UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, ATUÁRIA, CONTABILIDADE E SECRETARIADO EXECUTIVO
CURSO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

YURI MEDEIROS DE ANDRADE

DISTRIBUIÇÕES ESTÁVEIS E APLICAÇÕES NO MERCADO FINANCEIRO

FORTALEZA, CEARÁ

2014

YURI MEDEIROS DE ANDRADE

DISTRIBUIÇÕES ESTÁVEIS E APLICAÇÕES NO MERCADO FINANCEIRO

Monografia submetida à Coordenação do Curso de Ciências Econômicas da Faculdade de Economia, Administração, Atuária, Contabilidade e Secretariado Executivo da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas.

Área de concentração: Métodos Quantitativos

Orientador: Prof. Dr. João Maurício Araújo Mota

Co-Orientador: Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie

FORTALEZA, CEARÁ

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca da Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade

A571d Andrade, Yuri Medeiros de.
Distribuições Estáveis e Aplicações no Mercado Financeiro / Yuri Medeiros de Andrade. – 2014.
50 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Monografia (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, Curso de Ciências Econômicas, Fortaleza, 2014.
Orientador: Prof. Dr. João Maurício Araújo Mota.
Co-Orientador: Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie.

1. Mercado financeiro. 2. Distribuição (Teoria da probabilidade). I. Título.
CDD 330

YURI MEDEIROS DE ANDRADE

DISTRIBUIÇÕES ESTÁVEIS E APLICAÇÕES NO MERCADO FINANCEIRO

Monografia submetida à Coordenação do Curso de Ciências Econômicas da Faculdade de Economia, Administração, Atuária, Contabilidade e Secretariado Executivo da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas. Área de concentração: Métodos Quantitativos

Aprovada em: __/__/____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Maurício Araújo Mota
Universidade Federal do Ceará - UFC
Orientador

Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie
Universidade Federal do Ceará - UFC
Co-orientador

Prof. Dr. Sebastião Carneiro de Almeida
Universidade Federal do Ceará - UFC
Membro da Banca Examinadora

A Deus.
À minha família.
Aos meus professores.

AGRADECIMENTOS

A Deus.

Aos meus pais por todas as oportunidades que me deram, por desde a infância poder ter estudado em boas escolas, o que me deu uma excelente base em diversas áreas e me permitiu fazer melhores escolhas e estar apto a concorrer pelos fins que desejo alcançar, e ainda pela liberdade de escolha que sempre me foi dada, tanto nas pequenas quanto na deste curso que concluo agora.

Aos meus amigos, pelo apoio e pelos bons momentos que me proporcionaram, e em especial ao Rodney Vasconcelos Fonseca, pela paciência e pela ajuda durante e após as disciplinas do curso de Estatística, ajuda sem a qual este trabalho não seria possível.

Ao professor Ronaldo de Albuquerque e Arraes, que me convidou a ser bolsista de iniciação científica e monitor voluntário da disciplina de Estatística Econômica II por três anos seguidos desde que a cursei.

Ao professor Sebastião Carneiro de Almeida não só por me mostrar a beleza de sua área de estudo, da qual eu sempre gostei, mas também por ter sido um dos melhores professores que eu já tive a honra de conhecer, e além disso por me aconselhar a buscar no Departamento de Estatística e Matemática Aplicada (DEMA - UFC) o complemento quantitativo que eu precisava para a minha formação e futura atuação na área desejada, pois esse conselho certamente mudou o rumo de toda a minha vida, tanto em relação aos estudos quanto ao meu futuro profissional, e consequentemente a vários outros aspectos.

Ao professor Luis Gustavo Bastos Pinho, que me ajudou bastante na parte computacional deste trabalho.

Ao professor Pushpa Narayan Rathie por me mostrar uma área de pesquisa da matemática e da estatística que tanto me interessa, a que lida com funções especiais e variáveis complexas, e por me ensinar a base necessária para entendê-la.

Ao professor John P. Nolan que me concedeu o seu *software* STABLE, o qual foi utilizado na parte aplicada deste trabalho, facilitando diversos cálculos.

Ao professor João Maurício Araújo Mota por me receber no DEMA e me fazer sentir parte dele, por ter sido o melhor professor de estatística que já tive, por me orientar nesta monografia, por me ajudar em todos os estudos relacionados a sua área, e mais que isso, por ter me ajudado em tudo o que pôde, ato que o define muito bem, sempre fazer tudo o que pode, tendo com isso me aberto inúmeras portas. Com ele contraí uma dívida a qual nunca poderei pagar, pois quaisquer ganhos conquistados por mim na área que desejo atuar, sejam financeiros ou pessoais, eu sempre os deverei ao meu grande orientador.

“*No great discovery was ever made without a bold guess.*”

(Sir Isaac Newton)

RESUMO

Este trabalho trata de investigar interessantes propriedades das distribuições estáveis, especialmente a distribuição α-Estável, que é atualmente bastante utilizada em estudos sobre o comportamento dos preços de ativos financeiros em bolsas de valores. A princípio, será comentada a importância do mercado financeiro na atualidade e um pouco do seu funcionamento. Após isso, será mostrado um breve estudo sobre distribuições estáveis, sendo expostas as suas principais características e a razão de serem usadas para análises desse tipo de dados. Será comentado, a seguir um estudo mais específico sobre a distribuição α-Estável, que é a distribuição estável que melhor se adapta a dados financeiros, por sua maior capacidade de generalização e pelas caudas pesadas. No decorrer do trabalho serão expostas definições, fatos e funções matemáticas necessárias para o entendimento da teoria estatística contida nele. Por fim, serão apresentados resultados práticos de dados financeiros que foram estudados por meio da distribuição α-Estável, sendo comparados a resultados dos mesmos dados sendo estudados por meio das distribuições Gaussiana e Laplace (que ainda são bastante utilizadas para o mesmo fim). Na parte aplicada, as estimações dos parâmetros foram obtidas por meio do Método de Máxima Verossimilhança, e pudemos ver que a distribuição α-Estável se adaptou melhor aos dados por meio dos erros quadráticos médios, e de outros critérios descritos neste trabalho.

Palavras-chave: Distribuições Estáveis. Análise Robusta. Mercado Financeiro.

ABSTRACT

This work aims to investigate interesting properties of the Stable Distributions, especially the α-Stable distribution, which is nowadays very used in studies about the asset prices behaviour on Stock Markets. First it will be exposed the importance of the financial market and a bit about its operation. After that, it will be shown a brief study about the stable distributions, where its main characteristics will be described and the reason why it is used for this kind of analysis. It will be shown hereafter, a more specific study about the α-Stable distribution, which is the stable distribution that has the best fit to financial data. Between these sections it will be shown definitions, facts and mathematical functions needed to understand the statistical approach used in this work. Lastly, it will be shown practical results of financial data that were studied with the α-Stable distribution, and it will be compared to results coming from the same data but analysed with the Gaussian and Laplace distributions (which are still very used for this purpose). In the applied part, the estimated parameters were obtained by the Maximum Likelihood Method, and one could see that the α-Stable distribution adapted better to data by means of the mean square error criterion and by other criteria described in this work.

Keywords: Stable Distributions. Robust Analysis. Financial Market.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Introdução ao Mercado Financeiro

A globalização crescente fez o mercado financeiro ter uma posição muito importante na economia mundial, sendo ele um dos principais meios de intercâmbio comercial entre diversos países do mundo. O Sistema Financeiro Internacional é formado por instituições responsáveis pela distribuição e circulação de valores e pela sua regulamentação, sendo o seu maior organismo o Conselho Monetário Nacional (CMN), que é presidido pelo ministro da Fazenda, e diretamente ligado ao Banco Central do Brasil que atua como órgão executivo, e à Comissão de Valores Mobiliários que regula o mercado de valores mobiliários.

Investir em aplicações financeiras pode ser considerada uma tarefa fácil e segura, mas para que isso ocorra o propenso investidor deve ter uma poupança (ou seja, dinheiro que não é gasto em consumo), precisa estudar sobre o assunto, já que qualquer investimento deve ser entendido e bem pensado antes de feito, e também será necessário procurar uma corretora de valores na qual o seu perfil de investidor será traçado por analistas financeiros e uma carteira de ativos será formulada tendo em vista esse perfil, e as opiniões e experiências do analista responsável. Pessoas com essa disponibilidade financeira podem fazer esse tipo de investimento esperando obter uma boa remuneração e crescimento do capital investido, ou mesmo por precaução contra a inflação, sabendo que esse mercado garante uma reserva para eventuais despesas futuras e liquidez do dinheiro aplicado.

Quanto ao perfil de investidor, na corretora de valores serão feitas perguntas de forma a tentar saber quanto dinheiro será investido, qual o prazo que o investidor está disposto a esperar para receber determinada remuneração sobre o capital aplicado, e qual o nível de risco que o interessado está disposto a assumir buscando obter determinado retorno no prazo desejado.

Uma das muitas opções que o investidor terá ao chegar na corretora de valores será a de escolher o tipo de analista que o ajudará nas avaliações e tomadas de decisão referentes às suas aplicações. Os tipos mais comuns de analistas são os Grafistas e os Fundamentalistas. Os Grafistas tomam decisões baseadas no comportamento gráfico das flutuações de preços dos ativos, sem levar em consideração as notícias ou quaisquer outros fatores pois consideram que o comportamento dos preços já inclui todas as decisões econômicas e mercadológicas tomadas pelos investidores, assim, esse tipo de análise pressupõe que o mercado memoriza de certa forma determinados níveis de preços que compõem resistências e suportes difíceis de serem ultrapassados mas que quando o são, geralmente ocorre com grande intensidade, resumidamente eles tentam achar padrões nos gráficos esperando repetições de comportamentos conhecidos. Os Fundamentalistas utilizam conceitos macroeconômicos, microeconômicos e contábeis para, por meio dos noticiários e das contas das empresas (disponíveis em seus sites oficiais), fazerem projeções de aumento ou diminuição do valor intrínseco das ações de determinada empresa e compará-lo ao valor de seus preços, se aqueles estiverem menores que estes, é um bom momento para comprá-las, caso contrário, se deve vendê-las.

Os estudos sobre Finanças evoluíram bastante nos últimos anos no que diz respeito à estrutura conceitual e científica desse assunto.

Pode-se observar um uso crescente de diversos tipos de modelos matemáticos na tentativa de quantificar o comportamento das variáveis que se tem interesse em analisar, e com isso tentar prever, com um certo nível de confiança, como elas se comportarão em determinado período futuro baseado no desempenho do seu histórico e de outras variáveis que mostram possíveis influências no comportamento do que se deseja prever.

1.2 Diversidade dos Tipos de Investimentos

Na Bolsa de Valores existe um universo bastante extenso de possibilidades de investimentos, que contempla desde os mais arriscados e que podem gerar maiores retornos aos mais conservadores.

Dentre os tipos de investimento, ações, opções sobre ações, *depositary receipts*, caderneta de poupança, debêntures, letras de câmbio, *warrants*, contrato futuro de cupom cambial e outros figuram como principais papéis negociados no mercado de financeiro, destes serão descritos alguns a seguir.

1.2.1 Ações

As ações são bastante conhecidas entre os tipos de investimento que se pode fazer por meio do mercado financeiro e fazem um papel importantíssimo na economia, pois a partir da emissão delas, a empresa que as emitiu consegue se capitalizar e se expandir ou fazer diversos outros tipos de investimentos que acabam por fomentar a economia.

