UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

RAQUEL SANTIAGO FREIRE

DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS POR PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

FORTALEZA - CE
2011

RAQUEL SANTIAGO FREIRE

DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS POR PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação. Linha de Pesquisa: Educação, Currículo e Ensino. Eixo Temático: Tecnologias Digitais na Educação.

Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.

FORTALEZA - CE
2011

"Lecturis salutem"
Ficha Catalográfica elaborada por
Telma Regina Abreu Vieira – Bibliotecária – CRB-3/593
tregina@ufc.br
Biblioteca de Ciências Humanas – UFC

F935d Freire, Raquel Santiago.
Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental / por Raquel Santiago Freire. – 2011.
180f. : il. ; 31 cm.
Cópia de computador (printout(s)).
Tese(Doutorado) – Universidade Federal do Ceará,Faculdade de Educação,Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza(CE), 24/02/2011.
Orientação: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.
Inclui bibliografia.

1-PROFESSORES DE MATEMÁTICA - FORMAÇÃO - FORTALEZA(CE). 2-ÁLGEBRA - ENSINO AUXILIADO POR COMPUTADOR. 3-ÁLGEBRA - ESTUDO E ENSINO - FORTALEZA (CE). I-Castro Filho, José Aires de, orientador. II.Universidade Federal do Ceará. Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira.III-Título.

CDD(22ª ed.) 372.7044098131
83/11

RAQUEL SANTIAGO FREIRE

DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS POR PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação. Linha de Pesquisa: Educação, Currículo e Ensino. Eixo Temático: Tecnologias Digitais na Educação. Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho

Aprovada em: ___/ ___/ 2011

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. José Aires de Castro Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará

____

Profa. Dra. Marcília Chagas Barreto (membro)
Universidade Estadual do Ceará

____

Prof. Dr. Fernando Lincoln Carneiro Leão Mattos (membro)
Universidade Federal do Ceará

____

Profa. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes (membro)
Universidade Estadual do Ceará

____

Prof. Dr. Ana Karina Morais de Lira (membro)
Universidade Federal do Ceará

Para todos os professores e professoras de Matemática.

AGRADECIMENTOS

E aprendi que se depende sempre
De tanta, muita, diferente gente
Toda pessoa sempre é as marcas
Das lições diárias de outras tantas pessoas

E é tão bonito quando a gente entende
Que a gente é tanta gente onde quer que a gente vá
E é tão bonito quando a gente sente
Que nunca está sozinho por mais que pense estar.
(Gonzaquinha)

Neste momento poderia agradecer a muitas pessoas que fizeram parte da minha vida pessoal e profissional, mas que, por enquanto, ficarão no anonimato. Há, porém, algumas que gostaria de agradecer neste momento de conclusão.

Ao meu orientador, professor Aires por ter me acompanhado e incentivado por exatamente uma década. Obrigada pelos ensinamentos sobre o que é ser professor e pesquisador. Obrigada pela amizade e confiança.

À professora Ana Karina por ter participado de momentos tão importantes da minha vida como estudante e como profissional. Obrigada pelas contribuições durante a graduação e defesa de mestrado.

À professora Gilvanise Pontes por ter aceitado mais uma vez contribuir com seus conhecimentos sobre matemática.

À professora Marcília Chagas por contribuir de forma competente, carinhosa e paciente na segunda qualificação de tese. Essas atitudes nos fazem ter força para continuar firme no trabalho.

Ao professor Fernando Lincoln amigo e colega de trabalho por ter contribuído com colocações pertinentes para a pesquisa e sugestões que foram apreciadas. Obrigada pelo companheirismo diário em nosso trabalho com formação de professores.

A todos vocês meus agradecimentos e admiração.

Quanto mais penso sobre a prática educativa, reconhecendo a responsabilidade que ela exige de nós, tanto mais me convenço do dever nosso de lutar no sentido de que ela seja realmente respeitada.

(FREIRE, 1997, p. 59).

RESUMO

Diversas pesquisas têm mostrado que atividades ligadas ao pensamento algébrico nos anos iniciais tem sido uma forma de trazer significado e desenvolver conceitos como os de equação, incógnita e equivalência. No entanto, ainda falta investigar como professores desses anos são capazes de pensar sobre esses conceitos e incorporá-los em sua prática pedagógica. Pesquisas sobre o desenvolvimento de conceitos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental têm sido pouco exploradas na literatura, em especial no Brasil. O objetivo da presente pesquisa foi investigar o desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental utilizando atividades manipulativas e recursos digitais. O estudo foi realizado com professoras de uma escola pública da cidade de Fortaleza, em duas etapas. Inicialmente, 11 professoras participaram de uma oficina explorando conceitos de equações, inequações, relações entre quantidades desconhecidas, equivalência, pensamento relacional e o uso de incógnita em atividades voltadas para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Após a oficina, uma professora foi selecionada para planejar e utilizar as atividades em sua prática. Os dados do estudo constaram de observações e registros das atividades durante a oficina, entrevistas e observações das aulas com a professora participante da segunda etapa Os dados foram analisados tomando por base, categorias do conhecimento algébrico apontadas na literatura. Os resultados durante a oficina apontaram uma dificuldade inicial das professoras em entender noções básicas do pensamento algébrico como resolver equações do 1º grau e explicar diferenças entre atividades aritméticas e algébricas. Essas dificuldades foram sendo parcialmente superadas ao longo do trabalho. Na segunda etapa, o planejamento e a utilização das atividades em sala de aula apontam para uma maior compreensão por parte da professora sobre o sentido de equações, o desenvolvimento do conceito de igualdade, trabalho com incógnita e relações entre expressões numéricas e simbólicas. Os dados permitem concluir que as atividades utilizadas favoreceram o desenvolvimento de conceitos ligados ao pensamento algébrico nas professoras, tanto na oficina quanto na utilização das atividades em sala de aula. O trabalho também aponta a importância de investir em formações continuadas para que professores possam refletir sobre práticas educativas desenvolver conceitos aritméticos juntamente com conceitos algébricos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Conceitos algébricos. Álgebra nos anos iniciais. Formação de professores.

ABSTRACT

It has been shown in many researches that activities connected to the algebraic thought in the initial years has been the only way to obtain meaning and develop concepts such as the equation, the unknown quantity and the equivalence. However, there's still a lack of investigation regarding how teachers from these respective grades are capable of thinking about these concepts and add them up to their pedagogical practice. Researches about the concepts' development by teachers from the initial grades in Elementary School have been very few explored in books, especially in Brazil. This research's objective was to investigate the development of algebraic concepts by Elementary School initial grades' teachers by using manipulative activities and digital resources. The study was performed with teachers from a State School in Fortaleza through two stages. Initially, 11 teachers took part in a workshop exploring the concepts equations, inequations, relations among unknown quantities, equivalence, relational thought and the use of unknown quantities in activities directed at Elementary School's initial grades. After the workshop, one of the teachers was chosen to plan and use the activities in her practice. The study data was made of the activities' observations and records during the workshop, classes' interviews and observations and activities' records with the participant teacher of this second stage. The data was analyzed based on the categories of algebraic knowledge pointed out in literature. The results during the workshop pointed out the teachers' initial difficulty in understanding the basic notions of the algebraic thought as how to solve 1st degree equations and explain the differences between arithmetic and algebraic activities. These difficulties were partially overcome throughout the project. On the second stage, the planning and use of the activities in the classroom point out to a greater comprehension by the teacher about the meaning of equations, the development on the concept of equality, working with unknown quantities and the relations between numeric and symbolic expressions. The data allows us to conclude that the used activities aided in the development of concepts connected to the teachers' algebraic thought, both in the workshop and in the use of the mentioned activities inside the classroom. This project also points out the importance of investing in continuing education so that teachers can reflect upon the educational practice, developing arithmetic concepts together with algebraic concepts.

Keywords: Mathematics Education. Algebraic concept. Algebra in the early years. Teacher´s professional development.

RESUMEN

Varios estudios han presentado que las actividades relacionadas con el pensamiento algebraico en los primeros años han sido una manera de traer significado y desarrollar conceptos como la ecuación, incógnita y de equivalencia. Sin embargo, todavía falta investigar cómo los profesores de estas etapas son capaces de pensar sobre estos conceptos e incorporarlos en su práctica de enseñanza. Los estudios sobre el desarrollo de conceptos para los profesores de los primeros años de la escuela primaria han sido poco explorados en la literatura, especialmente en Brasil. El objetivo de este estudio fue investigar el desarrollo de los conceptos algebraicos por los profesores de los primeros años de la escuela primaria con actividades de manipulación y recursos digitales. El estudio se realizó con los maestros en una escuela pública de Fortaleza, en dos momentos. Inicialmente, 11 profesores participaron de un taller que exploraba los conceptos de las ecuaciones, inecuación, las relaciones entre cantidades desconocidas, pensamiento relacional y el uso del incógnito en las actividades destinadas a los primeros años de escuela primaria. Después del taller, un profesor fue seleccionado para organizar las actividades y utilizar en su práctica. Los datos fueron analizados con base en las categorías del conocimiento algebraico a la literatura. Los resultados durante el taller demostraron una dificultad inicial de los profesores para comprender fundamentos básicos del pensamiento algebraico, como resolver ecuaciones de primer grado y explicar las diferencias entre las actividades aritméticas y algebraicas. Estas dificultades se han superado parcialmente en el progreso del trabajo. En la segunda etapa, la organización y la utilización de las actividades en el aula van direccionadas para una mayor comprensión de los profesores sobre el significado de las ecuaciones, el desarrollo del concepto de igualdad, el trabajo con incógnita y las relaciones entre expresiones numéricas y simbólicas. Los datos permiten concluir que las actividades utilizadas favorecieron el desarrollo de los conceptos relacionados al pensamiento algebraico en las profesoras, tanto en el taller cuanto en el uso de las actividades en el aula. El trabajo también muestra la relevancia de los investimentos en la educación continua, para que los profesores puedan reflexionar acerca de las prácticas educativas y desarrollar conceptos aritméticos en harmonía con los conceptos algébricos.

Palabras clave: Educación Matemática. Concepto algebraico. Álgebra en los primeros años. El desarrollo profesional.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> A matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. (BRASIL, 2000, p. 19).

Utilizamos a matemática em muitas situações: ela nos ajuda dividir nosso tempo para realizar tarefas no dia a dia, ao olhar as horas, ao calcular o troco de uma mercadoria e também em situações específicas do trabalho, como divisões de atividades, construção de obras, interpretações de dados estatísticos. Em todas essas atividades, abstraímos conceitos e conhecimentos matemáticos que foram desenvolvidos ao longo dos anos.

A Matemática surgiu na Antiguidade para resolver problemas do cotidiano. Atualmente, esta ciência é cada vez mais utilizada para descrever, modelar e resolver problemas corriqueiros como porcentagem, gráficos e tabelas, situações que precisam de um domínio mínimo da linguagem simbólica.

A utilização da Matemática desenvolve a capacidade de resolver problemas, estimula a compreensão e transformação da realidade a partir dos conceitos aritmético, métrico, algébrico, estatístico, probabilístico, dentre outros. Esses conhecimentos permitem o estabelecimento de noções e produção de informações importantes na sociedade.

Aprender Matemática não se justifica somente na sua utilidade prática, mas na compreensão do seu uso e da simbologia envolvida, sabendo interpretá-los. A tentativa de justificar a importância da Matemática ou seus conteúdos escolares com uma aplicação da vida diária,

> “(...) muitas vezes engajam-se os próprios professores, que se sentem ora desestimulados em transmitir assuntos para os quais não encontram utilidade prática, ora excessivamente entusiasmados com temas epistemologicamente bem poucos significativos”. (MACHADO, 1990, p.66).

O ensino e a aprendizagem da Matemática consistem em entender uma linguagem específica e compreender símbolos próprios e peculiares. Essa linguagem a torna, muitas vezes, complicada e de difícil entendimento devido ao seu ensino essencialmente tradicional e desprovido de significados.

A Matemática enquanto disciplina curricular tem o objetivo de analisar informações e estabelecer o maior número de relações entre elas, fazendo uso do conhecimento matemático para interpretá-las e avaliá-las criticamente e desenvolver um conjunto de habilidades e atitudes para explorar situações problema, procurar regularidades e comunicar-se usando linguagens matemáticas escritas e orais. O desenvolvimento do conhecimento matemático favorece os alunos a organizar, interpretar e dar significado a certos aspectos da realidade que nos rodeia. (BRASIL, 1998).

A Matemática na escola, ao longo da educação básica, deve propiciar uma variedade de situações para se construir relações matemáticas e formular conceitos dentro de diferentes perspectivas. As atividades escolares devem possibilitar o acesso sistemático às representações simbólicas como leitura e interpretação de gráficos e diagramas, compreensão de símbolos escritos e proporcionar oportunidades para a compreensão de relações que não são ligadas à vida diária. (SCHLIEMANN, CARRAHER, 1998). A escola deve criar oportunidades para que a criança desenvolva novas estratégias e compreensões sem a limitação das situações do dia a dia.

> Situações relevantes e significativas não se restringem àquelas que ocorrem fora da escola. As situações a serem criadas na escola devem abranger conceitos variados e permitir a descoberta de aspectos matemáticos que não são facilmente encontrados em situações fora da escola.[1] (SCHLIEMANN e CARRAHER, 1998, p. 32).

Apesar da sua importância e de a empregarmos por tanto tempo, em tantas situações, a Matemática na maioria das vezes ainda causa impactos negativos na vida do estudante, pois é entendida como uma matéria de difícil compreensão e relacionada a cálculos, fórmulas, precisão, rigor lógico e situações difíceis de resolver. Isso acontece porque durante muitos anos utilizamos na escola a Matemática baseada somente em regras e fórmulas e não como algo “(...) de utilização consciente de um instrumento básico para a representação da realidade”. (MACHADO, 1990, p. 58). Em decorrência dos fatores mencionados, muitos alunos apresentam baixo desempenho em avaliações nacionais.

Alguns estudos apontam que estudantes apresentam baixo desempenho em teste de Matemática e não compreendem o sentido de operações matemáticas. Resultados de

[1] As obras em inglês foram traduzidas pela autora do trabalho.

avaliações como SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) e a prova Brasil mostram resultados semelhantes.

Na análise dos dados do SAEB (1995 – 2005), a média nacional está abaixo da escala mínima exigida de 200 pontos a partir dos dados da matriz de referência. Nos resultados de 1995, os alunos do quinto ano atingiram 191 pontos e, nos anos seguintes, sempre apresentaram baixos resultados, chegando a 182 pontos em 2005. (INEP, 2007). Esses dados indicam que os alunos têm apresentado na disciplina de Matemática resultados elementares para quem está concluindo a primeira etapa do Ensino Fundamental. Os estudantes não conseguem ler e interpretar gráficos de colunas e nem estabelecer relações entre medidas de tempo (horas, dias, semanas), bem como não efetuam cálculos de resultados simples utilizando as quatro operações. (INEP, 2003).

