



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**JAMIRES SOUSA CORDEIRO PRACIANO**

**ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS LAMINADAS E DE MATERIAIS**  
**COM GRADAÇÃO FUNCIONAL UTILIZANDO UMA FORMULAÇÃO**  
**ISOGEOMÉTRICA**

**FORTALEZA**

**2018**

JAMIRES SOUSA CORDEIRO PRACIANO

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS LAMINADAS E DE MATERIAIS  
COM GRADAÇÃO FUNCIONAL UTILIZANDO UMA FORMULAÇÃO  
ISOGOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. D. Sc. Evandro Parente Júnior.  
Coorientador: Prof. D. Sc. João Batista Marques de Sousa Júnior.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- P91a Praciano, Jamires Sousa Cordeiro.  
Análise da Estabilidade de Estruturas Laminadas e de Materiais com Gradação Funcional Utilizando uma Formulação Isogeométrica / Jamires Sousa Cordeiro Praciano. – 2018.  
101 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior.  
Coorientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Júnior.
1. Análise Isogeométrica. 2. Cascas Abatidas. 3. Estabilidade. 4. Material com Gradação Funcional. 5. Materiais Compósitos. I. Título.

CDD 624.1

---

JAMIRES SOUSA CORDEIRO PRACIANO

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS LAMINADAS E DE MATERIAIS  
COM GRADAÇÃO FUNCIONAL UTILIZANDO UMA FORMULAÇÃO  
ISOGEOMÉTRICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em: 30/05/2018.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. D. Sc. Evandro Parente Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. D. Sc. João Batista Marques de Sousa Júnior (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. D. Sc. Antônio Macário Cartaxo de Melo.  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. D. Sc. Paulo Batista Gonçalves  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RIO)

A Deus.

Aos meus pais, Aires e Jamaci, pelo amor,  
educação, dedicação e apoio.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Aires e Jamaci, pelo amor, a dedicação todos esses anos, a educação e os sentimentos bons que eu aprendi com eles.

Ao meu namorado Luís Arthur Brasil, pelo amor e paciência que teve comigo durante todo esse tempo, apoiando-me nos momentos difíceis, sempre com carinho.

Ao meu orientador, Evandro Parente Júnior, pela excelente orientação, a amizade desde a Iniciação Científica, por estar sempre presente e ser tão solícito. É um exemplo de professor e pesquisador, muito dedicado, inteligente e com uma conduta impecável. Quando eu crescer, quero ser assim também!

Aos professores Antônio Macário, Paulo Gonçalves e João Batista pelo tempo e por aceitarem participar da banca examinadora.

Ao Bergson Matias, meu querido “Berguinho”, por toda a amizade, apoio e discussões polêmicas na hora do almoço. Vou sentir muito a sua falta e te desejo o melhor! Você é incrível e te admiro muito por toda sua inteligência e esforço.

Ao Elias Barroso, pela amizade e, principalmente a paciência, sua ajuda foi muito valiosa neste trabalho. Você merece todo o Nescou/Toddyinho do mundo! É uma pessoa incrível, muito inteligente e correto.

Ao Samir Auad, pela amizade e os cafés da Química com pão de queijo, pelo jeito manso que contrasta com o meu e pelas conversas que me ajudaram a pensar além sobre a vida, os estudos, à docência. Além das contribuições nos trabalhos.

Ao Pedro Sanderson, pela amizade e toda colaboração acadêmica e profissional, sempre disposto a ajudar. Pelo incentivo a ingressar no mestrado e iniciar uma vida docente, tenho muito a te agradecer.

Aos colegas do LMCV, onde eu encontrei o melhor ambiente para trabalhar. Todos sempre estão dispostos a ajudar uns aos outros, sem egoísmo e com humildade.

À UFC, DEECC, LMCV e CAPES, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

À generosidade da vida por ter me trazido até aqui, pelos caminhos por onde andei, por tudo que vi e vivi, e pelas pessoas que conheci, com elas aprendi muito e fiz grandes amizades. Pelos conhecimentos adquiridos, pelos bons momentos e os nem tão bons assim. Sou grata por tudo!

“Se consegui enxergar mais longe, foi porque me apoiei sobre ombros de gigantes.”

*Isaac Newton*

## RESUMO

O estudo da estabilidade de estruturas esbeltas é de fundamental importância para garantir segurança dos projetos de placas e cascas, principalmente quando são utilizados materiais com alto desempenho estrutural, como os compósitos reforçados por fibras e os materiais com gradação funcional (MGF). A Análise Isogeométrica (AIG) é uma técnica recente, que utiliza como funções de aproximação dos deslocamentos as mesmas funções utilizadas pelos programas CAD para representação da geometria, como as NURBS. A AIG apresenta vantagens como a representação exata da geometria e a facilidade de refinamento do modelo. Este trabalho trata da análise isogeométrica de placas e cascas abatidas de material compósito, com foco nos compósitos laminados reforçados por fibras e nos materiais com gradação funcional. A formulação apresentada é baseada nas teorias de Reissner-Mindlin para placas considerando o cisalhamento transversal e de Marguerre para análise não linear de cascas abatidas. Esta formulação apresenta travamento numérico quando aproximações de baixa ordem são utilizadas juntamente com a integração completa por quadratura de Gauss. O uso de funções de base de ordem superior alivia, mas não o elimina, o problema do travamento. Por outro lado, técnicas de integração reduzida foram aplicadas com sucesso para resolver o travamento para qualquer ordem de aproximação. Assim, excelentes resultados foram obtidos para todos os exemplos analisados. Na estabilidade de placas laminadas, foi observado que a convergência e os comportamentos pós-críticos dependem do *layup* e da espessura das lâminas. Verificou-se que placas *angle-ply* precisam de maior refinamento que placas *cross-ply* e isotrópicas. Adicionalmente, a laminação *angle-ply* pode apresentar carga de flambagem maior que laminações *cross-ply*, porém seu enrijecimento pós-flambagem é menor. Placas com laminações simétricas apresentaram bifurcação simétrica estável com pouca sensibilidade às imperfeições iniciais. Nas placas de MGF, compostas por metal e cerâmica, verificou-se que a carga crítica aumenta com a fração volumétrica de cerâmica, fenômeno observado também no comportamento pós-crítico. Verificou-se ainda a forte influência das condições de contorno sobre a estabilidade destas placas. A formulação permitiu ainda estudar com sucesso a influência da espessura, esquema de laminação e variação da fração de volume sobre o comportamento não linear e a estabilidade de cascas cilíndrica abatidas.

**Palavras-chave:** Análise Isogeométrica. Cascas Abatidas. Estabilidade. Material com Gradação Funcional. Materiais Compósitos. Comportamento Pós-Crítico.



## ABSTRACT

The stability study of slender structures is of fundamental importance to guarantee the safety of the plates and shells, especially when high structural performances, like fiber-reinforced composite and functionally graded materials (FGM), are used. Isogeometric Analysis (IGA) is a recent technique that approximates the displacement field using the same functions used by CAD programs to geometry modeling (e. g. B-Splines and NURBS). IGA presents advantages such as the exact representation of the geometry and the model refinement simplicity. This work discusses isogeometric analysis plates and shallow shells of composite materials, focusing on fiber-reinforced composite laminates and functionally graded materials composed of metal and ceramic. The presented formulation is based on Reissner-Mindlin plate theory considering the transversal shear and Marguerre theory nonlinear analysis of shallow shells. It was verified that low-order approximation elements suffer from shear locking when full integration by Gaussian quadrature is applied. The use of higher order basis functions decreases, but do not eliminate, the locking problem. On the other hand, reduced integration techniques were applied with success to solve the locking problem for any approximation order. Excellent results were obtained from all analyzed examples. In the stability of laminated plates, it was observed that convergence and post-critical behavior depend on the composite layup. It was verified that angle-ply plates need to be more refined than cross-ply and isotropic plates. Furthermore, the critical loads of angle-ply laminates can be higher than the buckling loads of cross-ply laminates. However, angle-ply laminates present a smaller post-critical strength reserve. Laminated plates showed stable-symmetric bifurcation with small sensitivity to initial imperfections in all cases. The results showed the critical load of FGM plates increase with the ceramic volume fraction and that the boundary conditions have a strong influence on the stability of these plates. The presented IGA formulation also allowed to successfully study with the influence of thickness, layup and volume fraction variation on the nonlinear behavior and the stability of shallow shells.

**Keywords:** Isogeometric Analysis. Shallow Shells. Stability. Functionally Graded Materials. Composite Materials. Post-buckling Behavior.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação de materiais compósitos.....	19
Figura 2 – Sistemas de coordenadas do laminado.....	21
Figura 3 – Deformações e tensões ao longo da espessura do laminado, usando a teoria de Lâmina Equivalente.....	21
Figura 4 – Esquema geral de laminação.....	22
Figura 5 – Campos de aplicação potencial dos MGF.....	24
Figura 6 – Classificação do MGF de acordo com sua fabricação.....	24
Figura 7 – Dados de pesquisas sobre MGF entre 1980 e 2016.....	25
Figura 8 – Exemplo de uma peça feita de material compósito para um receptor de calor solar fabricado usando o alinhamento das fibras de MGF.....	25
Figura 9 – Seção transversal de um material MGF composto por Zircônia ( $Y_2O_3-ZrO_2$ ) e uma superliga de níquel, cromo, alumínio e ítrio (NiCrAlY ou YPSZ), fabricado por deposição.....	26
Figura 10 – Seção transversal de modelos de MGF.....	26
Figura 11 – Comparação das características de um material MGF e materiais compósitos convencionais.....	27
Figura 12 – Módulo de Young do MGF para diferentes distribuições ao longo da espessura, onde $p$ é referente ao expoente $N$ usado no presente trabalho.....	29
Figura 13 – Deslocamentos de um ponto na placa segundo a teoria de Reissner-Mindlin.....	32
Figura 14 – Coordenada $z$ do compósito laminado.....	36
Figura 15 – Controle local exercido por um ponto de controle, alterando a forma da curva de acordo com a mudança da posição de $p_3$ .....	42
Figura 16 – B-Splines e suas respectivas derivadas.....	43
Figura 17 – Pontos de controle em uma barra (problema unidimensional).....	44
Figura 18 – B-Splines com inserção de <i>knot</i> ( $\bar{\xi}=2$ ).....	45
Figura 19 – Exemplo do controle local obtido pela inserção de <i>knots</i> .....	46
Figura 20 – Exemplo de funções de base quadrática com refinamento de malha.....	46
Figura 21 – Exemplo de refinamento $h$ em uma B-Spline quadrática em uma barra.....	47
Figura 22 – Exemplo de funções de base com elevação de grau de quadrática para cúbica....	47
Figura 23 – Exemplo de refinamento $p$ de uma B-Spline quadrática na barra.....	48
Figura 24 – Exemplo de refinamento $k$ .....	48

Figura 25 – Exemplo de refinamento $k$ . O processo se inicia de (a) para (b), com a elevação do grau, depois de (b) para (c) com a inserção de <i>knot</i> . .....	49
Figura 26 – Diferença na geometria entre uma semicircunferência construída com NURBS e um arco de 180° feito com B-Spline. ....	50
Figura 27 – Efeito da variação do peso nas curvas. ....	51
Figura 28 – Superfície NURBS. ....	52
Figura 29 – Geometria de um cabo, graus de liberdade e funções de base. ....	58
Figura 30 – Modelo de uma superfície NURBS vista em planta. ....	59
Figura 31 – Malhas de controle e física. Mapeamento da superfície NURBS. Percebe-se que há a estrutura real, a sua parametrização e o elemento. ....	60
Figura 32 – Caminho de equilíbrio com <i>snap-through</i> e <i>snap-back</i> . ....	61
Figura 33 – Iterações do Método do Comprimento de Arco. ....	62
Figura 34 – Pontos críticos e caminhos de equilíbrio. ....	64
Figura 35 – Pontos de Gauss nas integrações completa (Comp) e reduzida clássica ( $R_{MEF}$ ), como usada em MEF, da casca. ....	67
Figura 36 – Pontos de Gauss da integração reduzida isogeométrica ( $R_{AIG}$ ) usada por Adam et al. (2015b). ....	69
Figura 37 – Placa quadrada sujeita a compressão biaxial. ....	70
Figura 38 – Cargas críticas para o refinamento $k$ . ....	72
Figura 39 – Comportamento pós-crítico. ....	75
Figura 40 – Aplicação da curvatura inicial em placas. ....	77
Figura 41 – Comportamento pós-crítico de placas imperfeitas. ....	78
Figura 42 – Efeito do número de lâminas. ....	80
Figura 43 – Fração de volume ao longo da espessura. ....	82
Figura 44 – Condições de apoio. ....	82
Figura 45 – Carga de flambagem de placas engastadas para diferentes expoentes $N$ . ....	83
Figura 46 – Placa simplesmente apoiada com diferentes expoentes $N$ . ....	84
Figura 47 – Placa engastada com diferentes expoentes $N$ . ....	85
Figura 48 – Casca cilíndrica sujeita a uma carga concentrada. ....	85
Figura 49 – Modelo inicial NURBS quadrático com 9 pontos de controle e 1 elemento. ....	86
Figura 50 – Curvas carga-deslocamento das cascas isotrópicas e laminadas. ....	87
Figura 51 – Caminho de equilíbrio com bifurcação $h = 6.35$ . ....	90
Figura 52 – Caminhos de equilíbrio primário e secundário com bifurcação $h = 6.35$ . ....	90

Figura 53 – Gráfico carga × deslocamento de casca abatida com  $h = 12.7\text{mm}$  ( $\lambda = N/N_{cr} \times 1000$ ).

.....92

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades dos materiais laminados. ....	70
Tabela 2 – Cargas críticas ( $\lambda = N_{cr}a^2/\pi^2D$ ) das placas isotrópicas.....	71
Tabela 3 – Cargas críticas ( $\lambda = N_{cr}a^2/E_2h^3$ ) das placas <i>cross-ply</i> (0/90) <sub>s</sub> . ....	71
Tabela 4 – Cargas críticas ( $\lambda = N_{cr}a^2/E_2h^3$ ) das placas <i>angle-ply</i> (45/-45) <sub>s</sub> . ....	72
Tabela 5 – Coeficientes termodependentes para o cálculo do módulo de elasticidade. ....	81
Tabela 6 – Propriedades do material compósito. ....	86
Tabela 7 – Propriedades do material MGF. ....	91

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	13
1.1	Objetivos e Contribuições .....	16
1.2	Organização da Dissertação.....	17
2	MATERIAIS COMPÓSITOS .....	19
2.1	Compósitos Reforçados por Fibras.....	20
2.2	Materiais com Gradação Funcional.....	23
3	PLACAS E CASCAS ABATIDAS .....	30
3.1	Teoria de Placas de Reissner-Mindlin .....	31
3.2	Esforços Internos .....	35
3.2.1	<i>Laminados</i> .....	35
3.2.2	<i>Materiais com Gradação Funcional</i> .....	38
4	MODELAGEM GEOMÉTRICA.....	41
4.1	B-Splines .....	41
4.2	NURBS.....	49
4.2.1	<i>Superfícies</i> .....	51
5	ANÁLISE ISOGOMÉTRICA DE CASCAS ABATIDAS.....	53
5.1	Deslocamentos e deformações.....	53
5.2	Vetor de forças internas e matriz de rigidez .....	55
5.3	Solução da equação de equilíbrio não linear .....	60
5.4	Estabilidade .....	63
5.5	Travamento .....	65
5.5.1	<i>Integração Reduzida</i> .....	67
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	70
6.1	Placas laminadas.....	70
6.1.1	<i>Análise Não Linear</i> .....	74
6.2	Placas de material com gradação funcional .....	81
6.3	Casca Abatida .....	85
6.4	Casca de material com gradação funcional.....	91
7	CONCLUSÕES.....	93
7.1	Sugestões para trabalhos futuros .....	94
	REFERÊNCIAS .....	96

## 1 INTRODUÇÃO

Placas e cascas são muito usadas nas engenharias civil, aeronáutica, automobilística, naval, dentre outras. Com interesse em aproveitar ao máximo o potencial da geometria e do material, dentro dos limites de economia e segurança, técnicas de análise para determinação de deslocamentos, deformações e tensões são fundamentais para o projeto destes elementos estruturais. Essas estruturas são, atualmente, modeladas via Método dos Elementos Finitos (MEF), em *softwares* comerciais como Abaqus, Ansys e Nastran.

Embora seja um método clássico e já consolidado, o MEF tem limitações que geram erros intrínsecos à técnica. Quando se modela uma estrutura curva, por exemplo, a geometria não é exatamente representada, causando erros na sua representação. Além disso, refinamentos com elevação do grau e alta continuidade entre elementos são difíceis de conseguir.

A Análise Isogeométrica (AIG) é uma formulação desenvolvida para análise de sólidos e estruturas semelhantes ao MEF, mas que usa na aproximação do campo de deslocamentos as mesmas funções utilizadas para representar a geometria nos programas de CAD (*Computer Aided Design*). A AIG foi proposta inicialmente por Hughes et al. (2005). Em Cottrell et al. (2009), Hughes e seus colaboradores publicaram um livro sobre AIG, onde há vastos estudos sobre problemas de análises isogeométricas e é uma das principais referências para quem deseja trabalhar com esse tema.

Segundo Adam et al. (2014), a precisão do CAD no modelo de MEF é perdida devido à discretização, a menos que uma malha muito refinada seja gerada, o que cria um alto custo computacional. Como a AIG fornece uma geometria exata, independente do refinamento, os únicos erros são causados pela aproximação do campo de deslocamentos. Wall et al. (2008) estudaram a otimização de forma usando AIG, mostrando que o problema de relacionar corretamente o projeto e a análise é eliminado. Adam et al. (2015) ainda citam que elementos de Lagrange de alta ordem são sensíveis à distorção da malha, que geralmente limita seu emprego em problemas de grandes deformações, já elementos B-Splines/NURBS aparentam ser cada vez mais robustos quando o problema de análise estrutural envolve funções de ordem superior e alta continuidade.

A grande vantagem do uso da AIG é que ela permite serem feitos três tipos de refinamento. O refinamento  $p$  é referente à elevação de grau do polinômio de interpolação, complicado de se fazer em MEF, é bem fácil de executar em AIG. O refinamento  $h$  é a divisão em um número maior de elementos, sendo o mais utilizado no MEF. Por fim, o refinamento  $k$

é o efeito dos anteriores combinados, podendo-se aumentar a continuidade entre os elementos, que não existe no MEF (HUGHES et al., 2005; COTTRELL et al. 2009).

A flambagem é um fenômeno de perda de estabilidade importante em placas e cascas, pois devido a sua grande esbelteza, essas estruturas podem falhar antes que seu material atinja a resistência máxima. Por isso, determinar a carga crítica, a forma da perda de estabilidade e o comportamento pós-crítico são necessários nas análises. A sensibilidade às imperfeições iniciais é outro parâmetro importante nesse contexto. Barros (2016) aborda a estabilidade de placas e cascas abatidas com não linearidade física e geométrica utilizando a AIG, apresentando cargas críticas e os comportamentos pós-críticos.

A AIG não é capaz de eliminar o travamento (*locking*) numérico de cisalhamento e nem de membrana (que aparecem em vigas curvas e cascas), sendo esses fenômenos bem nítidos para problemas dominados pela flexão, como foi estudado por Echter e Bischoff (2010), que relataram que o travamento surge quando a teoria de Reissner-Mindlin é usada para análise de estruturas finas. Segundo Bouclier et al. (2012), o travamento se dá devido à incompatibilidade na ordem de interpolação dos diferentes termos dos deslocamentos.

De acordo com Oesterle et al. (2016), os elementos de casca de Kirchhoff-Love sofrem travamento de membrana, enquanto as cascas de Reissner-Mindlin têm um adicional do travamento de cisalhamento transversal e, para elementos de casca tridimensionais com mudança de espessura, ainda há a adição do travamento de espessura.

Assim, a análise de placas e cascas utilizando a abordagem isogeométrica tem várias vantagens em relação ao uso de elementos finitos. Contudo, sendo uma metodologia recente, a AIG ainda tem muitas questões em aberto, necessitando do desenvolvimento de pesquisas com objetivo de chegar ao grau de maturidade atingido pelo MEF.

Os materiais utilizados para a construção das estruturas são de suma importância nas análises também. A resistência mecânica, o tipo de ruptura, a tolerância a altas temperaturas e corrosão, por exemplo, são características que influenciam na escolha de um material. Além disso, o aperfeiçoamento desses aspectos visa desenvolver materiais melhores, respeitando as devidas condições de segurança. Assim surgiram materiais compósitos, onde se misturam dois ou mais materiais para criar um aprimorado.

Materiais compósitos laminados são amplamente utilizados na engenharia devido a suas características de resistência e rigidez associados ao baixo peso. Eles também são bastante estudados no mundo todo. No Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) há diversos trabalhos que exploram esses compósitos (TEÓFILO, 2010; SILVA, 2012; ROCHA, 2013; MORORÓ, 2013; DANTAS, 2014; BARROSO, 2015; BARROS, 2016;



D'AGUIAR, 2017) e trouxeram um sólido conhecimento sobre o assunto. Com certo domínio do tema, é possível explorar outros tipos de materiais.

Os compósitos tradicionais são incapazes de suportar altas temperaturas, por isso novos tipos de materiais vêm ganhando destaque no cenário mundial, conhecidos como Materiais com Gradação Funcional (MGF) (*Functionally Graded Materials* – FGM), inicialmente desenvolvidos no Japão.

Segundo Yamanouchi et al. (1990 apud Shen, 2009) e Koizumi (1997), o conceito de MGF foi proposto em 1984, pelo Dr Niino e outros cientistas, na cidade de Sendai, visando criar materiais com uma barreira térmica para estruturas aeroespaciais e reatores de fusão. Koizumi (1997) traz uma linha do tempo com os progressos na pesquisa de MGF que o Japão fez durante os anos de 1984 e 1996, sendo em 1988 o 1º Simpósio de MGF organizado pelo *Functionally Graded Material Forum* (FGMF), no Japão. Em 1990 foi realizado o 1º Simpósio Internacional, ainda no Japão. Já o 2º Simpósio Internacional de MGF ganhou o mundo, sendo realizado na América do Norte, em São Francisco, nos Estados Unidos. Em 1994 o 3º foi realizado na Suíça, Europa. Esse novo material despertou grande interesse no mundo, pois, em 10 anos, já tinham sido realizados três eventos de nível internacional com foco no MGF em três continentes. Em agosto de 2018, acontecerá o 15º Simpósio Internacional de MGF, em Fukuoka, no Japão.

Segundo Birman e Byrd (2007) as vantagens do MGF vão além do tratamento térmico, incluindo uma redução potencial de tensões no plano e transversais na espessura, uma distribuição de tensão residual melhorada, maior tenacidade à fratura, fatores de intensidade de tensão reduzidos e, em relação aos laminados, a eliminação da descontinuidade das tensões e, conseqüentemente, dos problemas relacionados à delaminação.

Em geral, o MGF une as melhores propriedades de cada material, por exemplo, a resistência do aço e a capacidade de suportar altas temperaturas da cerâmica, formando um novo material não homogêneo. Nesse caso, um material é robusto onde o outro é fraco, já que o aço não resiste ao calor e a cerâmica tem baixa resistência mecânica. É possível juntar dois ou mais materiais e formar um MGF com características específicas que se desejam utilizar, não necessariamente apenas para problemas de temperatura.

Os MGF são boas soluções para serem aplicados quando mais de uma variável está em foco, por exemplo, quando uma estrutura precisa ter resistência mecânica e suportar altas temperaturas, ou ser flexível de um lado e rígida de outro. Assim, é possível obter uma estrutura com desempenho superior ao que seria obtido utilizando os materiais de origem isolados.

Diversos trabalhos têm analisado o comportamento do MGF, em especial sob cargas de temperatura, para as quais ele foi originalmente desenvolvido. Segundo Shen (2009), a maior parte das primeiras pesquisas eram voltadas para as tensões térmicas e a mecânica da fratura. Contudo, pesquisas mais atuais tem se voltado para outros tipos de análises, como flexão, estabilidade e vibração. De acordo com Hirai e Chen (1999), há aplicações também nos ramos elétrico, ótico, magnético e bioquímico.

Swaminathan et al. (2015) traz um estudo sobre o estado da arte da análise do comportamento estático e dinâmico de placas MGF, bi e tridimensionais, com métodos numéricos adotados, MEF e Meshless, abordando os estudos de tensão, vibração e flambagem. Ainda segundo eles, árduos estudos têm sido feitos para entender a flambagem em placas MGF e placas MGF com distribuição sanduíche.

Reddy (2000) também estudou placas MGF usando MEF e a teoria de terceira ordem para deformação de cisalhamento de placas, elaborada por ele. Ele apresenta a formulação do elemento finito e sua não linearidade, considerando também o efeito da temperatura e vibração. As placas de MGF têm sido bastante estudadas (REDDY, 2000; ZENKOUR, 2005, 2005b; CHI e CHUNG, 2006, 2006b; ZHAO et al., 2009, BATENI et al., 2013; TRAN et al., 2013 BERNARDO et al., 2016), tanto a flexão, a vibração quanto a estabilidade, com ou sem o efeito térmico.

## **1.1 Objetivos e Contribuições**

Neste trabalho, o principal objetivo foi avaliar a estabilidade de placas e cascas abatidas aplicando a abordagem isogeométrica, com base nas teorias de Reissner-Mindlin e Marguerre, considerando deslocamentos moderadamente grandes (não linearidade geométrica). Na análise da estabilidade serão obtidos a carga de flambagem, o comportamento pós-crítico e o traçado do caminho de equilíbrio de estruturas perfeitas e imperfeitas.

Quanto aos materiais, compósitos laminados e de gradação funcional foram modelados e apresentaram excelentes resultados quando comparados com trabalhos da literatura. É importante ressaltar que essa é a primeira vez que se trabalha com MGF no LMCV e a pesquisa já apresentou respostas bastante satisfatórias e o embasamento solidificado com laminados foi fundamental para isso.

A implementação do material com gradação funcional foi adicionada ao FAST (*Finite element AnalySis Tool*) e usada juntamente com a implementação de Rocha (2013) para

o elemento isoparamétrico clássico de cascas abatidas e de Barroso (2015) para análise isogeométrica.

A AIG, como já citado, não é capaz de eliminar o travamento causado pela integração numérica. Assim, outro objetivo deste trabalho é o estudo de novos esquemas de integração reduzida, visando eliminar ou aliviar o travamento, no contexto do estudo da estabilidade e análise não linear de placas e cascas abatidas, já que os estudos anteriores na literatura tinham foco na análise linear.

## 1.2 Organização da Dissertação

O presente trabalho foi dividido em sete capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os principais conceitos sobre os materiais compósitos, sua definição e classificação. A atenção é voltada para dois tipos de materiais que foram incorporados aos estudos, primeiro os compósitos reforçados por fibras, em especial, os laminados. Depois o material com graduação funcional, apresentando um pouco de como eles são classificados e produzidos, além das leis de formação e determinação das suas propriedades.

No Capítulo 3, é apresentada uma breve discussão entre as teorias de placas e cascas de Reissner-Mindlin e de Kirchhoff-Love é desenvolvida para embasar a escolha, optando-se por considerar a teoria de Reissner-Mindlin mais apropriada para o estudo. Em seguida é apresentada a formulação matemática da teoria, considerando a teoria de Marguerre para os esforços de membrana. Feito isso, o próximo passo é calcular os esforços internos em cada um dos dois materiais abordados, adotando-se a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem.

No Capítulo 4, apresenta-se uma breve revisão sobre as curvas *B-Splines* e *NURBS*, que são utilizadas para a modelagem geométrica deste trabalho. São retratados os três tipos de refinamentos e os seus efeitos em uma estrutura unidimensional. Além disso, destaca-se a formulação do elemento de superfície bidimensional.

No Capítulo 5 é desenvolvido o elemento isogeométrico de casca abatida não linear geométrico, com formulação Lagrangeana Total para a consideração de deformações e rotações moderadas. São expostas as expressões para os cálculos da matriz de rigidez a partir das curvas da AIG e para a solução de equilíbrio do sistema. Nesta seção também são abordados os conceitos de estabilidade e travamento.

No Capítulo 6 estão os exemplos numéricos da dissertação. Inicialmente, são estudadas placas isotrópicas e laminadas, considerando três tipos de esquemas de integração

numérica, determinando-se as cargas críticas e os caminhos pós-críticos e placas perfeitas e imperfeitas. Em seguida, para uma placa MGF biaxialmente carregada, foram determinadas as cargas críticas para diferentes frações de volume e, posteriormente, seu comportamento pós-crítico quando simplesmente apoiada e engastada. Posteriormente, a AIG foi utilizada na análise de uma casca cilíndrica, considerando materiais homogêneos, laminados e de graduação funcional.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões da dissertação e sugestões para trabalhos futuros.

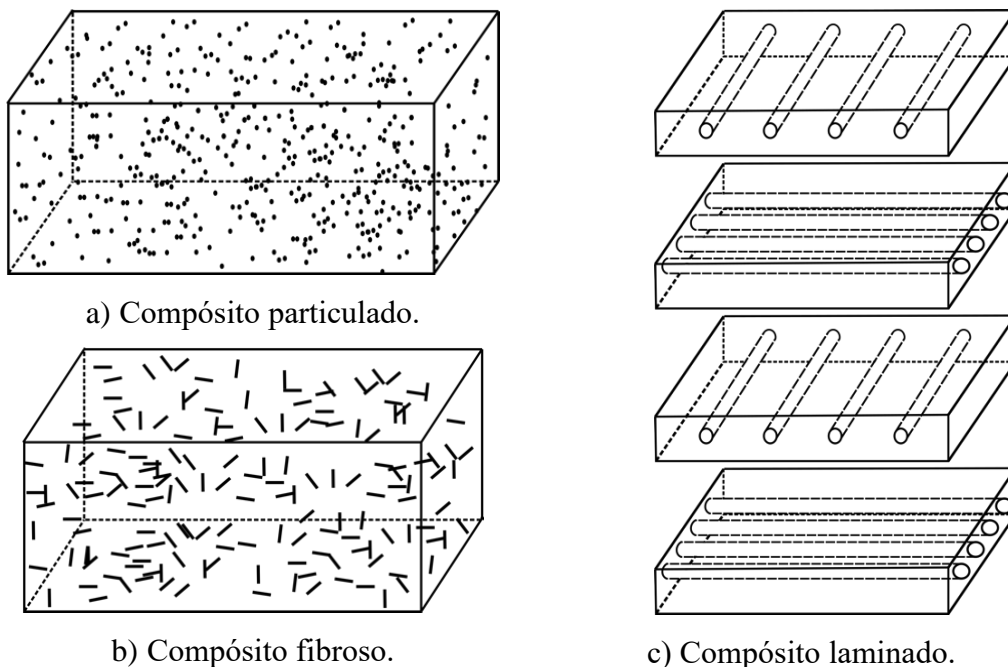
## 2 MATERIAIS COMPÓSITOS

Materiais compósitos, segundo Reddy (2004), são resultantes da mistura de dois ou mais materiais que, quando combinados, resulta em um novo material com características melhores do que os materiais iniciais isolados. O novo material deve ser homogêneo em análises macroscópicas e ter comportamento mecânico uniforme.