Segundo BM&F Bovespa (2010), ações são:

> Títulos de renda variável, emitidos por sociedades anônimas, que representam a menor fração do capital da empresa emissora. Podem ser escriturais ou representadas por cautelas ou certificados. O investidor de ações é um coproprietário da sociedade anônima da qual é acionista, participando dos seus resultados. As ações são conversíveis em dinheiro, a qualquer tempo, pela negociação em bolsa ou no mercado de balcão.

Assaf (2012) classificou as ações em três tipos quanto a natureza dos direitos e vantagens que elas conferem a seus titulares: ordinárias, preferenciais e de fruição ou gozo.

As ordinárias são as ações que permitem que os seus titulares votem, assim esses acionistas podem participar das decisões da empresa, podendo analisar e votar suas contas patrimoniais, decidir sobre a destinação dos resultados, eleger a diretoria da sociedade, e deliberar sobre diversos outros assuntos de interesse da empresa em questão. O proprietário desse tipo de ação, recebe dividendos de acordo com o dividendo obrigatório previsto em lei, ou com o percentual estabelecido pela companhia, desde que seja no mínimo igual ao que a lei impõe.

As ações preferenciais permitem que os seus titulares tenham algumas vantagens como a preferência no recebimento de dividendos em relação à data que os acionistas ordinários os receberão, deixando estes na dependência do saldo resultante após os pagamentos prioritários. Outra vantagem que esse tipo de ação permite é o da preferência a esses acionistas de reembolso do seu capital em caso de liquidação da sociedade. Entretando, os acionistas donos de ações preferenciais não podem votar.

As ações de fruição ou gozo são distribuídas aos acionistas cujas ações foram totalmente amortizadas, sendo assim, decorrentes da amortizações das ações. Elas devolvem ao acionista o valor de seu investimento. Essas ações são apenas títulos de crédito e não representam parte do capital social, são esvaziadas de conteúdo financeiro, assim no caso de liquidação da sociedade, o acionista não receberia nada a título de capital.

Além disso, a emissão e venda desses ativos, possibilitam aos investidores uma série de vantagens, sendo elas:

- Os dividendos, que são uma parte dos resultados da empresa que devem ser distribuídos aos acionistas na forma de dinheiro, e são determinados em cada exercício social.
- A bonificação, que é a distribuição gratuita de novas ações emitidas em função do aumento do capital efetuado por meio de incorporação de reservas. Essa distribuição é feita proporcionalmente à participação de capital de cada acionista.
- A possibilidade de valorização das ações, que vai depender do valor delas no mercado.
- O direito de subscrição, significando que o acionista tem preferência para adquirir novos títulos, nas condições estipuladas previamente pela companhia quando ela aumentar o seu capital. Este direito pode ser exercido por um preço pré-definido até a data especificada pela empresa ou pode ser negociado no mercado à vista da BOVESPA, o que permite ao acionista transferi-lo a terceiros.

1.2.2 Opções Sobre Ações

As opções sobre ações são:

> Um direito de compra (ou venda) de ações a um preço previamente fixado e válido por um determinado período. As opções são negociadas em Bolsas de Valores por meio do pagamento de um *prêmio*, e o resultado da operação é calculado pela diferença entre o preço de mercado na data da realização da opção (compra ou venda) e o valor pago pelo prêmio (ASSAF, 2012, p. 81).

Se um investidor adquiriu a opção de compra, ele espera que o lote de ações referente a essa opção se valorize, pois se isso ocorrer, ele poderá comprar o lote pelo valor fixado no momento que pagou o prêmio referente a opção de compra, e ganhará a diferença entre o valor que pagou pelo lote e o seu valor de mercado.

Caso um investidor adquira a opção de venda, ele espera que o lote de ações referente à opção adquirida se desvalorize, assim ele poderá vender o lote por um valor acima do valor de mercado.

1.2.3 Debêntures

Segundo Assaf (2012):

> Debêntures são títulos de longo prazo emitidos por companhias de capital aberto e destinados, geralmente, ao financiamento de projetos de investimentos (fixo e giro) ou para alongamento do perfil de endividamento das empresas. Constitui-se, em essência, num instrumento no qual o tomador de recursos (emitente do título) promete pagar ao aplicador (debenturista) o capital investido, acrescido de juros, em determinada data previamente acertada.

As emissões de debêntures podem conter uma cláusula de repactuação, significando que no final de determinado período combinado, poderá existir uma livre negociação, relacionada aos rendimentos desses ativos, entre os debenturistas e a Sociedade emitente dos títulos, para que as partes possam ajustar a remuneração do capital investido diante de mudanças nas taxas de juros.

A cláusula de repactuação só surtirá efeito se todos os debenturistas entiverem de acordo com as novas condições acertadas entre as partes, caso contrário, a Sociedade emitente das debêntures será obrigada a cumprir com o acordo anteriormente acertado.

Conforme previsto na escritura de emissão das debêntures, elas possuem formas diferentes de garantias, como a garantia real, que dá como garantia aos debenturistas os ativos da Sociedade emissora, podendo esta negociar seus papéis que estão em garantia somente depois de cumpridas as suas obrigações com os debenturistas, ou como a garantia subordinada que dá privilégio para reembolso desse tipo de investidores em relação aos acionistas, em caso de liquidação da empresa.

A remuneração obtidas com as debêntures são juros, participação nos lucros e prêmios, e o resgate de um ativo dessa natureza pode ser antecipado facultativo, obrigatório (pré-estabelecido), ou negociado na subscrição com deságio em relação ao seu valor normal (sendo todas essas possibilidades de resgate pré-estabelecidas).

1.2.4 *Warrants*

Assaf (2012) definiu *warrant* como sendo:

> Um título que atribui ao seu titular um direito de negociar (comprar e vender) um ativo, por um prazo estabelecido e por um preço previamente fixado, conhecido por preço de exercício. Em geral, a maturidade da *warrant* é de longo prazo.

As emissões de *warrants* devem prever condições específicas de vencimento, data de emissão, formas de emissão dos proventos do ativo subjacente, e outras especificidades, por essa falta de padronização entre essa opção de compra, para cada emissão desse tipo de ativo, se deve ter um "Contrato de Emissão de *Warrant*".

As *warrants* podem ser emitidas sobre debêntures, ações e outros ativos financeiros e o preço de exercício daquelas é definido pelo emissor do título, que para a formulação desse preço pode levar em consideração a taxas de juros de mercado, o risco do ativo, o prazo da operação, e diversos outros fatores que julgue relevantes.

1.2.5 Letras de Câmbio

As letras de câmbio são títulos nominativos, ou seja, são emitidos em nome de uma pessoa determinada, diferentemente dos títulos ao portador que podem ser transferidos por endosso em branco, e ainda têm renda fixa e prazo de vencimento determinado.

Segundo Assaf (2012), as letras de câmbio

> [...] são emitidas (sacadas) pelos financiados dos contratos de crédito, sendo aceitas pelas instituições financeiras participantes da operação. Posteriormente ao aceite, a letra de câmbio é vendida a investidores por meio dos mecanismos de intermediação do mercado financeiro. Constituem-se, dessa dorma, o principal *funding* das operações de financiamento de bens duráveis (crédito direto ao consumidor) realizadas pelas Sociedades Financeiras.

As pessoas jurídicas envolvidas na emissão e na negociação desse tipo de ativo são:

- O sacador ou emitente do título, que saca os recursos e dá a ordem para pagar.
- O sacado, que é o aceitante do título, responsável pelo pagamento da letra de câmbio.
- O tomador, que é o detentor da letra de câmbio e o beneficiário da ordem de pagamento feito pelo sacado e ordenado pelo sacador.

1.2.6 *Depositary Receipts*

As *Depositary Recepits* (DRs) são recibos de depósitos lastreados em ações ordinárias que são lançados no mercado internacional como uma das formas de empresas brasileiras captarem recursos. Se esses recibos forem lançados no mercado dos Estados Unidos, eles são conhecidos como ADR, caso sejam negociados em outros países, são conhecidos como IDR ou GDR.

Uma instituição financeira custodiante (Banco Custodiante) é responsável pela custodia das ações que lastreiam essas operações. Esse banco mantém e guarda os títulos, e assim, os recibos são emitidos tendo como base o lastro de ações, por um Banco Emissor.

Os recibos são negociáveis no mercado financeiro e podem ser trocados a qualquer momento pelas ações custodiadas no banco depositário.

Segundo Assaf (2012),

> A emissão de DR traz diversos benefícios às empresas, citando-se principalmente a possibilidade de a sociedade ter suas ações conhecidas e negociadas em outro país. Para os investidores, esse papel é uma oportunidade de adquirir ações de empresas estrangeiras, ajustadas a certas garantias do mercado de negociação.

Isso dá às empresas maior visibilidade no mercado internacional, pelo fato de serem listadas em bolsas internacionais. Para que empresas brasileiras possam ser listadas nessas bolsas, devem cumprir diversas regras exigidas pelo mercado de capitais do país em questão, para garantir, na maior parte delas, maior transparência das informações da empresa, bons fundamentos de desempenho econômico e financeiro, e respeito aos direitos dos acionistas.

1.2.7 Caderneta de Poupança

É a forma de investimento mais comum no Brasil, e pode ser classificada como uma forma conservadora de investir, especialmente quando comparada a outros tipos de aplicações financeiras, dado o baixo risco e consequentemente a menor possibilidade de retorno referente ao capital aplicado.

O montante investido na caderneta de poupança é remunerado mensalmente a uma taxa linear de 0,06 ou 6% ao ano acrescido da Taxa Referencial de Juros (TR), sendo esses rendimentos creditados no dia em que a conta de poupança foi aberta (data de aniversário) num período mensal.

O valor que estiver depositado na caderneta de poupança possui liquidez imediata, podendo ser sacado a qualquer momento, entretanto, se for sacado antes do dia em que a poupança foi aberta, ou seja, da data de aniversário dela, não será creditada remuneração alguma referente a esse valor. E se for depositada uma quantia fora da data de aniversário, o cálculo de remuneração sobre ela só será feito a partir do próximo aniversário.

A maior parte dos recursos captados por essas cadernetas são direcionados para o financiamento imobiliário, especialmente no âmbito do Sistema Financeiro de Habitação.

A possibilidade de grandes retornos está diretamente relacionada à maior variabilidade do preço do ativo, que pode ser interpretada como maior volatilidade ou maior risco, ou seja, para se obter maiores retornos é necessário investir mais em ativos de maior risco, e existe um grande interesse da parte dos analistas nos estudos sobre retornos de ativos. Devido a essa importância, na próxima seção será exposto o que são retornos baseado principalmente nas definições de Morettin e Toloi (2006).

1.3 Risco e Retorno

As causas que determinam o risco na economia vêm principalmente da conjuntura econômica, do mercado (pelo crescimento da concorrência, e por diversos outros fatores), e do planejamento e gestão da empresa. Já o risco financeiro, está diretamente relacionado ao endividamento das empresas e ao fato de ela poder ou não pagar esse endividamento.

O risco pode ser dividido em duas partes, a sistemática e a não sistemática. Na primeira, temos o risco definido pela conjuntura, inerente a todos os ativos negociados no mercado, ou seja, é determinado por fatores políticos, sociais e econômicos. Na segunda, o risco está especificamente ligado a um ativo, e nesse caso, procura-se evitar a formação de uma carteira de ativos com vários deles contendo correlação positiva em relação a esse tipo de risco.

Um dos principais objetivos da área de finanças é a avaliação do risco contido nas carteiras de investimentos (conjunto de ativos que pertencem a um investidor, sejam eles ações, fundos, títulos públicos, etc.), que são principalmente avaliados por meio dos retornos dos ativos contidos nessa carteira.

