UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DEMÓCLIS DO CARMO ROCHA

JOGOS EDUCATIVOS: BRINCANDO, ENSINANDO E APRENDENDO MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

FORTALEZA

2018

DEMÓCLIS DO CARMO ROCHA

JOGOS EDUCATIVOS: BRINCANDO, ENSINANDO
E APRENDENDO MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, do departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R572j Rocha, Demóclis do Carmo.
Jogos educativos: brincando, ensinando e aprendendo matemática no ensino fundamental / Demóclis do Carmo Rocha. – 2018.
38 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Jogos no ensino de matemática. 2. Jogo da memória em grupo. 3. Jogo da participação. 4. Tangram. 5. Torre de Hanói. I. Título.

CDD 510

DEMÓCLIS DO CARMO ROCHA

JOGOS EDUCATIVOS: BRINCANDO, ENSINANDO
E APRENDENDO MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

Aprovada em: 26/07/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Angelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

A minha família.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Clóvis Pereira da Rocha e Margarida Maria do Carmo Rocha, por sempre terem me incentivado a tentar realizar meus sonhos. A minha esposa, Thays Priscila de Araújo Sousa, que esteve ao meu lado durante toda essa jornada. Ao meu orientador, professor Marcelo Ferreira de Melo. Aos meus colegas de curso e professores.

RESUMO

Este trabalho trata do uso de alguns jogos educativos para despertar a curiosidade e o interesse dos estudantes para aprender Matemática no ensino fundamental. O Jogo da Memória em Grupo e o Jogo da Participação surgiram da minha prática em sala de aula junto aos meus alunos na Escola Municipal de Ensino Fundamental Bárbara de Alencar. O Tangram e a Torre de Hanói são jogos consagrados e também são abordados. Registro também uma experiência em sala de aula com uso do Algeplan. Chamei de Jogo da Subtração uma aplicação de conceitos básicos de Teoria dos Números que tornam a prática do algoritmo da subtração e a aplicação do critério de divisibilidade por nove mais interessantes.

Palavras-chave: Jogos no ensino de matemática. Jogo da memória em grupo. Jogo da participação. Tangram. Algeplan. Torre de Hanói. Jogo da subtração.

ABSTRACT

This dissertation is about the use of educational games to flourish curiosity and interest among students in basic education. The Group Memory Game and the Participation Game araised from daily lessons with my students from Bárbara de Alencar School. The Tangram and the Tower of Hanoi are very well known games that are also discussed in this dissertation. An experimentation with Algeplan is also presented. I named Subtraction Game the use of basic concepts of Number Theory that make the learning of subtraction algorithm and the divisibility rule of nine more interesting for students.

Key words: Games in the teaching of mathematics. Group memory game. Participation game. Tangram. Tower of Hanoi.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios para o ensino de Matemática no ensino fundamental é conseguir despertar o interesse dos estudantes para aprender. Nós professores sabemos o quanto o estudo dessa disciplina pode ser prazeroso, mas nem sempre é fácil fazer com que outros percebam isso. Aulas meramente expositivas em que o estudante deve apenas prestar atenção e copiar não costumam ser eficazes para despertar a vontade de aprender. Sabemos que, quando o educando desenvolve um papel de protagonista do seu aprendizado, a motivação é maior e os resultados são melhores. Nesse contexto, espera-se que o professor esteja sempre buscando novas formas de despertar o interesse dos estudantes. Aprender sobre jogos, com temas matemáticos, possibilita ao professor ferramentas que podem ser utilizadas nas suas aulas para tornar o processo de ensino e aprendizagem mais envolvente e motivador.

Para aprender assuntos mais complexos em Matemática primeiro é necessário ter aprendido assuntos mais simples. Entre alguns dos assuntos mais simples estão as tabuadas de multiplicar. É muito comum encontrar estudantes que ainda não dominam as tabuadas. Em vez de treinar mecanicamente, meramente através da repetição, pode-se usar jogos para que esse processo possa ocorrer de forma mais divertida. É o que veremos no capítulo sobre o JOGO DA MEMÓRIA EM GRUPO.

Aulas expositivas sempre terão um papel relevante no ensino de Matemática e, mesmo durante uma aula expositiva, podemos utilizar jogos para estimular a participação dos estudantes. Durante a exposição de algum tema é comum que o professor ou professora faça perguntas direcionadas a turma. É lamentável quando essas perguntas não são seguidas por respostas. É melhor ouvir uma resposta errada do que não ouvir resposta alguma. Quando os educandos não tentam responder, este pode ser um sinal de que a exposição não esteja despertando interesse. Para tentar estimular a participação dos estudantes, desenvolvi junto com meus alunos e descrevo em um capítulo o JOGO DA PARTICIPAÇÃO.

Mais do que um simples quebra-cabeças, o TANGRAM pode ser usado para ensinar vários conceitos matemáticos de forma divertida. Usei esse jogo com minhas turmas de 7° ano e comento um pouco sobre essa experiência em um capítulo deste trabalho. Para lidar com conceitos de geometria, também faço o registro de uma atividade com o ALGEPLAN. Também tratarei sobre a TORRE DE HANÓI que nos apresenta uma ótima oportunidade para estimular o raciocínio lógico, bem como de semear a ideia básica sobre o Princípio da Indução Finita.

A Teoria dos Números nos fornece vários problemas curiosos que podem incentivar o gosto pela Matemática. Apresento um capítulo dedicado a um JOGO COM SUBTRAÇÃO que propicia, de uma forma envolvente, um estímulo para o treino e domínio do algoritmo da subtração e, além disso, uma oportunidade para aprofundamento no entendimento do critério de divisibilidade por 9.

2 JOGO DA MEMÓRIA EM GRUPO

Neste capítulo apresento um jogo que pode ser realizado com todos os estudantes de uma turma no ensino fundamental e que tem como objetivo incentivar os estudantes a estudar as tabuadas.

2.1 A importância da memória no aprendizado de matemática

A construção do conhecimento matemático depende não só do raciocínio, mas também da memória. Na sala dos professores, é comum ouvir uma reclamação constante por parte dos professores de Matemática, Física e Química: como eu vou ensinar conteúdos mais complexos se meu aluno ainda nem aprendeu as tabuadas? Para lidar com essa situação e estimular os estudantes a estudar as tabuadas, usei um Jogo da Memória em Grupo com estudantes da Escola Bárbara de Alencar, em Messejana. Neste capítulo, vou descrever como ocorreu essa prática e seus resultados.

