UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

THIALITA MOURA DO NASCIMENTO

PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE NA FORMA DIVERGENTE DECORRENTES DE PERTURBAÇÕES SINGULARES

FORTALEZA

2018

THIALITA MOURA DO NASCIMENTO

PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE NA FORMA DIVERGENTE DECORRENTES DE PERTURBAÇÕES SINGULARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N199p Nascimento, Thialita Moura do.
Problemas de fronteira livre decorrentes de perturbações singulares / Thialita Moura do Nascimento. – 2018.
71 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.

1. Problemas de fronteira livre. 2. Perturbações singulares. 3. Limite. I. Título.
CDD 510

THIALITA MOURA DO NASCIMENTO

PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE NA FORMA DIVERGENTE DECORRENTES DE PERTURBAÇÕES SINGULARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: 29/ 06 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Dário do Amaral
Universidade da integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho à Simone, minha querida mãe.

AGRADECIMENTOS

À Deus por sua infinita bondade e misericódia para comigo.
Aos meus pais pelo apoio e confiança.
Aos meus amigos e familiares, próximos ou distantes, pelos votos de sucesso;
Ao Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte, pela paciência e excelente orientação;
Aos membros da banca Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro e Prof. Dr. Marcelo Dário do Amaral , pela disponibilidade.
A todos os professores, colegas da Pós-graduação e servidores que foram cruciais em minha formação matemática.
Aos meus amigos matemáticos Danuso Rocha, Diego Silva, Thiago Gadelha, Elisafã Braga, Patrícia Renata e Rafael Farias pelas reflexões, críticas e sugestões de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.
Ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Nós não precisamos de magia para mudar o mundo, nós carregamos todo o poder que precisamos já dentro de nós: o poder de imaginar o melhor...." (J.K. ROWLING)

RESUMO

O presente trabalho de dissertação de mestrado destina-se a estudar o problema de fronteira livre que surge como limite dos problemas singulares aproximados

$$\begin{cases} Lu = div(A(x)\nabla u) = \Gamma(x)\beta_\varepsilon(u) & em\ \Omega \\ u = \varphi & em\ \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω e φ são suficientemente suaves, a matriz coeficiente $A = A(x)$ é Hölder contínua, Γ é estritamente positiva, limitada e contínua, β_ε converge para a Delta de Dirac δ_0, quando ε tende a 0^+.

Naturalmente, buscamos estabelecer propriedades uniformes em ε para as soluções u_ε dos problemas ε-pertubardos acima. Propriedades de regularidade serão transportadas para a solução do problema limite. Será obtida a convergência, na distancia Hausdorff,de alguns dos conjuntos de níveis $\{u_\varepsilon \geq \varepsilon\}$. Assim, a solução limite e sua fronteira livre usufruirá das mesmas propriedades geométricas associadas ao minimizantes u_ε, do problema variacional acima.

Além disso, estabelecemos uma condição de fronteira livre no sentido integral.

Palavras-chave: Problemas de fronteira livre. Perturbações singulares. Limite.

ABSTRACT

This master thesis intents to study the Free Boudary Problem arising as a limit of the singular approximated problems

$$\begin{cases} Lu = div(A(x)\nabla u) = \Gamma(x)\beta_\varepsilon(u) & em\ \Omega \\ u = \varphi & em\ \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω and φ are smooth enough and the matrix coefficient $A = A(x)$ is Hölder continuous, Γ is strictly positive, boundary and continuous; and β_ε converges to the Dirac delta δ_0, as ε goes to 0^+.

Naturally, we pursue establish uniform properties in ε for the solutions u_ε of the ε-pertubated problem above . Regularity properties will be transported to the solution of the limit problem. it will be obtained the convergence, in the Hausdorff distance, of some level sets $\{u_\varepsilon \geq \varepsilon\}$. Thus, the limit function and its free boundary will enjoy the same geometric properties associated to the minimizers u_ε, of the variational problems above.

Moreover, we establish a free boundary condition in the integral sense.

Keywords: Free boundary problems. Singular perturbations. Limit.

SUMÁRIO

Notações

1. Ω é um subconjunto aberto, limitado e conexo de $\mathbb{R}^N$;
2. $B_r(x_0)$ é uma bola aberta de centro x_0 e raio r
3. $kB_r(x_0) = B_{kr}(x_0)$, $k > 0$;
4. ν denotará um vertor unitário normal a uma superfície $\mathcal{S}$.;
5. Se X é um conjunto em $\mathbb{R}^N$, denotamos $X^0 = intX$;
6. $|S|$ é a medida N-dimensional de Lebesgue do conjunto S em $\mathbb{R}^N$;
7. $\mathcal{M}(\Omega) = \{\mu; \mu$ é uma medida de Radon em $\Omega\}$;
8. $\mathcal{H}^{N-1}(S)$ é medida de Hausdorff (n-1)-dimensional do conjunto S;
9. Se $0 \leq s < \infty$, $A \subset \mathbb{R}^N$ e $a \in \mathbb{R}^N$, a densidade s- superior de Hausdorff de A é definida por

$$\Theta^{*s}(A,a) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s\left(A \cap B_r(a)\right)}{\varsigma(s) r^s},\ \varsigma(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

onde $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ é a função Gamma.

10. $\mathcal{N}_\delta(E) = \{x \in \mathbb{R}^N : dist(x,E) < \delta\}$, $E \subset \mathbb{R}^N$;
11. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto escalar usual em $\mathbb{R}^N$;
12. $u^+ = \max(u,0)$, $u^- = \max(-u,0)$;
13. χ_S é a função característica do conjunto S;
14. $\displaystyle ⨍_{B_r(x_0)} u(x)\,dx = \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx.$
15. $$\|f\|_{Lip(\Omega)} = \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$
16. $B^*_\alpha = B_{\delta_\varepsilon}(x_\varepsilon)$, $u(x_\varepsilon) = \alpha$ e $\delta_\varepsilon = \dfrac{1}{2}dist(x_\varepsilon,\partial\Omega)$
17. $\Omega_\alpha = \{x \in \Omega : 0 \leq u_\varepsilon(x) \leq \alpha\}$ e $d_\alpha = dist(x,\partial\Omega_\alpha)$.
18. $\Omega^+_\alpha = \Omega \setminus \Omega_\alpha = \{x \in \Omega : u_\varepsilon(x) > \alpha\}$.
19. $\triangle = dist(\Omega', \partial\Omega)$, onde $\Omega' \subset\subset \Omega$

1 INTRODUÇÃO

Uma importante questão em matemática é se, dados $\partial\Omega$ uma hipersuperfície suave e compacta em $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa, e $Q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função limitada e estritamente positiva, podemos encontrar uma outra hipersuperfície compacta $\Upsilon := \partial\Omega^{'} \subset \Omega$ de modo que o seguinte problema elíptico,

$$\begin{cases} Lu = 0 \ \text{ em } \ \Omega \setminus \Omega^{'} \\ u = \varphi \ \text{ em } \ \partial\Omega \\ u = 0, \ \ u_\nu = Q \ \text{ em } \ \Upsilon \end{cases}$$

onde ν o vetor interno normal unitário a Υ, seja solúvel. Note que, além de u ser uma incógnita, a região aonde a equação é satisfeita também é, a princípio, desconhecida. Assim, chamamos a fronteira da região procurada, Υ, de *Fronteira Livre do Problema.*

No presente trabalho iremos apresentar uma técnica de pertubação singular usada para atacar esta classe de Problemas de Fronteira Livre.

Comecemos com alguma motivação: Para simplificar, assumimos que $L = \Delta$, $Q \equiv 1$ e que u é uma solução para o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \setminus \Omega^{'} \\ u = \varphi \ \text{ em } \ \partial\Omega \\ u = 0, \ \ u_\nu = 1 \ \text{ em } \ \Upsilon. \end{cases} \tag{1.1}$$

Estendendo u por 0 em $\Omega^{'}$, obtemos, via princípio do máximo, que $u \geq 0$ em Ω, e a fronteira livre do problema se torna $\Upsilon = \partial\{u > 0\}$. Então u satisfaz,

1. $\Delta u = 0$ em $\{u > 0\}$,
2. $\Delta u = 0$ em $\{u = 0\}^0$,
3. $u_\nu = 1$ em $\partial\{u > 0\}$.

Se $\partial\{u > 0\}$ é suave e B é uma bola centrada em $\partial\{u > 0\}$ então pelo Teorema do divergente, obtemos

$$\int_B \Delta u \psi \, dx = \int_{B\cap\partial\{u>0\}} u_\nu \psi \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{B\cap\partial\{u>0\}} \psi \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

para toda $\psi \in C_0^\infty(B)$. Neste caso, $\Delta u = 1$ em $\partial\{u > 0\}$, no sentido da medida. Assim, Δu tem o mesmo comportamento que a medida Delta de Dirac, δ_0 suportada na origem. Portanto, podemos dizer que u satisfaz , no sentido da medida, a seguinte EDP,

$$\Delta u = \delta_0(u). \tag{1.2}$$

Mais ainda, Δu é uma medida de Radon suportada na fronteira livre Υ.

Note que a equação 1.2 é uma equação singular, então questão agora é: Como desenvolver uma teoria de existência e regularidade para esta equação?

Dado um potencial f, sabemos que o mínimo do funcional

$$J(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + f(v),$$

se existir, deve satisfaz a equação

$$\Delta u = f^{'}(u).$$

Olhando de volta para a equação 1.2, queremos que nosso pontencial satisfaça

$$f^{'}(u) = \delta_0(u).$$

Portanto, a função cuja derivada é a delta de Dirac é a função Heaviside, dada por $\chi_{(0,+\infty)}(x)$, se $x \neq 0$, e $\frac{1}{2}$ em 0 . Assim, dando uma abordagem variacional ao problema, vemos que encontrar uma solução u para 1.2, é, na verdade, encontrar um minimizante para o funcional descontínuo

$$J(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \chi_{\{v>0\}}\, dx.$$

dentre as funções $u \in H^1(\Omega)$ com $u = \varphi$ em $\partial\Omega$.

Uma vez que o funcional J é descontínuo, não é possível usar a teoria clássica do cálculo das variações para encontrar encontrar um ponto crítico que minimiza J. Tal minimizante é então construído como limite de pertubações singulares. Isto é, consideredando $\{\beta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uma aproximação da identidade para a medida delta de Dirac suportada na origem, as soluções u_ε, dos seguintes problemas

$$\begin{cases} \Delta u = \beta_\varepsilon(u) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

convergem para a solução u_0 da equação1.2 e portanto, u_0 é também solução do problema de fronteira livre original 1.1. A teoria de existência e regularidade para o problema de fronteira livre limite é desenvolvida analisando o comportamento assintótico das soluções u_ε e de seus conjuntos de níveis $\partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$ em Ω. Podemos encontrar esta teoria completamente desenvolvida para o operador Laplaciano em ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A. (1981) e CAFFARELLI, Luis A ; SALSA, S. (2005)

Neste trabalho, apresentamos a teoria de existência e regularidade, desenvolvida em MOREIRA, Diego R ; TEIXEIRA, Eduardo V. (2007), para a equação na forma

$$div(A(x)\nabla u)$$

onde a matriz $A(x)$ é apenas Hölder contínua. Neste artigo, os autores usam técnicas similares às usadas no caso Laplaciano para estudar o problema de fronteira livre que é aproximado pelos seguintes problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} div(A(x)\nabla u) = \Gamma\beta_\varepsilon(u) & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

onde Ω, um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, e φ são suficientemente suaves, $\Gamma \in L^\infty(\Omega)$ e estritamente positiva , e a matriz coeficiente $A = A(x)$ é Hölder contínua e β_ε é uma aproximação da identidade da medida delta de Dirac, δ_0, no sentido de que

$$\beta_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\beta(\frac{s}{\varepsilon})$$

com $\beta \in C_0^\infty([0,1])$ e $\int_0^1 \beta\, ds = 1$.

A ideia é que a equação 1.3 aproxima o problema de fronteira livre

$$div(A(x)\nabla u) = 0 \text{ em } \Omega^+ := \{x \in \Omega | u(x) > 0\} \tag{1.4}$$

e

$$\langle A(x)\nabla u, \nabla u\rangle = 2\Gamma \text{ ao longo da fronteira livre } \partial\{u > 0\} \cap \Omega. \tag{1.5}$$

em um certo sentido que será discutido mais adiante.

Informações sobre o problema de fronteira limite, tais como regularidade e propriedade geométricas da função limite e sua fronteira livre, podem ser obtidas através das propriedades de u_ε e dos conjuntos de níveis $\partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$ que são uniformes em ε.

Embora tenhamos dados de contorno suficientemente suaves, estamos interessados em estabelecer regularidade interior. Assim, nossas estimativas ε-uniforme serão estimativas de caráter local. Isto é, estabelecidas para subdomínios $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Em MOREIRA, Diego R ; TEIXEIRA, Eduardo V. (2007) os autores fazem uma abordagem detalhada da condição de fronteira livre em quatro sentidos: sentido integral, sentido da medida, sentido pontual e no sentido da viscosidade. Também desenvolvem um estudo sobre a regularidade da Fronteira Livre do Problema mostrando que a mesma é $C^{1,\alpha}$, assumindo regularidade Lipschitz em $\overline{\Omega}$ para a matriz coeficiente $A = A(x)$.

Entretanto, no presente trabalho estabeleceremos a condição de fronteira livre apenas no sentido integral, dando uma certa continuidade a abordagem variacional dada ao problema durante todo o trabalho. Estudos sobre a regularidade da fronteira livre serão esperançosamente deixados para trabalhos futuros.

2 PRELIMINARES

Nossas equações de estudo são regidas por operadores uniformemente elípticos de segunda ordem. Então, nesta seção apresentamos alguns resultados clássicos da teoria de operadores elípticos de segunda ordem que serão usados durante todo este trabalho.

2.1 Operadores elípticos

Vamos trabalhar com operadores da forma,

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{i} b_i(x)D_iu + c(x)u. \tag{2.1}$$

$$Lu = \sum_{i,j} \left(a_{ij}(x)D_iu\right)_j + \sum_{i} b_i(x)D_iu + c(x)u. \tag{2.2}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que operador L está na forma Não-divergente quando L se escreve como em 2.1. Se L se escreve como em 2.2, dizemos que L está na forma Divergente.

Definição 2.1. *Um operador L, ou na forma Divergente ou na forma Não-divergente, é dito ser uniformemente elíptico, em um aberto Ω, se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que*

$$\lambda\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda\|\xi\|^2$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, x \in \Omega$. E as constantes $0 < \lambda \leq \Lambda$ são chamadas constantes de Elipticidade.

Neste trabalho estaremos interessados em operadores da forma (2.2) sem os termos relacionados a $b_i(x)$ ou $c(x)$, i.e, o operador diferencial na forma divergente associado a matrz A, que será denotado a partir de agora por

$$Lu = div(A(x)\nabla u).$$

onde a matriz $A(x) = [a_{ij}(x)]$ será fixada a partir da secção 3.

Quando necessário, para enfatizar a dependência da matriz, escreveremos

$$L_B(u) = div(B(x)\nabla u).$$

Definição 2.2. *Uma função $u \in H^1(\Omega)$ é dita ser uma solução fraca da equação*

$$Lu = \Gamma(x)\beta_\varepsilon(u) \tag{2.3}$$

se

$$\int_{\Omega} (\langle A(x)\nabla u, \nabla\varphi\rangle + \Gamma(x)\beta_{\varepsilon}(u)\varphi)\; dx = 0, \qquad \forall\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Observação 2.3. *Quando a igualdade integral acima for satisfeita para* $(\geq, \leq)$ *e para toda* $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ *não-negativa, dizemos que* u *é uma supersolução ou subsolução, respectivamente.*

Teorema 2.4. *(GILBARG, David ; TRUDINGER, Neil S. (2015),* Teorema 8.1-Princípio *do Máximo Fraco). Seja* $u \in H^1(\Omega)$*. Então,*

$$Lu \geq 0 \Rightarrow \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^{+}$$

$$Lu \leq 0 \Rightarrow \inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^{-}.$$

Corolário 2.5. *(GILBARG, David ; TRUDINGER, Neil S. (2015) Teorema3.3-* Princípio *de comparação)*

Seja L *elíptico em* Ω *com* $c(x) \leq 0$ *em* Ω*. Suponha que* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* $Lu = Lv$ *em* Ω*,* $u = v$ *em* $\partial\Omega$*. Então* $u = v$ *em* Ω*. Se* $Lu \geq Lv$ *em* Ω *e* $u \leq v$ *em* $\partial\Omega$*, então* $u \leq v$ *em* Ω*.*

Teorema 2.6. *(HAN, Qing ; LIN, Fang-Hua. (2000),* Teorema 4.17-Desigualdade Har*nack de Moser)*

Seja u *solução fraca não-negativa de*

$$Lu = g(x) \; em \, \Omega.$$

Suponha que $g \in L^q(\Omega)$ *para algum* $q > \frac{n}{2}$*. Então, existe* $C = C(n, \lambda, \Lambda, q) > 0$

$$\sup_{B_r(x_0)} u \leq C \left(\inf_{B_{\frac{1}{2}}(x_0)} u + r^{2-\frac{n}{q}} \|g\|_{L^q(B_r(x_0))} \right)$$

para cada $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$*.*

Lema 2.7. *(GILBARG, David ; TRUDINGER, Neil S. (2015),* Lema 3.4- Lema de Hopf*)*
Assuma que L *na forma não-divergente, uniformemente elíptico e é tal que* $Lu \geq 0$ *em* Ω *com* $c(x) = 0$ *em* Ω*. Seja* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que:*
i) u *é contínua em* x_0*;*
ii) $u(x_0) > u(x)$ *para todo* $x \in \Omega$*;*
iii) $\partial\Omega$ *satisfaz a propriedade da esfera interior.*
Então vale,

$$\lim_{t \to 0^{+}} \frac{u(x_0) - u(x_0 - t\nu)}{t} > 0.$$

onde ν é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$ em x_0.

Observação 2.8. *O lema de Hopf também é válido para operadores na forma divergente, mas precisamos ter por hipótese a continuidade Hölder dos coeficientes a_{ij} (GILBARG, David ; TRUDINGER, Neil S. (2015), notas cap. 3).*

Teorema 2.9. *(GILBARG, David ; TRUDINGER, Neil S. (2015),* Teorema *3.5 -* Princípio *do Máximo Forte)*

Seja L uniformemente elíptico, na forma não-divergente. Assuma que $Lu \geq 0\,(\leq 0)$ e $c(x) = 0$ em um domínio Ω (não necessariamente limitado). Se u atinge seu máximo (mínimo) no interior de Ω, então u é constante. Se $c \leq 0$ e $\dfrac{c}{\lambda}$ é limitado, então u não atinge se máximo não-negativo (mínimo não-positivo) no interior de Ω a menos que seja constante.

Observação 2.10. *Assumindo a Hölder continuidade de a_{ij}, o Teorema 2.9 continua válido para operadores na forma divergente com $c(x) \equiv 0$, uma vez que o Lema de Hopf se verifica.*

Teorema 2.11. *(GILBARG, David ; TRUDINGER, Neil S. (2015), ,* Teorema *8.8, Teorema 8.32)*

Assuma que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ é uma solução fraca de

$$Lu = g(x)$$

onde $A(x) = [a_{ij}(x)]_{n\times n} \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $g \in L^{\infty}(\Omega)$, $\|a_{ij}\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K$. Então, para qualquer subdomínio $\Omega^{'} \subset\subset \Omega$ temos

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \leq C\left(\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|g\|_{L^{\infty}(\Omega)}\right) \tag{2.4}$$

onde $C = C(n, \lambda, K, d^{'})$, $d^{'} = dist(\Omega', \partial\Omega)$.