Segundo Morettin e Toloi (2006), a variação no preço de um ativo em determinado período é dada pela diferença entre o preço do ativo no período atual, P_t, e o preço do mesmo ativo no período anterior, P_{t-1}, e a variação relativa de preços é dada pela expressão anterior, $P_t - P_{t-1}$, dividida pelo preço do ativo no período anterior, P_{t-1}. Supondo que não haja o pagamento de dividendos no período, a expressão $R_t = (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$ pode ser chamada de retorno líquido simples (ou de taxa de retorno).

Sendo $R_t = (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$, chamaremos $1 + R_t$ de retorno bruto simples. Chamemos $p_t = logP_t$ (na base e), e definamos log-retorno por: $r_t = (logP_t)/P_{t-1} = log(1+R_t) = p_t - p_{t-1}$. Considera-se que R_t é próximo de r_t, pois para um x pequeno, $log(1+x) \approx x$. Prefere-se trabalhar com retornos em vez de preços, pois eles são livres de escala e possuem características estatísticas que facilitam a análise (como ergodicidade e estacionariedade).

Para modelar retornos, se usam modelos dos tipos ARMA, ARCH, GARCH, entre outros. Generalizando as fórmulas vistas, podemos reescrevê-las como:

- Retorno simples de período k: $R_t(k) = \dfrac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$;
- $R_t(k)$ anualizado: $\left[\prod_{j=0}^{j=k-1}(1+R_{t-j})\right]^{1/k} - 1$;
- Log-retorno de período k: $r_t(k) = \dfrac{logP_t}{P_{t-k}}$.

Por exemplo, se quisermos o log-retorno de 5 dias de transações, é só calcular o valor de $r_t(5)$, que é o somatório $r_t + r_{t-1} + ... + r_{t-5}$.

Se houver pagamento de dividendos, chamemos D_t de dividendos pagos no período t, assim, há um simples ajuste nas fórmulas vistas para:

- $R_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$;
- $r_t = log(1 + R_t) = log(P_t + D_t) - logP_{t-1}$.

A próxima seção tratará de comentar sobre os diversos estudos que foram desenvolvidos na literatura sobre o uso das distribuições estáveis em aplicações ao mercado financeiro. Para fazer esse tipo de análise, geralmente se utilizam os retornos dos ativos, que foram expostos nesta seção, em vez dos preços, por isso, a ideia de risco e retorno foi analisada antes das demais seções que falam das análises estatísticas e das aplicações feitas neste trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

É sabido que o mercado financeiro proporciona uma interligação de investidores do mundo inteiro com liquidez e transparência, e para participar desse atraente mercado, os investidores procuram meios de saber como ele se comporta.

Fama (1965) mostrou em seu trabalho que há anos existe esse interesse, dizendo:

> *For many years the following question has been a source of continuing controversy in both academic and business circles: To what extent can the past history of a common stock's price be used to make meaningfull predictions concerning the future price of the stock? Answers to this question have been provided on the one hand by the various chartist theories and on the other hand by the theory of random walks.*

O interesse em estudos sobre o comportamento do mercado financeiro vem crescendo ao longo do tempo, especialmente na atualidade, em um mundo contemporâneo e globalizado, e, dentre as formas mais eficazes de se entender o comportamento das flutuações de preços do mercado financeiro, estão os métodos estatísticos, que buscam, por meio de modelos probabilísticos e comparações às distribuições de variáveis aleatórias, prever com um nível de risco aceitável e observável essas flutuações de preços.

A princípio, eram utilizados modelos Gaussianos para prever o comportamento dos preços no mercado financeiro, mas se percebeu que esses modelos eram falhos, pois apresentam caudas finas e não captam valores outliers, a partir desse problema, os cientistas e analistas financeiros foram incentivados a buscarem outras distribuições para o fim desejado, e acabaram descobrindo que as distribuições estáveis são excelentes para isso, pois possuem as caudas pesadas, podem ser simétricas ou não, e assumem inclusive os formatos das distribuições Gaussiana, Cauchy, e Lévy, sendo esta última a que se mostrou melhor para os fins desejados.

Silva et al. (2003) mostrou que o estudo da distribuição de Lévy é do interesse dos físicos, dos matemáticos e dos economistas, ou seja, ela não somente é estudada no âmbito teórico, mas também no aplicado, e em seu artigo, foi mostrada a aplicação dela nas previsões de determinadas taxas de câmbio, após demonstrações matemáticas do seu comportamento.

Pode-se ver, pelas datas de publicações de diversos artigos que tratam da aplicação das distribuições estáveis, e em especial da distribuição de Lévy, que esse tipo de abordagem às previsões de flutuações de preços do mercado financeiro é atual. Temos como exemplos dessas publicações as dos seguintes autores: Matsushita et al. (2003), Silva et al. (2003) e Gleria et al. (2004).

A mistura das diferentes visões e vivências de físicos, matemáticos, estatísticos e economistas, tentando deixar o estudo macroeconômico o mais quantitativo quanto fosse possível, e tentando descobrir leis que permitissem entender a economia de certa forma que ela se tornasse previsível, proporcionou a criação de um campo de estudo chamado de Econofísica. É na Econofísica que podemos encontrar a maior parte das publicações literárias que tratam das aplicações das distribuições estáveis no mercado financeiro.

> *Unlike mainstream economists, physicists usually think of the macroeconomy as a complex system, with many interacting subunits, where everything depends on everything else. But how does everything depend on everything else? Here physicists are looking for empirical laws that will describe this complex interaction [58]. So they have decided to examine empirical economic and financial facts prior to the building up of models* (SILVA et al., 2003, p. 369).

Dessa forma, a abordagem proposta neste trabalho para ajustar distribuições estáveis a dados do mercado financeiro se mostra muito rica, em função da sua proveniência de várias áreas de estudo científico, e tenta tornar a pesquisa econômica o mais impessoal possível, sem deixar que seja influenciada por pontos de vista diferentes, sendo assim uma análise verdadeiramente científica que busca a precisão em seus resultados.

Por fim, será investigado aqui como essas distribuições se comportam e se de fato se ajustam melhor que outras a dados do mercado financeiro, por meio de modelagens que as utilizem aplicadas a séries financeiras, em vez de modelagens que utilizem outras distribuições, como a Gaussiana, que atribui probabilidades baixíssimas a valores outliers, por possuir caudas finas, dificultando previsões de crises econômicas ou de situações futuras caóticas.

Na próxima seção serão expostas todas as distribuições de probabilidade que serão posteriormente utilizadas neste trabalho, inclusive a classe de distribuições estáveis e a distribuição α-Estável.

3 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE UTILIZADAS NO TRABALHO

Nesta seção serão expostas as distribuições de probabilidade que vão ser utilizadas no trabalho. Os resultados apresentados a seguir foram observados principalmente por Hoel et al. (1971), Ross (2010), Morettin e Toloi (2011), Rathie et al. (2012) e Nolan (2014).

3.1 Distribuição Normal

A distribuição Normal (ou Gaussiana) é uma das mais famosas distribuições estatísticas e foi publicada pela primeira vez no ano de 1738 pelo matemático francês Abraham De Moivre em aproximações da distribuição Binomial para grandes valores de n.

Essa distribuição é bastante usada em diversas áreas que necessitam de Estatística, inclusive na área de Finanças, apesar de estudos mais recentes mostrarem que a hipótese de normalidade desse tipo de dados faz com que os eventos extremos, que são frequentes em séries de retornos, sejam desprezados.

Definição 3.1. Seja X uma variável aleatória (v.a.), X segue uma distribuição Normal com média $\mu \in \mathbb{R}$ e desvio-padrão $\sigma > 0$, ou seja, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se possuir a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

e a seguinte função característica:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}. \tag{3.2}$$

A seguir serão apresentados os conceitos de assimetria e curtose para uma v.a. qualquer.

Definição 3.2. Se X for uma v.a. com média μ e variância σ^2, sua assimetria é dada por:

$$A(X) = E\left(\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right), \tag{3.3}$$

e sua curtose por:

$$K(X) = E\left(\frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4}\right). \tag{3.4}$$

Uma vez definidos os conceitos de curtose e assimetria, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então:

- $A(X) = 0$;
- $K(X) = 3$.

Para ilustrar, a figura 3.1 mostra o gráfico da função densidade de probabilidade de uma v.a. X que segue uma distribuição Normal com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

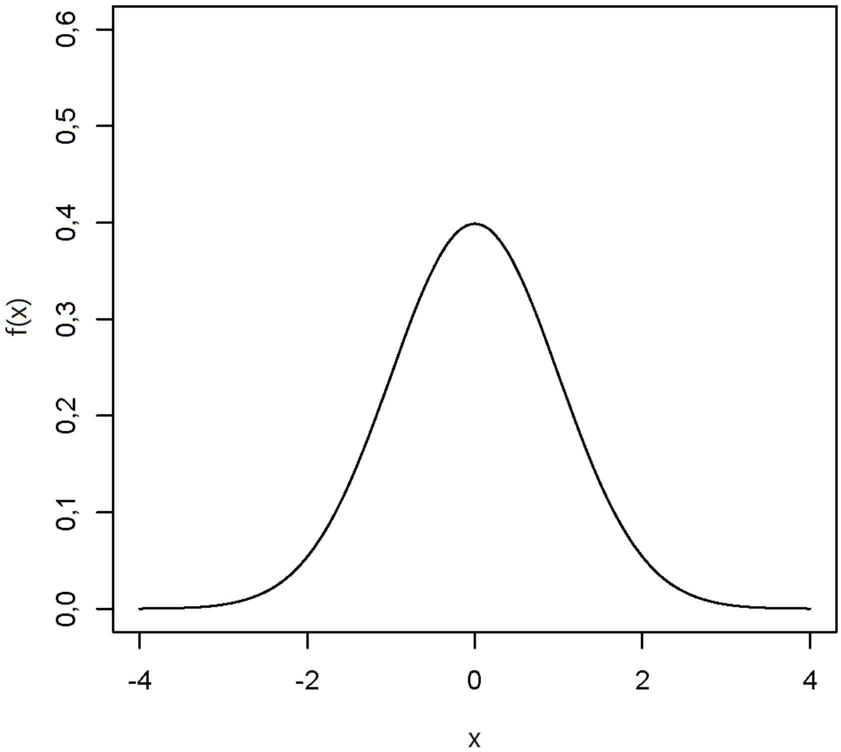

Figura 3.1: Função densidade de probabilidade de $X \sim N(0,1)$
Fonte: Autoria própria.

3.2 Distribuição de Laplace

É uma distribuição de probabilidade contínua (também conhecida como exponencial dupla) que foi primeiramente publicada em 1774 pelo matemático francês Pierre-Simon Laplace, e por isso leva seu nome.

Ela é semelhante à distribuição Gaussiana, mas é definida em termos da diferença absoluta da média, em vez do quadrado da diferença.

Definição 3.3. Seja X uma v.a., X segue uma distribuição Laplace com parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e $b > 0$ (sendo a sua variância e média iguais a $2b^2$ e μ respectivamente), ou seja, $X \sim L(\mu, b)$, se possuir a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

e a seguinte função característica:

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{i\mu t}}{1 + b^2 t^2}. \tag{3.6}$$

Por meio da definição 3.2, sendo $X \sim L(\mu, b)$, temos:

- $A(X) = 0$;
- $K(X) = 6$.

Para ilustrar, a figura 3.2 mostra o gráfico da função densidade de probabilidade de uma v.a. X que segue uma distribuição Laplace com $\mu = 0$ e $b = 1$.