De acordo com a forma de mistura desses materiais, os compósitos podem ser classificados da seguinte maneira (JONES, 1999):

- a) Compósitos particulados: São materiais com uma matriz de base e partículas macroscópicas imersas nela. (Figura 1a);
- b) Compósitos fibrosos: Também apresentam uma matriz, mas aqui as partículas são fibras longas (Figura 1b);
- c) Compósitos laminados: Aqui temos um material composto por várias camadas. Compósitos particulados ou fibrosos podem, por exemplo, dar origem a esse tipo particular (Figura 1c).

Figura 1 – Classificação de materiais compósitos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os materiais compósitos tratados neste trabalho serão discutidos nos itens a seguir.

## 2.1 Compósitos Reforçados por Fibras

Compósitos reforçados por fibras são formados por fibras de alta resistência e rigidez (e.g. carbono ou vidro) imersas em uma matriz polimérica (e.g. resina epóxi). Estes materiais apresentam alto desempenho mecânico, alta resistência à corrosão e fadiga, baixa expansão térmica, bom amortecimento estrutural e baixo peso (BARBERO, 2011). Isso faz com que estruturas compostas por eles sejam muito atrativas na Engenharia. As indústrias aeronáutica, mecânica e naval são onde esses materiais mais têm se destacado.

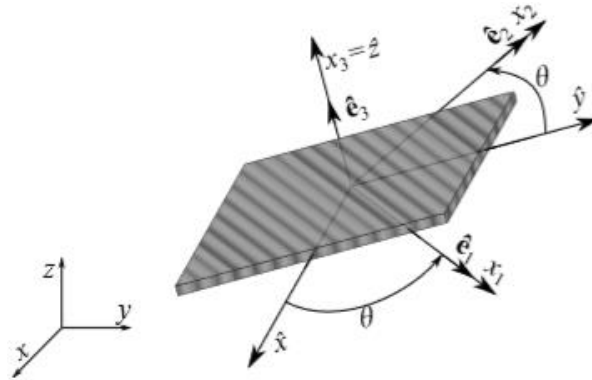
O compósito laminado tem seu comportamento mecânico definido pelo comportamento de cada lâmina. O desempenho mecânico da lâmina pode ser analisado utilizando duas abordagens: micromecânica e macromecânica. A primeira faz uma análise dos materiais isoladamente, no nosso caso, das fibras e da matriz, considerando também a interação deles. Esta abordagem é importante para a determinação de propriedades mecânicas equivalentes e estudo dos mecanismos de falha.

Já na abordagem macromecânica, o conjunto fibras e matriz é analisado associadamente, formando um material homogêneo. Neste trabalho será dado enfoque à segunda abordagem, que é mais adequada à análise do comportamento global de estruturas de material compósito, incluindo o estudo da estabilidade destas estruturas.

Os compósitos reforçados por fibras unidirecionais são bastante utilizados em aplicações que requerem alto desempenho estrutural. Neste caso, cada camada tem comportamento ortotrópico no sistema de coordenadas do material  $(x_1, x_2, x_3)$ , sendo  $x_1$  a direção das fibras,  $x_2$  a direção perpendicular às fibras no plano e  $x_3$  a direção perpendicular à lâmina. A análise de estruturas laminadas requer a utilização de três sistemas de coordenadas: o sistema local de cada lâmina  $(x_1, x_2, x_3)$ , o sistema local do laminado  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  e o sistema global da estrutura  $(x, y, z)$ , como apresentado na Figura 2.

A partir das características de cada lâmina, é preciso combinar os efeitos de todas elas para representar o comportamento do material laminado. De acordo com Ghugal e Shimpi (2001), em geral, há dois grupos de teorias de laminação: as Teorias de Lâmina Equivalente (*Equivalent Single Layer*), onde a contribuição de todas as lâminas é somada a uma lâmina equivalente, e as Teorias de Lâminas Discretas (*Layerwise*), onde cada lâmina é modelada individualmente.

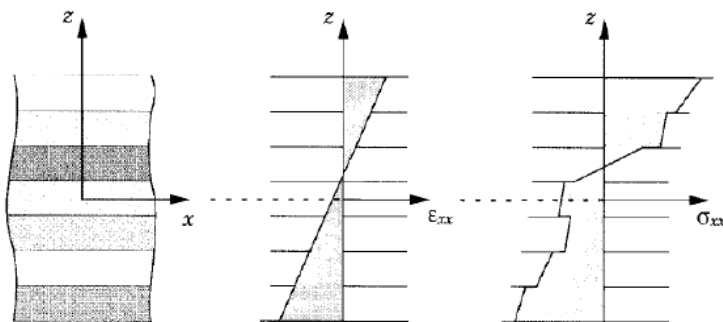
Figura 2 – Sistemas de coordenadas do laminado.



Fonte: Barroso (2015).

Nas Teorias de Lâmina Equivalente o problema é simplificado do tridimensional para o bidimensional. Hipóteses cinemáticas são consideradas para simplificar o campo de deslocamentos e deformações do laminado, ou seja, a compatibilidade é feita nas deformações e suas tensões são descontínuas na espessura (Figura 3). Como vantagem esta abordagem traz um custo computacional reduzido da análise estrutural e como desvantagem ela apresenta erros causados pelas hipóteses cinemáticas adotadas.

Figura 3 – Deformações e tensões ao longo da espessura do laminado, usando a teoria de Lâmina Equivalente.



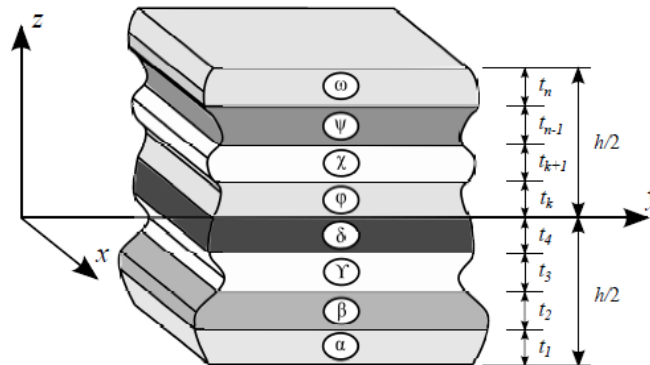
Fonte: Reddy (2004).

As Teorias de Lâminas Discretas obtêm, mais precisamente, o campo de deslocamentos e deformações do laminado, sendo capazes de detectar o fenômeno da delaminação. Porém o custo computacional da análise estrutural é alto.

O esquema de laminação (*layup*) também é fundamental para os estudos de laminados. Uma laminação é representada pelos seus ângulos de orientação das fibras, numerados de baixo para cima (Figura 4), dados por  $[\alpha/\beta/\gamma/\dots/\omega]$ , logo,  $\alpha$  é o ângulo de

orientação das fibras da primeira camada,  $\beta$  é o ângulo de orientação da segunda camada e assim por diante.

Figura 4 – Esquema geral de laminação.



Fonte: Rocha (2013).

Os ângulos de orientação devem estar entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ . Os laminados são definidos de acordo com seu esquema de laminação de duas formas:

- Cross-ply*: Esse tipo de esquema apresenta apenas lâminas com orientação das fibras exclusivamente iguais a  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ . Por exemplo,  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$  é um laminado *cross-ply*.
- Angle-ply*: Esse tipo de laminação apresenta quaisquer valores para a orientação das fibras, tendo, pelo menos, um ângulo diferente de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Por exemplo,  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  é um laminado *angle-ply*.

Por fim, os laminados ainda podem ser classificados quanto à sua simetria:

- Laminado Simétrico: Laminados que apresentam simetria ao longo da espessura, do material e da orientação das fibras em relação à superfície média. Por exemplo,  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  ou pode ser expressado por  $[0^\circ/90^\circ]_s$ , onde o índice *s* indica que o laminado possui simetria. Para um laminado com número ímpar de lâminas, o ângulo que não repete tem um traço sobre ele. Assim, podemos definir o esquema de laminação  $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/-45^\circ/45^\circ]$  como  $[45^\circ/-45^\circ/\bar{0}^\circ]_s$ .
- Laminados Balanceados: Laminados que apresentam para cada camada com orientação  $\alpha$  diferente de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , outra camada com orientação  $-\alpha$ , com as mesmas propriedades do material e espessura, podendo ou não ser adjacente. Por exemplo, o esquema  $[-45^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ]$  é balanceado.



- c) Laminados Simétricos e Balanceados: Aqui se unem as duas características supracitadas, ou seja, o laminado apresenta um plano de simetria e camadas com ângulos invertidos. Por exemplo,  $[90^\circ/-45^\circ/0^\circ/45^\circ]_s$  é simétrico e balanceado.
- d) Laminados Antissimétricos: Nesse caso, o laminado apresenta simetria de espessura, de material, porém uma antissimetria nas orientações das fibras, em relação à superfície média. Assim, temos que o esquema  $[30^\circ/-30^\circ]_3$ , que é referente à  $[30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ]$ , é antissimétrico.
- e) Laminados Assimétricos: Para essa situação não temos um plano de simetria de espessura, material e nem orientação das fibras em relação à superfície média.

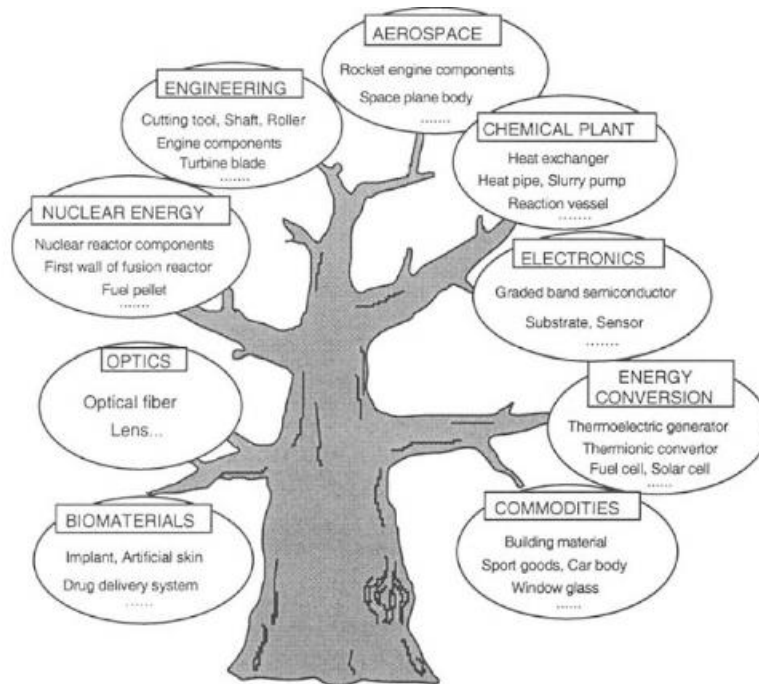
## 2.2 Materiais com Gradação Funcional

Os Materiais com Gradação Funcional (MFG) (em inglês: *Functionally Graded Materials* – FGM) são constituídos por dois ou mais materiais misturados de forma não homogênea. Como características mecânicas variam de acordo com sua microestrutura, cada ponto do material tem propriedades distintas. Estes materiais têm potencial de aplicação em diversos campos de estudos, de artigos esportivos a reatores nucleares (Figura 5).

Quanto aos materiais que podem compor um MGF, Miyamoto et al. (1999) os classifica de diferentes formas: segundo sua composição química, por exemplo, orgânico, inorgânico, cerâmica, metal e polímeros; o estado físico, como estado iônico, momento magnético, barreira; a configuração geométrica, como fibroso e granular; e também podem assemelhar-se com unidades biológicas, por exemplo, células, tecidos e organelas.

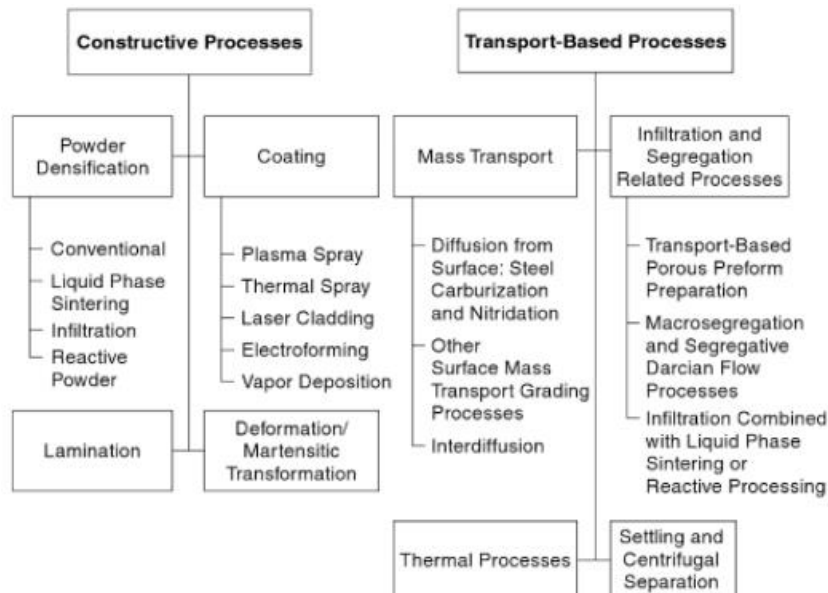
De acordo com o processo produtivo dos MGF também podemos classificá-los de duas maneiras: produzidos por processos constitutivos e produzidos por processos baseados em transportes. Para Wessel (2004), os MGF são mais bem classificados de acordo com o processamento (Figura 6). Ele explica que processos construtivos dependem da intervenção de um engenheiro de processamento, fazendo a colocação de fases de um material dentro de uma estrutura. Peças de revestimentos de proteção são exemplos de estruturas nessa categoria. Já processos baseados em transporte dependem de reações ou processos *in situ*, esse processo é mais simples.

Figura 5 – Campos de aplicação potencial dos MGF.



Fonte: Miyamoto et al. (1999).

Figura 6 – Classificação do MGF de acordo com sua fabricação.

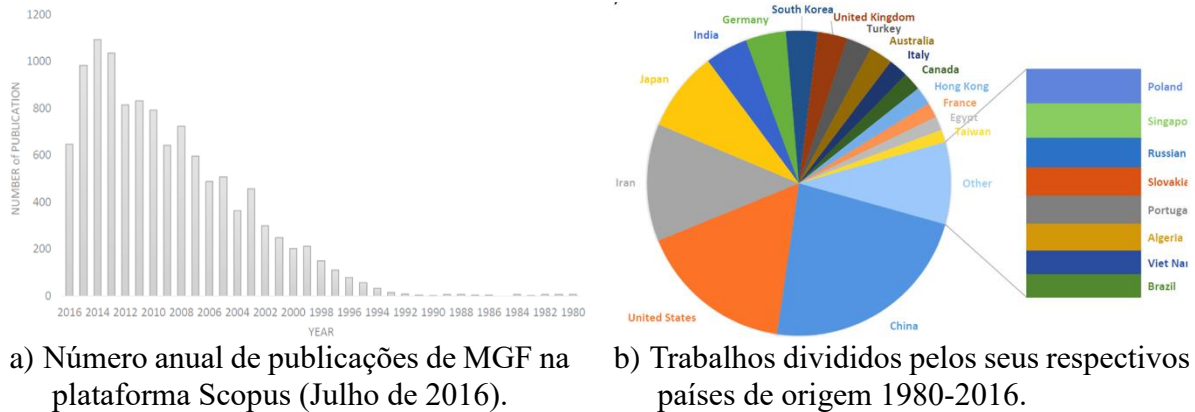


Fonte: Wessel (2004).

Kiebac et al. (2003) citam que há diversos processos de fabricação de MGF, dependendo dos materiais que se deseja misturar, da geometria do componente, do tipo e da extensão do gradiente. Ainda citam diversos processos, dentre eles empilhamento em pó, solidificação de jato e gradação eletroquímica. Naebe e Shirvanimoghaddam (2016) também

trazem um estudo sobre os processos de fabricação e mostram que entre 1980 e 2016, os países que mais tinham pesquisas relacionadas aos MGF eram China, Estados Unidos e Iran, segundo a plataforma Scopus (Figura 7).

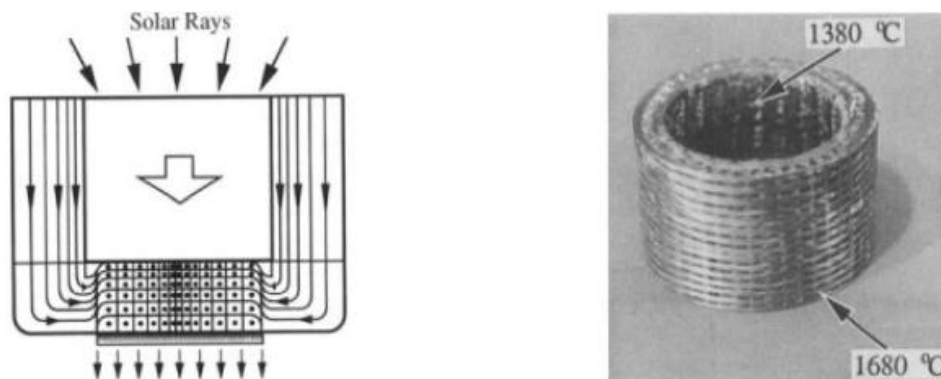
Figura 7 – Dados de pesquisas sobre MGF entre 1980 e 2016.



Fonte: Naebe e Shirvanimoghaddam (2016).

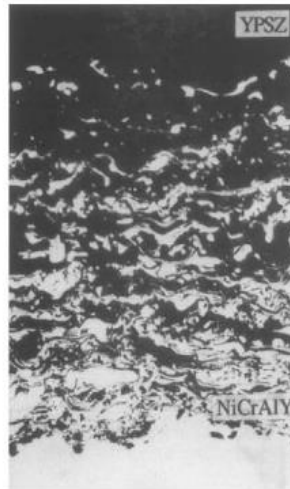
A Figura 8 e a Figura 9 apresentam exemplos de peças produzidas com MGF. A primeira imagem mostra uma peça com gradação na distribuição das fibras e a segunda uma mistura de metal com zircônia.

Figura 8 – Exemplo de uma peça feita de material compósito para um receptor de calor solar fabricado usando o alinhamento das fibras de MGF.



Fonte: Shiota e Miyamoto (1997).

Figura 9 – Seção transversal de um material MGF composto por Zircônia ( $Y_2O_3-ZrO_2$ ) e uma superliga de níquel, cromo, alumínio e ítrio (NiCrAlY ou YPSZ), fabricado por deposição.



Fonte: Shiota e Miyamoto (1997).

Segundo Shen (2009), o que vai ditar o comportamento do MGF é a chamada fração de volume, essa fração mede a quantidade relativa em volume de cada material constituinte. A fração de volume varia gradualmente na direção da gradação (espessura, em geral), desta forma as propriedades do material mudam ao longo dessa direção. Há duas possibilidades de construção de um MGF: em camadas com a mesma fração de volume ou variação contínua da fração de volume (Figura 10).

Figura 10 – Seção transversal de modelos de MGF.



a) Constituição em camadas.



b) Constituição em gradação.

Fonte: Elaborado pela autora.

De acordo com Shen (2009), a fração de volume do metal pode ser expressa como:

$$V_m = \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N \quad (1)$$

onde  $z$  é a coordenada da espessura e varia de  $-h/2$  até  $h/2$ ,  $h$  é a espessura,  $N$  é o expoente da fração de volume que dita o perfil de variação do material ( $0 \leq N \leq \infty$ ), variando esse valor, temos uma infinidade de composições possíveis.

Para modelar as propriedades dos MGF podemos usar a lei das misturas (modelo de Voigt). O novo material terá suas propriedades  $P$  de cada camada, como por exemplo o Módulo de Elasticidade  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$  ou o coeficiente térmico  $\alpha$ , expresso por

$$P = \sum_{j=1} P_j V_j \quad (2)$$

onde  $P_j$  e  $V_j$  são as propriedades e a fração de volume do material  $j$  de origem. É importante ressaltar que a soma de todas as frações de volume é unitária:

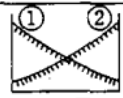
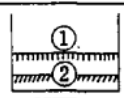
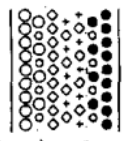
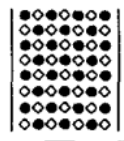
$$\sum_{j=1} V_j = 1 \quad (3)$$

Nos MGF compostos por dois materiais, em geral, metal e cerâmica, a Equação (3) pode ser escrita como

$$V_c + V_m = 1 \quad (4)$$

Um MGF pode ser definido pela sua variação fração de volume, de qualquer um dos materiais usados. Segundo Chi e Chung (2006), a principal característica de um material MGF é a microestrutura não uniforme com macropropriedade gradada de forma suave. Para Koizumi (1997), as mudanças contínuas na microestrutura do MGF são o que o distingue dos demais materiais compósitos convencionais. É essa mudança contínua na composição do material que gera os gradientes nas propriedades do MGF, como apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Comparação das características de um material MGF e materiais compósitos convencionais.

Function/ Property	① Mechanical Strength ② Thermal Conductivity		
Structure/ Texture	Constituent Elements: Ceramics (○) Metal (●) Fiber (◇+) Micropore (○)		
Materials	Example	FGM	non-FGM

Fonte: Koizumi (1997).

A maioria das pesquisas com MGF adota uma lei de potência (P-FGM), uma função sigmoide (S-FGM) ou uma função exponencial (E-FGM) para descrever a variação das frações

de volume ao longo da estrutura. A fração de volume pode ser determinada para quaisquer dos materiais envolvidos.

De acordo com Frikha e Dammak (2017) e Mars et al. (2017), que aplicam a P-FGM para calcular a fração de volume da cerâmica no novo material:

$$V_c(z) = \left[ 1 - a \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) + b \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^c \right]^N \quad (5)$$

onde  $z$  é a coordenada na direção da espessura. Os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  determinam o perfil de variação da cerâmica, no caso, na seção transversal. Em Su et al. (2014), análises de placas e cascas são feitas com combinações diferentes desses parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $N$  e foram apresentadas diversas distribuições de frações de volume em relação a  $z/h$ .

Determinada a fração de volume, é necessário obter as propriedades do novo material em cada ponto da estrutura. Neste trabalho será utilizada a lei das misturas, Equação (6), para calcular o módulo de elasticidade  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ , em função da posição  $z$  na seção transversal.

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c(z) + P_m \quad (6)$$

sendo  $P(z)$  a propriedade do novo material em cada ponto  $z$  na espessura,  $P_c$  e  $P_m$  as propriedades da cerâmica e do metal, respectivamente. Sendo assim,  $E(z)$  e  $\nu(z)$  do novo material são definidos por

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m \quad (7)$$

$$\nu(z) = (\nu_c - \nu_m)V_c(z) + \nu_m \quad (8)$$

A função sigmoide (*Sigmoid function* ou S-FGM) é uma maneira mais suave de calcular a fração de volume, sendo o  $V_c$  dado por

$$V_{c1}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^N \quad \text{para } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (9)$$

$$V_{c2}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^N \quad \text{para } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

Para calcular as propriedades do novo material a relação é dada por

$$P(z) = V_{c1}(z)P_c + (1 - V_{c1}(z))P_m \quad \text{para } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (10)$$

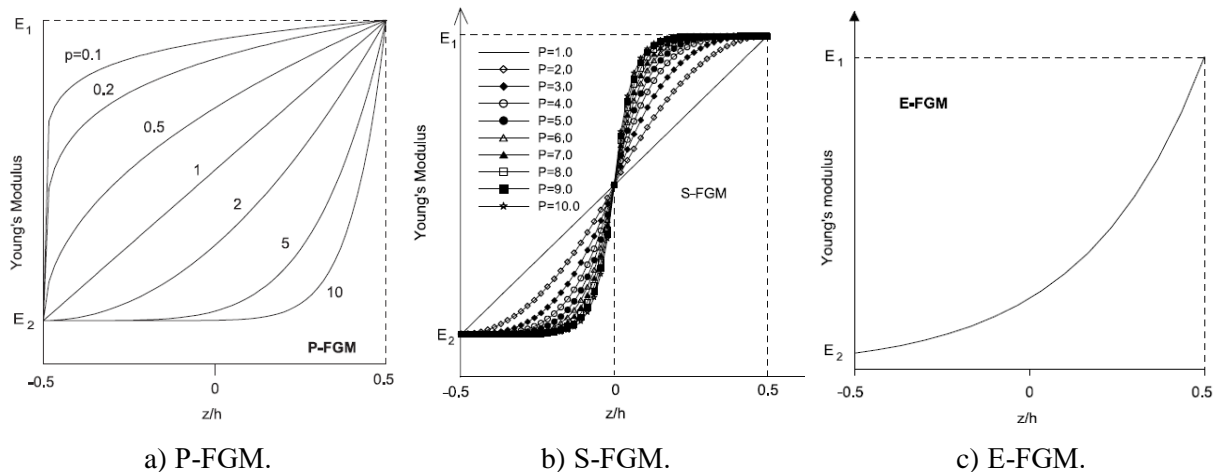
$$P(z) = V_{c2}(z)P_c + (1 - V_{c2}(z))P_m \quad \text{para } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

Na E-FGM ou *Exponential function*, as propriedades do material são dadas por

$$P(z) = P_m e^{B(z+h/2)} \quad \text{onde} \quad B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{P_c}{P_m} \right) \quad (11)$$

Chi e Chung (2006) trazem mais detalhes sobre P-FGM, S-FGM e E-FGM, além de gráficos mostrando a variação da propriedade do material, no caso o módulo de elasticidade  $E$ , pela razão de  $z/h$  (Figura 12). Na distribuição P-FGM, quando o expoente é menor que 1,  $E$  aumenta rapidamente na superfície inferior, podendo gerar concentração de tensão nessas mudanças bruscas (LEE e ERGODAN, 1995), e depois fica mais suave, enquanto que quando o expoente é maior que 1,  $E$  aumenta mais lentamente. Em S-FGM, próximo às superfícies, há uma mudança mais lenta e no meio, mais acentuada, esse é um modelo mais suave. Por fim, E-FGM traz uma distribuição também mais suave que P-FGM.

Figura 12 – Módulo de Young do MGF para diferentes distribuições ao longo da espessura, onde  $p$  é referente ao expoente  $N$  usado no presente trabalho.



Fonte: Chi e Chung (2006).

Outros autores, como Zenkour (2005, 2005b), Shen e Li (2008), Chen et al. (2017), trabalham com frações de volume com distribuições sanduíche. Macías et al. (2017, 2017b) estudam painéis confeccionados com nanotubos de carbono (*carbon nanotubes* - CNT), sendo estes inseridos em uma matriz polimérica elástica, formando um material chamado de compósito com nanotubos de carbono (*carbon nanotubes composite* - CNTRC). Lei et al. (2016) e Mercan et al. (2018) fizeram trabalhos sobre placas MGF também usando CNT, o primeiro estuda a flambagem e o segundo a vibração. Estudos com nanocompósitos e MGF são mais recentes e vem ganhando notoriedade.

### 3 PLACAS E CASCAS ABATIDAS

Placas e cascas são elementos bidimensionais, com duas dimensões bem maiores que a terceira, que corresponde à espessura. Basicamente, as cascas diferem das placas por poderem ser curvas no espaço, já placas são planas. Segundo Cook et al. (2002), cascas podem suportar cargas elevadas quando as tensões de membrana são dominantes. Ele compara as cascas ao exemplo de um fio que suporta muita carga axial, porém não tem resistência a flexão. Assim, a casca é mais resistente do que uma placa plana, considerando o mesmo volume e material em ambas. Analogamente ao fio, a casca é susceptível à flambagem se as tensões de membrana são compressivas em toda ou parte dela.

Ainda de acordo com Cook et al. (2002), na casca, em geral, as ações de membrana e flexão estão presentes. Devido ao formato curvo da peça, os elementos de casca podem superar possíveis deficiências de elementos planos e de placas, pois a geometria curva faz com que as ações de flexão e membrana interajam, enquanto na teoria linear das placas perfeitas estas ações geralmente são desacopladas.

As duas teorias mais difundidas na Engenharia para análise de placas e cascas são a de Kirchhoff-Love e a de Reissner-Mindlin. As principais diferenças entre as duas dizem respeito à consideração do efeito do cisalhamento transversal. Enquanto que a teoria de Reissner-Mindlin considera o cisalhamento transversal e tende a ser usada em cascas espessas, podendo também ser aplicadas em cascas finas, a teoria de Kirchhoff-Love despreza o efeito do cisalhamento, sendo adequada apenas a cascas finas.

Além disso, cascas Kirchhoff-Love necessitam de continuidade  $C^1$ , que é muito difícil de conseguir no Método dos Elementos Finitos, sendo esse um dos motivos pela dificuldade de se estudar cascas com a aplicação do MEF. Em AIG, as NURBS são capazes de manter essa continuidade no *patch*, o que fez voltar o interesse em se estudar cascas finas sob a luz dessa teoria (NGUYEN-THANH et al., 2015; KIENDL et al., 2015; DENG et al., 2015; CASQUERO et al., 2017).

