UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME FRACAMENTE EINSTEIN E VARIEDADES COM TENSORES DE DIVERGÊNCIA NULA

FORTALEZA

2018

FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME FRACAMENTE EINSTEIN E VARIEDADES COM TENSORES DE DIVERGÊNCIA NULA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O47m Oliveira, Fabricio de Figueredo.
Métricas críticas do funcional volume fracamente Einstein e variedades com tensores de divergência nula / Fabricio de Figueredo Oliveira. – 2018.
54 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Métrica crítica. 2. Miao-Tam. 3. CPE. 4. Cotton nulo. 5. Fracamente Einstein. I. Título.
CDD 510

FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME FRACAMENTE EINSTEIN E VARIEDADES COM TENSORES DE DIVERGÊNCIA NULA.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em 17/07/2018:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará-UFC

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
Universidade Federal do Ceará-UFC

Profa. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo
Universidade Federal do Ceará- UFC

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista
Universidade Federal do Piauí- UFPI

Prof. Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco
Universidade Nacional Autônoma do México -UNAM

Dedico este trabalho à minha amada esposa Natália Queiroz e aos meus queridos filhos Pedro Henrique e Ana Cláudia por serem meu centro geodésico de equilíbrio mental.

AGRADECIMENTOS

Nunca estive só e por isso faz-se necessário agradecer a quem caminhou junto comigo nesta tão longa jornada. Gostaria então de agradecer à Deus que, dentro de minhas crenças religiosas, me permite estar vivendo cada um dos passos que tenho dado até hoje. Gostaria de agradecer aos meus pais Dona Judite e Sr. Oliveira por me terem dado a educação de vida que tenho hoje, pelo bom exemplo de como ser pai e formar uma bela família e também por terem superado todas as dificuldades, mesmo sem instrução educacional e recursos financeiros, e terem mantido os quatro filhos sempre na escola incentivando que sempre estudássemos no horário complementar ao do trabalho. Pai, mãe, sem esse esforço de vocês eu nunca teria chegado até aqui, muito obrigado. Agradecer a Natália, minha esposa, por cada dia desde os tempos de cursinho (o cursinho do Centro de Ciências da UFC, onde nos conhecemos) pois nunca me deixou desistir, por ter esperado que eu passasse nos exames do mestrado para então planejarmos nossa vida juntos. Por todo o apoio e incentivo para irmos a um novo estado estabelecer uma vida nova após nossa aprovação no concurso da UFERSA. Agradecer ainda por saber me consolar nas derrotas e estar sempre ao meu lado em momentos bons e ruins. Por ter assumido em casa toda a responsabilidade quando precisei viajar à Fortaleza após o encerramento do prazo de afastamento na UFERSA permitindo que eu pudesse continuar os esforços de concluir o doutorado. Agradecer aos meus irmãos Flaviano, Fabiany e Plácido pois sempre acreditaram em meu potencial e em minha aprovação. Agradecer ainda aos meus sogros Raul e Consuelo pelas orações e incentivos. Obrigado ainda a todos os outros familiares que de algum modo me ajudaram a concluir esta empreitada. Por outro lado gostaria de agradecer ao meu Professor Eusérgio Dantas, que no 3º ano do ensino médio me deu ainda mais força e incentivo a cursar Matemática na UFC. Agradecer àqueles professores da UFC que contribuíram para minha formação profissional e pessoal pelos cursos e bons exemplos. Em especial, gostaria de agradecer ao Professor, orientador e amigo Abdênago Alves de Barros que por mais de uma e quase duas décadas tem me ajudado, inspirado e me tem feito ver o poder da resiliência e por estar sempre disponível a me ouvir e ensinar. Gostaria também de agradecer aos amigos da PgMat-UFC que me ajudaram a chegar aqui, seja por me permitirem discutir com eles exercícios e teorias matemáticas ou quando íamos ao café no meio da tarde e descontraíamos um pouco, ou mesmo quando me apoiaram e ajudaram durante meu curto período como representante estudantil. Gostaria de nomear alguns aqui por estarem mais próximos e presentes em minha formação. Inicialmente a turma que entrou junta após a seleção: Valdir Ferreira, Davi Lustosa, Diego Eloi, Marcos Ranieri, Antônio Grangeiro.

Foram muitas as aulas, as discussões, dias de estudo, fins de semana reunidos e discutindo exercícios para tentarmos aprovação nas disciplinas e principalmente nos exames de qualificação escritos. Gostaria de agradecer ainda aos contemporâneos, Disson, Adriano, Wilson, Rondinelle, Damião Junio, Flávio, Nazareno, Michel, Luiz Antônio, João Francisco, Kelton, Cristiane, Leandro, Tiarlos, Eraldo, Rafael Diógenes, Edson, Assis, Kelson, Chaves, Joserlan, Alexandre, Cleiton Cunha, Alex, Israel, Leo Ivo. A valorosa experiência de vocês me ajudou bastante a fazer algumas boas escolhas durante o curso. Aos amigos, alguns já bons amigos da época de mestrado, Tiago Cruz, Jocel Faustino, Adam Oliveira, Halyson Baltazar, Emanuel Viana, Diego Eloi e Elzimar Rufino por termos criado o grupo de corrida *corredores elite*, as corridas me ajudaram bastante a manter o foco e o equilíbrio, me fez relaxar em momentos bem complicados. Também aos amigos Manoel Vieira, Wanderley, Airton, Diego Sousa, Raimundo Nonato, Neilha, Eddygledson(Nino), Janielly e Amilcar por cada conversa e incentivo. Um agradecimento especial à Halyson Baltazar e Israel Evangelista por me terem dado grandes ideias que me permitiram ter uma tese mais robusta em função de nossa parceria nos resultados obtidos. Muito obrigado. Agradecer ainda a minha colega de trabalho, parceira de sala e amiga Luiza Helena por todas as conversas, e claro, por todo o auxílio no período final de minha tese. Esse auxílio foi importantíssimo para que eu pudesse finalizar as ideias e estar pronto para digitar a tese. Agradeço ainda a todas as indicações de melhoria de cada membro da banca examinadora. Agradeço à UFERSA por ter me liberado de minhas atividades profissionais o que me permitiu estar por quatro anos concentrado em meus estudos, em especial ao meu departamento por sempre apoiar as liberações para formação docente. Por fim, gradeço também a secretaria da PgMat nas pessoas de Andrea Dantas e Jessyca Soares por toda ajuda dispensada nesta longa caminhada.

Com cada um aprendi muito e com certeza deixei um pouco também. Tenho me tornado uma pessoa melhor com cada convívio e experiência adquirida com cada um.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Nossas atitudes diante das dificuldades no presente moldam como será nosso futuro."(Fabricio Oliveira).

RESUMO

Tratamos de métricas críticas do funcional volume sob a hipótese da variedade ser fracamente Einstein com restrições no sinal da curvatura escalar. Usamos o resultado de Miao e Tam 2009 para também classificar tais métricas como bolas geodésicas em espaços forma. Obtemos um resultado tipo Hopf para tensores, mais precisamente, provamos que em variedades Riemannianas compactas o tensor de Cotton é nulo quando sua divergência é nula e o tensor de riemman com segunda divergência nula tem nulo o seu tensor divergência. Fazemos aplicações na conjectura CPE refinando alguns resultados clássicos como o de Yun, Hwang e Chang de 2014 que aborda variedades com curvatura harmônica, daremos uma prova mais simples que a de Santos em 2017 para validade da conjectura CPE em variedades com divergente do tensor Weyl nulo. Além disso, aplicaremos os resultados tipo Hopf em variedades com operador de curvatura positivo e em quase sólitons de Ricci.

Palavras-chave: Métrica crítica. Miao-Tam. CPE. Einstein. Fracamente Einstein. Cotton. Cotton nulo. Curvatura harmônica. Operador de curvatura. Hopf.

ABSTRACT

We deal with critical metrics of the functional volume under the hypothesis that the manifold is weakly Einstein with constraints on the scalar curvature signal. We use the result of Miao and Tam 2009 to classify such metrics as geodesic balls into space forms. We obtain a Hopf type result for tensors, more precisely, we prove that in compact Riemannian manifolds the Cotton tensor is null when its divergence is zero and the tensor of riemman with second null divergence has zero its tensor divergence. We make applications in the CPE conjecture by refining some classical results such as Yun, Hwang and Chang of 2014 that approaches manifolds with harmonic curvature, we will give a simpler proof than that of Santos in 2017 for the validity of the CPE conjecture in manifolds with divergent Weyl tensor null. In addition, we will apply the Hopf type results in manifolds with positive curvature operator and in almost Ricci solitons.

Keywords: Critical metric. Miao-Tam. CPE. Einstein. Weakly Einstein. Cotton. Null cotton. Harmonic curvature. Positive curvature operator. Hopf.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta tese aborda dois assuntos ligados a pontos críticos de funcionais riemannianos. O primeiro é estudar variedades conexas e compactas com bordo denominadas métricas críticas de Miao-Tam. Os precursores deste estudo foram Miao e Tam que em 2009 estudaram pontos críticos do funcional volume em variedades com bordo e métrica fixada na fronteira. Formalmente, uma métrica crítica de Miao-Tam é uma tripla (M^n, g, f), onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa, compacta de dimensão pelo menos três com uma fronteira suave ∂M, $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave com $f^{-1}(0) = \partial M$ que satisfaz o sistema de equações

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = g, \tag{1}$$

onde Δ, ∇^2 e Ric denotam, respectivamente, o operador Laplaciano, o operador Hessiano e o tensor de Ricci. Observe que, tomando o traço na identidade (1), obtemos

$$(n-1)\Delta f + Rf + n = 0, \tag{2}$$

sendo R é a curvatura escalar. Convém mencionar que Miao e Tam em 2009 provaram que tais métricas críticas têm curvatura escalar constante e que as bolas geodésicas em formas espaciais tem a estrutura de métrica crítica. Os mesmos autores em 2011 avançaram neste tema e provaram o seguinte teorema

Teorema 1.1 (Miao-Tam). *Se (M^n, g, f) é uma métrica crítica Miao-Tam, conexa, Einstein com fronteira suave ∂M, então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.*

A partir daí surgem outros trabalhos considerando outras hipóteses sobre a variedade para se tentar classificar métricas críticas sob tais condições. Em 2015 Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. classificaram também como bolas geodésicas as métricas de Miao-Tam, simplesmente conexas de dimensão quatro com a condição da métrica ser Bach-flat. Já Baltazar, Batista e Bezerra em 2017 melhoraram este último resultado para uma dimensão arbitrária. Baltazar e Ribeiro Jr. em 2017a mostraram que métricas de Miao-Tam com tensor de Ricci paralelo são isométricas a bolas geodésicas nos espaço forma. Além disso, também Baltazar e Ribeiro Jr. em 2017b mostraram que em dimensão três as métricas de Miao-Tam são isométricas a bolas geodésicas quando a curvatura seccional é não negativa.

Na referência Besse de 1979 define-se o tensor $\breve{R}$ por

$$\breve{R}_{ij} = \sum_{p,q,r} R_{ipqr} R_{jpqr}. \tag{3}$$

Neste trabalho analisamos métricas críticas que são fracamente Einstein com uma imposição sobre o sinal na curvatura escalar. Usaremos a definição de uma variedade ser fracamente Einstein quando o operador curvatura de Riemman Rm satisfaz a seguinte identidade

$$\breve{R}_{ij} = \frac{|Rm|^2}{n} g_{ij}. \tag{4}$$

Nestas condições, provaremos o seguinte resultado em dimensão três

Teorema 1.2. *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica Miao-Tam fracamente Einstein com curvatura escalar não-negativa $R \geq 0$. Então (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica nos espaços forma simplesmente conexos $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.*

Obtemos também um resultado para dimensão quatro na mesma classe de métricas do teorema anterior. Enunciamos como um resultado a parte devido a necessidade técnica de impor, em dimensão quatro, a condição da variedade ser simplesmente conexa no caso da curvatura escalar ser nula, ou seja, $R = 0$.