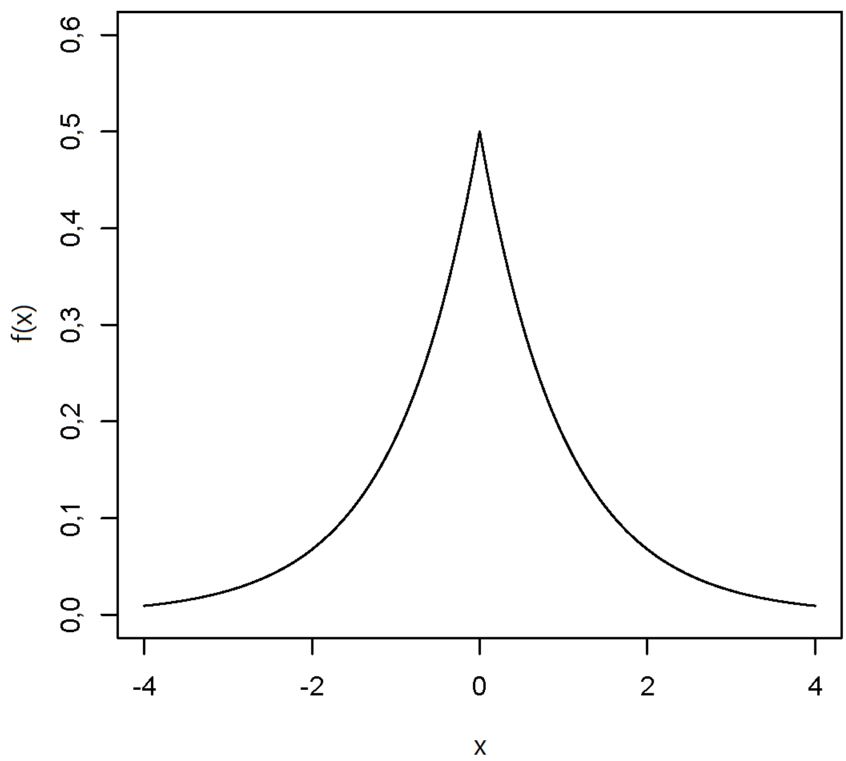

Figura 3.2: Função densidade de probabilidade de $X \sim L(0,1)$
Fonte: Autoria própria.

3.3 Classe das Distribuições Estáveis

As distribuições estáveis são parte de uma classe de distribuições de probabilidade que foi descoberta pelo matemático Paul Pierre Lévy por volta de 1924 em seu estudo sobre somas de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Essa classe possui diversas propriedades matemáticas que as fazem muito úteis para aplicações em diversas áreas, especialmente na física e na economia.

Apesar dessa classe apresentar características muito interessantes para uso em dados reais, a maior parte dela não tinha forma fechada para suas funções de densidade e de distribuição, com poucas exceções. Posteriormente, obtiveram-se essas densidades em termos da função H (definida no Anexo B), que por sua vez é escrita em termos de uma integral complexa (definida no Anexo A). Por ser computável, é possível e comum a utilização de diversos *softwares* estatísticos para aplicações a problemas práticos que podem ser resolvidos por meio dessas distribuições.

Duas das propriedades que essa classe de distribuições possui são a possibilidade de assimetria e as caudas pesadas, e essas duas características as tornam muito eficientes em aproximações a dados do mercado financeiro, pois enquanto as caudas pesadas possibilitam modelagem de dados que possuem eventos *outliers*, outras distribuições como a Gaussiana, que apresentam caudas finas, não captam bem esses valores.

Para definir o que caracteriza uma distribuição de probabilidade como estável, será utilizado um exemplo de uma variavel aleatória X que segue uma distribuição Normal, assim, para $n \in \mathbb{N}$ cópias de X, X_1, X_2,..., X_n independentes, temos que:

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \stackrel{d}{=} cX + d, \tag{3.7}$$

para algum c positivo e $d \in \mathbb{R}$. A igualdade 3.7 significa que as expressões seguem a mesma lei de probabilidade, ou seja, a lei de formação de X é preservada na adição. Essa propriedade é exatamente o que define a classe das distribuições estáveis.

3.3.1 Distribuição Estável no Sentido Amplo

Seja Y uma variável aleatória estável, diz-se que Y é estável ou estável no sentido amplo se para $n \in \mathbb{N}$ cópias independentes de Y, Y_1, Y_2,..., Y_n, temos:

$$Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \stackrel{d}{=} cY + d, \tag{3.8}$$

para $c > 0$ e algum $d \in \mathbb{R}$ diferente de zero.

3.3.2 Distribuição Estritamente Estável

Seja Y uma variável aleatória estável, diz-se que Y é estritamente estável se para $n \in \mathbb{N}$ cópias independentes de Y, Y_1, Y_2,..., Y_n, temos:

$$Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \stackrel{d}{=} cY, \tag{3.9}$$

para $c > 0$. Ou seja, a variável aleatória Y se comporta como mostrado na equação (3.8), mas com $d = 0$.

3.3.3 Distribuição α-Estável Simétrica e Assimétrica

Uma variável aleatória Y segue a distribuição α-Estável se possuir a seguinte função característica:

$$\varphi_Y(t) = exp\{-|\sigma t|^{\alpha}[1 - i\beta sign(t) w(\alpha, t) + i\mu t]\}, \tag{3.10}$$

em que

$$w(\alpha,t)=\begin{cases} tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) & , \quad se \quad \alpha\neq 1 \\ -\dfrac{2}{\pi}ln|t| & , \quad se \quad \alpha=1 \end{cases} \quad , \tag{3.11}$$

e

$$sign(t)=\begin{cases} 1, & se \quad t>0 \\ 0, & se \quad t=0 \\ -1, & se \quad t<0 \end{cases} \quad . \tag{3.12}$$

O parâmetro α é o índice de estabilidade relacionado à cauda da densidade, σ é o parâmetro de escala, β é o parâmetro de assimetria, e μ é o parâmetro de locação.
Esses parâmetros são restritos às condições:

- $0<\alpha\leq 2$;
- $\sigma>0$;
- $-1\leq\beta\leq 1$;
- $\mu\in\mathbb{R}$.

Alguns resultados interessantes referentes à distribuição α-Estável serão descritos a seguir:

- Se $\beta=0$, a distribuição é simétrica em torno do parâmetro de locação μ;
- Se $\alpha=2$, a distribuição é Gaussiana e o parâmetro β não interfere no seu comportamento;
- Quando $\beta=\mu=0$ e $\sigma=\alpha=1$, a distribuição tem a forma de uma Cauchy Padrão;
- Se $|y|\to\infty$ e $0<\alpha<2$ a função de densidade da Distribuição Estável é proporcional a $|y|^{-(\alpha+1)}$.

Por possuir diversos fins práticos, muitos estudiosos tentaram escrever uma fórmula geral para a densidade da Distribuição α-Estável. Schneider (1986) sugeriu em seu artigo uma fórmula para a densidade dessa distribuição, sendo $\alpha\neq 1$.

Uma forma equivalente a essa foi dada por P. N. Rathie, L. C. De S. M. Ozelim, e C. E. G. Otiniano no artigo ainda não publicado *Exact Distribution of the Product and the Quotient of Two Stable Lévy Random Variables*, e por essa versão ser uma forma mais geral, será mostrada a seguir:

$$f(y;\alpha,\tilde{\beta},\mu,\tilde{\sigma})=\tfrac{1}{\alpha\tilde{\sigma}}H_{22}^{11}\left[\tfrac{y-\mu}{\tilde{\sigma}}\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{\beta}K(\alpha)}{2\alpha},\frac{1}{2}+\frac{\tilde{\beta}K(\alpha)}{2\alpha}\right)\\ (0,1),\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{\beta}K(\alpha)}{2\alpha},\frac{1}{2}+\frac{\tilde{\beta}K(\alpha)}{2\alpha}\right)\end{matrix}\right.\right], \quad se \quad y\geq\mu, \tag{3.13}$$

e

$$f(y;\alpha,\tilde{\beta},\mu,\tilde{\sigma}) = \tfrac{1}{\alpha\tilde{\sigma}} H_{22}^{11}\left[\frac{\mu-y}{\tilde{\sigma}}\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\tilde{\beta}K(\alpha)}{2\alpha},\frac{1}{2}-\frac{\tilde{\beta}K(\alpha)}{2\alpha}\right)\\ \left(0,1\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\tilde{\beta}K(\alpha)}{2\alpha},\frac{1}{2}-\frac{\tilde{\beta}K(\alpha)}{2\alpha}\right)\end{matrix}\right.\right], \quad se \quad y < \mu. \tag{3.14}$$

em que:

$$\tilde{\sigma} = \sigma\left(1+\beta^2 tan^2\alpha\frac{\pi}{2}\right)^{1/2\alpha}, \tag{3.15}$$

$$K(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & se \quad \alpha < 1 \\ \alpha-2, & se \quad \alpha > 1 \end{cases}, \tag{3.16}$$

e

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} \frac{2}{\pi\alpha}Arctan\left(\beta tan\alpha\frac{\pi}{2}\right), & se \quad 0 < \alpha < 1 \\ \frac{2}{\pi(\alpha-2)}Arctan\left(\beta tan\frac{\pi(\alpha-2)}{2}\right), & se \quad 1 < \alpha < 2 \end{cases}. \tag{3.17}$$

Um dos casos especiais da função H (definida no Anexo B) é a função G-Meijer, que pode ser mais facilmente adaptável a *softwares* estatísticos. Por essa razão, a representação dos casos simétricos da distribuição estável em termos da função G-Meijer foram extensivamente estudados por Rathie et al. (2006), o que resultou na seguinte expressão:

$$L_{m/n}(y,\gamma) = \frac{n^{(2n+m)/(2m)}2^{n(1-m)/m}}{\pi^n m^{1/2}\gamma^{n/m}} \times G_{2n,2m}^{m,2n}\left[\frac{y^{2m}(2n)^{2n}}{(4m^2)^m\gamma^{2n}}\left|\begin{matrix}1-\frac{1}{2m}-\frac{r}{2n}, r=0,1,\ldots,2n-1\\ \frac{r}{m}, r=0,1,\ldots,m-1; 1-\frac{1}{2m}-\frac{r}{m}, r=0,1,\ldots,m-1\end{matrix}\right.\right], \tag{3.18}$$

em que $y \in \mathbb{R}$.

Nas seções aplicadas deste trabalho serão utilizados diversos valores para o parâmetro de locação desta distribuição, e não necessariamente os ajustes serão simétricos, o que foi possível graças ao *software* STABLE, no qual o professor John P. Nolan definiu diversos casos e condições de existência para que as estimações referentes à adequação da distribuição α-Estável aos dados reais pudesse ser feita de forma mais precisa e livre.

Para ilustrar, as figuras 3.3 e 3.4 mostram os gráficos das funções densidade de probabilidade de variáveis aleatórias X_i, $i = 1,2,3$, que pertencem à classe das Distribuições Estáveis.