Porém, além da limitação da espessura pela própria teoria, de acordo com Nguyen-Thanh et al. (2011), que estudaram cascas finas com aproximação polinomial com *T-meshes* (*Polynomials Splines Over Hierarchical T-Meshes* ou PHT-Splines) e continuidade  $C^1$ , na casca de Kirchhoff-Love há dificuldades em impor condições de contorno de rotação e, quando usados vários *patches*, são necessários outros artifícios para conectar os *patches*. Por outro lado, a utilização da teoria de Reissner-Mindlin facilita a imposição de condições de contorno e a conexão entre vários *patches*.



Benson et al. (2013) fizeram um estudo de cascas isogeométricas com formulação combinada de Kirchhoff-Love e Reissner-Mindlin, sendo a segunda teoria citada usada em alguns setores da peça em estudo, onde foi necessário acentuar as restrições. Ainda citam que embora a capacidade de aumentar a continuidade das NURBS permita estudos com Kirchhoff-Love, uma formulação de Reissner-Mindlin, com continuidade  $C^0$  foi suficiente, sendo usada por ser mais apropriada para o metal com dobras acentuadas na geometria inicial e na solução. Assim, a teoria de Reissner-Mindlin será utilizada neste trabalho.

### 3.1 Teoria de Placas de Reissner-Mindlin

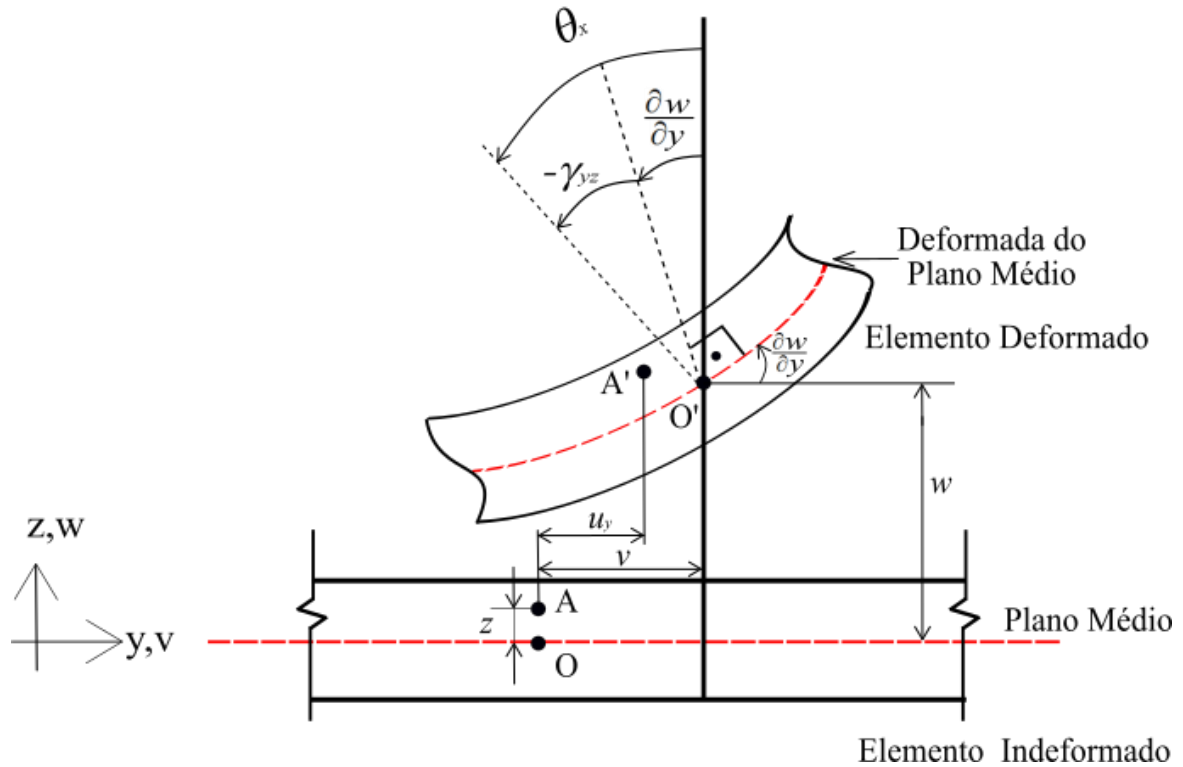
Uma teoria de placas que considera o efeito do cisalhamento transversal foi desenvolvida por Reissner e Mindlin. Reissner (1945) desenvolveu sua pesquisa considerando as tensões variáveis. Já Mindlin (1951) fez seu estudo considerando os deslocamentos variáveis. Os dois consideraram o cisalhamento transversal constante ao longo da espessura da placa, por isso, estas são chamadas de teorias de deformação de cisalhamento de primeira ordem (*First-Order Shear Deformation Theory* - FSDT).

A teoria de placas de Reissner-Mindlin está fundamentada em três hipóteses:

- Os pontos da reta normal ao plano médio têm deslocamento transversal igual;
  - A tensão normal da direção transversal é desprezada;
  - Retas que são normais ao plano médio na situação indeformada permanecem retas após a deformação, porém não necessariamente normais ao plano médio.
- Devido esta hipótese, é possível a consideração do cisalhamento, por isso a teoria de Reissner-Mindlin pode ser empregada no estudo de cascas de média a grande espessura.

Nota-se a semelhança entre a teoria de vigas de Timoshenko e a teoria de placas de Reissner-Mindlin, tendo como diferença que as placas são analisadas em duas dimensões. A Figura 13 ilustra o campo de deslocamentos resultantes das hipóteses de Reissner-Mindlin.

Figura 13 – Deslocamentos de um ponto na placa segundo a teoria de Reissner-Mindlin.



Fonte: Elaborado pela autora.

A partir da Figura 13, onde são apresentados os deslocamentos para os eixos  $y$  e  $z$ , também válido para os eixos  $x$  e  $z$ , podemos escrever o campo de deslocamentos em qualquer ponto  $(x, y, z)$  da placa como

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ u_y(x, y, z) &= v(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são deslocamentos ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  e  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações da reta normal em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A partir das hipóteses cinemáticas adoptadas verificamos que  $\varepsilon_z = \partial u_z / \partial z = 0$ , enquanto as deformações no plano são expressas por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + z\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^b \quad (13)$$

Assim, estas deformações são compostas por uma parcela constante, correspondente às deformações de membrana:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (14)$$

e uma parcela que varia linearmente com a distância à superfície média da placa e que depende da curvatura:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^b = z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Finalmente, as deformações de cisalhamento transversais ao plano da placa são dadas por:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{bmatrix} \quad (16)$$

Estas deformações são constantes ao longo da espessura da placa, o que não corresponde à solução da Teoria de Elasticidade, no qual a variação é parabólica. Assim, a teoria de Reissner-Mindlin considera o cisalhamento transversal de forma aproximada.

Neste trabalho será adotada a hipótese de deslocamentos moderadamente grandes, de forma a estudar a estabilidade de placas. Isto pode ser feito utilizando as deformações de von Kármán, que são oriundas das deformações de Green, quando se considera que os termos  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial v/\partial x$  e  $\partial v/\partial y$  são muito pequenos em relação aos demais e podem ser desprezados. Assim, as deformações de membrana são expressas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \quad (17)$$

Portanto, as deformações de membrana são compostas por uma parte linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_0^m$ ) devido a deslocamentos no plano e uma parte não linear causada pelos deslocamentos transversais ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L^m$ ), levando ao acoplamento dos efeitos de membrana e flexão.

Marguerre estendeu a teoria não linear de placas de von Kármán para cascas abatidas (Crisfield, 1991). Nesta teoria, as deformações de membrana são dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(w+z_0)}{\partial x} \right]^2 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(w+z_0)}{\partial y} \right]^2 \\ \left[ \frac{\partial(w+z_0)}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial(w+z_0)}{\partial y} \right] \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

onde  $z_0(x, y)$  é a elevação da superfície média da casca. Quando  $z_0 = 0$ , as deformações da Equação (18) se reduzem às da teoria de von Kármán. Reorganizando a Equação (18), temos

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Assim, cascas abatidas apresentam um acoplamento entre deslocamentos transversais e deformações de membrana devido à curvatura inicial da casca. Ao contrário dos termos de von Kármán, este acoplamento ocorre mesmo para pequenos deslocamentos.

É importante lembrar que a estabilidade de estruturas esbeltas é bastante influenciada pelas imperfeições geométricas iniciais. Assim, o uso da teoria de Marguerre permite não somente o estudo de cascas abatidas, mas pode ser utilizada no estudo da estabilidade de placas imperfeitas.

### 3.2 Esforços Internos

A formulação das equações de equilíbrio de placas e cascas é feita de forma mais simples em termo dos esforços internos (resultantes de tensões). Para isso, é necessário fazer a integração das tensões ao longo da espessura. Estes esforços podem ser escritos em função das deformações de membrana, flexão e cisalhamento, resultando nas matrizes **A**, **B**, **D** e **G**. Este procedimento será discutido a seguir, primeiro para laminados e depois para materiais com gradação funcional.

O laminado difere do MGF devido à variação discreta das propriedades do material ao longo da espessura. Adicionalmente, cada lâmina é considerada como um material homogêneo e ortotrópico, enquanto o MGF se comporta como um material isotrópico, mas não homogêneo, pois suas propriedades mudam ao longo da espessura.

#### 3.2.1 Laminados

Os materiais compósitos reforçados por fibras podem ser considerados elásticos e ortotrópicos no sistema da lâmina (Figura 2). Assim, as relações entre tensões e deformações são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma}_1 \quad (21)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; & Q_{12} &= \frac{E_2\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; & Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \\ Q_{66} &= G_{12}; & Q_{44} &= G_{13}; & Q_{55} &= G_{13}; \end{aligned} \quad (22)$$

Para fazer a transformação do sistema local da lâmina para o sistema global do laminado teremos duas matrizes de transformação, sendo uma para as deformações no plano (**T**) e a outra é referente ao cisalhamento transversal (**T<sub>s</sub>**):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

As matrizes constitutivas no sistema global são dadas por

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_s = \mathbf{T}_s^T \mathbf{Q}_s \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \quad (26)$$

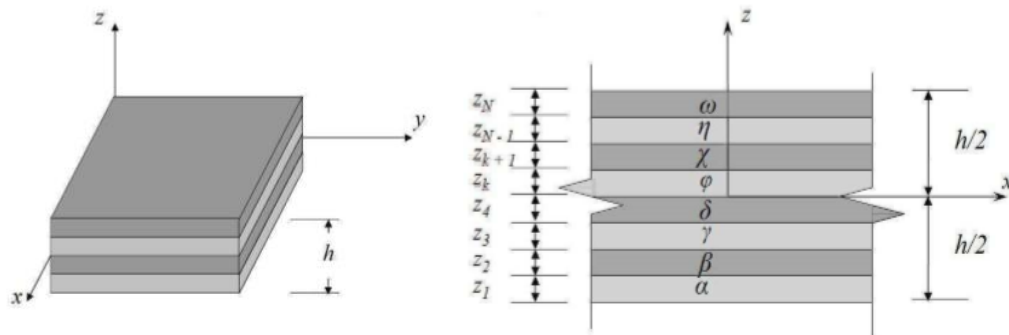
Os coeficientes da matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  e os da matriz  $\bar{\mathbf{Q}}_s$  são obtidos realizando os produtos indicados:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \text{sen}^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\text{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \text{sen} \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \text{sen}^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \text{sen}^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \text{sen}^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \text{sen} \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\text{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{44} &= \cos^2 \theta Q_{44} + \text{sen}^2 \theta Q_{55} \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \text{sen} \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{55} &= \text{sen}^2 \theta Q_{44} + \cos^2 \theta Q_{55} \end{aligned} \quad (28)$$

com  $Q_{44} = G_{13}$      $Q_{55} = G_{23}$

Figura 14 – Coordenada  $z$  do compósito laminado.



Fonte: Teófilo (2010).

Logo, integrando as tensões para se obter os esforços, sendo  $nl$  o número de lâminas e  $k$  a lâmina em estudo (ver Figura 14), temos

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} dz \quad (29)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} z dz \quad (30)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} k_s \bar{\mathbf{Q}}_s^{(k)} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} dz \quad (31)$$

Nesta teoria existem deformações transversais, que são independentes do eixo  $z$ . O cisalhamento transversal é considerado constante, quando na verdade ele tem uma distribuição quadrática. Para contornar essa aproximação é usado um fator de correção  $k_s$ , sendo este 5/6 para geometrias retangulares.

Separando então as deformações em parcelas de membrana, flexão e cisalhamento, a relação constitutiva do laminado é dada pela matriz **ABDG**:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ V_{xz} \\ V_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{44} & G_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{45} & G_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x^m \\ \mathcal{E}_y^m \\ \gamma_x^m \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Ou simplesmente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Os termos da matriz **ABDG** são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} dz & \mathbf{B} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} z dz \\ \mathbf{D} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} z^2 dz & \mathbf{G} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} k_s \bar{\mathbf{Q}}_s^{(k)} dz \end{aligned} \quad (34)$$

As matrizes podem ser integradas analiticamente ou numericamente. Em Rocha (2013) foi utilizada uma integração numérica na espessura com três pontos de Lobatto em cada

lâmina, visando captar efeitos de não linearidade física devido à falha do material. Por outro lado, considerando que o material permanece no regime elástico, as matrizes podem ser integradas analiticamente:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^{nl} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) & B_{ij} &= \sum_{k=1}^{nl} \frac{\bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} \\
 D_{ij} &= \sum_{k=1}^{nl} \frac{\bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3} & G_{ij} &= \sum_{k=1}^{nl} k_s \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k)
 \end{aligned} \tag{35}$$

sendo os índices  $i, j = 1, 2, 6$  para as matrizes **A**, **B** e **D** e  $i, j = 4, 5$  para a matriz **G**.

A matriz **A** é referente à rigidez de membrana do laminado, a matriz **D** à flexão e a matriz **B** apresenta termos de acoplamento membrana-flexão. Para o caso de laminados simétricos a matriz **B** é nula, logo não há acoplamento membrana-flexão causado pela relação constitutiva.

É possível que ocorram três tipos de acoplamentos simultâneos no elemento de casca abatida. O primeiro devido a geometria da casca oriundo dos termos de deformação de Marguerre (Equação (19)), o segundo causado pela matriz **B** oriundo da relação constitutiva linear e o terceiro da análise não linear oriundo da consideração da deformação de Green-Lagrange.

Os acoplamentos presentes na matriz **B** de laminados não simétricos podem causar comportamentos termo-mecânicos indesejáveis (DANIEL e ISHAI, 2004), além de tornar a análise mais complexa. Neste trabalho são consideradas laminações *cross-ply* e *angle-ply* simétricas, o que elimina os acoplamentos da matriz **B**. Laminados *cross-ply* simétricos apresentam menos acoplamentos nas matrizes **A** e **D**, permitindo a obtenção de soluções analíticas de alguns problemas de estabilidade. Por outro lado, laminados *angle-ply* apresentam acoplamentos nestas matrizes, tornando necessário o uso de métodos numéricos.

Na Teoria Clássica de Laminação, baseada na Teoria de Kirchhoff para placas, não é considerado o efeito do cisalhamento transversal e a matriz que relaciona esforços e deformações é composta apenas pelas matrizes **A**, **B** e **D**.

### 3.2.2 Materiais com Gradação Funcional

Os materiais com gradação funcional são considerados isotrópicos, não sendo necessário considerar matriz de transformação **T**. Por outro lado, as propriedades vão depender da posição  $z$  onde estão sendo calculados devido à variação das frações de volume ao longo da



espessura. Logo, o valor do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson vão variar ao longo da espessura.

Considerando um comportamento linear elástico, as relações entre tensões e deformações podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma}_1 \quad (37)$$

onde

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}; \quad Q_{12} = \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu(z)^2}; \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \quad (38)$$

Integrando as tensões para se obter os esforços, temos

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) \boldsymbol{\varepsilon} dz \quad (39)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) \boldsymbol{\varepsilon} z dz \quad (40)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} k_s \mathbf{Q}_s(z) \boldsymbol{\gamma} dz \quad (41)$$

Sendo assim, a relação constitutiva é dada pelas Equações (32) e (33), porém os termos ABDG agora são calculados por

$$\mathbf{A} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) dz \quad \mathbf{B} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) z dz \quad \mathbf{D} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) z^2 dz \quad \mathbf{G} = \int_{-h/2}^{h/2} k_s \mathbf{Q}_s(z) dz \quad (42)$$

Estas matrizes podem ser integradas analítica ou numericamente, dependendo da lei de variação  $V_c(z)$  adotada. Na implementação computacional realizada neste trabalho foi adotada a integração numérica por quadratura de Gauss. Neste caso, o número de pontos para integrar exatamente varia de acordo com os coeficientes  $c$  e  $N$  da lei de variação adotada.

A discussão no item anterior sobre o acoplamento membrana-flexão devido à matriz  $\mathbf{B}$  também é válida para os MGF. Contudo, ao contrário dos laminados, a matriz  $\mathbf{B}$  dos MGF

raramente é nula, uma vez que a distribuição dos materiais constituintes geralmente não é simétrica em relação à superfície média.

## 4 MODELAGEM GEOMÉTRICA

A Análise Isogeométrica (AIG) adota as funções de desenho usadas em CAD (*Computer Aided Design*) para fazer a modelagem geométrica. As análises de engenharia estáticas, dinâmicas, térmicas, dentre outras, feitas pelas ferramentas computacionais conhecidas como CAE (*Computer Aided Engineering*), que abrangem, por exemplo, Método dos Elementos Finitos (MEF) e Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics* - CFD).

A motivação por trás do desenvolvimento da AIG foi aproximar CAD e CAE, ou seja, ligar geometria e análise, fazendo com que ambas usem as mesmas funções e reduzindo erros, já que a geometria é representada exatamente. AIG faz análises semelhantes ao MEF, com a vantagem da geometria exata e da facilidade de refinamento do modelo de análise.

Atualmente, a maioria dos programas CAD utilizam curvas e superfícies B-Splines e NURBS para modelagem geométrica. Neste capítulo será apresentada uma breve discussão deste assunto de forma a facilitar o entendimento da Análise Isogeométrica. Uma apresentação detalhada deste assunto pode ser encontrada em Piegl e Tiller (1997).

### 4.1 B-Splines

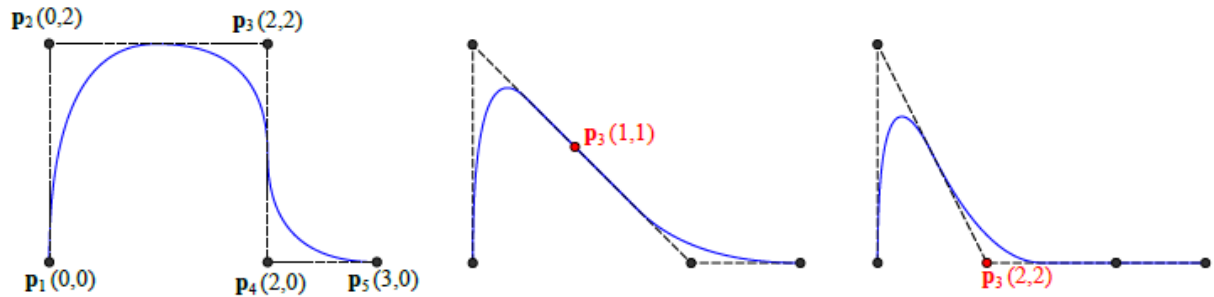
Uma curva B-Spline é definida pela combinação linear de pontos de controle  $\mathbf{p}_i$  e funções de base  $N_{i,p}$ :

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (43)$$

onde  $n$  é o número de funções de base,  $p$  é o grau destas funções e  $\xi$  é a coordenada paramétrica. As curvas B-Splines são muito utilizadas para modelagem de objetos de geometria livre (*free-form*), porque permitem o controle da geometria da curva simplesmente alterando a quantidade e posição dos pontos de controle (Figura 15).

As B-Splines podem retratar diferentes segmentos dentro de uma mesma representação paramétrica, apenas limitando as funções de base em faixas (i.e. intervalos) deste espaço paramétrico. Essas faixas são conhecidas como *knot spans*, ou apenas *spans*, e são definidos pelo vetor de *knots* (*knot vector*). O vetor de *knots* é um conjunto de valores não negativos e não decrescentes que estão definidos dentro do intervalo paramétrico da curva  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}]$ .

Figura 15 – Controle local exercido por um ponto de controle, alterando a forma da curva de acordo com a mudança da posição de  $\mathbf{p}_3$ .



Fonte: Barroso (2015).

As funções de base B-Spline são definidas pela fórmula recursiva de Cox-de Boor (Piegl e Tiller, 1997):

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (44)$$

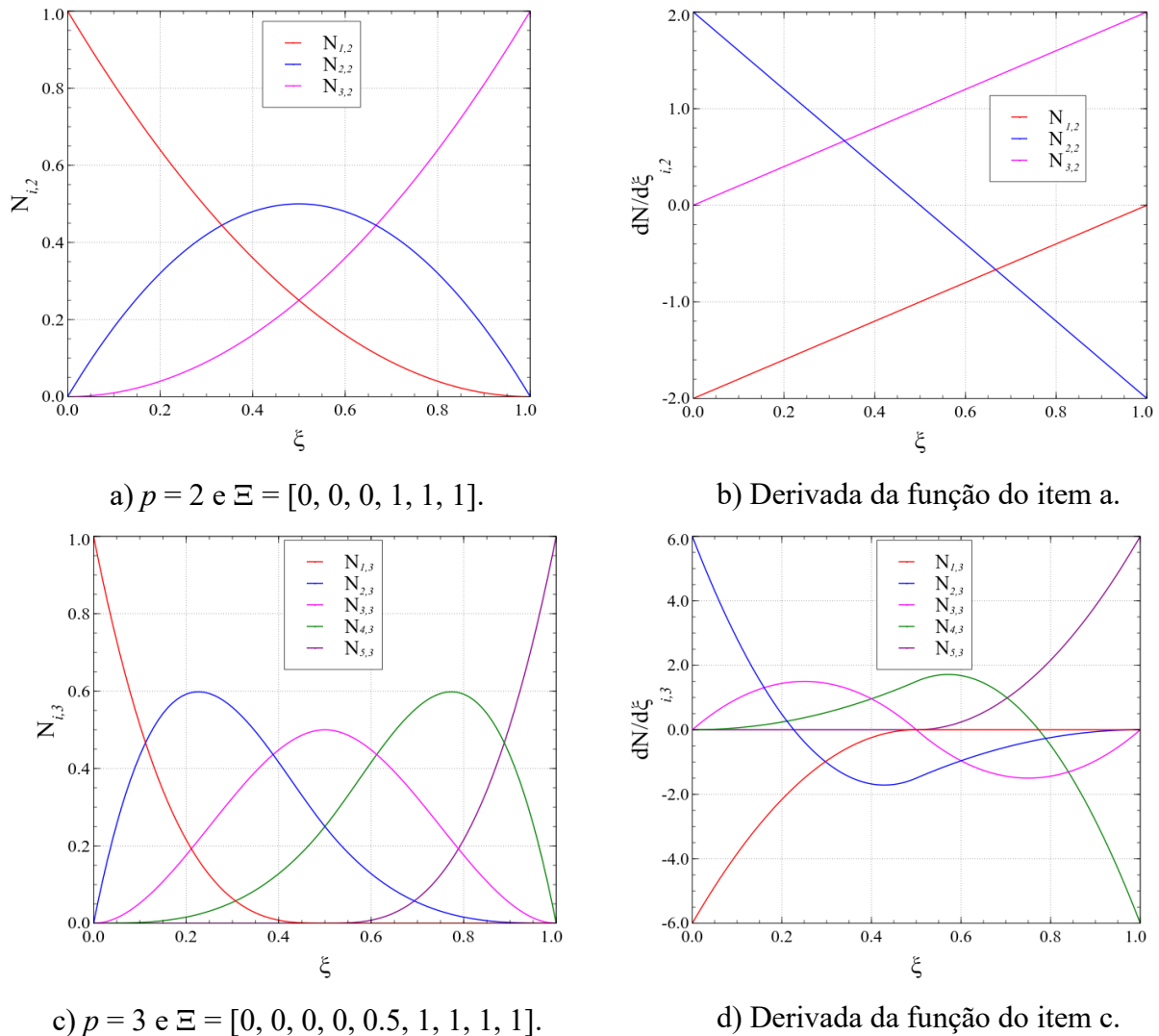
$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+n+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (45)$$

A primeira derivada da função de base é importante, pois ela é necessária para compor a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Logo, derivando a Equação (45), temos:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (46)$$

A Figura 16 mostra exemplos de funções B-Splines e suas respectivas derivadas. Podemos ver que o vetor *knot* do item (c) tem um *knot span* a mais que o do item (a), ou seja, ele é mais discretizado. Isso faz com que ele tenha uma função base a mais. Além disso, no item (c) a função  $N_{1,2}$  contribui apenas no primeiro *span*  $[\xi_1, \xi_4]$ ,  $N_{2,2}$  e  $N_{3,2}$  contribuem em todo o espaço paramétrico  $[\xi_1, \xi_7]$  e  $N_{2,4}$  atua apenas no segundo *span*  $[\xi_4, \xi_7]$ . Podemos perceber que esse comportamento também está nas derivadas. Um vetor *knot* é uniforme quando os valores paramétricos têm um padrão de variação igual, por exemplo,  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5]$  é um vetor *knot* uniforme. Já o vetor  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 4, 5, 5, 5]$  não é.

Figura 16 – B-Splines e suas respectivas derivadas.



Fonte: Elaborado pela autora.

Piegl e Tiller (1997) citam características importantes das funções B-Splines:

- Não-negatividade:  $N_{i,p}(\xi) \geq 0$ ;
- Partição da unidade:  $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ ;
- Suporte compacto:  $N_{i,p}(\xi) = 0$  se  $\xi$  estiver fora do intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ ;
- Apenas  $p + 1$  funções de base não são nulas em um *knot span*  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ ;
- Todas as derivadas de  $N_{i,p}(\xi)$  existem no interior dos *knot spans*.

Outra característica importante das B-Splines é possuir continuidade  $C^{p-1}$  dentro do *knot span* e  $C^{p-m}$  em um *knot* de multiplicidade  $m$ . Quando um *knot* interno  $\xi_i$  tem multiplicidade igual ao grau da curva ( $m = p$ ), um ponto de controle em  $\xi_i$  será interpolado pela curva. No caso

de vetores de *knots* abertos, a multiplicidade dos extremos é  $m = p + 1$ , de forma que os pontos de controle extremos serão interpolados. A maioria dos vetores de *knots* utilizados em modelagem geométrica e AIG possui esta propriedade.

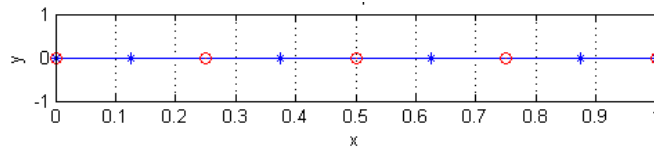
O número de pontos de controle ( $n_c$ ), correspondente ao número de bases B-Spline, é dada pela expressão:

$$n_c = n_k - p - 1 \quad (47)$$

onde  $n_k$  é o tamanho (i.e. número de elementos) do vetor de *knots*. Considerando como uma função quadrática ( $p = 2$ ), dividida em 4 *spans*, com vetor de *knots* igual a  $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1, 1, 1]$ , temos  $n_c = 9 - 2 - 1 = 6$ . Portanto, esta curva tem 6 pontos de controle e 6 funções base.

A Figura 17 mostra os pontos de controle ilustrados em uma barra, representados por asteriscos azuis (\*), e os *spans*, que são os pedaços entre as bolas vermelhas (o). Note que temos 4 *spans* e 6 pontos de controle. Dentro do *patch* os limites dos *spans* e os pontos de controle não necessariamente coincidem, porém nas extremidades do *patch* isto ocorre obrigatoriamente devido ao uso de vetor de *knots* aberto, fazendo com que os pontos de controle das extremidades sejam interpolados.

Figura 17 – Pontos de controle em uma barra (problema unidimensional).



Fonte: Elaborada pela autora.

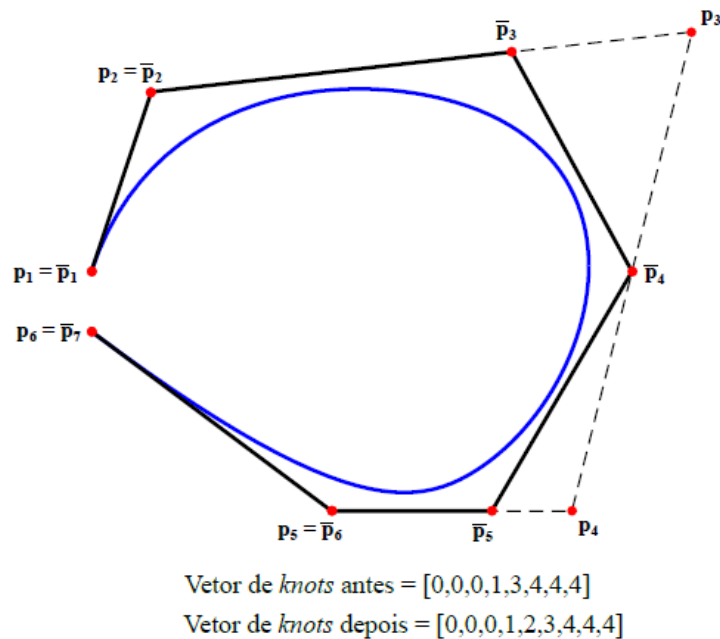
Nas B-Splines é possível inserir *knots* e elevar o grau da curva (Piegl e Tiller, 1997). Essas operações alteram a descrição da curva sem alterar sua forma. Quando adicionamos um *knot*, ou seja, incluímos um novo valor  $\xi_i$  no vetor de *knots*  $\Xi$ , também é adicionada uma nova base  $N_{i,p}$  e um novo ponto de controle. Para manter a curva com a mesma geometria, alguns pontos de controle são alterados. Considere um vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}]$  onde iremos adicionar um novo *knot*  $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ , como mostrado na Figura 18, então os novos pontos de controle  $\bar{\mathbf{p}}$  podem ser redistribuídos de acordo com a expressão dada a partir dos pontos de controle antigos  $\mathbf{p}$  (Piegl e Tiller, 1997):

$$\bar{\mathbf{p}}_i = \begin{cases} \mathbf{p}_1, & i = 1 \\ \alpha_i \mathbf{p}_i + (1 - \alpha_i) \mathbf{p}_{i-1}, & 1 < i < h \\ \mathbf{p}_{h-1}, & i = h \end{cases} \quad (48)$$

sendo  $h$  o tamanho do novo vetor de pontos de controle  $\bar{\mathbf{p}}$  e o parâmetro  $\alpha$  é dado por

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k - p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0, & i \geq k + 1 \end{cases} \quad (49)$$

Figura 18 – B-Splines com inserção de *knot* ( $\bar{\xi} = 2$ ).