Teorema 1.3. *Seja (M^4, g, f) uma métrica crítica Miao-Tam fracamente Einstein com curvatura escalar não-negativa $R \geq 0$, com M^4 simplesmente conexa no caso em que a curvatura escalar é nula. Então, (M^4, g) é isométrica a uma bola geodésica nos espaços forma simplesmente conexos $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{S}^4$.*

É portanto, natural pensar o que acontece em dimensão arbitrária. Neste contexto, temos o seguinte

Teorema 1.4. *Seja $(M^n, g, f, n \geq 5)$ uma métrica crítica Miao-Tam fracamente Einstein com curvatura escalar não-positiva $R \leq 0$ e tensor de Weyl se anulando no fibrado tangente da fronteira. Então, (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica nos espaços forma simplesmente conexos $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.*

Na segunda parte deste trabalho abordamos outro conhecido funcional riemanniano estudado, principalmente, em variedades sem bordo, a saber, o funcional curvatura escalar total. Na verdade Miao e Tam(2009) destacam que o estudo deste funcional foi um dos inspiradores para os estudo de métricas críticas Miao-Tam. O funcional curvatura escalar total é definido por

$$\mathcal{S}(g) = \int_M R_g dV_g, \tag{5}$$

onde R_g indica a curvatura escalar na métrica g. Seus pontos críticos foram estudados por Besse em 1979 que conjecturou serem as variedades de Einstein os únicos pontos críticos do funcional curvatura escalar total restrito ao conjunto $\mathcal{C}$ das variedades de curvatura escalar constante e volume unitário. As equações de Euler-Lagrange do funcional (5) restrito a $\mathcal{C}$ são dadas por

$$Ric - \frac{R}{n}g = \nabla^2 f - f\left(Ric - \frac{R}{n-1}g\right). \tag{6}$$

A partir destas considerações, podemos enunciar a seguinte definição

Definição 1.1. *Uma métrica CPE é uma tripla (M^n, g, f), onde (M^n, g) é variedade Riemanniana orientada, compacta de dimensão pelo menos três com curvatura escalar constante e f é uma função suave em M, chamada função potencial, satisfazendo o sistema de equações* (6).

Foi estabelecido por Besse em 1979 a conhecida conjectura CPE:

Conjectura 1.1. *Toda métrica crítica do funcional curvatura escalar total restrito ao conjunto das métricas de curvatura escalar constante e volume unitário é isométrico à esfera euclidiana unitária.*

Muitos pesquisadores analisaram a veracidade da Conjectura 1.1 e obtiveram uma resposta para ela quase sempre acrescentando hipóteses. O primeiro trabalho que tratou do tema foi publicado por Lafontaine em 1983. Ele provou que a conjectura torna-se verdadeira ao supor que a variedade é localmente conformemente plana. A literatura não trouxe resultados diretamente relacionados com a conjectura nos dezessete anos seguintes, até que Hwang em 2000 iniciou a publicação de uma série de trabalhos que abordam este tema. No primeiro deles o autor provou que as métricas de Einstein são pontos críticos do funcional curvatura total sob o conjunto $\mathcal{C}$, das métricas de curvatura escalar constante e volume unitário, desde que a hipótese $f \geq -1$ seja satisfeita. Além deste resultado, Hwang também concluiu que, se o par (g, f) é solução não-trivial do sistema (6), com $f < -1$, então M^n não admite hipersuperfície orientada compacta mergulhada mínima estável. Este último resultado ressurge nos anos seguintes, por exemplo em Hwang e Chang em 2004, ao relacionar uma métrica CPE com produtos torcidos, iniciando assim o estudo da conjectura sob um ponto de vista mais topológico.

Chang, Hwang e Yun em 2012 provaram que a conjectura CPE é verdadeira se a variedade tem tensor de Ricci paralelo. Além disso, mostraram que, no caso da variedade ter curvatura harmônica e tensor de Ricci não-paralelo, com pelo menos três autovalores distintos em cada ponto, então a métrica não pode ser solução da CPE. Finalmente, provaram que soluções da CPE não-triviais não podem ser produtos torcidos.

O Teorema de Hopf afirma que em uma variedade M^n compacta, conexa e orientável, toda função suave $f : M^n \to \mathbb{R}$ que tem $\Delta f \geq 0$ é uma função constante. Considerando X o campo gradiente $X = \nabla f$, temos $divX = \Delta f$. Assim, o Teorema de

Hopf garante que se esse campo tem divergência nula, então X é campo identicamente nulo. Ou seja, nas condições estabelecidas acima

$$divX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

A partir daí é natural pensar na existência de um teorema tipo Hopf também para tensores e tentar determinar condições, em uma variedade Riemanniana, para que um dado tensor com divergência nula implique que o próprio tensor seja nulo. Além disso, como a divergência de um tensor também é um tensor, podemos buscar condições que imponham a nulidade do tensor divergência ao assumir a segunda divergência nula, ou seja, se T é um tensor, que condições fazem verdadeiras as implicações

$$div^2T = 0 \Rightarrow divT = 0, \qquad divT = 0 \Rightarrow T = 0.$$

Assim, na segunda parte deste trabalho traremos alguns avanços neste tema. Inicialmente, provamos dois resultados para variedades Riemannianas compactas sem fronteira. O primeiro mostra um teorema tipo Hopf para o tensor de Cotton

Teorema 1.5. *Se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta, sem fronteira, com tensor de Cotton C com divergência nula, então o tensor C é nulo.*

O segundo teorema nos informa algo semelhante para o tensor curvatura de Riemann. Ele garante ser nulo o divergente do tensor de Riemann sob a hipótese de sua segunda divergência ser zero. Mais precisamente,

Teorema 1.6. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta, de dimensão n e sem fronteira. Supondo que $div^2Rm = 0$ então $divRm = 0$.*

Aplicando estes dois resultados, obtemos uma demonstração mais direta do Teorema 1 de Santos 2017 e aprimoramos o resultado de Chu e Fang de 2017 substituindo a hipótese tensor de Cotton paralelo por tensor de Cotton de divergência nula, conforme o teorema seguinte

Teorema 1.7. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com curvatura escalar R constante e tensor de Cotton com divergência nula. Então*

$$\int_M |\mathring{Rm}|^2 \Big(R - (n-1)C(n)|\mathring{Rm}| \Big) \, dV_g \leq 0, \tag{7}$$

onde a constante $C(n)$ vale

$$C(n) = \frac{2(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + \frac{n^2 - n - 4}{\sqrt{(n-2)(n-1)n(n+1)}} + \sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{n}}.$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, (M^n, g) é isométrico a um quociente *finito de* $\mathbb{S}^n$.

Além disso aperfeiçoamos um resultado clássico de Tachibana de 1974 provando o seguinte

Teorema 1.8. *Se* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana sem fronteira com* $div^2 Rm = 0$ *e operador de curvatura positivo, então* M *é uma variedade de curvatura escalar constante.*

Além disso o resultado de Yun, Chang e Hwang de 2014 é aperfeiçoado pelo seguinte teorema

Teorema 1.9. *A conjectura CPE é verdadeira se* (M^n, g, f) *tem* $div^2 Rm = 0$.

Aperfeiçoamos também o resultado de Tran 2017

Teorema 1.10. *Se* (M^n, g), $n \geq 4$ *é uma variedade riemanianna compacta com* $div^2 Rm = 0$ *e operador de curvatura não negativo, então* M *é localmente simétrica ou conformemente plana.*

Um outro assunto abordado neste trabalho tem relação com quase sóliton de Ricci. Esta classe de variedades foi abordada por Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti em 2010 ao considerar Ricci Solitons com o parâmetro não mais como uma constante, mas como uma função na variedade. Formalmente chama-se quase sóliton de Ricci uma variedade Riemanniana (M^n, g) quando existe um campo vetorial X satisfazendo a equação

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{8}$$

onde λ é uma função suave na variedade M e $\mathcal{L}$ indica derivada de Lie. A equação (8) é chamada equação fundamental de um quase sóliton de Ricci. Se a função λ satisfaz $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$ classificam-se como quase sóliton de Ricci *expanding*, *steady* ou *shrinking*, respectivamente. Caso contrário chama-se quase sóliton de Ricci *indefinite*. Quando $f : M \to \mathbb{R}$ é função suave e o campo X é o campo gradiente $X = \nabla f$, então a equação fundamental torna-se

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g, \tag{9}$$

e a variedade chama-se quase sóliton de Ricci gradiente com f dita função potencial. Quando o campo X é trivial ou a função potencial f é constante o quase sóliton de Ricci é dito trivial.

Nesta direção, concluímos este trabalho ao refinar um teorema de Barros, Oliveira e Evangelista de 2017 no contexto dos quase sóliton de Ricci. Mais precisamente, garantimos o seguinte teorema.

Teorema 1.11. *Se* (M^n, g, X, λ) *é quase sóliton de Ricci, não-trivial, orientado, compacto com tensor de Cotton com divergência nula, então* M^n *é isométrica a esfera padrão* $\mathbb{S}^n$ *quando satisfaz alguma das condições:*

1. $S_2(A)$ é uma constante e positiva.
2. $S_k(A)$ não é identicamente nula em M e $S_{k+1} = cS_k(A)$, onde $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, para algum $k = 2, \ldots, n-1$.
3. $Ric \geq \dfrac{R}{n}g$, com $R > 0$ e $\int_M S_k(A)\Delta h \geq 0$, para algum $k = 2, \ldots, n-1$.
4. S_k é constante para $k = 2, \ldots, n-1$ e $A > 0$.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos as principais notações e definições além dos resultados prévios necessários ao bom entendimento das proposições, lemas e teoremas que serão abordados nos capítulos seguintes. Salientamos que usaremos a convenção de Einstein para somatório, na qual índices repetidos indicam soma.

2.1 Curvaturas e tensores em variedades

Iniciamos recordando as definições das curvaturas de Riemann, de Ricci e da curvatura escalar.

Definição 2.1. *Se (M^n, g) é variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇, o tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)-$tensor $Rm : \mathfrak{X}^3(M) \to \mathfrak{X}(M)$ que associa aos campos vetoriais X, Y, Z um outro campo vetorial dado por*

$$Rm(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Usando a métrica $g = \langle \ , \ \rangle$ podemos interpretar a curvatura de Riemann como um $(0,4)-$tensor dado por

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle.$$

O tensor curvatura de Riemann Rm satisfaz as seguintes propriedades cujas demonstrações podem ser encontradas em do Carmo (2005).

Proposição 2.1. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $Rm(X,Y)Z = -Rm(Y,X)Z.$
2. $Rm(X,Y,Z,W) = Rm(Z,W,X,Y)$
3. Primeira identidade de Bianchi:

$$Rm(X,Y)Z + Rm(Y,Z)X + Rm(Z,X)Y = 0.$$

4. Segunda identidade de Bianchi

$$(\nabla_X Rm)(Y,Z)W + (\nabla_Y Rm)(Z,X)W + (\nabla_Z Rm)(Y,X)W = 0.$$

Escrevendo num sistema de coordenadas $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e colocando

$$R_{ijk} \ := \ Rm(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijkl} X_l$$

e

$$R_{ijks} \quad := \quad \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s\rangle = \sum_l R_{ijkl}g_{ls}$$

podemos reescrever a proposição acima da seguinte maneira.

Proposição 2.2. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $R_{ijk} = -R_{jik}$.
2. $R_{ijkl} = R_{klij}$.
3. Primeira identidade de Bianchi:

$$R_{ijk} + R_{jki} + R_{kij} = 0.$$

4. Segunda identidade de Bianchi: $(\nabla_i Rm)_{jkl} + (\nabla_j Rm)_{kil} + (\nabla_k Rm)_{ijl} = 0$.

Podemos considerar o tensor de Riemann como uma forma bilinear simétrica agindo em 2-formas por

$$Rm(\phi, \psi) = R_{ijkl}\phi_{ij}\psi_{kl} \tag{10}$$

e apresentar a seguinte definição

Definição 2.2. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) tem operador de curvatura positivo se, para cada 2-forma $\phi \neq 0$, vale $Rm(\phi, \phi) > 0$ e tem operador de curvatura não-negativo se $Rm(\phi, \phi) \geq 0$, para toda $2-$forma ϕ.*

A partir do tensor curvatura de Riemann, definimos o tensor curvatura de Ricci como o seu traço.

Definição 2.3. *Em uma variedade Riemanniana (M^n, g) o tensor curvatura de Ricci é o $(0,2)-$tensor $Ric : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ que associa os campos vetoriais $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ a função*

$$Ric(X, Y) = tr\{Z \to Rm(Z, X)Y\}$$

A curvatura escalar de M é dada como o traço do tensor curvatura de Ricci, de acordo com a definição seguinte.

Definição 2.4. *Em uma variedade Riemanniana (M^n, g), a função curvatura escalar é a função $R : M \to \mathbb{R}$ definida como o traço do tensor de Ricci:*

$$R = tr(Ric). \tag{11}$$

Apresentaremos agora tensores usados no texto e algumas de suas propriedades. Iniciamos com o tensor de Weyl W que aparece na decomposição do tensor de curvatura de Riemann como segue

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \end{aligned} \tag{12}$$

O tensor de Cotton C é definido por

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}), \tag{13}$$

enquanto o tensor de Bach B é definido por

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla_k \nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_{ikjl}. \tag{14}$$

Por fim, o tensor de Schouten A é dado por

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij}). \tag{15}$$

Observe que tomando traço na equação (15), obtemos

$$tr(A) = \frac{R}{2(n-1)}. \tag{16}$$

Consequentemente, podemos afirmar que o tensor de Schouten tem traço constante se, e somente se, a curvatura escalar R é constante.