É comum ouvir de pessoas mais idosas, no interior do Nordeste, que na escola o método que usavam para aprender as tabuadas era a palmatória. A professora fazia perguntas aos estudantes e, aquele que não soubesse a resposta de cor, sofria com palmadas nas mãos. Hoje, é claro que esse método não é aceitável. Professores de Matemática muitas vezes perguntam: como estimular os estudantes a aprender as tabuadas? Grande parte dos professores tentam apenas usar estímulos verbais como, por exemplo, simplesmente dizer: “estudem as tabuadas, será bom para vocês”. Infelizmente, essa técnica não desperta muita motivação entre os estudantes. Ao perceber que crianças e adolescentes se envolvem bastante com jogos, se motivando e querendo vencer, decidi elaborar um Jogo da Memória em Grupo para estimular os estudantes a aprender as tabuadas.

Figura 1 - Cartões Para o Jogo da Memória em Grupo.

2.2 O jogo da memória em grupo

A ideia do jogo foi evoluindo de acordo com as experiências que fiz em cada turma. Agora, vou descrever a forma que tenho utilizado depois do aprendizado que tive com as primeiras experiências. O Jogo da Memória em Grupo envolve todos os estudantes da turma. Previamente, são feitos pequenos cartões de papel, cada um com uma continha da tabuada de multiplicar. A quantidade de cartões a serem utilizados fica a critério do professor ou professora. Em particular, recomendo que sejam feitos cartões repetidos com as continhas da tabuada que envolvem números maiores. Por exemplo, você pode fazer 4 ou 5 cartões com a conta $8 \cdot 9$. Os cartões devem ser colocados dentro de uma sacola ou caixa para serem sorteados.

A execução do jogo é bastante simples, mas requer alguns cuidados. O professor pode iniciar a atividade falando que os estudantes participarão de um jogo sobre as tabuadas de multiplicar e dar alguns minutos para que eles estudem as tabuadas antes de começar de fato. Como motivação para a participação, uma sugestão é falar que os três estudantes com o melhor desempenho no jogo ganharão pontos para melhorar suas notas. Na primeira etapa do jogo, o professor pode trabalhar apenas com os cartões envolvendo contas com os números menores, por exemplo com continhas até $6 \cdot 6$. O docente caminha, atendendo um estudante de cada vez. Para cada estudante, faz o sorteio de uma conta. Se o discente acertar, vai para frente da turma. Se errar, permanece sentado no seu lugar. Depois de sortear uma conta, dependendo da quantidade de estudantes e de cartões, pode ser melhor recolocar o cartão na sacola para poder ser novamente sorteado.

Na segunda etapa, o jogo continua com aqueles que foram para a frente da turma porque conseguiram acertar. Nesta etapa, o professor pode colocar na sacola os cartões com números maiores com produto até, no máximo, $9 \cdot 9$. Os alunos formam uma fila e o professor continua os sorteios. Quem acerta a conta, vai para o final da fila. Quem erra, sai do jogo e vai sentar-se junto com os outros colegas. Nessa etapa, os cartões sorteados, se tiverem números menores, devem sair da sacola para aumentar um pouco o nível de dificuldade do jogo. Para evitar que os outros estudantes interfiram dando a resposta para quem deve responder na vez, o professor pode mostrar o cartão apenas para quem deve responder. Após a resposta, o professor pode dizer qual era a conta e o resultado correto para a turma. Para evitar que a atividade use tempo demais, o aplicador pode usar um temporizador para marcar o tempo máximo para a resposta, recomendo um tempo entre 15 e 30 segundos. Os sorteios continuam até que fiquem apenas dois estudantes na frente da turma.

Na terceira etapa, quando restam apenas dois estudantes, apenas um será o vencedor, mas devemos ficar atentos a um detalhe. Quando restam apenas dois estudantes, o primeiro que errar, não sai do jogo. Ele só perde, se o outro acertar. Caso os dois errem sucessivamente o jogo continua. Ele só acaba quando um erro é seguido de um acerto. Então, o último a acertar é o campeão.

2.3 Conclusão

Percebi que esse Jogo da Memória em Grupo fez muito sucesso entre os meus alunos. Na aula seguinte à primeira aplicação, vários perguntaram se naquele dia eles brincariam novamente com o jogo. Isso significa que, naturalmente, eles estavam se preparando, estudando as tabuadas para ter um melhor desempenho. Fiquei muito satisfeito com isso. Finalmente, existem várias outras informações sobre Matemática que são importantes e que dependem da memória. Por exemplo, podemos incrementar o jogo inserindo cartões sobre a nomenclatura de polígonos, frações e estimulando o reconhecimento da raiz quadrada de números quadrados perfeitos.

3 O JOGO DA PARTICIPAÇÃO

O uso de jogos na escola pode estimular a participação dos estudantes durante as aulas. Neste capítulo, apresentarei o JOGO DA PARTICIPAÇÃO que desenvolvi junto com estudantes da escola Bárbara de Alencar, em Messejana.

3.1 Motivação para o uso do jogo da participação

É muito triste quando, no decorrer da aula, uma pergunta é feita aos estudantes e ninguém na turma se esforça para tentar responder. Vários professores reclamam que, muitas vezes, os estudantes de determinada turma estão apáticos aos seus esforços para conquistar a sua atenção. "Eu pergunto e ninguém responde", dizem. Isso é particularmente alarmante quando, mesmo sabendo que existem estudantes com grande potencial e capacidade de responder, esses permanecem calados quando lhes são feitas perguntas sobre o conteúdo estudado. Para tentar superar esse tipo de situação, desenvolvi com ajuda dos meus alunos, o Jogo da Participação.

3.2 Como funciona o jogo da participação

A ideia base é formar duas equipes em sala de aula, essas equipes competem respondendo às perguntas do professor no decorrer da aula. Cada resposta correta vale pontos para a sua equipe e cada resposta errada vale pontos para a equipe adversária. O professor ou professora anota a pontuação em um cantinho no quadro. A equipe vencedora é a que obtém mais pontos ao final do jogo.

A definição das equipes é determinada por quem vai conduzir a atividade. Uma possibilidade, que foi a que usei, é formar a equipe das meninas e a equipe dos meninos. Assim, fica fácil identificar os participantes de uma e da outra equipe. Outra possibilidade, é formar a equipe dos alunos que estão de um lado da sala e a equipe dos alunos que estão do outro lado da sala. Uma outra sugestão é formar a equipe daqueles que tem um número par na chamada e a equipe daqueles que tem um número ímpar na chamada. O importante é definir duas equipes na sala e, além disso, que ninguém fique de fora. Todos devem ter a chance de participar.

O docente deve organizar, em um cantinho do quadro, uma tabela na qual vai marcar os pontos das equipes. A tabela também deve conter números correspondentes às perguntas que serão feitas. Para ficar mais emocionante e para que a equipe que esteja perdendo continue interessada no jogo, as perguntas finais podem valer mais pontos que as iniciais. O valor da pontuação de cada pergunta deve ser definido no início do jogo.