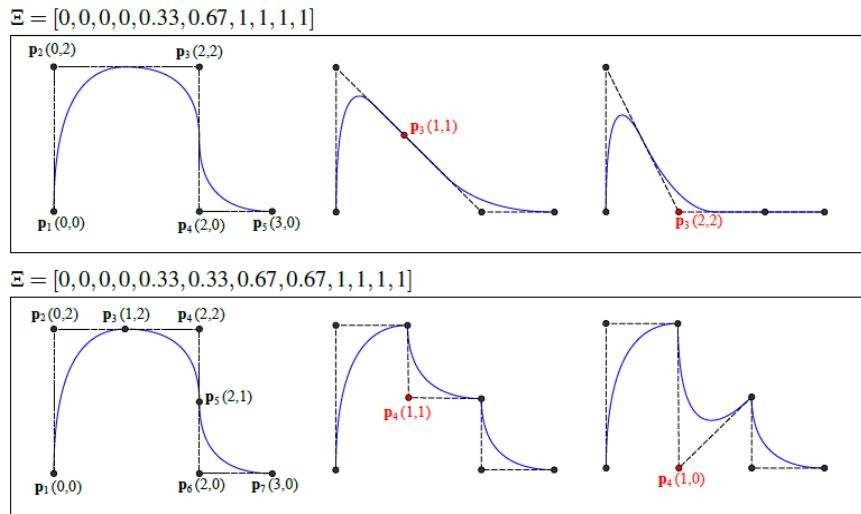


Fonte: Barroso (2015).

A inserção de *knots* serve para dar ao usuário um controle local maior da curva em estudo. Se for inserido um ou mais *knots* iguais a um dos *knots* que já existam no vetor, isso irá quebrar a continuidade da curva e permitir isolar em intervalos paramétricos as modificações feitas devido as posições dos pontos de controle (Figura 19).

Outro efeito importante é a elevação do grau (*degree elevation*) das curvas. Quando se aumenta o grau das bases de uma B-Spline, a continuidade não é alterada, ou seja, a multiplicidade de cada *knot* aumenta em 1, mantendo a continuidade inicial dos *knots*. Aqui também temos o acréscimo de pontos de controle. O algoritmo de elevação de grau de B-Splines é mostrado em Piegl e Tiller (1997).

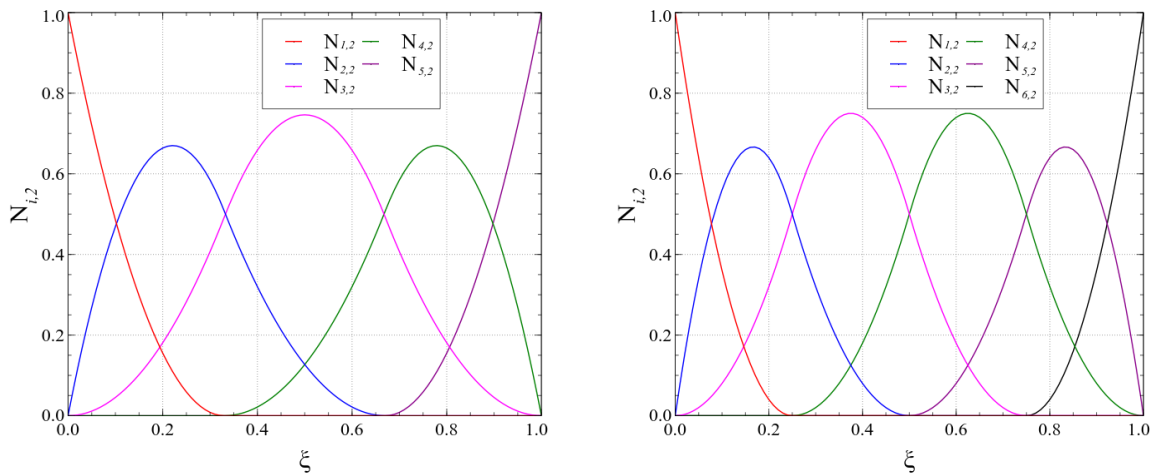
Figura 19 – Exemplo do controle local obtido pela inserção de *knots*.



Fonte: Barroso (2015).

A Análise Isogeométrica permite três tipos de refinamento, a partir dos algoritmos de refinamento das B-Splines. O refinamento *h* é obtido adicionando um novo *knot* ao vetor  $\Xi$ , como mostrado na Figura 20, fazendo que também sejam gerados uma nova função  $N_{i,p}$  e um novo ponto de controle.

Figura 20 – Exemplo de funções de base quadrática com refinamento de malha.



a)  $\Xi = [0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1, 1]$ .

b)  $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1, 1, 1]$ .

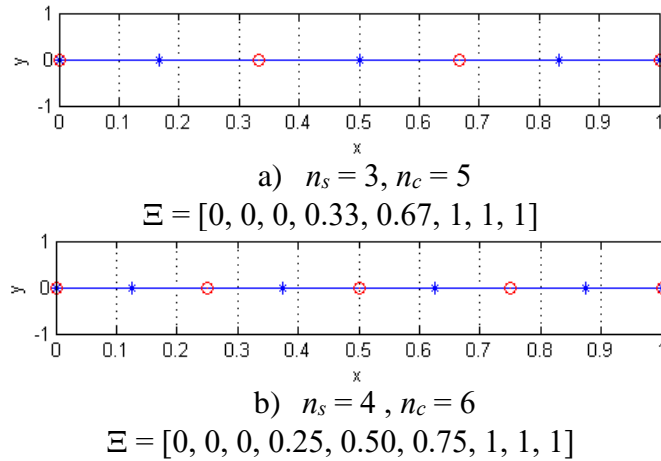
Fonte: Elaborado pela autora.

O refinamento *h* na AIG reduz o tamanho e aumenta o número de *spans*  $n_s$ , de forma análoga ao refinamento *h* do MEF que reduz o tamanho e aumenta o número de elementos da



malha. A Figura 21 apresenta exemplos de refinamento  $h$  de uma B-Spline quadrática, aumentando o  $n_s$ .

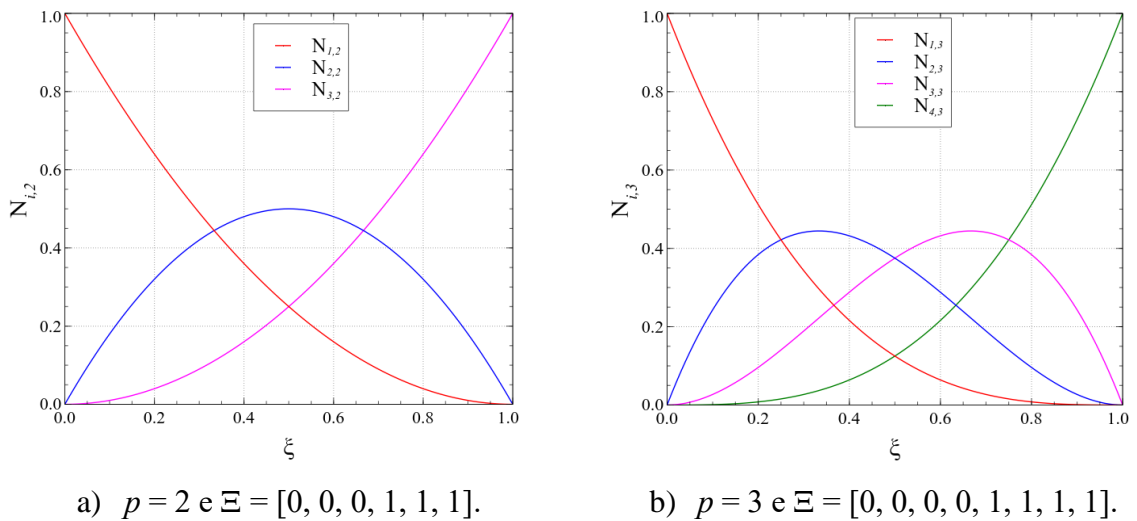
Figura 21 – Exemplo de refinamento  $h$  em uma B-Spline quadrática em uma barra.



Fonte: Elaborada pela autora.

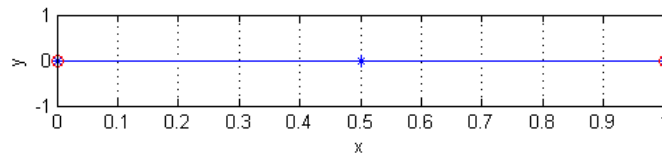
O refinamento  $p$  da AIG é referente à elevação do grau das bases. A multiplicidade do  $knot$  é elevada em 1, porém a continuidade inicial não se altera. Na AIG, esse refinamento melhora a solução numérica, aumentando o número de graus de liberdade e o grau das funções base, sem aumento de  $n_s$ . Este refinamento é similar ao refinamento  $p$  do MEF que consiste no uso de elementos de grau mais elevado. O refinamento  $p$  é ilustrado na Figura 22 e na Figura 23.

Figura 22 – Exemplo de funções de base com elevação de grau de quadrática para cúbica.

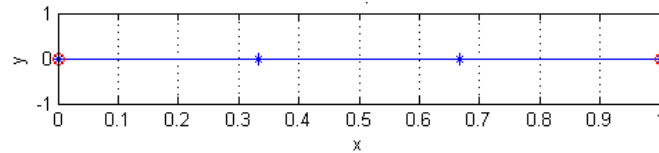


Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 23 – Exemplo de refinamento  $p$  de uma B-Spline quadrática na barra.



a)  $p = 2, n_c = 3$   
 $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$

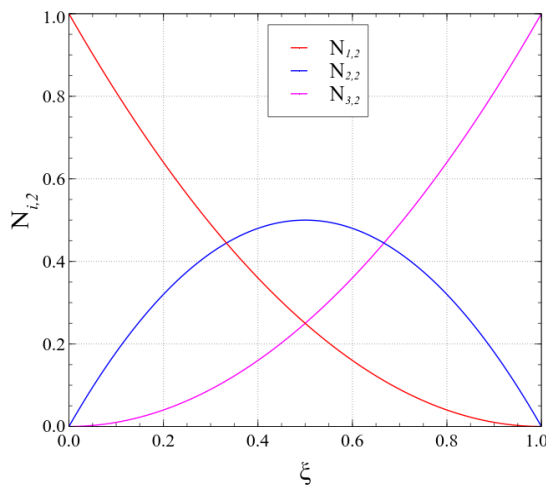


b)  $p = 3, n_c = 4$   
 $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$

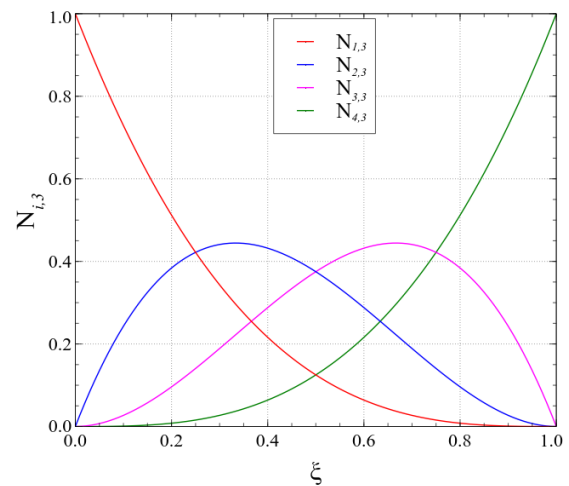
Fonte: Elaborada pela autora.

O refinamento  $k$  é uma combinação dos refinamentos  $p$  e  $h$ , pois tanto o grau  $p$  quanto o número de *spans*  $n_s$  são aumentados. Este refinamento é realizado fazendo primeiro a elevação do grau e depois a inserção de *knots*, fazendo com que haja o aumento tanto do grau das bases como da continuidade entre os *spans*, como ilustrado na Figura 24. Esse tipo de refinamento não existe no MEF. O refinamento  $k$  na barra eleva o grau e o número de *spans*  $n_s$ , com isso, o número de pontos de controle  $n_c$  vai aumentando, como mostrado na Figura 25.

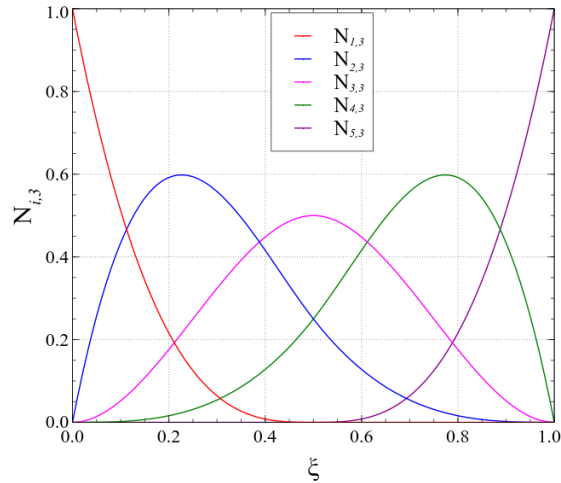
Figura 24 – Exemplo de refinamento  $k$ .



a) Curva inicial quadrática  $p = 2$ :  
 $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ .



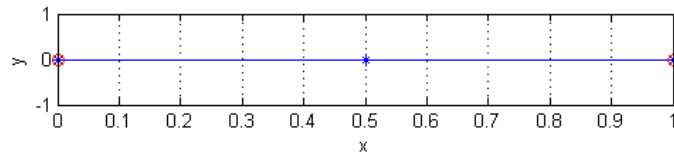
b) Elevação de grau  $p = 3$ :  
 $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$ .



c) Inserção de um *knot* na curva cúbica:  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1]$ .

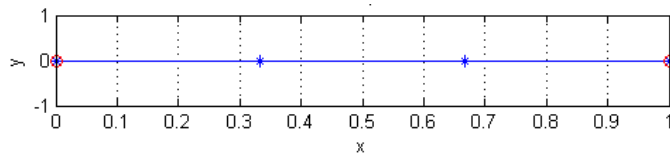
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 25 – Exemplo de refinamento *k*. O processo se inicia de (a) para (b), com a elevação do grau, depois de (b) para (c) com a inserção de *knot*.



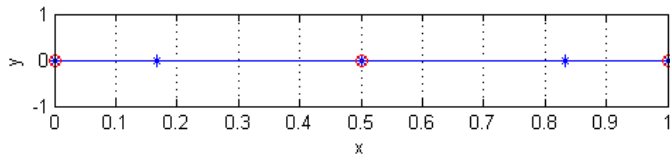
a)  $p = 2, n_c = 3, n_s = 1$  e  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ .

Elevação de Grau



b)  $p = 3, n_c = 4, n_s = 1$  e  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$ .

Inserção de *knot*



c)  $p = 3, n_c = 5, n_s = 2$  e  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1]$ .

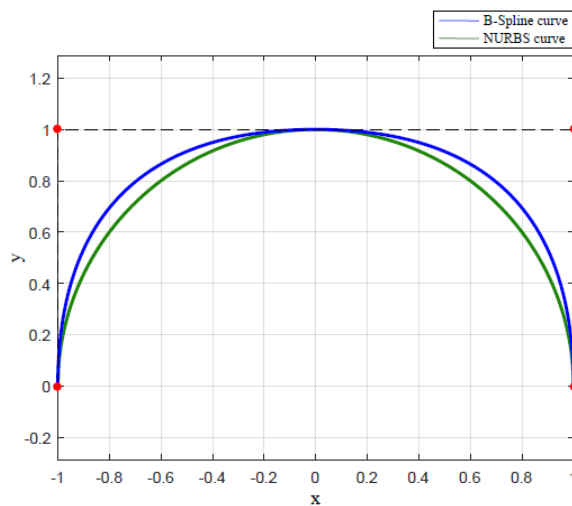
Fonte: Elaborado pela autora.

## 4.2 NURBS

As curvas B-Splines não conseguem reproduzir exatamente geometrias cônicas, por exemplo, círculos, elipses e superfícies de revolução, pois estas não têm geometrias definidas

por polinômios. Para resolver esse problema, são usadas as funções B-Splines não uniformes de base racional (*Non-Uniform Rational B-Splines* – NURBS), que possuem vetores de *knots* não uniformes. Na Figura 26 está a comparação entre uma semicircunferência feita com B-Splines e NURBS.

Figura 26 – Diferença na geometria entre uma semicircunferência construída com NURBS e um arco de 180° feito com B-Spline.



Fonte: Barroso (2015).

As vantagens de usar as bases racionais são, segundo Piegl e Tiller (1997):

- Representar modelos matemáticos padrão e de formas livres, tendo a mesma base de dados para armazenar os dois;
- Os pontos de controle e pesos podem ser alterados para se obter inúmeras formas;
- Podem ser avaliadas de forma rápida e numericamente estável;
- Os pontos de controle podem sofrer transformações diretamente neles, como translação, espelhamento, etc.
- São capazes de reproduzir outras representações paramétricas, como as próprias B-Splines, Bézier racionais e não-rationais.

Uma curva NURBS é descrita por uma combinação linear entre funções de base racional  $R_{i,p}$  e pontos de controle  $\mathbf{p}_i$  (Figura 15):

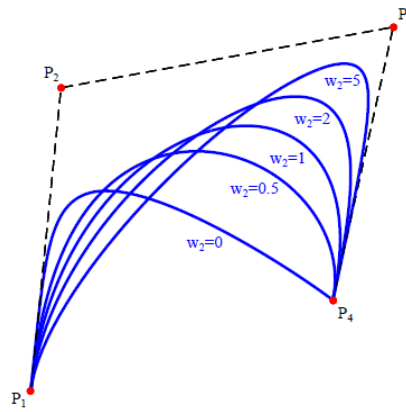
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (50)$$

As funções de bases NURBS são obtidas por uma relação entre as funções de bases B-Splines  $N_{i,p}$  e dos pesos  $w_i$ :

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{A(\xi)}{W(\xi)} \quad (51)$$

sendo  $W(\xi)$  a função peso. Cada ponto de controle possui um peso associado a ele. Variando o peso, pode-se alterar a geometria da peça, como mostrado na Figura 27.

Figura 27 – Efeito da variação do peso nas curvas.



Fonte: Barroso (2015).

As funções de base NURBS herdam as propriedades das funções de base B-Splines. Assim, as operações de refinamento *phk* apresentadas anteriormente são válidas.

A derivada da NURBS, ou seja, derivada da Equação (51), é obtida aplicando a regra da cadeia, como mostrado a seguir:

$$R'_{i,p}(\xi) = \frac{W(\xi)A'(\xi) - W'(\xi)A(\xi)}{W(\xi)^2} = \frac{W(\xi)A'(\xi) - W'(\xi)W(\xi)R_{i,p}(\xi)}{W(\xi)^2} = \frac{A'(\xi) - W'(\xi)R_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} \quad (52)$$

De acordo com Piegl e Tiller (1997), usando a regra de Leibnitz, a expressão para a  $k$ -ésima derivada é dada por

$$R_{i,p}^{(k)}(\xi) = \frac{A^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} W^{(j)}(\xi) R_{i,p}^{(k-j)}(\xi)}{W(\xi)} \quad (53)$$

#### 4.2.1 Superfícies

Placas e cascas abatidas são estruturas tridimensionais representada pela superfície média, tornando a análise bidimensional. Portanto, para o estudo destas é necessário a

representação de superfícies. Uma superfície definida por funções NURBS pode ser obtida pelo produto tensorial de duas bases univariantes. Logo, a superfície  $S$  é dada por um tensor de pontos de controle  $\mathbf{p}$  ( $n \times m$ ), entre uma NURBS de grau  $p$  com vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$  com outra NURBS de grau  $q$  com vetor de *knots*  $H = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}]$ , sendo assim, temos

$$S(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{p}_{ij} \quad (54)$$

A função  $R(\xi, \eta)$  é a função de base bivalente racional expressa por

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{w_{ij} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta)}{W(\xi, \eta)} \quad (55)$$

sendo a função do peso bivalente  $W$  dada por

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_{ij} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \quad (56)$$

As derivadas parciais são calculadas pela regra da derivação do quociente, logo

$$\frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}(\xi, \eta) = w_{ij} N_{j,q}(\eta) \frac{W(\xi, \eta) N'_{i,p}(\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta) N_{i,p}(\xi)}{W^2(\xi, \eta)} \quad (57)$$

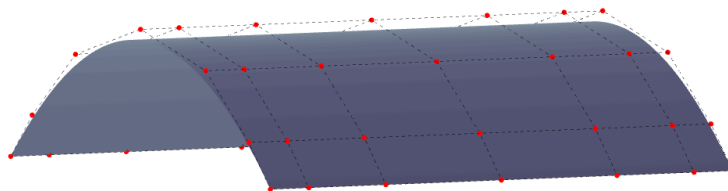
$$\frac{\partial}{\partial \eta} R_{i,j}(\xi, \eta) = w_{ij} N_{i,p}(\xi) \frac{W(\xi, \eta) N'_{j,q}(\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta) N_{j,q}(\eta)}{W^2(\xi, \eta)}$$

sendo as derivadas do peso dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_{ij} N'_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_{ij} N_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) \end{aligned} \quad (58)$$

A Figura 28 apresenta uma superfície NURBS e seus pontos de controle.

Figura 28 – Superfície NURBS.



Fonte: Elaborado pela autora.

## 5 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA DE CASCAS ABATIDAS

A formulação cinemática para cascas abatidas adotada é baseada na teoria de Reissner-Mindlin, apresentada anteriormente, para deformações de flexão e cisalhamento transversais e na teoria de Marguerre para deformações de membranas não lineares, incluindo o efeito das curvaturas iniciais e rotações moderadas.

A análise das estruturas reais de projeto é feita, em sua grande maioria, no regime linear, apesar de todo o avanço computacional. A análise linear é bem mais simples, rápida e fornece resultados satisfatórios para os problemas em geral que a não linear. Porém, para estruturas próximas ao colapso, verifica-se que o comportamento é não linear, apresentando, por exemplo, grandes deslocamentos, fissuração, plastificação, flambagem etc. Logo, uma análise mais realista da situação é feita considerando os efeitos da não linearidade, sendo possível o desenvolvimento de projetos mais econômicos, otimizados e sem comprometer a segurança e durabilidade.

A análise linear é baseada em três hipóteses básicas: pequenos deslocamentos, material linear elástico e condições de contorno constantes. Quando uma dessas hipóteses é violada, é necessário fazer um estudo não linear.

A análise é dita não linear geométrica quando os efeitos dos grandes deslocamentos são incorporados ao comportamento da estrutura, ou seja, a não linearidade é causada pela mudança de geometria, sem que o material saia do seu regime elástico.

Para se considerar grandes deslocamentos na análise, é preciso considerar os termos de deformação não lineares (CRISFIELD, 1991), fazendo com que a matriz de rigidez dependa dos deslocamentos, ou seja, a análise passa a ser iterativa e tem um custo computacional maior.

Neste trabalho será adotada a formulação Lagrangeana Total, considerando os termos de deformação de Green-Lagrange e as tensões de Piola-Kirchhoff II. Essa formulação usa a configuração inicial de equilíbrio, que já é conhecida, para determinar tensões e deformações em qualquer instante de tempo.

### 5.1 Deslocamentos e deformações

A geometria da casca abatida é descrita por superfície NURBS como:

$$x = \sum_{i=1}^{n_c} R_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^{n_c} R_i y_i \quad z_0 = \sum_{i=1}^{n_c} R_i z_{0i} \quad (59)$$

onde  $R_i$  é dado na Equação (55),  $n_c$  é o número de pontos de controle da superfície.

Na análise de cascas abatidas, os deslocamentos de membrana e transversais ( $u$ ,  $v$  e  $w$ ) e rotações da superfície média ( $\theta_x$  e  $\theta_y$ ) são escritos a partir dos graus de liberdade nos pontos de controle como:

$$u = \sum_{i=1}^{n_c} R_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{n_c} R_i v_i \quad w = \sum_{i=1}^{n_c} R_i w_i \quad \theta_x = \sum_{i=1}^{n_c} R_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^{n_c} R_i \theta_{yi} \quad (60)$$

Em notação matricial, temos

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{u}_e \quad (61)$$

onde  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}_e$  são os vetores de deslocamentos da superfície média da casca e de seus pontos de controle, respectivamente, e  $\mathbf{R}$  é a matriz das funções de forma.

O vetor das deformações está relacionado com o vetor de deslocamentos dos pontos de controle  $\mathbf{u}_e$  por meio da matriz  $\mathbf{B}$ . Utilizando as Equações (15), (16), (19), (60) e (61), esta matriz pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (62)$$

Os termos da matriz  $\mathbf{B}$  são determinados combinando-se as Equações (60) e (62):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \begin{bmatrix} u_{,x} + w_{,x} z_{0,x} \\ v_{,y} + w_{,y} z_{0,y} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} z_{0,y} + w_{,y} z_{0,x} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0^m \mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{B}_0^m = \begin{bmatrix} R_{i,x} & 0 & Z_x R_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,y} & Z_y R_{i,y} & 0 & 0 \\ R_{i,y} & R_{i,x} & Z_x R_{i,y} + Z_y R_{i,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2w_{,x} w_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,x} & w_{,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{G} \mathbf{u}_e \quad (64)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^m \mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{B}_L^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} W_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,x} W_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,x} W_y + R_{i,x} W_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0^b \mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{B}_0^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_{i,x} \\ 0 & 0 & 0 & -R_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{i,x} & R_{i,y} \end{bmatrix} \quad (66)$$



$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} w_x + \theta_y \\ w_y - \theta_x \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0^s \mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{B}_0^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} & 0 & R_i \\ 0 & 0 & R_{i,y} & R_i & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

onde os valores de  $\mathbf{G}$ ,  $Z$  e  $W$  são dados por:

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$Z_x = \sum_{i=1}^{n_c} R_{i,x} z_{0i} \quad Z_y = \sum_{i=1}^{n_c} R_{i,y} z_{0i} \quad (69)$$

$$W_x = \sum_{i=1}^{n_c} R_{i,x} w_i \quad W_y = \sum_{i=1}^{n_c} R_{i,y} w_i \quad (70)$$

Por fim, a Equação (62) é reescrita como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^m \\ \mathbf{B}_0^b \\ \mathbf{B}_0^s \end{bmatrix} \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \left( \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (71)$$

## 5.2 Vetor de forças internas e matriz de rigidez

Agora, é necessário fazer o equilíbrio do sistema para de obter o campo de deformações. Para isso, aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), temos que a variação do trabalho virtual interno é igual a variação do trabalho virtual externo:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (72)$$

sendo

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV_0 = \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V} dA_0 \quad (73)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{V_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV_0 + \int_{A_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (74)$$

onde  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  é a deformação virtual relativa ao deslocamento virtual infinitesimal  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{b}$  é o vetor respectivo às forças de corpo,  $\mathbf{q}$  é o vetor das forças de superfície prescritas em  $A_0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor das tensões,  $\delta \mathbf{u}_i$  é o deslocamento virtual no ponto de aplicação de  $\mathbf{p}_i$ , que são as cargas concentradas aplicadas em  $n$  pontos sobre a estrutura e  $\mathbf{f}$  é o vetor de cargas externas.

As integrações são realizadas na área e volume iniciais,  $A_0$  e  $V_0$ , visto que uma formulação Lagrangeana Total está sendo aplicada. A integração ao longo da espessura para obtenção dos esforços internos ( $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{V}$ ) foi discutida no Item 3.2.

Para associar incrementos de deformação  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  com incrementos de deslocamentos nodais  $\delta \mathbf{u}_e$ , adota-se uma matriz  $\bar{\mathbf{B}}$ , obtidas a partir das Equações (63) a (67):

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}_e \quad (75)$$

sendo as parcelas de incremento de deformação dadas por:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \bar{\mathbf{B}}_0^m \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^m \delta \mathbf{u}_e \quad (76)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{A}\mathbf{G}) \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \mathbf{A}\mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}}_L^m \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_L^m \delta \mathbf{u}_e \quad (77)$$

$$\delta \boldsymbol{\kappa} = \bar{\mathbf{B}}_0^b \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^b \delta \mathbf{u}_e \quad (78)$$

$$\delta \boldsymbol{\kappa} = \bar{\mathbf{B}}_0^s \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^s \delta \mathbf{u}_e \quad (79)$$

Portanto, a Equação (75) pode ser escrita como

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_0^m \\ \bar{\mathbf{B}}_0^b \\ \bar{\mathbf{B}}_0^s \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_e + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_e = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) \delta \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}_e \quad (80)$$

Os termos obtidos são inseridos na expressão da variação do trabalho virtual interno da Equação (73):

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}^T \left[ \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \mathbf{V} dA_0 \right] = \delta \mathbf{u}^T \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (81)$$

Por fim, a expressão do PTV da Equação (72) pode ser descrita como

$$\delta \mathbf{u}^T \left( \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 - \mathbf{f} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \mathbf{u}^T [\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}] = 0 \quad \text{onde} \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (82)$$

sendo  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  o vetor das forças internas. É importante notar que ele depende dos deslocamentos da estrutura, devido aos efeitos da não linearidade geométrica de Green-Lagrange. Finalmente, considerando que os deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{u}$  são arbitrários, obtemos as equações de equilíbrio:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (83)$$

sendo  $\mathbf{r}$  o resíduo.

