p) \subset \mathbb{B}(p, r)$, onde $B_r(p) \equiv B_r$ e $\mathbb{B}(p, r)$ denotam as bolas intrínseca e euclidiana de centro p e raio r , respectivamente.

Usando (113), obtemos:

$$h(q) \geq \min \left\{ \frac{b_1}{|A|}, b_2 \rho(q)^\delta \right\} \geq \min \left\{ \inf_M \frac{b_1}{|A|}, b_2 \rho(q)^\delta \right\} = \inf_M \frac{b_1}{|A|} = b_1 a.$$

para $0 < b_1 \leq 1$ e ρ suficientemente grande, então $T(r, b_1 a) \subset T(r, h)$.

Suponha que $T(r, b_1 a)$ é mergulhado. Visto que $T(r, b_1 a) \subset \mathbb{B}(p, r + 2b_1 a)$, então seu volume $V(r, b_1 a)$ satisfaz $V(r, b_1 a) \leq vol(\mathbb{B}(p, r + 2b_1 a)) = \omega_4 (r + 2b_1 a)^4$, onde ω_4 é o volume de $\mathbb{B}(p, 1)$.

Vamos considerar dois casos diferentes.

Primeiro, se M não está contida em nenhuma bola, a desigualdade acima é uma contradição com (120) para r suficientemente grande. Portanto $T(r, b_1 a)$ e, desta forma, $T(r, h)$ não é mergulhado para r suficientemente grande. No segundo caso, se M está contida em alguma bola, então $T(M, h)$ tem volume finito (visto que $T(M, h)$ é mergulhada), o que também contradiz (120).

7 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, foi respondido de forma parcial o seguinte questionamento levantado por Alencar, do Carmo e Elbert em 2003:

QUESTÃO: Existe alguma hipersuperfície estável e completa M^3 em \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula e curvatura de Gauss-Kronecker não-nula em todo ponto?

Isso foi feito por meio da verificação dos três seguintes resultados:

TEOREMA A: Não existem hipersuperfícies M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula, completas, estáveis, com crescimento de volume polinomial e tais que:

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto para alguma constante $c > 0$.

TEOREMA B: Não existem gráficos inteiros M^3 de \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula e tais que:

$$\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$$

em todo ponto para alguma constante $c > 0$.

TEOREMA C: Seja M^3 uma hipersuperfície completa e estável de \mathbb{R}^4 , com curvatura escalar nula. Se a segunda forma fundamental da imersão é limitada e existe uma constante $c > 0$ tal que $\frac{(-K)}{H^3} \geq c > 0$ em todo ponto, então, para quaisquer constantes $0 < b_1 \leq 1$, $b_2 > 0$ e para qualquer função suave $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$h(p) \geq \inf \left\{ \frac{b_1}{|A(p)|}, b_2 \rho(p)^\delta \right\}, \delta > 0,$$

o tubo $T(m, h)$ não é mergulhado. Aqui, $\rho(p)$ denota a distância intrínseca em M de p a um ponto fixo $p_0 \in M$.

Foi visto ao longo de suas apresentações que esses teoremas são adaptações para o caso da curvatura escalar de resultados anteriores feitos para o cenário da curvatura média, como é o caso do trabalho de Nelli e Soret em 2007 em relação ao **TEOREMA C**.

Para dar maior completude a este trabalho, foram apresentados ao longo dos capítulos resultados generalizados para posterior particularização exigida nas hipóteses

dos Teoremas A, B e C. Além disso, esta dissertação apresentou um exemplo relacionado ao Teorema A que aparece em estudos sobre a Teoria da Relatividade e ainda conta com um apêndice dedicado à apresentação de resultados semelhantes aos que são mostrados nos Teoremas A, B e C, mas dessa vez ambientados na esfera de dimensão 4: S^4 , o que garante a possibilidade dessa linha de pesquisa se desenvolver para o espaço hiperbólico de dimensão 4: \mathbb{H}^4 .

