UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANDERSON DOUGLAS FREITAS PEDROSA

POTÊNCIAS DO SENO: DO PRODUTO DE WALLIS AO COMPRIMENTO DA ELIPSE

FORTALEZA

2018

ANDERSON DOUGLAS FREITAS PEDROSA

POTÊNCIAS DO SENO: DO PRODUTO DE WALLIS AO COMPRIMENTO DA ELIPSE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P414p Pedrosa, Anderson Douglas Freitas.
Potências do seno: do produto de Wallis ao comprimento da elipse / Anderson Douglas Freitas Pedrosa. – 2018.
44 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Cálculo diferencial e integral. 2. John Wallis. 3. Produto infinito de Wallis. 4. Comprimento da elipse. I. Título.

CDD 510

Anderson Douglas Freitas Pedrosa

Potências do Seno: do Produto de Wallis ao Comprimento da Elipse

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduacão em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtencão do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 23/07/2018.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará - UFC

Ao criador, toda honra e toda graça.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por sua imensa bondade de sempre guiar meus caminhos.

Aos meus amados pais, Carlos Augusto e Ila Maria por todos os esforços, cuidados a mim despendidos.

À minha amada esposa Alana Godinho, pelas palavras de incentivo, pela paciência nas minha ausências e por ter provado que me ama também na doença, sem ela não teria conseguido chegar até aqui.

Aos amigos que fiz no PROFMAT-UFC, Antonio Junior, Clairto Ferreira, Edney Gregório e em especial a quem tenho muita admiração Luiz Augustavo Almeida Feitoza pelas várias horas de estudo e por ter me ajudado na formação em Latex.

À todos os professores do mestrado profissional e em especial ao meu orientador Marcelo Ferreira de Melo pela tranquilidade que conduziu nosso trabalho.

À todos os professores de matemática que tive desde a tenra idade, guardo todos com carinho na memória.

Meu obrigado a todos.

“Há vários caminhos até a montanha, todos levando para o mesmo lugar, de modo que não importa o caminho que você vai tomar. O único perdendo tempo é aquele que corre ao redor da montanha, apontando a todos que o caminho deste ou desta pessoa é errado” (PROVÉRBIO HINDU).

“A mais bela coragem é a confiança que devemos ter na capacidade do nosso esforço” (COELHO NETO).

RESUMO

Atualmente no Brasil os estudantes aprendem as noções de Cálculo Diferencial e Integral pela primeira vez nos cursos superiores, e, frequentemente, terminam o curso sem saber quais foram as motivações que deram origem ao que se estuda em Cálculo. Estudiosos defendem que é possível o ensino dos fundamentos de Cálculo já na escola, a partir de uma proposta menos rigorosa e mais intuitiva em relação aos conceitos abordados. Nesse contexto, objetivamos fornecer uma perspectiva de se pensar em Matemática analisando o processo de criação de John Wallis em seu livro “Arithmetica infinitorum”, além de fornecer, em linguagem atual uma prova para o produto infinito de Wallis e para o comprimento da elipse. Para tanto a metodologia utilizada foi uma pesquisa bibliográfica. Através desse trabalho pode-se concluir que a evolução do Cálculo dependeu de matemáticos desde a antiguidade e que conceitos que outrora eram rudimentares se tornaram aceitos com rigor lógico.

Palavras-chave: Cálculo diferencial e integral. John Wallis. Produto infinito de Wallis. Comprimento da elipse.

ABSTRACT

Currently in Brazil students learn the concepts of Differential and Integral Calculus for the first time in higher education, and often finish the course without knowing the motivations that gave rise to what is studied in Calculus. Scholars argue that it is possible to teach the fundamentals of Calculus already in school, based on a less rigorous and more intuitive proposal in relation to the concepts discussed. In this context, we aim to provide a perspective of thinking about Mathematics by analyzing the process of creation of John Wallis in his book "Arithmetica infinitorum", in addition to providing, in present language, a proof for the infinite product of Wallis and for the length of the ellipse. For this purpose, the methodology used was a bibliographical research. Through this work it can be concluded that the evolution of Calculus depended on mathematicians from ancient times and that concepts that were once rudimentary became accepted with logical rigor.

Keywords: Differential and integral Calculus. John Wallis. Infinite product of Wallis. Length of the ellipse.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral não faz parte do currículo da educação básica brasileira. Todavia, o professor nesse nível de ensino pode apresentar de maneira intuitiva ideias associadas a limite, derivada e integral, pois além de enriquecer o poder de abstração de seus alunos, algumas fórmulas ensinadas na escola encontram explicação no cálculo infinitesimal e descartar seu ensino segundo Ávila (1991) é grave porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Conforme Rezende (2003, p.420) "a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do "esconderijo forçado" a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo".

Nessa perspectiva, Ávila (1991, p.4) defende por exemplo que "a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática, logo que não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea".

Dessa forma, a escolha do tema da presente dissertação visa em geral atender a um dos objetivos centrais do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT que é o de propiciar domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante a docência.

Especificamente, o presente trabalho visa analisar e refletir sobre uma motivação mais imediata à criação do Cálculo sob a análise da obra "Arithmetica Infinitorum" de John Wallis. Também tem como objetivo, apresentar em linguagem atual uma prova usando potências de seno para o "produto infinito de Wallis" e uma forma de calcular o comprimento de uma elipse.

Salienta-se que para um melhor aproveitamento do texto, necessita-se de alguma familiaridade, por parte do leitor, de alguns conceitos básicos sobre o Cálculo Infinitesimal, contudo dispõe-se de um capítulo a fim de auxiliar no entendimento de algum conceito necessário no qual denominou-se como preliminares.

Deste modo, o trabalho foi dividido em seis capítulos que se relacionam entre si.

No segundo capítulo tem-se um breve histórico norteador do tema.

O terceiro capítulo apresenta algumas ferramentas que serão utilizadas nos capítulos seguintes.

O quarto capítulo trata do produto de Wallis em linguagem atual.

O quinto capítulo trata do comprimento da elipse.

Por fim, no sexto capítulo, conclímos destacando alguns pontos relevantes do trabalho desenvolvido, na concepção do autor.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

2.1 O número π

Desde a antiguidade com o homem calcula aproximações para o número irracional π (razão entre o comprimento e o diâmetro de um círculo). No papiro de Ahmes, o valor atribuído a π é de $\left(\frac{4}{3}\right)^4$, como também o valor $3\,\frac{1}{6}$. No livro da bíblia (1 Reis 7:23) constata-se que os hebreus utilizavam o valor 3 como aproximação de π. De acordo com CAJORI (2008) para calcular a área do círculo o valor 3 era usado pelos babilônios, apesar de já ser conhecido o valor $3\,\frac{1}{8}$ como aproximação.

Segundo EVES (2004), deve-se a Arquimedes a primeira tentativa rigorosa de se calcular o número π. Construindo polígonos inscritos e circunscritos ao círulo, Arquimedes descobriu que este número estaria entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, isto é, estaria entre $3,1408$ e $3,1429$ aproximadamente. No século II d.C., Ptolomeu calculou uma melhor aproximação tomando um polígono de 720 lados inscrito num círculo de raio 60 unidades, encontrando $3,1416$.

Na China, Liu Hui obteve a aproximação $3,14159$ tomando um polígono de 3072 lados e no final do século V Tsu Ch'ung Chih obteve a aproximação entre $3,1415923$ e $3,1415927$. No século XV, o matemático árabe Ghiyath AL-Kshi calculou a aproximação $3,1415926535897932$ e no final século XVI o matemático holandês Lodolph van Ceulen calculou π com uma aproximação de 35 casa decimais.

Algumas aproximações para o número π podem facilmente ser apresentadas no ensino básico como a razão $\frac{22}{7} = 3,142857142$ correta até a segunda casa decimal ou a razão $\frac{355}{113} = 3,14159292$ correta até a sexta casa decimal.

Em 1593, François Viete determinou uma das primeiras expressões para π:

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

A seguir, em 1655, Jonh Wallis, descobriu que:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots$$

E por volta de 1675, separadamente James Gregory e Gottfried Leibniz descobriram que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

Ainda século XVII, lorde Brouncker descobriu a fração contínua:

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}} + \ldots$$

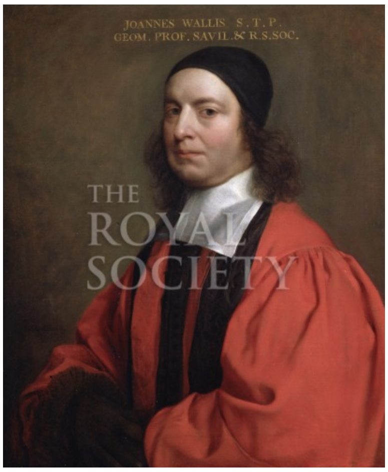
Nos século XVII e XIX foram descobertas séries bastante eficientes para determinar centenas de algarismos para π. Leonard Euler descobriu várias identidades, uma delas é:

$$\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Em 1997, David Bailey, Peter Borwein e Simon Plouf encontraram uma fórmula que permite calcular um algarismo específico (em base hexadecimal) de π.