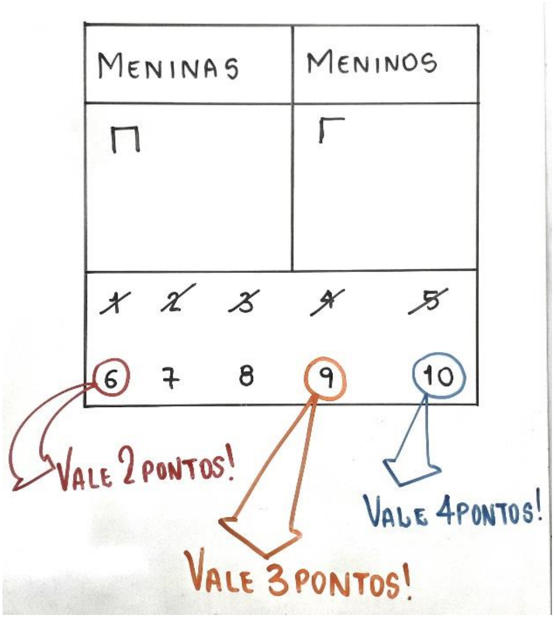


Figura 2 - Jogo da Participação.

No decorrer da aula, o docente deve avisar a turma quando uma pergunta vale pontos na competição. É importante lembrar aos estudantes que, cada resposta errada, gera pontos para a equipe adversária. Dessa maneira, evitamos que os estudantes digam repostas aleatórias, os “chutes”, na tentativa de pontuar. As primeiras perguntas devem ser mais simples para estimular os estudantes a tentar participar. O nível de dificuldade deve aumentar de forma gradual e a última pergunta deve ser especial.

Cada resposta correta deve ser comemorada. O estudante que deu uma resposta correta deve ser parabenizado pelo professor ou professora. Essa recompensa social, esse prestígio que é dado em frente a turma, tende a fazer com que outros estudantes se esforcem para conseguir a mesma atenção e reconhecimento.

Para evitar que o docente se confunda durante a realização da atividade, uma lista com as perguntas a serem feitas bem como com as repostas esperadas pode ser feita na etapa de planejamento.

3.3 Exemplo

A seguir, apresento uma possibilidade de lista de perguntas a serem utilizadas durante a atividade.

1) Quanto que dá $15 + 17$? Resposta: 32.

2) Quanto que dá $100 - 33$? Resposta: 67.

3) A soma de 2 e 4 é 6, pois $2 + 4 = 6$. O produto de 2 e 4 é 8, pois $2 \cdot 4 = 8$. Quais são os números naturais cuja soma é igual a 12 e cujo produto é igual a 35? Resposta: os números são 5 e 7.

4) A raiz quadrada de 9 é 3, pois $3 \cdot 3 = 9$. A raiz quadrada de 49 é 7, pois $7 \cdot 7 = 49$. Qual é a raiz quadrada de 625 ? Resposta: 25.

5) Qual é o quociente da divisão de 324 em 3 partes iguais? Resposta: 108.

6) Qual é menor múltiplo comum a 12 e 15? Resposta: 60.

7) O número 60 é um múltiplo de 15, pois veja que $4 \cdot 15 = 60$. Como vimos, o número 60 também é um múltiplo de 12. O número 60 é igual a quantas vezes 12? Resposta: 5 vezes.

8) Fique atento! Sabemos que $5 - 7 = -2$, pois é como se tivéssemos 5 reais e estivéssemos devendo 7 reais. Usamos os 5 reais que temos para pagar uma parte da dívida e ainda ficamos devendo dois reais, que indicamos com o número -2. Muito bem, quanto que dá $99 - 506$? Resposta: -407.

9) Qual é o menor múltiplo comum a 7, 22 e 32? Resposta: 2464.

10) Isso significa que 2464 é o menor número natural não nulo que é um múltiplo de 7, de 22 e de 32. Pergunta: 2464 é igual a quantas vezes 7? Resposta: 352.

A lista de perguntas acima é apenas uma possibilidade. É natural que o docente escolha as perguntas que achar mais adequadas para a sua turma. No entanto, devo insistir no fato de que as perguntas devem ser organizadas com um nível crescente de dificuldade. Além disso, essas perguntas são uma ótima oportunidade para revisar conceitos e estimular a prática e o domínio de alguns algoritmos.

Caso você tenha interesse de ver, na prática, um pouco da utilização desse jogo, pode conferir no link dado através do código QR abaixo, um vídeo que eu gravei em sala de aula e no qual utilizo o JOGO DA PARTICIPAÇÃO. Veja a pergunta que faço aos 7min00s de vídeo.

Figura 3 - Código QR com link para Vídeo com Exemplo.

3.4 Conclusão

Percebi, na prática, o ótimo resultado desse Jogo da Participação. Obtive respostas de estudantes que nunca haviam participado antes. Ouvi vários comentários positivos dos estudantes sobre essa atividade. Muitos disseram que a aula ficou mais divertida. A premiação dada à equipe vencedora pode variar. Como passei a utilizar esse jogo várias vezes, uma premiação simples que usei foi permitir que a equipe vencedora fosse a primeira a ser liberada para ir para o intervalo.

4 O TANGRAM

O Tangram é um quebra-cabeças geométrico chinês e é uma ótima ferramenta para o ensino de vários conceitos matemáticos. Neste capítulo, apresento um pouco do que se sabe sobre a história desse quebra-cabeças, como podemos construí-lo com uso de materiais de baixo custo, sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas com esse material e, além disso, apresento também a experiência que tive com o uso do Tangram junto aos meus alunos da escola de ensino fundamental Bárbara de Alencar, em Messejana, onde trabalho.

4.1 O jogo

Formado por sete peças, que são dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo, acredita-se que que o Tangram surgiu na China. Uma das lendas para o seu surgimento diz que um sábio deveria entregar a um imperador um espelho na forma de um quadrado e, no meio caminho, deixou o espelho cair no chão, observou que ele se dividiu nas sete peças que compõem o quebra-cabeças e mostrou ao imperador que inúmeras figuras poderiam ser montadas com elas. Não há um consenso sobre a lenda que deu origem do jogo, existem muitas variações dessa lenda, mas o que sabemos é que este jogo se tornou muito popular devido às várias possibilidades para o seu uso, desde um simples passatempo até a possibilidade de explicação de vários conceitos matemáticos.

4.2 Como fazer um tangram

Podemos desenhar, pintar e cortar as peças que formam o Tangram. Para construir um Tangram, podemos começar com um quadrado$ABCD,$ 4x4, como ilustrado na figura a seguir.

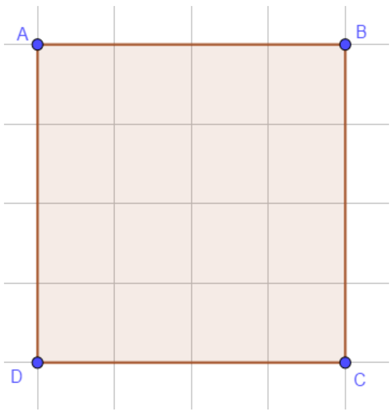


Figura 4 - Quadrado 4x4.