Essas dificuldades não aparecem somente nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Se analisarmos dados do SAEB em anos posteriores, poderemos notar que a dificuldade com a Matemática persiste. Os alunos do 9º ano apresentaram no SAEB de 2003 um resultado de 278,7 pontos, enquanto que a média satisfatória é de 375 pontos. Isso significa que os alunos ao final do Ensino Fundamental resolvem expressões algébricas envolvendo apenas uma incógnita e não interpretam os dados de um problema fazendo uso de símbolos matemáticos. (INEP, 2007). Dados como estes mostram que os alunos não estão desenvolvendo os requisitos mínimos para uma trajetória bem-sucedida e não ampliam conceitos algébricos.

O baixo desempenho dos alunos em Matemática advém não apenas da dificuldade própria da área, mas também do ensino centrado em procedimentos mecânicos, regras e memorização. (VASCONCELOS, 1998; LINS, GIMENEZ, 1997). Os baixos índices ao longo dos anos nos revelam que a escola continua ensinando proposições formais sobre estruturas matemáticas, baseadas na concepção de que o aluno é o receptor das informações, limitando-o a aprender regras matemáticas ao invés de compreender - de forma ativa - como operar sobre fatos e dados matemáticos.

O ensino tradicional, baseado em regras e manipulação simbólica advém das décadas de 60 e 70 através do movimento educacional chamado “Matemática Moderna”. Nesta época, o objetivo da disciplina era aproximar a Matemática escolar da Matemática pura, passando a ter preocupações “excessivas com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática” (BRASIL, 2000, p. 21), pois “a Matemática nas escolas baseia-se em informações isoladas, técnicas de cálculos e em uma sequência lógica de conteúdos que nem sempre corresponde aos interesses e necessidades dos estudantes. (D'AMBROSIO, 1989; PAIS, 2002).

É importante que professores conheçam diversos materiais e contextos para favorecer e estimular o estudante a buscar significados através das atividades matemáticas, permitindo-lhe entrar em contato com diversas situações e encontrar novas maneiras de solucionar situações problema.

Para a mudança desse quadro, pesquisadores do Nacional Council of Teachers of Matematics (NCTM) nos Estados Unidos da América (EUA) apresentaram recomendações para discussões curriculares sobre o ensino da Matemática. (NCTM, 1989; MIGUEL et al, 2004). Este documento criou normas para contribuir com ações efetivas no desenvolvimento profissional dos professores, na criação de um ambiente de aprendizagem, como também no desenvolvimento de pesquisas.

No Brasil, em 1996 é sancionada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), visando estabelecer diretrizes e normas para a educação nacional e, dois anos mais tarde, são lançados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) com reflexões sobre a formação de professores, prática pedagógica e orientações para o trabalho significativo em sala da aula. (BRASIL, 1996; BRASIL, 1998a, 1998b).

Entretanto, apesar desses esforços, ainda hoje, encontramos a excessiva preocupação no treino de habilidades e mecanização de processos sem a compreensão de conceitos. Encontramos ainda um currículo baseado na hierarquização e preparação de conteúdos para continuidade nos estudos. Por exemplo: os alunos nos anos iniciais devem ser capazes de operar aritmeticamente com os números naturais (adição, subtração, multiplicação e divisão), sistema de numeração decimal, números racionais, espaço e forma, grandezas e medidas. Nos anos finais do Ensino Fundamental, a disciplina de Matemática deve ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais, desenvolvendo o pensamento algébrico, geométrico, combinatório, estatístico, probabilístico e de proporcionalidade. (BRASIL, 1998a).

O ensino de Matemática hoje deve ser voltado para um currículo que valorize atividades práticas, estimule vivências de diversas situações e favoreça a elaboração de conceitos. Percebemos, então, uma estrutura curricular fragmentada dividindo os conteúdos em blocos: um voltado para o trato aritmético e outro às questões algébricas. O que acontece nos anos finais do Ensino Fundamental é a dificuldade dos alunos em relacionar um tipo de raciocínio diferente daqueles que estavam acostumados a aprender.

O ensino da álgebra também dá maior ênfase aos procedimentos de cálculo, regras e passos para a resolução de problemas, utiliza símbolos e letras como símbolo abstrato sem relacionar com seus aspectos significativos. A consequência é que os estudantes não entendem sua utilização e a relacionam apenas como substituição de letras por números ou resolução de equações através de fórmulas prontas.

Segundo os PCN (1998) do terceiro e quarto ciclo, a álgebra deve ser utilizada para generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis. Para os Parâmetros, o pensamento algébrico explora situações de aprendizagem que levam o aluno a reconhecer representações algébricas, traduzindo informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificando os significados das expressões. Dessa maneira, o pensamento algébrico envolve o desenvolvimento de habilidades como a observação e interpretação de regularidades, assim como a abstração e generalização de fenômenos matemáticos.

Precisamos pensar em um currículo no qual os estudantes construam o conhecimento matemático e algébrico a partir de uma variedade de representações e situações, considerando a observação de regularidades em tabelas e gráficos. Para que essas mudanças ocorram no âmbito da escola é preciso investir na formação de professores para a compreensão de conceitos algébricos de forma aprofundada, e entender quais atividades facilita a apreensão pelos alunos.

Essa discussão revela a importância de estimular o estudante a compreender noções algébricas, tendo como base as atividades significativas, mas não apenas a memorização de regras de manipulação. Além disso, essas atividades devem envolver tanto a utilização do pensamento aritmético como também o pensamento algébrico. Nessa perspectiva, o currículo da disciplina de Matemática pode integrar esses dois conteúdos já nos anos iniciais ao invés de separá-los. Ao pensar nessa proposta, é necessário discutir como os professores poderiam envolver seus alunos em contextos de aprendizagem que abrangessem atividades relacionadas tanto ao pensamento aritmético como o algébrico.

É preciso que as formações dos professores de Matemática propiciem o desenvolvimento baseado na exploração e investigação de conceitos matemáticos. O professor deve estimular o desenvolvimento desses conceitos na forma de desafios, encorajando os alunos a tomar iniciativas em trabalhos estruturados, tendo como base da exploração a investigação de fenômenos matemáticos.

Conforme os estudos de Vergnaud (1990), um dos problemas na formação dos professores é a existência de uma concepção errada de que os conceitos matemáticos são objetos prontos, não percebendo que os conceitos são construídos pelos alunos. Dessa maneira, a preocupação dos professores deveria estar centrada na abstração reflexiva sobre os esquemas já existentes para que novos esquemas se construíssem e favorecessem a aprendizagem. Assim, o trabalho desenvolvido na construção de novos conceitos deveria ser fundamentado em conhecimentos elaborados pelos alunos ao longo de suas experiências diárias.

Nesse sentido, para se pensar em atividades que unam o pensamento aritmético e algébrico, é necessário refletir sobre formação de conceitos matemáticos e propor mudanças na formação inicial e continuada de professores. Assim, os professores devem pensar sobre as aplicações reais da Matemática e não apenas se preocupar com a transmissão e cumprimento de conteúdos.

O professor precisa compreender a Matemática como algo útil na vida do aluno e ser pensada diferente da educação tradicional a qual se baseia em mostrar o conceito, demonstrar seu funcionamento e treinar sua aplicação. Para isso, é importante estimular a elaboração do conceito durante atividades reflexivas, utilizando diversos recursos como materiais concretos, situações problema e recursos tecnológicos, como por exemplo, computadores e Internet.

Pesquisadores como Almeida (2000), Borba (1999), Barreto (2004), Cysneiros (2004), Valente (2005), têm investigado como computadores podem representar, testar ideias ou hipóteses para favorecer o contato com atividades abstratas e simbólicas, atuando na interação entre pessoas e apoiando a aprendizagem de conceitos.

A inserção de computadores deve auxiliar a escola a promover a integração curricular e a criação de novas situações, propiciando atividades significativas para os alunos. A utilização da tecnologia amplia as possibilidades dos professores desenvolverem atividades para facilitar o entendimento de conteúdos pelo seu poder de simulação, interação e multimídia.

Os recursos tecnológicos, como objetos de aprendizagem, *software*, televisão, vídeos, calculadoras, *Internet*, recursos digitais entre outros, têm favorecido o desenvolvimento e as experimentações matemáticas, potencializando formas de resolução de problemas. Tais recursos têm sido cada vez mais utilizados na escola para apoiar situações de ensino em que somente a utilização de materiais manipulativos ou material impresso não são suficientes.

Existem alguns estudos sobre o uso de recursos digitais no ensino de conteúdos matemáticos, mostrando as estratégias de aprendizagem desenvolvidas pelos alunos quando utilizam esses recursos (CASTRO-FILHO et al., 2003, 2005; FREIRE, CASTRO-FILHO, 2006; LEITE, CASTRO-FILHO, 2006). Entretanto, ainda precisamos investigar como os professores utilizam esses recursos no cotidiano da escola. (FERNANDES, 2009).

A formação de professores deve propor o entendimento não somente do conhecimento das tecnologias, mas também de atividades que possam ser incorporadas em sua prática. Assim como os estudantes, os professores precisam encontrar o significado de utilizar a tecnologia na escola.

Desta forma, o presente trabalho visa contribuir na discussão de três temáticas: álgebra nos anos iniciais, a utilização e planejamento de atividades (recursos digitais e manipulativos) no cotidiano escolar e o desenvolvimento do conceito algébrico docente nos anos iniciais. Pretende-se discutir como professores contribuem com novas propostas de atividades, envolvendo o uso do computador e conceitos algébricos nos anos iniciais com o intuito de vivenciar mudanças na prática docente e refletir sobre o currículo da escola.

O objetivo da presente pesquisa é investigar o desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, utilizando atividades manipulativas e recursos digitais.

Trabalhar com conceitos algébricos nos anos iniciais é algo novo na literatura. Algumas pesquisas já apontam para a utilização do pensamento algébrico por crianças dos anos iniciais, no entanto, para que esse trabalho possa fazer parte das atividades escolares, os professores precisam conhecer e entender como trabalhar com esses conceitos algébricos.

A partir do objetivo geral, uma investigação foi proposta, tendo como base os seguintes objetivos específicos:

1. Mapear os conhecimentos dos professores sobre conceitos algébricos;
2. Analisar o desenvolvimento de conceitos algébricos pelos professores ao longo do processo de formação;
3. Verificar como esses conhecimentos se manifestam na prática docente;

4. Identificar como recursos digitais e manipulativos apóiam esses conhecimentos;

O primeiro capítulo trata da definição e característica da aritmética e álgebra, descrevendo também suas principais diferenças. Ainda nesse capítulo mostraremos estudos que propõem uma mudança dentro do currículo escolar para unir esses dois conteúdos. Discute, ainda, como a álgebra pode ser estudada juntamente com a aritmética e as principais pesquisas com álgebra nos anos iniciais, mostrando como é possível que os alunos encontrem significado em conceitos algébricos.

O segundo capítulo situa o atual contexto da formação docente, discutindo seu papel na sociedade, nas situações de ensino a aprendizagem e aspectos relevantes que ocorrem ao longo da formação e prática docente. As discussões giram em torno de entender as mudanças curriculares e contextualizar a formação dos professores de Matemática nos anos iniciais. Também apresentamos pesquisas que discutem o papel do professor e o desenvolvimento de competência para ensinar Matemática.

O terceiro capítulo apresenta os procedimentos metodológicos que nortearam a pesquisa detalhando a proposta do estudo, os materiais utilizados, a caracterização do universo estudado e o processo de produção de dados.

O quarto capítulo apresenta como se manifestou o conhecimento das professoras durante a formação, descrevendo como elas discutiram o conhecimento matemático, envolvendo tanto conceitos aritméticos quanto algébricos. Também relata o envolvimento de uma professora com esse conhecimento durante o planejamento das atividades e sua prática em sala de aula.

1 ARITMÉTICA E ÁLGEBRA: PESQUISAS, CONCEITOS E CONCEPÇÕES

> Mas, afinal, o que é álgebra? E o que é aritmética? Por um lado, fazer essas perguntas parece um tanto estranho. Coisas da álgebra são equações, inequações, funções etc., e as da aritmética são números, as quatro operações, tabuada etc. Todo mundo sabe. Mas há um problema naqueles *et cetera*: o que é mesmo que vem depois deles? (LINS, GIMENEZ, 1997, p. 12).

Neste capítulo, discutiremos as diferenças entre aritmética e álgebra e como os teóricos defendem a união desses dois conteúdos nas atividades escolares. Trataremos aritmética e álgebra não como ciência pura, mas como conteúdo do universo escolar.

Na primeira parte, discutiremos as definições desses dois conteúdos e depois os trabalhos realizados com álgebra. Autores como Kieran (2006), Brito Menezes (2006), Ponte (2005), Kaput e Blanton (2001), Lins e Gimenez (1997), Lessa (1996) e Da Rocha Falcão (1993), discutem a diferença entre aritmética e álgebra e mostram como atividades de aritmética e álgebra devem dar suporte uma à outra.

Depois abordaremos como esses autores desenvolveram atividades algébricas e elaboraram propostas de estudos que defendem o ensino de conceitos algébricos nos anos iniciais. Esses trabalhos também mostram como atividades baseadas na investigação de situações problema favorecem o entendimento do trabalho com álgebra de maneira a atribuir significado aos conceitos algébricos. Trabalhos nas escolas com aritmética e álgebra têm apresentado resultados positivos quando os alunos se envolvem com atividades que possuem conceitos algébricos e aritméticos. (CARRAHER, SCHLIEMANN, BRIZUELA, EARNEST, 2006).

No terceiro tópico, mostraremos pesquisas com álgebra nos anos iniciais que começaram a ser exploradas por Davydov (1969). Seus estudos mostraram como crianças soviéticas, fora do contexto escolar, resolviam problemas verbais sobre representações algébricas e apresentavam um pensamento mais elaborado sobre a situação problema, quando comparadas a adolescentes que estudam esse conteúdo. Atualmente, as pesquisas sobre álgebra nos anos iniciais ou álgebra inicial vêm sendo realizadas por pesquisadores como Schliemann, Goodrow e Lara-Roth (2001), Kieran (2006), Schliemann, Carraher, Brizuela e Jones (1998), Kaput e Blanton (2001), Peled e Carraher (2007).

1.1 DEFINIÇÕES PARA A ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

Para realizarmos a definição desses dois conteúdos é necessária uma reflexão inicial sobre ambos os conceitos. Assim, nos remetemos a uma pergunta primordial e de fundamental importância para este estudo: Quais são as diferenças entre a álgebra e aritmética? Quais os objetivos fundamentais da aritmética e da álgebra? Prontamente, poderíamos responder a essa pergunta com: aritmética trabalha com números e álgebra com símbolos. No entanto, essa definição se torna limitada uma vez que ambos os conteúdos se relacionam. Neste tópico, explicaremos como.