Além disso, se $A(x) = [a_{ij}(x)]_{n\times n} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ e $\|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} \leq K$, então

$$u \in H^2_{loc}(\Omega) \;\; com \;\; \|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C\left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

e u satisfaz a mesma equação na forma não divergente, i.e.,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} D_i a_{ij}(x) D_i u(x) = 0 \;\; a.e \; em \;\; \Omega$$

Observação 2.12. *A estimativa* 2.4 *é chamada estimativa $C^{1,\alpha}$ de Schauder.*

Teorema 2.13. *(GILBARG, David ; TRUDINGER, Neil S. (2015), Corolário 8.35- Estimativa $C^{1,\alpha}$ de Schauder até a fronteira)*

Assuma que $\partial\Omega \in C^{1,\alpha}$, $\varphi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, A e g como na primeira parte do teorema acima. Se $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} Lu = g(x) & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e vale

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{1,\alpha}(\Omega)}\right)$$

onde $C = C(n, \lambda, \partial\Omega)$.

Figura 1: Gráfico das funções β_ε.

3 O PROLEMA REGULARIZADO

Considere os seguintes problemas de Dirichlet,

$$\begin{cases} Lu = div(A(x)\nabla u) = \Gamma(x)\beta_\varepsilon(u) & em\ \Omega \\ u = \varphi & em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde assumimos que:
i)$\Gamma \in L^\infty(\Omega)$ e $\inf_\Omega g = \gamma > 0$.
ii) $A(x) = (a_{ij}(x))$, é uma matriz simétrica, com coeficientes $a_{ij}(x) \in C^\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$, e constantes de elipticidade $0 < \lambda \leq \Lambda$, i.e.,

$$\lambda I \leq A(x) \leq \Lambda I.$$

iii) $\varphi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\varphi \geq 0$.
iv)$\partial\Omega \in C^{1,\alpha}$.

E o termo de pertubação β_ε é constrído da seguinte maneira: fixada uma função suave, não negativa β satisfazendo

1. $\beta > 0$ em $(0,1)$, com $supp\beta \subset [0,1]$ e $\int_0^1 \beta(s)\, ds = 1$,
2. β é crescente em $[0, \frac{1}{2})$ e decrescente em $(\frac{1}{2}, 1]$.

E para cada $0 < \varepsilon < 1$, definimos o termo de pertubação como,

$$\beta_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\beta(\frac{s}{\varepsilon}).$$

Nosso objetivo nesta seção é estudar as propriedades geométricas locais da família de soluções $\{u_\varepsilon\}$.

3.1 Existência e regularidade de soluções minimais

A equação (3.1) deve ser entendida, neste momento, como uma relação integral. Logo, procuramos por soluções $u \in H^1_\varphi(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v - \varphi \in H^1_0(\Omega)\}$ que

satisfaçam
$$\int_\Omega \left(\langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\psi\rangle + \Gamma(x)\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\psi\right)\, dx = 0 \tag{3.2}$$
$\forall\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Observe que a falta de monotonicidade da equação 3.1 não nos permite aplicar o princípio de comparação. Portanto, a unicidade de soluções pode não ser verdadeira.

Para a existência, observamos que as pertubações
$$\beta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\beta(\frac{x}{\varepsilon})$$
são suaves o suficiente para que possamos empregar o Cálculo das Variações à equação 3.1. Isto é, pensamos em u_ε como o minimizante do funcional de energia
$$\mathcal{F}_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u, \nabla u\rangle + \Gamma(x)B_\varepsilon(u)\, dx$$
onde $B_\varepsilon(u) = \displaystyle\int_0^u \beta_\varepsilon(s)\, ds = \int_0^{\frac{u}{\varepsilon}} \beta(s)\, ds$, e cuja existência é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in H^1_\varphi(\Omega)$ que minimiza $\mathcal{F}_\varepsilon$ em $H^1_\varphi(\Omega)$. Além disso, $u_\varepsilon \geq 0$ em Ω e satisfaz* (3.2).

Demonstração. Da elipticidade de A, $\langle A(x)\nabla u, \nabla u\rangle \geq \lambda\|\nabla u\|^2$. Logo,
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\varepsilon(u) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u, \nabla u\rangle + \Gamma(x)B_\varepsilon(u)\, dx \\
&\geq \int_\Omega \frac{\lambda}{2}\|\nabla u\|^2 + \Gamma(x)B_\varepsilon(u)\, dx \\
&\geq \int_\Omega \frac{\lambda}{2}\|\nabla u\|^2
\end{aligned}$$
Dada uma sequência $\{u_m\} \subset H^1_\varphi$ tal que $\|u_m\|_{H^1(\Omega)} \to \infty$ quando $m \to \infty$ existe, pela desigualdade de Poincaré, uma constante universal $C = C(\partial\Omega) > 0$, tal que
$$\int_\Omega |u_m|^2\, dx \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2\, dx + \int_{\partial\Omega} |u_m|^2\, d\mathcal{H}^{n-1}\right).$$
Uma vez que $u_m = \varphi$ em $\partial\Omega$,
$$\int_{\partial\Omega} |u_m|^2\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega} |\varphi|^2\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$
E ainda,
$$\|u_m\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (C+1)\int_\Omega |\nabla u_m|^2\, dx + \bar{C}.$$

Logo, $\int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx \to \infty$ quando $m \to \infty$, em particular $\mathcal{F}_\varepsilon(u) \to \infty$. Ou seja, $\mathcal{F}_\varepsilon(u)$ é coercivo no subconjunto fracamente fechado(na verdade, convexo) $H^1_\varphi(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$.

Além disso, $\mathcal{F}_\varepsilon$ é fracamente semicontínua inferiormente. De fato, se $u_m \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$, podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $u_m \to u$ q.t.p em Ω . Logo, usando a elipticidade de A e o lema de Fatou obtemos,

$$\begin{aligned}
\liminf_{m\to\infty} \mathcal{F}_\varepsilon(u_m) &= \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u_m, \nabla u_m\rangle + \Gamma(x)B_\varepsilon(u_m)\,dx \\
&\geq \int_\Omega \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u, \nabla u\rangle + \Gamma(x)B_\varepsilon(u)\,dx = \mathcal{F}_\varepsilon(u).
\end{aligned}$$

Para finalizar, se $0 < \kappa = \inf_{H^1_\varphi(\Omega)} \mathcal{F}_\varepsilon$ e $\{u_m\} \subset H^1_\varphi(\Omega)$ é tal que $\mathcal{F}_\varepsilon(u_m) \to \kappa$ quando $m \to \infty$, então da coercividade de $\mathcal{F}_\varepsilon$ temos que $\{u_m\}$ é limitada em $H^1(\Omega)$ e por este ser um espaço Hilbert, podemos assumir, a menos de subsequência, que $u_m \rightharpoonup u_\varepsilon$ em $H^1(\Omega)$. Da semi-continuidade fraca de $\mathcal{F}_\varepsilon$ e de $H^1_\varphi(\Omega)$ ser fracamente fechado segue que,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \kappa.$$

Da Teoria do Cálculo em espaços de Banach, segue que u_ε é um ponto crítico do funcional $\mathcal{F}_\varepsilon$. Portanto, $\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon + t\psi)$, $t \in \mathbb{R}$ atinge seu mínimo em $t = 0$, assim

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon + t\psi)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla(u_\varepsilon + t\psi), \nabla(u_\varepsilon + t\psi)\rangle + \Gamma(x)B_\varepsilon(u_\varepsilon + t\psi)\,dx\right)|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\psi\rangle + \Gamma(x)B_\varepsilon(u_\varepsilon)\psi\,dx
\end{aligned}$$

$\forall \psi \in C^\infty_0(\Omega)$. Isto é, 3.2 é satisfeita e portanto u_ε é uma solução fraca de 3.1.

A regularidade de u_ε segue do Teorema 2.13. Para mostrar que $u_\varepsilon \geq 0$ em Ω, escrevamos $\Omega = \{0 \leq u_\varepsilon\} \cup \{u_\varepsilon < 0\}$. Supondo, por contradição, que $\{u_\varepsilon < 0\} \neq \emptyset$, segue de $supp\beta_\varepsilon = [0, \varepsilon]$ que

$$Lu_\varepsilon = 0 \ \ em \ \ D := \{u_\varepsilon < 0\}.$$

Pelo Princípio do Máximo Fraco, teorema 2.4,temos que

$$\inf_D u_\varepsilon \geq \inf_{\partial D}(-u_\varepsilon^-) = 0.$$

O que é uma contradição. Portanto, $D = \emptyset$ e $u_\varepsilon \geq 0$ em Ω. □

Sendo u_ε solução fraca de 3.1 temos,

$$\int_\Omega \langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\psi\rangle\, dx = -\int_\Omega \psi\Gamma(x)B_\varepsilon(u_\varepsilon)\, dx. \tag{3.3}$$

Assim,

$$\int_\Omega \psi L u_\varepsilon\, dx = -\int_\Omega \langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\psi\rangle\, dx. \tag{3.4}$$

$\forall\, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Logo, considerando a distribuição

$$T_{Lu_\varepsilon}(\psi) = \int_\Omega \psi L u_\varepsilon,\ \forall\, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

temos que $T_{Lu_\varepsilon} \geq 0$, $T_{Lu_\varepsilon} \in D^{'}(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega))^{'}$. Assim, pelo Teorema de Riesz, $Lu_\varepsilon(x)dx$ é uma medida de Radon dada por 3.4.

Além disso, Lu_ε é suportada em $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : 0 \leq u_\varepsilon \leq \varepsilon\}$, pois $supp\beta_\varepsilon = [0, \varepsilon]$.

Dessa maneira, uma vez que o campo vetorial $A(x)\nabla u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ vale a Fórmula de Green, i.e, para toda $\psi \in C^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ e $B_\rho(x_0) \subset\subset \Omega$ temos,

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} \psi L u_\varepsilon + \langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\psi\rangle\, dx = \int\limits_{\partial B_\rho(x_0)} \psi\langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

onde ν é o vetor unitário normal exterior a $\partial B_\rho(x_0)$.

3.2 Regularidade Lipschitz uniforme

Se u é uma solução para a equação 1.4 obtida como o limite de u_ε fazendo $\varepsilon \to 0^+$, então, assumindo que $\partial\{u > 0\}$ é de classe C^1, para $x_0 \in \partial\{u > 0\}$, pelo lema de Hopf temos,

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{u(x_0 - t\nu) - u(x_0)}{t} > 0$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior a $\{u > 0\}$ em x_0. Por outro lado, para $0 < t \ll 1$, $x_0 + t\nu \in \{u = 0\}^0$. Logo,

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t} = 0.$$

Ou seja, não é possível que u seja diferenciável ao longo da fronteira livre. Portanto, a melhor regularidade que devemos esperar para u é a continuidade Lipschitz.

Isto indica que esta deve ser a regularidade ótima uniforme esperada para a família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Observação 3.2. *(Renormalização Lipschitz)*

Em muitos momentos é útil recorrer a propriedade de renormalização do problema. Isto é, se $u \in H^1(B_r(x_0)) \cap C^0(\overline{B_r(x_0)})$ *é uma solução de*

$$Lu = \Gamma(x)\beta_\varepsilon(u) \ \ em \ \ B_r(x_0).$$

então, definimos a renormalização de u, $w : B_{\frac{r}{\varepsilon}}(0) \to \mathbb{R}$, *por*

$$w(y) = \frac{1}{\varepsilon} u(x_0 + \varepsilon y).$$

Note que $w \in H^1(B_{\frac{r}{\varepsilon}}(0)) \cap C^0(\overline{B_{\frac{r}{\varepsilon}}(0)})$ *e,*

$$\begin{aligned} \varepsilon div(A(x_0+\varepsilon y)\nabla w) &= div(A(x_0+\varepsilon y)\nabla(\varepsilon w)) = div(A(x_0+\varepsilon y)\nabla(u(x_0+\varepsilon y)) \\ &= \Gamma(x_0+\varepsilon y)\beta_\varepsilon(u(x_0+\varepsilon y)) = \varepsilon\Gamma(x_0+\varepsilon y)\beta(w) \end{aligned}$$

Logo, w *é solução fraca de*

$$L_{A^\varepsilon}(w) = \Gamma(x_0+\varepsilon y)\beta(w) \ \ \ em \ \ B_{\frac{r}{\varepsilon}}(0)$$

onde $A^\varepsilon(y) = A(x_0+\varepsilon y), \ y \in B_{\frac{r}{\varepsilon}}(0)$.

Além disso, se u *é diferenciável em* x_0, *temos* $\nabla w(0) = \nabla u(x_0)$.

A renormalização w *não muda as constantes de elipticidade, i.e, ainda temos que*

$$\lambda I \leq A^\varepsilon \leq \Lambda I.$$

Portanto, as constantes que aparecem nas estimativas de Schauder e na desigualdade de Harnack não são afetadas pela renormalização. Assim, ao considerarmos a família de operadores $\{L^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *definida por*

$$L^\varepsilon(w) = div(A^\varepsilon \nabla w),$$

podemos identificá-los simplesmente por L.

Isto posto, usaremos o fato de que provar que u é Lipschitz em $B_r(x_0)$ equivale a prova que w é Lipschitz em $B_{\frac{r}{\varepsilon}}(0)$.

Lema 3.3. *Seja* $w \in C^{1,\alpha}(B_1(0)) \cap H^1(B_1(0))$ *solução de*

$$Lw = g(x)$$

com $\|g\|_{L^\infty(B_1)} \leq D$. *Se* $w(0) \leq 1$ *então existe uma constante universal* $C_0 > 0$ *tal que*

$$|\nabla w(0)| \leq C_0.$$

Demonstração. Pela estimativa $C^{1,\alpha}$ de Schauder,

$$|\nabla w(0)| \leq C\left(\|w\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + \|g\|_{L^\infty(B_1)}\right).$$

E pela desigualdade de Harnack (Moser),

$$\begin{aligned}\|w\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} &\leq \tilde{C}\left(\inf_{B_{\frac{1}{4}}} w + \|g\|_{L^n(B_1)}\right)\\ &\leq \tilde{C}\left(w(0) + \|g\|_{L^\infty(B_1)}|B_1|^{\frac{1}{n}}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\nabla w(0)| \leq C\tilde{C}\left(1 + D(|B_1|^{\frac{1}{n}} + 1)\right) := C_0$$

onde C_0 não depende de w. □

Lema 3.4. *Seja* $v \in C^{1,\alpha}(\Omega \cap B_1(0)) \cap H^1(\Omega \cap B_1(0))$ *solução não-negativa de*

$$\begin{cases} Lv = 0 & em\ \ \Omega \cap B_1(0) \\ u = 0 & em\ \ \Upsilon := \partial\Omega \cap B_1(0). \end{cases}$$

Assuma que $0 \in \partial\Omega$ *e* $|\nabla v|$ *é limitado em* Υ. *Então existe uma constante universal* $C > 0$ *tal que*

1. $v(x) \leq C dist(x, \partial\Omega) \sup_{\Upsilon} |\nabla v|$, $\forall x \in B_{\frac{1}{2}} \cap \Omega$.
2. $\|\nabla v\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}} \cap \Omega)} \leq C \sup_{\Upsilon} |\nabla v|$.

Demonstração. (1) Tome $x_0 \in B_{\frac{1}{2}} \cap \Omega$ e seja $h = dist(x_0, \partial\Omega)$, $M = \sup_{\Upsilon} |\nabla v|$, e $\tau = \frac{v(x_0)}{h}$.

Considere $w(y) = \dfrac{1}{h} v(x_0 + hy)$ e veja que:

i) $w(0) = \tau$

ii)$L^{A^h}(w) = div(A(x_0 + hy)\nabla w) = 0$ em $B_1(0)$.

Seja $x_1 \in \Upsilon$ tal que

$$h = dist(x_0, \partial\Omega) = \|x_0 - x_1\|.$$

Assim, existe $y_1 \in \partial B_1$ tal que $x_1 = x_0 + hx_1$ e portanto,

$$w(y_1) = \frac{1}{h} v(x_1) = 0.$$

Como $\nabla w(y) = \nabla v(x_0 + hy)$ temos que

$$|\nabla w(y_1)| = |\nabla v(x_1)| \leq M.$$

Pela desigualdade de Harnack, existe uma constante universal $c > 0$ tal que

$$\tau c = w(0)c \leq w(y)$$

$\forall\ y \in B_{\frac{1}{2}}(0)$. Como queremos mostrar que $\tau \leq CM$ e sabemos que $|\nabla w(y_1)| \leq M$, a ideia agora é construir uma função barreira (figura 2) que toca w por baixo em y_1.

Seja Z^h tal que,

$$\begin{cases} L_{A^h} Z^h = 0 & em\ \ R := B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0) \\ Z^h = 1 & em\ \ \partial B_{\frac{1}{2}}(0) \\ Z^h = 0 & em\ \ \partial B_1(0), \end{cases}$$

e cuja existência segue da existência da função de Green em R. Note que $Z^h \in C^{1,\alpha}(\overline{R})$ e, pelo princípio do máximo, $Z^h \geq 0$ em R.

Defina, agora,

$$Z_h(y) = \tau C_0 Z^h(y), \quad y \in \overline{R}$$

e observe que, $Z_h = 0 \leq w$ em ∂B_1, $Z_h = c\tau \leq w$ em $\partial B_{\frac{1}{2}}$ e $L_{A^h}(w) = L_{A^h}(Z_h)$ em R. Dessa maneira, também pelo princípio do máximo, $w \geq Z_h$ em R e $w(y_1) = Z_h(y_1) = 0$. Em particular,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{(w - Z_h)(y_1 + t\nu) - (w - Z_h)(y_1)}{t} \geq 0$$

onde ν é o normal unitário interior a $B_1(0)$ em y_1. Logo,

$$\partial_\nu w(y_1) \geq \partial_\nu Z_h(y_1).$$

Fixado $0 < R < 1$, arbitrariamente, para cada $x \in \partial B_1$ podemos encontrar $y \in B_1$ tal que $B_R = B_R(y) \subset B_1$ e $x \in \partial B_1 \cap \partial B_R$. Assim, como $Z^h \geq 0$ e $Z^h(y) = 0\ \forall y \in \partial B_1$, usando o Lema de Hopf e a continuidade de $\partial_\nu Z^h$, temos

$$0 < \theta \leq \inf_{\partial B_1} \partial_\nu Z^h.$$

onde θ depende apenas das constantes de elipticidade (que não são alteradas pela renormalização A^h) e R.

Note que,

$$\partial_\nu Z_h = c\tau \partial_\nu Z^h \geq c\tau\theta > 0.$$

Logo,

$$M \geq |\nabla w(y_1)| \geq |\partial_\nu w(y_1)| = \partial_\nu w(y_1) \geq \partial_\nu Z_h(y_1) \geq c\tau\theta.$$

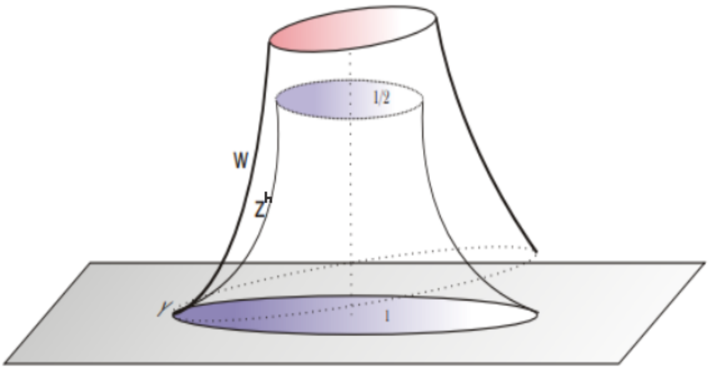

Figura 2: Barreira

Assim,

$$v(x_0) \leq C_1 dist(x_0, \partial\Omega) M.$$

onde $C_1 = \dfrac{1}{c\theta}$.

Para (2), defina $v^*(y) = \dfrac{1}{h} v(x_0 + hy)$, $y \in B_1(0)$. Pela estimativa de Schauder e desigualdade Harnack,

$$\begin{aligned} |\nabla v^*(0)| &\leq \frac{\bar{C}}{h}\left(\|v^*\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})}\right) \\ &\leq \frac{\bar{C} c v^*(0)}{h} = \frac{\bar{C} c v(x_0)}{dist(x_0, \partial\Omega)} \end{aligned}$$

E por (1),

$$|\nabla v(x_0)| \leq \frac{\bar{C} c C_1 dist(x_0, \partial\Omega)}{dist(x_0, \partial\Omega)} \sup_{\Upsilon} |\nabla v| = C_2 \sup_{\Upsilon} |\nabla v|.$$

Para finalizar, tomamos $C = \max\{C_1, C_2\}$. □

Agora estamos prontos para provar a estimativa Lipschitz uniforme em ε.