Para determinar a solução de problemas não lineares e traçar seu caminho de equilíbrio é necessário determinar sua matriz de rigidez tangente, pois essas análises são realizadas utilizando métodos incrementais-iterativos. O Método de Newton-Raphson, utilizado para determinar a solução das equações de equilíbrio a cada passo, se baseia na linearização das equações de equilíbrio (Equação (83)) e usa a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$ .

A matriz  $\mathbf{K}_T$  é dada pela variação do resíduo  $\mathbf{r}$  em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ . Quando as cargas independem dos deslocamentos, a matriz é dada por

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial [\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}]}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \mathbf{u}} dA_0 + \int_{A_0} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}} \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (84)$$

Na primeira parcela da Equação (84), aplicando a regra da cadeia, obtêm-se uma integral que depende da lei constitutiva do material, o resultado desta integral é a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_L$ . Na segunda parcela, a integração da matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  multiplicada pelo vetor de tensões generalizadas  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  gera a matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_\sigma$ . Assim, podemos reescrever  $\mathbf{K}_T$  como

$$\mathbf{K}_T = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} dA_0 + \int_{A_0} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^m}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{N} dA_0 = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_T \bar{\mathbf{B}} dA_0 + \int_{A_0} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^m}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{N} dA_0 = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (85)$$

sendo  $\mathbf{C}_T$  a matriz constitutiva tangente do material. Como  $\bar{\mathbf{B}}^m = \mathbf{A}\mathbf{G}$  e aplicando essa igualdade em  $\mathbf{K}_\sigma$ , temos

$$\mathbf{K}_\sigma d\mathbf{u} = \int_{A_0} \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \mathbf{N} dA_0 = \left( \int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \right) d\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{K}_\sigma = \int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \quad \text{com } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (86)$$

Na AIG, as matrizes de rigidez são calculadas numericamente utilizando a Quadratura de Gauss:

$$\mathbf{K}_L = \sum_{i=1}^{npg} \left( \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_T \bar{\mathbf{B}} |\mathbf{J}| \right)_i W_i \quad (87)$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \sum_{i=1}^{npg} \left( \bar{\mathbf{G}}^T \mathbf{S} \mathbf{G} |\mathbf{J}| \right)_i W_i$$

sendo  $npg$  o número de pontos de Gauss da integração,  $\mathbf{J}$  o Jacobiano e  $W$  os pesos de Gauss. O mesmo procedimento é utilizado para o vetor de forças internas:

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{npg} \left( \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} |\mathbf{J}| \right)_i W_i \quad (88)$$

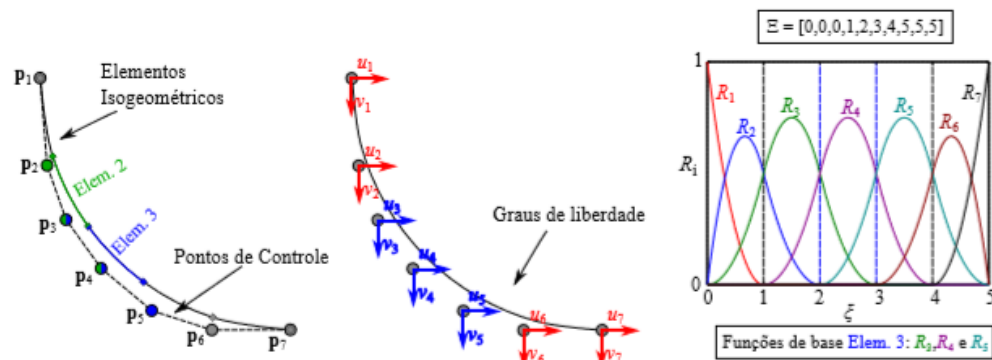
Na AIG as funções de forma (NURBS) são definidas em um *patch*, que é dividido em *spans*, como apresentado no Capítulo 4. Como discutido em Cottrel et al. (2009), tanto os

*patches* como os *spans* podem ser utilizados para integração das matrizes de rigidez e vetores de forças, podendo ser interpretados como elementos no contexto da AIG.

É importante notar que devido a característica do suporte compacto, apenas  $p + 1$  funções de base são não nulas em um dado *span* (Figura 29). Assim, a consideração do *span* na AIG como o análogo ao elemento no MEF leva a um ganho no custo computacional, pois só é necessário fazer a integração dos termos de  $\mathbf{K}$  associados às bases não-nulas no *span*. Depois, faz-se um somatório das integrais nos *spans* de forma a obter a matriz de rigidez da estrutura. Este somatório é idêntico ao processo de montagem da matriz de rigidez global pelo Método da Rigidez Direta.

Com um número fixo de bases que são não nulas no elemento e cada base associada a um ponto de controle diferente, os pontos de controle que tem influência em um determinado elemento (*span*) são facilmente determinados. A diferença principal em relação ao MEF é que os pontos de controle associados a um determinado elemento AIG geralmente não estão contidos neste elemento, já que os pontos de controle não são interpolados pelas NURBS. A Figura 29 ilustra utilizando cores, os elementos, bases não nulas e pontos de controle associados de uma malha isogeométrica 1D.

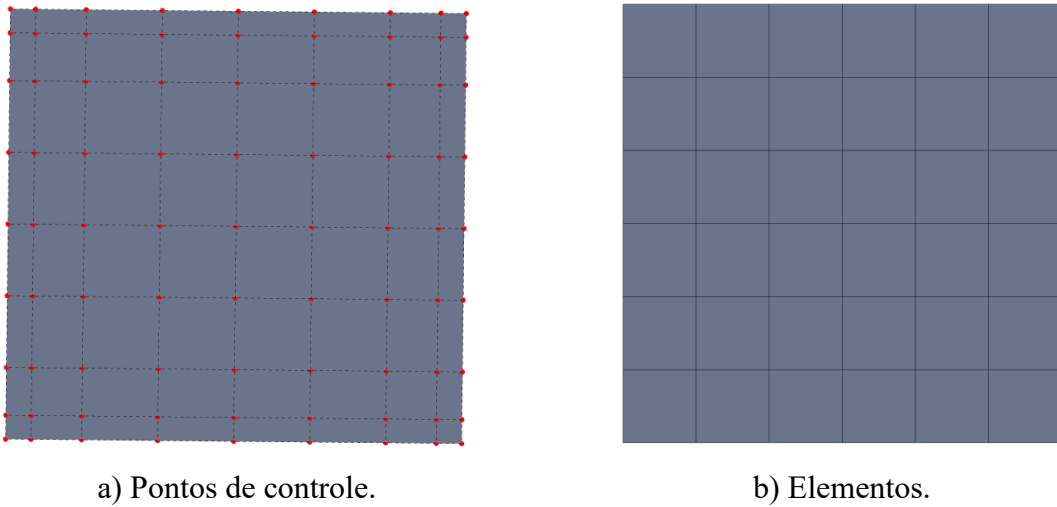
Figura 29 – Geometria de um cabo, graus de liberdade e funções de base.



Fonte: Barroso (2015).

A Figura 30 mostra a vista em planta de uma superfície com malha  $6 \times 6$ , ou seja, 36 elementos e 81 pontos de controle. Nota-se que, diferente do MEF, em AIG os pontos de controle não estão nos lados dos elementos. Na realidade, com exceção das bordas retas, os pontos de controle em geral não estão sobre a superfície NURBS. Neste caso, os limites dos elementos correspondem ao mapeamento dos limites de cada *span* sobre a geometria da estrutura.

Figura 30 – Modelo de uma superfície NURBS vista em planta.

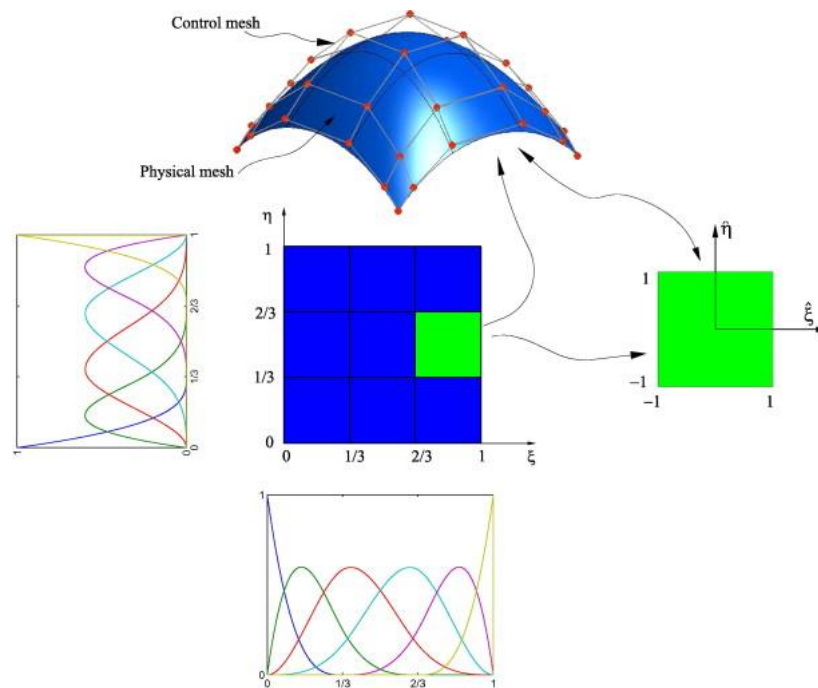


Fonte: Elaborado pela autora.

As curvas e superfícies NURBS utilizam a representação paramétrica. Assim, as superfícies NURBS são definidas no espaço paramétrico  $(\xi, \eta)$  de acordo os *knot vectors* utilizados, sendo feito um mapeamento para o espaço no espaço tridimensional  $(x, y, z)$ . Logo, o modelo físico, que é a estrutura real (placa ou casca), será representada parametricamente. A geometria da estrutura depende uma malha de controle, definida pelos pontos de controle  $\mathbf{p}_i$ . Como discutido anteriormente, a geometria real dos elementos corresponde ao mapeamento dos limites dos *knot spans* para a geometria real da superfície.

Um mapeamento adicional é necessário quando a integração por quadratura de Gauss é utilizada, uma vez que estes pontos são definidos no intervalo paramétrico  $[-1, 1]$ . A Figura 31 ilustra estes mapeamentos para uma superfície cúbica com 3 elementos.

Figura 31 – Malhas de controle e física. Mapeamento da superfície NURBS. Percebe-se que há a estrutura real, a sua parametrização e o elemento.



Fonte: Nguyen-Thanh (2011).

### 5.3 Solução da equação de equilíbrio não linear

A Equação (83), que representa o equilíbrio do sistema, pode ser reescrita como

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{q} \quad (89)$$

onde  $\lambda$  é o fator de carga e  $\mathbf{q}$  o vetor de cargas externas de referência. Para uma estrutura com  $n$  graus de liberdade, o sistema que será resolvido terá  $n$  equações. Porém, é preciso determinar tanto os deslocamentos  $\mathbf{u}$  quanto o fator de carga  $\lambda$ , fazendo com que o sistema tenha  $n + 1$  incógnitas. Como temos mais incógnitas que equações, é impossível resolver o sistema de forma direta, sendo preciso adotar um dos métodos de traçado do caminho de equilíbrio (*path-following methods*), como, o Método de Controle de Carga, Controle de Deslocamento, Comprimento de Arco (CRISFIELD, 1991).

Aplicando o Método de Newton-Raphson, as equações de equilíbrio do sistema são linearizadas da seguinte forma:

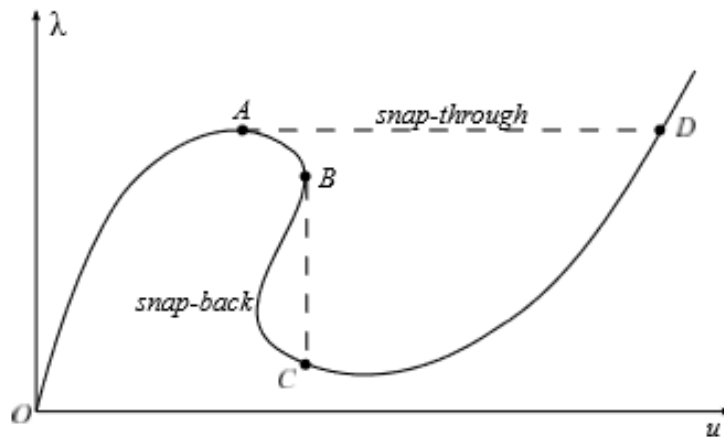
$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda \rightarrow \mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} - \delta \lambda \mathbf{q} \quad (90)$$

Por se tratar de um método iterativo, é necessário determinar quando o método de Newton-Raphson atingiu a convergência considerando uma tolerância  $tol$  que satisfaça a seguinte condição:

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\max(1, \|\mathbf{q}\|)} \leq tol \quad (91)$$

O método adotado para traçar o caminho de equilíbrio é o Comprimento de Arco (*Arc-Length*), pois ele é capaz de capturar comportamentos complexos de *snap-through* (diminuição da carga) e *snap-back* (diminuição dos deslocamentos), fenômenos apresentados na Figura 32.

Figura 32 – Caminho de equilíbrio com *snap-through* e *snap-back*.



Fonte: Parente e Sousa (2014).

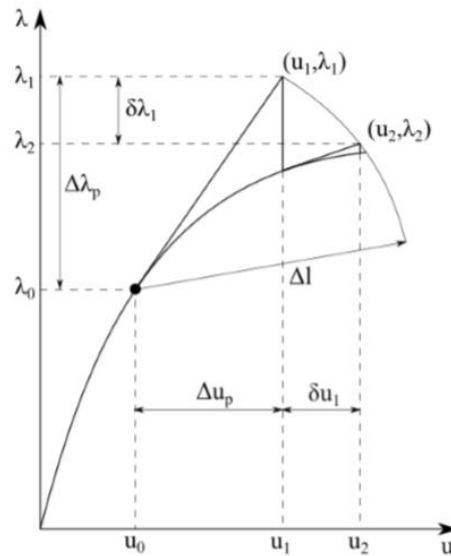
O Método do Comprimento de Arco foi proposto por Riks e Wempner. A ideia é usar como parâmetro de controle o comprimento do arco entre dois pontos sucessivos ao longo da curva de equilíbrio. Portanto, os incrementos de carga e deslocamento são variáveis ao longo das iterações, mas a distância entre o novo ponto de equilíbrio e o ponto de equilíbrio anterior é constante e corresponde ao comprimento de arco.

A equação de restrição  $a$  faz com que todos os pontos alcançados durante o processo iterativo da Equação (90) estejam a uma distância  $\Delta l$  do ponto anteriormente obtido (Figura 33). A restrição é dada por

$$a = (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q}) - \Delta l^2 = 0 \quad (92)$$

sendo  $\Delta l$  é o incremento do comprimento de um arco que forma uma hipersfera no espaço  $\mathcal{R}^{n+1}$  e  $\psi$  é um fator de escala entre os termos de carga e deslocamento.

Figura 33 – Iterações do Método do Comprimento de Arco.



Fonte: Rocha (2013).

Aplicando Newton-Raphson também na Equação (92), temos

$$a_n = a + 2\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u} + 2\Delta\lambda\delta\lambda\psi^2\mathbf{q}^T\mathbf{q} = 0 \quad (93)$$

Agora, o sistema tem  $n + 1$  equações também, pois a Equação (93) é adicionada. Portanto, agora temos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{q} \\ 2\Delta\mathbf{u}^T & 2\Delta\lambda\psi^2\mathbf{q}^T\mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ a \end{bmatrix} \quad (94)$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos as variações de carga e deslocamento. No início de cada passo, a solução tangente é procurada a partir do ponto em equilíbrio anterior. A solução sai de um preditor inicial e chega até um novo ponto com uma nova solução onde  $\mathbf{r} = 0$ , dentro da tolerância escolhida, encontrando um novo ponto de equilíbrio e finalizando o passo. Depois, esse ponto agora encontrado será o preditor do próximo, tanto para carga quanto para deslocamento.

Há várias versões do Método do Comprimento de Arco, onde diversos fatores de escala  $\psi$  são adotados. Porém, Crisfield (1991) relata que esse fator tem pouca influência no método e recomenda adotar  $\psi = 0$ , transformando a hiperesfera em um hipercilindro, passando esse modelo a ser chamado de Comprimento de Arco Cilíndrico. A implementação no *FAST* foi feita de acordo com Crisfield (1991), para comprimento de arco cilíndrico. Rocha (2013) traz a arquitetura que foi implementada para o traçado do caminho de equilíbrio feito com comprimento de arco.



## 5.4 Estabilidade

O estudo do comportamento pós-crítico de placas e cascas é muito importante, pois permite classificar a perda de estabilidade, determinar a capacidade de carga da estrutura e quantificar sua sensibilidade às imperfeições iniciais.

O método de comprimento de arco e outros métodos de análise não linear podem traçar os caminhos de equilíbrio apresentando comportamento não linear complexo (por exemplo, *snap-through*, *snap-back* e *loops*), mas capturam somente o caminho fundamental (primário) de estruturas com flambagem de bifurcação. Portanto, abordagens numéricas para análise de estabilidade demandam a avaliação de pontos críticos e a determinação de caminhos pós-críticos (WRIGGERS et al., 1988; WRIGGERS e SIMO; 1990; PARENTE et al., 2006).

A matriz de rigidez tangente é singular nos pontos críticos (limite e bifurcação).

Assim sendo:

$$\det \mathbf{K}(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (95)$$

Alternativamente, o ponto crítico pode ser detectado usando a condição de autovalor nulo

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \lambda)\boldsymbol{\phi} = 0, \text{ com } \|\boldsymbol{\phi}\| = 1 \quad (96)$$

onde  $\boldsymbol{\phi}$  é o autovetor associado, que representa o modo de flambagem.

Portanto, o ponto crítico  $(\mathbf{u}_{cr}, \lambda_{cr})$  ao longo do caminho de equilíbrio pode ser determinado resolvendo o sistema não linear:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \\ \mathbf{K}(\mathbf{u}, \lambda)\boldsymbol{\phi} \\ \|\boldsymbol{\phi}\| - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (97)$$

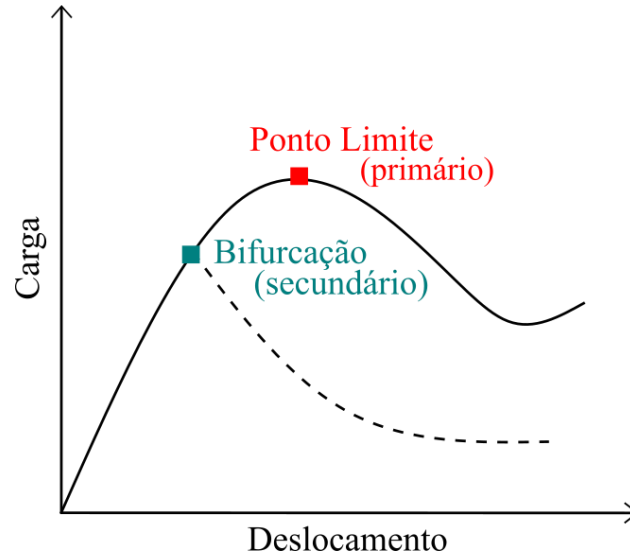
Procedimentos numéricos têm sido propostos para resolver eficientemente este sistema (WRIGGERS et al., 1988; WRIGGERS e SIMO; 1990; PARENTE et al., 2006). Após o cálculo do ponto crítico, o modo de flambagem associado pode ser usado para sua classificação (PARENTE et al., 2006):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} \neq 0 \Rightarrow \text{ponto limite} \\ \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} = 0 \Rightarrow \text{bifurcação} \end{cases} \quad (98)$$

Finalmente, o modo de flambagem pode ser usado para realizar o *branch-switching* (Parente et al., 2006) para o caminho pós-crítico secundário em um ponto de bifurcação, como ilustrado na Figura 34. É importante notar que esta abordagem pode ser usada para estudar a estabilidade de estruturas perfeitas e imperfeitas, com instabilidade por bifurcação e pontos

limite. Além disso, funciona bem quando não há modos distintos com a mesma carga crítica, ou seja, outros caminhos partindo do mesmo ponto crítico.

Figura 34 – Pontos críticos e caminhos de equilíbrio.



Fonte: Elaborado pela autora.

Em muitas estruturas perfeitas, como colunas e placas, os deslocamentos anteriores ao primeiro ponto crítico ( $\mathbf{u}_{cr}$ ) são muito pequenos e podem ser desprezados, simplificando o problema. Como a matriz tangente pode ser decomposta na soma da matriz do material e geométrica, temos

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (99)$$

Considerando que a matriz tangente do material é igual a matriz de rigidez linear ( $\mathbf{u}_{cr} = \mathbf{0}$ ) e a matriz geométrica depende de um fator de carga  $\lambda$  é proporcional à matriz para a carga de referência, temos que:

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{K}_0 \quad (100)$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma \quad (101)$$

Finalmente, lembrando que a matriz  $\mathbf{K}$  deve ser singular nos pontos críticos ( $\mathbf{K}\phi = \mathbf{0}$ ), podemos escrever:

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma)\phi = \mathbf{0} \quad (102)$$

que corresponde à forma clássica da flambagem linearizada (COOK et al., 2002), onde os autovalores  $\lambda$  correspondem as cargas críticas e os autovetores  $\phi$  aos modos de flambagem.

## 5.5 Travamento

O travamento (*locking*) corresponde a um aumento excessivo da rigidez do modelo numérico, devido a deficiência da sua formulação, não estando relacionada ao problema físico. Elementos finitos de baixa ordem de interpolação, baseados na teoria de Timoshenko/Mindlin, sofrem de severo travamento de membrana e de cisalhamento transversal (COOK et al., 2002).

O travamento reduz significativamente a velocidade de convergência do modelo numérico, principalmente quando a espessura da viga/placa/casca é pequena em relação ao vão. Este problema é bastante conhecido no contexto do Método dos Elementos Finitos (COOK et al., 2002), mas ocorre também na Análise Isogeométrica (ECHTER e BISCHOFF, 2010).

Rank et al. (1998) fez um estudo de placas finas de Reissner-Mindlin e encontrou resultados que evitam o travamento de cisalhamento para ordem dos polinômios de Lagrange superior a 6, mesmo com malhas grosseiras. Porém, quanto mais alto o grau, maior o custo computacional, logo é interessante que técnicas de alívio de travamento sejam estudadas para elementos de baixa ordem.

Para Dornisch et al. (2013), o travamento de cascas finas sob a teoria de Reissner-Mindlin é quase eliminado quando a ordem das funções de base aumenta, fazendo com que as cascas de Reissner-Mindlin sejam mais flexíveis quando comparadas com as cascas de Kirchhoff-Love, abrindo um amplo campo para aplicações.

Segundo Adam et al. (2015), os travamentos de membrana e cisalhamento também ocorrem na AIG devido à inconsistência dos campos de deslocamentos aproximados e da incapacidade das funções de base B-Splines/NURBS para representar comportamentos de flexão inextensional. Quando a ordem dos polinômios aumenta, os resultados são melhorados, mas o travamento não é eliminado.

Segundo Oesterle et al. (2016), o travamento está presente independente da ordem do polinômio adotado, tanto em MEF quanto em AIG. Contudo, ressalta que os erros diminuem bastante para ordens mais altas. Estes autores apresentam uma formulação para vigas de Timoshenko e cascas de Reissner-Mindlin, com 5 graus de liberdade e continuidade  $C^1$ , baseada em uma divisão hierárquica dos deslocamentos transversais, sem utilizar quaisquer graus de liberdade de rotações. Com isso, as cascas são livres de travamento de cisalhamento por construção, em nível teórico, porém o problema do travamento de membrana não pôde ser resolvido por um conceito semelhante, sendo tema de estudos futuros.

Lyly et al. (1993) propôs uma técnica de estabilização para os termos do cisalhamento em placas que reduz o travamento, ele corrige o cisalhamento por uma equação

que depende de parâmetros geométricos e de uma constante em MEF. Já Thai et al. (2012) usa o estudo de Lyly adaptando para a AIG. A matriz de rigidez de cisalhamento é multiplicada por um fator de correção ( $d$ ) dado por

$$d = \frac{h^2}{h^2 + \alpha l^2} \quad (103)$$

sendo  $h$  a espessura,  $\alpha$  uma constante entre o intervalo  $0.05 \leq \alpha \leq 0.15$  e  $l$  a razão entre o comprimento  $L$  e o número de *spans*  $n_s$ , ou seja,  $L/n_s$ . Sendo assim, quando a espessura diminui ou a relação  $L/n_s$  aumenta, o fator  $d$  diminui, diminuindo o efeito do travamento nos resultados.

Hu et al. (2016) apresentaram uma nova formulação isogeométrica baseada em B-Splines, chamada Método de Redução da Ordem (OR), que elimina o travamento modificando as deformações de cisalhamento, que, segundo os autores, apresentam melhor precisão por grau de liberdade quando comparado com outras alternativas em vigas de Timoshenko. Este trabalho cita nove diferentes métodos para eliminar o *locking* em vigas, placas e cascas: 1. Método  $\bar{B}$ , 2. *Discrete Shear Gap* (DSG) que também é conhecido como *Discrete Strain Gap*, 3. Integração seletiva e reduzida (*Selective and Reduced Integration – SRI*), 4. Formulação Mista, 5. Método de Colocação, 6. Método de variável única (*Single-Variable - SV*), 7. Método das deformações naturais assumidas (*Assumed Natural Strain - ANS*), 8. Método mínimos quadrados móveis (*Moving Least Square - MLS*) e 9. Método de campo polinomial acoplado (*Coupled Polynomial Field - CP*).

Em resumo, o travamento é importante nos elementos de baixa ordem, principalmente à medida que vão ficando mais finos. Como mostrado nas referências citadas, o travamento acontece em todas as ordens de aproximação, porém é reduzido à medida que o grau das funções de aproximação aumenta. Esse problema persiste por causa do paradigma de inconsistência de campo, causado pela utilização de funções de mesma ordem para aproximar deslocamentos e rotações, que não é solucionado com o aumento da ordem.

Um aspecto particular da AIG é que a continuidade do campo de deslocamentos também tem efeito direto sobre o travamento. De acordo com Adam et al. (2015), os travamentos de cisalhamento transversal e de membrana em elementos B-Spline/NURBS aumentam com o grau de continuidade das funções base.

### 5.5.1 Integração Reduzida

Uma alternativa simples para reduzir ou eliminar o problema do travamento é a utilização de técnicas de integração reduzida ou seletiva. Esta alternativa tem sido bastante utilizada no MEF (COOK et al., 2002) e pode ser adaptada para a AIG (ADAM et al., 2015). Esta será a abordagem utilizada neste trabalho.

A integração completa corresponde à quadratura de Gauss que integra exatamente a matriz de rigidez do elemento. No caso de elementos de placas, o número de pontos de Gauss da integração completa, de cada lado, é dado por

$$npg \geq \frac{p+1}{2} \quad (104)$$

onde  $p$  é a ordem das bases B-Spline utilizadas. O uso da integração completa leva a uma superestimação do valor da rigidez da estrutura, sendo os valores aproximados maiores que os reais, o que reduz a velocidade de convergência do modelo numérico.

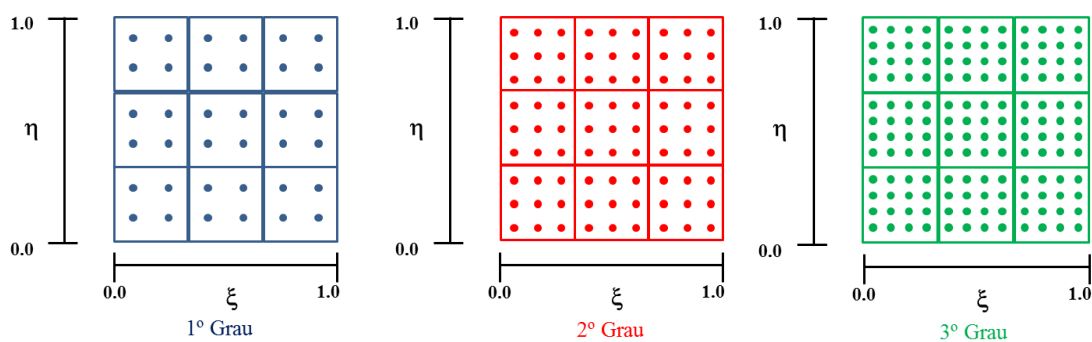
A integração reduzida integra a matriz de rigidez com menos pontos que o necessário para a completa, deixando o elemento menos rígido. No caso dos elementos finitos bidimensionais, o número de pontos de Gauss da integração reduzida, por lado, é dado por

$$npg = p \quad (105)$$

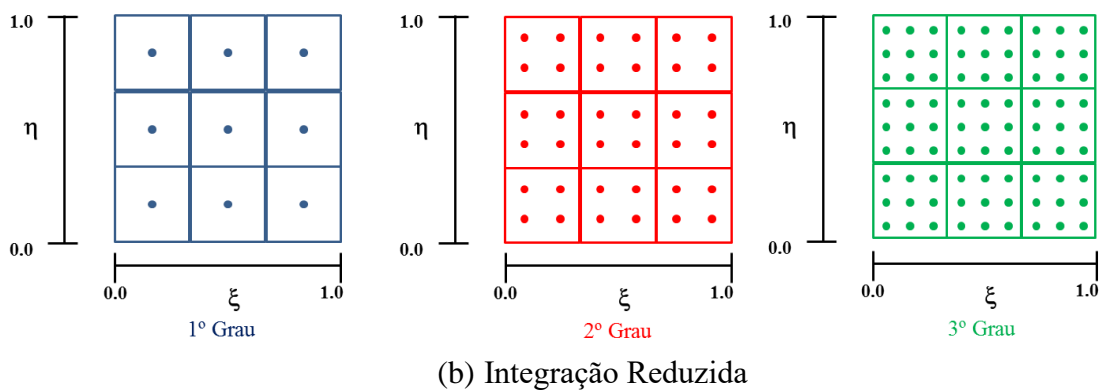
A quantidade de pontos de Gauss para placas e cascas são representados na Figura 35.