Na tentativa de definir os dois conteúdos, podemos restringi-los em uma perspectiva limitada sobre a aprendizagem da Matemática. A álgebra definida a partir da terminologia dos programas e livros didáticos dos anos 90 se baseia em um conjunto de regras de transformação de expressões (monômios, polinômios, expressões algébricas, expressões com radicais), processos de resolução de equações e sistemas de equações. Essa definição seria desvalorizar os aspectos da álgebra desenvolvidos na Antiguidade (resolução de problemas), no período clássico da álgebra (estudo de funções) e na atualidade (relações e estruturas algébricas). (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009).

Alguns trabalhos (LESSA, 1996; LINS, GIMENEZ, 1997; DA ROCHA FALCÃO, 1993; TELES, 2004) têm buscado definir as diferenças desses dois conteúdos. Segundo Lessa (1996), a aritmética trabalha as operações com números e enfatiza a obtenção de resposta mediante cálculos e a álgebra prioriza a representação de problemas através de equações, que se processa em um nível mais abstrato, utilizando e operando com os símbolos e só posteriormente a realização dos cálculos sobre as equações. Para a autora, aritmética trabalha com a concepção de números e suas operações e a álgebra com as relações entre as quantidades, utilizando símbolos (como a, b, x e y) para representar números.

Apesar de a álgebra utilizar outros símbolos, é na aritmética que começamos a trabalhar com eles. Por exemplo, o entendimento de número e numeral exige do aluno a relação entre símbolo (numeral) e quantidade (número). O estudo do que significa o numeral cinco, por exemplo, surge a partir de relacionamento entre a quantidade de cinco elementos com o símbolo 5. Portanto, a álgebra precisa ser uma continuação desse entendimento sobre símbolos. Afinal, é no estudo sobre números que entramos em contato com os primeiros símbolos, como =, +, -, x, :, <, >, 2^3, dentre outros. Na Álgebra, conhecemos novos símbolos e alguns deles mudam de significado.

Ainda há diferenças conceituais que causam dificuldades nos alunos quando estão aprendendo Álgebra. Na Álgebra, uma equação significa a relação entre os valores conhecidos e desconhecidos do problema. Já na aritmética uma equação consiste em encontrar uma resposta dos processos de cálculos de um problema. Assim, o sinal de igual “=” na aritmética estabelece o resultado de uma operação e na álgebra esse sinal representa relação de equivalência ou igualdade entre os dois membros de uma equação. (LESSA, 1996).

Não devemos condenar o simbolismo e sim entender como operá-los. Os símbolos utilizados na álgebra ou linguagem algébrica cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Ganhando vida própria, tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas. No entanto, muitas vezes, o uso de símbolos na educação algébrica é utilizado de maneira arbitrária, de modo abstrato, sem referentes significativos, transformando a Matemática em um jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios, tornando a linguagem algébrica distante dos referentes concretos iniciais e incompreensível para o aluno. (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009).

Kaput (1998) defende que a linguagem algébrica utilizada na escola deve ser de uma maneira precoce e integrada. Precoce porque os alunos devem fazer o uso mais cedo e em um longo período de tempo para se tornar fluente na sua utilização; integrada, porque para aprender uma linguagem, os alunos precisam usá-la para expressar algo significativo para eles, tais como as relações quantitativas que surgem dentro da Matemática (por exemplo, as que ocorrem em aritmética e geometria) e na Matemática fora da escola (quando usamos para o nosso cotidiano).

As atividades e o ensino da Matemática precisam ultrapassar a manipulação simbólica e ser compreendida como uma ferramenta de resolução de problema. Pensar a álgebra simplesmente baseado em uma visão letrista é uma das causas das dificuldades do ensino da álgebra. Vergnaud (1997) afirma que conceitos relacionados à álgebra não estão isolados, e sim vinculados às estruturas aditivas e multiplicativas, estruturas estas que são desenvolvidas durante a aprendizagem de trabalho com os números.

Para Lins e Gimenez (1997) a aritmética corresponde a relações quantitativas sobre coleções de objetos. Assim, na educação Matemática a aritmética é núcleo fundamental dos anos iniciais do Ensino Fundamental, trabalhando com a compreensão dos números e suas operações com objetivo de desenvolver o sentido do número na criança. Por sua vez, a álgebra trabalha com generalizações de modelos, consistindo em “um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente, envolvendo igualdade ou desigualdade” (idem, p. 137). Para os autores, a atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a álgebra.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), a aritmética compreende o estudo dos números, operações, sistemas numéricos, modo de utilizar os conceitos numéricos e desenvolver a capacidade de cálculo, usando linguagem oral, algoritmos e registros informais. O conhecimento algébrico desenvolve a capacidade de abstração e generalização e é uma ferramenta importante na resolução de problemas, em que o uso somente de estratégias pertencentes ao campo da aritmética se mostra insuficiente. (DA ROCHA FALCÃO, 1993).

A aritmética e a álgebra se diferenciam por possibilitar a representação prévia de situações, permitindo a exploração de relações matemáticas entre quantidades. Por exemplo: se vendo 5 ingressos meu lucro é de 25 reais e se vender x ingressos, quanto será o meu lucro?

Para Teles (2004) a diferença entre álgebra e aritmética na escola está nos objetivos de ensino. Enquanto que o objetivo da aritmética está no ensino dos números, operações e resolução de problemas, exigindo necessariamente uma resposta numérica, a álgebra é ensinada na escola com objetivo de generalizar os procedimentos aritméticos e trabalhar com manipulações de equações. Para a autora,

> (...) os estudos em educação matemática apresentam a aritmética tratando de números, operações e das propriedades destas, enquanto que a álgebra possui um aspecto de generalização da aritmética, tem função de ferramenta e destaca-se por causa da utilização da linguagem simbólica. (TELES, 2004, p. 10).

Alguns autores (LINS, GIMENEZ, 1997; USISKIN, 1995; FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993) discutem diversas concepções do ensino da álgebra relacionadas com a maneira de como a álgebra é ensinada na escola.

Lins e Gimenez (1997) diferenciam três correntes de ensino da álgebra nas escolas: letrista, aritmética generalizada e estruturalista. Já Usiskin (1995) difere o ensino da álgebra em concepções que correspondem aos diversos usos das variáveis, em: aritmética generalizada, estudo de procedimentos para resolver problemas, estudo de relações entre grandezas e estudo de estruturas matemáticas. Por fim, Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) caracterizam a álgebra em concepções históricas da educação algébrica, ajudando a entender a influência tradicional utilizada atualmente na escola. São elas: linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural, fundamentalista-analógica.

A seguir, delinearemos cada corrente e concepção, relacionando-as com objetivo de entender como esses teóricos pautam o ensino da álgebra e suas abordagens didáticas. O entendimento dessas correntes e concepções poderá explicar as características do ensino da álgebra descrita no começo deste trabalho.

Começaremos pela corrente letrista caracterizada por Lins e Gimenez (1997), na qual se baseia na concepção da álgebra exclusivamente para o ensino de manipulação de símbolos. Esta visão tem uma concepção limitada do que seja aprender e ensinar álgebra, utilizando-a apenas como matéria para treino e prática.

Partindo dessa reflexão do ensino da álgebra, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), caracterizam a educação algébrica na concepção *linguístico-pragmática*, utilizada durante o século XIX e até a metade do século XX. Nesta corrente o papel do ensino da álgebra era fornecer um instrumental técnico (superior ao da aritmética) para resolver equações. A aprendizagem da álgebra, dentro dessa concepção, tinha o objetivo de treinar o aluno a adquirir a capacidade de dominar de forma mecânica, as técnicas requeridas pelo transformismo algébrico (sintaxe).

> O currículo de ensino da álgebra, portanto, tinha como ponto de partida o cálculo literal (operações de adição, subtração, multiplicação/fatoração e divisão de expressões algébricas), o qual era desenvolvido através de muitos exercícios visando capacitar os alunos no manejo preciso dessas expressões algébricas. Só depois disso é que eram introduzidos problemas-tipo de aplicação algébrica. (id. ibid., 1993, p. 3).

Nesta concepção, predomina a ideia de que os alunos podem aprender álgebra a partir de aquisições mecânicas das técnicas requeridas pelo transformismo algébrico. Este transformismo é caracterizado pelo estudo das expressões algébricas, passando pelas operações com as mesmas expressões, chegando às equações e finalmente na resolução de problemas, nos quais, muitas vezes eram formulados para que pudessem ser aplicadas e utilizadas tais operações.

A corrente de Lins e Gimenez (1997) e a concepção de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) caracterizam as abordagens didáticas da álgebra como uma ciência aplicada à resolução de problemas, dando ênfase ao algorítmico com o objetivo de levar o aluno a realizar operações de maneira sistemática sem que eles compreendam os conceitos envolvidos na situação. Baseados nesta concepção, os livros didáticos priorizam as sequências técnicas (algoritmo) e prática de exercícios.

A segunda corrente discutida por Lins e Gimenez (1997), a qual se relaciona com a abordagem didática descrita por Usiskin (1995), é a definição da álgebra como *aritmética generalizada*. Neste sentido, ela parte de uma atividade para expressar modelos aritméticos procurando valorizar a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas. Segundo Usiskin (1995), esta concepção da álgebra é utilizada para traduzir padrões. Por exemplo: se todo número multiplicado por 0 (zero) é 0 (zero) podemos traduzir essa regra para todo número natural quando escrevemos $n \times 0 = 0$. No entanto, a utilização de generalizações é importante tanto para o estudo da aritmética com da álgebra. Na aritmética, por exemplo, aprendemos a propriedade comutativa em que $3 + 2$ é igual a $2 + 3$, na qual a ordem das parcelas não alteram o total. Em uma relação semelhante, podemos descrever que esta propriedade vale para qualquer dos números naturais, no qual podemos escrever que $a + b = b + a$. Neste caso, temos uma relação de igualdade associada à operação de adição. Isto acontece também para a multiplicação de números naturais onde $a \times b = b \times a$.

Mais do que essa propriedade, os alunos devem reconhecer as propriedades associativas ($a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$) e distributivas ($a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$) da multiplicação, relacionando as propriedades dos números com o pensamento algébrico. Dessa forma, é importante que saibamos identificar e trabalhar com estas relações e propriedades, entendendo sua generalização ainda nos anos iniciais, para se constituir uma base importante para o pensamento algébrico.

Dentro da terceira corrente do ensino da álgebra nas escolas discutida por Lins e Gimenez (1997), a álgebra é caracterizada na visão *estruturalista*, a qual se baseia em estudar as estruturas algébricas abstratas sem ligação com nenhuma atividade cotidiana. Nesta corrente, a atividade algébrica concentra-se nas propriedades estruturais para fundamentar e justificar as transformações. Esta corrente está relacionada à concepção *fundamentalista-estrutural* de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), utilizada nas décadas de 1970 e 1980 e teve por base o ensino da álgebra para interpretar o cálculo algébrico e o estudo das equações. Assim, teríamos no currículo o estudo das relações e funções algébricas.

Em consonância com essa concepção, Usiskin (1995) caracteriza a álgebra com *estudo de estruturas matemáticas*. Esta concepção trabalha com variáveis para manipular estruturas e equações algébricas. Um exemplo: quando se pede que fatore $ax + ay - bx - xy$ ou $3x^2 + 4ax - 132a^2$, nestes casos a concepção de variável não coincide com nenhuma das três concepções. Não se trata de nenhuma relação entre as grandezas representadas no problema. Não há qualquer equação a ser resolvida e também não há nenhum modelo aritmético. Nesta concepção, o aluno terá que manipular os símbolos como arbitrários, ou seja, não há necessidade de achar valores ou fazer relações com outros números, símbolos, letras ou fórmulas.

Usiskin (1995) ainda discute que a álgebra na escola se resume no e*studo de procedimentos para resolver problemas*, concepção da álgebra na qual se utilizam procedimentos para resolver e simplificar situações, utilizando incógnitas também de maneira mecânica sem entender o significado das propriedades da operação ou da manipulação simbólica. O autor exemplifica o seguinte problema: *Qual o número que adicionando 2 ao triplo de certo número, a soma é 17.* No ensino baseado em procedimentos para resolver problemas, o estudante teria primeiro que utilizar a linguagem algébrica para escrever a seguinte expressão: “$3x + 2 = 17$”. Após a descrição simbólica, ele precisa simplificar e resolver, manipulando os números e letras. Primeiro ele teria que isolar a incógnita passando o (+2) para o outro lado da equação, utilizando uma operação inversa, após o resultado fazer outra operação inversa dividindo o resultado por 3, achando o “certo número” igual a 5. Já um aluno que nunca estudou álgebra poderia resolver tal problema em situações contextualizadas ou significativas, utilizando cálculo mental, ou testar números que se aproximam do resultado ao multiplicá-lo por 3 e somá-lo por 2. Nessa concepção, o aluno precisa saber traduzir para a linguagem algébrica e também ter habilidades em manejar matematicamente essas equações para obter a solução. A letra aparece como algo a ser encontrado, “(...) isto é, para armar a equação, devemos raciocinar exatamente da maneira contrária à que empregaríamos para resolver o problema aritmeticamente”. (USISKIN, 1995, p. 15).

Ao caracterizar o conhecimento algébrico nas escolas, o autor classifica o ensino da álgebra em e*studo de relações entre grandezas,* concepção da álgebra que trabalha com a ideia de variável e a relação entre as grandezas de um problema. Neste caso, não se trabalha com letras para traduzir ou generalizar situações, e sim para trabalhar a partir de um modelo fundamentalmente algébrico com as variáveis de uma fórmula. Desta forma, quando escrevemos $A = b \times h$, entendemos como a fórmula da área de um retângulo e estamos expressando três grandezas. Neste caso, para cada valor de b, os valores de h (se h for constante) e A mudam. Outra situação é se pensarmos no valor de $\frac{1}{x}$, quando $x \neq 0$, se torna cada vez maior. Neste caso, não pedimos o valor de *x*, portanto *x* não é uma incógnita. A diferença dessa concepção com as outras é que as letras não possuem um valor único, nas situações não se pede que ache um valor de *x*, *y* ou *z*. Nesta concepção, o valor das letras muda de acordo com as outras grandezas, elas podem variar de valor. Assim, estamos trabalhando com o conceito de variável e de relação entre as partes da igualdade.

As concepções de Usiskin (1995) relacionam alguns modelos da atividade algébrica. A expressão $1 = n \times \frac{1}{n}$ **traduz e generaliza** a primeira concepção de álgebra (aritmética generalizada). Já a equação $n + 2 = 10$ nos leva a pensar a álgebra como meio para resolver problemas. Essa concepção serve para **resolver e simplificar** problemas (estudo de procedimentos). Quando olhamos para a fórmula da área do quadrado $A = l^2$, trabalhamos com a concepção da álgebra para **relacionar** e trabalhar com parâmetros de conceitos (relação entre grandeza). E quando utilizamos a álgebra para resolver equação ou função, como por exemplo, $y = kx$, entende-se que essa fórmula indica uma **relação ou estrutura** (estruturas matemáticas).