2.2 John Wallis

Figura 1 – Retrato de John Wallis, por Gereard Soest, século XVII.



Fonte: https://pictures.royalsociety.org/image-rs-9752 acessado em 01/07/ 2018.

Em carta a Robert Hooke escreve Isaac Newton "*If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants*", "Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes".

Certamente um desses gigantes foi John Wallis (1616-1703). Nascido na Inglaterra é considerado o matemático inglês mais influente antes de Newton. Ele estudou os trabalhos de Johannes Kepler, Bonaventura Cavalieri, Giles de Roberval, Evangelista Torricelli e René Descartes. Além, de notável matemático, Wallis também se preocupou com o ensino chegando a criar um método original de ensino para deficientes auditivos.

Segundo a história da matemática foi o inventor do símbolo do infinito ∞ e em 1655 publicou o livro intitulado "*Arithmetica Infinitorum*", uma obra ousada para a época, pois usava aritmética para atacar problemas geométricos e muito importante para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Em sua autobiografia, Wallis afirma que seu primeiro contato com a Matemática ocorreu em 1631, quando por curiosidade em casa aprende em cerca de 8 ou 12 dias as operações básicas e regra de três. Segundo (Alexander, 2006) "em dezembro de 1631, Wallis estava em casa em Ashford, para o feriado de Natal, quando notou um de seus irmãos mais novos envolvido numa atividade peculiar. O menino mais jovem era aprendiz de um comerciante da cidade, que lhe ensinava aritmética e contabilidade para ajudá-lo nos negócios. Wallis ficou curioso, e o irmão, sem dúvida lisonjeado pelas atenções do mais velho, ofereceu-se para ensinar-lhe o que havia aprendido. Os dois passaram o resto do feriado juntos, repassando as aulas, com o Wallis mais velho aprendendo os recursos básicos de contabilidade."

John Wallis frequentou a escola em Ashford, mudando-se depois para Tenterden, onde mostrou o seu grande potencial como aluno. Em 1630 foi para Felsted, onde se tornou perito em hebraico, grego e latim. Foi para o Colégio Emmanual (em Cambridge), onde se interessou por Matemática. Como ninguém, em Cambridge, podia orientar os seus estudos matemáticos, o seu principal tópico de estudo tornou-se a divindade (Teologia), tendo sido ordenado em 1640.

Em 1637 Wallis tornou-se bispo de Winchester e capelão de Sir Richard Darley em Butterword em Yorkshire, ano em que recebeu seu BA e continuou seus estudos recebendo seu mestrado em 1640. Wallis manteve-se na Cátedra Savaliana de Geometria em Oxford durante mais de 50 anos onde foi professor de geometria, até a sua morte. Foi um membro fundador da Royal Society.

Wallis foi perito em criptografia. Em sua autobiografia ele declara que em duas horas em um jantar, decifrou uma carta em cifra relativa à captura de Chicheste em 27 de dezembro de 1642. Nessa época estava acontecendo uma Guerra Civil entre parlamentaristas e monarquistas e Wallis usando suas habilidades em criptografia em prol dos parlamentaristas fez fortuna.

Teve uma prolífera obra que cobriu Música, Astronomia, Lógica, Línguas, Teologia, Mecânica e Matemática, onde da última destacam-se:

<u>Aritmética e Teoria dos números:</u>

- Mathesis Universalis (Opus Arithmeticum) (1657);
- Adversus Marci Meibomii De Proportionibus Dialogum (1657);
- Commercium epistolicum. De Quoestionibus quibusdam Habitum (1658).

<u>Álgebra e Cálculo Analítico:</u>

- Arithmetica Infinitorum (1656);
- Treatise of Algebra (1683/1685);
- A Treatise of Combinations, Alternations and Aliquot Parts (1685);

- Epistolarum Quarundam Collectio.

Geometria

- Rem Mathematicam Spectantium (1699);
- De Sectionibus Conicis. Nova Methodo Expositis (1655);
- Elenchus Geometriae Hobbianae (1655);
- Elenchuns Geometrae Hobbianae (1655);
- De Cycloide et de Cissoide (1659);
- De Ângulo Contactus et Semicirculi, Tractatus (1656);
- Hobbiani Puncti Dispunctio (1657);
- Cono-Cuneus (1662);
- De Postulato Quinto (1663);
- Hobbii Quadratura Circuli (1669);
- A Treatise of Angular Sections (1685), a Defence of the Angle of Contact (1685);
- Doutrine of Trigonometry (1685).

Segundo Lopes (2017), envolvido nos problemas de quadratura, Wallis trata da quadratura do círculo na obra *Arithmetica Infinitorum* (1656), onde para alcançar seu objetivo ele propõe um método criativo, onde através da experimentação e observação tira conclusões matemáticas. A autora destaca que:

> Ele partiu das ideias dos indivisíveis de Cavalieri, entretanto usou técnicas e métodos, baseados em termos analíticos, e conseguiu a quadratura e cubatura de certos tipos de curvas e superfícies. O que, para a época, era extremamente original. Ele dá um tratamento aritmético a problemas que seus predecessores só haviam discorrido de forma geométrica (Lopes, 2017, p. 106).

Diferentemente dos outros matemáticos que se depararam com o problema da quadratura do círculo. Wallis não tentou contruir nada. Sua ideia foi encontrar um número que lhe desse a razão correta entre as áreas de um círculo e de um quadrado com lado igual ao raio, como sabemos ser π.

De acordo com Boyer (1996), ao passo que Cavalieri obtivera o resultado

$$\int_0^a x^m dx = \frac{a^{x+1}}{m+1}$$

através de um laborioso processo de fazer corresponder a indivisíveis geométricos num paralelogramo os de um dos triângulos em que a diagonal o divide, Wallis associou aos infinitos indivisíveis valores numéricos através do seu método de indução.

Esse método, carente de rigor matemático foi criticado por Pierre de Fermat, pois não tinha a precisão lógica do método de indução completa que Pascal e o próprio Fermat costumavam usar. Além disso, Wallis assumiu que seu resultado valia para valores fracionários, irracionais e negativos de m (exceto $m = -1$) seguindo um processo de interpolação questionável, pois também carecia de rigor.

Todavia, Wallis que era o único membro matemático da Royal Society estava disposto a fazer matemática no estilo tentativa e erro, desafiando a matemática tradicional que atuava na prova dedutiva rigorosa. Em Alexander (2006) "Quando tratou como valor 1 o que sabemos atualmente como indeterminação ∞/∞ e foi criticado por Fermat e outros matemáticos, Wallis mostrou que não estava preocupado com as questões lógicas de seus procedimentos. Seus resultados não seriam validados por "raciocínio puro", mas por concenso, como os experimentos públicos realizados na Royal Society. Em último caso, não seria a perfeição lógica que sustentaria seus resultados, mas a eficácia em produzir novos resultados".

O que John Wallis quis era aceitação das suas ideias pelos outros membros da Royal Society que tinham como base de trabalho a experimentação. Afirmou que objetos geométricos eram objetos que existiam na natureza e podiam ser estudados como tal. Para ele, a tarefa do geômetra é investigar as propriedades do triângulo sabendo este existe no mundo como um cientista na medicina tenta decifrar as propriedades de uma droga. Entendia que o rigor lógico é desnessário e que uma insistência exagerada no raciocínio lógico pode mais atrapalhar que ajudar.

Jonh Wallis, acreditava que se o seu método fosse bem sucedido o fazer matemático estaria livre do dogmatismo e da intolerância com a ideia do infinitesimal. Para ganhar confiança na validade de seu método, primeiramente Wallis se apoia em resultados já conhecidos geometricamente e após isso arrisca-se a resolver problemas mais difíceis e pouco conhecidos.

Em seu livro intitulado *De sectionibus conics*, na proposição 3, admitindo que os segmentos possuem espessura tem-se: "Como um triângulo consiste em um número infinito de retas ou paralelogramos *aritmeticamente proporcionais* começando com um ponto e continuando até a base (como fica evidente pela discussão), então a área do triângulo é igual a base vezes a metade da altura".

O que Wallis quis dizer com retas que compõem um triângulo são "aritmeticamente proporcionais" é que se segmentos de reta paralelos igualmente espaçados forem traçados ao longo da altura, então os comprimentos desses segmentos formam uma progressão aritmética.