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H.; CARMO, M.P. do.; COLARES, A.G. Stable hypersurfaces with constant scalar curvature. **Mathematische Zeitschrift**, Berlim, v. 213, n. 1, p. 117–131, 1993.
- ALENCAR, H.; CARMO, M.P. do.; ELBERT, M. F. Stability of hypersurfaces with vanishing r -mean curvature in euclidean space. **J.Reine Angew. Math**, Berlim, v. 554, n. 1, p. 201–216, 2003.
- ALENCAR, H.; SANTOS, W.; ZHOU, D. Stable hypersurfaces with constant scalar curvature. **Proceedings of the American Mathematical Society**, Rhode Island, v. 138, n. 9, p. 3301–3312, 2010.
- ALÍAS, L. J.; COLARES, A. G.; de LIMA, H. F. Uniqueness of entire graphs in warped products. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, San Diego, v. 430, n. 1, p. 60–75, 2015.
- AQUINO, C. **Uma caracterização de hipersuperfícies na esfera com curvatura escalar constante**. 2003. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2003.
- BARBOSA, J. L.; CARMO, M. P. do. **Stability of hypersurfaces with constant mean curvature**, 1984. in. Manfredo P. do Carmo–Selected Papers. CARMO, M.P. do. Berlim, Springer. 2012. p. 221-235.
- BARBOSA, J. L.; CARMO, M.P. do.; ESCHENBURG, J. **Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds**, 1988. in. Manfredo P. do Carmo–Selected Papers. CARMO, M.P. do. Berlim, Springer. 2012. p. 291-306.
- BARBOSA, J.L.M.; COLARES, A.G. Stability of Hypersurfaces with Constant r -Mean Curvature. **Annals of Global Analysis and Geometry**, Berlim, v. 15, n. 3, p. 277–297, 1997.
- BERGER, M.; GOSTIAUX, B. **Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces**. Nova Iorque: Springer. 2012. (Graduate Texts in Mathematics).
- BRAY, H.L.; *et al.* Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. **Journal of Differential Geometry**, Boston, v. 59, n. 2, p. 177–267, 2001.
- CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: IMPA. 2011. (Projeto Euclides).
- CARMO, M.P. do.; ELBERT, M. F. On stable complete hypersurfaces with vanishing

r -mean curvature. **Tohoku Mathematical Journal, Second Series**, Sendai, v. 56, n. 2, p. 155–162, 2004.

CARMO, M.P. do.; PENG, C.K. Stable complete minimal hypersurfaces. **Proc. of the 1980 Symposium of Differential Geometry**, Pequim. 1982, v. 1, p. 3.

CHAVEL, I. **Riemannian geometry: a modern introduction**. Cambridge: Cambridge University Press. 2006. (Cambridge Tracts in Mathematics).

CHENG, S.-Y.; YAU, S.-T. Hypersurfaces with constant scalar curvature. **Mathematische Annalen**, Berlim, v. 225, n. 3, p. 195–204, 1977.

EVANS, L.C. **Partial Differential Equations**. Providence: American Mathematical Society. 1998. (Graduate Studies in Mathematics).

GRAY, A. **Tubes**. Nova Iorque: Addison-Wesley. 2012. (Progress in Mathematics).

HARTAMAN, P.; NIRENBERG, L. On spherical image maps whose Jacobians do not change sign. **American Journal of Mathematics**, Baltimore, v. 81, n. 4, p. 901–920, 1959.

HEINICKE, C.; HEHL, F. W. Schwarzschild and Kerr solutions of Einstein's field equation: An Introduction. **International Journal of Modern Physics D**, Singapura, v. 24, n. 02, p. 1530006, 2015.

HOUNIE, J.; LEITE, M. L. Two-ended hypersurfaces with zero scalar curvature. **Indiana University Mathematics Journal**, Bloomington, p. 867–882, 1999a.

HOUNIE, J.; LEITE, M. L. Uniqueness and nonexistence theorems for hypersurfaces with $H_r = 0$. **Annals of Global Analysis and Geometry**, Berlim, v. 17, n. 5, p. 397–407, 1999b.

ILÍAS, S.; NELLI, B.; SORET, M. Caccioppoli inequalities on constant mean curvature hypersurfaces in Riemannian manifolds. **Annals of Global Analysis and Geometry**, Berlim, v. 42, n. 4, p. 443–471, 2012.

LEE, J.M. **Introduction to Smooth Manifolds**. Nova Iorque: Springer. 2003. (Graduate Texts in Mathematics).

LI, H.; WEI, Y. On inverse mean curvature flow in Schwarzschild space and Kottler space. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Switzerland, v. 56, n. 3, p. 62, 2017.

MELO, I.D.L. **Estabilidade de Hipersuperfícies com r -curvatura média constante**. 2012. 64 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Departamento de

Matemática, Universidade Federal do Piauí, Teresina. 2012.

NASCIMENTO, V. L. **Sobre a estabilidade de cones em \mathbb{R}^{n+1} com curvatura escalar nula**. 2007. 59 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2007.

NELLI, B.; SORET, M. Stably embedded minimal hypersurfaces. **Mathematische Zeitschrift**, Berlim, v. 255, n. 3, p. 493–514, 2007.

NETO, G.S. On stable hypersurfaces with vanishing scalar curvature. **Mathematische Zeitschrift**, Berlim, v. 277, n. 1-2, p. 481–497, 2014.

OLIVEIRA, J. **O teorema de estabilidade para hipersuperfícies com curvatura média constante em R^{n+1}** . 1992. 56 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 1992.