Outra concepção utilizada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.84), define o ensino da álgebra em *fundamentalista-analógica*, sintetizando as outras concepções e recuperando o valor simbólico da álgebra, com o objetivo de justificar as utilizações do transformismo algébrico. Segundo os autores, essa concepção tenta efetuar uma síntese das outras correntes, uma vez que procura recuperar o valor instrumental da álgebra (linguístico-pragmática) e manter o caráter fundamentalista (fundamentalista-estrutural).

> Essa nova forma de justificar baseia-se, na maioria dos casos, em recursos analógicos geométricos e, portanto, visuais. Nesse sentido, essa concepção acredita

> que uma “álgebra geométrica”, por tornar visível certas identidades algébricas, seria didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógico-simbólica. (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993, p.84).

As concepções utilizadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) mostram os conteúdos algébricos sempre utilizados para trabalhar conteúdos extremante abstratos sem significação. Pesquisas sobre álgebra nas escolas demonstram que ela tem sido usada somente para aplicar modelos e padrões abstratos, trabalhando com manipulações de símbolos e com uma linguagem excessivamente algébrica.

Segundo os autores, essas concepções sobre a álgebra dão mais ênfase à linguagem algébrica e manipulação de símbolos, números e letras do que a construção do pensamento das relações algébricas. Essas concepções

> (...) enfatizam o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas. Além disso, a álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo. (FIORENTINI, FERNANDES, CRISTÓVÃO, 2005, p. 4).

O trabalho de Lins e Gimenez (1997) propõe o desenvolvimento de uma quarta corrente, para o ensino da Álgebra. Os autores propõem a inovação da atividade algébrica, com o objetivo de desenvolver atividades de cunho investigativo, a partir de um contexto significativo.

Em busca de entender o desenvolvimento do conhecimento algébrico Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), também propõem uma quarta concepção de educação algébrica mediante exploração de situações de fatos tidos como aritméticos ou geométricos, que exijam a construção de generalizações, a representação de número generalizado ou de grandezas. Esta concepção está baseada no desenvolvimento de uma linguagem e pensamento algébrico através de tarefas e atividades exploratório-investigativas. Para os autores, a proposta desse trabalho é também fazer um caminho inverso, partindo de uma expressão algébrica, tida como pura ou simbólica, e fazer o aluno atribuir múltiplos sentidos e significados a ela. Dessa maneira, ele estaria dando um significado à expressão algébrica e trabalhando para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Segundo os autores, o desenvolvimento dessas atividades favorece o transformismo algébrico e ajudaria o aluno a fazer suas próprias manipulações.

O estudo de Usiskin (1995) esclarece como as concepções sobre a álgebra estabelecem o entendimento do trabalho com procedimentos algébricos. No entanto, a forma como essas atividades são trabalhadas no currículo escolar não favorece o trabalho com álgebra, causando grandes dificuldades no entendimento de suas relações. Além disso, a escola não cria situações que estabeleça significados para se trabalhar com símbolos. Toda a aprendizagem sobre álgebra, e até mesmo da aritmética, é realizada no foco de encontrar respostas certas. Desse modo, o aluno não aprende a trabalhar com as relações algébricas para entender o significado dos símbolos, apresentando grandes dificuldades na utilização dessas relações.

As concepções apresentadas por Usiskin (1995) mostram atividades extremamente manipulativas e muitas delas não apresentam significados reais para os alunos. No entanto, refletem sobre o estudo da álgebra em suas diferentes concepções, estabelecendo situações e ampliando competências para o desenvolvimento de conceitos algébricos.

A partir dessas concepções, a álgebra não deve ser uma consequência do aprendizado da aritmética. Ela precisa se relacionar com o ensino da aritmética. Não somente como uma aritmética generalizada, mas também como uma atividade significativa de diversas situações. Segundo Vergnaud (1997) os conceitos matemáticos são entendidos a partir de uma variedade de situações. Ainda é preciso aprofundar estudos que estabeleçam as diversas situações da álgebra, a partir das concepções algébricas, para que professores possam utilizá-las através de experiências com inúmeras situações dentro e fora da escola.

Conforme vimos, o ensino da álgebra é baseado em concepções tradicionais através de manipulações de uma linguagem simbólica. Consideramos que o ensino da álgebra deve ser pautado no desenvolvimento do *pensamento algébrico* (KAPUT, 1998) e na reflexão das situações e linguagens algébricas. É preciso trabalhar com uma linguagem algébrica voltada para o desenvolvimento de conceitos de modo que estes sejam elaborados antes da existência de uma linguagem simbólica.

Kaput (1998) identifica este conceito com conjecturas e argumentos que se estabelecem a partir de relações e generalizações sobre dados expressos por meio de linguagens cada vez mais formais, podendo ocorrer na Aritmética, na Geometria ou em qualquer conteúdo da Matemática ensinado nos primeiros anos de escolaridade.

O pensamento algébrico desenvolve-se antes mesmo da existência de uma linguagem algébrica simbólica. Para Vergnaud (1997, p. 5) o desenvolvimento do pensamento algébrico se caracteriza quando o aluno:

- estabelece relações e comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos;
- percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema;
- produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema e produz vários significados para uma mesma expressão numérica;
- interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas;
- transforma uma expressão aritmética em outra mais simples;
- desenvolve algum tipo de processo de generalização;
- percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias;
- desenvolve / cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.

A aprendizagem centrada no formalismo da linguagem algébrica dificulta o entendimento dos alunos e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Pesquisas apontam para a valorização das experiências dos alunos na utilização de outra linguagem que seja menos abstrata e mais significativa. Na próxima seção, discutiremos como as pesquisas contribuem para o estudo dessas concepções e nos ajudam a entender as dificuldades dos alunos e novas propostas de trabalho.

1.2 ESTUDOS RELACIONADOS ÀS ATIVIDADES ALGÉBRICAS

Neste tópico, abordaremos algumas pesquisas que investigaram dificuldades de alunos em desenvolver o pensamento algébrico, como também pesquisas sobre o desenvolvimento de estratégias que favorecem o entendimento de noções algébricas, utilizando material concreto e recursos digitais.

Com objetivo de investigar como os alunos utilizam a linguagem algébrica, Booth (1995) analisou erros cometidos por alunos que já estudaram álgebra e constatou que eles não sabem criar expressões formando respostas com símbolos matemáticos e não encontram um significado em respostas com letras. Por exemplo, em um problema como “some 2 a m” os alunos não consideram 2 + m uma resposta válida, mostrando dificuldades em aceitar uma expressão como resposta. Os alunos apresentam dificuldade de expressar e trabalhar com uma linguagem simbólica e continuam achando que apenas uma resposta numérica em atividades algébricas é correta.

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) pesquisaram como atividades em um ambiente de investigação matemática (IM) podem auxiliar no entendimento da álgebra, identificando indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos de alunos ao iniciarem o estudo deste tópico escolar. Essas atividades supõem o envolvimento dos alunos em situações que permitam a motivação em utilizar a linguagem simbólica. O trabalho foi realizado em duas classes do 6º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública e contou com a colaboração da professora durante a observação de uma tarefa investigativa, buscando romper com atividades tradicionais.

Uma das atividades foi encontrar significado para as mudanças de números, quando os alunos passavam por uma *máquina mágica* que faz transformações de números por outros números. Durante a atividade era explicado que a máquina não possuía um segredo único, isto é, existiam vários truques de transformação. Os alunos eram desafiados a encontrar essas transformações. Quando alguém escolhia o número 2, por exemplo, a máquina o transformou em 5. Durante o estudo eles encontraram diversas transformações como: [+ 3], [+ 4 – 1], [x 4 – 3], [: 2 + 4], [x 5 – 5], [x 7 – 9], [+ 23 : 5]. Após vários trabalhos de transformação de números, os estudantes foram desafiados a pensar o que aconteceria se pegassem a transformação [+ 3] com a entrada do número “x”. A maioria dos estudantes disse que, ao entrar o x, e somando 3, o resultado não pode ser determinado numericamente, pois não se sabe qual o valor de x. O estudo desenvolvido mostra que este é um contexto rico de mobilização e desenvolvimento do pensamento algébrico, apresentando indícios de que as investigações matemáticas representam um momento desafiador de aprendizagem.

Outros estudos têm analisado a utilização de materiais concretos como uma balança de dois pratos para facilitar o trabalho com álgebra tanto em situações cotidianas. (CARRAHER, CARRAHER, SCHILIEMANN, 2002) como em situações escolares (CASTRO-FILHO, LEITE, FREIRE, PASCHOAL, 2003).

As atividades com a balança de dois pratos podem simular situações de igualdade e desigualdade e têm como objetivo desenvolver conceitos relacionados à álgebra (igualdade, desigualdade, maior, menor) e auxiliar os alunos na passagem das operações aritméticas ao pensamento algébrico. (MEIRA, 1996; LESSA, 1996). Esses estudos ressaltaram a importância da balança de dois pratos na construção de significados em equações e entendimento de manipulações simbólicas. Além disso, os estudantes, ao manipularem os pesos na balança de dois pratos, resolvem situações problemas, buscando estratégias e não apenas de forma mecânica.

Diante dessas pesquisas, percebemos a importância de criar diversas situações para que os alunos se envolvam em atividades que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais. Apesar de encontrarmos diversas pesquisas nessa área, ainda são restritas na literatura atividades ligadas ao pensamento algébrico, utilizando tecnologia.

Com o intuito de tornar a aprendizagem da álgebra mais significativa, Castro-Filho, Leite, Freire e Paschoal (2003) investigaram como alunos de doze anos, ao manipularem um objeto de aprendizagem (OA) denominado Balança Interativa, o qual simula uma balança de dois pratos. O estudo aponta que os alunos estão ampliando a compreensão do significado relacional trabalhando de maneira significativa com as partes de uma equação. Os pesquisadores também analisaram como os estudantes desenvolveram um raciocínio que será importante durante a manipulação simbólica quando se aprende álgebra. Ao interagir com as atividades do OA, os alunos criaram estratégias de resolução, compreendendo conceitos de igualdade, desigualdade e compreenderam o sentido da manipulação de símbolos em uma equação.

Leite (2006) analisou como as trocas dialógicas entre professor e alunos do 8° ano de uma escola pública de Fortaleza favorecem a compreensão de conceitos algébricos durante a utilização deste mesmo OA. A autora investigou como os diálogos ocorridos em sala de aula ampliam conceitos e compartilhamento de significados das expressões algébricas. Durante seus estudos observou quebras de diálogo, mas os participantes retornavam ao tópico que estava sendo estudado e representavam um momento significativo para contextualizar o conceito estudado. A pesquisa também apontou a importância da mediação do professor em criar situações ricas de ensino e em intervir durante essas situações.

> O professor engajado na resolução da tarefa com os alunos foi parceria fundamental na superação de dificuldades conceituais e de uso. Com seu acompanhamento, o professor teve participação direta na atividade, intervindo de acordo com as necessidades de cada aluno. (LEITE, 2006, p. 136).

Ao final do trabalho, os estudantes entenderam o sentido relacional da álgebra, compreenderam a manipulação de equações e inequações, e aprimoraram conceitos algébricos, como incógnita, variável, maior do quê e menor do quê. Esse estudo mostrou como o trabalho com álgebra pode ser realizado de forma contextualizada durante a utilização de objetos de aprendizagem. Além disso, ressalta a importância da intervenção do professor durante a utilização de recursos digitais no espaço educacional, e consequentemente de sua formação para o uso desses recursos.

Castro-Filho, Macedo, Leite e Freire (2005) utilizaram outro OA chamado *Cartas Interativas* para trabalhar com quantidades negativas e suas relações com a álgebra. O objetivo do desenvolvimento desses recursos digitais foi fazer que os alunos encontrem relações em atividades significativas com os conteúdos da escola.

Pesquisas também mostram como a utilização da tecnologia favorece a criação de ambientes estimulando o professor a conhecer novas atividades que podem ser incorporadas em sua prática pedagógica, desafiando os estudantes nas atividades de ensino e aprendizagem e propiciando a aquisição de novos conhecimentos.

Macedo (2009) investigou uma sequência didática. Nesta, estudantes foram desafiados a refletir sobre suas ações e encorajados a desenvolver estratégias próprias do pensamento algébrico durante a resolução de equações do 1º grau. A pesquisa trabalhou com a resolução de equações algébricas propostas no OA Balança Interativa, comparando com a resolução de problemas algébricos com uso de lápis e papel. Os testes estatísticos indicaram que os estudantes do grupo experimental desenvolvem estratégias de resolução para estruturas algébricas, quando comparadas com o grupo de controle.

Entretanto, tais pesquisas não focaram a utilização desses ambientes nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e nem o trabalho didático do professor ao trabalhar com outros tipos de material. Sentimos, portanto, a necessidade de aprofundar os estudos e principalmente ampliar e dar significado às atividades que favoreçam os alunos a construírem relações algébricas.

Propor atividades algébricas nos anos iniciais do Ensino Fundamental é algo novo visto que, por muito tempo, conforme o currículo escolar, a aritmética é ensinada nos anos iniciais para que posteriormente os estudantes possam aprender conceitos algébricos. Essa divisão está diretamente ligada ao estudo de Piaget e Inhelder (1982), no qual as crianças que estão no estágio das operações concretas são capazes somente de operar concretamente sobre as situações aritméticas, geralmente vistas como as mais fáceis, porque enfatiza o trabalho com números, as quatro operações e tabuada. Após desenvolverem o pensamento operatório formal elas estão aptas a aprender um conteúdo abstrato, no caso, a álgebra. Segundo Lins e Gimenez (1997) essa ideia de divisão curricular causa dificuldades, tanto por parte de quem ensina como por parte de quem aprende.

Autores como Carraher, Carraher e Schliemann (2002), Schiliemann, Carraher, Pendexter e Brizuela (1998), Lins e Gimenez (1997) e Da Rocha Falcão (1993), Spinillo (1993), Kaput (1994), já pesquisaram atividades ligadas ao campo conceitual algébrico, e concluíram que estas poderiam ser introduzidas já nos anos iniciais para que os alunos não sintam tantas dificuldades ao estudar álgebra pela primeira vez.

Esses estudos discutem que a quebra curricular entre esses dois conteúdos causam dificuldades de compreensão nos alunos quando são iniciados aos conceitos algébricos e apontam a necessidade da aritmética e álgebra darem significado uma à outra. Dessa forma, as atividades dos anos iniciais precisam ser elaboradas para ajudar no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Na próxima seção, definiremos o que é o pensamento algébrico e discutiremos os estudos realizados nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esses estudos mostram como é possível realizar um trabalho que desenvolva conceitos algébricos em crianças mesmo antes de começar a aprender formalmente álgebra na escola, como também, reflexões de como podemos fazer atividades que integrem tanto o pensamento aritmético como o algébrico.