Em sua prova para tal fato, Wallis parte de casos particulares e assume que o princípio continua valendo se a altura for dividida em um número infinito de partes. Mensura o ponto (vértice) como 0 (zero) e a "quantidade" de segmentos é ∞, como era conhecido somar termos em progressão aritmética, concluiu que a soma dos comprimentos de todos os segmentos é $\frac{\infty}{2} \cdot B$, onde B é a base base do triângulo, que é a soma dos dois extremos. Nesse sentido, Wallis assumiu que a distância ("espessura" do segmento) entre dois segmentos era infinitamente pequena denotando isso por $\frac{1}{\infty} \cdot A$, onde A é a altura do triângulo. Assim, conclui que a área do triângulo é obtida pelo produto

$$\left(\frac{\infty}{2} \cdot B\right)\left(\frac{1}{\infty} \cdot A\right) = \frac{A \cdot B}{2}.$$

Apesar de possíveis críticas atuais e em seu tempo, a respeito do rigor nessa demonstração tanto ao admitir espessura de segmentos e que a soma de séries infinitas se calcula como no caso finito, o ponto crucial foi como Wallis calculou a área do triângulo, somando todos os comprimentos dos segmentos em progressão aritmética e multiplicando pela "espessura" de cada segmento.

O livro *Arithmetica Infinitorum* apresenta 194 proposições sendo 13 lemas, 68 teoremas e 113 corolários. O produto infinito se encontra na proposição 191. Deste modo, a fim de entender o modo de escrita de John Wallis apresentaremos inicialmente algumas proposições em uma tabela e posteriormente analisaremos alguns teoremas que motivaram seu produto infinito.

Nesta análise, utilizou-se a obra original de *Arithmetica Infinitorum*, a tradução para o inglês por Jacqueline Stedall e a tese de doutorado ("*A criatividade matemática de John Wallis na obra Arithmetica Infinitorum: Contribuições para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática*") de Gabriela Lopes.

Tabela 1 – Análise de algumas proposições da obra Arithmetica Infinitorum.

Lema 1 e Teorema 2
Wallis indutivamente apresenta a soma dos primeiros números naturais, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$, e verifica em casos particulares que vale a razão $\frac{0+1+2+\cdots+n}{n+n+n+\cdots+n} = \frac{1}{2}$.
Corolários 3 e 4
Usa o resultado e confirma pelo seu método que a razão de um triângulo e um retângulo circunscrito é 1/2.
Corolários 5 a 18
Usa o resultado para atacar problemas relacionados à espiral de Arquimedes.

Lema 19 e Teoremas 20 e 21
Wallis entendendo que n cresce indefinidamente indutivamente conclui $\frac{0+1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}=\frac{1}{3}.$
Corolários 22 ao 38
Usa o resultado anterior e o seu método para verificar relações entre sólidos e espirais cujo resultado é 1/3.
Lema 39 e Teoremas 40 e 41
Wallis entendendo que n cresce indefinidamente indutivamente conclui $\frac{0+1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+\cdots+n^3}=\frac{1}{4}.$
Corolário 42
Verifica com o resultado e seu método que a razão da área de metade da curva cúbica e retângulo circunscrito é 1/4.
Lema 43
Indutivamente entendendo que n cresce indefinidamente, estendeu o resultado para potências de expoentes 4, 5 e 6, $\frac{0+1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^4+n^4+n^4+\cdots+n^4}=\frac{1}{5}.$
Lema 44
Em uma tabela, Wallis enuncia que essa razão para somas de potências de 1 até 10 é válida. Na prática ele notou um padrão entendendo que n cresce indefinidamente $\frac{0+1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p+n^p+n^p+\cdots+n^p}=\frac{1}{p+1}.$
Corolário 45
Wallis afirma em um comentário que a partir dos resultados anteriores pode-se mostrar resultados relativos às curvas do tipo $y=x^p$.
Lema 46 e 47
Usando retórica Wallis conclui que com n crescendo indefinidamente $\frac{0+1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p+n^p+n^p+\cdots+n^p}=\frac{1}{p+1}$, para todo p natural.
Lemas 48,49 e 50
Baseado no resultado anterior, Wallis investiga algumas razões existentes entre sólidos contidos em outras figuras curvas e não apenas no cone como os antigos ensinavam.
Teorema 51
Wallis afirma que seu método pode ser usado para expoentes fracionários.
Lema 52
Wallis justifica seu resultado anterior argumentando sobre sólidos seccionados por planos.
Lema 53
Usando sua indução ele conclui que com n crescendo indefinidamente e p no máximo 10 $\frac{\sqrt[p]{0}+\sqrt[p]{1}+\sqrt[p]{2}+\cdots+\sqrt[p]{n}}{\sqrt[p]{n}+\sqrt[p]{n}+\sqrt[p]{n}+\cdots+\sqrt[p]{n}}=\frac{p}{p+1}.$

Teorema 54
Apresenta uma tabela para o resultado anterior fazendo p no máximo 10.
Corolários 55, 56 e 57
Aplica seus resultados em problemas geométricos.
Lema 58
Através da retórica, Wallis afirma que seu método poderá ser ampliado para uma caso mais geral envolvendo raízes de potência.
Teorema 59
Apresenta uma tabela cuja série do numerador e denominador são formadas por potências fracionárias p/q onde $1 \leq p, q \leq 10$.
Corolários 60 e 61
Verifica o resultado anterior nas curvas do tipo $y = x^{p/q}$, onde $1 \leq p, q \leq 10$. Conclui que a quadratura de qualquer curva do tipo $y = x^{p/q}$ é possível. (outrora só se sabia a quadratura da parábola)
Corolários 62 e 63
Wallis aplica seu resultado anterior em alguns sólidos.
Teorema 64
Conclui o que em notação atual seria $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0+1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p+n^p+n^p+\cdots+n^p} = \dfrac{1}{p+1}$.

Fonte: Adaptado de Lopes (2016).

Para ilustrar a indução de Wallis, vamos analisar a proposição 1, onde o peculiar processo investigativo permeia toda a obra.

Na proposição 1, ele toma uma lista finita de quantidades em proporção geométrica, começando por zero. Para Wallis o zero teria a correspondência geométrica com um ponto, assim sendo, é possível afirmar que sua intenção era o de relacionar grandezas geométricas com números. De acordo com a proposição tem-se:

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{0+1+2+3}{4+4+4+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5+6}{6+6+6+6+6+6+6} = \frac{21}{42} = \frac{1}{2}.$$

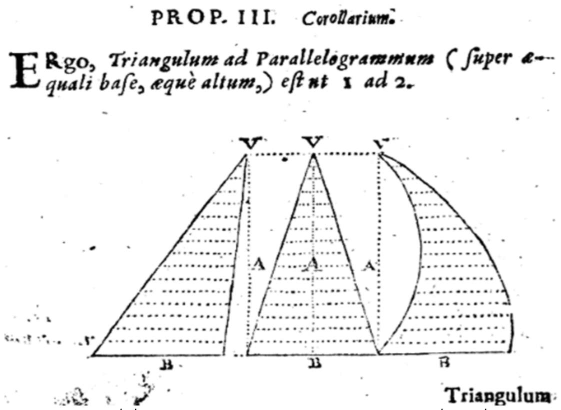
Wallis conclui na proposição 2 a generalização, que em notação atual é:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} i}{n(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Sem demonstração para tal fato, Wallis ainda acrescenta que o resultado é preservado se considerado uma série "[...] quer seja finita ou infinita em número" (Stedall, 2014, p.14) de termos.

Agora analisemos a proposição 3 (corolário)

Figura 2 – Proposição 3.



Fonte: https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitorum.pdf Acesso em: 27 de jun. 2018.

Nessa proposição Wallis afirma que um triângulo está para um paralelogramo, com bases iguais e de mesma altura, como 1 está para 2. Seu raciocínio se baseia que com infinitas "linhas" ("$n \to \infty$") igualmente espaçadas a razão seja

$$\frac{0 + \frac{B}{n} + \frac{2B}{n} + \frac{3B}{n} + \cdots + \frac{nB}{n}}{B + B + B + B + \cdots + B} = \frac{\frac{B}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{(n+1)B} = \frac{1}{2}.$$

Wallis conjecturou que sendo o primeiro termo da progressão aritmética igual a zero e o maior termo igual a n, a escolha do segundo termo será irrelevante, por exemplo, o maior termo sendo 2, tem-se:

$$\frac{0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 2}{2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2} = \frac{7}{2 \cdot 7} = \frac{1}{2}$$

Ou ainda, diminuindo a razão para $\frac{1}{6}$, obtêm-se

$$\frac{0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + 1 + \frac{7}{6} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} + \frac{10}{6} + \frac{11}{6} + 2}{2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2} = \frac{13}{2 \cdot 13} = \frac{1}{2}.$$

O matemático percebeu que ao aumentar o número de termos da série (infinitamente grande), a distância entre os termos é pequena (infinitesimal). Segundo Scott (1981), Wallis foi um dos precursores do entendimento do infinitamente grande e infinitamente pequeno.