O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. San Diego: Academic press. 1983. (Pure and Applied Mathematics).

PETERSEN, P. **Riemannian geometry**. Nova Iorque: Springer. 1988. (Graduate Texts in Mathematics).

PINTO, V.G. **Caracterizações da esfera em formas espaciais**. 2017. 81 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2017.

REILLY, R. C. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms. **Journal of Differential Geometry**, Boston, v. 8, n. 3, p. 465–477, 1973.

ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. **Bull. Sci. Math**, Singapura, v. 117, n. 2, p. 211–239, 1993.

SCHOEN, R.; SIMON, L.; YAU, S.-T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. **Acta Mathematica**, Uppsala, v. 134, n. 1, p. 275–288, 1975.

VOSS, K. Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen. **Mathematische Annalen**, Berlim, v. 131, n. 2, p. 180–218, 1956.

ZHU, P.; FANG, S. Stable Hypersurfaces in a 4-Dimensional Sphere. **Journal of Mathematical Research with Applications**, Dalian, v. 36, n. 6, p. 718–722, 2016.

APÊNDICE A - CÁLCULO DO INTERVALO DA CONDIÇÃO DE CURVATURA

Iremos agora provar o seguinte fato enunciado na Introdução:

Seja $x : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica com curvatura escalar nula. Se H e K denotam a curvatura média (não-normalizada) e a curvatura de Gauss-Kronecker, respectivamente, então:

$$0 \leq \frac{-K}{H^3} \leq \frac{4}{27},$$

para todo ponto em M .

Demonstração: Seja $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t\omega$, com $t \neq 0$ e $\omega \in \mathbb{S}^2$. Teremos então $\omega = \left(\frac{\lambda_1}{t}, \frac{\lambda_2}{t}, \frac{\lambda_3}{t}\right)$ e lembrando que:

$$R = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$

$$H = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$K = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

segue-se que:

$$H(t\omega) = H(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{t}{t}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = tH(\omega);$$

$$R(t\omega) = R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \frac{t^2}{t^2}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) = t^2R(\omega);$$

$$K(t\omega) = K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{t^3}{t^3}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = t^3K(\omega).$$

Ou seja, H , R e K são funções homogêneas de grau 1, 2 e 3, de forma respectiva. Assim:

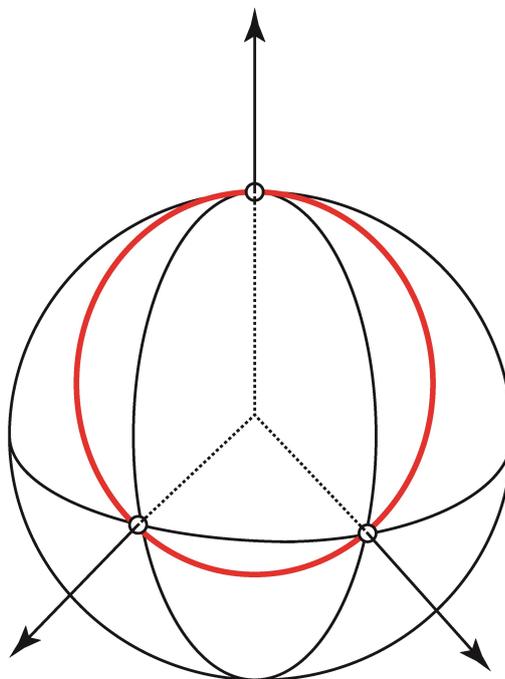
$$\frac{K}{H^3}(t\omega) = \frac{K(t\omega)}{H^3(t\omega)} = \frac{t^3K(\omega)}{t^3H^3(\omega)} = \frac{K(\omega)}{H^3(\omega)} = \frac{K}{H^3}(\omega).$$

Logo, os valores de $\frac{K}{H^3}$ dependem apenas de seus valores na esfera \mathbb{S}^2 . Uma vez que $N := \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3; R = 0\}$ é fechado e \mathbb{S}^2 é compacto, teremos então que $N_\omega = N \cap \mathbb{S}^2$ é compacto.

Assim: $\frac{K}{H^3} : N_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua definida num compacto e, pelo Teorema de Weierstrass, admite máximo e mínimo.

Observe que o limite inferior 0 que desejamos pode ser obtido através da

Figura 5 – Representação do domínio N_ω de $\frac{-K}{H^3}$ sobre \mathbb{S}^2 , considerando o quociente como uma função algébrica de seus autovalores. Este domínio se trata da intersecção do plano $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ com \mathbb{S}^2 . A hipótese suprime apenas três pequenas vizinhanças em torno dos eixos coordenados.



desigualdade $HK \leq \frac{1}{2}R^2$, a qual verificamos no Capítulo 3. Com efeito, sendo $R = 0$ e $K \neq 0$, temos os seguintes casos:

Caso 1: É escolhida uma orientação para M tal que $H > 0$. Nesse caso, teremos que $K < 0$.