Daqui por diante, $\Omega' \subset\subset \Omega$ será um subdomínio fixado arbitrariamente, e $\triangle = dist(\Omega', \partial\Omega)$.

Teorema 3.5. *Existe uma constante universal $C = C(\Omega')$ tal que, para ε suficientemente pequeno,*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C.$$

Demonstração. Seja $x_0 \in \Omega'$ e $\varepsilon < \triangle$.

Note que ou $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ ou $x_0 \in \Omega_\varepsilon^+$.

Caso 1: $x_0 \in \Omega_\varepsilon$. Neste caso, $0 \leq u_\varepsilon(x_0) \leq \varepsilon$ e $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$. Assim, podemos considerar a renomalização

$$w(y) = \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon y), \; y \in B_1(0).$$

Vemos que,

• $\nabla w(0) = \nabla u_\varepsilon(x_0)$;

• $w(0) = \dfrac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(x_0) \leq 1$;

• $L_{A^\varepsilon}(w) = \Gamma(x_0 + \varepsilon y)\beta(w), \ em \ B_1(0)$.

Então, $w \in C^{1,\alpha}(B_1) \cap H^1(B_1)$ e pelo lema 3.3,

$$|\nabla u_\varepsilon(x_0)| \leq C_0$$

onde C_0 não depende de ε.

Caso 2: $x_0 \in \Omega_\varepsilon^+$.

Como $supp \beta_\varepsilon = [0, \varepsilon]$, temos que

$$Lu_\varepsilon = 0 \ \ em \ \ \Omega_\varepsilon^+.$$

Se $d_\varepsilon(x_0) \geq \dfrac{\triangle}{3}$, então

$$\Omega'' = \Omega' \cap \{x \in \Omega : d_\varepsilon(x) \geq \frac{\triangle}{3}\} \subset\subset \Omega_\varepsilon^+$$

Da estimativa Schauder, existe uma constante universal $c > 0$ tal que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega'')} \leq c\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \sup_{\overline{\Omega}} \varphi.$$

Logo, $|\nabla u_\varepsilon(x_0)| \leq C_1$, onde C_1 é universal.

Finalmente, para x_0 bem próximo da fronteira $\partial\Omega_\varepsilon^+$ i.e., se $d_\varepsilon(x_0) < \frac{\triangle}{3}$, temos que $3d_\varepsilon(x_0) < \triangle \leq dist(x_0, \partial\Omega)$.

Seja $y_0 \in \partial\Omega_\varepsilon^+$ tal que $d_\varepsilon(x_0) = |x_0 - y_0|$ e $d = dist(y_0, \partial\Omega)$. Considere,

$$w(y) = \frac{u_\varepsilon(y_0 + \varepsilon y) - \varepsilon}{d}, \ \ y \in B_1(0) \cap D_\varepsilon$$

onde $y_0 + dy \in \Omega_\varepsilon^+ \cap B_d(x_0)$ e $D_\varepsilon = T^{-1}(\Omega_\varepsilon^+)$, $T(y) = x_0 + dy$.

Assim,

$$\begin{cases} L_{A^d}(w) = 0 & em \ \ B_1 \cap D_\varepsilon \\ w = 0 & em \ \ B_1 \cap \partial D_\varepsilon. \end{cases}$$

Como $\nabla w = \nabla u_\varepsilon$, $w(0) = 0$ em $B_1 \cap \partial D_\varepsilon$, segue pelo primeiro caso que $\|\nabla w\|$ é limitado em $B_1 \cap \partial D_\varepsilon$. Logo, pelo lema 3.4,

$$\|\nabla w\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}} \cap D_\varepsilon)} \leq C_2.$$

E portanto,

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{d}{2}}\cap\Omega_\varepsilon^+)} \leq C_2.$$

Agora observe que, $\forall x \in \partial\Omega$,

$$\begin{array}{rcl} 2|y_0 - x_0| & = & 2d_\varepsilon(x_0) = 3d_\varepsilon(x_0) - d_\varepsilon(x_0) \\ & < & dist(x_0, \partial\Omega) - d_\varepsilon(x_0) \leq dist(y_0, \partial\Omega) = d \end{array}$$

Logo, $x_0 \in B_{\frac{d}{2}}(y_0)$ e portanto,

$$\|\nabla u_\varepsilon(x_0)\| \leq C_2.$$

Tome $L = \max\{C_0, C_1, C_2\}$ e então,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leq L$$

onde L não depende de ε.

$\square$

Concluímos então que a família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é localmente uniformemente Lipschitz.

3.3 Propriedades geométricas dos conjuntos de níveis

Uma parte central nesta teoria é mostrar que próximo aos conjuntos de níveis $\partial\Omega_\varepsilon$ é possível controlar u_ε por uma ordem de $dist(x, \partial\Omega_\varepsilon)$, i.e., $u_\varepsilon(x) \sim dist(x, \partial\Omega_\varepsilon)$. Começamos mostrando limitações inferior e superior que refletem, respectivamente, uma propriedade geométrica de não-degenerescência e uma condição de crescimento linear fora dos conjuntos de níveis $\partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$. Estas, por sua vez, implicam em uma condição de não-degenerescência forte e na densidade positiva uniforme dos conjuntos $\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$.

Teorema 3.6. *(Não-degenerescência)*

Dada uma constante $C_1 > 1$, existe uma constante $C_2 > 0$ dependendo de C_1, tal que: se $x_0 \in B_\varepsilon^*$ e $u_\varepsilon(x_0) \geq C_1\varepsilon$, então

$$u_\varepsilon(x_0) \geq C_2 d_\varepsilon(x_0).$$

Demonstração. Seja $d = d_\varepsilon(x_0) = dist(x_0, \partial\Omega_\varepsilon)$, $\mu = u_\varepsilon(x_0)$ e $\alpha = \dfrac{\mu}{d}$. Queremos encontrar uma constante universal $\bar{c} > 0$ tal que

$$\alpha \geq \bar{c}.$$

Note que $B_d(x_0) \subset \Omega_\varepsilon^+$. Considere a renormalização

$$w(y) = \frac{1}{d} u_\varepsilon(x_0 + dy), \;\; y \in B_1(0).$$

Note que ,

$$\begin{aligned} div(A(x)\nabla u_\varepsilon) &= \Gamma(x)\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \\ &= \Gamma(x_0+dy)\beta_\varepsilon(dw) = div(A^d\nabla w) \end{aligned}$$

com $y \in B_1(0)$. Logo, como $supp\beta_\varepsilon = [0,\varepsilon]$, temos que

$$L_{A^d}(w) = 0 \text{ em } B_1(0) \tag{3.5}$$

onde $A^d(y) = A(x_0+dy), y \in B_1(0)$.

Pela desigualdade Harnack , existe constante universal $\bar{C} > 0$ tal que

$$\sup_{B_1(0)} w \leq \bar{C} \inf_{B_{\frac{1}{2}}(0)} w$$

Portanto,

$$\underline{C}\alpha = \underline{C}w(0) \leq w \leq \bar{C}w(0) = \bar{C}\alpha \text{ em } B_{\frac{1}{2}}(0)$$

onde $\underline{C} = \bar{C}^{-1}$.

Agora, considere a seguinte função corte:

$$\psi \equiv 0 \text{ em } B_{\frac{1}{4}}(0), \;\; \psi \equiv 1 \text{ em } \overline{B}_1(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)$$

e onde ψ é suave em $B_1(0)$. Defina, $\varsigma : B_1(0) \to \mathbb{R}$ pondo

$$\varsigma(y) = \begin{cases} \min\{w(y), \bar{C}\alpha\psi(y)\} \;\text{ em }\; B_{\frac{1}{2}} \\ w \;\text{ em }\; B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Por 3.5, w minimiza o funcional

$$E(v) = \int_{B_1(0)} \frac{1}{2}\langle A^d\nabla v, \nabla v\rangle + \Gamma(x_0+dy)B_\varepsilon(dv)\, dx$$

dentre as funções $v \in K = w + H_0^1(B_1(0))$.

Como

$$\varsigma - w = \begin{cases} 0 \;\text{ em }\; B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}(\bar{C}\alpha\psi - |w - \bar{C}\alpha\psi|) \;\text{ em }\; B_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

temos $\varsigma \in K$, e portanto $E(\varsigma) \geq E(w)$. O que implica

$$\begin{aligned} A &:= \int_{B_1(0)} \frac{1}{2}\left(\langle A^d\nabla\varsigma, \nabla\varsigma\rangle - \langle A^d\nabla w, \nabla w\rangle\right) \\ &\geq \int_{B_1(0)} \Gamma(x_0+dy)\left(B_\varepsilon(dw) - B_\varepsilon(d\varsigma)\right) := B \end{aligned}$$

Vamos estimar A e B.

Note que,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{B_1(0)\cap\{\bar{C}\alpha\psi\leq w\}} (\bar{C}\alpha)^2\langle A^d\nabla\psi,\nabla\psi\rangle - \langle A^d\nabla w,\nabla w\rangle \\ &\leq \int_{B_1(0)} (\bar{C}\alpha)^2\langle A^d\nabla\psi,\nabla\psi\rangle \\ &\leq (\bar{C}^2\Lambda\|\psi\|_{L^2(B_1)})\alpha^2 = \tilde{C}\alpha^2 \end{aligned}$$

Para B, veja que

$$\begin{aligned} B &\geq \int_{B_{\frac{1}{4}(0)}} \Gamma(x_0+dy)\left(B_\varepsilon(dw)-B_\varepsilon(d\varsigma)\right) = \int_{B_{\frac{1}{4}(0)}} \Gamma(x_0+dy)B_\varepsilon(dw) \\ &\geq \inf_{B_1}\Gamma\int_{B_{\frac{1}{4}(0)}} B_\varepsilon(dw). \end{aligned}$$

Como $w \geq \underline{C}\alpha$ em $B_{\frac{1}{2}}$ e sendo B_ε não-decrescente, obtemos

$$\begin{aligned} B &\geq \inf_{B_1}\Gamma\int_{B_{\frac{1}{4}(0)}} B_\varepsilon(\underline{C}\lambda) = \mathcal{I}B_\varepsilon(\underline{C}\lambda)|B_{\frac{1}{4}}| \\ &\geq \mathcal{I}B_\varepsilon(\underline{C}C_1\varepsilon)|B_{\frac{1}{4}}| = \mathcal{I}B(\underline{C}C_1)|B_{\frac{1}{4}}| := C^* \end{aligned}$$

onde $\mathcal{I} = \inf_{B_1}\Gamma$. Portanto,

$$\alpha^2\tilde{C} \geq A \geq B \geq C^* \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq \sqrt{\frac{C^*}{\tilde{C}}} := \bar{c} > 0.$$

$\square$

Corolário 3.7. *(Crescimento Linear)*

Para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$ existe uma constante $C = C(\Omega') > 0$, independente de ε tal que

$$C_2 d_\varepsilon(x_0) \leq u_\varepsilon(x_0) \leq C d_\varepsilon(x_0)$$

sempre que $x_0 \in \{u_\varepsilon \geq C_1\varepsilon\} \cap \Omega'$ e $d_\varepsilon(x_0) \leq \frac{\triangle}{4}$.

Demonstração. Do Teorema 3.6 segue a primeira desigualdade, pois se $d_\varepsilon(x_0) < \frac{\triangle}{3}$ então $x_0 \in B_\varepsilon^*$. De fato,

$$\begin{aligned} 2\frac{\triangle}{3} &= \triangle - \frac{\triangle}{3} \leq dist(x_0,\partial\Omega) - \frac{\triangle}{6} \leq dist(x_0,\partial\Omega) - d_\varepsilon(x_0) \\ &\leq dist(\partial\Omega_\varepsilon,\partial\Omega) \leq dist(x_\varepsilon,\partial\Omega). \end{aligned}$$

Para a segunda desigualdade, considerando ε suficientemente pequeno, temos con-

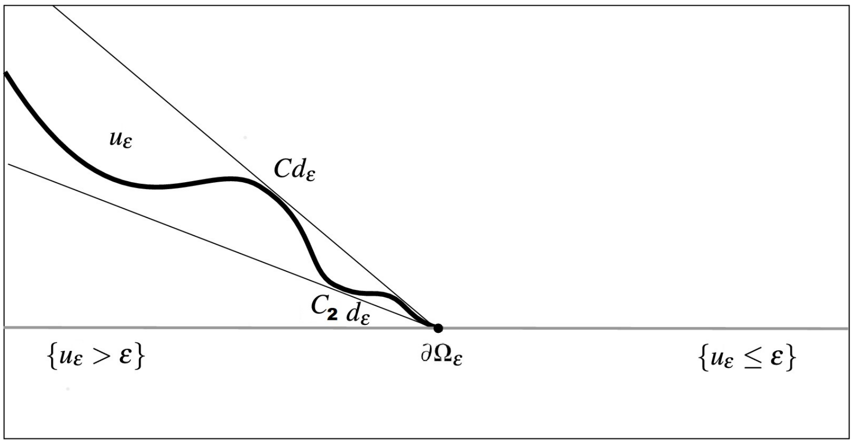

Figura 3: Secção do gráfico de u_ε controlada superior e inferiormente por $\sim d_\varepsilon$.

tinuidade Lipschitz uniforme, pois $x_0 \in \Omega_\varepsilon^+$ e $d_\varepsilon(x_0) < \frac{\Delta}{3}$.

Logo, para $y_0 \in \partial\Omega_\varepsilon$ tal que $d_\varepsilon(x_0) = \|x_0 - y_0\|$, temos

$$|u_\varepsilon(x_0) - u_\varepsilon(y_0)| \leq \|u_\varepsilon\|_{Lip(\Omega')}\|x_0 - y_0\| \leq L\|x_0 - y_0\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x_0) &\leq Ld_\varepsilon(x_0) + \varepsilon \\ &\leq Ld_\varepsilon(x_0) + \frac{u_\varepsilon(x_0)}{C_1}. \end{aligned}$$

O que implica,

$$u_\varepsilon(x_0) \leq Cd_\varepsilon(x_0)$$

onde $C = \dfrac{C_1 L}{C_1 - 1}$. □

Agora provaremos que as soluções u_ε são fortemente não-degeneradas próximos aos conjuntos de níveis $\partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$. Esta propriedade por sua vez implica na densidade positiva uniforme ao longo dos conjuntos de nível $C_1\varepsilon$.

Lema 3.8. *Sejam D domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ e v uma função Lipschitz contínua em D tal que*

$$Lv = 0 \quad em \quad \{v > \delta\}$$

para algum $\delta > 0$ previamente fixado. Assuma que existem constantes $C > 0$ e $\bar{C} > 1$ tais que

$$v(x) \geq Cdist(x_0, \partial\{v > \delta\})$$

sempre que $x \in \{v \geq \bar{C}\delta\}$ com $d_x := dist(x, \partial\{v > \delta\}) \leq \frac{1}{2}dist(x, \partial D)$. Então, existe uma constante $c_0 = c_0(C, \bar{C}) > 0$ tal que

$$\sup_{B_{d_x}(x)} v \geq (1 + c_0)v(x)$$

para todo $x \in \{v \geq \bar{C}\delta\}$ *com* $d_x \leq \frac{1}{2} dist(x, \partial D)$.

Demonstração. Seguiremos os argumentos em RICARTE, Gleydson Chaves. (2010).

Suponha , para efeito de contradição, que existam sequencias $\delta_k \to 0$ e $\{x_k\}_{k\geq 1}$ em $\{v \geq \bar{C}\delta\}$ com $d_k := dist(x_k, \partial\{v > \delta\} \leq \frac{1}{2} dist(x_k, \partial D)$ tais que

$$\sup_{B_{d_k}(x)} v < (1+\delta_k)v(x_k).$$

Defina $w_k : B_2 \to \mathbb{R}$ pondo

$$w_k(y) = \frac{v(x_k + d_k y)}{v(x_k)}.$$

Veja que,

1. $\nabla w_k = \dfrac{d_k}{v(x_k)} \nabla v$;
2. $\sup\limits_{\overline{B}_1(0)} w_k \leq (1+\delta_k)$;
3. $w_k > 0$ e $w_k(0) = 1$;
4. $L_{A^k}(w_k) = \dfrac{d_k}{v(x_k)} L_{A^k}(v(x_k + d_k y)) = 0$, em $B_1(0)$, e com $A^k(y) = A(x_k + d_k y)$.

Logo, podemos estimar a norma Lipschitz de w_k em B_2.

$$\|\nabla w_k\|_{L^\infty(B_2)} \leq \|\nabla v\|_{L^\infty(D)} \frac{d_k}{v(x_k)} \leq \frac{\|v\|_{Lip(D)}}{C}.$$

A estimativa acima nos fornece equicontinuidade para $\{w_k\}_{k\geq 1}$ em $B_2(0)$, e por (2), $\{w_k\}_{k\geq 1}$ é equilimitada em $\overline{B}_1$. Assim, a menos de subsequência, $w_k \to w$ de modo uniforme em $\overline{B}_1$.

Aplicando a desigualdade Harnack para a função positiva $(1+\delta_k) - w_k$ em B_1 obtemos,

$$0 \leq (1+\delta_k) - w_k \leq C_r[(1+\delta_k) - w_k(0)] = C_r \delta_k, \quad \|x\| \leq r < 1.$$

onde C_r depende apenas da elipticidade e de r. Passando ao limite em k, temos que

$$w \equiv 1 \text{ em } \overline{B}_1.$$

Seja agora $y_k \in \partial\{v > \delta\}$ tal que $\|x_k - y_k\| = d_k$ e defina $z_k = \dfrac{y_k - x_k}{d_k}$. Como ∂B_1 é compacta, podemos supor, a menos de subsequência, que $z_k \to z \in \partial B_1$. De $w_k \to 1$ uniformemente em $\overline{B}_1$, segue que $w_k(z_k) \to 1$. Portanto,

$$1 + o(1) = w_k(z_k) = \frac{\delta}{v(x_k)} \leq \frac{1}{\bar{C}} < 1.$$

O que é uma contradição.

□

Teorema 3.9. *(Não -degenerescência forte)*

Para $\Omega^{'} \subset\subset \Omega$, existe uma constante $C = C(\Omega^{'})$ tal que

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_\varepsilon \geq C\rho$$

para $\rho \leq \dfrac{\triangle}{12}$ e sempre que $x_0 \in \Omega^{'} \cap \{u_\varepsilon \geq C_1\varepsilon\}$, $C_1 > 1$, $d_\varepsilon(x_0) \leq \dfrac{\triangle}{6}$

Demonstração. Seja $x_0 \in \Omega^{'} \cap \{u_\varepsilon \geq C_1\varepsilon\}$ e $d_\varepsilon(x_0) \leq \dfrac{\triangle}{6}$. E seja x_ε tal que $d_\varepsilon(x_0) = \|x_0 - x_\varepsilon\|$ e denote $\delta_\varepsilon = \frac{1}{2}dist(x_\varepsilon, \partial\Omega)$.

Como feito na prova do crescimento linear, $\dfrac{\triangle}{3} \leq \delta_\varepsilon$. E de $x_\varepsilon \in \overline{\Omega'} \cap \partial\Omega_\varepsilon^+$, temos

$$\bigcup B_{\frac{\triangle}{3}}(x_\varepsilon) \subset \mathcal{N}_{\frac{\triangle}{2}}(\Omega)^{'} \subset\subset \Omega \tag{3.6}$$

e,

$$B_{\frac{\triangle}{3}}(x_\varepsilon) \subset B_{\delta_\varepsilon}(x_\varepsilon).$$

E em particular,

$$x_0 \in B_{\frac{\triangle}{6}}(x_\varepsilon) \subset B_{\delta_\varepsilon}(x_\varepsilon) = B_\varepsilon^*.$$

Logo, segue que

$$Lu_\varepsilon = 0 \ \text{ em } \ \Omega_\varepsilon^+ \cap B_{\frac{\triangle}{3}}(x_\varepsilon)$$

e além disso,

i) $u_\varepsilon = \varepsilon$ em $\partial\Omega_\varepsilon^+$, $x_\varepsilon \in \partial\Omega_\varepsilon^+$;

ii) $u_\varepsilon(x_0) \geq C_1\varepsilon$ e $x_0 \in B_{\frac{\triangle}{6}}(x_\varepsilon)$;

iii) Do teorema 3.6, $u_\varepsilon(x) \geq C_2 d_\varepsilon(x)$, $\forall x \in \{u_\varepsilon \geq C_1\varepsilon\} \cap B_{\frac{\triangle}{6}}(x_\varepsilon)$.