1.3 A ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS

A discussão sobre álgebra nos anos iniciais, ou álgebra inicial, é fruto de diversas pesquisas que mostram como a aritmética e a álgebra poderiam ser trabalhadas de forma a desenvolver uma linguagem matemática ao longo do Ensino Fundamental. Essa discussão apresenta que é preciso um novo entendimento da educação matemática: por um lado, precisamos repensar os processos envolvidos na educação aritmética; por outro lado, é preciso uma ampliação dos assuntos que envolvem a atividade algébrica na sala de aula. Esta ampliação é baseada no desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental através de atividades e concepções que não sejam relacionados à memorização de regras e manipulação simbólica. Ao longo desse capítulo, veremos como é possível trabalhar com atividades que explorem conceitos algébricos e como elas trazem significado para o aluno.

O ensino da álgebra nos anos iniciais deve ser elaborado e planejado por meio de situações da vida cotidiana, evitando um simbolismo exagerado. É preciso partir de situações que os alunos possam pensar, interpretar e representar os dados do problema, evitando que a aprendizagem ocorra de forma mecânica, estimulando os alunos a refletir sobre um problema e não somente sobre quais operações devem executar para resolvê-lo.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) explicam que a iniciação algébrica tem uma implicação pedagógica na qual a escola precisa compreender o sentido da aprendizagem matemática e repensar a iniciação a álgebra:

> Uma primeira implicação pedagógica de caráter geral refere-se ao momento de iniciação ao pensamento algébrico no currículo escolar. Se, como mostramos esse tipo de pensamento não prescinde de uma linguagem estritamente simbólico-formal para sua manifestação, não há razão para sustentar uma iniciação relativamente tardia ao ensino-aprendizagem da álgebra. (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993, p. 88).

Para Kaput e Blanton (2001), o trabalho com álgebra nas escolas deve “discutir com mais profundidade dois conteúdos da matemática, aritmética e álgebra, já que esses conteúdos têm sido trabalhados inadequadamente por séculos”. (KAPUT, BLANTON, 2001, p. 02).

A discussão tratada por Kaput e Blanton (2001) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) define como a álgebra pode ser trabalhada nos anos iniciais. As atividades precisam envolver situações que levem os alunos a desenvolver o entendimento de igualdade, estabelecendo relações e comparações entre quantidades conhecidas e desconhecidas, como também, tentar expressar alguns significados para uma expressão numérica e perceber regularidades.

Os estudos nesta área mostram como crianças mais novas podem utilizar ideias algébricas como notação simbólica, reta numérica, tabelas e gráficos para representar o que normalmente é omitido nos currículos do Ensino Fundamental. As pesquisas em álgebra inicial sinalizam a preocupação em desenvolver nas crianças um pensamento que dará suporte ao entendimento das relações algébricas mais complexas nos anos finais do Ensino Fundamental.

Carraher e Earnest (2003) perceberam em seus estudos que crianças mais novas se beneficiam e desenvolvem o raciocínio matemático por meio de ricos contextos e pensamentos sobre as relações entre quantidades na tentativa de resolver problemas verbais.

A proposta não é adiantar o ensino da álgebra, mas propor situações ligadas ao cotidiano das crianças e baseadas no pensamento aditivo e multiplicativo, pensamento este, ligado a aritmética:

> A ideia não é simplesmente fazer que o aluno trabalhe com atividades mais cedo, isto é, ao considerá-las já algébricas. Os conteúdos precisam ser sutilmente transformados para um caráter algébrico. Em certa medida, essa transformação exige o simbolismo algébrico. Mesmo nos primeiros anos, a notação algébrica pode desempenhar um papel de suporte na aprendizagem da matemática. Notação simbólica, funções, tabelas e gráficos são ferramentas poderosas para crianças compreender e expressar relações funcionais entre uma ampla variedade de situações problema. (CARRAHER, SCHLIEMANN, BRIZUELA, EARNEST, 2006, p. 4).

As atividades algébricas nos anos iniciais precisam ser compreendidas como uma ferramenta para resolução de problemas e construída na escola através de uma cultura do pensamento algébrico como forma de representar e relacionar quantidades. As atividades escolares precisam fazer que as crianças entendam o significado dos símbolos matemáticos, como também utilizem uma linguagem matemática, ou seja, saibam operar com os símbolos matemáticos para expressar algum problema do cotidiano.

A Educação Algébrica deve estimular o trabalho com situações-problema e fazer um trabalho

> (...) reflexivo e analítico sobre situações-problema de naturezas diversas, isto é, sobre o modo como conduzimos e expressamos o nosso pensamento visando à resolução de tais situações, que possibilitará a construção de uma linguagem

> simbólica que seja significativa para o estudante. (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993, p. 90).

Podemos relacionar a discussão acima com álgebra inicial, quando pensamos na integração da álgebra em situações que estimulem o entendimento da linguagem simbólica de forma contextualizada que não seja mecânica e nem apenas baseada em regras.

Vergnaud (1990, 1997) afirma que conceitos relacionados à álgebra não são independentes, pois eles estão atrelados às estruturas aditivas e multiplicativas, desenvolvidas no ensino da aritmética. Segundo Vergnaud (1997) a compreensão dos estudantes nas séries elementares está longe de ser satisfatória e causa dificuldades, quando começam a aprender álgebra no ensino secundário. A compreensão que os alunos desenvolvem na álgebra é influenciada pela compreensão da aritmética, como também a aprendizagem de conceitos algébricos pode ajudar na compreensão da aritmética.

Partindo desse argumento, para que o pensamento algébrico e aritmético se complete, professores precisam perceber as dificuldades dos alunos sobre os conceitos e operações algébricas e aritméticas, e entender como podem operar esses conceitos em diferentes situações, envolvendo as atividades aritméticas e algébricas concomitantemente. Assim, as atividades não precisam ser rigidamente separadas em operações com números, atividade estritamente aritmética e nem em operações que trabalham com símbolos, ou seja, atividade tradicionalmente algébrica.

O trabalho com álgebra inicial consiste em produzir atividades que os alunos entrem em contato com conceitos algébricos diferente da forma tradicional que a escola vem trabalhando. Na literatura, apesar de significativos, poucos trabalhos definem o conceito de álgebra inicial ou elaboram atividades que possam ser trabalhadas nas escolas, propondo, assim, mudanças significativas no âmbito escolar. (BRIZUELA, 2004; BRIZUEL, LARA-ROTH, 2001; CARRAHER, BRIZUELA, SCHILIEMANN, 2000; SCHILIEMANN, GROODROW, LARA-ROTH, 2001).

Schiliemann, Goodrow e Lara-Roth (2003. p. 2) discutem a criação de oportunidades para que os alunos entrem em contato com álgebra já nos anos iniciais.

> As crianças precisam ser apresentadas a sistemas simbólicos, mas também sentir a necessidade de criá-los. Partindo desse objetivo, os alunos precisam de

> oportunidades de começar com as suas próprias representações intuitivas e gradualmente adotar representações convencionais como ferramentas para representar e compreender as relações matemáticas.

A escola precisa procurar outros contextos e elaborar atividades significativas para os alunos compreenderem e relacionarem atividades numéricas e simbólicas, encontrando significado nessas atividades e utilizar diversas linguagens matemáticas.

A escola deve fornecer atividades com significados ligados à vida diária dos alunos para construir ligações com a Matemática mais abstrata ensinada nas escolas. Segundo Schiliemann e Carraher (2002), antes mesmo de entrar para a escola, as crianças desenvolvem determinadas noções de proporção e probabilidade. No entanto, quando chegam à escola precisam aprender como aplicar essas noções de maneira sistemática e fora de seu contexto social.

Em outros estudos, Carraher, Carraher, e Schiliemann (2002) mostram que crianças e pessoas com pouca experiência em contextos escolares resolvem problemas de aritmética e proporção, quando são relacionados ao seu cotidiano. Entretanto, quando são submetidos a teste formais parecidos com os da escola, apresentam dificuldades de resolução e muitos deles não conseguem resolver por não entenderem a lógica do problema.

As crianças precisam começar a construir um raciocínio que não seja aquele somente ligado às operações aritméticas, mas elaborem relações e representações de quantidades conhecidas e desconhecidas. As atividades precisam trabalhar com relações entre grandezas e propiciar ao estudante o contato com operações que não sejam estritamente numéricas.

A escola necessita adaptar seu currículo para promover habilidades de pensamento e de representação, em que se procure o trabalho com números e operações algébricas transversalmente. O desenvolvimento do pensamento algébrico deve ser desenvolvido juntamente com o sentido do número, como também é necessário que os alunos tenham experiências concretas para construir um significado do pensamento algébrico. Essas experiências envolvem o entendimento de processos essenciais para a compreensão algébrica, como a procura de padrões e regularidades, o estabelecimento de relações, transformações de expressão aritmética para algébricas e entendimento do significado de símbolos.

Investigações sobre aprendizagem da álgebra demonstram como estudantes de anos iniciais conseguem encontrar significados em atividades algébricas. Schliemann, Goodrow, & Lara-Roth (2001) propõem atividades de desenvolvimento das noções algébricas em alunos de oito anos. Os autores mostram como os alunos utilizam gráficos para resolver situações propostas, estabelecendo-lhes significados.

Uma dessas atividades consistiu em explorar problemas que envolvem estruturas aditivas e multiplicativas. Depois de um engajamento dos alunos com as situações-problema, os investigadores levaram os alunos a um ginásio e pediu que as crianças desenhassem duas linhas paralelas no chão com números, variando de 0 a 12 com a mesma distância entre as escalas. Depois dessa construção, discutiu com os alunos o seguinte problema: "Karen tem duas vezes o tanto de dólares que Franklin". Durante a atividade os alunos decidiram a linha representando o dinheiro de Karen e a outra linha o dinheiro de Franklin. As crianças foram chamadas para representar nas retas a quantidade de Karen e de Franklin. Assim, a criança na linha de Karen estaria sempre em um número que fosse duas vezes o valor da posição ocupada pela outra criança na linha de Franklin. Mais tarde, as duas linhas foram posicionadas perpendicularmente, encontrando-se como na origem de x e y em um gráfico. Novamente as crianças representaram a relação entre o dinheiro de Karen e de Franklin nas linhas perpendiculares. As posições no gráfico foram nomeadas pelas crianças da seguinte maneira: (0.0), (1.2), (2.4), (3.6). As crianças permaneciam no gráfico mesmo com outras situações sendo propostas. Ao final das situações, elas tiveram acesso a uma corda para ligar todas as crianças do gráfico, formando uma reta. No início da atividade, algumas erravam as posições, mas eram ajudadas por outras crianças da classe.

Os autores apontam que depois dessa atividade, as crianças facilmente resolviam problemas e representavam gráficos na sala de aula. Perceberam em uma entrevista como as crianças se tornaram mais familiares com as convenções dos gráficos e como pontos posicionados em uma mesma reta de um gráfico representam relações iguais.

Os pesquisadores concluíram que situações propostas e construídas pelos próprios alunos, possibilitam o estabelecimento de um sentido diferente daquele construído em uma aula tradicional de Matemática, cujo objetivo é somente transmitir os conteúdos e aplicar as regras dos livros didáticos.

É fundamental que as atividades propostas tenham o objetivo de motivar os estudantes a incorporar na escola, e fora dela, o uso de tabelas, retas numéricas e gráficos em diversas situações. Carraher e Earnest (2003) preocuparam-se em trabalhar também a notação simbólica em situações de jogos e brincadeiras com crianças de nove anos de uma escola pública nos Estados Unidos.

> Nós achamos que nossos alunos geralmente utilizam notação algébrica para descrever funções que foram identificadas através da reflexão de ricos contextos. No entanto, vimos poucas provas de que essa notação exerce uma influência sobre o curso de seu pensamento. Eles pareciam estar simplesmente usando a notação para registrar o que tinha realizado. (CARRAHER, EARNEST, 2003, p. 02).

A atividade proposta pelos autores refere-se a um jogo chamado *Escolha a regra*. O objetivo é pedir aos estudantes que escolham valores correspondentes a um domínio de uma função (entrada de valores), e façam correspondências com o valor de contradomínio (saída de valores) de uma função. Durante as atividades os estudantes descobrem que cada entrada deverá resultar em um valor de saída e que a função é modificada a cada valor mudado pelo domínio. Por exemplo: os estudantes escolhiam como regra a expressão n x 7 – 3, devendo dar um valor para *n* e descobrir qual ponto no gráfico ficaria o valor da expressão. Ao longo das atividades os estudantes eram questionados sobre o que aconteceria se atribuísse outro valor para *n*. Os estudantes eram sempre questionados sobre os valores e refletiam o porquê da mudança no gráfico. Segundo os autores, "crianças mais novas gostaram de participar dessas atividades, mesmo que ao longo do caminho não tenham sido preparadas por professores e nem discutido sobre funções lineares" (CARRAHER, EARNEST, 2003, p. 02). Ao final do estudo, os autores verificaram que as atividades baseadas em funções e modelos algébricos tornam mais significativa a compreensão da escrita algébrica e o entendimento do trabalho com funções.

Schliemann, Carraher, Brizuela e Jones (1998) têm investigado atividades de apoio ao pensamento algébrico e como as crianças usam esse pensamento para resolver problemas. Durante a pesquisa, cada aluno foi entrevistado individualmente para resolver problemas verbais. Para cada problema, o entrevistador narrou ou pediu ao aluno a leitura de uma história curta na qual, inicialmente, as relações tinham a mesma quantidade de objetos e durante a história as quantidades eram adicionadas a outras, podendo a relação entre as quantidades continuar igual ou ficar diferente. Durante a atividade, os alunos podiam resolver o problema através da notação escrita ou usar outras estratégias de resolução. Veremos abaixo um exemplo de problema usado pelos pesquisadores que possuem quantidades iguais nos dois lados do membro da equação:

> Brian e Tim adoram comer chocolate. Um dia, Brian levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na loja da escola. Tim levou 5 chocolates, comprou então mais 5 na loja da escola e ganhou mais 2 de um outro amigo. No recreio, Tim comeu 2 de seus chocolates e Brian comeu também 2 de seus chocolates. Você pensa de que após o recreio Tim tem a mesma quantidade de chocolates que Brian? Ou, você acha que um tem mais chocolates do que o outro? (SCHLIEMANN, CARRAHER, BRIZUELA, JONES, 1998, p. 18).