Lembremos que um tensor arbitrário D é paralelo se $\nabla D = 0$. Em particular, toda métrica Riemanniana g é paralela. Dizemos, ainda, que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é localmente simétrica, se o tensor curvatura de Riemann Rm é paralelo, ou seja, se $\nabla Rm = 0$.

Definimos o operador de traço nulo da seguinte forma.

Definição 2.5. *Seja T um $(0,2)-$tensor na variedade Riemanniana M^n de dimensão n. Definimos o $(0,2)-$tensor de traço nulo $\mathring{T}$ por*

$$\mathring{T} = T - \frac{trT}{n}g.$$

Pela definição $\mathring{T}$ tem traço nulo e daí podemos garantir o seguinte lema

Lema 2.1. *Numa variedade Riemanniana de dimensão n $(M^n, \langle\ ,\ \rangle)$, vale a seguinte desigualdade para um tensor T*

$$(trT)^2 \leq n|T|^2. \tag{17}$$

Em particular, se $T = \nabla^2 f$ obtemos o seguinte lema.

Lema 2.2. *Para uma função suave f em uma variedade Riemanniana M^n de dimensão n, vale a desigualdade*

$$(\Delta f)^2 \leq n|\nabla^2 f|. \tag{18}$$

Usando o produto de Kulkarni-Nomizu para tensores arbitrários A e B

$$(A \odot B)_{ijkl} = A_{ik}B_{jl} + A_{jl}B_{ik} - A_{il}B_{jk} - A_{jk}B_{il}, \tag{19}$$

e a decomposição (12) podemos relacionar os tensores de Schouten e Riemann de acordo com a seguinte expressão

$$R_{ijkl} = (A \odot g)_{ijkl} + W_{ijkl}. \tag{20}$$

A relação envolvendo as normas dos tensores de Weyl e de Riemann é dada pela equação

$$\frac{|Rm|^2}{n} = \frac{|W|^2}{n} + \frac{4}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2}{n^2(n-1)}R^2. \tag{21}$$

Além disso, é possível estabelecer para $n \geq 4$ uma ligação entre o tensor de Cotton e a divergência do tensor de Weyl pela igualdade

$$C_{ijk} = -\frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl}. \tag{22}$$

Cao e Chen em 2013 (Lema 5.1) provaram que, se $n \geq 4$, então

$$B_{ij,j} = \frac{n-4}{(n-2)^2}C_{ijk}R_{jk}. \tag{23}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} \nabla_i(\nabla_j B_{ij}) := \nabla_i\nabla_j B_{ij} &= \frac{n-4}{(n-2)^2}\nabla_i(C_{ijk}R_{jk}) \\ &= \frac{n-4}{(n-2)^2}(\nabla_i C_{ijk}R_{jk} + C_{ijk}\nabla_i R_{jk}). \end{aligned} \tag{24}$$

2.2 Variedade localmente conformemente plana.

O conceito de variedade conformemente plana traz uma equivalência da métrica dada na variedade com outra métrica em espaços de curvatura constante. No entanto, existe uma caracterização que envolve o tensor de Cotton em dimensão três e o tensor de Weyl em dimensão maior ou igual a quatro. Apresentaremos os detalhes logo a seguir, mas antes vejamos a definição da equivalência mencionada acima.

Definição 2.6. *Duas métricas Riemannianas g e $\overline{g}$ em uma variedade M são ditas conformemente equivalentes, se existe uma função suave $\varphi : M \to \mathbb{R}$ que, em cada ponto de M, satisfaz a relação*

$$\overline{g} = e^{2\varphi} g. \tag{25}$$

Em particular, dizemos que as métricas g e $\overline{g}$ são localmente conformemente equivalentes, se para cada $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M e uma função $\varphi : U \to \mathbb{R}$ satisfazendo (25) *em todo ponto de U.*

Com a definição acima podemos apresentar o que significa uma variedade ser localmente conformemente plana

Definição 2.7. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita localmente conformemente plana se a métrica g é localmente conformemente equivalente a uma métrica com tensor de curvatura nulo.*

Usaremos neste trabalho uma caracterização de variedades localmente conformemente planas em termos dos tensores de Cotton e de Weyl que pode ser encontrada em Kühnel(2006).

Proposição 2.3. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é localmente conformemente plana se, e somente se, vale*

1. $C = 0$ em dimensão $n = 3$ ou
2. $W = 0$ em dimensão $n \geq 4$.

2.3 Métricas críticas do funcional volume

Em 2009 Fan, Shi e Tam consideraram uma variedade assintoticamente plana de dimensão três (M^3, g) com um dado fim . Sendo $\{x_i\}$ um sistema de coordenadas no infinito que define a estrutura assintótica de (M, g), tomaram a esfera coordenada $S_r = \{x \in M; \ \ |x| = r\}$ e γ a métrica induzida em S_r. Verificaram que, para r muito grande (S_r, γ) pode ser isometricamente mergulhada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ como uma hipersuperfície estritamente convexa S_r^0. Sendo $V_0(r)$ o volume delimitado por S_r^0 em $\mathbb{R}^3$ e $V(r)$ o volume da região delimitada por S_r em (M^3, g) eles provaram que, se a curvatura escalar na métrica g, R_g, é não negativa, então, usando o Teorema da Massa Positiva com $r \to \infty$, vale a comparação de volume

$$V(r) \geq V_0(r). \tag{26}$$

Assim, observaram que, para estudar a comparação de volumes (26) fez-se necessário hipóteses sobre a curvatura escalar e, ainda que, a modelagem do problema se deu como um problema de valores de fronteira, ou seja, os elementos envolvidos têm a mesma geometria na fronteira. A partir daí, buscaram informações sobre resultados similares em variedades compactas com fronteiras. Neste contexto o mais natural para analisar comparação de volume é considerar o funcional volume para uma variedade riemaniana (M^n, g)

$$V(g) = \int_M dV_g. \tag{27}$$

Então, Miao e Tam em 2009 analisaram os pontos críticos deste funcional e observaram que, com algumas condições, uma métrica g é ponto crítico dele se, e somente se, existe uma função $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f = 0$ na fronteira e, além disso, satisfaz ao sistema de equações

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = g,$$

onde Δ é o laplaciano, ∇^2 é o hessiano e Ric é o tensor de Ricci na métrica g.
Surge então a seguinte definição de uma métrica crítica de Miao-Tam
Definição 2.8 (Métrica crítica Miao-Tam)**.** *Uma métrica crítica de Miao-Tam é uma tripla (M^n, g, f), onde M^n é uma variedade Riemanniana conexa, compacta de dimensão pelo menos três com uma fronteira suave ∂M e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ e*

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = g.$$

2.4 Exemplos

Os exemplos a seguir foram obtidos por Miao e Tam em 2009
Exemplo 2.1. *Seja $(\mathbb{R}^n, \overline{g})$ o espaço euclidiano com métrica canônica $\overline{g}$. Considere $M \subset \mathbb{R}^n$ uma bola geodésica centrada na origem de raio R com métrica induzida g. Tome f a função dada pela equação $f(x) = \dfrac{R^2}{2(n-1)} - \dfrac{|x|^2}{2(n-1)}$.*
Nestas condições, temos que

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{n-1} g,$$

$$\Delta f = -\frac{n}{n-1}.$$

Daí,

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = \frac{n}{n-1} g - \frac{1}{n-1} g = g,$$

e

$$f^{-1}(0) = \partial M.$$

Assim, as bolas geodésicas (M^n, g, f) contidas no espaço euclidiano são exemplos de métricas críticas de Miao-Tam.

Semelhante ao exemplo anterior, as bolas geodésicas em $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$ também são métricas críticas de Miao-Tam, conforme os próximos dois exemplos

Exemplo 2.2. *Considerando o espaço de Minkowski* $\mathbb{R}_1^n = (\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$*, onde* $\overline{g} = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 - dt^2$ *e o espaço hiperbólico dado por* $\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - t^2 = -1,\ t \geq 1\}$ *mergulhado em* $\mathbb{R}_1^n$ *e* g *a métrica induzida em* $\mathbb{H}^n$ *por* $\overline{g}$*. Assim,* g *é métrica Riemanniana. Fixando o ponto* $p = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{H}^n$*, considerando em* $\mathbb{H}^n$*, a bola geodésica* M^n *centrada em* p *de raio* R *e a função* f *dada pela equação* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{\cosh r}{\cosh R}\right)$*, onde* r *é a distância geodésica do ponto* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ *à* p*. Observe que* $t = \cosh r$*, sendo, portanto,* t *a função altura.*

Consequentemente, obtemos

$$\nabla^2 f = -\frac{t}{(n-1)\cosh R} g,$$

e

$$(\Delta f) g = -\frac{tn}{(n-1)\cosh R} g.$$

Portanto, $f^{-1}(0) = \partial M$ *e*

$$\begin{aligned} -(\Delta f)g + \nabla^2 f - f Ric &= \frac{nt}{(n-1)\cosh R} g - \frac{t}{(n-1)\cosh R} g \\ &+ \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{t}{\cosh R}\right)(n-1) g \\ &= g. \end{aligned}$$

Assim, (M^n, g, f) *é métrica crítica de Miao-Tam.*

Exemplo 2.3. *Sejam* $\mathbb{S}^n$ *a esfera canônica no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e o ponto* $p = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{S}^n$*. Considere* $M^n \subset \mathbb{S}^n$ *a bola geodésica centrada em* p *de raio* $R < \frac{\pi}{2}$*,* g *a métrica induzida em* M *e* f *a função definida por* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{\cos r}{\cos R} - 1\right)$*, onde* r *é a função distância geodésica de* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ *à* p*. Sendo* $t = \cos r$ *a função altura, obtemos*

$$\nabla^2 f = -\frac{t}{(n-1)\cos R} g,$$

e

$$\Delta f g = -\frac{tn}{(n-1)\cos R} g.$$

Portanto, $f^{-1}(0) = \partial M$ *e*

$$\begin{aligned} -\Delta f g + \nabla^2 f - fRic &= \frac{nt}{(n-1)\cos R} g - \frac{t}{(n-1)\cosh R} g \\ &- \frac{1}{n-1}\left(\frac{t}{\cos R} - 1\right)(n-1)g \\ &= g. \end{aligned}$$

Assim, (M^n, g, f) *é métrica crítica de Miao-Tam.*

No contexto das métricas críticas Miao-Tam, Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. em 2015 provaram o seguinte resultado. Para deixar este trabalho mais completo apresentaremos aqui a demonstração dos autores.

Lema 2.3 (Barros-Diógenes-Ribeiro Jr.)**.** *Se* (M^n, g, f) *é uma métrica crítica Miao-Tam, então vale a igualdade*

$$f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \quad (28)$$

Demonstração. Partindo da equação (1) e usando a equação (2), temos

$$\nabla^2 f = fRic - \frac{Rf+1}{n-1} g, \quad (29)$$

a qual, em linguagem tensorial, pode ser escrita como

$$\nabla_i \nabla_j f = fR_{ij} - \frac{fR+1}{n-1} g_{ij}. \quad (30)$$

Substituindo a equação acima na derivada $\nabla_i(fR_{jk}) = \nabla_i f R_{jk} + f\nabla_i R_{jk}$, obtemos

$$\begin{aligned} f\nabla_i R_{jk} &= \nabla_i(fR_{jk}) - \nabla_i f R_{jk} \\ &= \nabla_i(\nabla_j \nabla_k f + \frac{fR+1}{n-1} g_{jk}) - R_{jk}\nabla_i f \\ &= \nabla_i \nabla_j \nabla_k f + \frac{R}{n-1}\nabla_i f g_{jk} - R_{jk}\nabla_i f, \quad (31) \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de R ser constante e a métrica g ser paralela. Trocando i por j, temos

$$f\nabla_j R_{ik} = \nabla_j \nabla_i \nabla_k f + \frac{R}{n-1}\nabla_j f g_{ik} - R_{ik}\nabla_i f, \quad (32)$$

subtraindo as duas últimas expressões chegamos em

$$\begin{aligned} f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= \nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &+ R_{ik}\nabla_i f - R_{jk}\nabla_i f, \end{aligned} \tag{33}$$

concluindo assim a prova do lema. □

Define-se, ainda, o tensor T em uma métrica crítica Miao-Tam por

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) - \frac{R}{n-2}(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f) \\ &+\frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{js}\nabla_s f - g_{jk}R_{is}\nabla_s f). \end{aligned} \tag{34}$$

Observemos que, tanto o tensor de Cotton, quanto o tensor T são antissimétricos nas duas primeiras entradas e têm traço nulo em quaisquer duas entradas, ou seja,

$$T_{ijk} = -T_{jik} \quad e \quad g^{ij}T_{ijk} = g^{ik}T_{ijk} = 0 \tag{35}$$

e

$$C_{ijk} = -C_{jik} \quad e \quad g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = 0. \tag{36}$$

Existe uma relação entre estes tensores. Ela foi descrita por Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. em 2015 e é apresentada no próximo lema

Lema 2.4 (Barros-Diógenes-Ribeiro Jr.)**.** *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam. Então os tensores* T*,* C *e* W *se relacionam por meio da seguinte igualdade*

$$fC_{ijk} = T_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f. \tag{37}$$

Demonstração. Usando a expressão do Lema 2.3 na definição do tensor de Cotton e o fato que a curvatura escalar é constante, obtemos

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= f\left(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik})\right) \\ &= f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) \\ &= R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}), \end{aligned}$$

onde usamos que R é constante na segunda linha e o Lema 2.3 na terceira linha.