A ideia agora é construir um caminho poligonal ao longo do qual u_ε cresce linearmente, começando de x_0.

Pelo lema 3.8, existe $c_0 = c_0(C_1, C_2) > 0$ tal que

$$\sup_{B_{d_\varepsilon(x_0)}(x_0)} u_\varepsilon \geq (1 + c_0)u_\varepsilon(x_0).$$

Em particular, existe $x_1 \in \partial B_{d_\varepsilon(x_0)}(x_0)$ tal que

$$u_\varepsilon(x_1) \geq (1 + c_0)u_\varepsilon(x_0).$$

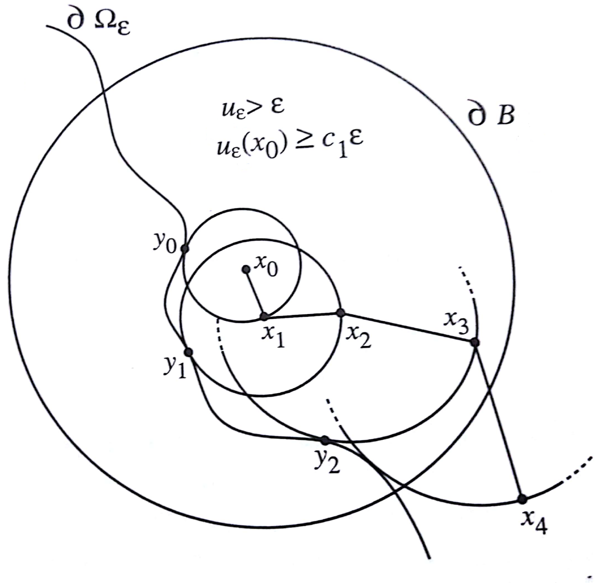

Figura 4: Construção do caminho poligonal

Veja que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x_1) - u_\varepsilon(x_0) &\geq (1+c_0)u_\varepsilon(x_0) - u_\varepsilon(x_0) = c_0 u_\varepsilon(x_0) \\ &\geq c_0 C_2 d(x_0) = c_0 C_2 \|x_0 - x_1\| \end{aligned}$$

e,

$$u_\varepsilon(x_1) \geq (1+c_0)C_1\varepsilon > C_1\varepsilon.$$

Pela inclusão 3.6, podemos aplicar novamente o lema 3.8 a x_1. Assim, obtemos $x_2 \in \partial B_{d_\varepsilon(x_1)}(x_1)$ tal que

$$u_\varepsilon(x_2) \geq (1+c_0)^2 u_\varepsilon(x_0)$$

E da mesma forma que para x_1,

$$u_\varepsilon(x_2) - u_\varepsilon(x_1) \geq c_0 C_2 \|x_2 - x_1\| \ \text{ e } \ u_\varepsilon(x_2) - u_\varepsilon(x_0) \geq c_0 C_2 \|x_2 - x_0\|.$$

Continuando com esse processo de interação, obtemos uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k\geq 1}$ satisfazendo

1. $u_\varepsilon(x_k) - u_\varepsilon(x_{k-1}) \geq c_0 C_2 \|x_k - x_{k-1}\|$ e $u_\varepsilon(x_k) - u_\varepsilon(x_0) \geq c_0 C_2 \|x_k - x_0\|$;
2. $u_\varepsilon(x_k) \geq (1+c_0)^k u_\varepsilon(x_0)$;
3. $\|x_k - x_{k-1}\| = d_\varepsilon(x_k)$.

Por (2), $u_\varepsilon(x_k) \to \infty$ quando $k \to \infty$. Ou seja, o processo acima é finito.Isto é, depois de um número finito de passos a sequência de pontos $\{x_k\}_{k\geq 1}$ sai da região onde u_ε cresce linearmente.

Observando que

$$B_{\frac{\triangle}{12}}(x_0) \subset B_{\frac{\triangle}{4}}(x_\varepsilon)$$

então, para cada $0 < \rho < \frac{\triangle}{12}$ existe, pela discussão acima, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n_0} \in B_\rho(x_0) \;\; \text{e} \;\; x_{n_0+1} \notin B_\rho(x_0)$$

Consideramos, então, os seguintes casos:

i) Se $\|x_{n_0+1} - x_{n_0}\| \leq \dfrac{\rho}{2}$ então, necessariamente, $\|x_{n_0+1} - x_0\| \geq \dfrac{\rho}{2}$. Por, (1) temos,

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u_\varepsilon &\geq u_\varepsilon(x_{n_0}) \geq c_0 C_2 \|x_{n_0} - x_0\| + u_\varepsilon(x_0) \\ &\geq c_0 C_2 \|x_{n_0} - x_0\| \geq c_0 C_2 \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

ii) Se $\|x_{n_0+1} - x_{n_0}\| > \dfrac{\rho}{2}$, então $\|x_0 - x_{n_0}\| \leq \dfrac{\rho}{2}$. Usando (3) e o crescimento linear em $\Omega_\varepsilon^+ \cap B_{\frac{\triangle}{6}}(x_\varepsilon)$ temos,

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u_\varepsilon &\geq u_\varepsilon(x_{n_0}) \geq C_2 d_\varepsilon(x_{n_0}) \\ &= C_2 \|x_{n_0+1} - x_{n_0}\| \geq \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $C = \min\{\dfrac{c_0 C_2}{2}, \dfrac{C_2}{2}\}$ temos

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_\varepsilon \geq C\rho, \quad \forall\, 0 < \rho < \frac{\triangle}{12}.$$

$\square$

Corolário 3.10. *(Densidade Positiva uniforme)*

Existem constantes universais $C_3 = C_3(\Omega') > 1$ e $C_4 = C_4(\Omega') > 0$ tais que : se $x_0 \in \Omega'$, $d_\varepsilon(x_0) \leq \dfrac{\triangle}{6}$ e $u_\varepsilon(x_0) := \mu \geq C_1\varepsilon$ e $C_3\mu \leq \rho \leq \frac{\triangle}{6}$ então para μ, ε suficientemente pequenos,

$$\frac{|B_\rho(x_0) \cap \{u_\varepsilon > \mu\}|}{|B_\rho(x_0)|} \geq C_4$$

Demonstração. Pelo Teorema anterior,

$$\sup_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u_\varepsilon \geq C\frac{\rho}{2}.$$

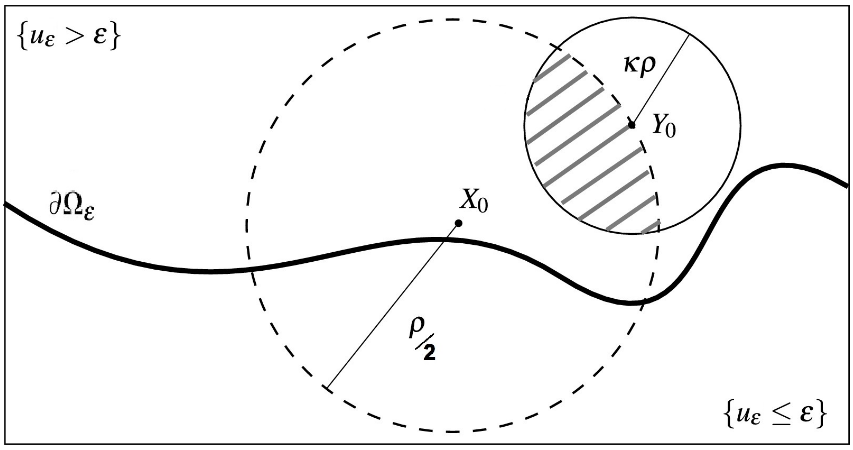

Figura 5: Ideia geométrica da prova do corolário 3.10

Assim, existe $y_0 \in \overline{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)}$ tal que

$$u_\varepsilon(y_0) \geq C\frac{\rho}{2}.$$

Pela continuidade Lipschitz para $\varepsilon \ll 1$, temos

$$u_\varepsilon(y_0) - u_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}\|x_\varepsilon - y_0\|$$

$\forall\, x_\varepsilon \in \partial\Omega_\varepsilon \cap \Omega'$. Logo,

$$C\frac{\rho}{2} \leq u_\varepsilon(y_0) \leq L\|x_\varepsilon - y_0\| + \varepsilon.$$

E portanto,

$$\|x_\varepsilon - y_0\| \geq \frac{\left(\frac{C\rho}{2} - \varepsilon\right)}{\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}} \geq \tilde{c}\frac{\rho}{2}$$

onde $\tilde{c} = C/_{\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')}}$. Ou seja, $d_\varepsilon(y_0) \leq \tilde{c}\frac{\rho}{2}$.

Tomando $0 < \kappa \leq \min\{\frac{\tilde{c}}{2}, 1\}$ temos que,

$$B_{\kappa\rho}(y_0) \subset B_{\frac{\tilde{c}}{2}\rho}(y_0) \cap B_\rho(x_0).$$

Pela desigualdade de Harnack em $B_{\frac{\tilde{c}}{2}\rho}(y_0)$, existe $\bar{c} > 0$ universal tal que,

$$u_\varepsilon(x) \geq \bar{c}u_\varepsilon(y_0)$$

$\forall\, x \in B_{\kappa\rho}(y_0)$. Logo,

$$u_\varepsilon(x) \geq \bar{c}u_\varepsilon(y_0) \geq \bar{c}C\frac{\rho}{2}.$$

Podemos escolher $C_3 \gg 1$ de modo que $\dfrac{\bar{c}CC_3}{2} > 1$. Assim, se μ é pequeno o suficiente, de modo que $C_3\mu \leq \rho$ temos,

$$u_\varepsilon(x) \geq \bar{c}C\frac{C_3}{2}\mu$$

$\forall\, x \in B_{\kappa\rho}(y_0)$. Logo, $B_{\kappa\rho}(y_0) \subset B_\rho(x_0) \cap \{u_\varepsilon > \mu\}$, e portanto,

$$\frac{|B_\rho(x_0) \cap \{u_\varepsilon > \mu\}|}{|B_\rho(x_0)|} \geq \frac{|B_{\kappa\rho}(y_0)|}{|B_\rho(x_0)|} \geq (\kappa)^n := C_4$$

□

3.4 Estimativa para a medida Hausdorff

Os próximos lemas tem por objetivo uma estimativa uniforme para medida Hausdorff dos conjuntos de níveis $\partial\{u_\varepsilon > C_1\varepsilon\}$.

Lema 3.11. *Seja $x_0 \in \Omega' \cap \partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}$ e $\gamma > 3C_1\varepsilon$. Então, existe $C = C(\Omega')$ tal que para $\rho \leq \dfrac{\Delta}{6}$*

$$\int\limits_{\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \gamma\} \cap B_\rho(x_0)} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \, dx \leq C\gamma\rho^{n-1}$$

Demonstração. Seja $\phi = \min\{(u_\varepsilon - C_1\varepsilon)^+, \gamma - C_1\varepsilon\} \geq 0$. Pela fórmula de Green,temos

$$\int_{B_\rho(x_0)} \phi L u_\varepsilon \, dx + \int_{B_\rho(x_0)} \langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\rangle \, dx = \int_{\partial B_\rho(x_0)} \phi\langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{u_\varepsilon \geq \gamma\}} \langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, dx \quad &+ \int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \gamma\}} \langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, dx \\ &= \int\limits_{\partial B_\rho(x_0)\cap\Omega^+_{C_1\varepsilon}} \varphi\langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \gamma\}} \langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, dx \leq \int\limits_{\partial B_\rho(x_0)\cap\Omega^+_{C_1\varepsilon}} \varphi\langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Agora observe que,

$$\phi = \begin{cases} 0, & \text{em} \quad \{0 \leq u_\varepsilon \leq C_1\varepsilon\}, \\ u_\varepsilon - C_1\varepsilon, & \text{em} \quad \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \gamma\}, \\ \gamma - C_1\varepsilon, & \text{em} \quad \{u_\varepsilon \geq \gamma\}. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}} \langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla\phi\rangle\, dx &= \int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}} \langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\rangle\, dx\\ &\geq \lambda \int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}} \|\nabla u_\varepsilon\|^2\, dx.\end{aligned}$$

E pela regularidade Lipschitz uniforme,

$$\int\limits_{\Omega^+_{C_1\varepsilon}\cap\partial B_\rho(x_0)} \phi\langle A(x)\nabla u_\varepsilon, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \|A\|L \int\limits_{\Omega^+_{C_1\varepsilon}\cap\partial B_\rho(x_0)} \phi\, dx \leq L\|A\|\gamma|\partial B_\rho(x_0)|.$$

Portanto,

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}} \|\nabla u_\varepsilon\|^2\, dx \leq \frac{L\|A\|\omega_n}{\lambda}\gamma\rho^{n-1}.$$

Escrevemos $C = \dfrac{L\|A\|\omega_n}{\lambda}$ e o lema está provado . $\square$

Lema 3.12. *Seja $x_0 \in \Omega' \cap \partial\Omega_{C_1\varepsilon}$, $d_\varepsilon(x_0) \leq \dfrac{\triangle}{6}$ e $\gamma > 3C_1\varepsilon$. Existe uma constante universal $C^* = C^*(\Omega') > 0$ tal que, para $C^*\gamma \leq 2\rho \leq \dfrac{\triangle}{16}$ então para γ e ε suficientemente pequenos ($\gamma \ll \rho$), temos*

$$|\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \gamma\} \cap B_\rho(x_0)| \leq \bar{C}\gamma\rho^{n-1}$$

onde $\bar{C} = \bar{C}(\Omega')$.

Demonstração. Considere a cobertura

$$\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_{2\rho}(x_0) \subset \bigcup B$$

onde B é uma bola aberta centrada em algum ponto de $\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_{2\rho}(x_0)$ e de raio $C^*\gamma$, com C^* a ser determinada. Pelo Teorema de Heine-Borel, extraímos uma subcobertura finita $\bigcup_{j=1}^{m} B_j$, onde m depende apenas da dimensão, i.e, $\sum \chi_{B_j} \leq m(n)$.

Note que,

$$\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_{2\rho}(x_0) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{C^*\gamma}(x_j) \subset \mathcal{N}_{\frac{\triangle}{8}}(\Omega') \cap B_{4\rho}(x_0).$$

De fato, para todo $x \in \bigcup_{j=1}^{m} B_{C^*\gamma}(x_j)$, existe $1 \leq j_0 \leq m$ tal que $x \in B_{C^*\gamma}(x_{j_0})$, logo

$$|x - x_0| \leq |x - x_{j_0}| + |x_{j_0} - x_0| < C^*\gamma + 2\rho \leq 4\rho.$$

E como $d_\varepsilon(x_0) \leq \dfrac{\triangle}{6}$, temos $B_{2\rho}(x_0) \subset \Omega'$, e assim,

$$dist(x, \Omega') \leq dist(x, x_{j_0}) + dist(x_{j_0}, \Omega') \leq 2\rho < \frac{\triangle}{8}.$$

Defina agora $w_\varepsilon = min\{(u_\varepsilon - C_1\varepsilon)^+, \gamma - C_1\varepsilon\} + C_1\varepsilon$.

Vemos que,

$$w_\varepsilon = \begin{cases} C_1\varepsilon, & \text{em} \quad \{0 \leq u_\varepsilon \leq C_1\varepsilon\}, \\ u_\varepsilon, & \text{em} \quad \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \gamma\}, \\ \gamma, & \text{em} \quad \{u_\varepsilon \geq \gamma\}. \end{cases}$$

Afirmação 1 : $\forall\, j$ existem B_j^1, B_J^2 sub-bolas tais que:

1. Os raios de $B_j^1, B_J^2 \sim \gamma$ por constantes dependendo de Ω'.
2. $w_\varepsilon \geq \frac{3}{4}\gamma$ em B_j^1 e $w_\varepsilon \leq \frac{2}{3}\gamma$ em B_j^2.

Com efeito, sejam $L = \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathcal{N}_{\frac{\triangle}{8}}}$ e $y_j \in \overline{\dfrac{1}{4}B_j}$ tal que

$$u_\varepsilon(y_j) = \sup_{B_{\frac{C^*\gamma}{4}}(x_j)} \geq \frac{CC^*\gamma}{4} \tag{3.7}$$

onde $C = C(\Omega')$ é dado pelo teorema 3.6.

Escolhemos $C^* > 0$, grande o suficiente, tal que

$$CC^* > 4 \ \text{ e } \ \frac{1}{C^*} < L$$

Defina $B_j^2 = B_{\frac{\gamma}{3L}}(x_j)$ e $B_j^1 = B_{\frac{\gamma}{8L}}(y_j)$.

Pela continuidade Lipschitz uniforme, $\forall x \in B_j^2$

$$u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x_j) \leq L\|x - x_j\| \leq L\frac{\gamma}{3L} = \frac{\gamma}{3}.$$

Como $u_\varepsilon(x_j) = C_1\varepsilon$ temos

$$u_\varepsilon(x_j) \leq \frac{\gamma}{3} + C_1\varepsilon \leq 2\frac{\gamma}{3}.$$

De 3.7 e ainda da continuidade Lipschitz uniforme, $\forall\, x \in B_j^1$,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\geq u_\varepsilon(y_j) - L\|x - y_j\| \\ &\geq \frac{CC^*\gamma}{4} - L\frac{\gamma}{8L} \geq \gamma - \frac{\gamma}{8} \geq \frac{3}{4}\gamma. \end{aligned}$$

Pela definição de w_ε, temos

$$w_\varepsilon \geq \frac{3}{4}\gamma \text{ em } B_j^1 \text{ e } w_\varepsilon \leq \frac{2}{3}\gamma \text{ em } B_j^2.$$

Provando a afirmação 1.

Defina agora $m_j = ⨍_{B_j} w_\varepsilon$.

Afirmação 2: Existe uma constante universal M tal que $|w_\varepsilon - m_j| \geq M\gamma$, em pelo menos uma das duas sub-bolas B_j^1, B_j^2.

Com efeito, caso contrário, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_k \in B_j^1, y_j \in B_j^2$ tais que :

$$\frac{|w_\varepsilon(x_k) - m_j|}{\gamma} < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \frac{|w_\varepsilon(y_k) - m_j|}{\gamma} < \frac{1}{k}.$$

Logo,

$$|w_\varepsilon(x_k) - w_\varepsilon(y_k)| \to 0 \tag{3.8}$$

quando $k \to \infty$. Por outro lado, $\forall\, x \in B_j^1$ e $y \in B_j^2$,

$$\frac{|w_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(y)|}{\gamma} \geq \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} > 0.$$

Contradizendo 3.8.

Usando a desigualdade de Poincaré na bola, obtemos

$$\gamma^2 M^2 \leq ⨍_{B_j} |w_\varepsilon - m_j|\, dx \leq C(C^*\gamma)^2 ⨍_{B_j} \|\nabla w_\varepsilon\|\, dx.$$

onde $C = C(n)$. Isso implica que,

$$\frac{\gamma^2 M^2}{C(C^*\gamma)^2} \leq ⨍_{B_j} \|\nabla w_\varepsilon\|\, dx = ⨍_{B_j \cap \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \gamma\}} \|\nabla u_\varepsilon\|\, dx.$$

Logo,

$$\int_{B_j \cap \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \gamma\}} \|\nabla u_\varepsilon\|\, dx \geq |B_j| M^*$$

onde $M^* = \frac{M^2}{C(C^*)^2}$.