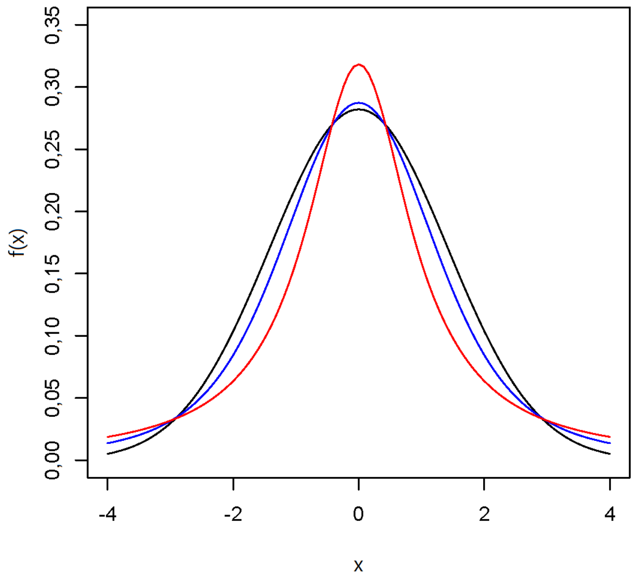

Figura 3.3: Densidades estáveis simétricas com $\beta = \mu = 0$ e $\sigma = 1$ nas três densidades, e $\alpha = 2$ em preto (Normal), $\alpha = 1,5$ em azul, e $\alpha = 1$ em vermelho (Cauchy)

Fonte: Autoria própria.

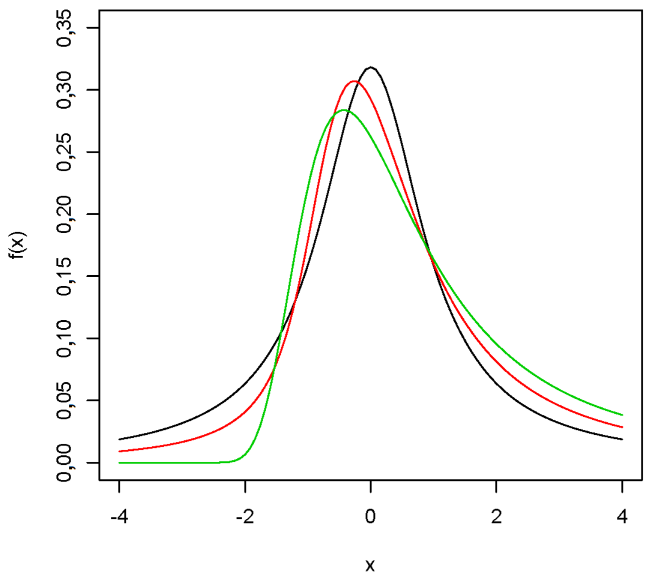

Figura 3.4: Densidades estáveis assimétricas com $\alpha = \sigma = 1$ e $\mu = 0$ nas três densidades, e $\beta = 0$ em preto, $\beta = 0,5$ em vermelho, e $\beta = 1$ em verde

Fonte: Autoria própria.

4 *SOFTWARE* STABLE

Esta seção falará sobre algumas das funções do *software* STABLE, que pertence à empresa *Robust Analysis Inc.*, que além de desenvolver programas estatísticos, presta serviços de consultoria, especialmente para problemas que envolvem distribuições de caudas pesadas.

O principal objetivo do programa STABLE é tornar o uso dessas distribuições acessível para possibilitar soluções de problemas práticos. O pacote STABLE para o *software* R permite o cálculo de densidades estáveis, funções de distribuição cumulativas, quantis, e outros diversos usos. Ele também pode ajustar os dados por vários procedimentos de estimação diferentes.

Existem diversas versões desse *software* para serem usadas com diferentes programas estatísticos. A versão utilizada aqui foi feita na forma de um pacote do *software* R, ou seja, funciona juntamente a este programa.

O programa STABLE foi criado principalmente baseado nos estudos do professor John P. Nolan, ou seja, utiliza a notação definida por ele, em vez da notação exposta na seção 3.3 deste trabalho, por isso, a seguir será exposta essa outra notação definida para a classe das distribuições estáveis.

4.1 Outra Notação para as Distribuições Estáveis

Segundo Nolan (2014), as distribuições estáveis formam uma classe de distribuições de probabilidade que generaliza a distribuição Normal. Essa família possui quatro parâmetros:

- α, que é o índice da cauda, ou o índice de estabilidade, sendo $0 < \alpha \leq 2$;
- β, que é o parâmetro de assimetria, sendo $-1 \leq \beta \leq 1$;
- γ, que é o parâmetro de escala, sendo $\gamma > 0$;
- δ, que é o parâmetro de locação, sendo $\delta \in \mathbb{R}$.

Nessa notação, o parâmetro que foi denotado no capítulo 3 por σ, aqui é chamado de γ, e o que foi denotado por de μ, agora é chamado de δ, entretando, o conceito de estabilidade permaneceu o mesmo.

Existem vários significados para esses parâmetros e o enfoque maior do que foi explicado por Nolan (2013) consiste em dois deles, que serão chamados de Parametrização 0 e de Parametrização 1. Os programas STABLE utilizam a variável *param* para especificar qual dessas parametrizações será usada.

Se o intuito do pesquisador for de utilizar somente as distribuições estáveis simétricas ($\beta = 0$), essas duas parametrizações são identicas. Para distribuições estáveis assimétricas, é recomendado usar a Parametrização 0 para a maioria dos problemas estatísticos, e só utilizar a Parametrização 1 nos casos especiais em que $\alpha < 1$ e $\beta = \pm 1$.

Nolan (2013) afirma que não existem fórmulas para uma função densidade de probabilidade ou para uma de distribuição que possam generalizar a classe estável, logo, essa família deve ser descrita em termos da sua função característica, que será exposta a seguir.

4.1.1 Parametrização 0

Definição 4.1. Seja X uma v.a. estável, $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ se possuir a seguinte função característica (Transformada de Fourier):

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta(tan\frac{\pi\alpha}{2})(sign(t))(|\gamma t|^{1-\alpha} - 1)] + i\delta t), & se \quad \alpha \neq 1 \\ exp(-\gamma|t|[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(sign(t))ln(\gamma|t|)] + i\delta t), & se \quad \alpha = 1 \end{cases} . \tag{4.1}$$

4.1.2 Parametrização 1

Definição 4.2. Seja X uma v.a. estável, $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ se possuir a seguinte função característica:

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta(tan\frac{\pi\alpha}{2})(sign(t))] + i\delta t), & se \quad \alpha \neq 1 \\ exp(-\gamma|t|[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(sign(t))ln|t|) + i\delta t), & se \quad \alpha = 1 \end{cases} . \tag{4.2}$$

4.2 Funções Básicas

A seguir, serão expostas algumas das funções básicas do *software* STABLE.

4.2.1 Scripts de Teste

Os scripts de teste irão testar a maioria das rotinas do programa STABLE, e podem ser utilizados como uma fonte de exemplos para auxiliar na utilização das funções.

Funções no R:

```
stabletest, mvstabletest, discretetest.
```

4.2.2 Função Densidade de Probabilidade

Esta função, cujo algoritmo foi descrito em Nolan (1997), computa a função densidade de probabilidade de variáveis aleatórias estáveis (fdp):

$$y_i = f(x_i) = f(x_i|\alpha, \beta, \gamma, \delta; param), \quad i = 1, ..., n.$$

Função no R:

```
dstable(x,alpha,beta,gamma,delta,param).
```

4.2.3 Função de Distribuição Acumulada

Esta função, cujo algoritmo foi descrito em Nolan (1997), computa a função de distribuição acumulada de variáveis aleatórias estáveis (fda):

$$y_i = F(x_i) = F(x_i|\alpha, \beta, \gamma, \delta; param), \quad i = 1, ..., n.$$

Função no R:

```
pstable(x,alpha,beta,gamma,delta,param).
```

4.2.4 Quantis

Esta função computa quantis, que são encontrados invertendo numericamente a fda:

$$x_i = F^{-1}(p_i), \quad i = 1, ..., n.$$

Função no R:

```
qstable(p,alpha,beta,gamma,delta,param).
```

4.2.5 Simular Valores Aleatórios Estáveis

Esta função simula n valores aleatórios, baseado em Chambers et. al (1976). Os valores $x_1, x_2, ..., x_n$ são gerados de acordo com a parametrização escolhida, e com os parâmetros $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Função no R:

```
rstable(n,alpha,beta,gamma,delta,param).
```

4.3 Funções Estatísticas

A seguir, serão expostas algumas das funções estatísticas do *software* STABLE.

4.3.1 Estimar Parâmetros Estáveis

Esta função estima parâmetros estáveis de dados $x_1, x_2, ..., x_n$. Essa rotina chama uma das funções descritas na tabela abaixo para fazer a estimação.

Tabela 4.1: Funções para estimar parâmetros estáveis

Método	**Algoritmo**	**Restrições**
1	Máxima Verossimilhança	$\alpha \geq 0,4$
2	Quantil	$\alpha \geq 0,1$
3	Função Característica Empírica	$\alpha \geq 0,1$
4	Momento Fracionário	$\alpha \geq 0,4$, $\beta = \delta = 0$, usa $p = 0,2$
5	Momento log-Absoluto	$\beta = \delta = 0$
6	Quantil Modificado	$\alpha \geq 0,4$
7	Método da Estatística U	$\beta = \delta = 0$

Fonte: Nolan (2013).

Função no R:

```
stable.fit(x,method,param).
```

5 METODOLOGIA

Nesta seção será exposta a metodologia utilizada para as comparações propostas. Foram utilizados alguns testes estatísticos para saber qual das distribuições descritas anteriormente se adequou melhor aos dados financeiros coletados para este trabalho.

5.1 Base de Dados

A base de dados utilizada na parte aplicada deste trabalho é do tipo secundário e foi coletada do *Google Finance*.

Os dados coletados se referem aos preços diários de fechamento de ações da empresa *Google*, no período contido entre os anos de 2004 e 2013.

Os preços coletados foram transformados em log-retornos para que a série se tornasse estacionária, e por outras facilidades (explicadas na seção 1.3) que esta transformação proporciona à análise dos dados.

Devido à auto-correlação presente nesses dados não se pode modelar essa série como se faz com amostras aleatórias independentes. Assim, foi feita uma análise de séries temporais para eliminar essa auto-correlação, no entanto, esse tipo de análise não é o objetivo principal deste trabalho, por isso, ela será descrita brevemente a seguir, e seus gráficos estão disponíveis no apêndice A.

Por meio da análise da auto-correlação dos log-retornos, se pôde observar que a sexta e a oitava defasagem apresentaram auto-correlação diferente de zero. Analisando também a auto-correlação parcial, se pôde ver que a série se ajustaria bem a um modelo Auto-Regressivo incompleto de ordem 8.

Por meio do teste de Ljung-Box, podemos ver que as defasagens analisadas, referentes aos resíduos dos log-retornos da série *Google*, podem ser todas consideradas não auto-correlacionadas devido aos altos níveis descritivos, ou **Valores P**.

A seguir, o gráfico dos **Valores P** referentes ao teste de Ljung-Box:

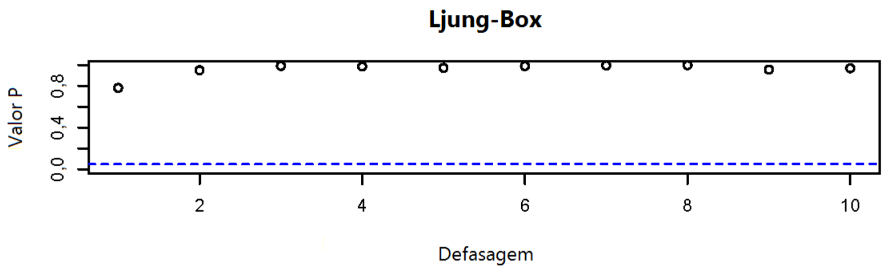

Figura 5.1: **Valores P** para a estatística de Ljung-Box
Fonte: Autoria própria.