Em seguida, podemos traçar a diagonal BD e marcar seu ponto-médio E.

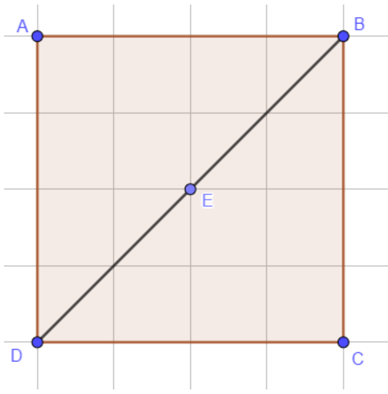


Figura 5 - Traçado da Diagonal.

Traçando um segmento ligando o vértice A ao ponto E obtemos os dois triângulos maiores AEB e AED.

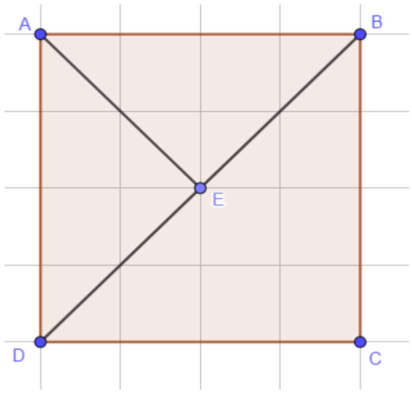


Figura 6 - Ligando um dos vértices ao ponto-médio da diagonal.

Marcamos o ponto-médio F do lado BC e o ponto-médio G do lado CD e determinamos o triângulo médio FCG, como ilustrado a seguir.

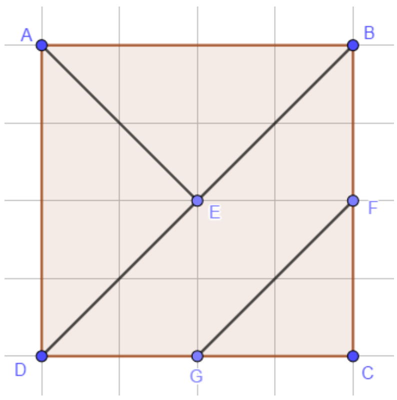


Figura 7 - Traçando um segmento paralelo à diagonal.

Agora, marcamos o ponto-médio H do segmento DE e destacamos o triângulo DGH, que é um dos triângulos menores.

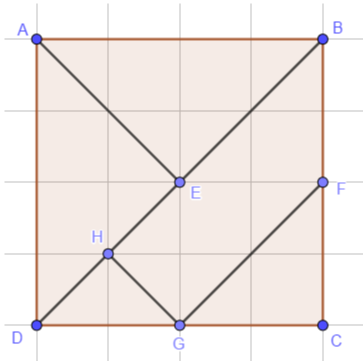


Figura 8 - Obtendo um dos triângulos menores.

Marcando o ponto-médio I do segmento GF, podemos traçar o segmento IE e obter o quadrado $EIGH$, observe:

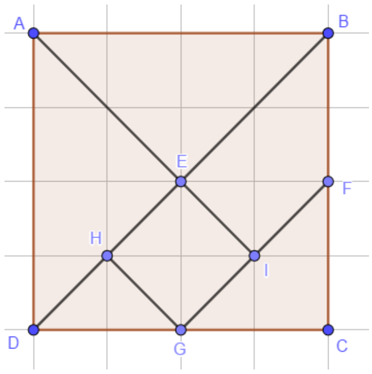


Figura 9 - Obtendo o quadrado.

Marcando o ponto-médio J do segmento EB podemos determinar o segundo triângulo menor, EJI, e o paralelogramo $JIFB$. Veja:

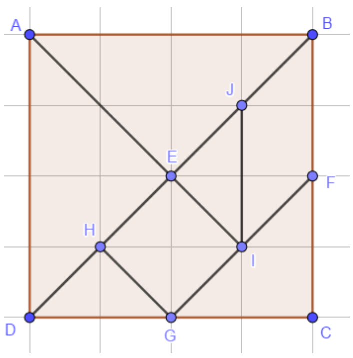


Figura 10 - Finalizando com outro triângulo menor e com o paralelogramo.

Finalmente, pode-se colorir as peças para que o jogo fique com uma aparência mais atraente.

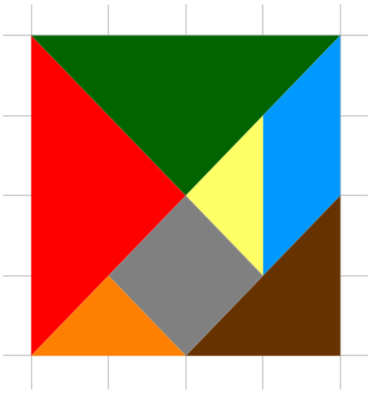


Figura 11 - Tangram colorido.

4.3 Sugestões de atividades

A construção das imagens acima foi feita no software GeoGebra. Uma sugestão de atividade que pode ser realizada com os estudantes é fazer essa construção, usando o GeoGebra, no laboratório de informática da escola. Caso a escola não tenha um laboratório de informática, as etapas acima descritas também podem ser realizadas com régua e compasso. Mesmo não tendo régua e compasso, pode-se construir o Tangram com dobraduras e cortes simples a partir de uma folha A4. Portanto, esse é um material que pode ser construído com materiais de baixo custo.

Naturalmente, uma atividade que nos ocorre de imediato é reconstruir o quadrado original a partir das peças. Por outro lado, podemos explorar mais possibilidades como: construir um quadrado usando apenas duas peças, construir um quadrado usando apenas três peças, construir um quadrado usando apenas quatro peças, entres várias outras possíveis construções.

Com o Tangram, além de reconhecer as formas geométricas envolvidas, os estudantes podem experimentar na prática o uso vários conceitos da geometria. Por exemplo, em um nível mais iniciante, os estudantes podem utilizar um transferidor para medir os ângulos dos polígonos e uma régua comum para calcular os comprimentos dos lados e o perímetro. Em um nível intermediário, eles também podem calcular a área de cada uma das sete peças e verificar que a soma dessas áreas corresponde, de fato, à área do quadrado. Em um nível um pouco mais avançado, os estudantes podem tentar justificar, através de argumentos teóricos, que a construção acima descrita forma triângulos retângulos, um quadrado e um paralelogramo.

Cada peça está associada a uma fração do quadrado. Dessa maneira, também podemos sugerir aos estudantes que determinem a fração do quadrado que corresponde a cada uma das peças e apresentar a porcentagem correspondente.