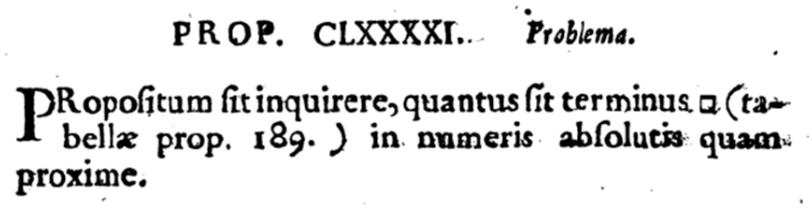
Na proposição 3, a intenção de Wallis era mostrar numericamente o que já era conhecido apenas geometricamente que tomando um triângulo e um paralelogramo de mesma base e altura, a razão da área do triângulo pela área do paralelogramo estava na mesma razão de 1 para 2. Partindo da ideia dos indivisíveis de Cavalieri, Wallis considera o triângulo consistindo de um número infinito de linhas paralelas em progressão aritmética, começando de um ponto e indo até a base, onde o triângulo e o paralelogramo tinham o mesmo número de linhas e as linhas do paralelogramo tinha o mesmo comprimento da base.

De acordo com Lopes (2016) a obra Arithmetica Infinitorum tem um grande potencial pedagógico para o ensino de matemática para alunos de Cursos de Formação de Professores de Matemática. A autora acredita que a forma em que o livro se desenvolve permite ao aluno a percepção do desenvolvimento de uma ideia matemática, propiciando no aluno o desenvolvimento de um espírito investigativo, de competências e habilidades para sua futura atuação.

Na proposição 191 Wallis anuncia o seu produto:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14 \times \dots}.$$

Figura 3 – Proposição 191.

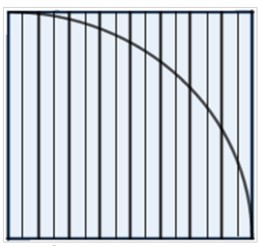

PROP. CLXXXXI. Problema.

PRopoſitum ſit inquirere, quantus ſit terminus □ (tabellæ prop. 189.) in numeris abſolutis quam proxime.

Fonte: https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitArit.pdf Acesso em 26/06/18.

Para encontrar a quadratura do círculo por meios aritméticos, Wallis tomou um quadrante de um círculo como na Figura 4 a seguir, sua intenção era investigar a razão da área do círculo pela área do quadrado circunscrito.

Figura 4 – Área do Círculo pela Área do Quadrado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, Wallis imaginou uma figura formada por um número infinito de “linhas” (segmentos de reta) onde a razão procurada deveria ser do número de linhas do quadrante de círculo pelo número de linhas do quadrado circunscrito.

Não obstante, Wallis se deparou com um grande problema por não conhecer série de potência, pois supondo que o lado do quadrado é R e a figura acima seja divida em n linhas distas 1 unidade uma da outra, a soma das linhas que compõe o quadrante do círculo é $\sqrt{R^2-0^2}+\sqrt{R^2-1^2}+\sqrt{R^2-2^2}+\sqrt{R^2-3^2}+\cdots+\sqrt{R^2-n^2}$.

Daí, o problema foi calcular o limite da razão com n tendendo ao infinito,

$$\frac{\sqrt{R^2-0^2}+\sqrt{R^2-1^2}+\sqrt{R^2-2^2}+\sqrt{R^2-3^2}+\cdots+\sqrt{R^2-n^2}}{R+R+R+R+\cdots+R}.$$

Da mesma forma que nas primeiras 64 proposições, Wallis certifica suas afirmações com resultados geométricos nos colorários. Em consonância com Lopes (2016) a proposição 132 é fundamental para os propósitos de Wallis. Ele apresenta uma tabela com os resultados obtidos nas proposições anteriores para avaliar o resultado da razão

$$\frac{\sqrt[q]{R^{1/p}-r_0^{1/p}}+\sqrt[q]{R^{1/p}-r_1^{1/p}}+\sqrt[q]{R^{1/p}-r_2^{1/p}}+\cdots+\sqrt[q]{R^{1/p}-r_n^{1/p}}}{R^{q/p}+R^{q/p}+R^{q/p}+\cdots+R^{q/p}}.$$

Figura 5 – Tabela com os resultados.

Seriei Æqualium mulctatæ serie

Subdecimanorum	Subnonanorum	Suboctavanorum	Subseptimanorũ	Subsextanorum	Subquintanorum	Subquartanorum	Subtertianorum	Subsecundanorũ	Subprimanorum	Nulla	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Æqualia
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Residua.
66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1	Quadrata.
286	220	165	120	84	56	35	20	10	4	1	Cubi.
1001	715	495	330	210	126	70	35	15	5	1	Biquadrat.
3003	2002	1287	792	462	252	126	56	21	6	1	Surdesol.
8008	5005	3003	1716	924	462	210	84	28	7	1	Sextana.
19448	11440	6435	3432	1716	792	330	120	36	8	1	Septimana
43758	24310	12870	6435	3003	1287	495	165	45	9	1	Octavana.
92378	48620	24310	11440	5005	2002	715	220	55	10	1	Nonana.
184756	92378	43758	19448	8008	3003	1001	286	66	11	1	Decimana.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Fonte: https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum /ArithmeticaInfiArithme.pdf> Acesso em 27 jun. 2018.

Para o círculo é necessário que $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$. Utilizou seu método de aproximação (interpolação) entre $p = 0$ e $p = 1$ e entre $q = 0$ e $q = 1$. Os resultados foram apresentados nas proposições 184 e 189. Na proposição 191 ele conclui que

$$\pi \text{ é} \begin{cases} \textit{maior que} \; \dfrac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14} \times \sqrt{1\frac{1}{14}} \\ \textit{menor que} \; \dfrac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14} \times \sqrt{1\frac{1}{13}} \end{cases}$$

Após essa proposição, num comentário Wallis afirma que uma aproximação para π tão boa quanto se queira é

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14 \times \dots}.$$

Em outras palavras, supondo que o raio do círculo seja 1 e a distância de uma das linha ao centro seja x, o comprimento y sob a curva dessa linha é dado por $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Mas, Wallis não tinha em mãos a série binomial e daí inventou um método de interpolação. Tomando os resultados anteriores, Wallis investigou a validade para expoentes fracionários positivos.

Em suma, Wallis computou as áreas de curvas de equação $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ no intervalo de 0 a x obtendo os seguintes resultados para $n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$, respectivamente

$$x$$

$$x - \frac{1}{3}x^3$$

$$x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

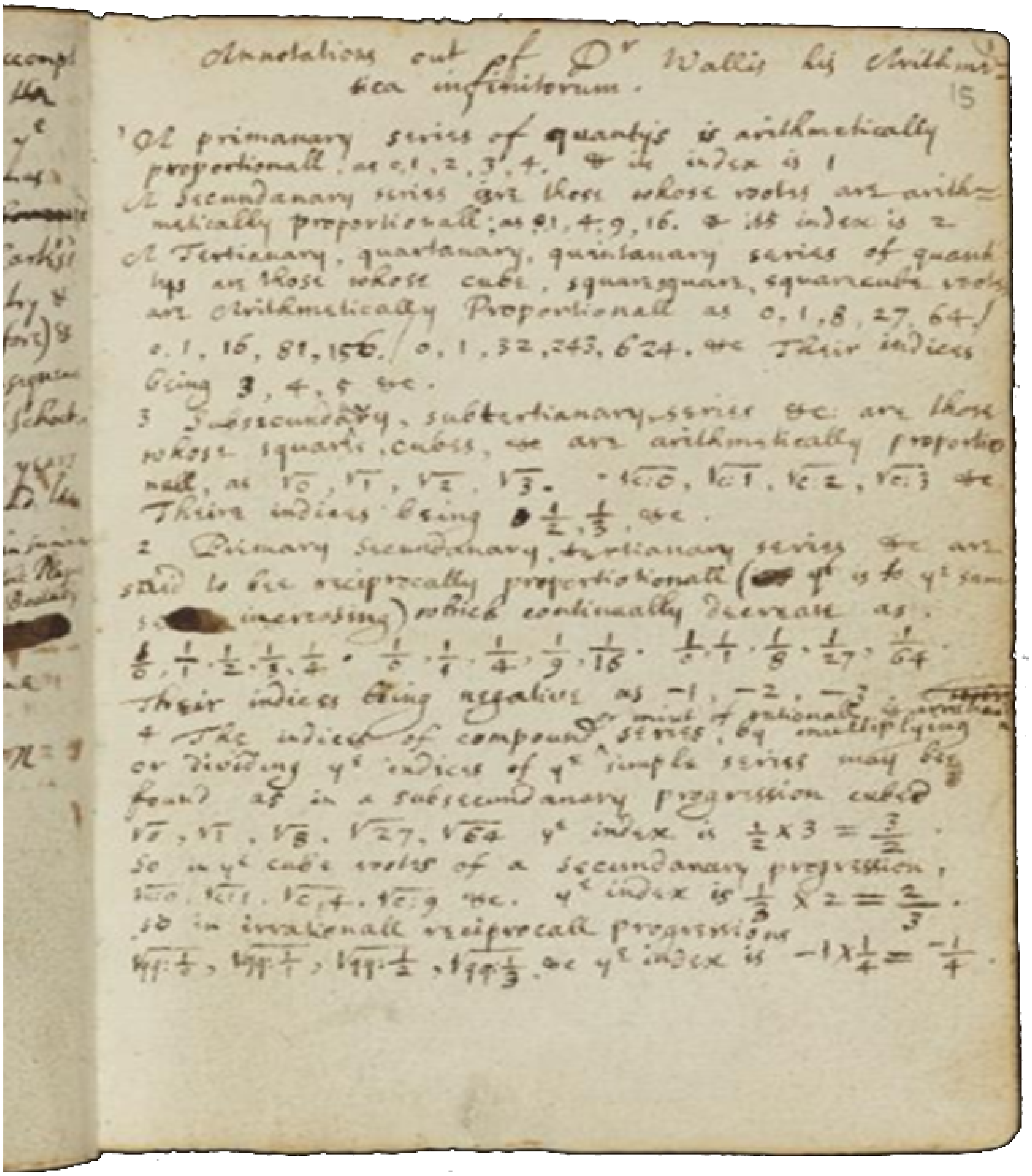
$$x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