Para resolver esse problema, os alunos inicialmente utilizam a notação escrita 10+2=5+5+2, depois a notação 10 + 2 (-2) = 5 + 5 + 2 (-2) e percebem que no final da situação Brian e Tim possuem a mesma quantidade de chocolates. Nesse estudo, nem todos os alunos utilizaram a notação acima, no entanto utilizaram outras formas de representação, podendo ser escritas ou mentais. Muitas vezes desenhavam a quantidade de chocolates no papel e faziam as transformações, para que, no final da situação, comparasse a quantidade de chocolates que Tim e Brian possuíam. Segundo os autores, diferentes formas de resolução são importantes, pois os alunos entendem a situação e a resolvem corretamente.

Depois de resolver alguns problemas envolvendo quantidades como a situação mostrada acima, os alunos foram instigados a resolver situações-problema que não tinham quantidades, como no exemplo, a seguir:

> Bob e Andrew foram pegar conchas do mar na praia cedo da manhã. Bob pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. Andrew encontrou o mesmo número de conchas que Bob, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Bob encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de Andrew. Desta vez cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Bob tem o mesmo número de conchas que Andrew? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro? (SCHLIEMANN, CARRAHER, BRIZUELA, JONES, 1998, p. 19).

Diferente do problema anterior, os alunos não encontram implícitas na situação-problema as quantidades, porém, precisam entender as relações existentes sem necessariamente ter números.

Os resultados indicam que a maioria dos alunos entende as relações existentes nos problemas, aparecendo ou não as quantidades. Nos problemas com quantidades explícitas, preferiam escrever cálculo ao invés de raciocinar sobre as transformações ocorridas no problema. Já para resolver os problemas com quantidades implícitas, alguns alunos tiveram dificuldades, argumentando que não podiam resolver problemas sem números. No entanto, quando eram instigadas pelo entrevistador, elaboravam estratégias de representação como o uso de letras ou ícones para resolver o problema. Essa tendência de procurarem o número para resolver um problema pode ser uma consequência do treinamento aritmético que focaliza principalmente procedimentos escritos.

Essas pesquisas nos mostram que os alunos mais novos criam suas representações e notações diferentes daquelas impostas pela escola. Quando os alunos tentavam resolver os problemas em que não aparecia a quantidade, faziam o cálculo mental e explicavam suas dificuldades em resolver no papel, pois não tinha número. Assim, é necessário pesquisadores e professores explorarem cada vez mais atividades relacionadas com a organização social e material de práticas culturais e prestarem mais atenção às representações criadas pelas crianças.

> Isso implica que a análise da aprendizagem da matemática deve levar em conta não apenas as estratégias que os indivíduos elaboram durante a resolução de problemas, mas a própria atividade em que se engajam e colaborativamente constroem. (MEIRA, 1996, p. 171).

Pinto (2001) investigou como crianças de oito anos resolvem estruturas algébricas. Essas atividades foram baseadas na sequência didática elaborada por Araújo, Brito Lima, Da Rocha Falcão, Lessa, Oliveira e Leitão, (2000) com o propósito de construir significados em álgebra nos anos iniciais (transformações, representação icônica e simbólica, equivalência, incógnita e relação entre quantidades). Durante a aplicação da sequência didática, a autora observou dificuldades das crianças em entender conceitos de transformação e relação entre duas quantidades iguais, mas a intervenção da pesquisadora feita em forma de perguntas durante a interação das duplas os ajudou a superar as dificuldades encontradas durante a resolução da sequência.

A pesquisa de Freire (2007) utilizou cinco atividades relacionadas ao pensamento algébrico com objetivo de analisar o desenvolvimento do pensamento de conceitos relacionados à álgebra em alunos de anos iniciais. A pesquisa envolveu oito alunos da escola pública com idades entre 08 (oito) e 10 (dez) anos e refletiu sobre o ensino da álgebra nos anos iniciais. Os estudantes entraram em contado com as primeiras noções algébricas através de atividades em ambientes computacionais e materiais concretos. As atividades colaboraram na construção de conceitos algébricos e estimularam estudantes a fazer relações entre quantidades e entender o sentido da igualdade, como também propiciaram oportunidades dos estudantes explicitarem seu pensamento, justificando como fizeram e encontraram as relações entre as quantidades. O conjunto de atividades proporcionou o desenvolvimento de diversas estruturas mentais que levam ao entendimento de relações matemáticas. (NUNES, BRYANT, 1997).

O trabalho descrito permite levantar alguns aspectos desejados no desenvolvimento e utilização de recursos digitais, particularmente para o ensino de matemática. Primeiramente, os recursos digitais devem possibilitar ganhos em relação a materiais manipulativos ou tradicionais (como lápis, papel, quadro), por possibilitar conexões entre diferentes formas de representação de conceitos, sejam representações mais intuitivas (como a ação física ou a linguagem verbal) ou outras mais abstratas como as equações matemáticas. O estabelecimento de conexões entre múltiplas formas de representações tem sido apontado como fator de auxílio no desenvolvimento de conceitos matemáticos. (CONFREY, 1992). Outro aspecto a ser considerado em recursos digitais é a possibilidade de conexões tanto com o conhecimento matemático como em situações do mundo real.

No entanto, a utilização desses materiais não garantirá a aprendizagem se eles não criarem oportunidades de os alunos refletirem sobre o conceito matemático que está sendo trabalhado.

Diante dessas pesquisas, percebemos a importância de criar diversas situações para favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais. Apesar de encontrarmos diversas pesquisas nessa área, não temos ainda na literatura, atividades que trabalhem com pensamento algébrico, utilizando ambientes computacionais e outros tipos de materiais. Além disso, com exceção do trabalho de LEITE (2006), as demais pesquisas com álgebra, não enfocam o conhecimento do professor.

Para que essas atividades sejam efetivamente utilizadas nas práticas educativas, professores precisam conhecer o trabalho com as atividades de aritmética e álgebra, como também, utilizar diversos materiais que dêem suporte para o desenvolvimento de conceitos.

No próximo capítulo, discutiremos a prática do professor em uma perspectiva de integração, na qual ele possa desenvolver conhecimentos através de diálogos e atividades que promovam habilidades e estratégias de aprendizagem.

2 CONHECIMENTO MATEMÁTICO DE PROFESSORES NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

O mundo atual está a exigir outros conteúdos, naturalmente outras metodologias, para que se atinjam os objetivos maiores de criatividade e cidadania plena.
(D'AMBRÓSIO, 2001, p. 20).

O que precisa conhecer um professor? Qual o conhecimento que ele possui de um determinado conteúdo? Que conhecimentos são importantes para que ele possa ensinar uma determinada matéria? As questões sobre o conhecimento do professor têm sido debatidas e estudadas ao longo de décadas para se tentar compreender as formas como este organiza e estrutura o pensamento.

Muitas pesquisas vêm estudando a base de conhecimento profissional docente a partir de diferentes perspectivas teórico-metodológicas. Alguns estudos focalizam o estudo do conhecimento dos professores, procurando estabelecer relações entre os conhecimentos construídos ao longo da vida profissional e aqueles adquiridos em cursos de formação inicial ou continuada; outros consideram o conhecimento do professor como reflexões de sua ação como docente e outros, ainda, como fruto de contextos sobre o conhecimento que o professor tem do aluno, do currículo e de teorias pedagógicas.

Neste capítulo, discutiremos como as mudanças na sociedade e das teorias educacionais interferem e direcionam o papel do professor na sociedade. Levantaremos as questões do conhecimento dos professores e como se caracteriza seu conhecimento sobre a Matemática.

Na primeira parte do capítulo, serão apresentadas algumas contribuições de L. S. Shulman (1986) sobre a compreensão de processos de aprendizagem e entendimento do conhecimento dos professores. A escolha por esse autor se justifica pelo fato de que foi um dos primeiros estudos a enfatizar a necessidade de pesquisas para estudar a compreensão dos professores sobre o conteúdo específico que ensinam. Além disso, foi um estudo que influenciou nas últimas décadas trabalhos e pesquisas na área de educação matemática. Esses trabalhos serão apontados na segunda parte do capítulo no qual mostra como o conhecimento dos professores de Matemática contribui para o ensino e aprendizagem de conceitos.

2.1 CONHECIMENTO DOS PROFESSORES SEGUNDO L.S. SHULMAN

Definir o conhecimento dos professores é algo complexo, primeiramente porque é um fenômeno histórico que acompanha mudanças econômicas, políticas, culturais e sociais, e depois, porque é produto de trabalho de pessoas que projetam a sociedade que se quer formar. Uma das mudanças em nossa sociedade é a quantidade e velocidade das informações disseminadas nos dias de hoje. Informações que, mais do que ser selecionadas, precisam ser entendidas, organizadas e utilizadas de maneira a serem transformadas em conhecimento.

Situando o professor dentro desse contexto, é exigido que ele seja um sujeito que utilize diversos recursos, crie situações para um pensar crítico, utilize a criatividade para desenvolver outras atividades e conduzir momentos de aprendizagem. Exige-se, também, que o professor transforme as informações em conhecimentos para ele e para seus alunos. Conhecimento este que precisamos compreender como um processo de aprendizagem e de desenvolvimento pessoal e profissional no qual professores pensem em suas experiências e atividades profissionais. Além disso, o estudo do conhecimento dos professores de informar sua ação prática e da forma como este se desenvolve ao longo da sua carreira e dentro da disciplina que ele ensina.

Segundo Mizukami (2004), as perspectivas teóricas de pesquisa sobre o conhecimento dos professores e sua formação resultaram em importantes aspectos que definiram, na década de 70, caminhos para a consolidação de programas de formação com o objetivo de entender como os processos de comportamento dos professores se relacionavam com as variações no desempenho dos alunos. Segundo a autora, essa perspectiva resultava em estudos experimentais investigando a relação entre as condutas dos professores e o rendimento ou atitudes dos alunos. Buscavam, também, encontrar, a partir de generalizações, ações adequadas que pudessem causar impactos positivos na aprendizagem dos alunos para se configurar alguns programas de formação docente.

> Tornou evidente que o comportamento do professor poderia ser relacionado ao desempenho do aluno e que a escola poderia fazer diferença na aprendizagem dos alunos, até então entendido como quase que exclusivamente determinado por classe social e outras características familiares e da vida atual e pregressa das crianças. (MIZUKAMI, 2004, p. 35).

Essas perspectivas teóricas foram importantes para compreender os processos de pensamento, crenças e teorias educativas que configuraram as práticas dos professores em sala de aula. Posteriormente a esses estudos, é adotado outro paradigma de investigação, o interpretativo, "(....) que difere daquele das pesquisas processo-produto não apenas em suas bases disciplinares, mas também em amplitude, considerando desde micro-análises de interações verbais até a macro-análise de escolas ou comunidades inteiras." (MIZUKAMI, 2004, p. 36).

Dentro dessa perspectiva de investigação sobre o conhecimento dos professores, o trabalho de Shulman (1986) nos traz importantes contribuições para o entendimento do conhecimento docente, sendo uma das mais importantes referências de trabalhos que buscam entender a especificidade da construção do conhecimento.

Shulman (1986) afirma que as pesquisas realizadas simplificam a complexidade da sala de aula e ignoram um aspecto central da aprendizagem que é o conteúdo específico da disciplina que professores lecionam. Para ele, ainda falta discutir questões sobre o conteúdo das lições ensinadas, pois perguntas do tipo: "De onde vem a explicação do professor? Como os professores decidem o que vão ensinar? Como representar o conhecimento, como fazer questões sobre o conteúdo e como lidar com as dificuldades dos alunos?" (SHULMAN, 1986, p. 8), já foram discutidas em trabalhos focados em descobrir questões pedagógicas e didáticas dos professores. Para Shulman (1986) a questão central das pesquisas sobre o conhecimento dos professores, além de se preocupar com questões pedagógicas, devem investigar como os professores lidam com o conteúdo que se pretende ensinar.

> Como já começaram a sondar a complexidade do entendimento do professor e transmissão de conhecimento do conteúdo, há necessidade de desenvolver um quadro teórico mais coerente. Quais são os domínios e categorias de conhecimento do conteúdo e como se relacionam com o conhecimento pedagógico geral? Quais são as formas de domínios e categorias de conhecimento representado na mente dos professores? Quais são as melhores formas de aquisição e desenvolvimento de tal conhecimento? (SHULMAN, 1986, p. 9).

Segundo o autor, o conhecimento dos professores serve de base para definir a formação e atuação desse profissional com objetivo de promover aprendizagens dos alunos.

Para Schulman (1986) cada disciplina tem uma especificidade própria que justifica a necessidade de se estudar a natureza do conhecimento do professor, considerando que o conhecimento pode ser dividido em três categorias: o *conhecimento do conteúdo,* o *conhecimento pedagógico do conteúdo* e o *conhecimento do currículo*.

O conhecimento do conteúdo refere-se à compreensão e organização do conteúdo pelo professor, como também o entendimento dos processos de sua produção, compreensão dos fatos, conceitos e procedimentos de uma área específica do conhecimento. Esse tipo de conhecimento exige que o professor tenha uma compreensão sobre a forma de ensinar aos alunos várias representações e contextos do conteúdo que leciona. Essa categoria define que o conhecimento do conteúdo deve se referir às diferentes áreas desse conteúdo e nas formas de discutir sua estruturação. Para pensar corretamente sobre o conhecimento do conteúdo requer ir além do conhecimento dos fatos ou conceitos de um domínio:

> O professor não deve apenas ser capaz de definir para os estudantes as verdades aceitas em um conteúdo. Eles também precisam ser capaz de explicar porque uma dada proposição pode ser justificada, porque vale a pena ser conhecida, como se relaciona com outras proposições, dentro e fora da disciplina, tanto na teoria quanto na prática. (SHULMAN, 1986, p.9).

Mesmo que seja importante que professores conheçam a especificidade de um conteúdo, somente isto, não é suficiente para garantir a aprendizagem. Os professores devem encontrar formas de comunicar conhecimentos para seus alunos, ajudando-os a entender este conteúdo através do conhecimento pedagógico. O *conhecimento pedagógico do conteúdo* é de natureza prática, desenvolvido pelo professor através da experiência do trabalho docente. É a maneira como o professor formula e apresenta o conteúdo, é caracterizado pelo saber do professor em conhecer as dificuldades e competências dos alunos por meio de uso de materiais pedagógicos ou atitudes que encorajam o aprendizado. Este conhecimento vai além do conhecimento sobre o conteúdo por si só, é a dimensão do conhecimento didático para ensinar.

> É uma forma particular de conhecimento do conteúdo, que incorpora os aspectos de conteúdo mais pertinente para ser ensinado. São as formas mais úteis de representação das ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações através de uma palavra, de formas de representação e formulação sobre o assunto para torná-lo compreensível para os outros. Uma vez

> que não existem uma única forma de representação, o professor deve ter em mãos um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, alguns dos quais derivam da investigação, enquanto outros se originam na sabedoria da prática. (SHULMAN, 1986, p.9).