Uma vez que $\rho < \frac{\triangle}{32}$, temos $x \in B^*_{C_1\varepsilon}$, e $\forall\, x \in B_\rho(x_0) \cap \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \gamma\}$, temos pela não- degenerescência,

$$\frac{\gamma}{C_2} > dist(x, \partial\Omega_{C_1\varepsilon} \cap B_{2\rho}(x_0)).$$

Portanto,

$$B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}\subset\mathcal{N}_{\frac{\gamma}{C_2}}(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}\cap B_{2\rho}(x_0))$$

Assim, se C^* suficientemente grande,

$$B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}\subset\bigcup_{j=1}^{m}2B_j\subset B_{4\rho}(x_0).$$

Finalmente, de

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{2B_j\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}}\|\nabla u_\varepsilon\|\,dx\leq m\int\limits_{\bigcup 2B_j\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}}\|\nabla u_\varepsilon\|\,dx$$

temos

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_{4\rho}(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}}\|\nabla u_\varepsilon\|\,dx &\geq \int\limits_{\bigcup 2B_j\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}}\|\nabla u_\varepsilon\|\,dx\\ &\geq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{2B_j\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}}\|\nabla u_\varepsilon\|\,dx\geq\frac{M^*}{m}\sum_{j=1}^{m}|B_j|\\ &\geq \frac{M^*}{m}\left|\bigcup_{j=1}^{m}B_j\right|\geq\frac{M^*}{m}|B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}|.\end{aligned}$$

Pelo lema 3.11, obtemos

$$|B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\gamma\}|\leq\frac{m}{M^*}C\gamma4^{n-1}\rho^{n-1}.$$

E escrevendo $\bar{C}=\frac{m}{M^*}C4^{n-1}$ o lema está provado.

□

Estamos prontos para obter a estimativa para a medida Hausdorff dos conjuntos de níveis $\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}$.

Lembremos que a medida Hausdorff é o resultado de uma construção conhecida como construção de Carathéodory.

Sejam $E\subset\mathbb{R}^N$, $0\leq\gamma<\infty$ e $0<\delta<\infty$. Defina,

$$\mathcal{H}^\gamma_\delta(E)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(\gamma)\left(\frac{diamA_j}{2}\right)^\gamma : E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\,,\,diamA_j\leq\delta\right\}$$

onde $\alpha(\gamma)=\dfrac{\pi^{\frac{\gamma}{2}}}{\Gamma(\frac{\gamma}{2}+1)}$ e $\Gamma(\gamma)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{\gamma-1}\,dx$ é a função Gama de Euler.

Note que para $\delta_1<\delta_2$ tem-se $\mathcal{H}^\gamma_{\delta_2}(E)\leq\mathcal{H}^\gamma_{\delta_1}(E)$. Portanto, $\mathcal{H}^\gamma_\delta(\cdot)$ é uma função monótona não-crescente de δ em $[0,+\infty]$.

Definição 3.13. *Para E e γ como acima, definimos*

$$\mathcal{H}^\gamma(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^\gamma_\delta(E)$$

a Medida de Hausdorff γ-dimensional do conjunto E em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 3.14. *(Estimativa uniforme para a medida Hausdorff)*
Se $x_0 \in \Omega' \cap \partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}$, $d_\varepsilon(x_0) \leq \frac{\triangle}{16}$, $\rho \gg \gamma > 3C_1\varepsilon$ e $C^*\gamma \leq 2\rho \leq \frac{\triangle}{16}$, então

$$|\mathcal{N}_\gamma(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0)| \leq C_5\gamma\rho^{n-1}$$

onde $C_5 = C_5(\Omega')$ é uma constante universal. Em particular,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_\rho(x_0)) \leq C\rho^{n-1}$$

para $C = C(\Omega')$.

Demonstração. Pelo corolário 3.10, tomando $\eta = C_3\gamma$ temos que

$$\frac{|B_\eta(x) \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon}|}{|B_\eta(x)|} \geq C_4, \quad \forall\, x \in \partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}.$$

Considere $\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_\rho(x_0) \subset \bigcup_{j=1}^m B_j$ uma cobertura finita, onde B_j são bolas abertas centradas em $\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_\rho(x_0)$ com raio $r_j = \eta$ e onde , pelo Lema de Heine-Borel, $m = m(n)$. Temos as inclusões,

$$\mathcal{N}_\eta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0) \subset \bigcup_j B_j \subset \mathcal{N}_\eta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_{\rho+\eta}(x_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{N}_\eta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0)| &\leq \sum_j |B_j| \\
&\leq \frac{1}{C_4}\sum_{j=1}^m |B_j \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon}| \\
&\leq \frac{1}{C_4}\sum_{j=1}^m |\mathcal{N}_\eta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_{\rho+\eta}(x_0) \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon}| \\
&= \frac{m}{C_4}|\mathcal{N}_\eta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_{\rho+\eta}(x_0) \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon}|.
\end{aligned}$$

Pela continuidade Lipschitz, se $y \in \mathcal{N}_\eta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_{\rho+\eta}(x_0) \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon}$ então

$$\begin{aligned} C_1\varepsilon < u_\varepsilon(y) &\leq L\|y-\tilde{x}\| + C_1\varepsilon \\ &\leq L\eta + \frac{1}{3}\gamma \\ &= \left(LC_3 + \frac{1}{3}\right)\gamma, \end{aligned}$$

onde $L = Lip(u_\varepsilon)_{\mathcal{N}_{\frac{\Delta}{8}}(\Omega')}$ e, usando propriedade de ínfimo, $\tilde{x} \in \partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}$ é tal que $\|y-\tilde{x}\| \leq \eta$. Mas então

$$\mathcal{N}_\eta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_{\rho+\eta}(x_0) \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon} \subset \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \tilde{L}\gamma\} \cap B_{2\rho}(x_0)$$

onde $\tilde{L} = \left(LC_3 + \frac{1}{3}\right)$. Usando o lema 3.12, temos

$$|\mathcal{N}_\eta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0)| \leq \frac{2^{n-1}m}{C_4}\tilde{L}\gamma\rho^{n-1}$$

Concluímos o teorema pondo $C_5 = \dfrac{2^{n-1}m}{C_4}\tilde{L}$ e observando que

$$\mathcal{N}_\gamma(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0) \subset \mathcal{N}_\eta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_{2\rho}(x_0)$$

uma vez que $C_3 > 1$.

Para a medida Hausdorff, observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}_\delta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_\rho(x_0)) &\leq \sum \alpha(n-1)\left(\frac{diam B_j}{2}\right)^{n-1} = \sum \alpha(n-1)\delta^{n-1} \\ &= \frac{\alpha(n-1)}{\delta\alpha(n)}\sum \alpha(n)\delta^n = \frac{c(n)}{\delta}\sum |B_j| \\ &\leq m\frac{c(n)}{\delta}|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_{\rho+\delta}(x_0)| \\ &\leq mc(n)C_5(\rho+\delta)^{n-1} = C\rho^{n-1} + o(\delta). \end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0$ obtemos,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_\rho(x_0)) \leq C\rho^{n-1}.$$

$\square$

4 O PROBLEMA LIMITE

A partir de agora faremos a análise do problema de fronteira livre obtido ao fazer o parâmetro $\varepsilon \to 0^+$ na equação

$$\begin{cases} Lu = div(A(x)\nabla u_\varepsilon) = \Gamma(x)\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) & em\ \Omega \\ u_\varepsilon = \varphi & em\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Empiricamente, iremos encontrar

$$\begin{cases} div(A(x)\nabla u) = \Gamma(x)\delta_0(u) \\ u = \varphi \end{cases}$$

que, assim como a equação regularizada, não possui monotonicidade. Portanto, não devemos esperar por unicidade de soluções.

4.1 A solução limite

Destinamo-nos agora a mostrar a existência de uma solução para a equação 1.4, obtida tomando-se o limite de uma subsequência de $\{u_\varepsilon\}$ quando $\varepsilon \to 0^+$.

Pelo princípio do máximo, $\sup\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \leq M := \sup\limits_{\overline{\Omega}} \varphi$ e adicionando este fato ao teorema 3.5, temos que $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é localmente limitada em $H^1(\Omega)$. Assim, para cada subdomínio $\Omega' \subset\subset \Omega$, é possível obter um limite local. Mais ainda: temos o seguinte resultado.

Proposição 4.1. *(Existência do Limite) Existe uma subsequência $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ de $\{u_\varepsilon\}_{k=1}^\infty$ tal que:*

1. $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H^1_{loc}(\Omega)$;

2. $u_k \to u_0$ uniformemente em compactos $K \subset \Omega$.

Demonstração. Sejam $0 < \delta_0 \leq 1$ e Ω^1 um subdomínio de Ω tal que $dist(\Omega^1, \partial\Omega) = \delta_0$. Como $\{u_\varepsilon\}$ é limitada em $H^1(\Omega^1)$ e uniformemente Lipschitz em Ω_1, existe uma subsequência $\{u^1_{\varepsilon_k}\}$ tal que

1. $u^1_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u^1$ em $H^1(\Omega^1)$,
2. $u^1_{\varepsilon_k} \rightrightarrows u^1$ sobre compactos em Ω^1.

onde os limites são tomados fazendo $\varepsilon_k \to 0$.

Para simplificar, poremos $k \to \infty$ para significar $\varepsilon_k \to 0$.

Considere agora, $\Omega^2 \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega^1 \subset \Omega^2$ e $dist(\Omega^2, \partial\Omega) = \frac{\delta_0}{2}$. Pelos mesmos argumentos anteriores, existe subsequência $\{u^2_{\varepsilon_k}\}$ de $\{u^1_{\varepsilon_k}\}$ e uma função u_2 tal que

1. $u^2_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u^2$ em $H^1(\Omega^2)$,
2. $u^2_{\varepsilon_k} \rightrightarrows u^2$ sobre compactos em Ω^2.

Continuando este processo, obtemos uma sequência de subdomínios $\Omega^k \subset\subset \Omega$ tais que

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega^m \quad \text{e} \quad dist(\Omega^m, \partial\Omega) = \frac{\delta_0}{m}$$

e subsequências $\{u^m_{\varepsilon_k}\}$ tais que

1. $u^m_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u^m$ em $H^1(\Omega^m)$;
2. $u^m_{\varepsilon_k} \rightrightarrows u_m$ sobre compactos em Ω^m.

Note que , de $\sup\limits_{\Omega} u^m_{\varepsilon_k} \leq M := \sup\limits_{\overline{\Omega}} \varphi$, segue que

$$\sup_{\Omega^m} u^m \leq M \tag{4.2}$$

Afirmação 1: $u^{m+1} = u^m$ em Ω^m e $\nabla u^{m+1} = \nabla u^m$ q.t.p em Ω^m, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Com efeito, para cada $x \in \Omega^m$, seja $B_r(x) \subset\subset \Omega^m$. Então,

$$|u^{m+1}(x) - u^m(x)| \leq |u^{m+1}(x) - u^{m+1}_{\varepsilon_k}(x)| + |u^{m+1}_{\varepsilon_k}(x) - u^m(x)|$$

e da convergência uniforme em B_r, fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$|u^{m+1}(x) - u^m(x)| = 0.$$

Para ver que $\nabla u^{m+1} = \nabla u^m$ q.t.p em Ω^m, lembramos que, por definição,

$$\int_{\Omega^m} \psi \partial_i u = -\int_{\Omega^m} \partial_i \psi u$$

$\forall\, i = 1, \ldots, n$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega^m)$ e $u \in H^1(\Omega^m)$. Assim,

$$\left| \int_{\Omega^m} \psi \partial_i (u^{m+1} - u^m) \right| = \left| \int_{\Omega^m} \partial_i \psi (u^{m+1} - u^m) \right| = 0$$

$\forall\, i = 1, \cdots, n$ e $\psi \in C_0^\infty(\Omega^m)$. O que conclui a prova da afirmação.

Defina agora $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ pondo

$$u_0(x) = u^m(x), \qquad \text{se } x \in \Omega^m.$$

Veja que $u_0 \in H^1_{loc}(\Omega)$, pois, se $K \subset \Omega$ é compacto então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \Omega^m$. Assim,

$$u_0|_K = u^m \in H^1(K).$$

Observamos ainda que ,

$$\int_{\Omega^m} \partial_i u_0 \psi = -\int_{\Omega^m} u_0 \partial_i \psi = -\int_{\Omega^m} u_m \partial_i \psi = \int_{\Omega^m} \partial_i u_m \psi.$$

Utilizando a unicidade de derivadas fracas, segue que $\partial_i u_m = \partial_i u_0$ em Ω^m, $\forall\, i = 1, \cdots, n$. Denote $u_k = u^k_{\varepsilon_k}$.

A partir de agora verificaremos que $\{u_k\}_{k\geq 1}$ e u_0 são as funções procuradas.

1) $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H^1_{loc}(\Omega)$.

Seja $F \subset \Omega$ compacto. Como antes, $F \subset \Omega^m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo, $u_0 = u^m$ em Ω^m. Além disso, $\{u_k\}_{k\geq m}$ é subsequência de $\{u^m_{\varepsilon_k}\}$.

Seja $\psi \in C^\infty_0(F)$. Uma vez que podemos estender ψ a uma função em $C^\infty_0(\Omega^m)$ pondo $\psi = 0$ em $\Omega^m \setminus F$ temos que,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \int_F \psi u_k + \nabla\psi\nabla u_k &= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega^m} \psi u_k + \nabla\psi\nabla u_k \\ &= \int_{\Omega^m} \psi u_m + \nabla\psi\nabla u_m = \int_F \psi u_0 + \nabla\psi\nabla u_0. \end{aligned}$$

Como ψ foi tomada arbitrariamente, temos que $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H^1(F)$.

2) $u_k \to u_0$ uniformemente sobre compactos.

Dado $F \subset \Omega$ um compacto, $F \subset \Omega^m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Como $u_0 = u^m$ e $\{u_k\}_{k\geq m}$ é subsequência de $\{u^m_{\varepsilon_k}\}$, a convergência uniforme de u_k para u_0 segue da convergência uniforme de $u^m_{\varepsilon_k}$ para u^m. □

Para o que segue denotamos $\Omega_0 = \{x \in \Omega : u_0(x) > 0\}$ e $F(u_0) = \partial\Omega_0 \cap \Omega$.

E, assim como na secção anterior, $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $\triangle = dist(\Omega', \partial\Omega)$.

Teorema 4.2. *$u_0 \in C^{0,1}_{loc}(\Omega)$, $Lu_0 \geq 0$ em Ω e*

$$Lu_0 = 0 \;\; em \;\; \Omega_0.$$

Assim, Lu_0 é uma medida de Radon suportada na Fronteira Livre e dada por

$$\int_\Omega \psi L u_0 = -\int_\Omega \langle A(x)\nabla u_0, \nabla\psi\rangle\, dx, \quad \forall\, \psi \in C^\infty_0(\Omega). \tag{4.3}$$

Em particular, $Lu_k \rightharpoonup Lu_0$ no sentido das medidas de Radon.

Demonstração. Dado $\Omega' \subset\subset \Omega$, pelo teorema 3.2, existe constante $C = C(\Omega') > 0$ tal que

$$|u_k(x) - u_k(y)| \leq C\|x - y\|, \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ e } x, y \in \Omega'.$$

Pela convergência uniforme em $\overline{\Omega'}$, segue que

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq C\|x - y\|, \;\; \forall \;\; x, y \in \Omega'.$$

Logo, $u_0 \in C^{0,1}_{loc}(\Omega)$.

Note que Ω_0 é aberto. De fato, caso contrário, teríamos $x_0 \in \Omega_0$ e uma sequência de pontos $x_k \notin \Omega_0$ com $x_k \to x_0$. Para $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B_r(x_0)$, $\forall\, k \geq k_0$. Logo, sendo u_0 lipschitz em $\overline{B}_r$, temos

$$0 < u_0(x_0) = \lim_{k\to\infty} u_0(x_k) = 0.$$

Contradição.

Então , $\forall\, x_0 \in \Omega_0$ e $B_\rho(x_0) \subset\subset \Omega_0$, temos que u_0 é contínua em $\overline{B_\rho(x_0)}$.

De $u_0(x_0) > 0$, existem $\delta, \rho_1 > 0$ tais que $u_0 \geq \delta$ em $B_{\rho_1}(x_0)$. Em particular, $u_k \geq \delta$, para k suficientemente grande. Sem perda de generalidade, podemos tomar $\rho = \rho_1$.

Uma vez que $\varepsilon_k \to 0$, temos $\delta > \varepsilon_k$ para $k \ll 1$. Assim, uma vez que $supp\beta_{\varepsilon_k} = [0, \varepsilon_k]$ segue que $Lu_k = 0$ em $B_\rho(x_0)$. Então $\forall\, \psi \in C_0^\infty(B_\rho(x_0))$, como $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H^1(B_\rho)$ temos,

$$\int_{B_\rho(x_0)} \langle A(x)\nabla u_0, \nabla\psi\rangle\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{B_\rho(x_0)} \langle A(x)\nabla u_k, \nabla\psi\rangle\, dx = 0$$

pois

$$\int_{B_\rho(x_0)} \langle A(x)\nabla u, \nabla\psi\rangle\, dx \in H^1(B_\rho(x_0))'. \tag{4.4}$$

Portanto, $Lu_0 = 0$, no sentido fraco, em $B_\rho(x_0)$.

Como x_0 foi tomado arbitrariamente em Ω_0, segue que

$$Lu_0 = 0 \;\text{ em }\; \Omega_0.$$

Para cada $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, como 4.4 ainda é válido trocando $B_\rho(x_0)$ por $supp\psi$, e $u_k \to u_0$ fracamente em $H^1_{loc}(\Omega)$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi L u_k = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \langle A(x)\nabla u_k, \nabla\psi\rangle = -\int_\Omega \langle A(x)\nabla u_0, \nabla\psi\rangle. \tag{4.5}$$

Portanto,

$$T_{Lu_0}(\psi) := \int_\Omega \psi L u_0 = -\int_\Omega \langle A(x)\nabla u_0, \nabla\psi\rangle \in (C_0^\infty(\Omega))' = D'(\Omega). \tag{4.6}$$

De 4.5 e $T_{Lu_k} \geq 0, \forall\, k$, de acordo com 3.4 , temos $T_{Lu_0} \geq 0$ em $D'(\Omega)$. Assim, segue pelo Teorema de Riesz, que Lu_0 é uma medida de Radon dada por 4.6.

Além disso, por 4.5, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi L u_k = \int_\Omega \psi L u_0$$

$\forall\, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, e portanto, $Lu_k \rightharpoonup Lu_0$, no sentido das medidas de Radon. Por sua vez, essa convergência implica que

$$0 < \limsup_{k\to\infty} Lu_k(F(u_0)) \leq Lu_0(F(u_0)).$$

E sendo $Lu_0 = 0$ em $\{u_0 = 0\}^0$, concuímos que $Lu_0 \geq 0$ em Ω e é suportada na Fronteira Livre. $\square$

O próximo passo é obter as mesmas propriedades geométricas da família de soluções $\{u_k\}$ para u_0.

Teorema 4.3. *(Não-degenerescência forte)*

u_0 é fortemente não-degenerado. Isto é,

(a) Para $x_0 \in \Omega' \cap \Omega_0$ com $dist(x_0, F(u_0)) \leq \frac{\triangle}{6}$, existe uma constante universal $C = C(\Omega') > 0$, tal que

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_0 \geq C\rho, \;\; \forall\;\, \rho \leq \frac{\triangle}{12}.$$

(b) Para $x_0 \in F(u_0) \cap \Omega'$, existe uma constante universal $\bar{C} = \bar{C}(\Omega') > 0$ tal que

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_0 \geq C\rho, \;\; \forall\;\, \rho \leq \frac{\triangle}{3}.$$

Demonstração. Sejam $x_0 \in \Omega' \cap \Omega_0$, e $y_0 \in F(u_0)$ tal que $\|x_0 - y_0\| = dist(x_0, F(u_0)) \leq \frac{\triangle}{6}$, e $\mu = u_0(x_0)$.