$$x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

Trabalhando com casos particulares e escrevendo suas descobertas em tabelas, Wallis usou a geometria existente para comprovar sua conjecturas, e chegar na razão de produtórios para $\frac{4}{\pi}$.

Sir Isaac Newton estudou *Arithmetica Infinitorum* em 1664/65 onde se vê na Figura 6 uma imagem de seu caderno.

Figura 6 – Arithmetica Infinitorum.



Annotations out of Dr Wallis his Arithmetica infinitorum.

1 A primanary series of quantys is arithmetically proportionall as 0, 1, 2, 3, 4. & its index is 1

A secundanary series are those whose roots are arithmetically proportionall; as 0, 1, 4, 9, 16. & its index is 2

A Tertianary, quartanary, quintanary series of quantitys are those whose cube, squaresquare, squarecube roots are Arithmetically Proportionall as 0, 1, 8, 27, 64 / 0, 1, 16, 81, 256 / 0, 1, 32, 243, 624. &c Their indices being 3, 4, 5 &c.

3 Subsecundary, subtertianary series &c are those whose squares, cubes, &c are arithmetically proportionall, as √0, √1, √2, √3. √c:0, √c:1, √c:2, √c:3 &c. Their indices being 1/2, 1/3 &c.

2 Primary secundanary, tertianary series &c are said to bee reciprocally proportionall which continually decrease as 1/0, 1/1, 1/2, 1/3, 1/4. 1/0, 1/1, 1/4, 1/9, 1/16. 1/0, 1/1, 1/8, 1/27, 1/64. Their indices being negative as −1, −2, −3

4 The indices of compound series, by multiplying or dividing ye indices of ye simple series may bee found as in a subsecundanary progression cubed √0, √1, √8, √27, √64 ye index is 1/2 × 3 = 3/2. So in ye cube roots of a secundanary progression, √c:0, √c:1, √c:4, √c:9 &c. ye index is 1/3 × 2 = 2/3. So in irrationall reciprocall progressions √qq:1/0, √qq:1/1, √qq:1/2, √qq:1/3 &c ye index is −1 × 1/4 = −1/4.

Fonte: Fonte: http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04000/33 Acesso: 12 fev. 2018.

Newton generalizou a ideia de Wallis, $\int_0^1 (1 - t^{\frac{1}{p}})^q dt$, se atentando para o caso $\int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} dt$. Daí, expressou $arcsen(x)$ em termos de séries infinitas:

$$arcsen(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112} + \dots$$

Obtendo a série binomial:

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)}{n!}x^n + \cdots$$

A série binomial é usada na dedução da fórmula do comprimento da elipse. De acordo com Boyer (1996), na obtenção da fórmula para seu produto, Wallis usou seu princípio de indução e interpolação, aplicado a $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, todavia não o sabia calcular diretamente por falta do teorema binomial.

Atualmente já se é conhecido diferentes abordagens em matemática que produzem o produto infinito de Wallis, mas em artigo publicado no *Journal of Mathematical Physics* em 2015, relata-se que em um curso de mecânica quântica na Universidade de Rochester (EUA), o professor de física Carl Hagen envolvido com seus alunos em cálculos relativos aos estados de energia do átomo de hidrogênio propôs aos seus alunos que fizessem os cálculos quânticos usando um método alternativo chamado princípio variacional que aproxima o valor do estado excitado para o estado fundamental do átomo de hidrogênio. O princípio variacional foi estudado pioneiramente por Pierre de Fermat no chamado Princípio do Mínimo Tempo.

Hagen teve a ideia de aplicar o método a outros estados de energia além do fundamental, daí convidou o professor visitante de matemática e pesquisador associado de física de alta energia Tamar Friedmann que tem capacidade de trabalhar tanto em Matemática quanto em física. Sabe-se que o princípio variacional para calcular o estado fundamental de um átomo de hidrogênio é relativamente trivial, mas não o é quando se trata do estado excitado. Então os dois pesquisadores separaram o problema em uma série de problemas, calcularam o nível de energia para cada número quântico do momento angular orbital e comparam com os valores obtidos por Niels Bohr (sec. XX). Surpreendentemente, ao calcular a razão dos valores obtidos por Bohr com os diferentes valores dos estados de energia obtidos por eles perceberam que a proporção levava ao produto de Wallis.

O cálculo de Friedmann e Hagen resultou em uma expressão envolvendo funções gama ($\Gamma(x) = \int_0^\infty exp(-t)t^{x-1}dt; x > 0$) introduzida por Leornard Euller em 1730, que precisamente pode ser usada para chegar no produto infinito de Wallis.

2.3 O problema da quadratura do círculo

Na antiguidade os gregos presentearam a humanidade com três problemas de construção com régua e compasso que desafiaram muitos matemáticos. Na tentativa de solucioná-los muita matemática foi desenvolvida.

Um desses problemas, certamente o mais famoso, foi o Problema da Quadratura do Círculo que somente com o desenvolvimento da álgebra e da análise, por volta do século XIX é que tivemos definitivamente uma resposta correta. O problema trata da possibilidade ou não de se construir um quadrado de mesma área de um círculo dado (raio dado). Verificou-se a impossibilidade de tal construção usando apenas os dois instrumentos, pois como é de conhecimento atual teríamos que medir com a régua o valor $\sqrt{\pi}$.

3 ALGUNS TÓPICOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

A ideia do paradoxo "A Dicotomia" atribuído ao filósofo pré-socrático Zenão de Eléia (450 a.C.) foi de que para um objeto atingir uma nova posição deve atingir a metade do percurso, e para atingir essa metade deve primeiro atingir a sua metade e assim sucessivamente, daí concluí-se que o movimento não existe.

Sem o conhecimento de limites, certamente a refutação desse paradoxo estaria no campo da filosofia como Aristóteles (384 a.C.) por vezes usou.

Atualmente, é possível que um estudante do ensino básico tenha conhecimento para refutar matematicamente o paradoxo em questão quando estuda a soma infinita de termos em progressão geométrica (P.G). Normalmente na escola, após se estudar a soma da P.G. finita, timidamente se fala em limite para introduzir a fórmula da P.G infinita.

No ensino superior é comum começar o estudo de Cálculo com o conceito de limite de uma função, pois é a base formal para os conceitos de derivada e integral.

Todavia a história mostra que o conceito preciso e moderno de limite é mais recente (final do século XVIII) do que o próprio desenvolvimento do Cálculo (século XVII).

Definição 3.1 (Limite de uma Função)**.** *Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existir um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

3.1 Notas de cálculo diferencial e integral

Proposição 3.1. *Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = L + M$*

Prova: Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Devemos encontrar $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| < \varepsilon$. Pela desigualdade triangular,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |(f(x) - L)| + |(g(x) - M)|. \tag{3.1}$$

Por hipótese $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $|g(x) - M| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Tomemos então $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Assim, para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1$ implica que $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. E da mesma forma, para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_2$ implica que $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ o menor dos números δ_1 e δ_2. Observe que se $0 < |x-a| < \delta$ então $0 < |x-a| < \delta_2$ e $0 < |x-a| < \delta_2$ e assim $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Logo, pela inequação (3.1) tem-se:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |(f(x) - L)| + |(g(x) - M)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, pela definição de limite segue $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$. □

A definição formal de limite permite demonstrar as suas propriedades operatórias, como também outros teoremas. Outras propriedades importantes para o desenvolvimento do presente trabalho serão apresentadas na proposição a seguir.