Agora que os log-retornos foram transformados em um ruído branco, estes serão analisados no restante do trabalho, e modelados por meio das distribuições de probabilidade expostas no capítulo 3.

5.2 Teste de Jarque-Bera

O teste de Jarque-Bera foi criado em 1981 por Carlos M. Jarque Uribe e Anil K. Bera, e consiste em um teste de hipótese para verificar se os momentos estimados de uma série temporal são iguais aos da normal ($A = 0$ e $K = 3$, como visto na seção 3.1), cujas hipóteses a serem testadas são:

H_0 : A série é Normal.

H_1 : A série não é Normal.

A estatística utilizada nesse teste é dada por:

$$S = \left(\frac{N}{6}\right)\hat{A}^2 + \left(\frac{N}{24}\right)(\hat{K} - 3)^2. \tag{5.1}$$

sendo:

- N o tamanho da amostra;
- $\hat{A}$ a assimetria estimada, dada por:

$$\hat{A}(X) = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma}^3}\sum_{t=1}^{N}(X_t - \hat{\mu})^3; \tag{5.2}$$

- $\hat{K}$ a curtose estimada, dada por:

$$\hat{K}(X) = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma}^4}\sum_{t=1}^{N}(X_t - \hat{\mu})^4. \tag{5.3}$$

Portanto, para que a normalidade seja testada, se deve calcular as estimativas da curtose e assimetria, S (dada pela equação 5.3), e comparar o resultado com o valor tabelado de uma distribuição $\chi^2_{(2)}$, com o nível de significância apropriado.

5.3 Teste de Kolmogorov-Smirnov

O teste de Kolmogorov-Smirnov foi proposto pelos matemáticos Andrei Nikolaevich Kolmogorov e Vladimir Ivanovich Smirnov, e consiste em um teste não-paramétrico para comparar a igualdade de distribuições de probabilidade unidimencionais, que pode ser usado para comparar uma amostra a uma distribuição de probabilidade de referência, ou ainda para comparar duas amostras.

As hipóteses desse teste são:

H_0 : Igualdade das distribuições.

H_1 : Não Igualdade das distribuições.

A estatística utilizada nesse teste é:

$$D_n = sup_x |F_n(x) - F(x)|, \tag{5.4}$$

em que:

- A função de distribuição empirica $F_n(x)$ para n observações independentes e identicamente distribuídas é definida por:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(x_i) \tag{5.5}$$

- $I_{X_i \leqslant x}$ é a função indicadora dada por:

$$I_{(-\infty,x]}(x_i) = \begin{cases} 1, & se \quad X_i \leq x \\ 0, & caso \quad contrário \end{cases}. \tag{5.6}$$

- Sup_x representa, nesse caso, o maior elemento do conjunto das distâncias entre $F_n(x)$ e $F(x)$.

5.4 Erro Quadrático Médio

O erro quadrático médio (EQM), mede a média dos quadrados dos erros, ou seja, o quadrado da diferença entre o valor estimado do que se quer testar e o valor real.

Se $\hat{X}$ é um vetor de n estimativas para X_n, e X é o vetor dos valores verdadeiros, então, o EQM estimado é:

$$EQM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\hat{X}_i - X_i)^2. \tag{5.7}$$

Quanto ao resultado desse teste, quanto menor for o valor dele, mais próxima a estimativa estará do valor real, por exemplo, no caso de uma comparação entre uma amostra e valores gerados a partir de uma população que segue determinada lei de formação, com esse teste se tem uma ideia do quão bem a amostra se adequa à distribuição em questão.

6 RESULTADOS

Nesta seção serão expostos os resultados obtidos neste trabalho por meio da metodologia exposta no capítulo anterior.

6.1 Resultado do Teste de Jarque-Bera

O resultado obtido por meio desse teste mostrou que se deve rejeitar a hipótese nula de normalidade dos resíduos da série de retorno estudada aqui.

Será mostrada a seguir a tabela de resultados do teste de Jarque-Bera:

Tabela 6.1: Resultado - Teste de Jarque-Bera

Ativo	**Estatística S**	**P-Valor**
Google	7372,114	P-Valor $< 2{,}2 \times 10^{-16}$

Fonte: Autoria própria.

6.2 Resultado do Teste de Kolmogorov-Smirnov

O teste de Kolmogorov-Smirnov resultou nas seguintes tabelas:

Tabela 6.2: Resultado - Teste de Kolmogorov-Smirnov (Distribuição Normal)

Ativo	**Estatística D**	**P-Valor**
Google	0,0793	$2{,}311 \times 10^{-13}$

Fonte: Autoria própria.

Tabela 6.3: Resultado - Teste de Kolmogorov-Smirnov (Distribuição de Laplace)

Ativo	**Estatística D**	**P-Valor**
Google	0,0195	0,329

Fonte: Autoria própria.

Tabela 6.4: Resultado - Teste de Kolmogorov-Smirnov (Distribuição α-Estável)

Ativo	**Estatística D**	**P-Valor**
Google	0,01640477	0,5428382

Fonte: Autoria própria.

6.3 Parâmetros Estimados e Distribuições Ajustadas

Ajustou-se aos dados financeiros as três distribuições expostas no capítulo 3 deste trabalho, Normal, Laplace e α-Estável. Para isso, se utilizou o método de Máxima Verossimilhança, e os resultados obtidos serão apresentados nas tabelas e figuras a seguir:

Tabela 6.5: Resultado - Parâmetros Estimados (Distribuição Normal)

Ativo	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Google	-0,0009899853	0,0207864687

Fonte: Autoria própria.

Tabela 6.6: Resultado - Parâmetros Estimados (Distribuição de Laplace)

Ativo	$\hat{\mu}$	$\hat{b}$
Google	-0,0007145452	0,0139346791

Fonte: Autoria própria.

Tabela 6.7: Resultado - Parâmetros Estimados (Distribuição α-Estável)

Ativo	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
Google	1,579162	$-2{,}294782\times10^{-8}$	$1{,}023603\times10^{-2}$	$-9{,}046999\times10^{-4}$

Fonte: Autoria própria.

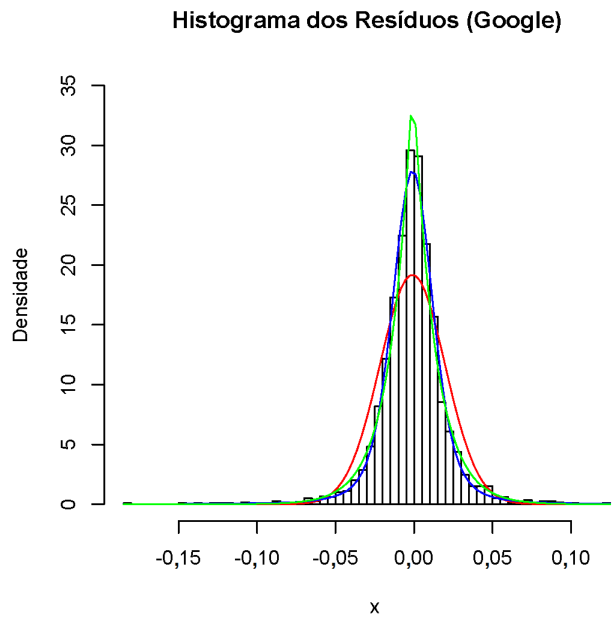

Figura 6.1: Funções densidade de probabilidade ajustadas ao histograma dos log-retornos (Normal em vermelho, Laplace em verde, α-Estável em azul)

Fonte: Autoria própria.

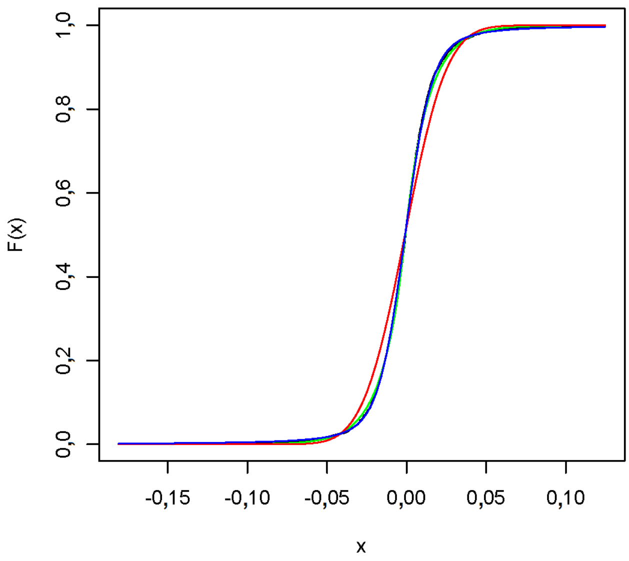

Figura 6.2: Funções de distribuição acumulada ajustadas ao histograma dos log-retornos (Normal em vermelho, Laplace em verde, α-Estável em azul, e $F(x)$ empírica em preto)
Fonte: Autoria própria.

6.4 Resultados dos Erros Quadráticos Médios

O resultado obtido por meio desse critério foi que a distribuição α-Estável se adapta melhor que as outras duas aos dados analisados aqui, possuindo os menores erros, em segundo lugar temos o ajuste da distribuição Laplace, e possuindo o terceiro melhor ajuste a esses dados, temos a distribuição Gaussiana.

Os resultados obtidos foram os esperados e a distribuição Normal se saiu pior quando comparada aos outros dois ajustes referentes às outras distribuições tratadas aqui, pois ela não possui caudas pesadas enquanto que as outras duas as possuem, o que as permitiu se adaptarem melhor aos dados, especialmente a distribuição α-Estável, que foi um dos principais focos deste trabalho.

Tabela 6.8: Resultado - Erro Quadrático Médio

Distribuição	**EQM**
Normal	0,002864774
Laplace	$6{,}708921 \times 10^{-5}$
α-Estável	$4{,}891704 \times 10^{-5}$

Fonte: Autoria própria.

7 CONCLUSÃO

Após tudo que foi exposto neste trabalho, chegou-se à conclusão de que o mercado financeiro possui um papel importantíssimo para a economia, e que pode ser um meio seguro de investir, contanto que o investidor esteja bem informado e bem assessorado.

Por meio da abordagem estatística e matemática exposta neste trabalho, foi mostrado o quão científico esse tipo de estudo se tornou, e também o quão importante é a classe das distribuições estáveis, que por um lado necessita de uma teoria bastante abstrada para ser entendida, mas por outro tem aplicações tão práticas quanto a que foi mostrada aqui.

A partir dos resultados do teste de Jarque-Bera, pudemos ver claramente que os dados financeiros analisados aqui não se comportam de modo a ser provenientes de uma distribuição Normal, como foi exposto na tabela 6.1.

Os resultados obtidos pelo teste de Kolmogorov-Smirnov, expostos nas tabelas 6.2, 6.3 e 6.4, reforçaram que a distribuição Normal não se ajustou bem aos dados, enquanto que as outras duas tiveram um ajuste muito bom, tanto no caso da distribuição α-Estável quanto no caso da Laplace, pois os **Valores P** desses ajustes foram significativos, o que indica uma probabilidade bem maior dos dados serem provenientes de uma dessas duas distribuições.

Os resultados da tabela 6.8 do capítulo anterior mostraram que a distribuição α-Estável se adaptou melhor aos dados financeiros em relação à distribuição de Laplace e à Normal, pois aquela possuiu o menor Erro Quadrático Médio dentre os três calculados.

Por meio das figuras 6.1 e 6.2, pudemos ainda averiguar o quão bem a distribuição α-Estável se adaptou às curvas empíricas, tornando, no caso das funções de distribuição acumulada, difícil de ver a $F(x)$ empírica, pois os gráficos ficaram praticamente justapostos.