Uma vez que $\varepsilon_k \to 0$, temos $C_1\varepsilon_k \leq \mu$ para k suficientemente grande. Como $0 = u_0(y_0) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(y_0)$, temos ainda que $u_k(y_0) < \varepsilon_k$ para $k \gg 1$. Assim,

$$u_k(y_0) < \varepsilon_k < u_0(x_0) = \mu.$$

Usando a convergência pontual e a continuidade da função $u_k((1-t)x_0 + ty_0)$ em $[0,1]$, existe y_k no segmento (x_0, y_0) tal que $u_k(y_k) = \varepsilon_k$. Ou seja,

$$y_k \in \partial\Omega_{\varepsilon_k} \text{ e } \|x_0 - y_k\| < \|x_0 - y_0\| \leq \frac{\triangle}{6}.$$

Portanto, $d_{\varepsilon_k}(x_0) < \frac{\triangle}{6}$ e pela não-degenerescência forte, existe uma constante universal

$C = C(\Omega^{'}) > 0$ (e independente de k) tal que

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_k \geq C\rho, \text{ para } \rho \leq \frac{\triangle}{12}.$$

Da convergência uniforme em $B_\rho(x_0)$ segue que

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_0 \geq C\rho$$

para $\rho \leq \frac{\triangle}{12}$. De fato, caso contrário, para $k \gg 1$, $u_k(x^*) < C\rho$, para algum $x^* \in B_\rho(x_0)$.

Se $x_0 \in F(u_0) \cap \Omega^{'}$, seja ρ como especificado. Tomando $y_0 \in \partial B_{\frac{\rho}{4}}(x_0) \cap \Omega_0$, temos $y_0 \in \Omega^{'} \cap \Omega_0$ e $dist(y_0, F(u_0)) \leq \frac{\rho}{4} < \frac{\triangle}{6}$. Logo, aplicando o caso anteiror a y_0, temos

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_0 \geq \sup_{B_{\frac{\rho}{4}}(y_0)} u_0 \geq \frac{C}{4}\rho.$$

$\square$

Teorema 4.4. *(Crescimento Linear fora da Fronteira Livre)*

Seja $x_0 \in \Omega^{'} \cap \Omega_0$, com $dist(x_0, F(u_0)) \leq \frac{\triangle}{4}$. Então existe, constante $\bar{C} = \bar{C}(\Omega^{'}) > 0$ tal que

$$C_2 dist(x_0, F(u_0)) \leq u_0(x_0) \leq \bar{C} dist(x_0, F(u_0))$$

onde C_2 é a constante obtida em 3.6.

Demonstração. Seja $u_0(x_0) = \alpha$. Uma vez que $u_0(x_0) = \lim_{k\to\infty} u_k(x_0)$, temos que

$$\frac{\alpha}{2} = u_0(x_0) - \frac{u_0(x_0)}{2} \leq u_k(x_0) \text{ para } k \gg 1.$$

E como $\varepsilon_k \to 0$, temos $\frac{\alpha}{2} \geq C_1\varepsilon_k$ para k suficientemente grande. Assim,

$$u_k(x_0) \geq C_1\varepsilon_k.$$

Veja que $d_{\varepsilon_k}(x_0) = dist(x_0, \partial\Omega_{\varepsilon_k}) \leq \dfrac{\triangle}{4}$, para $k \gg 1$. De fato, seja $y_0 \in F(u_0)$ tal que $\|x_0 - y_0\| = dist(x_0, F(u_0))$. Como $u_0(y_0) = 0$, tem-se $u_k(y_0) \leq \varepsilon_k$ para $k \gg 1$. Logo, existe $y_k \in (x_0, y_0)$ tal que $u_k(y_k) = \varepsilon_k$. Assim,

$$dist(x_0, \partial\Omega_{\varepsilon_k}) \leq \|x_0 - y_k\| \leq \|x_0 - y_0\| \leq \frac{\triangle}{4}.$$

Logo, pelo crescimento linear fora dos conjuntos de níveis,

$$u_k(x_0) \geq C_2 d_{\varepsilon_k}(x_0).$$

Seja $\bar{y_k} \in \partial\Omega_{\varepsilon_k}$ tal que

$$\|x_0 - \bar{y_k}\| = d_{\varepsilon_k}(x_0) \leq \frac{\triangle}{4}.$$

Então, a menos de subsequência, $\bar{y_k} \to \bar{y} \in \overline{B_{\frac{\triangle}{4}}(x_0)}$. Como $u_k(\bar{y_k}) = \varepsilon_k$, pela convergência uniforme obtemos $u_0(\bar{y}) = 0$. Ou seja, $\bar{y} \in F(u_0)$.

Assim, fazendo $k \to \infty$ em $u_k(x_0) \geq C_2\|x_0 - \bar{y_k}\|$ obtemos

$$u_0(x_0) \geq C_2\|x_0 - \bar{y}\| \geq C_2 dist(x_0, F(u_0)).$$

Da continuidade Lipschitz de u_0 em Ω' temos,

$$|u_0(x_0) - u_0(y_0)| \leq \|\nabla u_0\|_{Lip(\Omega')} dist(x_0, F(u_0)).$$

Como $u_0(y_0) = 0$, segue que

$$u_0(x_0) \leq \|\nabla u_0\|_{Lip(\Omega')} dist(x_0, F(u_0)).$$

E portanto, $\bar{C} = \|\nabla u_0\|_{Lip(\Omega')}$. □

4.2 Propriedades geométricas dos conjuntos Ω_0 e Ω_0^c

Veremos agora as propriedades geométricas do conjunto de positividade, Ω_0, e da fase zero, Ω_0^c que são herdadas das propriedades geométricas dos conjuntos de níveis Ω_{ε_k}.

A primeira propriedade, estabelecida no teorema 4.7 a seguir, tem por objetivo mostrar que Ω_0 é o limite na distancia Hausdorff dos conjuntos

$$\Omega_k = \{u_k > C_1\varepsilon_k\}, \;\; C_1 > 1.$$

Comecemos lembrando a definição de distancia Hausdorff.

Definição 4.5. *Sejam X, Y subconjuntos não-vazios de um espaço métrico (M, d). A distancia Hausdorff entre X e Y é dada por:*

$$d_H(X,Y) := \max\left\{\sup_{x\in X}\left(\inf_{y\in Y} d(x,y)\right), \sup_{y\in Y}\left(\inf_{x\in X} d(x,y)\right)\right\}.$$

Sejam $\{X_k\}$ e Y subconjuntos não-vazios de um espaço métrico (M, d). Dizer que Y é o limite de $\{X_k\}$ na distancia Hausdorff significa que

$$0 = \lim_{k\to\infty} d_H(X_k, Y).$$

Ou seja, dado $\delta > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \geq k_0$,

$$\sup_{x \in X_k} \left(\inf_{y \in Y} d(x,y) \right) < \delta. \tag{4.7}$$

e

$$\sup_{y \in Y} \left(\inf_{x \in X_k} d(x,y) \right) < \delta. \tag{4.8}$$

Observe que quando $M = \mathbb{R}^n$, as desigualdades em 4.7 e 4.8 nos dizem que :
$\forall\, x \in X_k, dist(x, Y) < \delta$, i.e.,

$$x \in \mathcal{N}_\delta(Y),$$

e, analogamente, $\forall\, y \in Y, dist(y, X_k) < \delta$, i.e.,

$$y \in \mathcal{N}_\delta(X_k).$$

Motivados por essa observação, temos a seguinte

Definição 4.6. *Dizemos que uma sequência de conjuntos $\{X_k\}_{k \geq 1}$ converge (localmente) para um conjunto Y na distancia Hausdorff se, quando dado um compacto K e $\delta > 0$ existe $k_0 = (\delta, K)$ tal que $\forall\, k \geq k_0$ tem-se*

$$K \cap X_k \subset \mathcal{N}_\delta(Y) \cap K$$

e,

$$K \cap Y \subset \mathcal{N}_\delta(X_k) \cap K.$$

Portanto, podemos enunciar a primeira propriedade da seguinte maneira:

Teorema 4.7. *Dado $\delta > 0$, então para k suficientemente grande*

$$\Omega' \cap \Omega_k \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_0) \cap \Omega'$$

e,

$$\Omega' \cap \Omega_0 \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_k) \cap \Omega'.$$

Demonstração. Provemos a primeira inclusão.

Suponha, por contradição, que existam $\alpha > 0$, que podemos assumir ser $\alpha < \dfrac{\triangle}{6}$, e uma sequência de pontos

$$x_k \in \Omega' \cap \Omega_k \;\text{ e }\; x_k \notin \mathcal{N}_\alpha(\Omega_0) \cap \Omega',$$

tais que:

a) $dist(x_k, \Omega_0) \geq \alpha$;

b) $u_k(x_k) > C_1\varepsilon_k$;

c) A menos de subsequência, $x_k \to x_0 \in \overline{\Omega'}$ e $dist(x_0, \Omega_0) \geq \alpha$.

De (c), concluímos que

$$0 = u_0(x_0) = \lim_{k\to\infty} u_k(x_0).$$

Logo, para $k \gg 1$,

$$u_k(x_0) < \varepsilon_k \ \text{ e } \ \|x_k - x_0\| \leq \frac{\triangle}{8}. \tag{4.9}$$

De (b) e 4.9, exite $y_k \in (x_0, x_k)$ tal que

$$u_k(y_k) = \varepsilon_k.$$

Como $y_k \in \partial\Omega_{\varepsilon_k}$, temos $d_{\varepsilon_k}(x_k) \leq \frac{\triangle}{8}$. E pela não-degerescência, existe constante $C = C(\Omega') > 0$ tal que

$$\sup_{B_\rho(x_k)} u_k \geq C\rho, \quad \rho \leq \frac{\triangle}{12}.$$

Seja $z_k \in \overline{B_\rho(x_k)}$ tal que $u_k(z_k) = \sup\limits_{B_\rho(x_k)} u_k$. E observe que

$$B_{\frac{\alpha}{2}}(x_0) \subset \Omega \setminus \Omega_0. \tag{4.10}$$

De fato, se $x \in B_{\frac{\alpha}{2}}(x_0)$ então,

$$dist(x, \Omega_0) \geq dist(\Omega_0, x_0) - dist(x_0, x) \geq \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Tomando, $\rho = \frac{\alpha}{8}$, temos que $\rho \leq \frac{\triangle}{12}$. E para $\|x_k - x_0\| \leq \rho$, temos

$$B_\rho(x_k) \subset B_{\frac{\alpha}{4}}(x_0).$$

Neste caso, a menos de subsequência, $z_k \to z \in \overline{B_{\frac{\alpha}{4}}(x_0)} \subset B_{\frac{\alpha}{2}}(x_0)$. De $u_k(z_k) \to u_0(z)$, segue que

$$\sup_{B_{\frac{\alpha}{2}}(x_0)} u_0 \geq u_0(z) = \lim_{k\to\infty} u_k(z_k) \geq C\rho.$$

Por outro lado, pela inclusão 4.10 , temos $u_0 = 0$ em $B_{\frac{\alpha}{2}}(x_0)$. O que é uma contradição.

Similarmente, para provar a segunda inclusão, suponha, por contradição, que exista $\alpha \leq \frac{\triangle}{6}$ tal que $\forall\, k$ exista

$$x_k \in \Omega' \cap \Omega_0 \ \text{ e } \ x_k \notin \mathcal{N}_\alpha(\Omega_k) \cap \Omega'.$$

Em particular, $u_k(x_k) \leq C_1\varepsilon_k$ em $B_{\frac{\alpha}{2}}(x_k)$.

A menos de subsequência, podemos assumir que $x_k \to x_0$. Então, para $\|x_k - x_0\| \leq \frac{\alpha}{8}$ temos $B_{\frac{\alpha}{8}}(x_0) \subset B_{\frac{\alpha}{2}}(x_k)$. Logo,

$$B_{\frac{\alpha}{8}}(x_0) \subset \Omega \setminus \Omega_0.$$

Se $x_0 \in \{u_0 = 0\}^0$ então para $k \gg 1$, $x_k \in \{u_0 = 0\}^0$. O que seria uma contradição.

Se $x_0 \in F(u_0)$, então tomando $\rho = \frac{\alpha}{8}$, pela não-degenerescência na fronteira livre temos,

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_0 \geq C\rho.$$

O que nos leva a uma outra contradição.

□

Como consequência da não-degenerescência e do crescimento linear de u_0 obtemos densidade positiva do conjunto Ω_0 ao longo da fronteira livre.

Teorema 4.8. *(Densidade Positiva Uniforme ao longo da Fronteira Livre)*

Existe uma constante universal $\tau = \tau(\Omega') > 0$ *tal que para* $x_0 \in F(u_0) \cap \Omega'$,

$$\frac{|B_\rho(x_0) \cap \Omega_0|}{|B_\rho(x_0)|} \geq \tau, \quad \forall\, \rho \leq \frac{\triangle}{12}.$$

Em particular, $|F(u_0)| = 0$.

Demonstração. Pela não-degenerescência,

$$\sup_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u_0 \geq C\frac{\rho}{2}$$

para todo $\rho \leq \dfrac{\triangle}{12}$.

Seja $y_0 \in \overline{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)}$ tal que $u_0(y_0) \geq C\dfrac{\rho}{2}$. Pela continuidade Lipschitz, existe constante universal $L > 0$, tal que

$$u_0(y_0) \leq L\|x - y_0\|, \quad \forall\, x \in F(u_0).$$

Logo,

$$\frac{C\rho}{2L} \leq dist(y_0, F(u_0)).$$

Assim como foi feito em 3.10, podemos escolher $\tau_1 > 0$ de modo que

$$B_{\tau_1\rho}(y_0) \subset B_{\frac{C^*}{2}\rho}(y_0) \cap B_\rho(x_0)$$

onde $C^* = \frac{C}{L}$. Usando a desigualdade de Harnack em $B_{\frac{C^*}{2}\rho}(y_0)$, então

$$u_0(x) \geq cu_0(y_0) \geq c\frac{C^*}{2}\rho > 0$$

para alguma $c > 0$ universal e $\forall\, x \in B_{\tau_1\rho}(y_0)$.

Assim, $B_{\tau_1\rho}(y_0) \subset B_\rho(x_0) \cap \Omega_0$, e portanto,

$$\frac{|B_\rho(x_0) \cap \Omega_0|}{|B_\rho(x_0)|} \geq \frac{|B_{\tau_1\rho}(y_0)|}{|B_\rho(x_0)|} = \tau_1^n := \tau > 0 \tag{4.11}$$

Para o que falta, veja que, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{|B_\rho(x) \cap \Omega_0|}{|B_\rho(x)|} = 0 \quad \text{a.e}\, x \notin \Omega_0. \tag{4.12}$$

Isto é, 4.12 não ocorre, possivelmente, em um subconjunto $A \subset \Omega_0^c$ de medida nula. Assim, 4.11 nos diz que

$$|F(u_0)| = 0.$$

$\square$

Em seguida, obtemos uma estimativa para a Medida Hausdorff.

Teorema 4.9.

Existe uma constante universal $C = C(\Omega') > 0$ tal que

$$|\mathcal{N}_\delta(F(u_0)) \cap B_\rho(x_0)| \leq C\delta\rho^{n-1}$$

para cada $x_0 \in F(u_0) \cap \Omega'$ e $\delta \ll \rho \ll \Delta$. Em particular,

$$\mathcal{H}^{n-1}(F(u_0) \cap B_\rho(x_0)) \leq C\rho^{n-1}.$$

Demonstração. Sejam $x_0 \in F(u_0) \cap \Omega'$ e $\delta \ll \rho \ll \Delta$. Do teorema 4.7,

$$\Omega_0 \cap B_\rho(x_0) \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_k) \cap B_\rho(x_0).$$

Seja $x \in F(u_0) \cap B_\rho(x_0)$. Note que

$$dist(x, \Omega_0) = 0.$$

Logo,

$$dist(x, \Omega_k) \leq dist(x, \Omega_0) + dist(\Omega_0, \Omega_k) \leq \delta.$$

Assim, $x \in \mathcal{N}_\delta(\Omega_k)$. Além disso, como

$$0 = u_0(x) \lim_{k\to\infty} u_k(x)$$

então, para $k \gg 1$,

$$u_k(x) < \varepsilon_k.$$

Isto é, $x \notin \Omega_k$ e portanto,

$$dist(x, \partial\Omega_k) = dist(x, \Omega_k) < \delta.$$

Logo,

$$F(u_0) \cap B_\rho(x_0) \subset \mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_k) \cap B_\rho(x_0).$$

Considere, agora, $x \in \mathcal{N}_\delta(F(u_0) \cap B_\rho(x_0))$. Seja $y \in F(u_0) \cap B_\rho(x_0)$ tal que $dist(x, F(u_0)) = \|x - y\| < \delta$.

Assim,

$$dist(x, \partial\Omega_k) \leq dist(x, y) + dist(y, \partial\Omega_k) \leq 2\delta.$$

Além disso,

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\| + \|y - x_0\| < \delta + \rho \leq 2\rho.$$

Ou seja,

$$\mathcal{N}_\delta(F(u_0) \cap B_\rho(x_0)) \subset \mathcal{N}_{2\delta}(\partial\Omega_k) \cap B_{2\rho}(x_0).$$

Assumindo que $\varepsilon_k \ll \delta \ll \rho \ll \triangle$, pelo teorema 3.14, existe $C > 0$ universal tal que,

$$|\mathcal{N}_\delta(F(u_0)) \cap B_\rho(x_0)| \leq C\delta\rho^{n-1}.$$

Para a Medida de Haudorff $\mathcal{H}^{n-1}$, seja $\{B_j\}_{j=1}^m$ uma cobertura finita de $F(u_0) \cap B_\rho(x_0)$, onde $B_j = B_j(x_j, \delta)$ com $x_j \in F(u_0) \cap B_\rho(x_0)$ e, novamente, por Heine-Borel, $m = m(n)$.

Veja que

$$\mathcal{N}_\delta(F(u_0)) \cap B_\rho(x_0)) \subset \bigcup_j B_j \subset \mathcal{N}_{2\delta}(f(u_0)) \cap B_{\rho+2\delta}(x_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^{n-1}(F(u_0)\cap B_\rho(x_0)) &\leq \sum \alpha(n-1)\left(\frac{diam B_j}{2}\right)^{n-1} = \sum \alpha(n-1)\delta^{n-1}\\
&= \frac{\alpha(n-1)}{\delta\alpha(n)}\sum \alpha(n)\delta^n = \frac{c(n)}{\delta}\sum |B_j|\\
&\leq m\frac{c(n)}{\delta}|\mathcal{N}_{2\delta}(F(u_0)\cap B_{\rho+2\delta}(x_0)|\\
&\leq m2c(n)C(\rho+2\delta)^{n-1} = m2c(n)C\rho^{n-1}+o(\delta).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{H}^{n-1}(F(u_0)\cap B_\rho(x_0)) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^{n-1}(F(u_0)\cap B_\rho(x_0)) \leq \bar{C}\rho^{n-1}.$$

□

O próximo Lema é um resultado mais fino de convergência e será usado, mais adiante, para estabelecer uma condição de Fronteira Livre.