Caso 2: É escolhida uma orientação para M tal que $H < 0$. Assim, teremos $K > 0$.

Assim, em ambos os casos, teremos: $\frac{K}{H^3} < 0$, isto é, independente da escolha da orientação de M , $\frac{K}{H^3}$ será sempre um valor negativo. Portanto: $-\frac{K}{H^3} \geq 0$.

Verifiquemos agora, através do método dos multiplicadores de Lagrange, que:

$$-\frac{K}{H^3} \leq \frac{4}{27}.$$

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \end{cases} . \quad (121)$$

Temos que: $\nabla f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_2 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_2)$, $\nabla g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, 1)$ e $\nabla h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Assim, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, segue-se que:

$$\nabla f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \alpha \nabla g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \beta \nabla h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Assim:

$$\begin{cases} \lambda_2 \lambda_3 = \alpha + 2\beta \lambda_1 \text{ (a)} \\ \lambda_1 \lambda_3 = \alpha + 2\beta \lambda_2 \text{ (b)} \\ \lambda_1 \lambda_2 = \alpha + 2\beta \lambda_3 \text{ (c)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ (d)} \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \text{ (e)} \\ \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = 0 \text{ (f)} . \end{cases} , \quad (122)$$

Observe que a equação de restrição (f) no sistema (122) é obtida quando se eleva ambos os membros da equação (d) ao quadrado e em seguida se utiliza nos cálculos a equação (e).

Somando-se as igualdades (a), (b) e (c) no sistema (122), obtemos $0 = 3\alpha + 2\beta$, o que nos fornece por sua vez: $2\beta = -3\alpha$.

Multiplicando-se as igualdades (a), (b), (c) no mesmo sistema por λ_1 , λ_2 e λ_3 , respectivamente e substituindo em cada uma delas a igualdade que nos fornece β em função de α , obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \alpha - 3\alpha \lambda_1^2 \text{ (a')} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \alpha - 3\alpha \lambda_2^2 \text{ (b')} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_3 \alpha - 3\alpha \lambda_3^2 \text{ (c')} \end{cases} \quad (123)$$

Somando-se (a'), (b') e (c') de (123) e usando as equações (d) e (e) do sistema (122), obtemos $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{-2\alpha}{3}$. Tal igualdade nos garante que $\alpha \neq 0$, pois

$K = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$, e assim $\lambda_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Com isso, (123) se torna:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} = \lambda_1 - 3\lambda_1^2 \text{ (a'')} \\ -\frac{2}{3} = \lambda_2 - 3\lambda_2^2 \text{ (b'')} \\ -\frac{2}{3} = \lambda_3 - 3\lambda_3^2 \text{ (c'')} \end{cases} \quad (124)$$

Usando-se Bháskara, obtemos as seguintes raízes para (a''), (b'') e (c''): $\frac{-1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Assim, os pontos que satisfazem as equações de restrição são: $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Assim, para tais pontos, teremos que $K = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{27}$.

Portanto: $0 \leq \frac{-K}{H^3} \leq \frac{4}{27}$, como queríamos.

APÊNDICE B - SOBRE HIPERSUPERFÍCIES ESTÁVEIS NA ESFERA DE DIMENSÃO 4

O objetivo deste apêndice é apresentar resultados semelhantes aos que foram demonstrados no Capítulo 6, só que ambientados em outro espaço-forma de dimensão 4: a esfera \mathbb{S}^4 .

Assim, o caminho natural desta linha de pesquisa será desenvolver resultados semelhantes que tenham como espaço-forma ambiente o espaço hiperbólico de dimensão 4: \mathbb{H}^4 .

Consideraremos aqui $x : M^3 \rightarrow \mathbb{S}^4$ imersão isométrica de M^3 variedade riemanniana completa em \mathbb{S}^4 , com curvatura escalar nula.

Além disso, é escolhido um campo unitário normal a M e o operador forma A associado à segunda forma fundamental de M é definido como $A : T_p M \rightarrow T_p M$, para todo $p \in M$, de modo que $\langle A(X), Y \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle$, onde $\bar{\nabla}$ é conexão riemanniana em \mathbb{S}^4 . Considere ainda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ os autovalores de A .