Usando ainda a decomposição dada na equação (12), temos que

$$
\begin{aligned}
fC_{ijk} &= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}\left(R_{ik}g_{jl}\nabla_l f + R_{jl}g_{ik}\nabla_l f - R_{il}g_{jk}\nabla_l f - R_{jk}g_{il}\nabla_l f\right)\\
&- \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\nabla_l f g_{ik}g_{jl} - \nabla_l f g_{il}g_{jk}) + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik})\\
&- (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})\\
&= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}\left(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f\right) + \frac{1}{n-2}\left(R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk}\right)\\
&- \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}\right) + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik})\\
&- (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})\\
&= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) - \frac{R}{n-2}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik})\\
&+ \frac{1}{n-2}(R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk}). \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Observemos que os últimos termos na igualdade (38) coincidem com a definição do tensor T na equação (34). Portanto, concluímos que vale a igualdade

$$fC_{ijk} = T_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f. \qquad (39)$$

E assim, concluímos a demonstração do lema. □

3 METRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME FRACAMENTE EINSTEIN

Neste capítulo abordamos o estudo do funcional volume de uma variedade Riemanniana e apresentamos caracterizações relacionadas a esta temática que, de modo pioneiro, foram estudadas no artigo de Miao e Tam em 2009. Os autores estudaram o funcional volume sobre o espaço das métricas de curvatura escalar constante com uma métrica prescrita na fronteira e encontraram uma condição necessária e suficiente para uma métrica ser ponto crítico do funcional volume. Além disso, eles mostraram que, em espaços forma, os únicos domínios cuja métrica canônica é ponto crítico de tal funcional são as bolas geodésicas. Trataremos também deste assunto, porém, abordando tais variedades com a hipótese de serem fracamente Einstein. Provaremos que as bolas geodésicas novamente aparecem como caracterizações de tais métricas críticas.

3.1 Motivação e resultados

Ao analisar um funcional, queremos a priori encontrar seus pontos críticos ou critérios para decidir como obtê-los. Miao e Tam em 2009 foram os precursores no estudo do funcional volume sob algumas condições. A partir do trabalho deles outros autores passaram a usar o termo métricas críticas de Miao-Tam ao se referirem as métricas com as hipóteses usadas no citado artigo. Lembrando que usaremos a seguinte definição para uma métrica crítica de Miao-Tam.

Definição 3.1 (Métrica crítica Miao-Tam)**.** *Uma métrica crítica de Miao-Tam é uma tripla* (M^n, g, f)*, onde* M^n *é uma variedade Riemanniana conexa, compacta de dimensão pelo menos três com uma fronteira suave* ∂M *e* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave tal que* $f^{-1}(0) = \partial M$ *e*

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = g.$$

No artigo de Miao e Tam de 2011 os autores investigaram métricas críticas Miao-Tam com a hipótese de serem variedades de Einstein e obtiveram uma classificação conforme o teorema

Teorema 3.1 (Miao-Tam(2011)-Teorema 1.1)**.** *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam, conexa, Einstein com fronteira suave* ∂M*. Então* (M^n, g) *é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^n$*,* $\mathbb{S}^n$ *ou* $\mathbb{H}^n$*.*

Miao e Tam em 2011 provam também um teorema sobre variedades conformemente planas. Os autores garantem o seguinte teorema

Teorema 3.2 (Miao-Tam(2011)-Corolário 4.1)**.** *Se* (M^n, g, f) *é métrica crítica Miao-*

Tam, conformemente plana e simplesmente conexa, então (M^n, g) é uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo.

Em 2015 Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. classificaram também como bolas geodésicas as métricas Miao-Tam, simplesmente conexas de dimensão quatro com a condição da métrica ser Bach-flat. Já Baltazar, Batista e Bezerra em 2017 aperfeiçoaram este último resultado para uma dimensão arbitrária. Baltazar e Ribeiro Jr. em 2017a mostraram que métricas de Miao-Tam com tensor de Ricci paralelo são isométricas a bolas geodésicas nos espaço forma. Além disso, também Baltazar e Ribeiro Jr. em 2017b mostraram que em dimensão três as métricas de Miao-Tam são isométricas a bolas geodésicas quando a curvatura seccional é não negativa.
Na referência Besse de 1979 define-se o tensor $\breve{R}$ por

$$\breve{R}_{ij} = \sum_{p,q,r} R_{ipqr} R_{jpqr} \tag{40}$$

Neste contexto adotaremos que uma variedade é fracamente Einstein quando o operador curvatura de Riemman Rm satisfaz a seguinte identidade

$$\breve{R}_{ij} = \frac{|Rm|^2}{n} g_{ij}, \tag{41}$$

onde $\breve{R}_{ij}$ é dado pela equação (40). Esta condição de uma variedade ser fracamente Einstein aparece de modo natural como pontos críticos de funcionais quadráticos em variedades compactas sem fronteira. Explicitamente se tomarmos M^n uma variedade Riemanniana e $\mathcal{C}$ o espaço das classes de equivalência de métricas Riemannianas suaves de volume unitário, Catino em 2015 estudou o funcional

$$\mathcal{F}_{t,s}(g) = \int |Ric|^2 dM + t \int R^2 dM + s \int |Rm|^2 dM, \qquad t, s \in \mathbb{R}, \tag{42}$$

com constantes t e s reais e obteve como consequência (veja seu Corolário 6.2) que uma métrica Einstein é métrica crítica para o funcional $\mathcal{F}_{t,s}$ se, e somente se, a variedade é fracamente Einstein. Além disso, variedades Einstein são fracamente Einstein em dimensão quatro, veja comentário após o Lema 3.2.

Os resultados obtidos aqui são com de métricas Miao-Tam em variedades fracamente Einstein sob uma condição de sinal na curvatura escalar. Mais especificamente provamos que em dimensão três vale o seguinte teorema

Teorema 3.3. *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam fracamente Einstein com curvatura escalar não-negativa $R \geq 0$. Então, (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica nos espaços forma simplesmente conexos $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.*

Temos, também, um resultado para dimensão quatro na mesma classe de métricas do teorema anterior.

Teorema 3.4. *Seja (M^4, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam fracamente Einstein com curvatura escalar não-negativa $R \geq 0$, com M simplesmente conexa no caso em que a curvatura escalar é nula. Então, (M^4, g) é isométrica a uma bola geodésica nos espaços forma simplesmente conexos $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{S}^4$.*

O motivo deste último ser enunciado como um teorema a parte surge devido a necessidade de impor, nesta dimensão, a condição da variedade ser simplesmente conexa no caso da curvatura escalar ser nula, isto é, $R = 0$. Acreditamos que tal restrição ocorre devido a técnica utilizada na demonstração e que tal hipótese possa ser removida se utilizado outro método. Por fim, é natural investigar o que acontece em dimensão arbitrária e neste contexto temos o seguinte resultado.

Teorema 3.5. *Seja $(M^n, g, f, n \geq 5)$ uma métrica crítica de Miao-Tam fracamente Einstein com curvatura escalar não-positiva e tal que o tensor de Weyl se anula no fibrado tangente da fronteira. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica nos espaços forma simplesmente conexos $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.*

Observe que em dimensão maior que quatro a hipótese sobre a curvatura escalar tem sinal oposto ao das hipóteses dos dois teoremas anteriores, para $n = 3$ e $n = 4$. Mais uma vez, seria de grande importância tentar outras técnicas para abordar em todas as dimensões o caso da curvatura escalar ter sinal positivo ou negativo.
Na próxima seção, abordaremos uma série de resultados que compõem as ferramentas necessárias para provar os teoremas apresentados.

3.2 Lemas e resultados importantes

Utilizando a linguagem já estabelecida no capítulo 2 prosseguimos nesta seção apresentando alguns lemas que serão úteis nas prova dos teoremas apresentados na seção anterior. O primeiro deles trata de uma igualdade em variedades Riemannianas que envolve importantes tensores da teoria.

Lema 3.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, então a seguinte igualdade é verdadeira*

$$\begin{aligned} \breve{R}_{ij} - \frac{|Rm|^2}{n} g_{ij} &= \breve{W}_{ij} - \frac{|W|^2}{n} g_{ij} + \frac{4}{n-2} W_{ipjq} R_{pq} + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2} \mathring{R}_{iq} \mathring{R}_{qj} \\ &\quad + \frac{4R}{n(n-1)} \mathring{R}_{ij} - \frac{2(n-4)}{n(n-2)^2} |\mathring{Ric}|^2 g_{ij}, \end{aligned} \tag{43}$$

onde $\breve{W}_{ij} = W_{ipqr} W_{jpqr}$.

Demonstração. Inicialmente vamos considerar a expressão (12), que relaciona os tensores de Riemann e de Weyl, e substituir na seguinte expressão do tensor $\breve{R}_{ij}$

$$\breve{R}_{ij} = \sum_{p,q,r}^{n} R_{ipqr}R_{jpqr} \tag{44}$$

para chegarmos na expressão

$$\begin{aligned} \breve{R}_{ij} &= \breve{W}_{ij} + \frac{2}{n-2}W_{ipqr}g_{jq}R_{pr} + \frac{2}{n-2}W_{jpqr}g_{iq}R_{pr} \\ &+ \frac{1}{(n-2)^2}\big(2(n-4)R_{iq}R_{jq} + 4RR_{ij} + 2|Ric|^2 g_{ij}\big) \\ &- \frac{4R}{(n-1)(n-2)^2}((n-2)R_{ij} + Rg_{ij}) \\ &+ \frac{2R^2 g_{ij}}{(n-1)(n-2)^2}. \end{aligned} \tag{45}$$

Nesta última expressão substituiremos as seguintes e conhecidas relações

$$\mathring{Ric} = Ric - \frac{R}{n}g, \tag{46}$$

$$|Ric|^2 = |\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^2}{n}, \tag{47}$$

$$R_{iq}R_{jq} = \mathring{R}_{iq}\mathring{R}_{jq} + \frac{R^2}{n^2}g_{ij} + \frac{2R}{n}\mathring{R}_{ij}, \tag{48}$$

para obtermos a próxima igualdade

$$\begin{aligned} \breve{R}_{ij} &= \breve{W}_{ij} + \frac{4}{n-2}W_{ipjq}R_{pq} + \frac{2|\mathring{Ric}|^2 g_{ij}}{(n-2)^2} \\ &+ \frac{2R^2 g_{ij}}{n(n-2)^2} + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{iq}\mathring{R}_{jq} + \frac{2(n-4)}{n^2(n-2)^2}R^2 g_{ij} + \frac{4(n-4)}{n(n-2)^2}R\mathring{R}_{ij} \\ &+ \frac{4R\mathring{R}_{ij}}{(n-1)(n-2)^2} + \frac{4R^2 g_{ij}}{n(n-1)(n-2^2)} - \frac{2R^2 g_{ij}}{(n-1)(n-2)^2}. \end{aligned} \tag{49}$$

Juntando os termos comuns podemos garantir que

$$\begin{aligned} \breve{R}_{ij} &= \breve{W}_{ij} + \frac{4}{n-2}W_{ipjq}R_{pq} + \frac{2|\mathring{Ric}|^2 g_{ij}}{(n-2)^2} \\ &+ \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{iq}\mathring{R}_{jq} + \frac{4R\mathring{R}_{ij}}{n(n-1)} + \frac{2(n^2-4n+4)R^2 g_{ij}}{n^2(n-1)(n-2)^2}. \end{aligned} \tag{50}$$

Para concluirmos a prova do lema consideraremos a expressão (21) na forma

$$\frac{|Rm|^2}{n}g_{ij} = \frac{|W|^2}{n}g_{ij} + \frac{4}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} + \frac{2}{n^2(n-1)}R^2 g_{ij}, \tag{51}$$

e tomar a subtração das duas últimas expressões para chegar na seguinte identidade

$$\begin{aligned}\breve{R}_{ij} - \frac{|Rm|^2}{n} g_{ij} &= \breve{W}_{ij} - \frac{|W|^2}{n} g_{ij} + \frac{4}{n-2} W_{ipjq} R_{pq} + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2} \mathring{R}_{iq} \mathring{R}_{qj} \\ &\quad + \frac{4R}{n(n-1)} \mathring{R}_{ij} - \frac{2(n-4)}{n(n-2)^2} |\mathring{Ric}|^2 g_{ij}. \end{aligned} \tag{52}$$

Isto conclui a demonstração. □

O resultado seguinte foi obtido por Derdziński (1983) e fornece uma importante identidade em dimensão quatro

Lema 3.2. *Em uma variedade Riemanniana (M^4, g) de dimensão quatro, vale a seguinte identidade*

$$\breve{W}_{ij} = \frac{|W|^2}{4} g_{ij}.$$

Observe que o Lema 3.1 em dimensão quatro nos fornece a seguinte igualdade

$$\breve{R}_{ij} = \frac{|Rm|^2}{4} g_{ij} + \frac{R}{3} \mathring{R}_{ij}. \tag{53}$$

Supondo ainda que a variedade é Einstein teremos

$$\breve{R}_{ij} = \frac{|Rm|^2}{4} g_{ij}. \tag{54}$$

Fica, portanto, estabelecido que, em dimensão quatro, toda variedade Einstein é fracamente Einstein. A recíproca deste fato não é verdadeira, conforme exemplo publicado por Euh, Park e Sekigawa em 2013(página 602) mostrando que nem toda variedade fracamente Einstein é também Einstein.