Proposição 3.2. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *existem, e* k *é um número real qualquer, então:*

a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$*;*

b) $\lim\limits_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$*;*

c) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$*;*

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$*, desde que* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$*;*

e) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ *para todo inteiro positivo* n*;*

f) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$*, se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ *e* n *inteiro, ou se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq 0$ *e* n *é um inteiro positivo ímpar.*

Teorema 3.1 (Confronto)**.** *Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todo* x *em um intervalo aberto contendo* a *(exceto possivelmente o próprio* a*) e se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$*, então* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$*.*

Prova: Devemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica em $|h(x) - L| < \varepsilon$.

Por hipótese temos que existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$.

Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $0 < |x-a| < \delta$ então $0 < |x-a| < \delta_1$ e $0 < |x-a| < \delta_2$ de modo que $L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$. Como $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, temos que $L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$, ou seja $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$, logo $|h(x) - L| < \varepsilon$.

Portanto, pela definição de limite segue $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$. □

Definição 3.2 (Limite no Infinto)**.** *Seja* f *uma função definida em algum intervalo* (a, ∞)*. Dizemos que o limite de* f *quando* x *tende para* ∞ *é* L*, denotando por*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

quando para todo $\varepsilon > 0$ *existe um correspondente número* N *tal que se* $x > N$ *então* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*

Proposição 3.3. *Se* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *então* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, devemos encontra um número real N tal que, para $x > N$, tenhamos $|\dfrac{1}{x} - 0| < \varepsilon$.

Assumindo $x > 0$, a desigualdade $|\dfrac{1}{x} - 0| < \varepsilon$ é equivalente a $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$. O que nos dá uma ótima sugestão para a escolha de número N. Considemos pois, $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. De fato, $x > N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ implica em $|\dfrac{1}{x} - 0| = \dfrac{1}{x} < \varepsilon$.

Portanto, pela Definição 3.2 temos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. □

Definição 3.3 (Derivada de uma Função)**.** *A derivada de uma função* $y = f(x)$*, é a função denotada por* $f^{'}(x)$ *(lê-se* f *linha de* x*) tal que seu valor em qualquer* $x \in D(f)$ *é dado por*

$$f^{'}(x) = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x},$$

se esse limite existir, e neste caso dizemos que a função f *é derivável, ou ainda, diferenciável.*

Proposição 3.4 (Regra do Produto)**.** *Se* f *e* g *são deriváveis, então* $[f(x).g(x)]^{'} = f(x)[g(x)]^{'} + [f(x)]^{'}g(x)$.

Prova: Temos,

$$[f(x).g(x)]^{'} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x+\triangle x)\cdot g(x+\triangle x) - f(x)\cdot g(x)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x+\triangle x)\cdot g(x+\triangle x) - f(x)\cdot g(x) + f(x+\triangle x)\cdot g(x) - f(x+\triangle x)\cdot g(x)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} f(x+\triangle x)\left(\frac{g(x+\triangle x) - g(x)}{\triangle x}\right) + \lim_{\triangle x\to 0} g(x)\left(\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}\right) =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} f(x+\triangle x)\lim_{\triangle x\to 0}\left(\frac{g(x+\triangle x) - g(x)}{\triangle x}\right) + \lim_{\triangle x\to 0} g(x)\lim_{\triangle x\to 0}\left(\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}\right) =$$

$$= f(x)[g(x)]^{'} + [f(x)]^{'}g(x).$$ □

Definição 3.4. *Uma função* F *é denominada uma primitiva de* f *num intervalo se* $F^{'}(x) = f(x)$ *para todo* x *em* I.

Teorema 3.2. *Se* F *é uma primitiva de* f *em um intervalo* I*, então a primitiva mais geral de* f *em* I *é* $F(x) + C$ *onde* C *é uma constante arbitrária.*

Definição 3.5. *Seja* f *uma função contínua no intervalo* $a \leq x \leq b$*. Suponha que este intervalo tenha sido dividido em* n *subintervalos de comprimentos iguais a*

$$\triangle x = \frac{b-a}{n}$$

e seja x_k *um número pertencente ao intervalo de ordem* k*, para* $k = 1, 2, \ldots, n$*. A soma* $[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\triangle x$ *é conhecida como soma de Riemann.*

Definição 3.6 (Integral Definida)**.** *Chama-se integral definida de $f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ o limite da soma de Riemann quando n tende para ∞ e denota-se como $\int_a^b f(x)dx$, isto é,*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\triangle n \to \infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \triangle x.$$

Proposição 3.5 (Propriedades da Integral Definida)**.**

a) $\int_a^b c dx = c(b-a)$, *onde c é uma constante qualquer;*

b) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

c) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, *onde c é uma constante qualquer;*

d) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Teorema 3.3 (Fundamental do Cálculo)**.** *Se f for continua em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Técnica (Integração por Partes)**.** *Chama-se integração por partes a uma técnica de integração associada à regra do produto para calcular derivadas.*

Dada $[f(x)g(x)]' = f(x)[g(x)]' + [f(x)]'g(x)$ colocando em notação de integral indefinida, obtemos $\int [f(x)[g(x)]' + [f(x)]'g(x)]dx = f(x)g(x)$, equivalendo a

$$\int [f(x)[g(x)]' dx + \int [f(x)]' g(x)]dx = f(x)g(x),$$

ou

$$\int f(x)[g(x)]' dx = f(x)g(x) - \int [f(x)]' g(x)dx.$$

Na prática, fazemos $f(x) = u$ e $g(x) = v$, temos $du = f(x)'dx$ e $dv = g(x)'dx$, donde

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Fórmula (Comprimento de Arco de uma Curva)**.** *Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, é*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

4 O PRODUTO DE WALLIS

Nosso problema central neste capítulo será mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Para isso, faremos uma sequência de exercícios.

4.1 Exercícios

Exercício 4.1. *Demonstre que*

$$\int sen^n x dx = -\frac{1}{n}cosx sen^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}x dx.$$

Solução: Seja $\int sen^n xdx = \int sen^{n-1}x senx dx$. Façamos $u = sen^{n-1}x$ e $dv = senxdx$. Daí temos $du = (n-1)sen^{n-2}xcosxdx$ e $v = -cosx$. Assim, a integração por partes nos dá

$$\int sen^n xdx = -cosx sen^{n-1}x + (n-1)\int sen^{n-2}x cos^2 x dx.$$

Usando a relação $cos^2 x = 1 - sen^2 x$, temos que

$$\int sen^n xdx = -cosx sen^{n-1}x + (n-1)\int sen^{n-2}xdx - (n-1)\int sen^n xdx.$$

Somando $(n-1)\int sen^n xdx$ em ambos os lados obtemos,

$$n\int sen^n xdx = -cosx sen^{n-1}x + (n-1)\int sen^{n-2}xdx.$$

E finalmente, dividindo por n ambos os membros temos,

$$\int sen^n x dx = -\frac{1}{n}cosx sen^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}x dx.$$

$\square$

Exercício 4.2. *Mostre que*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n xdx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}xdx,$$

onde $n \geq 2$ é inteiro.

Solução: Segue do Exercício 4.1 que,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n xdx = \left[-\frac{1}{n}cosx sen^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}xdx.$$

Uma vez que $cos\frac{\pi}{2} = 0$ temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n xdx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}xdx.$$

$\square$

Exercício 4.3. *Calcule*
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x dx.$$

Solução: Segue diretamente do exercício anterior,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x dx = \frac{2-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{4}.$$

□

Exercício 4.4. *Calcule*
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x dx.$$

Solução: Segue diretamente,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x dx = \frac{3-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen x dx = \frac{2}{3}[-cos x]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}(0+1) = \frac{2}{3}.$$

□

Exercício 4.5. *Demonstrar, para as potências ímpares do seno,*
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1} x dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot (2n+1)},\ \forall\, n \geq 1.$$

Solução: Façamos indução finita sobre n. Para $n = 1$, segue do exercício anterior,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x dx = \frac{2}{3}.$$

Supondo que vale para todo $n = k \geq 1$, usemos o Exercício 4.2, para $n = k + 1$.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k+3} x dx = \frac{(2k+3)-1}{2k+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{(2k+3)-2} x dx = \frac{2k+2}{2k+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k+1} x dx.$$

Daí, utilizando a hipótese temos,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k+3} x dx = \left(\frac{2k+2}{2k+3}\right)\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2k}{3\cdot 5\cdot 7\cdot (2k+1)}.$$

Portanto,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1} x dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot (2n+1)},\ \forall\, n \geq 1.$$

□

Exercício 4.6. *Demonstrar, para as potências pares do seno,*
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n} x dx = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n}\frac{\pi}{2},\ \forall\, n \geq 1. \tag{4.1}$$