É importante notar que a integração reduzida consegue eliminar totalmente o travamento em vigas de Timoshenko, mas o mesmo não ocorre no caso de placas e cascas de Reissner-Mindlin. Adicionalmente, a integração reduzida pode levar ao aparecimento de modos espúrios de energia nula (COOK et al., 2002) e deve ser usada com cautela.

Figura 35 – Pontos de Gauss nas integrações completa (Comp) e reduzida clássica ( $R_{MEF}$ ), como usada em MEF, da casca.



(a) Integração Completa



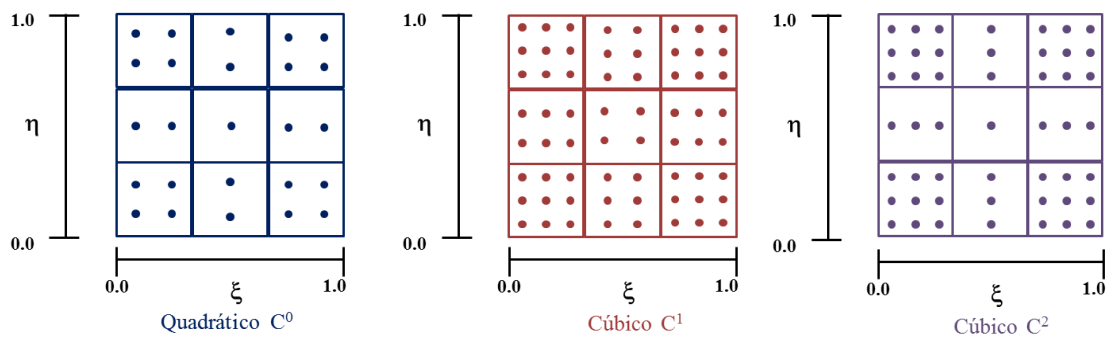
Fonte: Adaptado de Adam et al. (2015b).

Outra alternativa é a integração seletiva, com números de pontos de Gauss diferentes para as matrizes de rigidez de flexão e de cisalhamento. Essa técnica resolve o problema de travamento, permite explorar outras continuidades e usa menos pontos que a completa e a reduzida. Porém, segundo Adam et al. (2015), esse tipo de integração numérica é ruim para resolver sistemas globais de equações não lineares, a convergência do solver não é garantida em grandes sistemas. Segundo Bouclier et al. (2012), embora a integração seletiva seja de fácil implementação e com baixo custo computacional, ela é difícil de ser generalizada para uma ordem polinomial qualquer.

O trabalho de Adam et al. (2014) estuda uma viga curva de Timoshenko com aproximação isogeométrica e integração seletiva. Ele desenvolve uma solução otimizada, tirando proveito de poder usar diferentes graus de continuidade permitidas pela AIG e obtém bons resultados. Em Adam et al. (2015) são propostas regras de integração seletiva e reduzida, que eliminam o travamento sem introduzir modos de energia nula em placas e cascas com formulação isogeométrica.

Nas cascas de Reissner-Mindlin, segundo Adam et al. (2015b), com integração completa, a alta continuidade das funções B-Splines causa travamento e evita que a regra de quadratura reduzida clássica de elementos finitos ( $R_{MEF}$ ) elimine-o e deteriora o desempenho dos elementos. Assim, estes autores propuseram um novo esquema de integração reduzida uniforme ( $R_{AIG}$ ) para elementos isogeométricos de placas e cascas, apresentado na Figura 36, que pode ser adotado tanto na flexão quanto no cisalhamento.

Figura 36 – Pontos de Gauss da integração reduzida isogeométrica ( $R_{AIG}$ ) usada por Adam et al. (2015b).



Fonte: Adaptado de Adam et al. (2015b).

O uso dos diferentes esquemas de integração reduzida propostos na literatura para a AIG tem sido limitado à análise linear de placas e cascas. Assim, este estudo será estendido neste trabalho para a estabilidade linearizada e análise geometricamente não linear de placas e cascas abatidas.

## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

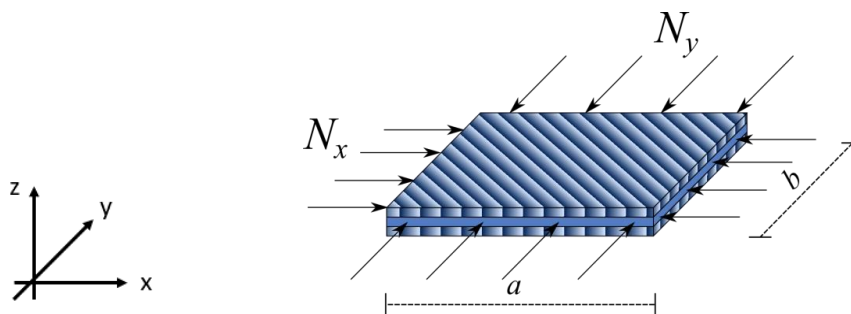
Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a utilização da formulação isogeométrica apresentada para deslocamentos e rotações moderadamente grandes. Para isso, foi necessário adotar uma análise não linear geométrica. O objetivo principal é validar a metodologia adotada, por meio de estudos de estabilidade das estruturas, determinando suas cargas críticas, caminhos pós-críticos e sensibilidade a imperfeições. Em especial o material com gradação funcional, pois sua implementação é recente.

Os exemplos numéricos foram modelados no FAST (*Finite element AnalySis Tool*), usando a análise isogeométrica, para placas e cascas cilíndricas com materiais isotrópicos, compósitos laminados e MGF. Os resultados obtidos foram comparados tanto com a literatura quanto com Elementos Finitos, usando o software ABAQUS (Simulia, 2012).

### 6.1 Placas laminadas

Este exemplo trata do estudo da flambagem e do comportamento pós flambagem de uma placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro bordos, isotrópica e laminada, sujeita a compressão uniaxial quando isotrópica e compressão biaxial quando laminada, como mostrado na Figura 37. A Tabela 1 apresenta as propriedades elásticas dos materiais compósitos em estudo.

Figura 37 – Placa quadrada sujeita a compressão biaxial.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 1 – Propriedades dos materiais laminados.

$E_1/E_2$	$G_{12}/E_2$	$\nu_{12}$	$G_{12}/G_{13}$	$G_{23}/E_2$
25	0.5	0.25	1	0.2

Fonte: Elaborado pela autora.



As condições de contorno adotadas por Sundaresan et al. (1996) e Liew et al. (2006) também são admitidas aqui:

$$\begin{cases} w = \theta_x = 0, x = +a/2; & w = \theta_x = u_x = 0 \text{ e } u_y = \text{cte}, x = -a/2 \\ w = \theta_y = 0, y = +b/2; & w = \theta_y = u_y = 0 \text{ e } u_x = \text{cte}, y = -b/2 \end{cases} \quad (106)$$

Inicialmente, foi realizado um estudo de convergência da formulação proposta para a análise clássica da flambagem linearizada (autovalor), considerando diferentes malhas, graus de funções de base, esquemas de laminação (*layups*) e esquemas de integração.

As cargas de referência de flambagem para placas isotrópicas foram calculadas usando a solução analítica para a teoria de Kirchhoff (Dym, 2002), para laminados *cross-ply* é usada a solução analítica para a Teoria Clássica da Laminação (Reddy, 2004) e para laminados *angle-ply* foram calculadas usando MEF com uma malha muito refinada ( $40 \times 40$ ).

A Tabela 2, a Tabela 3 e a Tabela 4 apresentam as cargas de flambagem das placas quadradas de paredes finas com  $a/h = 1000$ , modeladas usando IGA com funções de base cúbicas ( $p = 3$ ). Os resultados mostram que a formulação proposta converge para os valores de referência com a discretização de malha para todas as laminações e integrações.

É interessante notar que a convergência é mais rápida para placas isotrópicas que placas laminadas e os resultados da placa isotrópica convergem com valores abaixo do de referência. Além disso, os acoplamentos presentes na matriz **D** dos laminados *angle-ply* pioram a precisão dos resultados em relação aos laminados *cross-ply*. Finalmente, os resultados mostram que a precisão do esquema de integração  $R_{AIG}$  é claramente superior às outras opções, levando a excelentes resultados mesmo para malhas pouco refinadas.

Tabela 2 – Cargas críticas ( $\lambda = N_{cr}a^2/\pi^2D$ ) das placas isotrópicas.

Malha	Comp	Dif (%)	$R_{MEF}$	Dif (%)	$R_{AIG}$	Dif (%)
4×4	4.4265	10.66	4.4077	10.19	3.9820	-0.45
6×6	4.2492	6.23	4.2041	5.10	3.9942	-0.14
8×8	4.0780	1.95	4.0575	1.44	3.9975	-0.06
10×10	4.0227	0.57	4.0161	0.40	3.9984	-0.04
Dym (2002)	4.0000					

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 3 – Cargas críticas ( $\lambda = N_{cr}a^2/E_2h^3$ ) das placas *cross-ply* (0/90)<sub>s</sub>.

Malha	Comp	Dif (%)	$R_{MEF}$	Dif (%)	$R_{AIG}$	Dif (%)
4×4	12.779	8.79	12.526	6.63	12.010	2.24
6×6	11.937	1.62	11.883	1.15	11.851	0.89
8×8	11.784	0.31	11.774	0.23	11.795	0.41
10×10	11.757	0.08	11.754	0.06	11.772	0.21
Reddy (2004)	11.747					

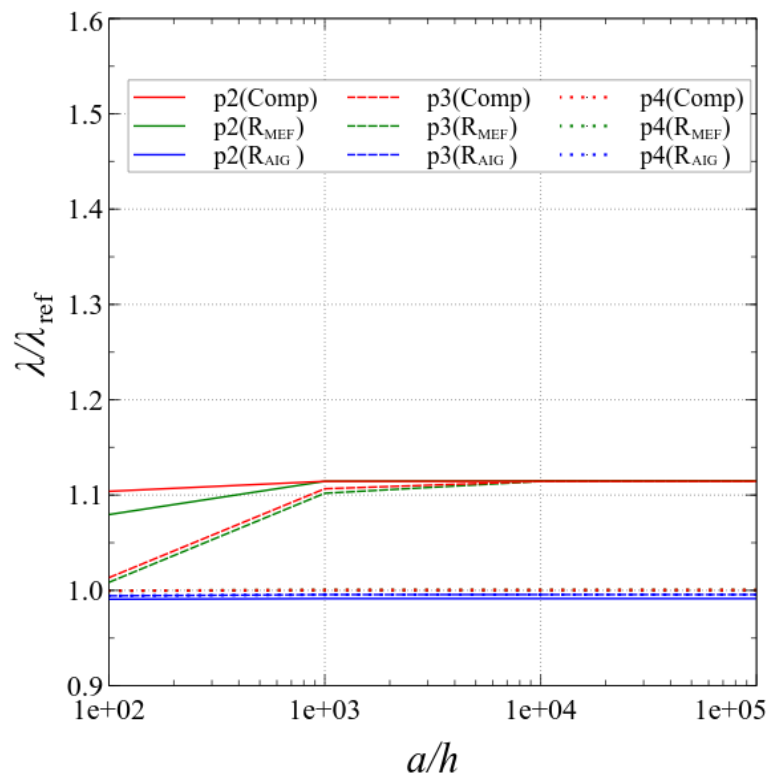
Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 4 – Cargas críticas ( $\lambda = N_{cr}a^2/E_2h^3$ ) das placas *angle-ply* (45/-45)<sub>s</sub>.

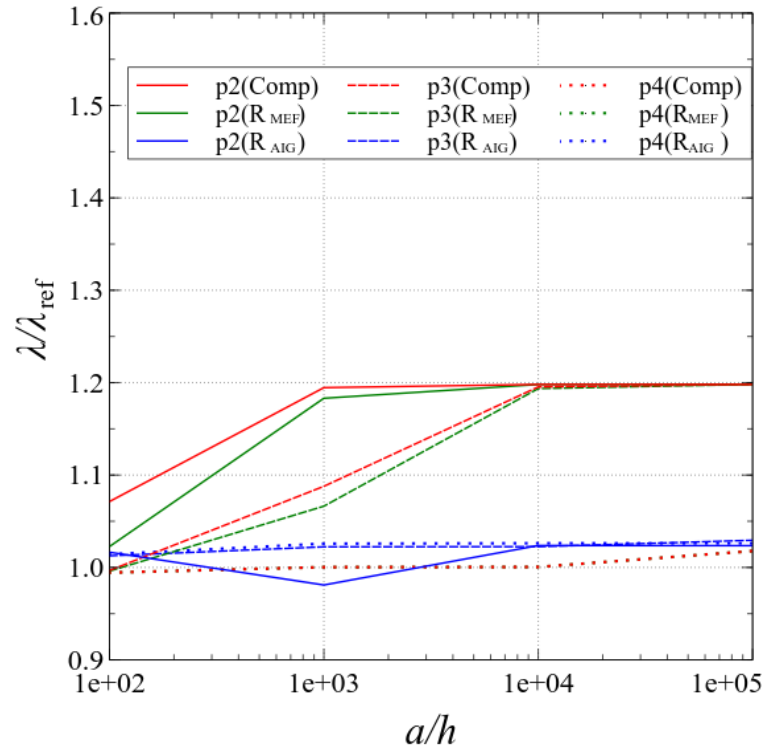
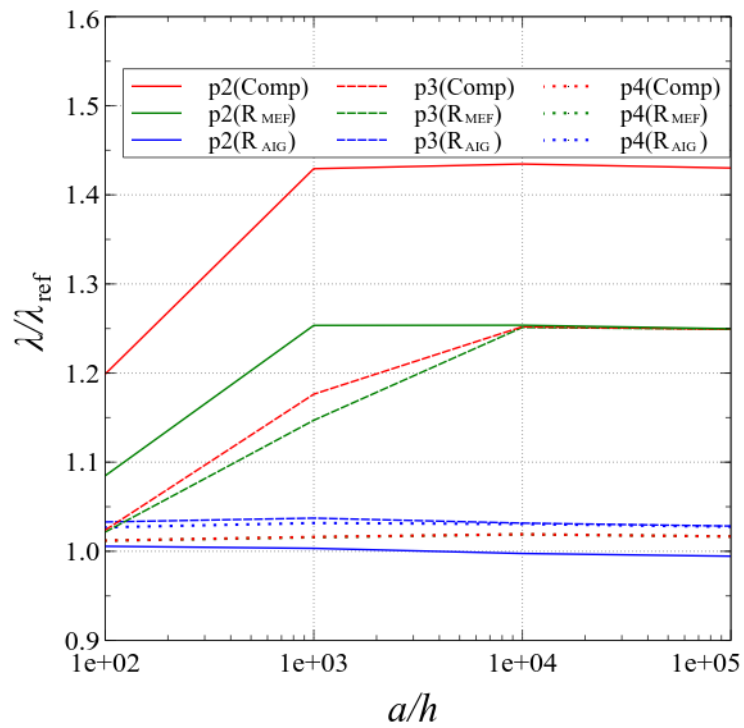
Malha	Comp	Dif (%)	R <sub>MEF</sub>	Dif (%)	R <sub>AIG</sub>	Dif (%)
4×4	18.767	18.19	18.213	14.70	16.469	3.72
6×6	16.710	5.24	16.538	4.15	16.107	1.44
8×8	16.195	1.99	16.142	1.66	15.987	0.68
10×10	16.033	0.98	16.008	0.82	15.913	0.22
MEF (40×40)	15.878					

Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 38 apresenta os resultados obtidos usando modelos AIG gerados com refinamento  $k$  e continuidade  $C^{p-1}$ . Uma malha fixa de 4×4 elementos (i.e. *knot spans*) é usada em todas as análises, enquanto a relação  $a/h$  é variada. A precisão das soluções obtidas usando integrações Completa e R<sub>MEF</sub> claramente piora quando a espessura diminui, especialmente para elementos quadráticos e cúbicos, devido ao travamento de cisalhamento. Como ocorre para o refinamento  $h$ , o travamento de cisalhamento é menor para placas isotrópicas, intermediário para placas *cross-ply* e maior para placas *angle-ply*.

Figura 38 – Cargas críticas para o refinamento  $k$ .

a) Isotrópica.

b) *Cross-ply.*c) *Angle-ply.*

Fonte: Elaborado pela autora.

Como esperado, o travamento de cisalhamento diminui para elementos de alta ordem. Assim, os elementos de quarta ordem ( $p = 4$ ) geram excelentes resultados para todos os esquemas de integração para toda a faixa de  $a/h$  considerada aqui, que inclui placas muito finas, incluindo espessuras muito inferiores às utilizadas na prática.

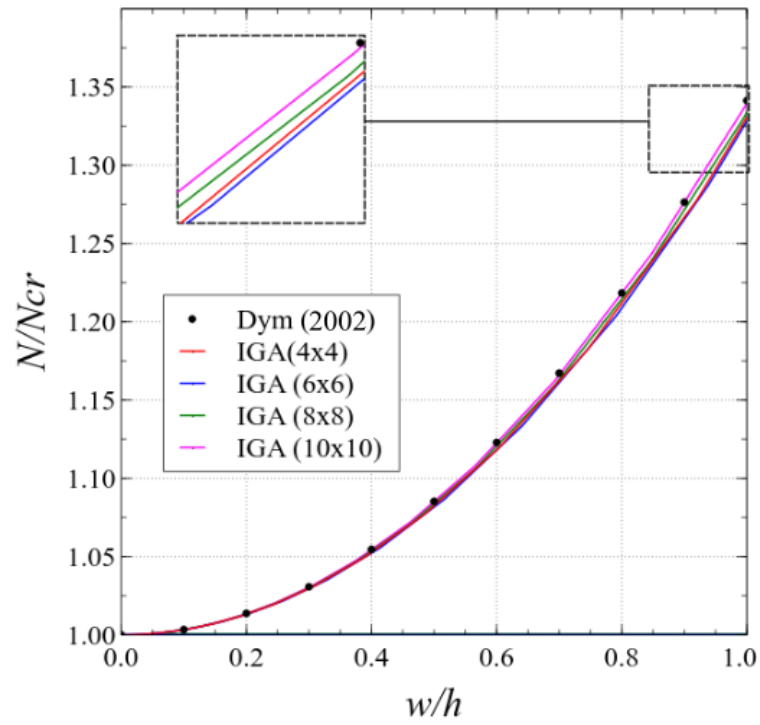
Finalmente, os resultados mostram que a integração  $R_{AIG}$  elimina o travamento de cisalhamento, uma vez que sua precisão é independente da relação  $a/h$ . Pode-se notar que excelentes resultados são obtidos mesmo para a aproximação quadrática. Como  $R_{AIG}$  não é apenas mais precisa, mas também mais eficiente que os outros esquemas de integração, ele será adotado nas análises não lineares apresentadas a seguir.

### 6.1.1 Análise Não Linear

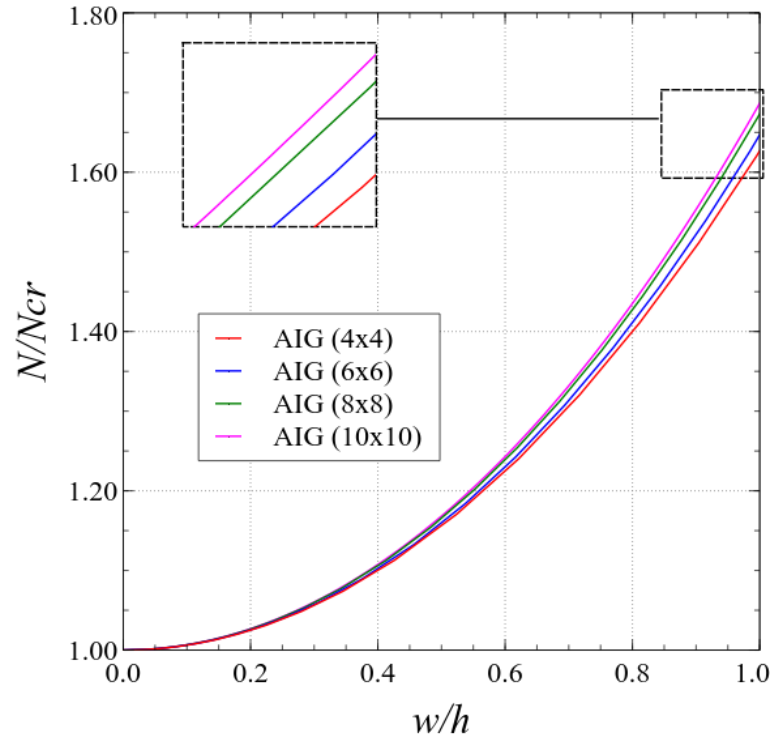
A análise não linear geométrica de placas isotrópicas e laminadas foi realizada usando elementos cúbicos. As placas têm  $a/h = 100$ , exceto por apenas um exemplo com placa isotópica, onde  $a/h = 50$ , uma vez que esta é a mesma relação considerada por Sundaresan et al. (1996) utilizando o MEF e Le-Manh e Lee (2014) utilizando a AIG.

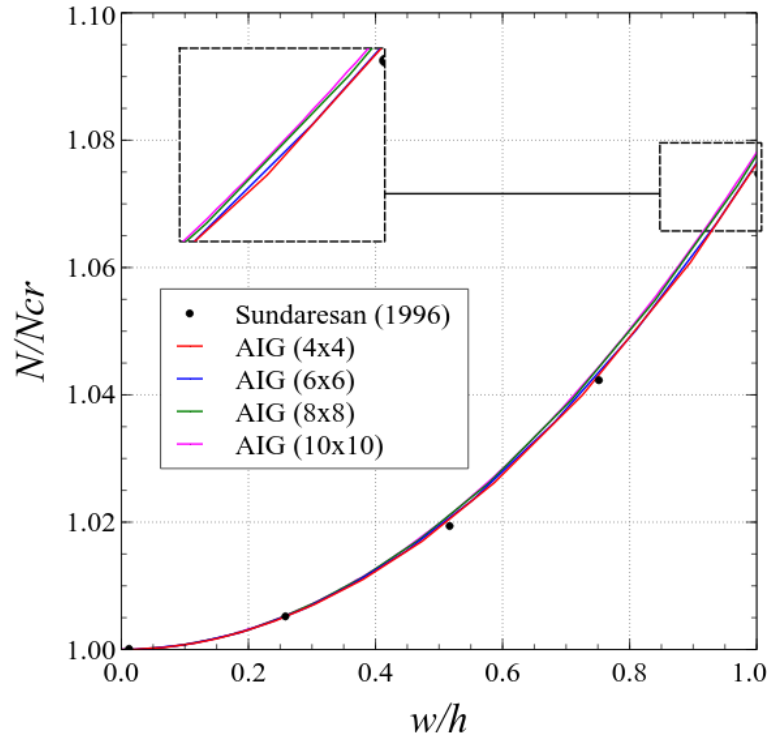
As curvas apresentadas na Figura 39 mostram claramente a convergência da formulação apresentada com o refinamento da malha. É interessante notar que, para todos os *layups*, a convergência se dá “por baixo”, pois a solução não linear aproximada é menos rígida do que a solução exata. Os resultados para as placas *angle-ply* estão de acordo com Sunderasan et al. (1996) e as pequenas diferenças são devidas à malha pouco refinada usada em sua solução pelo MEF.

Figura 39 – Comportamento pós-crítico.



a) Isotrópica.

b) *Cross-ply*.

c) *Angle-ply*.

Fonte: Elaborado pela autora.

É interessante notar que, enquanto as cargas críticas *angle-ply* são maiores que as *cross-ply*, ocorre o inverso para a reserva de resistência pós-crítica, uma vez que a relação  $N/N_{cr}$  das placas *cross-ply* apresentam menor aumento com os deslocamentos transversais ( $w/h$ ). No entanto, todos os laminados apresentam um comportamento pós-crítico simétrico estável, o que indica pequena sensibilidade às imperfeições geométricas iniciais.

Para estudar a sensibilidade da imperfeição, a geometria das estruturas imperfeitas pode ser modelada como uma combinação linear de seus modos de flambagem ( $\phi_i$ ):

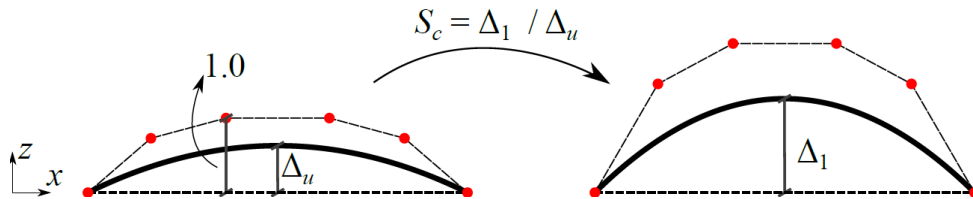
$$\mathbf{x}_{imp} = \mathbf{x}_{perf} + \sum_{i=1}^n \Delta_i \phi_i \quad (107)$$

onde  $\mathbf{x}_{imp}$  e  $\mathbf{x}_{perf}$  são as coordenadas dos pontos que definem a geometria na configuração imperfeita e perfeita, respectivamente, e  $\Delta_i$  é a amplitude da imperfeição relacionada ao modo de flambagem  $\phi_i$ , cujo maior componente tem valor unitário. Neste trabalho, apenas o primeiro modo de flambagem será usado para descrever a imperfeição geométrica.

Vale ressaltar que, ao contrário dos nós no MEF, os pontos de controle AIG não interpolam o modelo geométrico. Assim, uma geometria imperfeita com amplitude específica não pode ser obtida diretamente pela aplicação da Equação (107). No entanto, como NURBS tem a propriedade de invariância afim (Piegl e Tiller, 1997), a geometria com a amplitude de

imperfeições correta pode ser obtida aplicando uma transformação de escala  $S_c = \Delta_1/\Delta_u$  em coordenadas  $z$  dos pontos de controle da placa. A Figura 40 ilustra esse procedimento.

Figura 40 – Aplicação da curvatura inicial em placas.



Fonte: Barros (2016).

Uma malha de  $10 \times 10$  elementos cúbicos  $C^2$  é usada para estudar a sensibilidade à imperfeição, exceto para a placa isotrópica quadrada com  $a/h = 50$ , onde uma malha  $6 \times 6$  é usada para comparação com os resultados obtidos por Le-Manh e Lee (2014). É importante notar que esses autores usaram as condições de contorno:

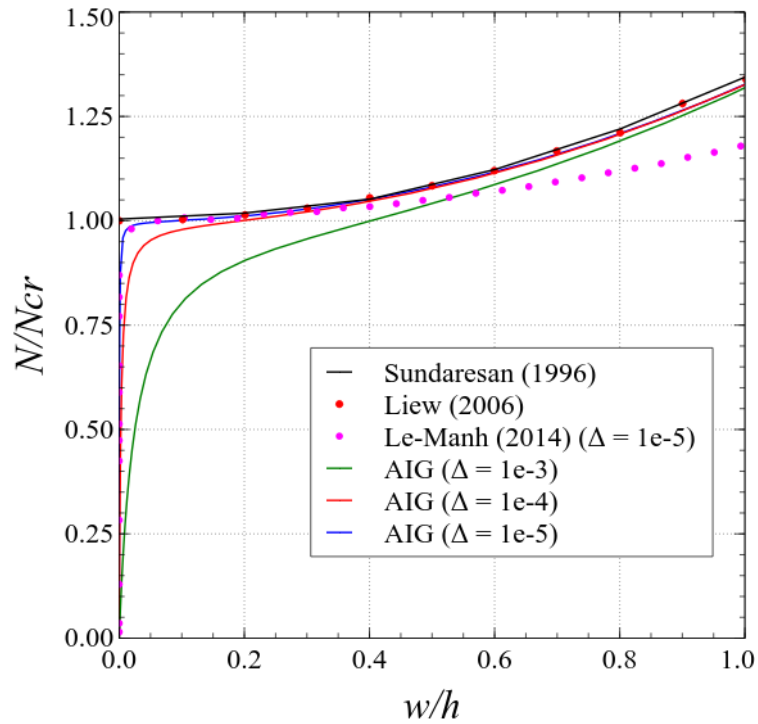
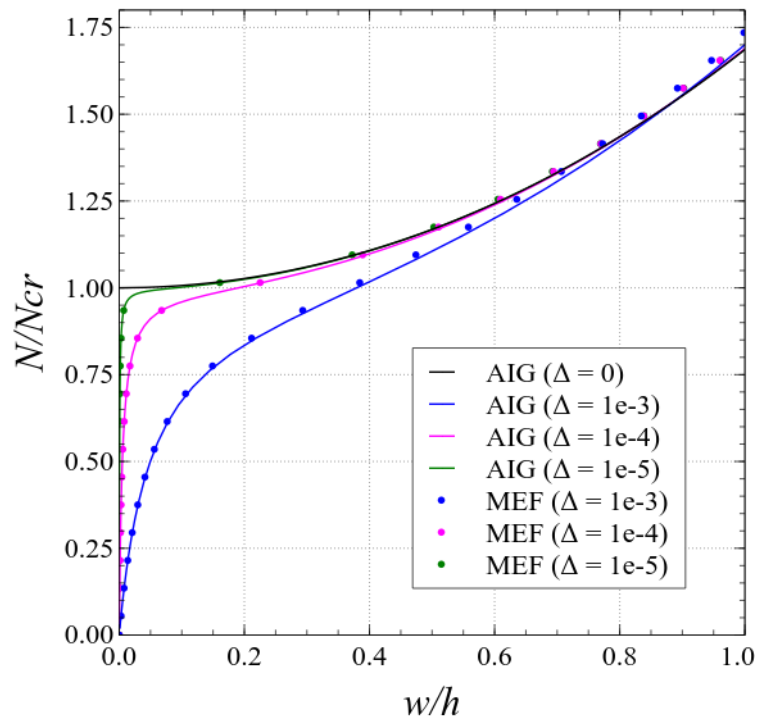
$$\begin{cases} w = \theta_x = 0, & x = \pm a/2 \\ w = \theta_y = 0, & y = \pm b/2 \end{cases} \quad (108)$$

que são diferentes das utilizadas condições descritas pela Equação (106) utilizada por Sundaresan et al. (1996), Liew et al. (2006) e neste trabalho.