Lema 4.10. *$\nabla u_k \to \nabla u_0$ em $(L^2_{loc}(\Omega))^n$. Em particular, dado $\Omega' \subset\subset \Omega$,*

$$\int_{\Omega'}\langle A(x)\nabla u_k, \nabla u_k\rangle\, dx \to \int_{\Omega'}\langle A(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\, dx.$$

Demonstração. Seja $K\subset\Omega$ um compacto e $\tau>0$ tal que $\mathcal{N}_{3\tau}(K)\subset\Omega$. Sejam $x_0\in K$ e $\psi\in C_0^\infty(B_\tau(x_0))$, $\psi\geq 0$. Como $Lu_0=0$ em Ω_0, para $\delta>0$, tome
$\eta_0=(u_0-\delta)^+\psi\in H_0^1(B_\tau(x_0))\cap H_0^1(\Omega_0)$ como função teste para concluir que:

$$\begin{aligned}
0=\int_{B_\tau(x_0)}\eta_0 Lu_0 &= \int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_0,\nabla\eta_0\rangle\, dx\\
&= \int_{\{u_0>\delta\}\cap B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_0,\nabla u_0\rangle\psi\, dx + \int_{\{u_0>\delta\}\cap B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_0,\nabla\psi\rangle u_0\, dx\\
&- \int_{\{u_0>\delta\}\cap B_\tau(x_0)}\delta\psi\langle A(x)\nabla u_0,\nabla\psi\rangle u_0\, dx.
\end{aligned}$$

Fazendo $\delta\to 0$ obtemos,

$$\int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_0,\nabla u_0\rangle\, dx = -\int_{B_\tau(x_0)} u_0\langle A(x)\nabla u_0,\nabla\psi\rangle\, dx.$$

Usando o mesmo argumento acima e o fato de que u_k é solução fraca para $Lu=\Gamma(x)\beta_{\varepsilon_k}(u)\geq 0$, segue que

$$\int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_k,\nabla u_k\rangle\psi \leq \int_{B_\tau(x_0)} -u_k\langle A(x)\nabla u_k,\nabla\psi\rangle.$$

Agora, da convergência uniforme local de u_k para u_0 e da convergência fraca de ∇u_k para ∇u_0 em $L^2(B_\tau(x_0))$ temos,

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_k,\nabla u_k\rangle\psi\,dx &\leq \lim_{k\to\infty}\int_{B_\tau(x_0)} -u_k\langle A(x)\nabla u_k,\nabla\psi\rangle\,dx\\ &= \int_{B_\tau(x_0)} -u_0\langle A(x)\nabla u_0,\nabla\psi\rangle\\ &= \int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_0,\nabla u_0\rangle\psi\,dx.\end{aligned}$$

Além disso, como $C_0^\infty(B_\tau(x_0))$ é denso em $H^1(B_\tau(x_0))$, fazendo $\psi\to 1$ obtemos, portanto,

$$\limsup_{k\to\infty}\int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_k,\nabla u_k\rangle\,dx \leq \int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_0,\nabla u_0\rangle\,dx \tag{4.13}$$

Agora, por elipticidade,

$$\langle A(x)\cdot(p-q),p-q\rangle \geq \lambda|p-q|^2, \quad \forall\, p,q\in\mathbb{R}^n. \tag{4.14}$$

Logo, obtemos que

$$\int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_0,\nabla u_0\rangle dx \leq \liminf_{k\to\infty}\int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_k,\nabla u_k\rangle. \tag{4.15}$$

Segue de (4.13) e (4.15) que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_k,\nabla u_k\rangle dx = \int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\nabla u_0,\nabla u_0\rangle dx.$$

Isto, juntamente com (4.14) nos fornece a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}\lambda\lim_{k\to\infty}\int_{B_\tau(x_0)}|\nabla u_k-\nabla u_0|^2dx &\leq \lim_{k\to\infty}\int_{B_\tau(x_0)}|\nabla u_k-\nabla u_0|^2dx\\ &\leq \lim_{k\to\infty}\int_{B_\tau(x_0)}\langle A(x)\cdot(\nabla u_k-\nabla u_0),\nabla u_k-\nabla u_0\rangle dx = 0.\end{aligned}$$

Ou seja, $\nabla u_k\to\nabla u_0$ in $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Em particular, dado $\Omega'\subset\subset\Omega$, tomamos $\tau>0$ tal que

$$\Omega'\subset\bigcup_{x_0\in\Omega'}B_\tau(x_0)\subset\mathcal{N}_{3\tau}(\Omega')\subset\Omega.$$

Assim,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega'}\langle A(x)\nabla u_k,\nabla u_k\rangle dx = \int_{\Omega'}\langle A(x)\nabla u_0,\nabla u_0\rangle dx.$$

$\square$

4.3 Caracterização variacional de u_0

Vamos, agora, obter uma caracterização variacional para u_0. Isto é, iremos provar que u_0 é um minimizante local para algum funcional de energia. Este fato, será empregado na obtenção de certas propriedades da Fonteria Livre, $F(u_0)$, tais como as densidades uniformes de Ω_0 e Ω_0^c e a medida de Hausdorff para a Fronteira Livre Reduzida (definição 4.15).

Definição 4.11. *Considere o funcional $E_0 : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$E_0(\xi) = \int_\Omega \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla\xi, \nabla\xi\rangle + \Gamma(x)\chi_{\{\xi>0\}}\, dx.$$

Para cada $\mathcal{O} \subseteq \Omega$ aberto, sejam

$$E_0(\cdot, \mathcal{O}) = E_0|_{\mathcal{O}}$$

e

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\cdot, \mathcal{O}) = \mathcal{F}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}.$$

E para simplificar a notação, denotamos $\mathcal{F}_{\varepsilon_k}(u, \mathcal{O}) = \mathcal{F}_k(u, \mathcal{O})$.

Teorema 4.12. *A função u_0 é um minimizante local para E_0 sobre H^1.*

Demonstração. Sejam $B_{r_0} \subset\subset \Omega$ e ξ uma função no conjunto admissível, i.e, $\xi \in H^1(\Omega)$ com $\xi = u_0$ em ∂B_{r_0}. Precisamos mostrar que

$$E_0(u_0, B_{r_0}) \leq E_0(\xi, B_{r_0}).$$

Uma vez que $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H^1(B_{r_0})$,

$$\int_{B_{r_0}} \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{B_{r_0}} \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u_k, \nabla u_k\rangle\, dx.$$

E dado $h > 0$ pequeno, pelos teoremas 4.7 e 4.9, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_0}} \Gamma(x)\chi_{\{u_0>0\}}\, dx &\leq \|\Gamma\|_\infty |\Omega_0 \cap B_{r_0}| \leq |\mathcal{N}_h(\Omega_k) \cap B_{r_0}| \\ &\leq \|\Gamma\|_\infty C h r_0^{n-1} \leq \|\Gamma\|_\infty C h r_0^{n-1} + \int_{B_{r_0}} \Gamma(x) B_{\varepsilon_k}(u_k)\, dx. \end{aligned}$$

para $k \gg 1$. Isto implica que

$$E_0(u_0, B_{r_0}) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}_k(u_k, B_{r_0}) + \bar{C} h r_0^{n-1}.$$

onde $\bar{C} > 0$ é uma constante universal.

Sabemos que u_k é um minimizante para $\mathcal{F}_k$, então a ideia agora será interpolar linearmente u_0 e u_k . Defina

$$\xi_k^h := \begin{cases} u_0 + \frac{|x|-r_0}{h}(u_k - u_0) & \text{em } B_{r_0+h} \setminus B_{r_0} \\ \xi & \text{em } B_{r_0}. \end{cases}$$

Observe que $\xi_k^h \equiv u_k$ em ∂B_{r_0+h}. Logo,

$$\mathcal{F}_k(u_k, B_{r_0}) \leq \mathcal{F}_k(u_k, B_{r_0+h}) \leq \mathcal{F}_k(\xi_k^h, B_{r_0+h}).$$

Provemos agora que podemos comparar $\mathcal{F}_k(\xi_k^h, B_{r_0+h})$ com $E_0(\xi, B_{r_0})$.
De fato, veja que

$$\nabla \xi_k^h = \nabla u_0 + \frac{|x| - r_0}{h}(\nabla u_k - \nabla u_0) + \frac{(u_k - u_0)}{|x|h} x \text{ em } B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\nabla \xi_k^h|^2 &\leq \left(|\nabla u_0| + \frac{|x| - r_0}{h} |\nabla u_k - \nabla u_0| + \frac{|u_k - u_0|}{h} \right)^2 \\ &\leq \left(|\nabla u_0| + |\nabla u_k - \nabla u_0| + \frac{|u_k - u_0|}{h} \right)^2 \\ &\leq \left(C + \frac{|u_k - u_0|}{h} \right)^2. \end{aligned}$$

onde C é obtida da continuidade Lipschitz uniforme de u_k e u_0 em B_{2r_0}. Assim, usando o fato de que para $a, b \geq 0$ tem-se $2ab \leq a^2 + b^2$, concluímos que

$$|\nabla \xi_k^h|^2 \leq C_0 + 2\frac{|u_k - u_0|^2}{h^2} \text{ em } B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}.$$

Uma vez que $B_{\varepsilon_k} \leq \chi_{(0,+\infty)}$ temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(\xi_k^h, B_{r_0+h}) &= \int_{B_{r_0+h}} \frac{1}{2} \langle A(x) \nabla \xi_k^h, \nabla \xi_k^h \rangle + \Gamma(x) B_{\varepsilon_k}(\xi_k^h)\, dx \\ &\leq \int_{B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}} \frac{\Lambda}{2} |\nabla \xi_k^h|^2 + \Gamma(x) B_{\varepsilon_k}(\xi_k^h)\, dx + \int_{B_{r_0}} \langle A(x) \nabla \xi, \nabla \xi \rangle + \Gamma(x) B_{\varepsilon_k}(\xi)\, dx \\ &\leq \int_{B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}} \frac{\Lambda}{2} \left(C_0 + \frac{2}{h^2} |u_k - u_0| \right) + \Gamma(x) B_{\varepsilon_k}(\xi_k^h)\, dx + \mathcal{F}_k(\xi, B_{r_0}) \\ &\leq \left(\frac{\Lambda}{2} + \|\Gamma\|_\infty \right) |B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}| + \frac{\Lambda}{h^2} \int_{B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}} |u_k - u_0|^2\, dx + \mathcal{F}_k(\xi, B_{r_0}) \end{aligned}$$

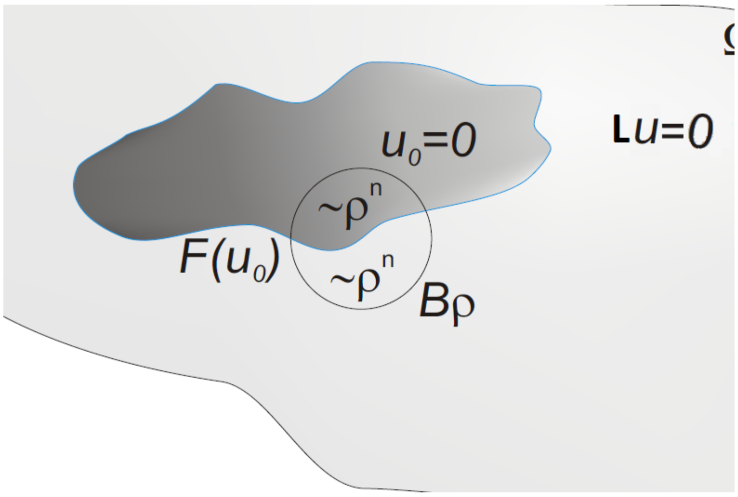

Figura 6: Densidade positiva

Tomando k suficientemente grande, tal que $|u_k - u_0|^2 < h^2$ obtemos,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_k(\xi_k^h, B_{r_0+h}) &\leq \left(\frac{3\Lambda}{2} + \|\Gamma\|_\infty\right) |B_{r_0+h} \setminus B_{r_0}| + \mathcal{F}_k(\xi, B_{r_0}) \\
&\leq \bar{C}_0 h r_0^{n-1} + o(h) + E_0(\xi, B_{r_0}).
\end{aligned}
$$

Finalmente, temos,

$$
\begin{aligned}
E_0(u_0, B_{r_0}) &\leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}_k(u_k, B_{r_0}) + \bar{C} h r_0^{n-1} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}_k(\xi_k^h, B_{r_0+h}) + \bar{C} h r_0^{n-1} \\
&\leq (\bar{C} + \bar{C}_0) h r_0^{n-1} + o(h) + E_0(\xi, B_{r_0})
\end{aligned}
$$

Fazendo $h \to 0$, concluímos a demonstração. $\square$

Como consequência da caracterização variacional de u_0 temos a densidade positiva da fase zero da solução ao longo da Fronteira Livre.

Teorema 4.13. *Seja $x_0 \in F(u_0) \cap \Omega'$. Então existe uma constante universal $\tau^* = \tau^*(\Omega') > 0$ tal que : Se $\rho \leq \frac{\Delta}{4}$ então,*

$$|\Omega_0^c \cap B_\rho(x_0)| \geq \tau^* \rho^n.$$

Demonstração. Seja z um função tal que

$$
\begin{cases}
Lz = 0 \;\text{ em }\; B_\rho(x_0) \\
z = u_0 \;\text{ em }\; \partial B_\rho(x_0).
\end{cases}
\tag{4.16}
$$

Pelo teorema anterior,

$$\int_{B_\rho(x_0)} \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle + \Gamma(x)\chi_{\{u_0>0\}}\, dx \leq \int_{B_\rho(x_0)} \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla z, \nabla z\rangle + \Gamma(x)\chi_{\{z>0\}}\, dx.$$

De $z \geq u_0$ em $B_\rho(x_0)$, temos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{B_\rho(x_0)} \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle - \langle A(x)\nabla z, \nabla z\rangle\, dx &\leq \|\Gamma\|_\infty \int_{B_\rho(x_0)} \chi_{\{z>0\}} - \chi_{\{u_0>0\}}\, dx \\ &\leq \|\Gamma\|_\infty |\{u_0 = 0\} \cap B_\rho|.\end{aligned}$$

Como z é solução do problema de Dirichlet 4.16, usando o teorema do Divergente, obtemos

$$\int_{B_\rho(x_0)} \langle A\nabla z, \nabla z\rangle\, dx = \int_{B_\rho(x_0)} \langle A\nabla z, \nabla u_0\rangle.$$

E pela simetria de A,

$$\langle A\nabla u_0, \nabla z\rangle = \langle A\nabla z, \nabla u_0\rangle.$$

Logo,

$$\int_{B_\rho(x_0)} \langle A(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle - \langle A(x)\nabla z, \nabla z\rangle\, dx = \frac{1}{2}\int_{B_\rho(x_0)} \langle A(x)\nabla(u_0 - z), \nabla(u_0 - z)\rangle\, dx.$$

Usando a desigualdade de Poincaré , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{B_\rho(x_0)} \frac{1}{2}\langle A(x)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle - \langle A(x)\nabla z, \nabla z\rangle\, dx &\geq \frac{\lambda}{2}\int_{B_\rho(x_0)} \|\nabla(u_0 - z)\|^2\, dx \\ &\geq \frac{\lambda C}{2\rho^2}\int_{B_\rho(x_0)} |(u_0 - z)|^2\, dx\end{aligned}$$

para alguma constante universal $C > 0$. Pela não-degenerescência, existe $y_0 \in \partial B_\rho$ tal que

$$u_0(y_0) \geq c\rho$$

onde $c = c(\Omega^{'})$. Para $\kappa > 0$ suficientemente pequeno, pela continuidade Lipschitz,

$$u_0(x) \geq \frac{c_1}{2}\rho \text{ em } \partial B_\rho(x_0) \cap B_\kappa(y_0).$$

Como $Lz = 0$ em $B_\rho = B_\rho(x_0)$, então,

$$\begin{aligned} z(x_0) &= \int_{\partial B_\rho} z(y) K(x_0, y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \int_{\partial B_\rho} u_0(y) K(x_0, y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &\geq \frac{c_1}{2}\rho.\end{aligned}$$

onde $K(x_0,y)=\langle A(x)\nabla_y G(x_0,y),\nu_y\rangle$, $\int_{\partial B_\rho} K(x_0,y)\,d\mathcal{H}^{n-1}=1$ e $G(x_0,y)$ é a função de Green em B_ρ.

Pela desigualdade de Harnack em $B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$,

$$z(x)\geq \bar{C}z(x_0)=c_2\rho \quad \text{em} \;\; B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$$

para alguma constante universal $\bar{C}>0$. Usando novamente a continuidade Lipschitz de u_0, existe constante universal $\gamma>0$, pequena o suficiente, tal que $u_0(x)\leq \frac{c_2}{2}\rho$ em $B_{\gamma\rho}(x_0)$. Em particular,

$$z(x)-u_0(x)\geq \frac{c_2}{2}\rho \;\; \text{em} \;\; B_{\gamma\rho}(x_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\{u_0=0\}\cap B_\rho| &\geq \frac{\lambda C}{\|\Gamma\|_\infty \rho^2}\int_{B_\rho(x_0)}|u_0-z|^2\,dx \\ &\geq \frac{\tilde{C}c_2\rho^2}{\rho^2}|B_{\gamma\rho}(x_0)|=\tau^*\rho^n. \end{aligned}$$

□

Os teoremas 4.8, 4.13 expressam que existe uma porção de $B_\rho(x_0)$ com volume de ordem $\sim\rho^n$ dentro de Ω_0 e Ω_0^c (Figura 6).Concluímos então que a fronteira livre $F(u_0)$ possui ao menos uma boa estrutura i.e., não ocorrem cúpides ao longo da fronteira livre. Isto nos deixa esperançosos de obter boa regularidade para $F(u_0)$. Para mais detalhes veja MOREIRA, Diego R ; TEIXEIRA, Eduardo V. (2007), CAFFARELLI, Luis A. (1987), CAFFARELLI, Luis A. (1989) e CAFFARELLI, Luis A. (1988) .

Outra consequência do teorema acima é que $F(u_0)$ coincide com a fronteira livre no sentido da medida (veja definição 4.14 a seguir).

Definição 4.14. *Um ponto $x\in\partial_* E$, a fronteira de E no sentido da medida, se*

$$\lim_{r\to 0}\frac{|B_r(x)\cap E|}{r^n}>0 \;\; e \;\; \lim_{r\to 0}\frac{|B_r(x)\setminus E|}{r^n}>0.$$

Isto é, $x\in\partial_* E$ se E e E^c tem densidade positiva em torno de x.

Definição 4.15. *Seja E um conjunto de perímetro localmente finito em $\mathbb{R}^n$. Um ponto x está na fronteira reduzida de E, $x\in\partial_{red}E$, se*

1. $\|\partial E\|(B_r(x))>0$, $\forall\, r>0$,
2. $\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} \nu_E(y)d\|\partial E\| = \nu_E(x)$,
3. $|\nu_E(x)|=1$.

Basicamente, $\partial_{red}E$ é o conjunto dos pontos onde é possível definir, no sentido da medida, um vetor unitário normal exterior a E de modo que este valide o Teorema do Divergente.

Lema 4.16. *(EVANS, Lawrence Craig ; GARIEPY, Ronald F. (1991), Lema 1, seção 5.8) Seja E um conjunto de perímetro localmente finito em $\mathbb{R}^n$. Então $\partial_{red}E \subset \partial_* E$ e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial_{red}E) = 0$.*

Estamos prontos para obter a estimativa para a Medida Hausdorff da Fronteira Livre.

Corolário 4.17. *1. Para $x_0 \in F(u_0) \cap \Omega'$, existem constantes universais $\underline{C}, \bar{C}$ dependendo apenas de Ω' tais que*

$$\underline{C}\rho^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(F(u_0) \cap B_\rho(x_0)) \leq \bar{C}\rho^{n-1} \quad (\rho \ll \triangle).$$

2. $\mathcal{H}^{n-1}(F(u_0) \setminus F(u_0)_{red}) = 0$.

Demonstração. (1) .A segunda desigualdade está provada no teorema 4.9. Para a primeira desigualdade, observamos que o teorema 4.9 implica que Ω_0 é um conjunto de perímetro localmente finito. De fato, dado um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, considerando

$$K \cap F(u_0) \subset \bigcup B_j$$

uma cobertura finita por bolas abertas centradas em $F(u_0)$ e de raio ρ suficientemente pequeno ($\rho \leq \triangle$) temos

$$\mathcal{H}^{n-1}(K \cap F(u_0)) \leq \sum \mathcal{H}^{n-1}(B_\rho(x_j) \cap F(u_0)) < \infty.$$

Assim, de acordo com (EVANS, Lawrence Craig ; GARIEPY, Ronald F., 1991, pg. 222), segue que Ω_0 tem perímetro localmente finito.

Então, para $\rho \ll \triangle$, e usando a desigualdade isoperimétrica (EVANS, Lawrence Craig ; GARIEPY, Ronald F. (1991), Teorema 2,seção 5.6.2), obtemos

$$\begin{aligned} \min\{\tau, \tau^*\}\rho^{n-1} &= \min\{|\Omega_0 \cap B_\rho(x_0)|, |B_\rho(x_0) \setminus \Omega_0|\}^{1-\frac{1}{n}} \leq C\|D\chi_{\Omega_0}\|(B_\rho(x_0)) \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(F(u_0) \cap B_\rho(x_0)). \end{aligned}$$

(2) Como Ω_0 tem perímtero localmente finito e $F(u_0)$ coincide com $F(u_0)^* := \partial_*\Omega_0 \cap \Omega$, então por 4.16, segue o resultado. □

Em particular, este corolário nos diz que para $\mathcal{H}^{n-1}$ a.e $x \in F(u_0)$ é possível definir um vetor unitário normal exterior a $\{u_0 > 0\}$, no sentido da medida.