Conclui-se que os resultados esperados neste trabalho foram alcançados, que foram mostrar a importância e a eficiência da análise quantitativa no mercado financeiro, especialmente da classe das distribuições Estáveis, que se adaptam muito bem a esse tipo de dado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Sebastião. **Variável Complexa em Nível Intermediário**. 2.ed. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, Departamento de Economia Aplicada-CAEN, 2011.

ASSAF-NETO, Alexandre. **Mercado Financeiro**. 11.ed. São Paulo: Editora Atlas, 2012.

BUSSAB, Wilton; MORETTIN, Pedro. **Estatística Básica**. 8.ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

BUENO, Rodrigo. **Econometria de Séries Temporais**. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

CHAMBERS, J.; MALLOWS, C.; STUCK, B. A Method for Simulating Stable Random Variables. **Journal of the American Statistical Association**, v. 71, p. 340-344, 1976.

DOREA, Chang; OTINIANO, Cira; MATSUSHITA, Raul; RATHIE, Pushpa. Lévy flight approximations for scaled transformations of random walks. **Computational Statistics** & **Data Analysis**, v. 51, p. 6343-6354, 2007.

FAMA, Eugene. The Behavior of Stock-Market Prices. **The Journal of Business**, v. 38, n. 1, p. 34-105, 1965.

GLERIA, Iram; FIGUEIREDO, Annibal; MATSUSHITA, Raul; RATHIE, Pushpa; SILVA, Sérgio. Exponentially damped Lévy flights, multiscaling and slow convergence in stockmarkets. **Physica A**, v. 342, p. 200-206, 2004.

HOEL, Paul; PORT, Sidney; STONE, Charles. **Introduction to Probability Theory**. 1.ed. Los Angeles: Cengage Learning, 1971.

KABASINKAS, Audrius; RACHEV, Svetlozar; SAKALAUSKAS, Leonidas; SUN, Wei; BELOVAS, Igoris. **Alpha-Stable Paradigm in Financial Markets**: Disponível em: <http://www.ams.sunysb.edu/ rachev/publication/review.pdf>. Acesso em: 10 de maio de 2014.

KIM,Young; RACHEV, Svetlozar; BIANCHI, Michele; FABOZZI, Frank. **A New Tempered Stable Distribution ans Its Application to Finance**. *In*: ECONOMETRIC WORKSHOP, 9., 2006, Karlsruhe. Risk Assessment: Decisions in Banking and Finance. Heidelberg: Physica-Verlag, p. 77-110, 2006.

MATHAI, Arakaparambil; SAXENA, Ram; HAUBOLD, Hans. **The H-Function**. 1.ed. Nova Iorque: Springer, 2010.

MATSUSHITA, Raul; GLERIA, Iram; FIGUEIREDO, Annibal; RATHIE, Pushpa; SILVA, Sérgio. Exponentially damped Lévy flights, multiscaling, and exchange rates. **Physica A**, v. 333, p. 353-369, 2004.

MATSUSHITA, Raul; RATHIE, Pushpa; SILVA, Raul. Exponentially damped Lévy flights. **Physica A**, v. 326, p. 544-555, 2003.

MOIVRE, Abraham de. **The Doctrine of Chances**: or, a Method for Calculating the Probabilities of Events in Play. 2.ed. Londres: W. Pearson, 1738.

MORETTIN, Pedro; TOLOI, Clélia. **Análise de Séries Temporais**. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2006.

NOLAN, John. Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions. **Commun. Statist. - Stochastic Models**, v. 13, p. 759-774, 1997.

NOLAN, John. **Stable Distributions**: Disponível em: <http://academic2.american.edu/ jpnolan/stable/chap1.pdf>. Acesso em: 15 de maio de 2014.

R Development Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. 2011. Disponível em < http://www.R-project.org >. Data de acesso: 15/03/2014.

RATHIE, P. N.; COUTINHO, M.; SOUSA, T. R.; RODRIGUES, G. S.; CARRIJO, T. B. Stable and Generalized-*t* Distributions and Applications. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 17, p. 5088–5096, 2012.

ROSS, Sheldon. **A First Course in Probability**. 8.ed. Upper Saddle River: Editora Pearson, 2010.

SCHNEIDER, W. R. Stable Distributions: Fox Function Representation and Generalization, Stochastic Process in Classical and Quantum. **Lecture Notes in Physics**, v. 262, p. 497-511, 1986.

SILVA, Sergio; MATSUSHITA, Raul; GLERIA, Iram; FIGUEIREDO, Annibal; RATHIE, Pushpa. International finance, Lévy distributions, and the econophysics of Exchange rates. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 10, p. 365- 393, 2005.

SPRINGER, Melvin. **The Algebra of Random Variables**. 1.ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1979.

APÊNDICE A – GRÁFICOS DA SÉRIE TEMPORAL *GOOGLE*

Este apêndice mostrará os gráficos utilizados para analisar a série temporal utilizada na parte aplicada deste trabalho.

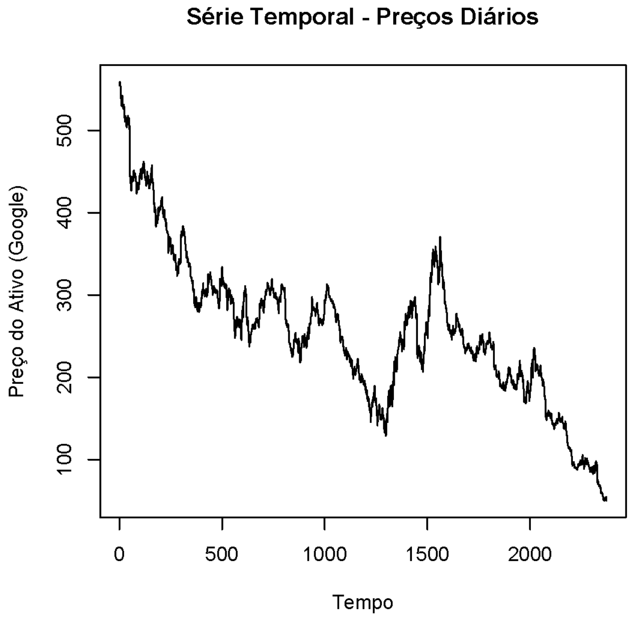

Figura A.1: Preços diários de fechamento das ações do *Google*
Fonte: Autoria própria.

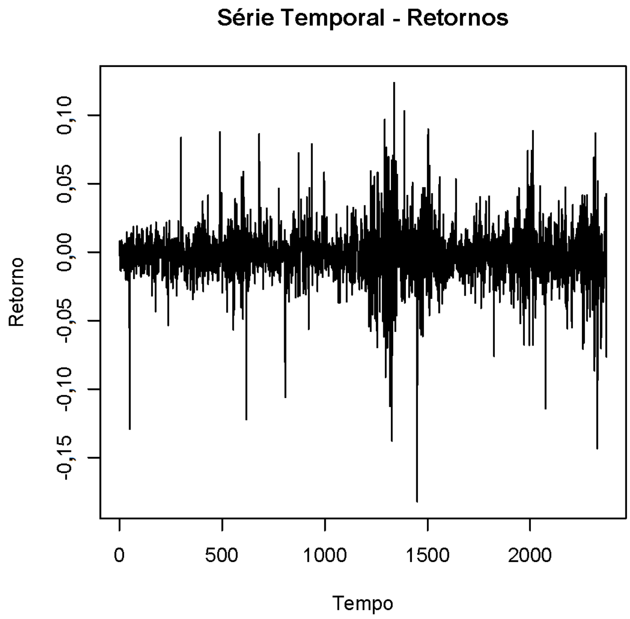

Figura A.2: Log-retornos das ações do *Google*
Fonte: Autoria própria.

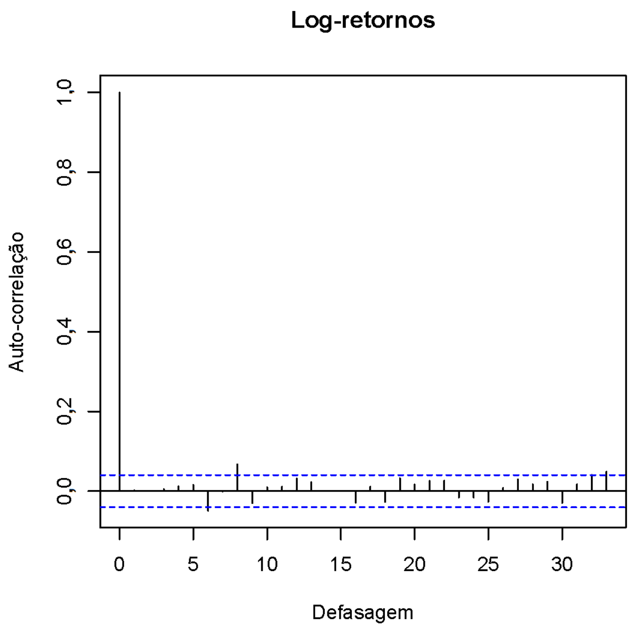

Figura A.3: Gráfico da função de auto-correlação dos log-retornos
Fonte: Autoria própria.

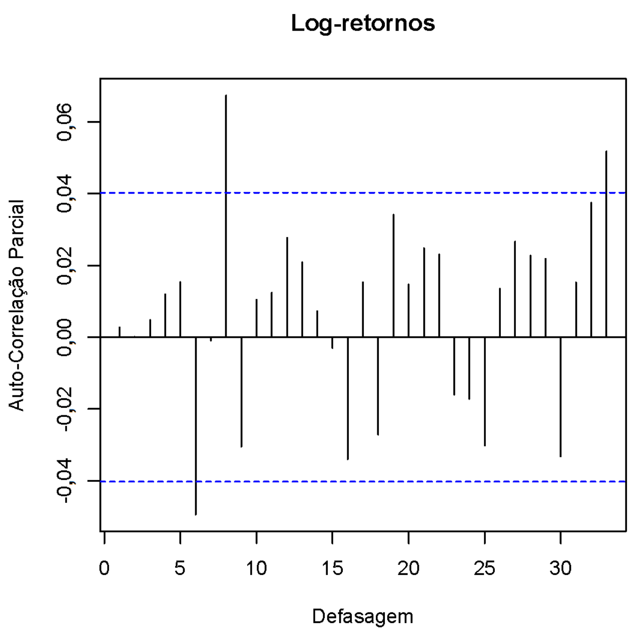

Figura A.4: Gráfico da função de auto-correlação parcial dos log-retornos
Fonte: Autoria própria.