Solução: Façamos indução finita sobre n. Para $n = 1$, segue do Exercício 4.3,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

Suponhamos que (4.1) vale para todo $n = k \geq 1$. Para $n = k+1$, usando Exercício 4.2 temos,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k+2} x dx = \frac{(2k+2)-1}{2k+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{(2k+2)-2} x dx = \frac{2k+1}{2k+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k} x dx.$$

Daí, utilizando a hipótese temos,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k+2} x dx = \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right) \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n} \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n} x dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n} \frac{\pi}{2}, \ \ \forall \, n \geq 1.$$

□

Consideremos para os próximos exercícios a seguinte identificação,

$$l_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n x dx.$$

Exercício 4.7. *Prove que*

$$l_{2n+2} \leq l_{2n+1} \leq l_{2n}.$$

Solução: Como $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, segue que $0 \leq senx \leq 1$. Daí para $n \geq 0$, tem-se,

$$sen^{2n+2} x \leq sen^{2n+1} x \leq sen^{2n} x,$$

isto é,

$$l_{2n+2} \leq l_{2n+1} \leq l_{2n}.$$

□

Exercício 4.8. *Prove que*

$$\frac{l_{2n+2}}{l_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Solução: Pelo Exercício 4.2 temos,

$$l_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+2} x dx = \frac{2n+1}{2n+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n} x dx = \frac{2n+1}{2n+2} l_{2n}.$$

Logo,

$$\frac{l_{2n+2}}{l_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

□

Exercício 4.9. *Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_{2n+1}}{l_{2n}} = 1.$$

Solução: Do Exercício 4.7 temos,

$$l_{2n+2} \leq l_{2n+1} \leq l_{2n}.$$

Logo,

$$\frac{l_{2n+2}}{l_{2n}} \leq \frac{l_{2n+1}}{l_{2n}} \leq 1.$$

O que é equivalente, usando o exercício anterior, a

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{l_{2n+1}}{l_{2n}} \leq 1.$$

Agora, uma vez que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n}} = \frac{2+0}{2+0} = 1,$$

e $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, segue pelo teorema do confronto que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_{2n+1}}{l_{2n}} = 1.$$

□

4.2 Fórmula de Wallis

Mostre que

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots = \frac{\pi}{2}.$$

Solução: Pelo exercício anterior temos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{l_{2n+1}}{l_{2n}} = 1$ e pelos exercícios (4.5) e (4.1),

$$l_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \quad e \quad l_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} \dfrac{2k}{2k+1}}{\dfrac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k}} = 1.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots = \frac{\pi}{2}.$$

□

Exercício 4.10. *Usando a fórmula de Wallis, mostre que*

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

Solução: Pela fórmula de Wallis temos que,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

Daí segue,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n)^2}{[3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots(2n-1)]^2\cdot(2n+1)}},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots(2n-1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}\right]. \tag{4.2}$$

Escrevendo

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{2+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}},$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{2+\frac{1}{n}}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Para finalizar, a equação (4.2) nos dá,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots(2n-1)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}},$$

e então,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots(2n-1)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

e finalmente,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

$\square$

Exercício 4.11. *Calcule*

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

Solução: Fazendo a substituição $x = cost$ temos que $dx = -sentdt$. Para $x = 0$ temos $t = \frac{\pi}{2}$ e para $x = 1$ temos $t = 0$. Daí,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-cos^2 t)^n sentdt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sen^{2n+1} tdt.$$

Agora, como pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sen^{2n+1} tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1} tdt,$$

segue,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sen^{2n+1} tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1} tdt,$$

e então, pelo Exercício 4.5 temos,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2n+1)}.$$

□

Exercício 4.12. *Mostre que*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^n x}{sen^n x + cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Solução: Mostraremos inicialmente que se f é uma função contínua e a um número real então $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$. De fato, fazendo $u = a - x$ temos $du = -dx$ e assim,

$$\int_0^a f(a-x)dx = -\int_a^0 f(u)du = \int_0^a f(u)du.$$

Ou seja,

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx.$$

Passamos agora à prova. Note que,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^n x}{sen^n x + cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{sen^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + cos^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx,$$

pois $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$ são funções contínuas. Assim, temos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^n x}{sen^n x + cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{cos^n x + sen^n x} dx.$$

Daí,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^n x}{sen^n x + cos^n x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{cos^n x + sen^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx,$$

isto é,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^n x}{sen^n x + cos^n x} dx = \frac{\pi}{2},$$

e portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^n x}{sen^n x + cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

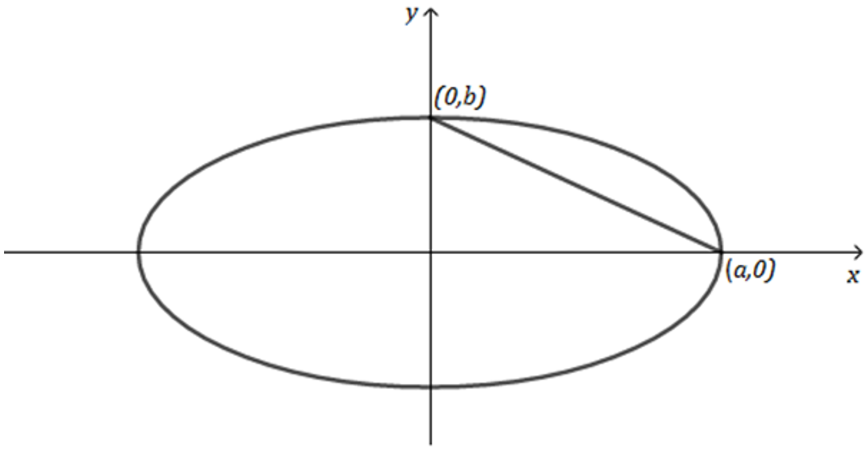
□

5 O COMPRIMENTO DA ELIPSE

Nesse capítulo usaremos a integral definida de 0 a $\frac{\pi}{2}$ da potência par de seno e a série binomial de Newton para deduzir uma fórmula para o comprimento da elipse. Primeiramente, deduziremos uma fórmula que envolve uma integral que muitos matemáticos a estudaram e chegaram à conclusão de que a mesma não é resolvível por funções elementares. A seguir, desenvolveremos uma fórmula que dará uma aproximação tão boa quanto se queira. Por fim, ilustraremos o assunto com dois exercícios.

Considere uma elipse centrada na origem de um sistema de eixos cartesianos xOy.

Figura 7 – Elipse.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Primeiramente, mostraremos que o comprimento L da elipse pode ser dado por,

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 sen^2\theta}d\theta, \tag{5.1}$$

onde ε é a excentricidade da elipse.

Calcularemos o comprimento da curva referente ao primeiro quadrante. Neste caso, consideremos a equação,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5.2}$$

Derivando implicitamente em relação a x, obtemos,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-b^2x}{a^2y},$$

que ao elevarmos ao quadrado e somarmos 1 nos dá,

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}. \tag{5.3}$$

Veja agora que (5.2) equivale a,

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

e substituindo esta equação em (5.3) temos,

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{b^4x^2}{a^4b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{a^4-x^2(a^2-b^2)}{a^2(a^2-x^2)}.$$

Agora, dividindo numerador e denominador por a^2 e fazendo as substituições, $a^2-b^2=c^2$ e $\dfrac{c}{a}=\varepsilon$, obtemos,

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2-\dfrac{x^2c^2}{a^2}}{a^2-x^2} = \frac{a^2-x^2\varepsilon^2}{a^2-x^2}.$$

Finalmente, substituindo esta equação na fórmula do comprimento do arco de uma curva, obtemos,

$$l=\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-x^2\varepsilon^2}{a^2-x^2}}dx.$$

Façamos a substituição $x=asen\theta$. Daí $dx=acos\theta d\theta$, e para $x=0$ tem-se $\theta=0$ e também para $x=a$ tem-se $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, assim,

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2-a^2sen^2\theta\varepsilon^2}{a^2-a^2sen^2\theta}}acos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2(1-sen^2\theta\varepsilon^2)}{a^2(1-sen^2\theta)}}acos\theta d\theta.$$

Dado que $1-cos^2\theta=sen^2\theta$ e $\sqrt{cos^2\theta}=cos\theta$ para $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ segue,

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2sen^2\theta}}{cos\theta}acos\theta d\theta = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2sen^2\theta}d\theta.$$

Portanto, o comprimento total L da elipse é dado por,

$$L=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2sen^2\theta}d\theta. \tag{5.4}$$

Vale observar que um círculo pode ser visto como uma elipse de excentricidade zero. O que faz sentido posto que em (5.4), fazendo $\varepsilon=0$, obtemos a fórmula conhecida já no ensino médio para o comprimento do círculo de raio a:

$$L=4a\frac{\pi}{2}=2\pi a.$$

A integral em (5.4) é classificada como uma integral elíptica. É demonstrado que não é possível calculá-la usando funções elementares. Contudo, pode-se encontrar uma fórmula para o cálculo aproximado do comprimento da elipse dada por,

$$L\approx 2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{64}\varepsilon^4-\frac{5}{256}\varepsilon^6\right).$$