5 CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE

Ao tentar determinar qual problema de fronteira livre u_0 deve satisfazer, uma importante questão que aparece é: Qual é a condição que deve ser satisfeita ao logo da fronteira livre? Este tipo de questão investiga a condição que representa o "balanço de fluxo"entre as fases zero e positiva. Esta é a chamada Condição de Fronteira Livre do problema.

O objetivo a longo prazo é verificar, em um sentido o mais clássico possível, a regularidade da fronteira livre (Veja MOREIRA, Diego R ; TEIXEIRA, Eduardo V. (2007) para a regularidade). Intuitivamente, como podemos escrever $F(u_0) = u_0^{-1}(0)$, se u_0 fosse de classe C^1, a ideia natural seria tentar usar o Teorema da Função Implícita para estudar a regularidade da fronteira livre. Assim, seria importante estudar o comportamento do gradiente de u_0 ao longo da fronteira livre. No entanto, u_0 é apenas Lispchitz contínua, o que induz a necessidade de dizer em que sentido esta condição deve ser satisfeita.

Como mencionado na introdução deste trabalho, descreveremos a condição de fronteira livre apenas no sentido integral.

5.1 Condição de fronteira livre no sentido integral

Para dizer qual seria uma candidata natural a condição de fronteira livre, podemos pensar no problema 1-dimensional,

$$u_\varepsilon^{''} = \Gamma\beta_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Multiplicando a equação acima por $u_\varepsilon^{'}$ e integrando, obtemos

$$\int u_\varepsilon^{''} u_\varepsilon^{'}\, dx = \int \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(u_\varepsilon^{'})^2\, dx = \int \Gamma \frac{d}{dx}(B_\varepsilon(u_\varepsilon))\, dx.$$

Uma vez que $B_\varepsilon(u_\varepsilon) = 1$ em $\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$, usando integração por partes, obtemos

$$\int_{\{0\le u_\varepsilon \le \varepsilon\}} \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(u_\varepsilon^{'})^2\, dx = \int_{\{0\le u_\varepsilon \le \varepsilon\}} \frac{d}{dx}\Gamma\, dx - \int_{\partial\{0\le u_\varepsilon \le \varepsilon\}} \Gamma B_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Assumindo que $B_\varepsilon(u_\varepsilon) \to \chi_{\{u_0>0\}}$, quando $\varepsilon \to 0$, temos

$$\int_{\{u_0=0\}} \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(u_0^{'})^2\, dx = \int_{\{u_0=0\}} \frac{d}{dx}\Gamma\, dx - \int_{\{u_0=0\}} \Gamma \chi_{\{u_0>0\}}.$$

Como

$$u_0^{''} = 0 \;\text{ em }\; \{u_0 = 0\}^0$$

segue que,

$$(u_0^{'})^2 = 2\Gamma \text{ em } \partial\{u_0 > 0\}$$

.

Para o nosso caso, eis o resultado preciso:

Teorema 5.1. *(Condição de Fronteira Livre)*
Assuma que $A = A(x) \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$*,* $\Gamma \in L^{\infty}(\Omega) \cap H^1_{loc}(\Omega)$*. Seja* $B = B_\rho(x_0) \subset\subset \Omega$ *com* $x_0 \in F(u_0) = \partial\Omega_0 \cap \Omega$ *e* $\vec{\psi} \in H^1_0(B; \mathbb{R}^n)$*. Então,*

$$\lim_{\gamma\to 0} \int_{B\cap\{u_0=\gamma\}} [\langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle - 2\Gamma]\, \vec{\psi}\cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \tag{5.1}$$

onde ν *é o vetor normal unitário exterior a* $\{u_0 > \gamma\}$ *ao longo da superfície* $B \cap \{u_0 = \gamma\}$*.*

Demonstração. Começamos observando que sob a hipótese de $A \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, os minimizantes $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\Omega)$, para qualquer $\alpha \in (0,1)$, pelos teoremas 2.11 e 2.13. Dessa maneira, podemos usar livremente as fórmulas de Green.

Sejam $\psi \in H^1_0(B)$ e $G = B \cap \{u_0 > 0\}$. Multiplicando a equação

$$div(A\nabla u_{\varepsilon_k}) = \Gamma\beta_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})$$

por $\psi\partial_j u_{\varepsilon_k}$ e usando a identidade

$$div(\psi\partial_j u_{\varepsilon_k} A\nabla u_{\varepsilon_k}) = \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\psi\partial_j u_{\varepsilon_k})\rangle + \psi\partial_j u_{\varepsilon_k} div(A\nabla u_{\varepsilon_k})$$

obtemos,

$$\psi\partial_j u_{\varepsilon_k}\Gamma\beta_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) = div(\psi\partial_j u_{\varepsilon_k} A\nabla u_{\varepsilon_k}) - \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\psi\partial_j u_{\varepsilon_k})\rangle.$$

Integrando sobre B temos,

$$\int_B \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\psi\partial_j u_{\varepsilon_k})\rangle + \psi\partial_j u_{\varepsilon_k}\Gamma\beta_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) = \int_B div(\psi\partial_j u_{\varepsilon_k} A\nabla u_{\varepsilon_k}) = 0.$$

Logo,

$$-\int_B \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\psi\partial_j u_{\varepsilon_k})\rangle = \int_B \psi\partial_j u_{\varepsilon_k}\Gamma B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) = \int_B (\Gamma\psi)\partial_j(B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})).$$

Usando integração por partes,

$$\int_B \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\psi\partial_j u_{\varepsilon_k})\rangle = \int_B \partial_j(\Gamma\psi) B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}). \tag{5.2}$$

Uma vez que temos a seguinte identidade q.t.p,

$$\partial_j \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle = 2\langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\partial_j u_{\varepsilon_k})\rangle + \langle(\partial_j A)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle,$$

então,

$$\begin{aligned}\langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\psi\partial_j u_{\varepsilon_k})\rangle &= \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\partial_j u_{\varepsilon_k})\rangle\psi + \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\psi\rangle\partial_j u_{\varepsilon_k} \qquad (5.3)\\ &= \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\psi\rangle\partial_j u_{\varepsilon_k} + \frac{\psi}{2}\left[\partial_j\langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle - \langle(\partial_j A)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle\right].\end{aligned}$$

substituindo 5.2 em 5.3 e integrando por partes, temos

$$\int_B \langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\psi\rangle\partial_j u_{\varepsilon_k} - \frac{1}{2}\langle A\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle\partial_j\psi - \frac{1}{2}\langle(\partial_j A)\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}\rangle\psi = \int_B \partial_j(\Gamma\psi)B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}).$$

Por reflexividade $B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \rightharpoonup \phi$, $0 \leq \phi \leq 1$ em $L^2(B)$. Uma vez que $B_{\varepsilon_k}(s) = 1$, $\forall\, s \geq \varepsilon_k$, concluímos que $\phi \equiv 1 \,\text{em}\, G = B \cap \{u_0 > 0\}$.

Pelo lema 4.10, fazendo $\varepsilon_k \to 0$. obtemos,

$$\int_B \langle A\nabla u_0, \nabla\psi\rangle\partial_j u_0 - \frac{1}{2}\langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\partial_j\psi - \frac{1}{2}\langle(\partial_j A)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\psi = \int_B \partial_j(\Gamma\psi)\phi.$$

Tomando $\rho \ll \Delta$, temos que pela continuidade Lipschitz de u_0 em B e pelo crescimento linear,

$$\{0 < u_0 < \gamma\} \cap B \subset \mathcal{N}_{\frac{\gamma}{C_2}}(F(u_0)) \cap B).$$

Portanto, pelo teorema 4.9,

$$|\{0 < u_0 < \gamma\} \cap B| \leq C\frac{\gamma}{C_2}\rho^{n-1}.$$

para alguma constante universal $C > 0$. Logo,

$$|\{0 < u_0 < \gamma\} \cap B| \to 0, \text{ quando } \gamma \to 0.$$

Em particular, podemos reescrever a ultima equação da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\int_{B\cap\{u_0\geq\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla\psi\rangle\partial_j u_0 - \frac{1}{2}\langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\partial_j\psi &- \frac{1}{2}\langle(\partial_j A)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\psi + \sigma_1(\gamma)\\ &= \int_B \partial_j(\Gamma\psi)\phi.\end{aligned}$$

onde

$$\sigma_1(\gamma) = \int_{B\cap\{0<u_0<\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla\psi\rangle\partial_j u_0 - \frac{1}{2}\langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\partial_j\psi - \frac{1}{2}\langle(\partial_j A)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle\psi$$

e, $\lim_{\gamma \to 0} \sigma_1(\gamma) = 0$.

Por outro lado, como

$$div(A\nabla u_0)\psi \partial_j u_0 = 0 \text{ em } B \cap \{u_0 > \gamma\}$$

temos,

$$\begin{aligned}
\int_{B\cap\{u_0>\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla(\psi\partial_j u_0)\rangle\, dx &= \int_{B\cap\{u_0=\gamma\}} \psi\partial_j u_0 \langle A\nabla u_0, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \int_{B\cap\{u_0=\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \psi \nu_j\, d\mathcal{H}^{n-1}. \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Assim como foi feito em 5.2 obtemos

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B\cap\{u_0>\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla(\psi\partial_j u_0)\rangle\, dx = \int\limits_{B\cap\{u_0>\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla\psi\rangle \partial_j u_0\, dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int\limits_{B\cap\{u_0>\gamma\}} \partial_j \langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \psi\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{B\cap\{u_0>\gamma\}} \langle (\partial_j A)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \psi\, dx = \\
&= \int\limits_{B\cap\{u_0>\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla\psi\rangle \partial_j u_0\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{B\cap\{u_0>\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \partial_j\psi\, dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int\limits_{B\cap\{u_0=\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \psi\nu_j\, d\mathcal{H}^{n-1} - \frac{1}{2} \int\limits_{B\cap\{u_0>\gamma\}} \langle (\partial_j A)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \psi\, dx = \\
&= \int_B \partial_j(\Gamma\psi)\phi - \sigma_1(\gamma) + \frac{1}{2} \int\limits_{B\cap\{u_0=\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \psi\nu_j\, d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Agora por 5.4, concuímos que

$$\int_B \partial_j(\Gamma\psi)\phi\, dx = \sigma_1(\gamma) + \frac{1}{2} \int\limits_{B\cap\{u_0=\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \psi\nu_j\, d\mathcal{H}^{n-1}. \qquad (5.5)$$

A demonstração ficará concluída se pudermos mostrar que $\phi \equiv 0$ em $B \setminus G$. De fato, uma vez que $\phi \equiv 1$ em G, teremos:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\gamma) &+ \frac{1}{2} \int\limits_{B\cap\{u_0=\gamma\}} \langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle \psi\nu_j\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_B \partial_j(\Gamma\psi)\phi\, dx = \int_G \partial_j(\Gamma\psi)\, dx = \\
&= \int_{B\cap\{u_0\geq\gamma\}} \partial_j(\Gamma\psi)\phi\, dx + \sigma_2(\gamma) = \int_{B\cap\{u_0=\gamma\}} \Gamma\psi\nu_j\, d\mathcal{H}^{n-1} + \sigma_2(\gamma).
\end{aligned}$$

onde

$$\sigma_2(\gamma) = \int\limits_{B\cap\{0<u_0\leq\gamma\}} \partial_j(\Gamma\psi)\phi\, dx$$

e $\lim_{\gamma\to 0}\sigma_2(\gamma)=0$. Em particular,

$$\int\limits_{B\cap\{u_0=\gamma\}} (\langle A\nabla u_0,\nabla u_0\rangle\psi\nu_j-2\Gamma)\; d\mathcal{H}^{n-1}=2(\sigma_2(\gamma)-\sigma_1(\gamma)).$$

Afirmação: $\phi\equiv 0$ em $B\setminus G$.

Com efeito, como $B\setminus G=B\cap\Omega_0^c$, da densidade positiva da fase zero da solução u_0, teorema 4.13, concluímos que $int(B\setminus G)\neq\emptyset$. Logo, seja $B_r(\varsigma)$ uma bola no interior de $B\setminus G$ e considere $\sigma_0>0$ pequeno o suficiente de modo que $B_{r+\sigma}(\varsigma)$ ainda esteja contido no interior de $B\setminus G$, para todo $\sigma\leq\sigma_0$.

Seja η_σ uma função corte, suave e não-negativa satisfazendo:

1. $\eta_\sigma\equiv 0$ em $B_r(\varsigma)$;
2. $\eta_\sigma\equiv 1$ em $\Omega\setminus B_{r+\sigma}(\varsigma)$.

Uma vez que u_ε é um minimizante global para $\mathcal{F}_\varepsilon$, para todo $\varepsilon>0$, então $\mathcal{F}_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})\leq\mathcal{F}_{\varepsilon_k}(\eta_\sigma u_{\varepsilon_k})$. Isto é,

$$\int\limits_{B_{r+\sigma}(\varsigma)}\frac{1}{2}\langle A\nabla u_{\varepsilon_k},\nabla u_\varepsilon\rangle+\Gamma B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})\,dx\leq\int\limits_{B_{r+\sigma}(\varsigma)}\frac{1}{2}\langle A\nabla\eta_\sigma u_{\varepsilon_k},\nabla\eta_\sigma u_\varepsilon\rangle+\Gamma B_{\varepsilon_k}(\eta_\sigma u_{\varepsilon_k})\,dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_{r+\sigma}(\varsigma)}\Gamma B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})\,dx &\leq \int\limits_{B_{r+\sigma}(\varsigma)}\frac{1}{2}\langle A\nabla\eta_\sigma u_{\varepsilon_k},\nabla\eta_\sigma u_\varepsilon\rangle+\Gamma B_{\varepsilon_k}(\eta_\sigma u_{\varepsilon_k})\,dx\\ &\leq \Lambda\int\limits_{B_{r+\sigma}(\varsigma)}\|\eta_\sigma u_{\varepsilon_k}\|^2\,dx+\|\Gamma\|_\infty|B_{r+\sigma}(\varsigma)\setminus B_r(\varsigma)|\\ &\leq 2\Lambda\int\limits_{B_{r+\sigma}(\varsigma)}u_{\varepsilon_k}^2\|\nabla\eta_\sigma\|^2+\eta_\sigma^2\|u_{\varepsilon_k}\|^2\,dx+\|\Gamma\|_\infty|B_{r+\sigma}(\varsigma)\setminus B_r(\varsigma)|.\end{aligned}$$

Uma vez que $B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})\rightharpoonup\phi$ em $L^2(B_{r+\sigma_0})$, $u_{\varepsilon_k}\rightrightarrows 0$ em $\overline{B_{r+\sigma_0}}$ e pelo lema (4.11), aplicando o limite quando $\varepsilon_k\to 0$ na desigualdade acima, obtemos :

$$\int\limits_{B_{r+\sigma}(\varsigma)}\Gamma\phi\,dx\leq\|\Gamma\|_\infty|B_{r+\sigma}(\varsigma)\setminus B_r(\varsigma)|.$$

Agora, fazendo $\sigma\to 0$, concluímos que $\phi=0$ q.t.p em $B_r(\varsigma)$ e portanto, $\phi\equiv 0$ em $B\setminus G$. $\square$

Da teoria de Schauder para equações na forma divergente, uma vez que $Lu_0=0$ em $\{u_0>0\}$, temos que $u_0\in C^1(\{u_0>0\})$. Então, se tivéssemos $\partial\{u_0>0\}\in C^1$, seguiria, pelo teorema acima, que

$$\langle A\nabla u_0, \nabla u_0\rangle = 2\Gamma \text{ na fronteira livre.}$$

Assim, o teorema acima nos fornece a condição em um sentido fraco aproximado.

Como dito na introdução deste trabalho, em MOREIRA, Diego R ; TEIXEIRA, Eduardo V. (2007) há uma abordagem da condição de fronteira livre em quatro sentidos. Além do sentido integral, está dentre estes uma condição de fronteira livre sentido da Viscosidade, devido a Caffarelli. Vide (CAFFARELLI, Luis A. (1987), CAFFARELLI, Luis A. (1989), CAFFARELLI, Luis A. (1988)).

Para encerrar esta secção, daremos uma breve ideia de tal condição, de acordo com MOREIRA, Diego R ; TEIXEIRA, Eduardo V. (2007).

Assumindo que Γ é contínua, para pontos regulares de $F(u_0)$, i.e., pontos $x_0 \in F(u_0)$ tais que existe $B_\rho(y_0)$ com $x_0 \in \partial B_\rho$ e $B_\rho(y_0) \subset \Omega_0$ ou $B_\rho(y_0) \subset (\Omega \setminus \Omega_0)^0$ temos,

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\Gamma}{\langle A\nu, \nu\rangle}}\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|) \tag{5.6}$$

onde ν é o vetor unitário normal a $\partial B_\rho(y_0)$ e interno a Ω_0.

6 CONCLUSÃO

Como sugerido no início deste trabalho , o objetivo central é encontrar o problema de fronteira livre do qual u_0 é uma solução.

A condição de Fronteira Livre no sentido da Viscosidade, 5.6, fornece uma espécie de derivada normal fraca,

$$u_\nu = Q := \sqrt{\frac{2\Gamma}{\langle A\nu, \nu\rangle}} \quad \text{ao longo de} \quad F(u_0). \tag{6.1}$$

Sendo assim, concluímos que para $\Omega^{'} := \{u_0 = 0\}$, $\Upsilon := \partial\{u_0 > 0\}$, u_0 é uma solução para a equação

$$\begin{cases} Lu = 0 \ \text{ em } \ \Omega \setminus \Omega^{'} \\ u = \varphi \ \text{ em } \ \partial\Omega \\ u = 0, \ \ u_\nu = Q \ \text{ em } \ \Upsilon. \end{cases} \tag{6.2}$$

em qualquer pedaço C^1 da fronteira livre.

REFERÊNCIAS

ALT, H.W. ; CAFFARELLI, L.A. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. ***J. Reine Angew. Math.***, v. v.325, p. 105–144, 1981.

CAFFARELLI, Luis A. A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries. Part I: Lipschitz Free Boundaries are $C^{1,\alpha}$. ***Revista Matemática Iberoamericana***, v. v.3, n. 2, p. 139–162, 1987.

CAFFARELLI, Luis A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part III: existence theory, compactness, and dependence on X. ***Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze***, v. 15, n. 4, p. 583–602, 1988.

CAFFARELLI, Luis A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries part II: Flat free boundaries are Lipschitz. ***Communications on Pure and Applied Mathematics***, v. 42, n. 1, p. 55–78, 1989.

CAFFARELLI, Luis A ; SALSA, S. ***A geometric approach to free boundary problems***, v. 68. New York: American Mathematical Soc., 2005.

EVANS, Lawrence Craig ; GARIEPY, Ronald F. ***Measure Theory and Fine Properties of Functions***, v. 5. CRC Press, 1991.

GILBARG, David ; TRUDINGER, Neil S. ***Elliptic partial differential equations of second order***. springer, 2015.

HAN, Qing ; LIN, Fang-Hua. ***Elliptic partial differential equations***. Courant Institute of Mathematical Sciences, Robotics Lab, New York University, 2000.

MOREIRA, Diego R ; TEIXEIRA, Eduardo V. A singular perturbation free boundary problem for elliptic equations in divergence form. ***Calculus of Variations and Partial Differential Equations***, v. v.29, n. 2, p. 161–190, 2007.

RICARTE, Gleydson Chaves. ***Teoria de regularidade para equações elípticas totalmente não lineares com potenciais singulares e problemas de fronteira livre assintóticos.*** 2010. 145 f:. Tese (doutorado em Matemática) - Centro de Ciências- Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.