4.4 Experiência em sala de aula

Na primeira aula em que usei o Tangram com minhas turmas de 7° ano, realizamos a atividade mais simples: dadas as peças, tentar formar um quadrado com elas. Essa atividade, embora simples, é importante e deve ser realizada. Mesmo durante essa atividade podem surgir algumas perguntas interessantes. Por exemplo, ao se referir às peças, todos os estudantes reconheceram os triângulos e o quadrado, como era de se esperar. Porém, alguns não recordavam o nome adequado ao ‘paralelogramo’.

Eu perguntei: como se chama um polígono que possui quatro lados? A maioria respondeu: um quadrado, professor. Mas esse polígono aqui possui quatro lados, eu disse, me referindo ao paralelogramo e perguntei: esse polígono é um quadrado? Todos responderam que aquele não era um quadrado, mesmo tendo quatro lados. Então, expliquei que o nome genérico de um polígono de quatro lados é ‘quadrilátero’. Mais do que isso, expliquei que o quadrado é um quadrilátero especial que possui quatro lados de mesmo tamanho e quatro ângulos de 90°. Alguns estudantes usaram um transferidor para medir os ângulos do quadrado do Tangram. Sugeri que todos fizessem isso.

Expliquei também que o quadrado é um exemplo de um paralelogramo, pois possui lados opostos paralelos. Comentei que existem paralelogramos que não são quadrados pois não tem os lados de mesmo tamanho ou não tem ângulos de 90°. Este era o caso daquela peça do Tangram cujo nome muitos deles não conseguiram lembrar.

Embora seja possível construir um Tangram com materiais de baixo custo, utilizei alguns conjuntos feitos em madeira que eu já possuía. Nós tínhamos à disposição cinco conjuntos de peças e eu organizei a turma em cinco grupos para realizar a atividade. As peças tinham cores diversas, mas cada equipe ficou com peças de uma determinada cor. As imagens a seguir registram esse primeiro contato dos meus alunos com o Tangram.

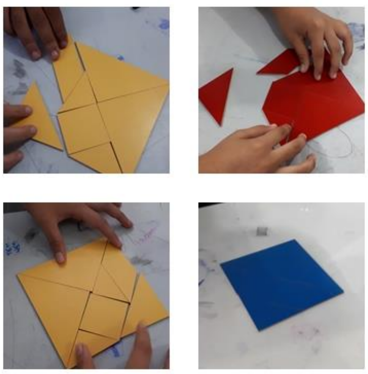


Figura 12 - Estudantes manipulando o Tangram.

4.5 Conclusão

Foi notório o fato de que os estudantes se envolveram bastante com as atividades realizadas com o Tangram. O nível de interesse deles foi bem maior do que o normalmente observado em aulas meramente expositivas. Percebi que as atividades desenvolvidas colocaram os estudantes como protagonistas do seu aprendizado, possibilitando oportunidade para eles elaborassem argumentos para defender seu ponto de vista. Ao mesmo tempo, meu trabalho como professor se desenvolveu de uma forma bastante interessante, como um mediador, orientando sobre as atividades e ajudando a verificar a validade dos argumentos apresentados pelos estudantes.

5 UMA EXPERIÊNCIA COM O ALGEPLAN

Neste capítulo, apresento uma experiência de prática em sala de aula, usando o Algeplan, com uma turma de sétimo ano do ensino fundamental.

5.1 O algeplan

Composto por peças retangulares coloridas, normalmente feitas de madeira, mas que também podem ser produzidas com outros materiais de baixo custo, o Algeplan normalmente é utilizado para facilitar a compreensão de operações envolvendo expressões algébricas.

5.2 Experiência com o algeplan no 7° ano do ensino fundamental

Os estudantes que colaboraram com nosso experimento, inicialmente, acreditavam que o Algeplan se tratava de um simples jogo no estilo quebra-cabeças. Depois de observar as peças desse material educativo, eles ficaram em dúvida sobre qual forma aquele quebra-cabeças teria quando montado. A imagem a seguir é um registro desse contato inicial dos estudantes com as peças desse material.

Figura 13 - Primeiro contato com o Algeplan.

Sabemos que o Algeplan tem uma ótima aplicação para ilustrar várias operações com expressões algébricas geometricamente. O conteúdo de expressões algébricas normalmente é visto no 8° ano. No entanto, embora nossos colaboradores fizessem o 7° ano, ainda pudemos aproveitar o material para fazer um ótimo estudo sobre a definição de quadrado e a ideia da decomposição de uma figura em partes menores para facilitar o cálculo da sua área.

Nossos colaboradores ainda não conheciam as ferramentas de álgebra para aproveitar o

Algeplan para ilustrar fatorações, mesmo assim puderam aproveitar esse material para se apropriar de forma mais significativa do conceito de quadrado. Como um jogo, selecionei algumas peças e pedi aos estudantes que verificassem se seria possível formar um quadrado com elas. A figura em seguida mostra a forma obtida por um deles.

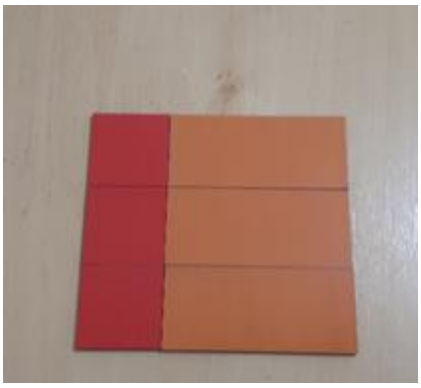


Figura 14 - É um quadrado?

Criou-se uma polêmica sobre se a forma obtida seria uma boa representação para um quadrado. Quem defendia que aquela forma era de um quadrado dizia que aquela figura claramente tinha ângulos retos e que parecia ser um quadrado, então deveria ser uma boa representação para um quadrado.

Aproveitei a oportunidade para lembrar que um quadrado, além de possuir ângulos retos também deve ter seus quatro lados de mesmo tamanho. Alguém observou que o lado esquerdo daquele “candidato a quadrado” media o mesmo que três vezes o lado de um quadradinho vermelho. O lado direito, claramente, também tinha essa mesma medida. Foi aí que alguém teve a ideia de pegar três quadradinhos vermelhos e usá-los para medir o lado superior do nosso “candidato a quadrado”.

Em seguida, temos a figura que ilustra a medição.

Figura 15 - Medindo um dos lados.

Analisando essa composição, essa forma de medir o lado superior, ficou claro para todos que nosso “candidato a quadrado” não passou no teste de ter todos os lados de mesmo tamanho. Embora o lado esquerdo e o lado direito tivessem medida igual a três vezes o lado do quadradinho vermelho, o lado superior claramente tinha uma medida maior que três vezes o lado do quadradinho vermelho. Assim, todos concluíram que aquela composição das peças não era uma boa representação de um quadrado.