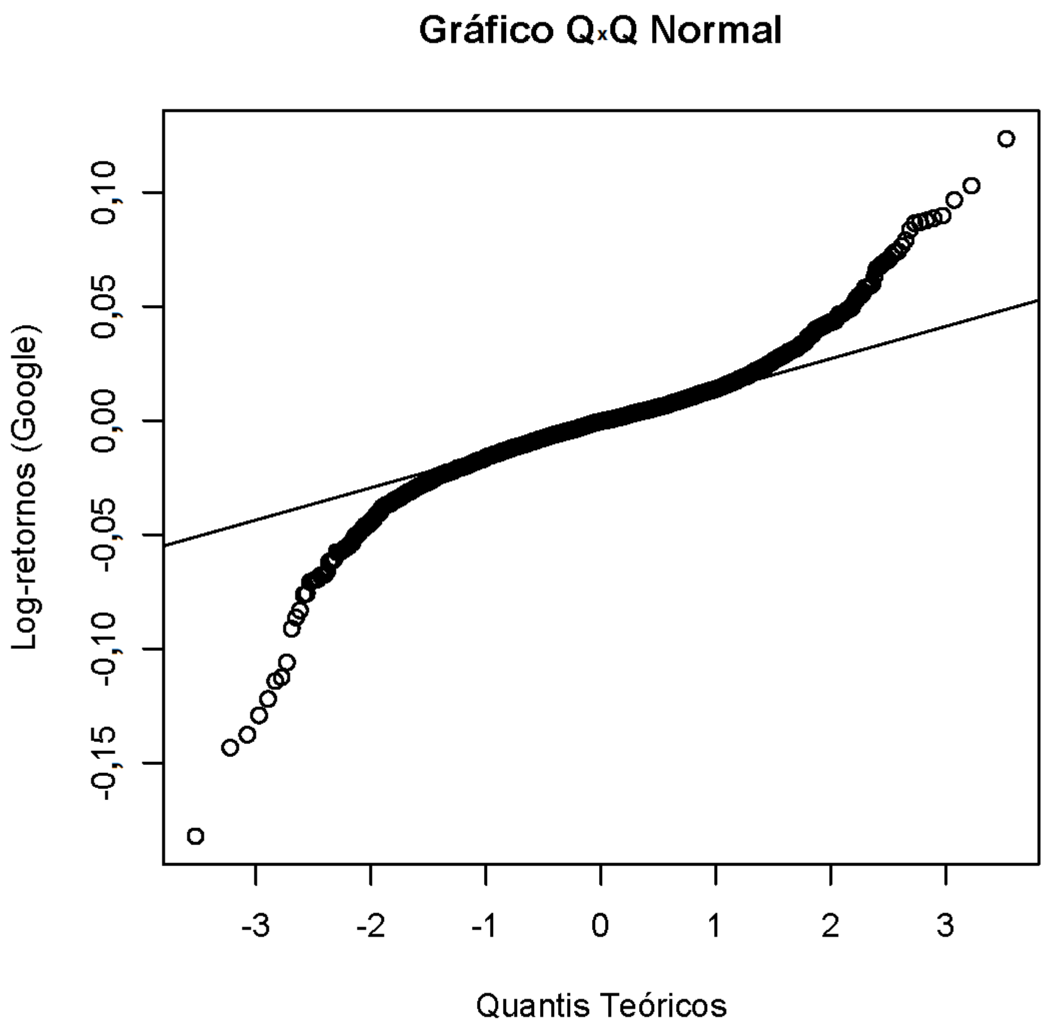

Figura A.5: Gráfico QxQ Normal dos log-retornos
Fonte: Autoria própria.

ANEXO A – INTEGRAL COMPLEXA

A.1 Definição Geral

Segundo Springer (1979), a definição de integração complexa é como segue:

Definição A.1. Seja $f_Z(z)$ uma função de z, não necessariamente analítica, e seja C uma curva de comprimento finito conectanto os pontos A ao B. Sejam os pontos z_i, $i = 1,2,...,n$, organizados de forma a dividir a curva C em $n-1$ intervalos, definamos:

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}. \tag{A.1}$$

Seja z_i' qualquer ponto no arco $z_{i-1}z_i$. Então, o limite da soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i')\Delta z_i \tag{A.2}$$

quando n vai para o infinito, de forma que todos os intervalos Δz tendem a zero, é definido como sendo a integral da função complexa $f(z)$ ao longo de C,

$$\int_C f(z)dz \tag{A.3}$$

em que C pode ser uma curva aberta ou fechada. Se C for uma curva fechada, a integral é chamada de integral de contorno, caso contrário, é usualmente chamada de integral de linha.

A função $f(z)$ é analítica em uma região R simplesmente conexa se $f(z)$ for derivável em cada ponto dessa região, assim a integral de linha entre quaisquer pontos A e B de R independe do caminho traçado entre eles.

Deve ser lembrado que quando uma função $f(z)$ é integrada sobre um contorno fechado, o sinal da integral será positivo ou negativo de acordo com a direção da integração. Segundo Springer (1979), a integral será positiva se a sua direção seguir no sentido anti-horário (convenção conhecida como *left-hand rule*).

A.2 Teorema de Cauchy

Segundo Springer (1979), o Teorema de Cauchy é como segue:

Teorema A.1. Se $f(z)$ é analítica em todos os pontos dentro e sobre uma curva fechada C, e se $f'(z)$ é conctínua em toda essa região fechada R, então:

$$\int_C f(z)dz = 0. \tag{A.4}$$

A.3 Teorema do Resíduo

Almeida (2011) apresentou o Teorema do Resíduo da seguinte forma:

Seja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \tag{A.5}$$

a expansão de Laurent de f ao redor de uma singularidade isolada $z = a$, e a partir disso, será dada a seguinte definição:

Definição A.2. O número a_{-1} que será denotado por $res(f, a_k)$ é chamado de resíduo de f no ponto $z = a$.

Teorema A.2. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica em uma região Ω exceto por singularidades isoladas $a_1, a_2, ..., a_m$. Seja γ uma curva fechada em Ω que não passa por $a_1, a_2, ..., a_m$. Se $\gamma \approx 0$ em Ω, então:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{m} \eta(\gamma, a_k) res(f, a_k). \tag{A.6}$$

ANEXO B – FUNÇÃO H

B.1 Notação para a Função H

Definição B.1. Segundo Mathai et al. (2010), a Função H é escrita na seguinte notação:

$$H(x) = H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{smallmatrix}(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{smallmatrix}\right.\right] = H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{smallmatrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{smallmatrix}\right.\right]. \tag{B.1}$$

B.2 Algumas Propriedades da Função H

Definição B.2. A Função H é definida em termos de uma integral do tipo Mellin–Barnes na seguinte forma:

$$H(x) = H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{smallmatrix}(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{smallmatrix}\right.\right] = H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{smallmatrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{smallmatrix}\right.\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Theta(s)z^{-s}ds, \tag{B.2}$$

em que $\Theta(s)$ tem a seguinte forma:

$$\Theta(s) = \frac{\left\{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+B_js)\right\}\left\{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-A_js)\right\}}{\left\{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-B_js)\right\}\left\{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+A_js)\right\}}. \tag{B.3}$$

em que:

- Um produto vazio é sempre interpretado como unidade;
- $m,n,p,q \in \mathbb{N}_0$ com $0 \leq n \leq p$;
- $1 \leq m \leq q; A_i;B_j \in \mathbb{R}_+$;
- $a_i,b_j \in \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$;
- $i = 1,\ldots,p;\ j = 1,\ldots,q$.
- $i = (-1)^{1/2}$;
- $z \neq 0$;
- $z^{-s} = exp[-s\{ln|z| + i(argz)\}]$;
- $ln|z|$ representa o logaritmo natural de $|z|$;
- arg$z$ não é necessariamente o valor principal.

L é um contorno que separa os polos

$$\zeta_{jv} = -\left(\frac{b_j + v}{B_j}\right); \quad j = 1,...,m; \quad v = 0,1,2,... \tag{B.4}$$

das funções gama $\Gamma(b_j + sB_j)$, dos polos

$$\omega_{\lambda k} = \left(\frac{1 - a_\lambda + k}{A_k}\right); \quad \lambda = 1,...n; \quad k = 0,1,2,... \tag{B.5}$$

das funções gama $\Gamma(1 - a_\lambda - sA_\lambda)$, isto é

$$A_\lambda(b_j + v) \neq B_j(a_\lambda - k - 1); \quad j = 1,...,m; \quad \lambda = 1,...,n; \quad v,k = 0,1,2,... \tag{B.6}$$

Definição B.3. O contorno L existe de acordo com $B.6$ e pode ser dos tipos $L_{-\infty}$, $L_{+\infty}$ ou $L_{i\gamma\infty}$. Seguem as definições desses três tipos de contorno:

(i) $L = L_{-\infty}$ é uma volta começando e terminando em $-\infty$ e englobando todos os polos de $\Gamma(b_j + B_j s), j = 1,...,m$ no sentido positivo, mas não englobando nenhum dos polos de $\Gamma(1 - a_\lambda - A_\lambda s), \lambda = 1,...,n$. A integral converge para todo z se $\mu > 0$ e $z \neq 0$, ou $\mu = 0$ e $0 < |z| < \beta$. A integral também converge se

$$\mu = 0, \quad |z| = \beta \quad e \quad \mathbb{R}(\delta) < -1. \tag{B.7}$$

em que

$$\beta = \left\{\prod_{j=1}^{p}(A_j)^{-A_j}\right\}\left\{\prod_{j=1}^{q}(B_j)^{B_j}\right\}, \tag{B.8}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j, \tag{B.9}$$

$$\delta = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j + \frac{p-q}{2}. \tag{B.10}$$

(ii) $L = L_{+\infty}$ é uma volta começando e terminando em $+\infty$ que engloba todos os polos de $\Gamma(1 - a_\lambda - A_\lambda s), \lambda = 1,...,n$, no sentido negativo mas não engloba nenhum dos polos de $\Gamma(b_j + B_j s), j = 1,...,m)$. A integral converge para todo z se

$$\mu < 0, \qquad z \neq 0 \quad ou \quad \mu = 0, \quad |z| > \beta. \tag{B.11}$$

A integral também converge se as condições dadas em $B.7$ são satisfeitas.

(iii) $L = L_{i\gamma\infty}$ é um contorno começando no ponto $\gamma - i\infty$ indo até o ponto $\gamma + i\infty$ em que $\gamma \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ de forma que todos os polos de $\Gamma(b_j + B_j s), j = 1,...,m$ são separados

dos polos de $\Gamma(1-a_\lambda - A_\lambda s), \lambda = 1, ..., n$. A integral converge se

$$\alpha > 0, \quad |argz| < \frac{1}{2}\pi\alpha, \quad a \neq 0. \tag{B.12}$$

A integral também converge se $\alpha = 0$, $\gamma\mu + \mathbb{R}(\delta) < -1$, arg$z = 0$ e $z \neq 0$, em que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} A_j - \sum_{j=n+1}^{p} A_j + \sum_{j=1}^{m} B_j - \sum_{j=m+1}^{q} B_j. \tag{B.13}$$

As condições de existência para a Função H estão listadas abaixo, e pressupõem que a condição $B.6$ é satisfeita.

Teorema B.1. A Função H é uma função analítica em z e existe nos seguintes casos:

Caso 1 : Se $q \geq 1$ e $\mu > 0$, a Função H existe para todo $z \neq 0$,

Caso 2 : Se $q \geq 1$ e $\mu = 0$, a Função H existe para todo $0 < |z| < \beta$,

Caso 3 : Se $q \geq 1$, $\mu = 0$ e $\mathbb{R}(\delta) < -1$, a Função H existe para todo $|z| = \beta$,

Caso 4 : Se $p \geq 1$ e $\mu < 0$, a Função H existe para todo $z \neq 0$,

Caso 5 : Se $p \geq 1$ e $\mu = 0$, a Função H existe para todo $|z| > \beta$,

Caso 6 : Se $p \geq 1$, $\mu = 0$ e $\mathbb{R}(\delta) < -1$, a Função H existe para todo $|z| = \beta$,

Caso 7 : Se $\alpha > 0$, $|\text{arg}z| < \frac{1}{2}\pi\alpha$, a Função H existe para todo $z \neq 0$,

Caso 8 : Se $\alpha = 0$, $\gamma\mu + \mathbb{R}(\delta) < -1$, a Função H existe se arg$z = 0$ e $z \neq 0$.

Sendo $c^* = m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q$.