O principal motivo destes resultados não terem sido apresentados no Capítulo 6 em companhia dos Teoremas A, B, C, deve-se ao fato de que, ao longo de todo o texto da dissertação até o momento, consideramos a curvatura média H em sua forma não-normalizada enquanto que os resultados deste apêndice dependerão de sua forma normalizada, isto é, a partir de agora:

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} = \frac{S_1}{3}.$$

Tal consideração é feita pois aqui será utilizada a noção de r -ésima curvatura média da imersão x , a qual é denotada por H_r e consiste em:

$$H_r = \frac{S_r}{C_3^r},$$

onde S_r são os polinômios simétricos elementares já apresentados no Capítulo 3 e C_3^r é a combinação de 3, r a r , com $r \in \{1, 2, 3\}$.

Assim, temos que $H_1 = H$ é curvatura média que já conhecemos, $K = H_3$ é a curvatura de Gauss-Kronecker e H_2 está relacionada à curvatura escalar. Dizemos ainda que a hipersuperfície M é r -mínima quando $H_{r+1} = 0$.

Ou seja, o tipo de hipersuperfícies que trabalhamos até o Capítulo 6 são 1-mínimas.

Neste apêndice, dizemos que uma variedade riemanniana M^3 , completa, possui crescimento de volume polinomial se existe $\alpha \in (0, 3]$ tal que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(B_r(p))}{r^\alpha} < \infty,$$

para todo $p \in M$ e sendo $B_r(p)$ a bola geodésica centrada em p de raio r em M .

Vimos ainda no Capítulo 4 que a Segunda Forma da Variação nos fornece:

$$\mathcal{A}_r''(0) = -(r+1) \int_M f[L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f] dM. \quad (125)$$

Dessa forma, sendo $r = 1$, $n = 3$ e $c = 1$ (pois agora o espaço ambiente é \mathbb{S}^4), e lembrando que, no caso de M^3 ser estável, devemos ter por definição $\mathcal{A}_r'' > 0$, segue-se que:

$$\mathcal{A}_1''(0) = \int_M f L_1(f) dM + \int_M [(S_1 S_2 - 3S_3)f^2 + 2S_1 f^2] dM \leq 0. \quad (126)$$

Lembrando-se da seguinte igualdade verificada na Proposição 3.6, item 2:

$$\int_M f L_r(f) dM = - \int_M \langle P_r \nabla f, \nabla f \rangle dM,$$

teremos que (126) se torna:

$$\int_M (S_1 S_2 - 3S_3 + 2S_1) f^2 dM \leq \int_M \langle P_1 \nabla f, \nabla f \rangle dM, \quad (127)$$

para cada $f \in \mathcal{D}(M)$ com suporte compacto.

Assim, temos que (127) será, no cenário deste apêndice, o que chamaremos de Desigualdade de Estabilidade.

Este apêndice foi baseado no trabalho de Zhu e Fang em 2016 .

TEOREMA B.1: Não existe hipersuperfície $M^3 \rightarrow \mathbb{S}^4$ completa, estável, com $H_2 = 0$, não-compacta, crescimento de volume polinomial e tal que a curvatura média H satisfaz:

$$|H| \leq \delta_1 \text{ e } \left| \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right| \leq \delta_2,$$

onde δ_1 e δ_2 são constantes positivas quaisquer.

Demonstração: Suponha que exista uma hipersuperfície não-compacta, completa, estável satisfazendo as condições enunciadas no **TEOREMA B.1**.

Por tais condições, temos $H \neq 0$. Logo: $S_1 = 3H \neq 0$. Dessa forma, escolha uma orientação para M tal que $S_1 = 3H > 0$.

Verificamos no Capítulo 3 que $2S_1 S_3 \leq S_2^2$.

Assim: $S_3 \leq 0$.

Sabendo-se que P_1 é positivo-definido e usando a hipótese de 1-minimalidade da hipersuperfície M na Desigualdade de Estabilidade do cenário desse apêndice,

obtemos:

$$\int_M (2S_1 - 3S_3) f^2 dM \leq \int_M \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle dM, \quad (128)$$

para cada $f \in \mathcal{D}(M)$ com suporte compacto.

Fazendo $f = S_1^q \varphi$ em (128), onde q é uma constante positiva e $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ com suporte compacto, obtemos pela Regra da Cadeia:

$$\nabla f = qS_1^{q-1} \varphi \nabla S_1 + S_1^q \nabla \varphi.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \langle P_1(\nabla f), \nabla f \rangle &= \langle P_1(qS_1^{q-1} \varphi \nabla S_1 + S_1^q \nabla \varphi), qS_1^{q-1} \varphi \nabla S_1 + S_1^q \nabla \varphi \rangle \\ &= \langle qS_1^{q-1} \varphi P_1(\nabla S_1) + S_1^q P_1(\nabla \varphi), qS_1^{q-1} \varphi \nabla S_1 + S_1^q \nabla \varphi \rangle \\ &= \langle qS_1^{q-1} \varphi P_1(\nabla S_1), qS_1^{q-1} \varphi \nabla S_1 \rangle + \langle qS_1^{q-1} \varphi P_1(\nabla S_1), S_1^q \nabla \varphi \rangle \\ &\quad + \langle S_1^q P_1(\nabla \varphi), qS_1^{q-1} \varphi \nabla S_1 \rangle + \langle S_1^q P_1(\nabla \varphi), S_1^q \nabla \varphi \rangle \\ &= q^2 S_1^{2q-2} \varphi^2 \langle P_1(\nabla S_1), \varphi \nabla S_1 \rangle + qS_1^{2q-1} \varphi \langle P_1(\nabla S_1), \nabla \varphi \rangle \\ &\quad + qS_1^{2q-1} \varphi \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla S_1 \rangle + S_1^{2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle \\ \text{por } P_1 \text{ ser auto-adjunto } \rightarrow &= q^2 S_1^{2q-2} \varphi^2 \langle P_1(\nabla S_1), \varphi \nabla S_1 \rangle + 2qS_1^{2q-1} \varphi \langle P_1(\nabla S_1), \nabla \varphi \rangle \\ &\quad + S_1^{2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (129)$$

Sendo P_1 positivo-definido, segue-se que a segunda parcela de (129) se torna:

$$\begin{aligned} 2qS_1^{2q-1} \varphi \langle P_1(\nabla S_1), \nabla \varphi \rangle &= 2qS_1^{2q-2} \langle P_1(\varphi \nabla S_1), S_1 \nabla \varphi \rangle \\ &= 2qS_1^{2q-2} \langle \sqrt{P_1}(\varphi \nabla S_1), \sqrt{P_1}(S_1 \nabla \varphi) \rangle \\ \text{pela desigualdade de Cauchy-Schwarz } \rightarrow &\leq 2qS_1^{2q-2} \|\sqrt{P_1}(\varphi \nabla S_1)\| \|\sqrt{P_1}(S_1 \nabla \varphi)\| \\ \text{pela desigualdade } xy &\leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \rightarrow &\leq 2qS_1^{2q-2} \frac{(\|\sqrt{P_1}(\varphi \nabla S_1)\|^2 + \|\sqrt{P_1}(S_1 \nabla \varphi)\|^2)}{2} \\ &= qS_1^{2q-2} (\|\sqrt{P_1}(\varphi \nabla S_1)\|^2 + \|\sqrt{P_1}(S_1 \nabla \varphi)\|^2) \\ &= qS_1^{2q-2} \langle \sqrt{P_1}(\varphi \nabla S_1), \sqrt{P_1}(\varphi \nabla S_1) \rangle \\ &\quad + qS_1^{2q-2} \langle \sqrt{P_1}(S_1 \nabla \varphi), \sqrt{P_1}(S_1 \nabla \varphi) \rangle \\ &= qS_1^{2q-2} \langle P_1(\varphi \nabla S_1), \varphi \nabla S_1 \rangle \\ &\quad + qS_1^{2q-2} \langle P_1(S_1 \nabla \varphi), S_1 \nabla \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Portanto:

$$2qS_1^{2q-1} \varphi \langle P_1(\nabla S_1), \nabla \varphi \rangle = qS_1^{2q-2} \varphi^2 \langle P_1(\nabla S_1), \nabla S_1 \rangle + qS_1^{2q-2} \langle P_1(S_1 \nabla \varphi), S_1 \nabla \varphi \rangle. \quad (130)$$

Assim, usando-se o fato já apresentado na Observação 5.1 de que:

$$\langle P_1(X), X \rangle \leq 2S_1|X|^2,$$

substituindo (130) em (129) e, por sua vez, substituindo (129) na Desigualdade de Estabilidade (128), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_M (2S_1 - 3S_3)S_1^{2q}\varphi^2 dM &\leq (q^2 + q) \int_M S_1^{2q-2}\varphi^2 \langle P_1(\nabla S_1), \nabla S_1 \rangle dM \\ &\quad + (1 + q) \int_M S_1^{2q} \langle P_1(\nabla \varphi), \nabla \varphi \rangle dM \\ &\leq 2(q^2 + q) \int_M S_1^{2q-1}\varphi^2 |\nabla S_1|^2 dM \\ &\quad + 2(1 + q) \int_M S_1^{2q+1} |\nabla \varphi|^2 dM. \end{aligned} \quad (131)$$

Fazendo $\varphi = \psi^{\frac{3+2q}{2}}$, teremos o seguinte:

$$\nabla \varphi = \frac{3 + 2q}{2} \psi^{\frac{1+2q}{2}} \nabla \psi.$$

E assim:

$$|\nabla \varphi|^2 = \frac{(3 + 2q)^2}{4} \psi^{1+2q} |\nabla \psi|^2. \quad (132)$$