5.3 Conclusão

Embora o Algeplan seja normalmente usado em turmas a partir do 8° ano, a sua manipulação por estudantes do 7° ano possibilitou o surgimento de várias oportunidades para a aprendizagem significativa de conceitos da geometria entre os quais destacamos a definição de quadrado, a medição a partir da comparação com um padrão e a estruturação lógica de uma argumentação para justificar uma afirmação.

6 TORRE DE HANÓI

Neste capítulo apresentarei o jogo Torre de Hanói, mostrarei alternativas para a sua construção, comentarei sobre a minha experiência com esse jogo em sala de aula e, finalmente, apresentarei uma demonstração para o número mínimo de movimentos para realizar o objetivo do jogo.

6.1 Origem do jogo e suas regras

Idealizado pelo matemático francês Edouard Lucas, no ano de 1822, este jogo consiste em n discos de diâmetros distintos, cada um com um furo no centro e uma base na qual estão fixados três pinos. Em um dos pinos são colocados os discos sem que um disco de diâmetro maior fique sobre outro disco de diâmetro menor. Veja a figura a seguir.

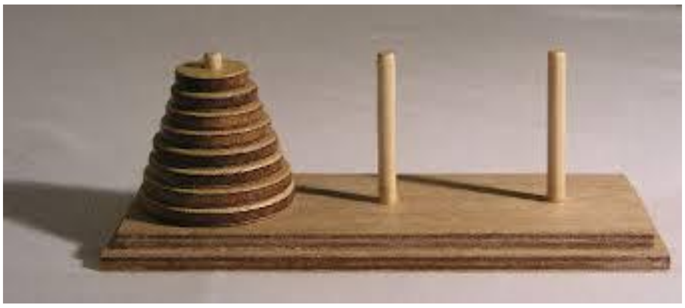


Figura 16 - Torre de Hanói.

O objetivo do jogo é mover a pilha de discos para um determinado pino, movendo um disco de cada vez e de modo que nunca um disco com diâmetro maior fique sobre um disco de diâmetro menor.

Costuma-se associar esse jogo a uma lenda. De acordo com a lenda, em um templo oriental, Deus teria colocado 64 discos de ouro perfurados em uma de três colunas de diamante de forma semelhante à figura acima. Ele teria então, ordenado a um grupo de sacerdotes que movessem os discos para uma determinada coluna, respeitando as regras acima. Quando todos os discos tivessem sido movidos, o mundo acabaria.

Existem muitas variações dessa lenda, mas, como veremos, o número mínimo de movimentos para realizar essa tarefa é de $2^{64} - 1$. Dessa maneira, se fossem realizados apenas movimentos corretos e um movimento por segundo, o tempo mínimo necessário para concluir essa tarefa seria de mais de um bilhão de séculos.

6.2 Como construir a torre de Hanói ou usar um aplicativo para obter o jogo.

Podemos construir o jogo Torre de Hanoi com materiais bastante simples e de baixo custo. Podemos usar EVA para construir a base e os discos. Podemos usar canetinhas usadas para fazer os pinos. A construção do jogo permite interdisciplinaridade entre as disciplinas de Artes e de Matemática. Enquanto um professor ou professora de Artes pode ajudar os estudantes com a confecção do jogo, estimulando o desenvolvimento de habilidades manuais, o docente de Matemática pode apresentar as regras do jogo aos estudantes e contribuir com o desenvolvimento do raciocínio lógico. A figura a seguir mostra um resultado da confecção do jogo com materiais de baixo custo.

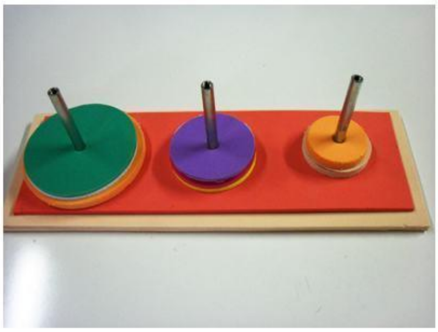


Figura 17 - Torre de Hanói feita com materiais de baixo custo.

Lembramos que, hoje, é crescente o interesse dos estudantes por aplicativos de celular e jogos de computador. Dessa maneira, vale a pena apresentar aos estudantes alguma opção de aplicativo que apresente o jogo Torre de Hanoi. Fazendo uma pesquisa rápida, encontrei na PlayStore um aplicativo gratuito com o jogo. Nesse aplicativo, foi usado o nome em inglês "Tower of Hanoi".

Figura 18 - Aplicativo com o jogo Torre de Hanói.

6.3 Experiência com o jogo torre de Hanói em sala de aula.

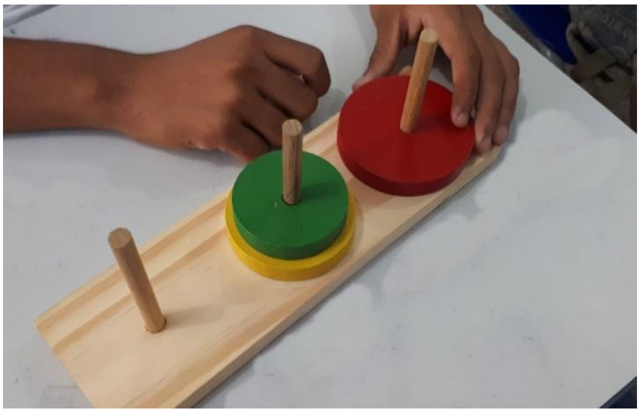
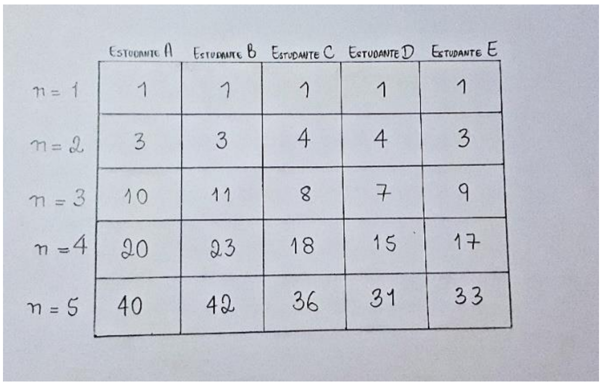


Figura 19 - Estudante manipulando o jogo Torre de Hanói.

Esse jogo pode envolver a turma inteira. Para estimular a participação, quem conduzir a atividade pode atribuir pontos de participação para os melhores colocados. Para iniciar, o docente pode organizar a turma em grupos com quatro ou cinco estudantes. Então, o professor ou professora pode explicar como funciona o jogo da Torre de Hanói para a turma. Pode ser que seja necessário passar em cada grupo dando mais detalhes sobre o jogo.