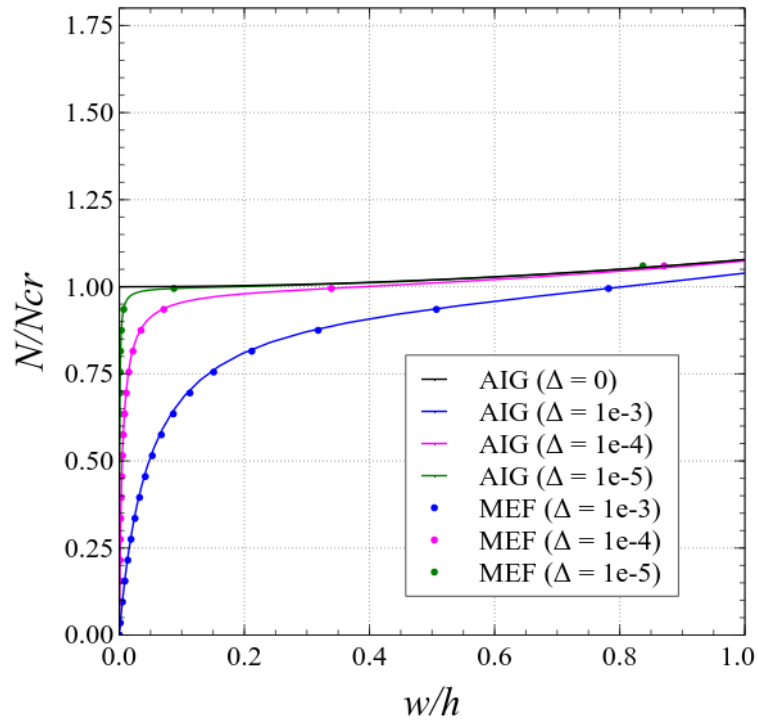
Os resultados do AIG são comparados com os resultados do MEF obtidos usando uma malha  $40 \times 40$  elementos de casca S8R. As curvas apresentadas na Figura 41 mostram que a formulação isogeométrica de casca abatida proposta leva a resultados muito precisos na análise não linear de placas imperfeitas quando comparadas com as soluções de Sundaresan et al. (1996) e Liew et al. (2006).

Por outro lado, há uma clara diferença dos resultados apresentados por Le-Manh e Lee (2014) em relação aos demais resultados. Essa diferença foi erroneamente atribuída por estes autores à certas características da formulação IGA (Le-Manh e Lee, 2014), mas a causa real foi simplesmente o uso de condições de contorno diferentes. Pode-se notar que as placas *cross-ply* têm uma maior rigidez pós-crítica que as placas isotrópicas e *angle-ply*. De fato, os resultados mostram que as placas *angle-ply* apresentam um aumento desprezível de resistência pós-crítica. Como as placas isotrópicas, as placas laminadas são apenas levemente sensíveis a imperfeições, como esperado a partir do comportamento das estruturas perfeitas.

Figura 41 – Comportamento pós-crítico de placas imperfeitas.

a) Isotrópica  $a/h = 50$ .b) *Cross-ply*  $a/h = 100$ .



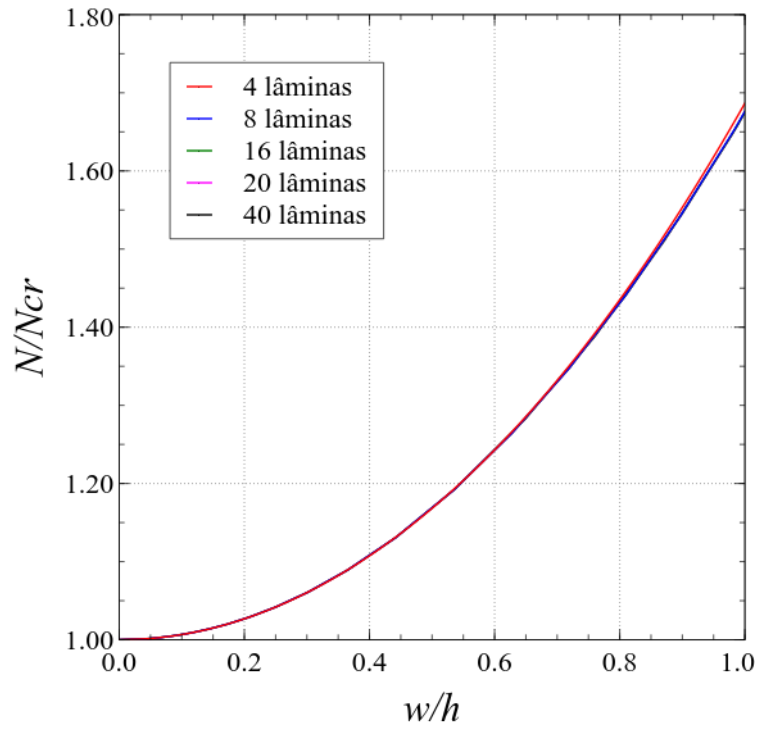
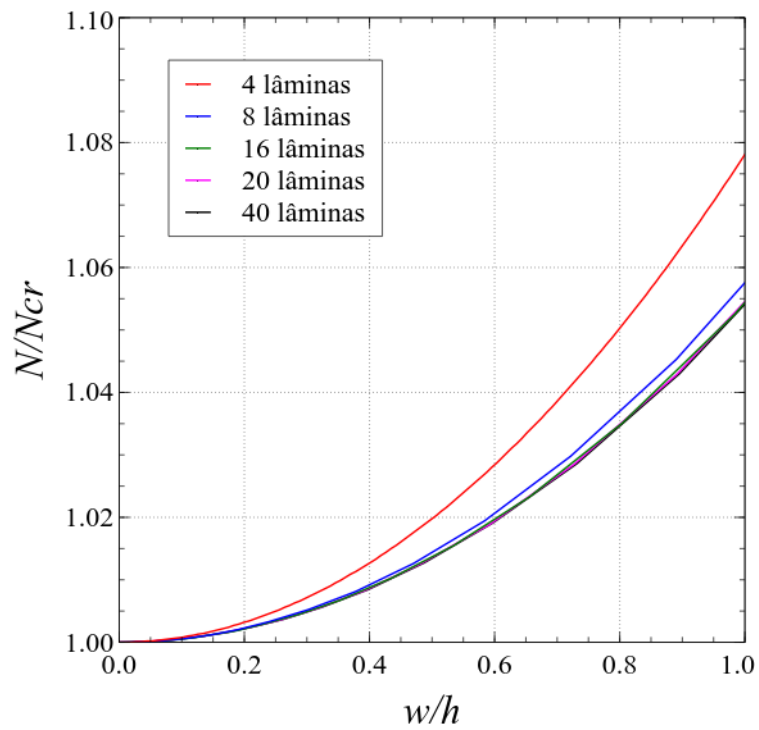


c) *Angle-ply*  $a/h = 100$ .

Fonte: Elaborado pela autora.

Finalmente, a formulação proposta foi utilizada para estudar o efeito do número de camadas no comportamento pós-crítico. Neste estudo, o número de lâminas foi aumentado mantendo constante a espessura do laminado. De acordo com a Figura 42, o aumento no número de camadas não influencia a resposta pós-crítica das placas *cross-ply*, mas diminui ainda mais a rigidez pós-crítica das placas *angle-ply*.

Figura 42 – Efeito do número de lâminas.

a) *Cross-ply*.b) *Angle-ply*.

Fonte: Elaborada pela autora.

## 6.2 Placas de material com gradação funcional

Placas simplesmente apoiadas (SA) e engastadas (ENG) de material com gradação funcional sob carga de compressão uniaxial foram analisadas sob uma temperatura constante de 300K, como estudado por Bateni et al. (2013). As placas são quadradas com comprimento  $a = 2.0\text{m}$  e espessura  $h = 0.02\text{m}$  ( $a/h = 100$ ).

As propriedades dos materiais constituintes (fases) são dependentes da temperatura, sendo normalmente descritas pela expressão:

$$P = P_0 \left( P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3 \right) \quad (109)$$

onde os coeficientes  $P_i$  dependem do material. A Tabela 5 apresenta estes coeficientes para o cálculo do módulo de elasticidade. O coeficiente de Poisson foi considerado constante.

Tabela 5 – Coeficientes termodependentes para o cálculo do módulo de elasticidade.

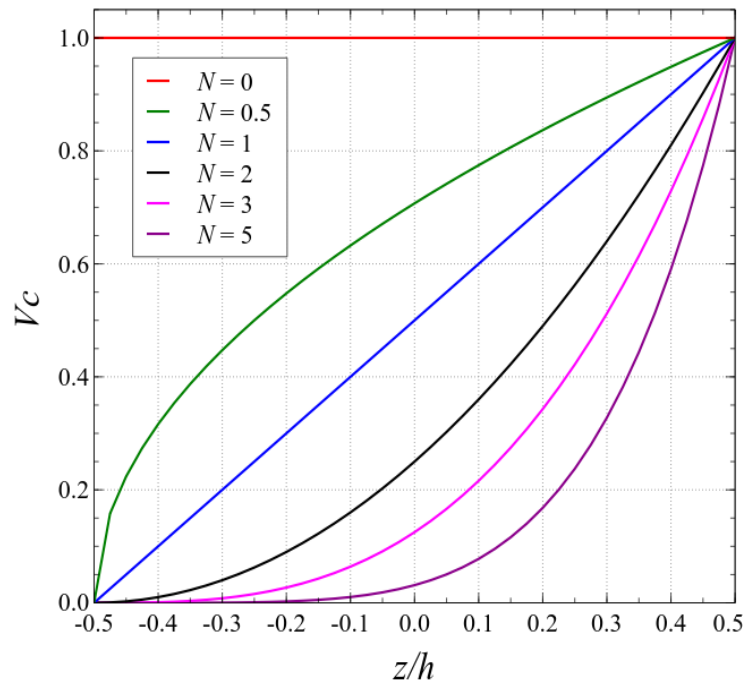
Material	$P_{-1}$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	E [Pa] (300 K)	$\nu$
Metal - SUS304	0	201.04e9	3.079e-4	-6.534e-7	0	2.060e11	0.3
Cerâmica - Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	0	348.43e9	-3.07e-4	2.16e-7	-8.946e11	3.229e11	0.3

Fonte: Adaptado de Bateni et al. (2013).

A variação da fração de volume é ilustrada na Figura 43, sendo expressa como

$$V_c = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N \quad \text{e} \quad V_m = 1 - V_c \quad (110)$$

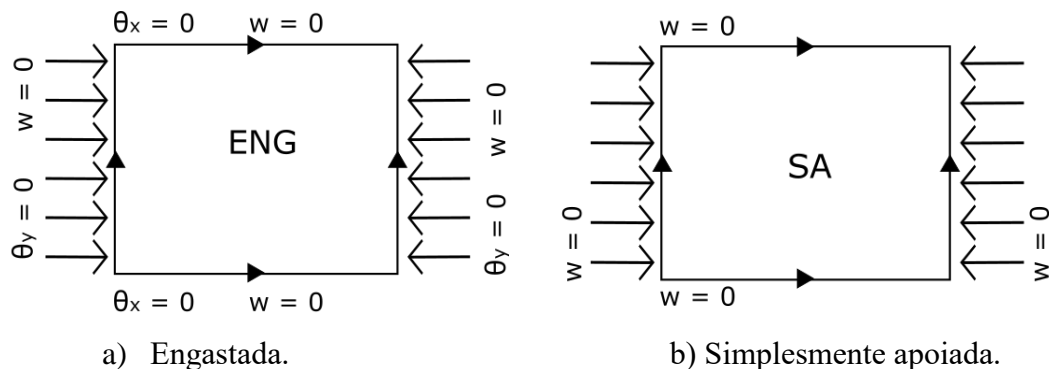
Figura 43 – Fração de volume ao longo da espessura.



Fonte: Elaborado pela Autora.

A carga é aplicada na direção  $x$ . No caso SA, todos os lados estão fixados na direção  $z$ . Os nós no ponto médio dos lados carregados e transversais são fixados nas direções  $y$  e  $x$ , respectivamente. Além disso, no caso ENG, as rotações em torno dos eixos  $y$  e  $x$  são fixadas. Estas condições de apoio estão ilustradas na Figura 44. O modelo AIG utilizado na análise das placas MGF possui  $8 \times 8$  elementos no um quarto com funções de base cúbica ( $p = 3$ ).

Figura 44 – Condições de apoio.



Fonte: Elaborada pela autora.

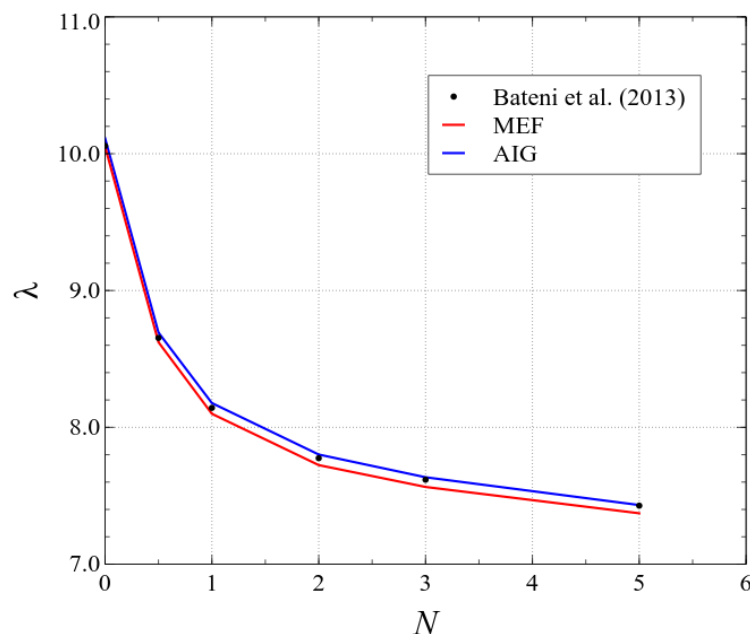
Os resultados são comparados com a solução MEF obtida usando o software Abaqus. Como o Abaqus não possui MGF nas opções de materiais, as matrizes de rigidez  $A$ ,  $B$ ,

D e G foram avaliadas em uma rotina externa e fornecidas como dados de entrada. A análise foi realizada usando uma malha  $16 \times 16$  de elementos S8R quadráticos.

Diversos estudos sobre a influência das condições de contorno em placas de MGF foram apresentados na literatura. Estes trabalhos mostraram a inexistência de flambagem de bifurcação em placas simplesmente apoiadas sujeitas a cargas de compressão no plano, como também ocorre para placas laminadas não simétricas, vários autores tinham apresentados estudos equivocados sobre isso. Portanto, apenas o caso engastado foi considerado na análise de bifurcação (flambagem linearizada), uma vez que placas com todas as bordas engastadas exibem flambagem de bifurcação (SHEN, 2008). As integrações neste caso foram feitas com  $R_{MEF}$ , devido a sua modelagem no FAST, a placa foi analisada completa, porém o input foi de um quarto, sendo esse rotacionado três vezes, o que dificultou adotar a  $R_{AIG}$  neste caso.

Os resultados obtidos na Figura 45, onde o coeficiente de flambagem normalizado é definido como  $\lambda = N_c a^2 / \pi^2 D_0$  onde  $D_0 = E_c h^3 / 12(1 - \nu^2)$ . Os resultados são satisfatórios entre AIG e MEF e mostram que a carga de flambagem diminui com o aumento do expoente da fração de volume ( $N$ ), ou seja, com a inclusão de mais metal na cerâmica para temperatura de 300K. Isto ocorre porque o módulo de elasticidade da cerâmica é superior ao do metal.

Figura 45 – Carga de flambagem de placas engastadas para diferentes expoentes  $N$ .



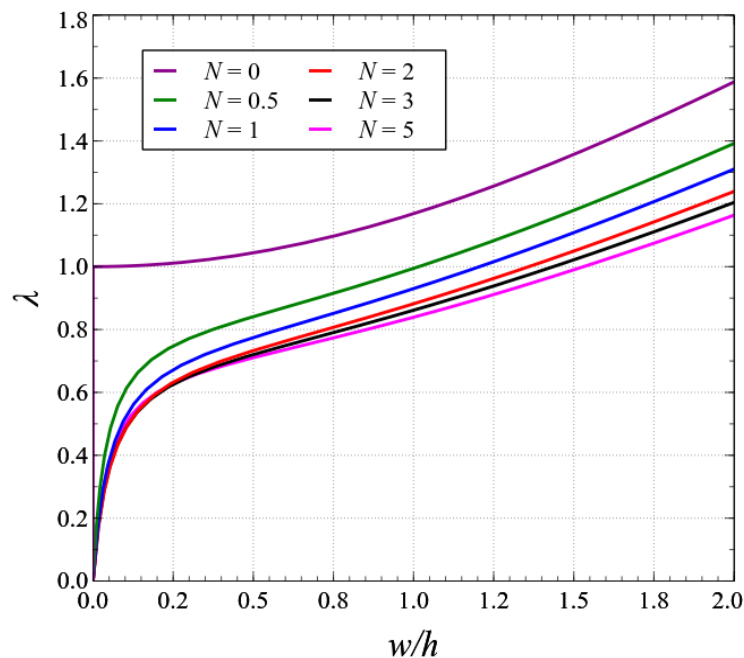
Fonte: Elaborado pela autora.

A formulação AIG proposta é usada para análise geometricamente não linear de placas MGF. Os resultados obtidos para placas simplesmente apoiadas são apresentados na

Figura 46. O fator de carga é normalizado como  $\lambda = N_{cr}/N_c$ , onde  $N_c$  é a carga de flambagem da placa com seção cerâmica homogênea ( $N = 0$ ).

Os resultados mostram que a flambagem da bifurcação ocorre apenas para  $N = 0$  (placa isotrópica), uma vez que  $N > 0$  resulta em uma distribuição de rigidez não simétrica ( $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ ), fazendo com que apareçam deflexões transversais mesmo quando a placa está submetida apenas a cargas no plano. Assim, as placas MGF apresentam caminhos de equilíbrio estáveis, semelhantes ao comportamento de placas imperfeitas. Além disso, os resultados mostram que aumentar o expoente da fração volumétrica ( $N$ ) diminui a resistência da placa.

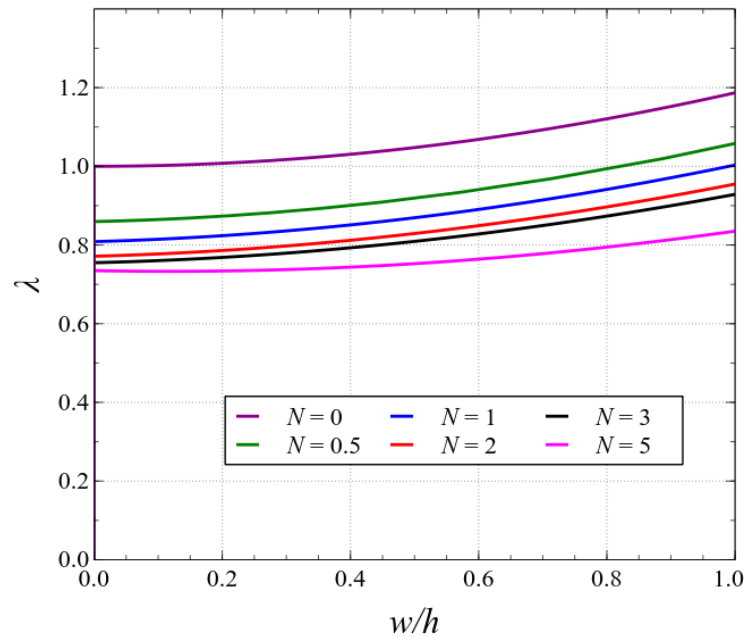
Figura 46 – Placa simplesmente apoiada com diferentes expoentes  $N$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Os resultados obtidos para as placas engastadas são apresentados na Figura 47. Os resultados mostram que as placas MGF engastadas apresentam flambagem por bifurcação, ao contrário das simplesmente apoiadas. Além disso, aumentar o  $N$  não apenas diminui a carga de flambagem, mas também diminui a reserva de força pós-crítica das placas MGF, levando a um comportamento pós-flambagem caracterizado por pequena sensibilidade às imperfeições. Os resultados indicam que a sensibilidade às imperfeições aumenta com o expoente da fração de volume ( $N$ ).

Figura 47 – Placa engastada com diferentes expoentes  $N$ .

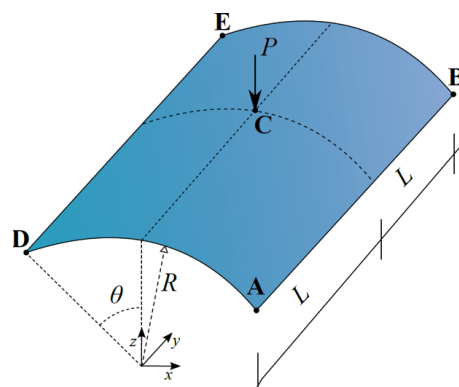


Fonte: Elaborada pela autora.

### 6.3 Casca Abatida

Este exemplo aborda a análise não linear de uma casca cilíndrica abatida submetida a uma carga concentrada no centro, como mostrado na Figura 48. Esta casca foi analisada inicialmente por Sabir e Lock (1972) e depois por vários autores, incluindo Sze et al. (2004), cujo trabalho que apresenta vários *benchmarks* de análise não linear de cascas.

Figura 48 – Casca cilíndrica sujeita a uma carga concentrada.



Fonte: Barros (2016).

Os parâmetros geométricos da estrutura são  $R = 2540$ ,  $\theta = 0.1$  rad,  $L = 254$ . No trabalho de referência (Sze et al., 2004) não foram definidas unidades, como também será

considerado neste trabalho. A estrutura é simplesmente apoiada ( $u = w = 0$ ) em AB e DE e livre em AD e BE. As propriedades do material isotrópico são  $E = 3102.75$  e  $\nu = 0.3$ . As propriedades do material compósito são apresentadas na Tabela 5. Vale ressaltar que as fibras na direção  $0^\circ$  são paralelas ao eixo  $y$ .

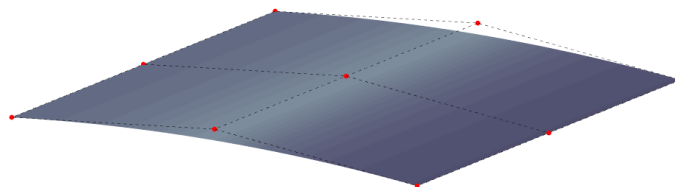
Tabela 6 – Propriedades do material compósito.

$E_1$	$E_2$	$\nu_{12}$	$G_{12} = G_{13}$	$G_{23}$
300	1100	0.25	660	440

Fonte: Elaborada pela autora.

Sze et al. (2004) consideraram a simetria e apenas um quarto da estrutura foi modelada usando o MEF, por outro lado, a simetria não foi usada aqui e toda a casca foi modelada usando a AIG. Todas as malhas são obtidas por refinamento  $k$  sobre um modelo quadrático inicial com um elemento (Figura 49). Devido ao uso de NURBS, a geometria da casca é representada exatamente mesmo utilizando apenas um elemento quadrático.

Figura 49 – Modelo inicial NURBS quadrático com 9 pontos de controle e 1 elemento.



Fonte: Elaborado pela autora.

Várias análises foram realizadas considerando cascas isotrópicas e laminadas com  $h = 6.35$  e  $h = 12.7$  e os resultados são apresentados na Figura 50, onde  $\lambda = N/N_{cr}$ . Diferentemente das placas estudadas nos exemplos anteriores, estas cascas perdem estabilidade por ponto limite, de acordo com Sze et al. (2004), e apresentam caminhos de equilíbrio complexos, com fenômenos de *snap-through* e *snap-back*.

A Figura 50a apresenta resultados da AIG para funções de base cúbicas com malhas  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  e  $32 \times 32$ , enquanto a Figura 50b apresenta resultados obtidos usando um modelo com malha  $16 \times 16$  e aproximação quadrática, cúbica e quártica. Integrações completas (Comp) e reduzidas ( $R_{AIG}$ ) foram consideradas. Os resultados com elementos cúbicos e quárticos considerando os dois esquemas de integração são quase idênticos aos resultados de Sze et al. (2004). Por outro lado, a aproximação quadrática com  $R_{AIG}$  produz melhores resultados do que

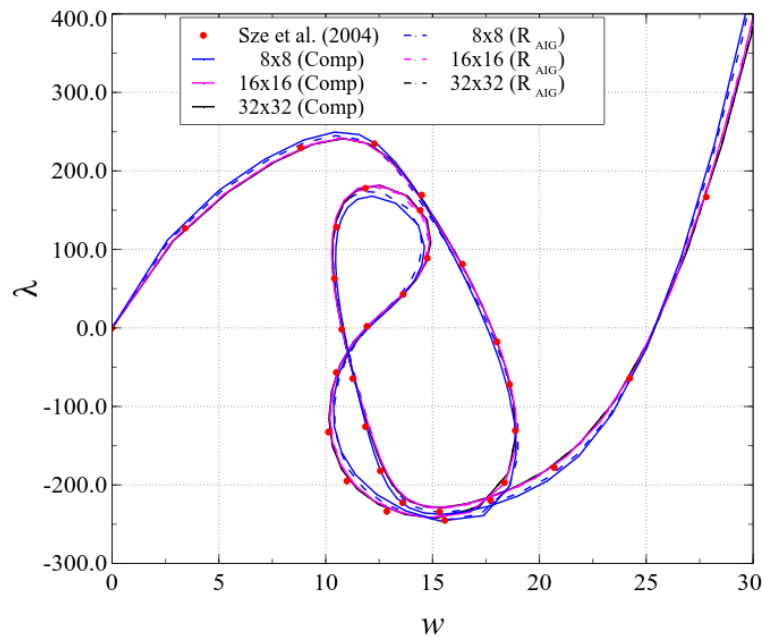


aqueles com integração completa, devido ao travamento da formulação AIG com integração completa e funções de base de baixa ordem.

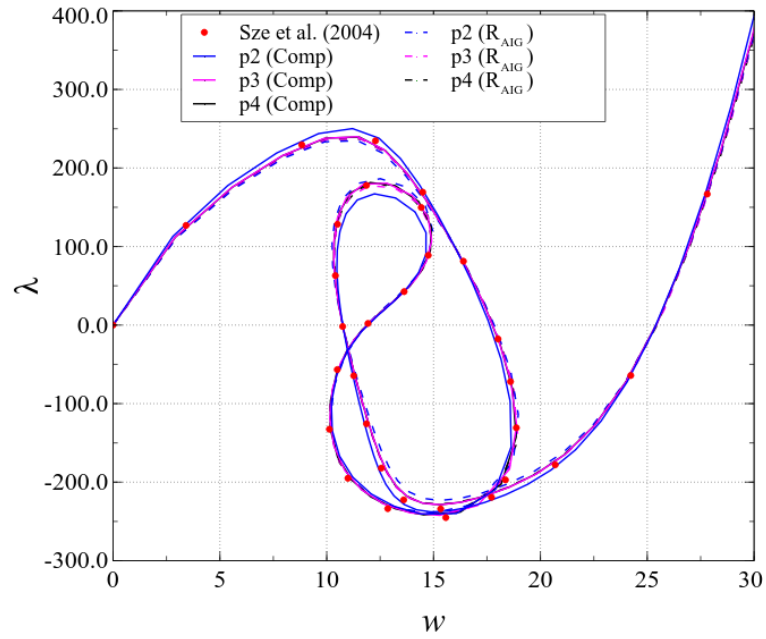
Na Figura 50c e a Figura 50d foram utilizadas apenas bases cúbicas e integração  $R_{AIG}$ . A Figura 50c mostra resultados para malhas  $16 \times 16$  e  $32 \times 32$ , onde a diferença é perceptível apenas quando a razão  $w/h$  é muito grande ( $w/h > 30$ ).

A Figura 50d apresenta os resultados obtidos para a espessura  $h = 12.7$ , que são muito próximos aos resultados de Sze et al. (2004). É interessante notar que a casca mais espessa apresenta um comportamento não linear mais simples, caracterizado pela presença de apenas um ponto limite. A casca mais fina apresenta comportamentos pós-críticos mais complexos caracterizados por *snap-through*, *snap-back* e *loops* (Figura 50a, b e c).

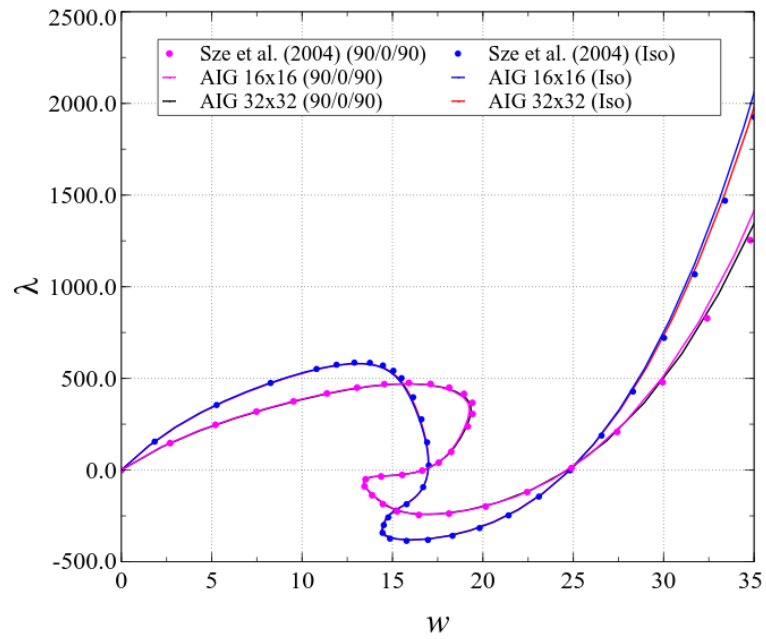
Figura 50 – Curvas carga-deslocamento das cascas isotrópicas e laminadas.