Exemplo 3.1. *M produto riemanniano de variedades de dimensão dois, $M_1(c)$ e $M_2(-c)$, de curvatura gaussiana c e $-c$, respectivamente. M não é Einstein mas é fracamente Einstein.*

Existem também exemplos de variedades que não são fracamente Einstein.

Exemplo 3.2. *Seja (M^4, g) produto riemanniano de uma variedade de dimensão três $M_1(c)$ de curvatura seccional constante $c \neq 0$ com a reta real $\mathbb{R}$. M não é fracamente Einstein.*

Ainda segundo Euh, Park e Sekigawa em 2013 prova-se que uma certa Álgebra de Lie em dimensão quatro é fracamente Einstein, mas não Einstein. Essencialmente os autores verificaram o seguinte

Exemplo 3.3. *Seja $\mathfrak{g} = span_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a álgebra de Lie real de dimensão 4* *equipada com o seguinte colchete de Lie:*

$$\begin{array}{lll} [e_1, e_2] = ae_2, & [e_1, e_3] = -ae_3 - be_4, & [e_1, e_4] = be_3 - ae_4, \\ [e_2, e_3] = 0, & [e_2, e_4] = 0, & [e_3, e_4] = 0, \end{array}$$

onde a e b são constantes, com $a \neq 0$. Adotando $\langle\, , \rangle$, o produto interno em $\mathfrak{g}$ dado por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Seja G um grupo de Lie, conexo, simplesmente conexo com álgebra de lie $\mathfrak{g}$ de G e g métrica Riemanniana $G-$invariante determinada por $\langle\, , \rangle$. Assim, obtém-se que

$$\begin{array}{lll} R_{1212} = a^2, & R_{1313} = a^2, & R_{1414} = a^2, \\ R_{2323} = -a^2, & R_{2324} = -a^2, & R_{3434} = a^2, \end{array}$$

e zero os elementos restantes. Consequentemente, G é fracamente Einstein, mas como satisfaz $R_{11} = -3a^2$ e $R_{22} = a^2$, G não pode ser Einstein.

Tomando os exemplos (3.1) e (3.2), que são variedades homogêneas, Arias-Marco e Oldrich em 2015 provaram que, em dimensão quatro, todos os possíveis exemplos de variedades fracamente Einstein homogêneas que não são Einstein são isométricas a estes dois exemplos.

Um outro resultado em métricas de Miao-Tam que nos será útil é devido a Batista, Diógenes, Ranieri e Ribeiro Jr. que em 2017 provaram a seguinte identidade integral.

Lema 3.3 (Batista, Diógenes, Ranieri, Ribeiro Jr.(2017)-Lema 5)**.** *Se (M^n, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam, então vale a igualdade*

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dM + \frac{1}{|\nabla f|}\int_{\partial M} \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) d\sigma = 0. \tag{55}$$

O próximo lema é um resultado para pontos de fronteira e desempenha papel fundamental na prova dos nossos resultados principais

Lema 3.4. *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica Miao-Tam. Então ∇f é um autovetor para o tensor curvatura de Ricci em cada ponto da fronteira ∂M.*

Demonstração. Considere um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ que diagonaliza o tensor de Ricci em um ponto de fronteira $q \in \partial M^n$ tal que $\nabla f(q) \neq 0$. Ou seja, temos que $Ric(e_i) = \alpha_i e_i$, onde α_i são os autovalores associados. Desde que em variedades Miao-Tam a função f se anula na fronteira, ou seja, $f|_{\partial M} = 0$, segue da equação (37) e da anti-simetria do tensor de Weyl nas duas últimas entradas que

$$0 = fC_{ijk}\nabla_k f = T_{ijk}\nabla_k f. \tag{56}$$

Usando a definição (34) do tensor T e a expressão (56), obtemos na fronteira ∂M que

$$R_{jk}\nabla_k f\nabla_i f - R_{ik}\nabla_k f\nabla_j f = 0. \tag{57}$$

Em seguida aplicando no ponto $q \in \partial M$, e considerando $R_{ik} = \alpha g_{ik} = \alpha_i\delta_{ik}$, temos

$$(\alpha_j - \alpha_i)\nabla_i f\nabla_j f = 0. \tag{58}$$

Deste modo, ao considerarmos o conjunto não-vazio $L = \{i; \nabla_i f \neq 0\}$ então, da equação (58) temos que $\alpha_i = \alpha$, para todo $i \in L$, e com estas expressões acima podemos obter

$$Ric(\nabla f) = Ric\Big(\sum_{i\in L}\nabla_i f e_i\Big) = \sum_{i\in L}\nabla_i f\alpha_i e_i = \alpha\nabla f. \tag{59}$$

Concluindo a prova do lema. □

Seguindo na construção, temos o próximo lema que expressa a norma do tensor T em termos do tensor de Ricci. Antes de enunciar o resultado, fixaremos algumas notações para os próximos resultados deste capítulo.

Em um ponto arbitrário $q \in \partial M$ da fronteira, consideraremos um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ em uma vizinhança de q contida em M de modo que $e_1 = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

Lema 3.5. *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Nos pontos de fronteira ∂M, temos a seguinte expressão*

$$|T_{ijk}|^2 = \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2 - \frac{2n(n-1)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{11}^2|\nabla f|^2. \tag{60}$$

Demonstração. Iniciando com a definição (34) do tensor T, temos a expressão

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k}T_{ijk}T_{ijk} &= |T_{ijk}|^2 = \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}|Ric|^2|\nabla f|^2 - \frac{2n(n-1)}{(n-2)^2}|Ric(\nabla f)|^2 \\
&\quad + \frac{4(n-1)}{(n-2)^2}RRic(\nabla f,\nabla f) - \frac{2(n-1)}{(n-2)^2}R^2|\nabla f|^2 \\
&= \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2 - \frac{2n(n-1)}{(n-2)^2}|Ric(\nabla f)|^2 \\
&\quad + \frac{4(n-1)}{(n-2)^2}R\mathring{Ric}(\nabla f,\nabla f) + \frac{2(n-1)}{n(n-2)^2}R^2|\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Lembrando que $e_1 = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e usando o Lema 3.4, obtemos para cada $2 \leq a \leq n$, que

$R_{1a} = 0$, e a expressão acima se transforma na seguinte

$$\begin{aligned} |T_{ijk}|^2 &= \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2 - \frac{2n(n-1)}{(n-2)^2}R_{11}^2|\nabla f|^2 \\ &+\frac{4(n-1)}{(n-2)^2}R\mathring{R}_{11}|\nabla f|^2 + \frac{2(n-1)}{n(n-2)^2}R^2|\nabla f|^2 \\ &= \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2 - \frac{2n(n-1)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{11}^2|\nabla f|^2 \end{aligned}$$

e a prova está completa. □

Temos também a seguinte igualdade válida na fronteira de uma métrica crítica de Miao-Tam.

Lema 3.6. *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Nos pontos da fronteira ∂M, temos a seguinte expressão*

$$|\mathring{Ric}|^2 = \frac{n}{n-1}\mathring{R}_{11}^2 + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 |W^\nu|^2, \tag{61}$$

onde $W_{ij}^\nu = W_{i1j1}$.

Demonstração. Tomando a equação (37) e usando a hipótese de estar na fronteira $f|_{\partial M} = 0$, obtemos a seguinte expressão

$$-W_{ijkl}\nabla_l f = T_{ijk}. \tag{62}$$

Podemos escrever o seguinte

$$\begin{aligned} W_{ipjq}R_{pq}\nabla_i f \nabla_j f &= T_{ipq}R_{pq}\nabla_i f \\ &= \frac{1}{2}T_{ipq}(R_{pq}\nabla_i f - R_{iq}\nabla_p f) \\ &= -\frac{n-2}{2(n-1)}|T_{ipq}|^2. \end{aligned} \tag{63}$$

Na última passagem usamos a definição do tensor T, expresso na equação (34). Por outro lado podemos escrever

$$\begin{aligned} |W^\nu|^2 &= W_{i1j1}W_{i1j1} \\ &= \frac{1}{|\nabla f|}W_{i1j1}T_{i1j} \\ &= \frac{n-1}{(n-2)|\nabla f|}W_{i1j1}(R_{ij}\nabla_1 f - R_{1j}\nabla_i f), \end{aligned}$$

aqui usaremos o Lema 3.4 para obtermos a igualdade

$$|W^\nu|^2 \;=\; -\frac{n-1}{(n-2)|\nabla f|^2}W_{ipjq}R_{ij}\nabla_p f\nabla_q f. \qquad (64)$$

Ao compararmos (63) com (64) obtemos

$$|T_{ijk}|^2 = 2|\nabla f|^2|W^\nu|^2. \qquad (65)$$

Por fim, substituindo esta última expressão no Lema 3.5 concluímos o seguinte

$$|W^\nu|^2 = \frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2 - \frac{n(n-1)}{(n-1)^2}\mathring{R}_{11}^2, \qquad (66)$$

que conclui a prova ao isolarmos o termo $|\mathring{Ric}|^2$. □

O próximo lema é o último desta sequência de resultados que nos levarão até as provas de nossos teoremas principais, é também, onde usamos nossa hipótese da variedade ser fracamente Einstein.

Lema 3.7. *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam fracamente Einstein. Nos pontos de fronteira ∂M, vale a seguinte identidade*

$$\frac{4R}{n(n-1)}\mathring{R}_{11} = \frac{1}{n}|W|^2 - \frac{2(n^2-2n-2)}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 + 2\mathring{R}_{11}^2. \qquad (67)$$

Demonstração. Usando o Lema 3.1 e a hipótese de que M^n satisfaz a condição fracamente Einstein, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & W_{ipqr}W_{jpqr}\nabla_i f\nabla_j f - \frac{|W|^2}{n}|\nabla f|^2 + \frac{4}{n-2}W_{ipjq}\mathring{R}_{pq}\nabla_i f\nabla_j f \\ & +2\frac{(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{1q}\mathring{R}_{q1}|\nabla f|^2 + \frac{4R}{n(n-1)}\mathring{R}_{11}|\nabla f|^2 - \frac{2(n-4)}{n(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Ao usarmos a equação (37) e o Lema 3.4 podemos escrever o seguinte

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{1}{|\nabla f|^2}|T_{ijk}|^2 - \frac{|W|^2}{n} + \frac{4}{n-2}W_{1p1q}\mathring{R}_{pq} + 2\frac{(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{11}^2 \\ & + \frac{4R}{n(n-1)}\mathring{R}_{11} - \frac{2(n-4)}{n(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2. \end{aligned}$$

Agora, pela equação (63) e pelo Lema 3.5 esta última identidade se transforma na seguinte

$$\begin{aligned}\frac{4R}{n(n-1)}\mathring{R}_{11} &= -\frac{n-3}{(n-1)|\nabla f|^2}|T_{ijk}|^2 + \frac{|W|^2}{n} - 2\frac{(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{11}^2 + \frac{2(n-4)}{n(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2 \\ &= \frac{1}{n}|W|^2 - \frac{2(n^2-2n-2)}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 + 2\mathring{R}_{11}^2,\end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração. □

Munidos de todos os lemas já enunciados, podemos agora passar para as demonstrações dos teoremas principais apresentados no início deste capítulo.