Combinando (132) e (131), segue-se que:

$$\begin{aligned} \int_M (2S_1 - 3S_3)S_1^{2q}\varphi^2 dM &\leq 2(q^2 + q) \int_M S_1^{2q-1}\varphi^2 |\nabla S_1|^2 dM \\ &\quad + \frac{(1 + q)(3 + 2q)^2}{2} \int_M S_1^{2q+1}\psi^{1+2q} |\nabla \psi|^2 dM. \end{aligned} \quad (133)$$

Usando-se a desigualdade de Young, teremos:

$$\begin{aligned} S_1^{2q+1}\psi^{1+2q} |\nabla \psi|^2 &= (\beta S_1^{2q+1}\psi^{1+2q}) \left(\frac{|\nabla \psi|^2}{\beta} \right) \\ &\leq \frac{1 + 2q}{3 + 2q} \beta^{\frac{3+2q}{1+2q}} S_1^{3+2q} \psi^{3+2q} + \frac{2}{3 + 2q} \beta^{-\frac{(3+2q)}{2}} |\nabla \psi|^{3+2q}, \end{aligned}$$

onde β é uma constante positiva.

Substituindo-se em (133), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_M (2S_1 - 3S_3)S_1^{2q}\psi^{3+2q}dM &\leq 2(q^2 + q) \int_M S_1^{2q-1}\psi^{3+2q}|\nabla S_1|^2dM \\ &+ \frac{(1+q)(3+2q)}{2} \int_M \left[1 + 2q\beta^{\frac{3+2q}{1+2q}}S_1^{3+2q}\psi^{3+2q}\right]dM \\ &+ \frac{(1+q)(3+2q)}{2} \int_M \left[2\beta^{-\frac{(3+2q)}{2}}|\nabla\psi|^{3+2q}\right]dM. \end{aligned} \quad (134)$$

Observe agora que:

$$\begin{aligned} \left|\nabla\left(\frac{1}{S_1}\right)\right|^2 &= \left\langle \nabla\left(\frac{1}{S_1}\right), \nabla\left(\frac{1}{S_1}\right) \right\rangle \\ \text{pela Regra da Cadeia} \rightarrow &= \left\langle -\frac{1}{S_1^2}\nabla S_1, -\frac{1}{S_1^2}\nabla S_1 \right\rangle \\ &= \frac{1}{S_1^4} \langle \nabla S_1, \nabla S_1 \rangle. \end{aligned}$$

E dessa forma:

$$S_1^{2q-1}\psi^{3+2q}|\nabla S_1|^2 = S_1^{2q-1}\psi^{3+2q}S_1^4 \left|\nabla\left(\frac{1}{S_1}\right)\right|^2 = S_1^{3+2q}\psi^{3+2q} \left|\nabla\left(\frac{1}{S_1}\right)\right|^2.$$

Usando-se essa igualdade na primeira parcela do membro direito de (134) e realizando-se as devidas manipulações, obtemos:

$$\int_M C_1 S_1^{3+2q}\psi^{3+2q}dM \leq C_2 \int_M |\nabla\psi|^{3+2q}dM, \quad (135)$$

onde:

$$C_1 = \frac{2}{S_1^2} - \frac{3S_3}{S_1^3} - 2(q^2 + q) \left|\nabla\left(\frac{1}{S_1}\right)\right|^2 - \frac{(1+q)(3+2q)(1+2q)\beta^{\frac{3+2q}{1+2q}}}{2} \quad (136)$$

e

$$C_2 = (1+q)(3+2q)\beta^{-\frac{(3+2q)}{2}} > 0. \quad (137)$$

Verifiquemos agora que $C_1 > 0$.

Uma vez que $|H| \leq \delta_1$ e $\left|\nabla\left(\frac{1}{H}\right)\right| \leq \delta_2$ por hipótese, temos então que:

$$|H| = \left|\frac{S_1}{3}\right| \leq \delta_1 \implies |S_1| \leq 3\delta_1 \quad (138)$$

e

$$\begin{aligned}
\left| \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right|^2 &= \left| \nabla \left(\frac{3}{S_1} \right) \right|^2 \\
&= \left\langle \nabla \left(\frac{3}{S_1} \right), \nabla \left(\frac{3}{S_1} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{3}{S_1^2} \nabla S_1, -\frac{3}{S_1^2} \nabla S_1 \right\rangle \\
&= 9 \left\langle \nabla \left(\frac{1}{S_1} \right), \nabla \left(\frac{1}{S_1} \right) \right\rangle \\
&= 9 \left| \nabla \left(\frac{1}{S_1} \right) \right|^2.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\left| \nabla \left(\frac{1}{S_1} \right) \right| = \frac{1}{3} \left| \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right| \leq \frac{\delta_2}{3}. \quad (139)$$