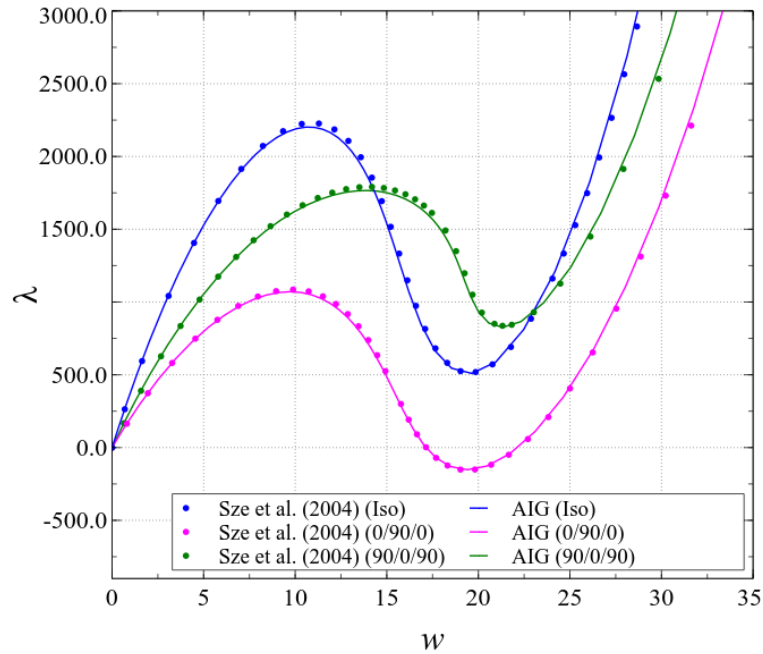
a)  $[0/90/0]$  com  $h = 6.35$  e refinamento  $h$ .



b)  $[0/90/0]$  com  $h = 6.35$  e refinamento  $k$ .



c)  $[90/0/90]$  e modelo isotrópico com  $h = 6.35$  e refinamento  $h$ .

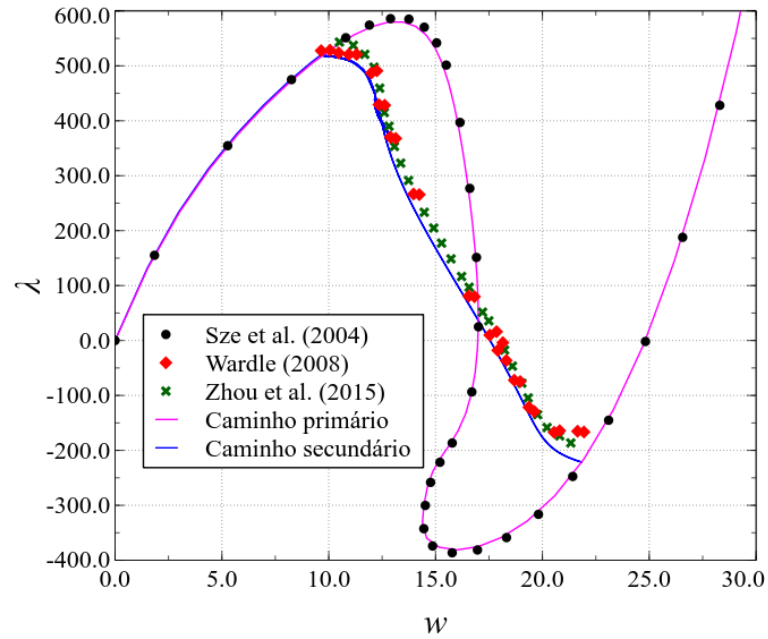
d)  $h = 12.7$  com malha  $16 \times 16$ .

Fonte: Elaborado pela autora.

Desde Sabir e Lock (1972) esta casca foi utilizada por diversos autores como *benchmark* de análise não linear de casca, sempre considerando apenas o caminho primário. Contudo, Wardle (2008) verificou a existência de uma bifurcação no caminho de equilíbrio desta estrutura, que ocorre antes do ponto limite obtido na solução de referência. Este resultado foi confirmado por Zhou et al. (2015).

A fim determinar o caminho secundário, o método do comprimento de arco foi combinado com o procedimento de determinação de pontos críticos e troca de caminho (*branch-switching*) descrito no Item 5.4 e aplicado a esta casca modelada com  $p = 3$  e uma malha de  $16 \times 16$ . Os resultados obtidos pela AIG são apresentados na Figura 51, verificando que a perda de estabilidade desta casca realmente se dá por bifurcação em uma carga 11.43% abaixo do ponto limite da solução de Sze et al. (2004), que está, aproximadamente, em  $\lambda = 585.90$ . Segundo Wardle (2008), a solução sofre bifurcação por volta de  $\lambda = 510$ , porém a carga no caminho secundário ainda aumenta até aproximadamente  $\lambda = 520$  (ponto limite) e depois começa a cair. No FAST, usando integração  $R_{AIG}$ , o novo caminho foi obtido em  $\lambda = 518.96$  (Figura 51).

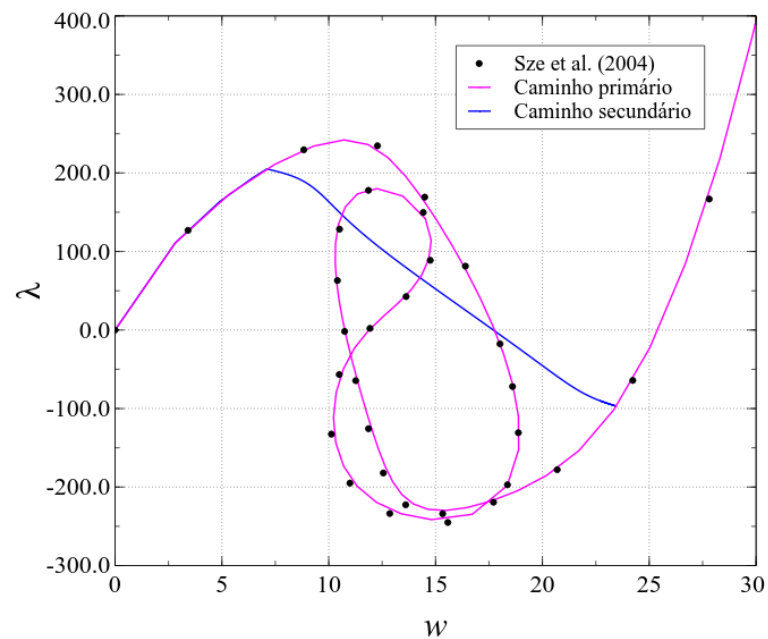
Figura 51 – Caminho de equilíbrio com bifurcação  $h = 6.35$ .



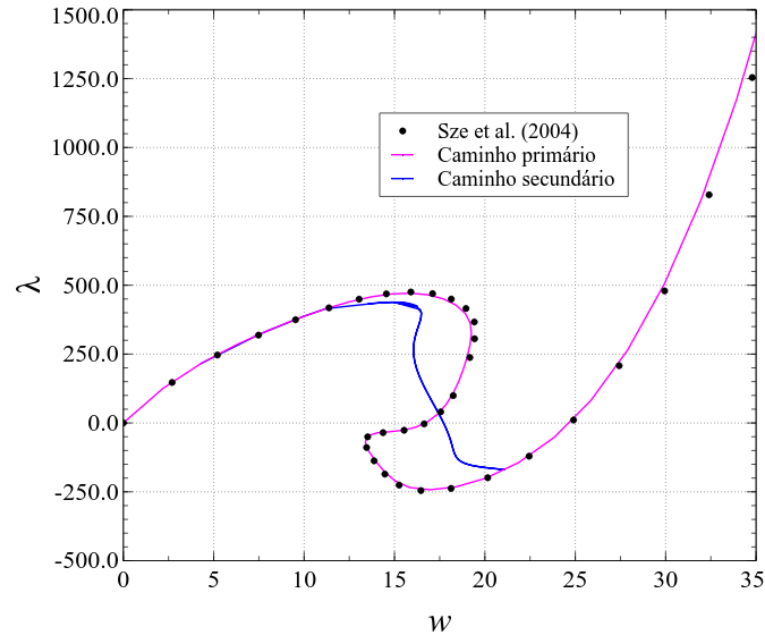
Fonte: Elaborado pela autora.

Além disso, as cascas laminadas (Figura 52) apresentam um comportamento similar com a bifurcação em um nível de carga inferior ao primeiro ponto limite. Portanto, as cascas laminadas também apresentam uma capacidade de carga menor do que a solução clássica de *benchmark* apresentada na literatura (Sze et al., 2004).

Figura 52 – Caminhos de equilíbrio primário e secundário com bifurcação  $h = 6.35$ .



a) [0/90/0]



b) [90/0/90]

Fonte: Elaborado pela autora.

#### 6.4 Casca de material com gradação funcional

A casca cilíndrica considerada anteriormente foi analisada considerando um MGF. Na Tabela 7 estão listadas as propriedades do metal e da cerâmica adotados por Mars et al. (2017). A espessura foi tomada como  $h = 12.7$ , corresponde à estrutura mais espessa do exemplo anterior. A casca foi analisada pela AIG com malha  $16 \times 16$  e  $p = 3$ .

Tabela 7 – Propriedades do material MGF.

$E_m$ (GPa)	$\nu_m$	$E_c$ (GPa)	$\nu_c$	$a$	$b$	$c$
70	0.3	168	0.3	1.0	0.5	2.0

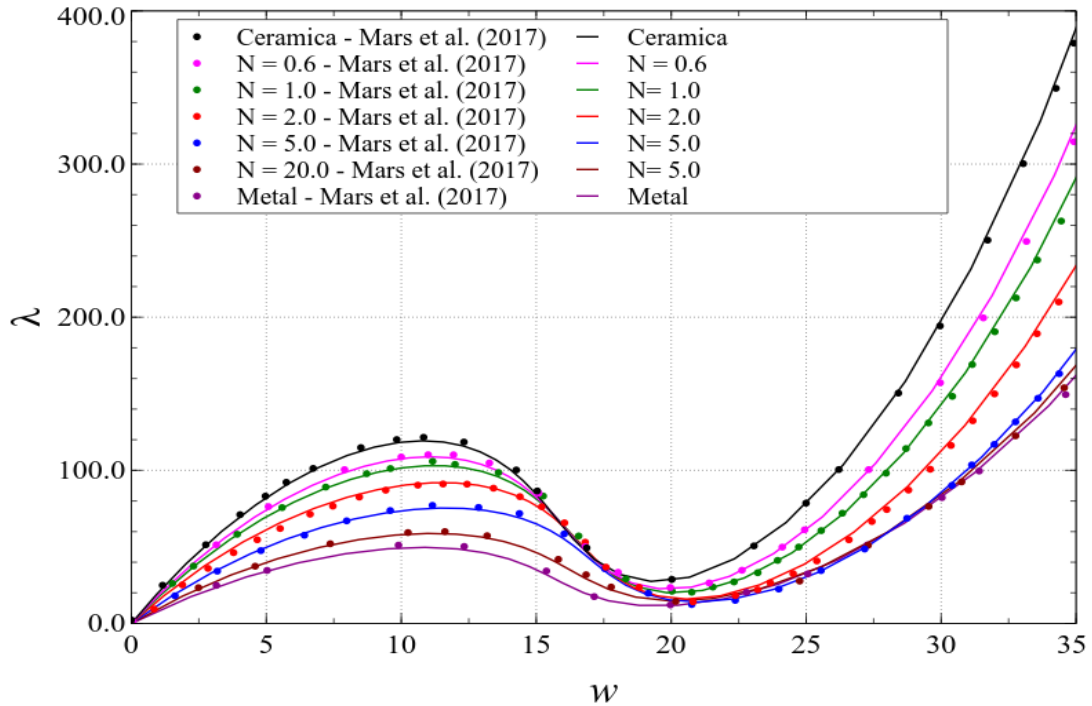
Fonte: Elaborada pela autora.

Para efeito de comparação, adotou-se os mesmos valores da fração de volume e a *power-law* de Mars et al. (2017), que fizeram suas análises com MEF, usando o elemento de casca S4 no ABAQUS. Foi adotada uma fração de volume para a cerâmica, segundo a Equação (5) e as propriedades dadas pela Equação (6).

Os valores do expoente  $N$  foram variados, mostrando que os resultados da mistura se apresentam entre o material totalmente cerâmico, quando  $N \rightarrow 0$  e tem maior rigidez, e totalmente metálico, com  $N \rightarrow \infty$  e menos rígido (Figura 53). Contudo, a forma geral das curvas

carga-deslocamento é a mesma para todos os expoentes considerados. É importante destacar que os resultados obtidos neste trabalho são muito próximos dos resultados de Mars et al. (2017), validando a implementação dos MGF no FAST.

Figura 53 – Gráfico carga  $\times$  deslocamento de casca abatida com  $h = 12.7\text{mm}$  ( $\lambda = N/N_{cr} \times 1000$ ).



Fonte: Elaborado pela autora.

Frikha e Dammark (2017) analisaram esse mesmo exemplo, usando alumínio como o metal e zircônia como a cerâmica, chegando a resultados similares, onde os painéis intermediários entre a cerâmica e o metal apresentaram propriedades intermediárias de cargas e deflexões. Arciniega e Reddy (2006) e Payette e Reddy (2014) também trazem estudos de cascas, incluindo esse exemplo com MGF, onde os resultados obtidos dos MGF têm propriedades intermediárias entre seus componentes de origem.

## 7 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma formulação isogeométrica baseada em NURBS para análise não linear geométrica de placas e cascas abatidas de materiais compósitos laminados e materiais com gradação funcional, baseadas nas teorias de Reissner-Mindlin e Marguerre. Essa abordagem permite a representação exata de geometrias curvas e uma fácil aplicação dos refinamentos  $h$ ,  $p$  e  $k$ . A formulação permite o estudo de placas imperfeitas considerando-as como cascas abatidas.

A formulação proposta foi utilizada com sucesso na análise de estabilidade de estruturas com comportamento não linear complexo. Foi realizado um estudo da influência do travamento sobre a precisão dos resultados da estabilidade e análise não linear de placas e cascas abatidas, com foco na consideração diferentes esquemas de integração numérica.

Nas placas laminadas, verificou-se que a formulação apresenta uma convergência mais rápida para os laminados *cross-ply* e o caso isotrópico, exigindo malhas menos refinadas do que os laminados *angle-ply*. Placas *angle-ply* submetidas a cargas biaxiais apresentam uma carga de flambagem mais alta do que *cross-ply* com a mesma espessura.

Os resultados também mostraram que o comportamento não linear de placas laminadas é fortemente influenciado não apenas pelo esquema de laminação (*layup*), mas também pela espessura de cada lâmina. Assim, as placas de *cross-ply* exibem um enrijecimento pós-flambagem muito mais alto do que as *angle-ply*, independentemente do número de camadas. De forma geral, o estudo de placas perfeitas e imperfeitas com laminação simétrica mostrou estas estruturas apresentam comportamento típico de bifurcação simétrica estável com pouca sensibilidade às imperfeições iniciais.

Quanto ao travamento, os resultados obtidos mostram que o uso de funções de base de ordem superior alivia, mas não elimina, o travamento quando a abordagem isogeométrica é utilizada na análise de estabilidade de placas e cascas abatidas. No entanto, o travamento pode ser facilmente eliminado usando o esquema de integração adequadamente reduzido para a abordagem IGA baseada em NURBS. É importante observar que o uso desse esquema de integração reduzida melhora não apenas a precisão, mas também a eficiência computacional da formulação proposta. Portanto, este esquema de integração é recomendado para o caso de geometrias regulares. Contudo, mais estudos são necessários no caso de geometrias complexas.

As placas de material com gradação funcional apresentam redução da carga de flambagem quando o expoente  $N$  aumenta, isto é, quando a quantidade de metal aumenta na

cerâmica, pois possui módulos de elasticidade menor e sua inclusão deixa a placa menos rígida. Esse fenômeno também é observado no comportamento pós-crítico.

No que diz respeito à condição de apoio, confirmou-se que placas de material com gradação funcional simplesmente apoiadas não apresentam bifurcação e o caminho de equilíbrio se comporta de maneira semelhante como se a placa possuísse uma imperfeição inicial. Por outro lado, placas engastadas perdem estabilidade por bifurcação mesmo quando constituídas de material com gradação funcional, apresentando carga de flambagem e reserva pós crítica menores com o aumento do expoente  $N$ .

A formulação isogeométrica apresentou excelentes resultados no caso da casca cilíndrica, tanto para materiais isotrópicos quanto compósitos laminados, quando comparados com as soluções disponíveis na literatura. Os resultados obtidos neste trabalho também confirmaram a existência de um segundo caminho de equilíbrio, correspondente a uma bifurcação antes do ponto limite obtido pela solução clássica deste *benchmark*.

Também foram obtidos excelentes resultados no caso de materiais com gradação funcional, com os caminhos de equilíbrio para diferentes expoentes  $N$  estando entre o valor da cerâmica (máximo) e do metal (mínimo).

A obtenção do comportamento geometricamente não linear correto de placas de material com gradação funcional com diferentes condições de contorno e a detecção da bifurcação e traçado do caminho secundário da casca cilíndrica foram possíveis devido à combinação do Método do Comprimento de Arco com as técnicas automáticas de cálculo de pontos críticos e mudança de caminho (*branch-switching*) utilizadas neste trabalho. Esta estratégia evita erros cometidos em outros trabalhos onde o tipo de comportamento da estrutura (com ou sem bifurcação) foi adotado a priori pelos autores, levando a soluções inadequadas.

## 7.1 Sugestões para trabalhos futuros

A AIG é uma área nova e ainda demanda muitos estudos até chegar em um grau de maturidade do MEF, embora venha sendo bastante explorada atualmente. Novos esquemas de integração e o estudo de estruturas curvas e com furos, explorando a capacidade de modelar exatamente a geometria da estrutura, por exemplo, são bons temas a serem estudados.

Quanto aos materiais com gradação funcional há uma infinidade de combinações possíveis para as frações de volume, podendo ser feito um estudo de otimização da mistura. A inclusão de formas mais refinadas para determinar as propriedades destes materiais, baseadas



em método micromecânicos, poderiam ser estudadas visando obter os resultados mais representativos com a situação real.

## REFERÊNCIAS

- ADAM, C.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H. Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I: Beams. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 279, p. 1-28, 2014.
- ADAM, C.; HUGHES, T. J. R.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H. Selective and reduced numerical integrations for NURBS-based isogeometric analysis. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 732-761, 2015.
- ADAM, C.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H. Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part II: Plates and shells. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 106-137, 2015b.
- ARCINIEGA, R. A.; REDDY, J. N. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 1048-1073, 2006.
- BARBERO, E. J. **Introduction to Composite Materials Design**. 2nd ed. CRC Press, 2011.
- BARROS, P. S. B. **Abordagem isométrica para o estudo da estabilidade de compósitos laminados considerando falha progressiva**. 2016. 141 f. Dissertação (Mestrado). Engenharia Civil em Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2016.
- BARROSO, E. S. **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isométrica**. 2015. 161 f. Dissertação (Mestrado). Engenharia Civil em Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2015.
- BATENI, M.; KIANI, Y.; ESLAMI, M. R. A comprehensive study on stability of FGM plates. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 75, p. 134-144, 2013.
- BENSON, D. J.; HARTMANN, S.; BAZILEVS, Y.; HSU, M. C.; HUGHES, T. J. R. Blended isogeometric shells. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 255, p. 133-146, 2013.
- BERNARDO, G. M. S.; DAMÁSIO, F. R.; SILVA, T. A. N.; LOJA, M. A. R. A study on the structural behaviour of FGM plates static and free vibrations analyses. **Composite Structures**, v. 136, p. 124-138, 2016.
- BIRMAN, V.; BYRD, L. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures. **Applied Mechanics Reviews**, v. 60, p. 195-216, 2007.
- BOUCLIER, R.; ELGUEDJ, T.; COMBESCURE, A. Locking free isogeometric formulations of curved thick beams. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 245-246, p. 144-162, 2012.

CASQUERO, H.; LIU, L.; ZHANG, Y.; REALI, A.; KIENDL, J.; GOMEZ, H. Arbitrary-degree T-splines for isogeometric analysis of fully nonlinear Kirchhoff–Love shells. **Computer-Aided Design**, v. 82, p. 140-153, 2017.

CHEN, H.; WANG, A.; HAO, Y.; ZHANG, W. Free vibration of FGM sandwich doubly-curved shallow shell based on a new shear deformation theory with stretching effects. **Composite Structures**, v. 179, p. 50-60, 2017.

CHI, S. H.; CHUNG, Y. L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load – Part I: Analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, p. 3657-3674, 2006.

CHI, S. H.; CHUNG, Y. L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load – Part II: Numerical results. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, p. 3657-3674, 2006b.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th ed. John Wiley & Sons, 2002.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**. John Wiley & Sons Ltd, 2009.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures – volume 1: Essentials**, 1a. ed., John Wiley & Sons, 1991.

D'AGUIAR, S. C. M. **Estabilidade de Colunas de Material Compósito Reforçado por Fibras**. 2017. 121 f. Dissertação (Mestrado) – Engenharia Civil em Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2017.

DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials**, 1a ed., New York: Oxford University Press, 1994.

DANTAS JÚNIOR, E. M. **Análise Não Linear de Compósitos Laminados Utilizando o Método dos Elementos Finitos**. 2014. 121 f. Dissertação (Mestrado) – Engenharia Civil em Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2014.

DENG, X.; KOROBENKO, A.; YAN, J.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis of continuum damage in rotation-free composite shells. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 349-372, 2015.

DORNISCH, W.; KLINKEL, S.; SIMEON, B. Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 253, p. 491-504, 2013.

DYM, C. L. **Stability Theory and Its Applications to Structural Mechanics**. Dover Publications, 2002.

ECHTER, R.; BISCHOFF, M. Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, p. 374-382, 2010.

FRIKHA, A.; DAMMARK, F. Geometrically non-linear static analysis of functionally graded material shells with a discrete double directors shell element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 315, p. 1-24, 2017.

GHUGAL, Y. M.; SHIMPI, R. P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 20, p. 252-272, 2001.

HIRAI, T.; CHEN, L. Recent and prospective development of Functionally Graded Materials in Japan. **Materials Science Forum**, v. 308-311, p. 509-514, 1999.

HU, P.; HU, Q.; XIA, Y. Order reduction method for locking free isogeometric analysis of Timoshenko beams. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 308, p. 1-22, 2016.

HUGHES, T.; COTTRELL, J.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135-4195, 2005.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2a.ed. Taylor & Francis, 1999.

KIEBACK, B.; NEUBRAND, A.; RIEDEL, H. Processing techniques for functionally graded materials. **Materials Science and Engineering**, v. A362, p. 81-105, 2003.

KIENDL, J.; HSU, M.; WU, M. C. H.; REALI, A. Isogeometric Kirchhoff–Love shell formulations for general hyperelastic materials. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 291, p. 280-303, 2015.

KOIZUMI, M. FGM activities in Japan. **Composites Part B**, v. 28B, p. 1-4, 1997.

LEE, Y. D.; ERGODAN, F. Residual/thermal stresses in FGM and laminated thermal barrier coatings. **International Journal of Fracture**, v. 69, p. 145-165, 1995.

LE-MANH, T.; LEE, J. Postbuckling of laminated composite plates using NURBS-based isogeometric analysis. **Composite Structures**, v. 109, p. 286-293, 2014.

LEI, Z. X.; ZHANG, L. W.; LIEW, K. M. Buckling analysis of CNT reinforced functionally graded laminated composite plates. **Composite Structures**, v. 152, p. 62-73, 2016.

LIEW, K. M.; WANG, J.; TAN, M. J., RAJENDRAN, S. Postbuckling analysis of laminated composite plates using the mesh-free kp-Ritz method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 551-570, 2006.

SABIR, A.B.; LOCK, A.C. The application of finite elements to the large deflection geometrically nonlinear behaviour of cylindrical shells. C. A. Brebbia, H. Tottenham (Eds.), **Variational Methods in Engineering**, Southampton Press, Southampton, p. 67-76, 1972.

LYLY, M.; STENBERG, R.; VIHINEN, T. A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 110, p. 343-357, 1993.

MARS, J., KOUBAA, S., WALL, M., DAMMARK, F. Numerical Analysis of Geometrically Non-Linear Behavior of Functionally Graded Shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, p. 1952-1978, 2017.

MACÍAS, E. G., TEMBLEQUE, L. R., TRIGUERO, R. C., SÁEZ, A. Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced curved panels under axial compression and shear. **Composites Part B**, v. 108, p. 243-256, 2017.

MACÍAS, E. G., TEMBLEQUE, L. R., TRIGUERO, R. C., SÁEZ, A. Eshelby-Mori-Tanaka approach for post-buckling analysis of axially compressed functionally graded CNT/polymer composite cylindrical panels. **Composites Part B**, v. 128, p. 208-224, 2017b.

MERCAN, K., BALTACIOGLU, A. K.; CIVALEK, O. Free vibration of laminated and FGM/CNT composites annular thick plates with shear deformation by discrete singular convolution method. **Composite Structures**, v. 186, p. 139-153, 2018.

MIYAMOTO, Y.; KAYSSER, W. A.; RABIN, B. H.; KAWASAKI, A.; FORD, R. G. **Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications**. New York: Springer Science+Business Media, 1999.

MORORÓ, L. A. T. **Análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina**. 2014. 151 f. Dissertação (Mestrado) – Engenharia Civil em Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2014.

NAEBE, M.; SHIRVANIMOGHADDAM, K.; Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. **Applied Materials Today**, v. 5, p. 223-245, 2016.

NGUYEN-THANH, N.; KIENDL, J.; NGUYEN-XUAN, H.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, KU U.; BAZILEVS, Y.; RABCZUK, T. Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 3410-3424, 2011.

NGUYEN-THANH, N.; VALIZADEH, N.; NGUYEN, M. N.; NGUYEN-XUAN, H.; ZHUANG, X.; AREIAS, P.; ZI, G.; BAZILEVS, Y.; LORENZIS, L.; RABCZUK, T. An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff-Love theory. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 265-291, 2015.

OESTERLE, B.; RAMM, E.; BISCHOFF, M. A shear deformable, rotation-free isogeometric shell formulation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 307, p. 235-255, 2016.

PARENTE, E.; HOLANDA, A. S.; SILVA, S. M. B. A. Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. **Computational Mechanics**, v. 38, p. 505-520, 2006.

PARENTE, E. SOUSA, J. B. M. **Análise Não Linear de Estruturas - Notas de aula**, 2014.

PAYETTE, G. S.; REDDY, J. N. A seven-parameter spectral/*hp* finite element formulation for isotropic, laminated composite and functionally graded shell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 278, p. 664-704, 2014.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. 2nd ed. Germany: Springer, 1997.

RANK, E.; KRAUSE, R.; PREUSCH, K. On the accuracy of p-version elements for the Reissner Mindlin plate problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 43, p. 51-67, 1998.

REDDY, J. N. Analysis of functionally graded plates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 47, p. 663-684, 2000.

REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis**. 2nd. ed. CRC Press, 2004.

ROCHA, I. B. C. M. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando análise não linear geométrica e falha progressiva**. 2013. 159 f. Dissertação (Mestrado) – Engenharia Civil em Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2013.

SILVA, R. F. **Otimização de de Risers de materiais compósitos**. 2012. 96 f. Dissertação (Mestrado) – Engenharia Civil em Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2012.

SIMULIA. **ABAQUS/Standard user's manual**. Version 6.12, Providence, RI, USA, 2012.

SHIOTA, I.; MIYAMOTO, Y. **Functionally Graded Materials 1996**. 1st ed., Países Baixos: Elsevier Science, 1997.

SHEN, H.S. **Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells**. Boca Raton: CRC Press, 2009.

SHEN, H.S.; LI, S. R. Postbuckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties. **Composites Part B**, v. 39, p. 332-344, 2008.

SU, Z.; JIN, G.; SHI, S.; YE, T.; JIA, X. A unified solution for vibration analysis of functionally graded cylindrical, conical shells and annular plates with general boundary conditions. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 80, p. 62-80, 2014.

SUNDARESAN, P.; SINGH, G.; RAO, G. V. Buckling and postbuckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates. **Computers & Structures**, v. 61, p. 79-86, 1996.

SZE, K. Y.; LIU, H. X.; LO, S. H. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. **Finite Element Analysis and Design**, v. 40, p. 1551-1569, 2004.

SWAMINATHAN, K.; NAVEENKUMAR, D. T.; ZENKOUR, A. M.; CARRERA, E. Stress, vibration and buckling analysis of FGM plates – A state-of-the-art review. **Composite Structures**, v. 120, p. 10-31, 2015.

TEÓFILO, F. A. F. **Análise e projeto de risers compósitos em catenária**. 2010. 155 f. Dissertação (Mestrado) – Engenharia Civil em Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2010.

THAI, C. H.; NGUYEN-XUAN, H.; NGUYEN-THANH, N.; LE, T-H.; NGUYEN-THOI, T.; RABCZUK, T. Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner–Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 91, p. 571-603, 2012.

TRAN, L. V.; FERREIRA, A. J. M.; NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory. **Composites: Part B**, v. 51, p. 368-383, 2013.

WALL, W. A.; FRENZEL, M. A.; CYRON, C. Isogeometric structural shape optimization. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 2976-2988, 2008.

WARDLE, B. L. Solution to the Incorrect Benchmark Shell-Buckling Problem. **AIAA Journal**, v. 46, n. 2, p. 381-387, 2008.

WESSEL, J. K. **The Handbook of Advanced Materials**. John Wiley & Sons, Nova York, 2004.

WRIGGERS, P.; SIMO, J. C. A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, p. 155-176, 1990.

WRIGGERS, P.; WAGNER, W.; MIEHE, C. A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 70, p. 329-347, 1988.

ZENKOUR, A. M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1—Deflection and stresses. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, p. 5224-5242, 2005.

ZENKOUR, A. M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, p. 5243-5258, 2005b.

ZHAO, X.; LEE, Y. Y.; LIEW, K. M. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 90, p. 161-171, 2009.

ZHOU, Y.; STANCIULESCU, I.; EASON, T.; SPOTTSWOOD, M. Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 96, p. 41-50, 2015.