3.3 Prova do Teorema 3.3

Demonstração. Afim de provarmos o resultado consideremos $n = 3$ no Lema 3.6 e usemos o conhecido fato do tensor de Weyl se anular nesta dimensão. Com estas considerações, temos garantida pelo Lema 3.6 a seguinte igualdade

$$2|\mathring{Ric}|^2 = 3\mathring{R}_{11}^2. \tag{68}$$

Substituindo esta última expressão no Lema 3.7 chegamos na seguinte identidade

$$R\mathring{R}_{11} = |\mathring{Ric}|^2. \tag{69}$$

Se considerarmos $R = 0$, então

$$|\mathring{Ric}|^2 = 0.$$

Por outro lado, se $R > 0$, então

$$\mathring{R}_{11} \geq 0.$$

Usando agora o Lema 3.3, temos que

$$|\mathring{Ric}|^2 = 0.$$

Ou seja, em ambos os casos temos a garantia de $\mathring{Ric} = 0$, assim, pelo Teorema 3.1 temos que (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$. Concluindo a prova do Teorema 3.3. □

3.4 Prova do Teorema 3.4

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos. Aqui faremos inicialmente o caso em que a curvatura escalar é positiva $R > 0$.

Caso 1: M tem curvatura escalar positiva $R > 0$.

Consideremos índices $a, b, c, d \in \{2, \dots, n\}$ e $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Da equação (62) obtemos

$$W_{ijk1} = \frac{T_{ijk}}{|\nabla f|}. \tag{70}$$

Usando as equações (63), (65) e (70), obtemos

$$\begin{aligned} |W|^2 &= W_{ijkl}W_{ijkl} \\ &= W_{ijk1}W_{ijk1} + W_{ijka}W_{ijka} \\ &= \frac{1}{|\nabla f|^2}|T_{ijk}|^2 + W_{ijka}W_{ijka} \\ &= 2|W^\nu|^2 + W_{1jka}W_{1jka} + W_{djka}W_{djka} \\ &= 2|W^\nu|^2 + W_{1jka}W_{1jka} + W_{a1jd}W_{a1jd} + W_{abjd}W_{abjd}. \end{aligned} \tag{71}$$

Observe que após o Lema 3.4 adotamos um referencial ortonormal bem específico, onde $e_1 = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Neste referencial, vale que

$$\nabla_d f = g(\nabla f, e_d) = -|\nabla f| g(e_1, e_d) = -|\nabla f|\delta_{1d} = 0$$

aplicando o Lema 3.5, em pontos de fronteira vale que

$$R_{ds}\nabla_s f = Ric(\nabla f, e_d) = \alpha g(e_d, \nabla f) = -\alpha|\nabla f| g(e_1, e_d) = 0.$$

Utilizando as simetrias do tensor de Weyl, as definições do tensor auxiliar T (equação (34)) e levando em consideração o uso do referencial ortonormal estabelecido acima, obtemos

$$W_{1jka} = \frac{1}{|\nabla f|}\left\{\frac{n-1}{n-2}R_{aj}\nabla_k f - \frac{R}{n-2}g_{aj}\nabla_k f + \frac{1}{n-2}g_{aj}R_{ks}\nabla_s f\right\}.$$

Por fim, desde que

$$W_{1jka} = W_{1a1c} \tag{72}$$

substituindo em (71) obtemos

$$\begin{aligned} |W|^2 &= 3|W^\nu|^2 + W_{a1jd}W_{a1jd} + W_{abjd}W_{abjd} \\ &= 4|W^\nu|^2 + W_{a1cd}W_{a1cd} + W_{ab1d}W_{ab1d} + W_{abcd}W_{abcd}, \end{aligned}$$

uma vez que $W_{abc1=0}$, obtemos a identidade

$$|W|^2 = 4|W^\nu|^2 + W_{abcd}W_{abcd}. \tag{73}$$

Agora dos Lemas 3.6 e 3.7 deduzimos

$$\begin{aligned}\frac{4R}{n(n-1)}\mathring{R}_{11} &= \frac{1}{n}|W|^2 - \frac{2(n^2-2n-2)}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\\ &\quad +2\left(\frac{n-1}{n}|\mathring{Ric}|^2 - \frac{(n-2)^2}{n(n-1)}|W^\nu|^2\right)\\ &= \frac{1}{n}|W|^2 - \frac{2(n-2)^2}{n(n-1)}|W^\nu|^2 - \frac{2(n-4)}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2, \end{aligned} \tag{74}$$

e da equação (73) para $n = 4$,

$$R\mathring{R}_{11} \geq |W^\nu|^2. \tag{75}$$

Com a hipótese da curvatura escalar ser positiva, temos que $\mathring{R}_{11} \geq 0$. Similarmente a prova anterior, usando o Lema 3.3 e o Teorema 3.1 concluímos a demonstração.

Caso 2: M tem curvatura escalar nula $R = 0$.

Usando os Lemas 3.1 e 3.3 para $n = 4$, obtemos

$$W_{ikjl}R_{kl} = 0. \tag{76}$$

Observando que num referencial ortonormal, temos

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}, \tag{77}$$

então

$$\begin{aligned} W_{ikjl}\nabla_i R_{kl} &= W_{ikjl}(C_{ikl} + \nabla_k R_{il})\\ &= W_{ikjl}C_{ikl} + W_{ikjl}\nabla_k R_{il}\\ &= W_{ikjl}C_{ikl} + W_{kijl}\nabla_i R_{kl}\\ &= W_{ikjl}C_{ikl} - W_{ikjl}\nabla_i R_{kl}. \end{aligned}$$

Portanto

$$W_{ikjl}\nabla_i R_{kl} = \frac{1}{2}W_{ikjl}C_{ikl}. \tag{78}$$

Consequentemente, tomando a derivada covariante na expressão (76), usando a equação (22), a definição do tensor de Cotton (veja equação (13)) num referencial ortonormal e a equação (78), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i W_{ikjl}R_{kl} + W_{ikjl}\nabla_i R_{kl}\\ &= -\frac{1}{2}C_{ljk}R_{kl} + \frac{1}{2}W_{ikjl}C_{ikl}. \end{aligned} \tag{79}$$

Agora aplicando ∇f em (79), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= -C_{ljk}R_{kl}\nabla_j f + W_{ikjl}C_{ikl}\nabla_j f \\ &= C_{jlk}R_{kl}\nabla_j f - W_{iklj}C_{ikl}\nabla_j f \\ &= C_{ijk}R_{jk}\nabla_i f - W_{ijkl}C_{ijk}\nabla_l f \\ &= \frac{1}{2}\big(C_{ijk}R_{jk}\nabla_i f + C_{ijk}R_{jk}\nabla_i f\big) - W_{ijkl}C_{ijk}\nabla_l f \\ &= \frac{1}{2}C_{ijk}\big(R_{jk}\nabla_i f - R_{ik}\nabla_j f\big) - W_{ijkl}C_{ijk}\nabla_l f, \end{aligned}$$

e então, podemos escrever, usando (34), que

$$-\frac{1}{3}C_{ijk}T_{ijk} - W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} = 0. \tag{80}$$

Então, de (76) e a definição do tensor T, obtemos

$$T_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l f = \frac{3}{2}\big(R_{jk}\nabla_i f - R_{ik}\nabla_j f\big)W_{ijkl}\nabla_l f = 0, \tag{81}$$

que combinado com (37), traz as igualdades

$$fC_{ijk}T_{ijk} = |T|^2 \tag{82}$$

e

$$fC_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l f = |\iota_{\nabla f}W|^2, \tag{83}$$

acima, o símbolo ι representa produto interior $(\iota_{\nabla f}W)_{ijkl} = W_{ijkl}\nabla_l f$. Substituindo na equação (80), temos

$$|T|^2 + 3|\iota_{\nabla f}W|^2 = 0, \tag{84}$$

ou seja,

$$T_{ijk} = 0 = W_{ijkl}\nabla_l f.$$

Finalmente, do o Lema 3.2, chegamos em

$$\begin{aligned} 0 &= W_{ipqr}W_{jpqr}\nabla_i f\nabla_j f \\ &= \breve{W}_{ij}\nabla_i f\nabla_j f \\ &= \frac{|W|^2}{4}g_{ij}\nabla_i f\nabla_j f \\ &= \frac{|W|^2}{4}|\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{85}$$

Escolhendo coordenadas harmônicas deduzimos que a função potencial f e a métrica g são analíticas, veja argumento usado em Corvino (2000). Assim é possível concluir que f não pode ser constante em um conjunto aberto não-vazio. Então a equação (85) fornece que M^4 é localmente conformemente plana (veja Proposição 2.3). Deste modo, aplicando o Teorema 3.2, concluímos que M^4 é isométrica à uma bola geodésica no espaço simplesmente conexo $\mathbb{R}^4$, concluindo a prova do Teorema 3.4. □

3.5 Prova do Teorema 3.5.

Demonstração. Usando a hipótese de $W|_{T\partial M} = 0$, substituindo (73) em (74), obtemos

$$\frac{2R}{n-1}\mathring{R}_{11} = -\frac{n^2-6n+6}{n-1}|W^{\nu}|^2 - \frac{n-4}{n-2}|\mathring{Ric}|^2. \tag{86}$$

Como $n \geq 5$, tem-se que $-(n^2-6n+6) < 0$, portanto o segundo membro da equação (86) é também sempre não positivo. A curvatura ser não positiva e a condição de sinal do segundo membro na equação (86) nos fornece $\mathring{R}_{11} \geq 0$. Pelo Lema 3.3 e o Teorema 3.1 (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$, concluindo assim a demonstração. □

4 VARIEDADES COM TENSORES DE DIVERGÊNCIA NULA

O estudo de alguns tensores em variedades Riemannianas fornece estratégias para encontrar relações geométricas importantes. Neste capítulo abordaremos propriedades do tensor de Cotton no contexto das equações de ponto crítico (CPE), apresentaremos uma prova mais simples para um teorema de Santos em 2017 para a validade da conjectura CPE além de refinar alguns resultados clássicos como Yun(2014) que mostra a validade da conjetura CPE em variedades com curvatura harmônica e Tachibana (1974) que obtém curvatura escalar constante para variedades com curvatura harmônica e operador de curvatura positivo.

4.1 Motivação e resultados

No capítulo anterior analisamos os pontos críticos do funcional volume e tratamos de um problema em variedades com bordo. Neste capítulo, tratamos de pontos críticos, no contexto das variedades sem fronteira. Consideremos como antes, (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e $\mathcal{S}$ o seu funcional curvatura total

$$\mathcal{S}(g) = \int_M R_g dM_g, \tag{87}$$

onde R_g é a curvatura escalar na métrica g, é conhecido que as métricas críticas deste funcional restritas ao conjunto das estruturas Riemannianas de volume unitário são métricas Einstein. Restringindo este problema ao conjunto das métricas de curvatura escalar constante foi conjecturado por Besse, em 1979, que tais pontos críticos ainda são métricas Einstein e essa conjectura ficou conhecida como a conjectura CPE.

Conjectura 4.1. *Cada métrica crítica do funcional curvatura escalar total restrito ao conjunto das métricas de curvatura escalar constante de volume unitário é isométrico à esfera euclidiana unitária.*

Prova-se com tais restrições que uma métrica é um ponto crítico do funcional curvatura escalar total se satisfaz ao sistema de equações

$$\mathring{Ric} = Hessf - (\Delta f)g - fRic. \tag{88}$$

Observe que, tomando o traço na identidade (88), obtemos

$$\Delta f = -\frac{R}{n-1}f. \tag{89}$$

Muitos autores fizeram avanços na direção de provar a validade dessa conjectura. Entretanto, do modo como foi apresentada a conjectura permanece ainda em aberto. Os resultados existentes sempre acrescentam hipóteses, por exemplo, Lafontaine em 1983 provou que a conjectura vale para variedades conformemente planas, Qing e Yuang em 2013 provaram a validade para variedades Bach-flat em cada dimensão, Barros e Ribeiro Jr. em 2014 verificaram, em dimensão 4, a validade para variedades half-conformemente planas. Em 2014 Yun, Chang e Hwang conseguiram provar a validade para variedades com curvatura harmônica. Mais recentemente, Barros, Benedito e Ribeiro Jr. em 2015 provaram que, em dimensão 4, com tensor W^+ harmônico (M^4, g, f) é isométrica a esfera padrão $\mathbb{S}^4$ e além disso no caso da conjectura ser válida tem-se que a função $h := |\nabla f|^2 + \dfrac{R}{n(n-1)f^2}$ satisfaz $h = 1$. A partir deste artigo, os autores passaram a estudar a hipótese da função h ser constante. Neste contexto Benedito em 2015 provou que a conjectura vale quando h é constante e Filho também em 2015 provou que basta h ser constante ao longo do fluxo de ∇f. Baltazar provou em 2017 que a conjectura vale com uma restrição para o tensor de Ricci juntamente com o tensor de Weyl ser radialmente nulo. Finalmente, Santos também em 2017 provou que a conjectura se verifica quando o tensor de Weyl tem segundo divergente nulo.