Para tanto, escrevamos $\sqrt{1-\varepsilon^2sen^2\theta}=(1-\varepsilon^2sen^2\theta)^{\frac{1}{2}}$ como série binomial,

$$(1-\varepsilon^2sen^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}\varepsilon^0sen^0\theta+\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}\varepsilon^2sen^2\theta+\begin{pmatrix}1/2\\2\end{pmatrix}\varepsilon^4sen^4\theta+\cdots.$$

Ou seja,

$$(1-\varepsilon^2 sen^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n \varepsilon^{2n} sen^{2n}\theta.$$

Multiplicando por $4a$ e integrando ambos os membros, obtemos para o segundo membro da equação:

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 sen^2\theta}d\theta = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n \varepsilon^{2n} sen^{2n}\theta d\theta,$$

isto é,

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 sen^2\theta}d\theta = 4a\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n \varepsilon^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}\theta d\theta.$$

Portanto,

$$L = 4a\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n \varepsilon^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}\theta d\theta.$$

Equivalentemente,

$$L = 2\pi a + 4a\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n \varepsilon^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}\theta d\theta. \tag{5.5}$$

Mostramos por meio do Exercício 4.1 que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}xdx = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n}\frac{\pi}{2}, \ \ \forall\, n\geq 1.$$

Substituindo em (5.5) temos,

$$L = 2\pi a + 4a\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n \varepsilon^{2n} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n}\frac{\pi}{2},$$

ou ainda,

$$L = 2\pi a\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n}\varepsilon^{2n}\right].$$

Ou equivalentemente,

$$L = 2\pi a\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{1}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\right].$$

Do exposto, concluí-se que para n variando de 1 a 3 temos que:

$$L \approx 2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6\right).$$

Exercício 5.1. *Os planetas do sistema solar têm orbitas elípticas. Encontre uma estimativa para o comprimento da órbita terrestre dado que a excentricidade é cerca de* $0,017$ *e o comprimento do eixo maior é de* $2,99\cdot 10^8$ *km.*

Solução: Usando a aproximação $L \approx 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6\right)$ e $\pi = 3,14$, temos que

$$L \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 1,495 \cdot 10^8 \left(1 - \frac{1}{4}(0,017)^2 - \frac{3}{64}(0,017)^4 - \frac{5}{256}(0,017)^6\right),$$

e daí

$$L \approx 938,79 \cdot 10^6 km.$$

□

Exercício 5.2. *Um jardineiro é contratado para construir um canteiro no formato de uma elipse de eixos iguais* $10m$ *e* $30m$ *respectivamente. Para delimitá-lo, o jardineiro construirá uma cerca com estacas e* 2 *voltas de arame. Determine a quantidade mínima de arame a ser comprado para a realização deste projeto.*

Solução: Sendo o eixo maior $2a = 30$ e o eixo menor $2b = 10$ temos que $c^2 = 15^2 - 5^2$, isto é, $c = \sqrt{200}$. Daí, a excentricidade da elipse é $\varepsilon = \frac{\sqrt{200}}{15} \approx 0,9$. Logo

$$L \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 15 \left(1 - \frac{1}{4}(0,9)^2 - \frac{3}{64}(0,9)^4 - \frac{5}{256}(0,9)^6\right).$$

Portanto, para as duas voltas serão necessários no mímimo $143m$ de arame. □

6 CONCLUSÃO

A primeira ação na realização deste trabalho foi concretizar dois problemas não triviais: provar o produto de Wallis usando integração de potências de seno e provar uma fórmula para o comprimento da elipse. É importante enfatizar que tais problemas não foram contemplados na graduação do autor e, portanto, exigiram revisão e aprofundamento por parte de alguns conceitos de integrais.

Naturalmente surgiu a curiosidade em saber como ele conseguiu chegar ao produto infinito sem a noção de integral. A resposta estava no livro "Arithmetica Infinitorum". Essa obra apresentou duas dificuldades em sua análise, está escrito em latim e a linguagem matemática usada por Wallis é arcaica, pois algumas palavras que ele usou ganharam outros significados nos dias atuais.

Através do auxílio de outras bibliografias percebemos o processo de construção que Wallis usou em sua obra. Entendemos que para ele chegar em seu produto infinito usou muitas proposições. Sem dúvida, os indivisíveis no entendimento de John Wallis foram muito importantes para o desenvolvimento do Cálculo por Isaac Newton. Esse, por sua vez, deu um grande passo com o teorema binomial, pois como demonstrado, serviu como ferramenta para desenvolver uma fórmula para calcular o comprimento da elipse.

Percebe-se que os aspectos históricos da vida e da obra de Wallis têm grande impacto na formação de licenciandos em Matemática e em suas práticas em sala de aula. Por um lado pela forte interdisciplinaridade das suas obras, por outro pelo empenho e coragem que ele teve ao criar algo novo em matemática.

A forma como Wallis escreveu sua obra nos faz refletir sobre a experimentação em Matemática como alternativa de ensino onde se instiga o aluno a fazer conjecturas, observar padrões e retirar conclusões. Certamente nessa perspectiva o aluno entenderá que a Matemática se desenvolve através de um processo investigativo e que possíveis erros cometidos são naturais e fazem parte do processo de se estudar matemática e, assim, evitar-se-á possíveis frustrações nesse sentido por parte do discente.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, A. **Infinitesimal: a teoria Matemática que revolucionou o mundo**. 1. Ed, Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2016.

ÁVILA, G. **O ensino de Cálculo no 2° grau.** In: Revista do Professor de Matemática, n° 18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1996.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. São Paulo: Editora Ciência Moderna, 2007.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 3. ed. São Paulo: UNICAMP, 2004.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B.. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. rev. e ampl. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

IGLINSKI, P. **Wallis formula buried in quantum mechanics calculation**. New York, 10 nov. 2015. Disponível em: <http://www.rochester.edu/newscenter/discovery-of-classic-pi-formula-a-cunning-piece-of-magic-128002/>. Acesso em 01/07/2018.

LOPES, G. L. O. **A criatividade matemática de John Wallis na obra Arithmetica Infinitotum: Contribuições para ensino de cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática**. 2017. 198.f. Tese (Doutorado em Educação)- Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 468.f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SCOTT, J. F. **The Mathematical Work of John Wallis**. 2 Ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1981.

SCRIBA, C. J. **The Autobiography of John Wallis**. F.R.S. (1970) Notes and Records of the Royal Society of London, Vol 25, nº1, 1970.

STEDALL, J. A. **The Arithmetic of Infinitesimals: Jonh Wallis 1656**. (Arithmetica Infinitorum: Jonh Wallis 1656 – Transleted From Latim to English with an introduction). New York, Springer-Verlag, 2004.

STEWART, J. **Cálculo**. 3.Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. V.1.

_______. **Cálculo**. 7. ed. volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2016. V.2.

WALLIS, J. **Arithmetica Infinitorum**. Oxford, 1656. Disponível em: <https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitorum.pdf> Acesso em: 15 abr. 2018.

APÊNDICE A - NOTAS DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES

SEQUÊNCIAS, SÉRIES E O TEOREMA BINOMIAL

Definição A.1. *Uma sequência infinita de termos é uma lista de números escritos em uma ordem bem definida:* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *em que cada termo tem um sucessor.*

Definição A.2. *Uma série infinita é uma expressão da forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Em que (a_n) *é uma sequência infinita de números reais. A notação* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é lida como o somatório de* n *variando* 1 *ao infinito.*

Definição A.3. *Entende-se por produto infinito a expressão* $\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot \cdots \cdot u_n \cdot \cdots$ *. A notação* $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ *é lida como o produtório de* n *variando de* 1 *ao infinito.*

Definição A.4. *Uma sequência* $\{a_n\}$ *tem limite* L *e escrevemos*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

se pudermos tornar os termos a_n *tão próximos de* L *quanto quisermos ao fazer* n *suficientemente grande. Se* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *existir, dizemos que a sequência* ***converge*** *(ou é* ***convergente****). Caso contrário, dizemos que a sequência* ***diverge*** *(ou é* ***divergente****).*

Definição A.5. *Dada uma série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

denote por s_n *sua* n*-ésima soma parcial:*

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Se a sequência $\{s_n\}$ *for convergente e* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ *existir como um número real, então a série* $\sum a_n$ *é dita convergente, e escrevemos* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s$ *ou* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$*. O número* s *é chamado soma da série. Caso contrário, a série é dita divergente.*

Proposição A.1 (Teorema Binomial)**.** *Se* k *for um número real qualquer e* $|x| < 1$*, então*

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots .$$