O conhecimento pedagógico do conteúdo também inclui um entendimento do que é feito para ensinar um tópico específico. Os professores precisam saber a maneira como vão ensinar conteúdos específicos, sendo eles fáceis ou difíceis para os alunos. Este conhecimento é importante para que o professor perceba como os alunos de diferentes idades entendem os conceitos, e como eles estão aprendendo. Precisam ainda conhecer as melhores estratégias para que os alunos superem suas dúvidas.

A última categoria do conhecimento proposto por Shulman (1986) é o *conhecimento do currículo* que se define pela capacidade de conhecer e articular o conteúdo com os objetivos e materiais de apoio para auxiliar na aprendizagem. Este conhecimento inclui o conhecimento de programas e materiais projetados para ensinar um assunto específico.

> O currículo está representado pela ampla gama de programas concebidos para ensinar assuntos específicos e tópicos em um determinado nível, pela variedade de materiais didáticos disponíveis em relação a esses programas e o conjunto de características que servem tanto como indicações e contra-indicações de um currículo ou programas específico. (SHULMAN, 1986, p.10).

Para Schulman (1986) o professor deve ser capaz de transformar seu conhecimento em algo interessante e útil para seus alunos. O conhecimento sobre o conteúdo (em nosso caso, a Matemática) precisa ser compreendido para que possa ser transformado a fim de ser ensinado. Essa transformação faz parte do conhecimento didático e requer que o professor conheça a melhor maneira de apresentar o conteúdo, escolhendo metáforas, materiais, exemplos e analogias para que o aluno consiga estabelecer relações com este conteúdo.

Schulman (1986) ainda explica que o professor deve saber trabalhar com esses conhecimentos, desenvolvendo habilidades que incluam diversos modos de ensinar, organizar e gerir sua sala de aula, como também conhecer diversos materiais didáticos disponíveis para o ensino do conteúdo programático. As categorias de Shulman têm recebido muita atenção da literatura no ensino de Matemática e se tornaram o padrão para discutir os conhecimentos dos professores dessa área. No próximo tópico, apresentaremos como esses estudos se configuraram.

2.2 O CONHECIMENTO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Após as colocações de Schulman um grande grupo de pesquisas começaram a investigar o conhecimento do professor, buscando construir um repertório dos processos de pensamento desse profissional. (BALL, 1991; FENNEMA, FRANKE, 1992; FRANKE, FENNEMA, CARPENTER, 1997; CASTRO-FILHO, 2000; BALL, HILL, BASS, 2005; BALL, THAMES, PHELPS 2008; BALL, LEWIS, THAMES, 2008). Essas pesquisas chamam a atenção para a importância das ações dos professores antes, durante e depois de cada aula e trazem estudos que nos ajudam a compreender o conhecimento dos professores de matemática.

Ball (1991) defende a ideia de que o conhecimento do professor de matemática é modificado pelas suas concepções e crenças sobre o ensino e aprendizagem, sobre seus alunos, sobre a escola e sala de aula, moldando a forma como cada professor ensina Matemática para seus alunos. Para a autora o conhecimento matemático envolve três dimensões. A primeira delas é o que a autora chama de conhecimento substantivo, o qual reúne um conjunto de conhecimentos, crenças e sentimentos sobre o assunto. Segundo a autora:

> Este conhecimento inclui o conhecimento proposicional e processuais de matemática - isto é, entendimentos de temas específicos (por exemplo, frações e trigonometria), procedimentos (por exemplo, a divisão e fatoração de equações quadráticas) e conceitos (por exemplo, quadriláteros e infinito), e as relações entre eles (temas, procedimentos e conceitos). (BALL, 1991, p. 6).

A segunda dimensão é o conhecimento sobre Matemática. Isto inclui o entendimento sobre a natureza do conhecimento na disciplina, por exemplo, de onde vem, como ele muda e como a verdade é estabelecida. Ball explica que o conhecimento sobre Matemática inclui o que significa *saber* e *fazer* Matemática. Para a autora, entender as regras da matemática, bem como o que é arbitrário ou convencional *versus* o que é necessário ou lógico, é importante para o ensino dessa matéria e para propor discussões em sala de aula.

A terceira dimensão do conhecimento matemático envolve a forma como o professor comunica as ideias matemáticas nas tarefas que apresenta aos seus alunos, os tipos de incertezas que surgem em suas aulas e a maneira pelas quais eles respondem a essas incertezas, bem como os motivos que os professores despertam nos alunos sobre a aprendizagem de tal conhecimento.

Ball (1991) ainda investigou como três professores apresentavam seus conhecimentos sobre multiplicação, analisando como cada um compreende esse conteúdo e justifica seu ensino. Os professores investigados neste estudo eram enfáticos quanto à importância de ensinar os alunos a seguirem os passos corretamente. Tentavam pensar em formas de "encaixar" os passos na cabeça dos alunos, em vez de tentar descobrir as ideias subjacentes. Em seus resultados, encontrou que os professores possuem um conhecimento tácito sobre multiplicação, ou seja, somente conseguem falar sobre os processos da multiplicação de forma mecânica. Para a autora, o conhecimento tácito, seja qual for o seu papel na atividade matemática, é insuficiente para ensinar. Esse conhecimento isolado não ajuda o entendimento e está baseado no “faça isso” para resolver algum procedimento matemático.

> A nível dos conhecimentos necessários para o ensino envolve a capacidade de falar sobre matemática, e não apenas descrever os passos para seguir um algoritmo, mas também sobre as decisões tomadas e os significados e as razões de determinadas relações ou procedimentos (BALL, 1991, p. 16).

A autora ainda conclui que os professores precisam desenvolver um conhecimento explícito sobre o conteúdo o que envolve muito mais do que declarações ou fórmulas matemáticas, mas sim, o desenvolvimento de uma linguagem que vai além da representação matemática.

> O conhecimento explícito envolve razões e as relações: é a capacidade de explicar por que, assim como a capacidade de relacionar ideias ou procedimentos específicos para outras pessoas dentro da matemática. Isto é mais do que "consciência metacognitiva" dos processos utilizados na resolução de um problema de

> matemática ou à realização de um processo e inclui a capacidade de falar sobre conceitos e procedimentos (BALL, 1991, 16).

Para Ball (1991) o conhecimento explícito do professor deve articular-se com a visão que este tem sobre o conteúdo matemático e a natureza da disciplina, formando aquilo que influenciará a forma pela qual decide apresentar certo conteúdo para seus alunos.

Além de discutir sobre a clareza de conhecimento dos professores sobre conceitos e procedimentos da multiplicação, Ball (1991) levantou alguns aspectos de como as ideias dos professores influenciam suas representações, entendimento e ensino de Matemática. Para os professores, a aprendizagem desse conteúdo significa: (1) Fazer Matemática é seguir os procedimentos, ou seja, passo a passo para se chegar às respostas; (2) saber matemática significa saber "como fazer"; (3) a matemática é em grande parte uma coleção arbitrária de fatos e regras; (4) o principal motivo para aprender Matemática é para avançar para o próximo nível na escola; (5) o objetivo principal para a aprendizagem matemática é ser capaz de calcular os preços na loja e (6) a maioria das ideias matemáticas têm pouca ou nenhuma relação com os objetos reais e, portanto, pode ser representado apenas simbolicamente.

A autora conclui sua discussão, afirmando que pesquisas ainda devem estudar o conhecimento do professor sobre um determinado conceito em diversos contextos e a partir de vários pontos de vista. As dimensões do conhecimento propostas por Ball nos faz afirmar que o professor de Matemática precisa articular seu saber e desenvolver uma linguagem apropriada para que seus alunos possam desenvolver e aprender a linguagem matemática, pois “aquilo que é tacitamente aceito não pode ser explicitamente ensinado”. (SZTAJN, 2002, p. 21).

Em um levantamento sobre a revisão de literatura de trabalhos de educação matemática, Sztajn (2002) afirma que as pesquisas de uma maneira geral, indicam que os professores precisam conhecer como os alunos aprendem, suas concepções sobre os conceitos que estão sendo ensinados e as possíveis reações durante essa aprendizagem. Dessa maneira, o professor precisa, além de conhecer o conteúdo e suas particularidades, pensar a partir da perspectiva do aluno, fazendo que este reflita sobre o conteúdo proposto.

Para tanto, entendendo o saber como parte de uma equação que liga a atuação do professor ao desempenho dos alunos, Ball, Thames e Phelps (2008), Ball, Lewis e Thames (2008), Ball, Hill e Bass (2005), mostram a dificuldade dos professores em ensinar

Matemática, mesmo no nível da escola primária, o que revela ser essa uma tarefa exigente. Esses estudos também apontam que o conhecimento dos professores de Matemática é um fator imprescindível para que os alunos aprendam sobre um determinado conteúdo. Em seus registros de sala de aula no ensino elementar, perceberam que professores constantemente fazem reflexões sobre a aprendizagem dos alunos.

No entanto, outros fatores são importantes para que a aprendizagem ocorra: é preciso que o professor esteja apto a conduzir os procedimentos para ensinar determinado conteúdo. Os professores devem também desenvolver recursos que explorem conhecimentos matemáticos e competências para um trabalho efetivo em sala de aula.

Os autores investigaram como os professores influenciavam no raciocínio dos alunos do ensino elementar para resolver problemas de adição e subtração como, por exemplo, 307 – 168. Durante a resolução do algoritmo, os alunos sentiam dificuldades em diminuir a casa da unidade, mas a intervenção do professor com questionamentos, por exemplo, “Podemos diminuir um número maior de um número menor?” estaria contribuindo para ajudar os alunos a descobrir suas próprias estratégias para resolver o algoritmo sem ter que aprender o passo-a-passo de resolução.

Os trabalhos de Ball, Thames e Phelps (2008) mostram razões para justificar a importância de descrever o conhecimento dos professores. Eles explicam que as categorias do conhecimento propostas por Shulman (1986) são úteis para entender as relações entre professores e o desempenho de seus alunos e verificar se existem aspectos do conhecimento do conteúdo que influenciam o desempenho do aluno mais do que outros. No entanto, ainda precisamos investigar se e como diferentes abordagens para a formação de professores possuem efeitos sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo e como eles estão relacionados com aspectos específicos da prática pedagógica. Ball, Thames e Phelps (2008) também destacam que as pesquisas precisam discutir como o conhecimento pedagógico do conteúdo pode subsidiar a formulação de materiais de apoio para professores, bem como na formação docente.

Investigações realizadas por Fennema e Franke (1992) discutem como os conhecimentos dos professores são desenvolvidos a partir de um programa de formação para ensinar um determinado conteúdo de Matemática. Os autores observaram como os professores realizam uma atividade que leva o aluno a refletir e aprender sobre os conceitos matemáticos. Em seus estudos, os pesquisadores encontraram ligações entre o conhecimento dos professores de Matemática e a aprendizagem dos alunos, mostrando como o desenvolvimento conceitual é influenciado positivamente na sua aprendizagem. Esses professores são mais integrados e tendem a ensinar a matemática de forma mais dinâmica e variada, incentivando seus alunos a fazerem observações e a refletirem sobre o conhecimento matemático, do que aqueles cujo conhecimento é mais limitado. Explicaram ainda que, para se ensinar um conteúdo específico, é preciso ter: primeiro, o conhecimento matemático, pois esse conhecimento gera riqueza nas discussões em sala de aula, influenciando a organização do ambiente de estudo, contribuindo para levar o aluno a se envolver em atividades matemáticas; segundo, o conhecimento das representações matemáticas, que estaria ligado à capacidade do professor de traduzir conteúdos complexos para que os alunos entendam as relações como também se refere a problemas organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e capacidades dos alunos e adaptados para as atividades de ensino; e, terceiro, o conhecimento sobre como os alunos pensam, que envolve aspectos gerais do desenvolvimento humano e maneiras de como um determinado conhecimento é construído pelos alunos.

Franke, Fennema e Carpenter (1997) discutem o papel da investigação por parte dos professores em curso de formação continuada e as alterações na prática pedagógica, quando envolvem seus alunos em situações matemáticas. Em suas pesquisas, mostraram diferentes perspectivas de como seus conhecimentos, crenças e práticas em sala de aula são modificadas, quando participam de formações de professores. Os autores fizeram uma formação com 21 professores da escola primaria com objetivo de ajudá-los a entender o pensamento matemático dos alunos e fazer um levantamento das crenças e práticas dos professores em sala de aula. Uma das principais crenças apresentadas pelos professores foi a de que as crianças aprendem somente ouvindo, ou seja, é preciso que os professores primeiramente expliquem sobre o conteúdo para que possam entendê-lo. No entanto, ao longo da formação entendiam que os alunos podem desenvolver algum conhecimento matemático através de interações com um ambiente de resolução de problemas. Isso nos mostra como a formação continuada pode favorecer o desenvolvimento de novos conhecimentos e mudanças de sua prática.

Em suas pesquisas, os estudiosos também concluíram que, de um modo geral, os professores (especialmente os dos níveis mais elementares) sabem pouca Matemática e precisam conhecer diversas situações do mundo real e materiais concretos para representar as ideias abstratas da Matemática para o desenvolvimento da compreensão do conceito e se preocupar em entender a origem das respostas dos alunos.

Essas pesquisas (BALL, 1991; FENNEMA, FRANKE, 1992; FRANKE, FENNEMA, CARPENTER, 1997; BALL, THAMES, PHELPS 2008; BALL, LEWIS, THAMES, 2008) definem a natureza do conhecimento, fazendo-nos compreender que o conhecimento dos professores de Matemática e sua influência no ensino e aprendizagem é algo complexo devido à dinâmica de como o conhecimento se organiza. Pesquisar a natureza do conhecimento significa mais do que investigar um número de cursos de Matemática que o professor tem feito ou o conhecimento procedimental da Matemática que eles possuem (FENNEMA, FRANKE, 1992). O conhecimento matemático do professor inclui o conhecimento pedagógico, como ele compreende os processos subjacentes ao conceito matemático, seu conhecimento sobre a relação entre diferentes aspectos do conhecimento matemático (BALL, LEWIS, THAMES, 2008), sendo capaz de interpretar esse conhecimento para ensinar e entender o pensamento dos estudantes (BALL, 1991), bem como também ser capaz de avaliar o conhecimento dos estudantes. Esses trabalhos nos fazem perceber que o conhecimento dos professores não pode ser separado do conteúdo que está sendo investigado (SHULMAN, 1987), de como o conteúdo pode ser representado pelos estudantes, do conhecimento que os professores tem sobre seus alunos e das crenças dos professores. (FENNEMA, FRANKE, 1992).

Embora essas pesquisas ajudem a entender os componentes do conhecimento dos professores que podem ser feitos de diferentes maneiras durante as práticas em sala de aula e aprendizagem, elas definem resultados de pesquisas norte-americanas. Assim, precisamos investigar o conhecimento dos professores brasileiros. Cada componente do conhecimento de Shulman (1986) ou discussões sobre como o professor pode tornar um conhecimento matemático compreensível ao aluno (BALL, 1991) requer mais estudos em termos de definição, parâmetros e relação com outros componentes de um conteúdo matemático.