Um outro assunto abordado neste trabalho tem relação com quase sóliton de Ricci. Esta classe de variedades foi abordada por Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti em 2010 ao considerar sólitons de Ricci com o parâmetro não mais constante, mas uma função na variedade. Formalmente dizemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um quase sóliton de Ricci quando existe um campo vetorial X satisfazendo a equação

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{90}$$

onde $\lambda : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave na variedade M e $\mathcal{L}$ indica derivada de Lie.
A equação (90) é chamada equação fundamental de um quase sóliton de Ricci. Se a função λ satisfaz $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$ classificam-se como quase sóliton de Ricci *expanding*, *steady* ou *shrinking*, respectivamente. Caso contrário chama-se quase sóliton de Ricci *indefinite*. Quando $f : M \to \mathbb{R}$ é função suave e o campo X é o campo gradiente $X = \nabla f$, então a equação fundamental torna-se

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g, \tag{91}$$

e a variedade chama-se quase sóliton de Ricci gradiente com f dita função potencial. Quando o campo X é trivial ou a função potencial f é constante o quase sóliton de Ricci é dito trivial. Barros e Ribeiro Jr. em 2012 provaram que um quase sóliton de Ricci gradiente, compacto com campo vetorial conforme não trivial é isométrico a uma esfera euclidiana. Em 2012 Barros, Batista e Ribeiro Jr. provaram que no caso não compacto se a variedade tem curvatura escalar constante não negativa e dimensão maior igual a três, então ela é isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Além disso, verificaram que quase sóliton de Ricci compacto, localmente conformemente plano satisfazendo uma dada desigualdade integral é isométrico a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$. Em 2013 Barros, Gomes e Ribeiro Jr. mostraram que quase sóliton de Ricci não trivial com tensor de Ricci codazzi tem curvatura seccional constante. Em particular, quando compacto ele é isométrico à esfera euclidiana. Além disso mostraram que se um quase sóliton de Ricci, com curvatura escalar constante e uma dada função atinge máximo na variedade, então ela é uma variedade Einstein. Barros e Evangelista em 2016 provaram que quase sóliton de Ricci compacto com tensor de Cotton nulo é isométrico a esfera euclidiana, desde que as funções simétricas associadas ao tensor de Schouten satisfaçam algumas condições. Neste sentido considerando o tensor de Schouten A (veja equação (15)) as funções simétricas associadas a A são definidas por

$$det(I + tA) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(A)t^k. \tag{92}$$

Pela simetria do tensor A, temos que

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} S_k(A) = \sigma_k(A),$$

que coincide com o $k-$ésimo polinômio simétrico elementar de autovalores $\lambda_i(A)$ de A, ou seja,

$$\sigma_k(A) = \sigma(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \lambda_{i_1}(A) \cdots \lambda_{i_k}(A). \tag{93}$$

Lembrando que em uma variedade compacta M um campo vetorial X pode ser decomposto da seguinte forma

$$X = \nabla h + Y, \tag{94}$$

onde h é uma função suave em M, enquanto Y é um campo com divergência nula. Neste capítulo consideraremos h como a função descrita na decomposição (94).

O Teorema de Hopf afirma que em uma variedade M^n compacta, conexa e orientável, toda função suave $f : M^n \to \mathbb{R}$ que tem $\Delta f \geq 0$ é uma função constante. Considerando X o campo gradiente $X = \nabla f$, temos $divX = \Delta f$. Assim, o Teorema de Hopf garante que se esse campo tem divergência nula, então X é campo identicamente nulo. Ou seja, nas condições estabelecidas acima

$$divX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

A partir daí é natural pensar na existência de um teorema tipo Hopf também para tensores e tentar determinar condições, em uma variedade Riemanniana, para que um dado tensor com divergência nula implique que o próprio tensor seja nulo. Além disso, como a divergência de um tensor também é um tensor, podemos buscar condições que imponham a nulidade do tensor divergência ao assumir a segunda divergência nula, ou seja, se T é um tensor, que condições fazem verdadeiras as implicações

$$div^2T = 0 \Rightarrow divT = 0, \quad divT = 0 \Rightarrow T = 0.$$

Neste trabalho obteremos um resultado tipo Hopf para tensores, mais precisamente, provaremos que em variedades Riemannianas compactas o tensor de Cotton é nulo quando sua divergência é nula e o tensor de riemman com segunda divergência nula tem nulo o seu tensor divergência.

Na próxima seção abordaremos resultados importantes para provarmos os teoremas principais.

4.2 Lemas e resultados importantes

Inicialmente, tomamos o tensor C de Cotton em uma variedade Riemanniana M e encontramos uma relação envolvendo sua norma e a derivada do tensor de Ricci. Vale ressaltar que Santos em 2017 esta equação aparece no contexto das métricas CPE.

Lema 4.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n, então*

$$C_{ijk}\nabla_i R_{jk} = \frac{1}{2}|C|^2. \tag{95}$$

Demonstração. Das notações estabelecidas no Capítulo 2 para o tensor de Cotton, obtemos

$$\begin{aligned} 2C_{ijk}\nabla_i R_{jk} &= C_{ijk}\nabla_i R_{jk} + C_{ijk}\nabla_i R_{jk} \\ &= \nabla_i R_{jk} C_{ijk} + \nabla_j R_{ik} C_{jik} \\ &= \nabla_i R_{jk} C_{ijk} - \nabla_j R_{ik} C_{ijk} \\ &= (\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) C_{ijk}, \end{aligned} \tag{96}$$

onde trocamos i por j na segunda parcela da segunda linha e usamos a anti-simetria do tensor de Cotton na terceira linha. Nesta equação (96) usando a definição (13), do tensor de Cotton, e a informação de que ele tem traço nulo, temos

$$\begin{aligned} 2C_{ijk}\nabla_i R_{jk} &= \left[C_{ijk} + \frac{1}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R)\right] \cdot C_{ijk} \\ &= |C|^2 + \frac{1}{2(n-2)}(C_{ijk}g_{jk}\nabla_i R - C_{ijk}g_{ik}\nabla_j R) \\ &= |C|^2. \end{aligned}$$

E isso conclui nossa demonstração. □

Podemos enunciar, então, o nosso primeiro teorema do capítulo. Ele afirma que para toda variedade Riemanniana compacta a nulidade do divergente do tensor de Cotton implica necessariamente que o próprio tensor é nulo. Apesar de apresentar uma demonstração bem simples e direta este resultado tem grande utilidade ao simplificar a demonstração de teoremas já conhecidos. Além disso, podemos, em alguns teoremas, substituir a hipótese sobre tensor de Cotton ser nulo, ou em dimensão maior igual a quatro, a condição tensor de Weyl ser harmônico pela hipótese, mais fraca, do tensor de Cotton ter divergência nula.

Teorema 4.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e sem fronteira. Se o tensor de Cotton C tem divergência nula, então o tensor C é nulo.*

Demonstração. Da hipótese, $divC = 0$, ou seja,

$$\nabla_i C_{ijk} = 0.$$

Portanto

$$R_{jk}\nabla_i C_{ijk} = 0.$$

Empregando a compacidade de M e o Teorema da Divergência, temos

$$0 = \int_M R_{jk}\nabla_i C_{ijk} = -\int_M \nabla_i R_{jk} C_{ijk} = -\int_M \frac{|C|^2}{2}, \tag{97}$$

onde usamos a equação (95) na última igualdade. Donde segue que $C = 0$. □

Corolário 4.1. *Se (M^n, g) é variedade Riemanniana compacta com $n \geq 3$, sem fronteira. Se $divC = 0$ então $divW = 0$.*

Demonstração. Se $n = 3$ tem-se $W = 0$ e o teorema segue. Se $N > 3$, supondo $divC = 0$, temos pelo Teorema 4.1 que $C = 0$. Pela equação (22) tem-se $divW = 0$. □

Corolário 4.2. *Se (M^n, g) é variedade Riemanniana compacta com dimensão pelo menos quatro, sem fronteira, se $divC = 0$ então $div^2 B = 0$.*

Demonstração. Basta tomar divergência na equação (23) e usar a hipótese $divC = 0$ e o Teorema 4.1. □

Fazendo uso deste mesmo tipo de argumento, podemos, ainda, garantir uma propriedade equivalente para o tensor de Riemann mas sob a hipótese do seu segundo divergente ser nulo.

Teorema 4.2. *Se (M^n, g) é variedade Riemanniana compacta, de dimensão n, sem fronteira tal que $div^2Rm = 0$, então $divRm = 0$.*

Demonstração. A hipótese diz que $div^2Rm = \nabla_j\nabla_l R_{ijkl} = 0$. Agora a primeira identidade de Bianchi nos fornece

$$\nabla_j R_{ik} = \nabla_i R_{jk} + \nabla_l R_{jikl},$$

e o Teorema da Divergência nos dá

$$\begin{aligned}
\int_M R_{ik}\nabla_j\nabla_l R_{ijkl} &= -\int_M \nabla_j R_{ik}\nabla_l R_{ijkl} \\
&= -\int_M (\nabla_i R_{jk} + \nabla_l R_{jikl})\nabla_l R_{ijkl} \\
&= -\int_M \nabla_i R_{jk}\nabla_l R_{ijkl} - \int_M \nabla_l R_{jikl}\nabla_l R_{ijkl} \\
&= \int_M R_{jk}\nabla_i\nabla_l R_{ijkl} - \int_M \nabla_l R_{jikl}\nabla_l R_{ijkl} \\
&= \int_M R_{jk}\nabla_i\nabla_l R_{ijkl} + \int_M \nabla_l R_{ijkl}\nabla_l R_{ijkl} \\
&= \int_M R_{jk}\nabla_i\nabla_l R_{ijkl} + \int_M |divRm|^2. \qquad (98)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_M R_{ik}\nabla_j\nabla_l R_{ijkl} = \int_M R_{jk}\nabla_i\nabla_l R_{ijkl} + \int_M |divRm|^2. \qquad (99)$$

Então usando hipótese no primeiro e segundo termos da igualdade (99) garantimos por fim que

$$\int_M |divRm|^2 = 0,$$

e, consequentemente $divRm = 0$, concluindo a demonstração. □

Corolário 4.3. *Seja (M^n, g) variedade Riemanniana compacta, de dimensão n e curvatura escalar R constante. Se $div^2Rm = 0$, então $divW = 0$.*

Demonstração. De fato, usando a equação (12) e que R é constante, obtemos que $divW = divRm$. Pelo Teorema 4.2, se $div^2Rm = 0$, então $divRm = 0$. Portanto

$divW = 0.$ □

4.3 Resultados conhecidos, refinando hipóteses e demonstrações.

Chu e Fang no artigo de 2017 apresentaram resultados relevantes para variedades Riemannianas sob a hipótese de tensor de Cotton paralelo e curvatura escalar constante. Mais precisamente, os autores demonstraram que

Teorema 4.3 (Chu-Fang-2017-Teorema 1.4)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com curvatura escalar R constante e tensor de Cotton C paralelo. Então*

$$\int_M |\mathring{Rm}|^2 \left(R - (n-1)C(n)|\mathring{Rm}|\right) dV_g \leq 0, \tag{100}$$

onde a constante $C(n)$ é dada por

$$C(n) = \frac{2(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + \frac{n^2 - n - 4}{\sqrt{(n-2)(n-1)n(n+1)}} + \sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{n}}.$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, (M^n, g) é isométrico a um quociente de $\mathbb{S}^n$.

Como a hipótese do tensor de Cotton com divergência nula é mais fraca que a de ter tensor de Cotton paralelo, então este teorema pode ser aperfeiçoado usando o nosso Teorema 4.1. Temos portanto o seguinte teorema

Teorema 4.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com curvatura escalar R constante e tensor de Cotton de divergência nula. Então*

$$\int_M |\mathring{Rm}|^2 \left(R - (n-1)C(n)|\mathring{Rm}|\right) dV_g \leq 0, \tag{101}$$

onde a constante $C(n)$ vale

$$C(n) = \frac{2(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + \frac{n^2 - n - 4}{\sqrt{(n-2)(n-1)n(n+1)}} + \sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{n}}.$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, (M^n, g) é isométrico a um quociente de $\mathbb{S}^n$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.1, $divC = 0$ implica $C = 0$ e, consequentemente $\nabla C = 0$. Usando o Teorema 4.3, segue o resultado. □

No contexto das métricas CPE Yun, Chang e Hwang em 2014 provaram que as variedades com curvatura harmônica que são métricas CPE são isométricas à esfera euclidiana. Mais explicitamente os autores provaram o seguinte resultado

Teorema 4.5 (Yun-2014-Teorema 1.2)**.** *A conjectura CPE é verdadeira se* (M^n, g, f) *tem curvatura harmônica.*

Podemos também fazer uso do Teorema 4.2 e trocar a hipótese curvatura harmônica por $div^2 Rm = 0$. Estabelecendo o seguinte resultado

Teorema 4.6. *A conjectura CPE é verdadeira se* (M^n, g, f) *tem* $div^2 Rm = 0$*.*

Demonstração. De fato, a hipótese $div^2 Rm = 0$ implica pelo Teorema 4.2 $div Rm = 0$, ou seja a curvatura é harmônica. Pelo Teorema 1.2 de Yun (2014) segue o resultado. □

No artigo de Santos de 2017 é provado o teorema seguinte

Teorema 4.7 (Santos-2017-Teorema 1)**.** *A conjectura CPE é verdadeira para variedades de dimensão* $n \geq 4$ *e* $div^2 W = 0$*.*

Em dimensão maior que três podemos observar que a condição $div^2 W = 0$ é equivalente a supor $div C = 0$ (veja equação (22)) e portanto, usando o Teorema 4.1, temos que $C = 0$.