Cada grupo de estudantes deve organizar uma tabela. A tabela deve conter uma quantidade de colunas igual ao número de estudantes no grupo. No topo de cada coluna deve-se escrever o nome de um estudante. A tabela deve ter tantas linhas quantos sejam os discos utilizados no jogo e à esquerda de cada linha deve-se anotar o número de discos correspondente àquela etapa. Na linha 1, deve-se anotar o número de movimentos que foram necessários para cada estudante mover um disco para o pino fixado. Na linha 2, deve-se anotar o número de movimentos necessários para cada estudante mover dois discos para o pino fixado. E assim, sucessivamente.



	Estudante A	Estudante B	Estudante C	Estudante D	Estudante E
$n = 1$	1	1	1	1	1
$n = 2$	3	3	4	4	3
$n = 3$	10	11	8	7	9
$n = 4$	20	23	18	15	17
$n = 5$	40	42	36	31	33

Figura 20 - Registro da quantidade de movimentos para resolver o jogo.

A ordem inicial em que os estudantes irão começar a jogar pode ser determinada por sorteio. Normalmente, todos os estudantes irão concordar que, para mover um disco para o pino fixado, basta um movimento. Após a primeira rodada, a ordem se mantém como no início. Quando eles passam a ter que movimentar dois discos, algum dos estudantes já pode eventualmente precisar de mais movimentos do que o mínimo necessário e conhecido pelo professor. A quantidade de movimentos necessários para cada estudante para resolver o problema deve ser anotada na tabela. Na terceira rodada, com 3 discos, deve começar aquele que conseguiu realizar a segunda rodada com menos movimentos. Sempre assim, jogam primeiro, aqueles que conseguiram realizar com menos movimentos a etapa anterior. Dessa forma, quem teve mais dificuldade em uma etapa pode aprender com os erros e acertos daqueles que conseguiram com mais facilidade.

O campeão de cada grupo será aquele que conseguir realizar o desafio com o maior número de discos, com a menor quantidade de movimentos. Então, pode-se formar um novo grupo, apenas com os campeões de cada grupo. Realiza-se novamente a atividade com os campeões de cada grupo e, assim, pode-se determinar o campeão da turma. Em um outro nível, podem competir os campeões das turmas para determinar o campeão da escola.

6.4 Número mínimo de movimentos

Assim como explicado no livro Elementos de Aritmética, de A. Hefez, o número mínimo de movimentos para movimentar n discos para um determinado pino fixado, respeitando as regras, é $2^n - 1$.

Apresentaremos uma prova dessa afirmação através do princípio da indução finita aplicado sobre o número n de discos. Para $n = 1$, naturalmente, basta que seja realizado 1 movimento para deslocar o disco para o pino fixado. Note que $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$, isto é, a afirmação é válida para $n = 1$.

Suponha que sejam necessários, no mínimo, $2^n - 1$ movimentos para deslocar n discos para um pino fixado – essa será nossa hipótese de indução. Considere então que temos $n + 1$ discos organizados em um pino e desejamos deslocar todos eles, de acordo com as regras do jogo, para um pino fixado. De acordo com a hipótese de indução, são necessários no mínimo $2^n - 1$ movimentos para deslocar os n menores discos que estão acima do disco maior para um pino fixado. Assim, podemos realizar esse número mínimo de movimentos para retirar os n discos menores e colocar todos eles em um pino de apoio. Depois disso, realizamos mais um movimento para colocar o maior disco no pino fixado no início do jogo. Para finalizar, realizamos mais $2^n - 1$ movimentos para retirar todos os n menores discos do disco de apoio e colocar todos eles acima do disco maior que havia sido colocado no pino fixado. Assim, realizamos $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ movimentos para deslocar n+1 discos, de acordo com as regras do jogo, para um pino fixado. Perceba que essa estratégia faz com que a quantidade de movimentos seja mínima. De fato, para mover $n + 1$ discos, organizados em um pino, para um outro pino fixado, primeiro, devemos pelo menos retirar todos os n menores discos de cima do maior colocando-os num pino de apoio, colocar o maior disco no pino fixado e, só então, mover todos os n menores para cima do disco maior novamente.

Pelo Princípio da Indução Finita, a afirmação é válida para todo n natural maior do que ou igual a 1.

7 JOGO COM SUBTRAÇÃO

Executar os algoritmos apenas para praticá-los pode ser considerada uma atividade maçante. Por outro lado, com a experiência em sala de aula, sabemos que o algoritmo da subtração nem sempre é bem executado pelos estudantes, que costumam ter dificuldade em especial quando um algarismo representante de uma ordem no minuendo é menor do que o algarismo representante dessa mesma ordem no subtraendo. Para estimular a prática entusiasmada do algoritmo da subtração e para que os estudantes conheçam melhor o critério de divisibilidade por 9 podemos utilizar este JOGO COM SUBTRAÇÃO.

Experimente sugerir como atividade aos estudantes calcular a diferença entre alguns números. Poucos irão se sentir motivados a realizar essa atividade. Mesmo entre aqueles que a realizarem, poucos se sentirão motivados a verificar se o resultado obtido está correto ou não. A verdade é que é muito difícil motivar as pessoas a realizar atividades mecanicamente. Porém, se você apresentar algo que elas possam achar interessante sobre aquela atividade, algo que desperte a sua curiosidade sobre o assunto, você pode ganhar a sua atenção e fazer com que queiram fazer a atividade e, mais do que isso, queiram verificar o resultado.

7.1 Apresentando o jogo da subtração

Em vez de simplesmente pedir que os estudantes realizem subtrações, você pode sugerir que eles participem de um Jogo Com Subtração. Para conseguir a atenção dos estudantes, o professor ou professora pode iniciar explicando uma "mágica" com subtração. Funciona assim: o docente diz que cada estudante deve escrever um número natural com quatro algarismos. Em seguida, explica que cada aluno pode trocar a ordem dos algarismos do número, formando outro número natural com quatro algarismos. Depois disso, já com dois números formados, devem subtrair o menor número do maior número. Agora, o estudante deve olhar para a diferença obtida, escolher um algarismo não nulo e dizer para o professor os outros algarismos. Mesmo sem saber qual número o aluno escolheu no início, mesmo sem ver a conta que ele fez, o professor será capaz de dizer corretamente qual foi o algarismo escolhido.

A ideia do jogo é propor que os estudantes testem, em dupla, suas hipóteses acerca de como pode ser determinado o algarismo escolhido pelo colega.