Usando (138) e (139) em (136), temos:

$$C_1 \geq \frac{2}{9\delta_1^2} - \frac{3S_3}{S_1^3} - \frac{2(q^2 + q)\delta_2^2}{9} - \frac{(1+q)(3+2q)(1+2q)\beta^{\frac{3+2q}{1+2q}}}{2}.$$

Dessa forma, tomando q e β suficientemente pequenos tais que:

$$\frac{2}{9\delta_1^2} - \frac{2(q^2 + q)\delta_2^2}{9} - \frac{(1+q)(3+2q)(1+2q)\beta^{\frac{3+2q}{1+2q}}}{2} > 0,$$

e usando o fato que $-\frac{3S_3}{S_1^3} \geq 0$, pois $K = S_3 \leq 0$ e $S_1 > 0$, obtemos $C_1 > 0$, como queríamos.

Agora, considerando $\psi : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\psi(\rho(p)) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in B_r \\ \frac{2r - \rho(p)}{r}, & \text{se } p \in B_{2r} \setminus B_r \\ 0, & \text{se } p \in M \setminus B_{2r} \end{cases}, \quad (140)$$

onde $\rho(p) = \rho(p, p_0)$ é a função distância de M (mesma função de suporte compacto usada na demonstração do **TEOREMA A**), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} C_1 S_1^{3+2q} dM &= \int_{B_r} C_1 S_1^{3+2q} \psi^{3+2q} dM \\
&\leq C_2 \int_{B_r} |\nabla \psi|^{3+2q} dM \\
&\leq C_2 \int_{B_{2r} \setminus B_r} |\nabla \psi|^{3+2q} dM \\
&\leq C_2 \int_{B_{2r} \setminus B_r} \frac{1}{r^{3+2q}} dM \\
&\leq C_2 \frac{\text{vol}(B_{2r})}{r^{3+2q}}.
\end{aligned} \tag{141}$$

Observando que M possui, por hipótese, crescimento de volume polinomial e fazendo $r \rightarrow \infty$, de forma análoga ao que foi feito na demonstração do **TEOREMA A**, obtemos $S_1 = 0$, contradizendo o fato de que $S_1 \neq 0$, o qual foi verificado no início desta demonstração.

TEOREMA B.2: Não existe hipersuperfície M^3 em \mathbb{S}^4 estável, completa, com $H_2 = 0$, não-compacta, crescimento de volume polinomial e tal que:

$$\frac{-K}{H^3} \geq \delta_1 \text{ e } \left| \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right| \leq \delta_2,$$

onde δ_1 e δ_2 são constantes positivas quaisquer, onde H e K são as curvaturas média e de Gauss-Kronecker, respectivamente.

Demonstração: Suponha que exista uma hipersuperfície não-compacta, completa e estável satisfazendo as condições do **TEOREMA B.2**.

Utilizando-se mais uma vez a desigualdade (135) obtida na demonstração anterior, precisamos verificar que, nas condições do **TEOREMA B.2**, C_1 continuará sendo positivo.

Para isso, observe que:

$$\frac{-K}{H^3} \geq \delta_1 \implies -\frac{27S_3}{S_1^3} \geq \delta_1 \implies -\frac{S_3}{S_1^3} \geq \frac{\delta_1}{27}. \tag{142}$$

e

$$\left| \nabla \left(\frac{1}{S_1} \right) \right| = \frac{1}{3} \left| \nabla \left(\frac{1}{H} \right) \right| \leq \frac{\delta_2}{3}, \tag{143}$$

onde (143) é obtida pelos mesmos cálculos que nos forneceram (139).

Assim, a igualdade (136) que nos fornece C_1 se torna:

$$C_1 \geq \frac{2}{S_1^2} + \frac{\delta_1}{9} - \frac{2(q^2 + aq)\delta_2}{3} - \frac{(a+q)(3+2q)(1+2q)\beta^{\frac{3+2q}{1+2q}}}{2a}. \quad (144)$$

Escolhendo q e β suficientemente pequenos de modo que:

$$\frac{\delta_1}{9} - \frac{2(q^2 + aq)\delta_2}{3} - \frac{(a+q)(3+2q)(1+2q)\beta^{\frac{3+2q}{1+2q}}}{2a} > 0$$

e observando que $\frac{2}{S_1^2} > 0$, obtemos $C_1 > 0$, como queríamos. Assim, utilizando-se a mesma função com suporte compacto ψ , definida em (140) e repetindo os cálculos que nos forneceram (141), obtemos, tomando $r \rightarrow \infty$ e usando a hipótese de que M possui crescimento de volume polinomial, que $S_1 = 0$, quando sabemos que $S_1 \neq 0$, o que nos dá a contradição que garante o resultado.