A novidade é que o Teorema 4.1, descrito aqui, dá uma prova direta também em dimensão maior que três, para o Teorema 1 de Santos 2017.

Teorema 4.8. *A conjectura CPE é verdadeira para variedades compactas de dimensão* $n \geq 4$ *e* $div C = 0$*.*

Demonstração. Se $div C = 0$ então pelo Teorema 4.1 $C = 0$ e usando o Teorema 1.2 de Yun 2014 segue o resultado. □

Em 1974, Tachibana provou resultados referentes a variedades compactas com curvatura harmônica e operador de curvatura não-negativo. Mais especificamente, tais variedades foram classificadas por terem curvatura escalar constante

Teorema 4.9 (Tachibana 1974)**.** *Se* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana sem fronteira com curvatura harmônica e operador de curvatura positivo, então* M *é uma variedade de curvatura escalar constante.*

Aprimoramos este resultado usando também o Teorema 4.2. Mais especificamente, podemos reescrever o teorema acima do modo seguinte

Teorema 4.10. *Se* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana sem fronteira com* $div^2 Rm = 0$ *e operador de curvatura positivo, então* M *é uma variedade de curvatura escalar constante.*

Demonstração. O fato que $div^2 Rm = 0$ juntamente com o Teorema 4.2 fornece que $div Rm = 0$, portanto faltando apenas aplicar o Teorema 4.9 para obtermos o resultado. □

Recentemente Tran (2017) generalizou o resultado de Tachibana colocando a hipótese sobre o tensor de Weyl ter divergência nula, obtendo o seguinte teorema

Teorema 4.11 (Tran-2017-Teorema 1.1)**.** *Se $(M^n, g), n \geq 4$ é uma variedade riemanianna compacta com tensor de Weyl harmônico e operador de curvatura não-negativo, então M é uma variedade localmente simétrica ou conformemente plana.*

Usando novamente o Teorema 4.2 podemos reeditar o teorema anterior da seguinte forma

Teorema 4.12. *Se $(M^n, g), n \geq 4$ é uma variedade riemanianna compacta com $div^2 Rm = 0$ e operador de curvatura positivo, então M é localmente simétrica ou conformemente plana.*

Demonstração. Observemos que, da decomposição (12), ter tensor de Weyl harmônico com curvatura escalar constante é equivalente a ter curvatura harmônica. Assim, supondo $div^2 Rm = 0$, temos pelo Teorema 4.2 que M^n tem curvatura harmônica. Pelo Teorema 4.9, ter operador de curvatura positivo implica ter curvatura constante. Contudo, curvatura harmônica e operador de curvatura positivo implicam, pelo Teorema 4.11, que M é conformemente plana ou localmente simétrica. □

É importante ressaltar que, em termos de difeomorfismos, Hamilton em 1986 provou que, para dimensão quatro, toda variedade com operador de curvatura positivo é uma forma espacial. Além disso, conjecturou que esta propriedade vale em qualquer dimensão. Já em 2008 Bohm e Wilking provaram que esta conjectura, é de fato, verdadeira. Na verdade, eles provaram a conjectura com uma hipótese ainda melhor, a de que a variedade tem operador de curvatura $2-$positivo, ou seja, a soma de seus dois menores autovalores é positivo.

Por fim provamos o seguinte teorema

Teorema 4.13. *Se (M^n, g, X, λ) é quase sóliton de Ricci, não-trivial, orientado, compacto com tensor de Cotton com divergência nula, então M^n é isométrica a esfera padrão $\mathbb{S}^n$ quando satisfaz alguma das condições:*

1. $S_2(A)$ é uma constante positiva.
2. $S_k(A)$ não é identicamente nula em M e $S_{k+1} = cS_k(A)$, onde $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, para algum $k = 2, \ldots, n-1$.
3. $Ric \geq \dfrac{R}{n} g$, com $R > 0$ e $\int_M S_k(A)\Delta h \geq 0$, para algum $k = 2, \ldots, n-1$.
4. S_k é constante para $k = 2, \ldots, n-1$ e $A > 0$.

Demonstração. Usando o Teorema 4.1, temos que o tensor de Cotton é nulo e o resultado segue pelo Teorema 1 em Barros, Oliveira e Evangelista(2017). □

5 CONCLUSÃO

Podemos concluir este trabalho relatando um pouco dos avanços obtidos e destacando o que ainda pode ser feito a partir das descobertas expostas aqui. Observe que em dimensão maior que cinco a hipótese sobre a curvatura escalar no Teorema 3.5 tem sinal contrário ao das hipóteses dos Teoremas 3.3 e 3.4 que valiam para dimensões três e quatro. Seria de grande importância tentar outras técnicas para abordar em todas as dimensões o caso de a curvatura escalar ter sinais positivo ou negativo. Também no Teorema 3.5 é imposta a condição $W|_{T\partial M} = 0$, ou seja, o tensor de Weyl se anula na fronteira de M. Isso significa na verdade que estamos impondo a condição de a fronteira ser conformemente plana.

Um trabalho futuro é tentar retirar esta hipótese ou flexibilizá-la. Contudo o estudo feito no Capítulo 3 apresenta uma série de lemas que podem ser utilizados em pesquisas futuras no contexto de métricas críticas de Miao-Tam, pois todos os lemas, exceto o Lema 3.7, trazem apenas a hipótese de a métrica ser Miao-Tam. Além disso os teoremas tipo Hopf abordam apenas variedades compactas. Seria interessante analisar que hipóteses devem ser impostas para que teoremas similares possam valer em ambientes não compactos.

REFERÊNCIAS

ARIAS-MARCO, T.; KOWALSKI, O. Classification of 4-dimensional homogeneous weakly einstein manifolds. **Czechoslovak Mathematical Journal**, v. 65, n. 1, p. 21–59, 2015.

BALTAZAR, H. On Critical Point Equation of Compact Manifolds with Zero radial Weyl Curvature. **ArXiv e-prints**, 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1709.09681.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2017.

BALTAZAR, H.; BATISTA, R.; BEZERRA, K. On the volume functional of compact manifolds with boundary with harmonic Weyl tensor. **ArXiv e-prints**, 2017. Disponível em: < https://arxiv.org/abs/1710.06247 >. Acesso em: 13 nov. 2017.

BALTAZAR, H; RIBEIRO Jr., E. Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 45, p. 3513–3523, 2017a.

BALTAZAR, H; RIBEIRO Jr., E. Remarks on critical metrics of the scalar curvature and volume functionals on compact manifolds with boundary. **ArXiv e-Prints**, 2017b. Disponível em: < https://arxiv.org/pdf/1703.01819v2.pdf >. Acesso em: 13 out. 2017.

BARROS, A.; BATISTA, R.; RIBEIRO Jr., E. Rigidity of gradient almost Ricci solitons. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 56, n. 4, p. 1267–1279, 2012.

BARROS, A.; DIÓGENES, R.; RIBEIRO JR., E. Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 25, p. 2698–2715, 2015.

BARROS, A.; EVANGELISTA, I. Some results on compact almost Ricci solitons with null Cotton tensor. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 60, n. 2, p. 529–540, 2016.

BARROS, A.; GOMES, J.; RIBEIRO, Jr. A note on rigidity of the almost Ricci soliton. **Archiv der Mathematik**, v. 100, n. 5, p. 481–490, 2013.

BARROS, A.; LEANDRO, B.; RIBEIRO, E. Critical metrics of the total scalar curvature functional on four manifolds. **Mathematische Nachrichten**, v. 288, n. 16, p. 1814–1821, 2015.

BARROS, A.; OLIVEIRA, F.; EVANGELISTA, I. Some results on compact almost Ricci solitons with null Cotton tensor. **Teresina - EDUFPI**, p. 93–108, 2017.

BARROS, A.; RIBEIRO, E. Critical point equation on four dimensional compact manifolds. **Mathematische Nachrichten**, v. 287, n. 14-15, p. 1618–1623, 2014.

BARROS, A.; RIBEIRO Jr., E. **Proc. Amer. Math. Soc.**, , n. 140, p. 1033–1040, 2012.

BATISTA, R.; DIÓGENES, R.; RANIERI, M.; RIBEIRO, E. Critical metrics of the volume functional on compact three-manifolds with smooth boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 27, p. 1530–1547, 2017.

BESSE, A. **Einstein manifolds**. New York: Springer-Verlag, 1979.

BOHM, C.; WILKING, B. Manifolds with positive curvature operators are space forms. **Annals of Mathematics**, v. 167, n. 3, p. 1079–1097, 2008.

CAO, H.; CHEN, Q. On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons. **Duke Mathematical Journal**, v. 162, n. 6, p. 1149–1169, 2013.

CATINO, G. Some rigidity results on critical metrics for quadratic functionals. **Calculus of Variations**, v. 54, p. 2921–2937, 2015.

CHANG, J.; HWANG, S.; YUN, G. Critical Point Metrics of te Total Scalar Curvature. **Bull. Korean Math. Soc.**, v. 49, n. 3, 2012.

CHU, YAWEI; FANG, SHOUWEN. Rigidity of complete manifolds with parallel Cotton tensor. **Archiv der Mathematik**, v. 109, n. 2, p. 179–189, 2017.

CORVINO, J. Scalar Curvature Deformation and a Gluing Construction for the Einstein Constraint Equations. **Communications in Mathematical Physics**, v. 214, n. 1, p. 137–189, 2000.

DERDZINSKI, A. Self-dual Kahler manifolds and Einstein manifolds of dimension four. **Compositio Mathematica**, v. 49, n. 3, p. 405–433, 1983.

DO CARMO, M.P. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

EUH, Y.; PARK, J.; SEKIGAWA, K. A generalization of a 4-dimensional Einstein manifold. **Math. Slovaca**, , n. 3, p. 595–610, 2013.

FAN, X.; SHI, Y.; TAM, L. Large-sphere and small-sphere limits of the Brown-York mass. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 17, n. 1, p. 37–72, 2009.

FILHO, F. B. Remarks on critical point metrics of the total scalar curvature functional. **Archiv der Mathematik**, v. 104, n. 5, p. 463–470, 2015.

HAMILTON, R. Four-manifolds with positive curvature operator. **Journal of Differential Geometry**, v. 24, n. 2, p. 153–179, 1986.

HWANG, S. Critical points of the total scalar curvature functional on the space of metrics of constant scalar curvature. **Manuscripta Mathematica**, v. 103, n. 2, p. 135–142, 2000.

HWANG, S.; CHANG, J. Critical metrics points and warped product metrics. **Bull. Korean Math. Soc.**, , n. 1, p. 117–123, 2004.

KUHNEL, W. **Differential geometry : curves - surfaces - manifolds**. American Mathematical Society, 2006.

LAFONTAINE, J. Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'Obata. **Journal de Mathematiques Pures et Appliquées**, v. 62, n. 1, p. 63–72, 1983.

LEANDRO, B. A note on critical point metrics of the total scalar curvature functional. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 424, n. 2, p. 1544 – 1548, 2015.

MIAO, P.; TAM, L.-F. On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 36, n. 2, p. 141–171, 2009.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 363, n. 6, p. 2907–2937, 2011.

PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; RIMOLDI, M.; SETTI, A. Ricci almost solitons. **ArXiv e-Prints**, 2010. Disponível em: < https://arxiv.org/abs/1003.2945 >. Acesso em: 13 out. 2017.

QING, J.; YUAN, W. A note on static spaces and related problems. **Journal of Geometry and Physics**, v. 74, n. 0, p. 18–27, 2013.

SANTOS, A. S. Critical metrics of the scalar curvature functional satisfying a vanishing condition on the Weyl tensor. **Archiv der Mathematik**, v. 109, n. 1, p. 91–100, 2017.

TACHIBANA, S. A Theorem on Riemannian Manifolds of Positive Curvature Operator. **Proceedings of the Japan Academy**, v. 50, n. 4, p. 301–302, 1974.

TRAN, H. On closed manifolds with harmonic Weyl curvature. **Advances in Mathematics**, v. 322, p. 861–891, 2017.

YUN, G.; HWANG, S.; CHANG, J. Total scalar curvature and harmonic curvature.

Taiwanese Journal of Mathematics, v. 18, n. 5, p. 1439–1458, 2014.