7.2 Incentivando a reflexão e a busca por um padrão

Como o professor descobriu o algarismo escolhido? Em todas as vezes que fiz essa atividade nas minhas turmas, surgiram várias hipóteses sobre como eu havia determinado o algarismo escolhido. Alguns disseram que foi sorte. Para esses expliquei que a chance que eu tinha de acertar escolhendo aleatoriamente era bem pequena, para ser mais preciso, a chance de se escolher o algarismo correto era de $\frac{1}{9}$. Mais do que isso, se a minha escolha fosse aleatória, a chance de acertar sucessivas vezes seria ainda menor. Para tentar descobrir se eu havia acertado por sorte, muitos pediram que eu "adivinhasse" o algarismo que eles haviam escolhido. Se a conta tiver sido realizada corretamente, eu acertarei, eu dizia. De fato, executando alguns poucos passos podemos determinar com certeza o algarismo escolhido. Porém, eventualmente, eu "errava" ao dizer o algarismo escolhido. Nesses casos, eu verificava a conta de subtrair feita, e mostrava onde foi cometido algum erro. Em outras palavras, esse truque nos fornece uma condição necessária para que uma conta de subtração tenha sido realizada corretamente.

7.3 Organizando o jogo

Muitos estudantes elaboravam explicações para justificar como eu determinava o algarismo escolhido. É aí que o jogo começa. Os estudantes formam duplas. Nessas duplas, eles irão testar suas hipóteses. Cada um tenta "adivinhar" o algarismo escolhido pelo adversário. Se conseguir, ganha um ponto. Se não conseguir, quem ganha um ponto é o adversário. Vence quem fizer mais pontos. Em caso de dúvida, o professor ou professora trabalha como árbitro e ajuda verificando se a subtração foi ou não realizada corretamente. Para poder dizer o algarismo escolhido a conta tem que ter sido feita corretamente. Espera-se que os estudantes descartem as hipóteses incorretas à medida que percebam suas falhas. Algumas poucas vezes já aconteceu de um alguém determinar naturalmente e corretamente como o truque se justificava.

7.4 Justificando o jogo com argumentos de teoria dos números

Como o professor descobre o algarismo escolhido?

A justificativa que apresentarei aqui se baseia no texto sobre Critérios de Divisibilidade do livro Introdução à Teoria dos Números, de José Plínio de Oliveira Santos.

Tudo se baseia no critério de divisibilidade por nove. Um número natural é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos é divisível por 9. Ao escolher um número natural de quatro algarismos, digamos $\overline{abcd}$ (perceba que usei a notação $\overline{abcd}$ para denotar um número natural com a unidades de milhar, b centenas, c dezenas e d unidades), esse número pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d,$$

de forma equivalente, podemos escrever

$$\overline{abcd} = 999a + 99b + 9c + (a + b + c + d)$$

Já que $999a + 99b + 9c$ é divisível por 9, o resto da divisão de $\overline{abcd}$ por 9 será o resto da divisão de $(a + b + c + d)$ por 9. Embora essa seja uma explicação para o caso de um número natural com quatro algarismos, esse raciocínio pode ser facilmente generalizado. É por esse motivo que o critério de divisibilidade por 9 estabelece que "um número natural é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos é divisível por 9".

Naturalmente, quando alteramos a ordem dos algarismos de um número natural e formamos outro número natural com os mesmos algarismos a soma dos algarismos se preserva. Por exemplo, o número 4321 tem como soma dos seus algarismos o número 10. Por outro lado, no número 1234 também tem 10 como soma dos seus algarismos, pois foi formado com os mesmos algarismos, mesmo que em outra ordem. Isso significa que tanto 4321 quanto 1234 deixam o mesmo resto na divisão por 9 e, como explicado acima, esse resto é o mesmo resto da divisão de 10 por 9, isto é, 1. Assim, podemos escrever, $4321 = 9q_1 + 1$ e $1234 = 9q_2 + 1$. Realizando a subtração, temos $4321 - 1234 = 9\ (q_1 - q_2)$. Isso significa que a diferença é divisível por 9.

Dessa maneira, podemos dizer que quando subtraímos dois números naturais formados pelos mesmos algarismos, mesmo que em ordens diferentes, o resultado sempre será divisível por 9.

Então, basta usar o critério de divisibilidade por 9 para determinar o algarismo que foi escolhido.

7.5 Exemplos

Por exemplo, se o estudante diz que os algarismos da diferença são 1, 3 e 4, nós calculamos $1 + 3 + 4 = 8$. Já que a soma de todos os algarismos da diferença deve ser divisível por 9, então o algarismo escolhido foi 1, pois $8 + 1 = 9$. Outro exemplo, se o estudante diz que os algarismos são 5, 6 e 4, nós calculamos $5 + 6 + 4 = 15$. Como a soma de todos os algarismos da diferença deve ser divisível por 9, então o algarismo escolhido foi o 3, pois $15 + 3 = 18$, que é divisível por 9. Um caso curioso é o seguinte: suponha que o estudante diga que os algarismos da diferença são 4, 3 e 2. Neste caso, a soma $4 + 3 + 2 = 9$ já é um número divisível por 9. É por esse motivo que dizemos que o estudante deve escolher um algarismo de 1 a 9, pois, se não fosse assim, o exemplo anterior mostra que o algarismo escolhido poderia ser 0 ou 9. Veja que $0 + 9 = 9$ é divisível por 9, e $9 + 9 = 18$ também é divisível por 9. Eliminamos esse problema ao dizer que o algarismo deve ser escolhido de 1 a

9.

7.6 Conclusão

Realizei essa atividade com meus alunos do 7° ano e tive ótimos resultados. Eles continuaram praticando entre si por bastante tempo. Por querer praticar corretamente, eles ficaram mais atentos para que as subtrações fossem realizadas de maneira correta. Mais do que isso, muitos conseguiram entender melhor o critério de divisibilidade por 9. A etapa do jogo serviu para que eles exercitassem um raciocínio científico com teste de hipóteses e busca por padrões.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vale a pena investir tempo para aprender sobre jogos educativos que são úteis para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. A princípio, alguns desses jogos podem parecer apenas uma fonte de diversão, um passatempo, porém, eles carregam na sua essência muitas possibilidades para aprender brincando. O professor ou professora deve sempre relacionar os jogos com os conceitos matemáticos envolvidos para que os alunos tenham a oportunidade de aprender mais com eles. Mesmo que no nível fundamental os estudantes ainda não tenham maturidade para compreender algumas justificativas mais complexas sobre aspectos de um determinado jogo, ainda assim vale a pena o contato com ele, pois fica ali uma semente que pode, no futuro, gerar um grande interesse por Matemática.

REFERÊNCIAS

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção Textos Universitários).

SANTOS, J. **Introdução à teoria dos números**. Rio de Janeiro : IMPA, 2009. (Coleção Matemática Universitária).

AQUINO, A. **Aplicações Lúdicas da Teoria dos Números**. 2013. 39 f. Dissertação (Mestrado) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

CARVALHO, C. **Uso do Tangram no Ensino de Matemática no Ensino Fundamental.** 2016. *In*: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades – Anais do Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo - SP, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5487_3967_ID.pdf> Acesso em 21 de Jul. de 2018.