Mas há trabalhos ainda que discutam como e o quê o professor de matemática aprende em programas de formação ligados à sua prática. Lima (2008) investigou o conhecimento matemático de alunos em formação inicial de cursos de licenciatura de Matemática quando este re-significa o conceito de função diante de uma aprendizagem significativa baseada nos pressupostos teóricos de Ausubel. Para a autora, o processo de re-significação conceitual modifica os conceitos prévios sobre o conceito de função sem a necessidade de trabalhar de forma mecânica, estimula a reflexão e a análise de suas elaborações mentais, possibilitando um processo contínuo de autoavaliação. Em seus estudos, a formação favoreceu que professores considerassem os aspectos didáticos e teóricos do conteúdo matemático, compreendessem a dinâmica do processo, envolvendo um trabalho em grupo e atividades que proporcionassem uma interação com as práticas do professor.

A prática de formação e re-significação do conceito de função favoreceu dentro dos aspectos estudados por Shulman (1986) um estudo sobre a eficácia do professor em relação a um conteúdo específico. Assim, a pesquisa de Lima (2008) confirmou que um professor, além do conteúdo específico, precisa também conhecer aspectos pedagógicos para que os alunos construam novos conceitos.

Pesquisas realizadas por Bittar e Vasconcelos (2008a, 2008b, 2007) investigaram o impacto do trabalho colaborativo na prática docente em Matemática, mostrando que essas ações formativas possibilitam a análise de materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da matemática como, também, a inserção da tecnologia na prática pedagógica do professor. Os autores mostraram como o professor é desafiado a conhecer novas atividades, contribuindo para mudanças em sua prática. As ações dos professores concentram-se na tentativa de lecionar de uma maneira diferente do que ele geralmente faz na sala de aula. A pesquisa conclui que a utilização da tecnologia favorece o desenvolvimento e o planejamento de atividades em diferentes contextos que não sejam a utilização de quadro, giz, lápis e papel. A pesquisa aponta também que a formação de professores contribui para o desenvolvimento de um amplo conhecimento sobre um conteúdo específico de Matemática, conhecimento didático e ideias matemáticas para diversas situações de ensino. Essas pesquisas mostram que o desenvolvimento profissional do professor pode trazer ganhos nos diferentes conhecimentos que são importantes para a prática dos professores.

Castro-filho (1999) também mostrou como a utilização de softwares educativos ou objetos de aprendizagem pode trazer múltiplas representações, simulações e transformações dinâmicas para que os professores desenvolvam seu conhecimento matemático. O autor discutiu o desenvolvimento do conceito de função e taxa de variação por professores do Ensino Médio durante a utilização de dois softwares chamados *Conta Bancária* (CONFREY, MALONEY, 1998) e *Funcion Probe II* (CONFREY, MALONEY, 1998), e um objeto de aprendizagem chamado de *Detector de movimento*. O estudo descreve o desenvolvimento de conhecimento dos professores sobre o conteúdo durante a implantação de uma unidade reformada desde gráficos qualitativos até funções lineares e equações. O autor discute que a tecnologia utilizada permitiu aos professores questionarem e refinarem seu próprio conhecimento sobre função. Essa mudança aconteceu não apenas nos momentos de formação, mas também durante a implementação da tecnologia com os alunos. Por último, aponta a importância dos professores discutirem entre si, questões pedagógicas e conceituais.

A partir do exposto, compreendemos que as discussões sobre o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática na perspectiva de alargamento de seus conhecimentos (do conteúdo, pedagógico ou curricular), podem beneficiar os professores na sua prática em sala de aula, na ampliação de conceitos fundamentais para o ensino e aprendizagem, fazendo que eles possam envolver seus alunos em atividades significativas e elaboração de conceitos.

Os conhecimentos encontrados neste trabalho estão associados à necessidade de reflexão sobre os conhecimentos matemáticos dos professores em função do contexto educativo, percebendo que o conhecimento dos professores é muito importante para a aprendizagem dos alunos. No entanto, ainda precisamos investigar como professores trabalham com diversos materiais para a aprendizagem de conteúdos específicos e como se apropriam de atividades e conteúdos que não são explorados rotineiramente em currículos escolares, como a álgebra nos anos iniciais com suporte de materiais, atividades e recursos digitais.

No capítulo anterior, explanamos as características do pensamento algébrico e as pesquisas realizadas com os alunos, mostrando que é possível trabalhar nos anos iniciais atividades de despertem e trabalhem de maneira significativa aspectos deste pensamento. Neste capítulo discutimos pesquisa na perspectiva do desenvolvimento profissional dos professores, discutindo a importância de ampliar diversos conhecimentos profissionais tanto em aspectos específicos de um conteúdo, didáticos e pedagógicos e a necessidade de realizar pesquisas que divulguem o desenvolvimento desses diversos conhecimentos por professores. Este trabalho propõe-se, então, trazer à tona discussões de como professores dos anos iniciais desenvolvem o conhecimento de um conteúdo específico que é o conhecimento algébrico.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE INVESTIGAÇÃO

Pesquisas científicas não podem ser vistas somente como um conjunto de técnicas e atividades a serem seguidas de uma forma predeterminada. É preciso compreender a pesquisa como fundamental na construção de um conhecimento que apoiará discussões futuras para a sociedade como um todo.

O papel da pesquisa em educação não é diferente, pois nela que se legitima o conhecimento científico com objetivo de esclarecer dúvidas, propor novas ideias e elaborar novas teorias. Nesse entendimento o pesquisador precisa ter consciência da pesquisa e conhecer substancialmente o objeto de estudo.

Neste sentido, propomos investigar o desenvolvimento de conceitos algébricos por professoras nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, foi necessário fazer encontros para que as professoras polivalentes discutissem juntamente à pesquisadora como era possível trabalhar com esses conceitos na sala de aula, utilizando recursos digitais e materiais manipulativos.

Neste capítulo abordaremos os procedimentos metodológicos, descrevendo o paradigma da pesquisa científica. Em seguida, explicaremos o local e sujeitos da pesquisa, bem como as atividades que foram utilizadas durante os encontros com as professoras. Logo após, descreveremos o desenvolvimento da pesquisa que se deu em três etapas: 1) o momento de encontro com as professoras, o qual chamaremos de oficina de formação; 2) o planejamento das atividades em sala de aula e 3) a prática de uma professora. Por fim, apontaremos os instrumentos para coleta e a definição para análise dos dados.

3.1 PARADIGMA DA PESQUISA

Podemos definir um paradigma como um conjunto de acontecimentos científicos que geram modelos em busca de orientar o desenvolvimento de pesquisas e soluções para os problemas de uma determinada época.

Um paradigma de pesquisa gera um conjunto de aspectos a ser estudado que envolve três elementos: a ontologia, a epistemologia e a metodologia. (DENZIN, LINCOLN, 1998). A pesquisa científica começa a partir do levantamento de questões fundamentais sobre a natureza da realidade dentro de uma teoria (ontologia), que esmiuça perguntas (epistemologia) sobre o mundo e a relação entre o investigador e o objeto de estudo para ser examinado (metodologia, análise) de maneiras específicas. (GUBA, LINCOLN, 1998).

Em busca de definir a metodologia da pesquisa de acordo com o quadro teórico desenvolvido, empregaremos o paradigma interpretativo para analisar o objeto de estudo. Esse paradigma relaciona o conhecimento dentro de uma época histórica, construído através do tempo pela atividade humana, portanto, é mutável e deve ser compreendido a partir do contexto em que ocorrem. A epistemologia do paradigma interpretativo é a compreensão do sujeito sobre o objeto e do pesquisador sobre o contexto pesquisado. Neste sentido, o paradigma interpretativo, não percebe o pesquisador neutro em relação a seu objeto, pois supõe sua imersão dentro do objeto de investigação com objetivos de entender a realidade dentro de um contexto cultural e histórico. Os aspectos metodológicos do paradigma interpretativo é o indutivo, empregando técnicas qualitativas baseado em um caso específico a fim de explorá-lo em sua complexidade. (SCHWANDT, 1998).

Escolhemos utilizar o paradigma interpretativo por se tratar de um estudo exploratório, rico em descrições de situações e acontecimentos. A escolha do método partiu da necessidade de intervir com propostas de novas atividades que envolvam o conteúdo algébrico nos anos iniciais, analisando e contribuindo com o conhecimento e prática dos professores. No próximo tópico, apresentaremos dados mais específicos dessa investigação.

3.2 LOCAL DA PESQUISA E SUJEITOS

O trabalho foi realizado com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública de Fortaleza. A escola foi escolhida pela disponibilidade e interesse em trabalhar com o tema proposto e por possuir um laboratório de informática, pois durante o estudo utilizam-se atividades com computadores.

Antes da realização da pesquisa, propusemos à escola encontros em que as professoras discutissem juntamente com a pesquisadora o contexto de ensino e aprendizagem de conceitos algébricos nos anos iniciais, familiarizando-se com as atividades manipulativas e recursos digitais. A proposta inicial era fazer uma formação continuada com vinte horas de duração, mas não foi possível devido à dinâmica e atividades da escola que ajustava o calendário escolar devido a uma greve no decorrente ano. Em busca de compreender a dinâmica da escola ajustamos os encontros e conseguimos somente 08 horas para o momento da formação. Por esse motivo, chamaremos esse encontro com as professoras de oficina de formação, na qual discutimos as propostas para um ensino de conceitos algébricos nos anos iniciais.

Participaram da oficina 11 (onze) professoras, sendo 09 (nove) professoras do Ensino Fundamental e 02 (duas) professoras da educação infantil. No primeiro dia, as professoras mostraram-se muito interessadas em fazer uma formação mais ampla para ter uma certificação. Explicamos para as docentes que seria preciso fazer um curso de no mínimo 40 horas para conseguirmos aprovar a certificação. A direção e coordenação concordaram que as professoras não teriam tempo para realizar um curso com essa carga horária na escola, já estavam com seus horários semanais lotados, assim como aos sábados, que eram exclusivos às atividades escolares como reposição de aulas, planejamento e atividades festivas da escola.

Em conjunto com as professoras, propomos uma parte do curso presencial e outra à distância; no entanto, algumas professoras (pelos menos sete delas) discordaram em fazer o curso na modalidade semipresencial e outras explicaram que não queriam fazer por diversos motivos, dentre eles: chegam às suas casas enfadadas e com dor de cabeça; “não tem paciência de ver letras pequenas”; não possuem computador ou internet em casa; o computador é exclusivamente dos filhos; esqueceu o endereço de email e não gosta de entrar na Internet e outros.

As oito horas de encontro para a oficina foram distribuídas em três dias de acordo com a disponibilidade da escola (espaço físico e horário das professoras) e com o calendário de atividades escolares. Os dias da oficina foram distribuídos da seguinte maneira: dia 02 de outubro (duração de 04 horas), dia 15 de outubro (duração 02 horas) e por fim dia 17 de novembro (duração de 02 horas). Os conteúdos da oficina foram organizados com objetivos de fazer que as professoras: (1) identificassem as funções da educação algébrica no ensino básico; (2) diferenciassem o pensamento aritmético do algébrico; (3) refletissem como esses conteúdos apóiam um ao outro; (4) refletissem a forma mecânica do ensino e como isso pode prejudicar o pensamento aritmético e consequentemente o algébrico; (4) refletissem sobre o ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Após este momento, discutimos as atividades, realizamos um acompanhamento e planejamento com uma professora sobre as atividades que ela queria realizar em sala de aula. Para compreender como elas foram desenvolvidas, observamos a atitude e o conhecimento da professora na realização das atividades. No tópico seguinte, apresentaremos as atividades desempenhadas nos encontros com a professora e como elas se relacionam com o pensamento algébrico.

3.3 ATIVIDADES

As atividades planejadas para serem aplicadas durante a pesquisa serão explicadas a seguir.

(1) Situações problemas;
(2) Objeto de aprendizagem (OA) *Balança Interativa*;
(3) Objeto de aprendizagem (OA) *Feira dos pesos*;
(4) Balança de dois pratos para encontrar o valor do peso de objetos com formatos diferentes;
(5) Balança de dois pratos para comparar potes de formatos iguais com pesos diferentes.

A primeira atividade foi fundamentada no estudo de Schliemann, Carraher, Brizuela, Jones (1998) e as outras foram elaboradas a partir dos estudos de Freire (2007).

A primeira atividade é composta por oito situações-problema dividida em dois grupos. O primeiro grupo consta de quatro questões baseadas em problemas nas quais as quantidades das transformações aparecem no problema (ver o primeiro até o quarto problema, anexo D). Já o segundo grupo é composto de quatro questões nas quais as quantidades das transformações do problema não são descritas na situação (ver o quinto até oitavo problema, anexo D). O objetivo principal dessa atividade é examinar a relação de uma equação ao adicionarmos ou subtrairmos quantidades iguais para cada lado de uma equação. No entanto, se as quantidades adicionadas ou subtraídas foram diferentes, encontraremos uma inequação, ou seja, os membros da equação serão diferentes.

A primeira questão envolve uma subtração de duas quantidades iguais; ao final, as duas pessoas envolvidas na situação problema terão a mesma quantidade. Na segunda questão temos uma adição de duas quantidades diferentes; logo, ao final da situação problema as quantidades serão diferentes. Na terceira questão encontramos novamente uma subtração, no entanto, retirando duas quantidades diferentes. Na quarta questão encontramos novamente uma adição, no entanto, acrescentando quantidades iguais. No segundo grupo de questão (da quinta a oitava) as quantidades desaparecem, fazendo que o aluno pense de forma mais intuitiva.

Durante a aplicação dessa atividade foi observado como a professora criava relações algébricas com seus alunos ao diminuir ou aumentar quantidades em dois membros de uma equação. As outras atividades consistiram em utilizar os objetos de aprendizagem (OA) *Balança Interativa*[2] e *Feira dos Pesos*[3] cujo objetivo é trabalhar com conceitos algébricos, como *maior, menor, igualdade, desigualdade* e *comparação entre valores desconhecidos*. Esses OA foram criados e implementados pelo Grupo de Pesquisa e Produção em Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem (PROATIVA[4]).

Os Objetos de Aprendizagem (OA) são recursos digitais para uso educacional disponíveis na *Internet* e podem ajudar na elaboração de conceitos por parte dos alunos e na prática docente (DIRENE, CARVALHO, CASTILHO, MARCZAL et al, 2009; WILEY, 2000; LTSC, 2000). Os OA fornecem aos alunos um contexto rico de aprendizagem, mas para isso é necessário que o professor tenha o conhecimento do uso dessas tecnologias em sala de aula, sabendo das suas possibilidades ao planejar. (KENSKI, 2007). As atividades, utilizando ambientes computacionais, foram agrupadas neste estudo, pois em outras pesquisas não encontramos como professores trabalham com álgebra inicial durante a utilização desses ambientes.

O OA *Balança Interativa* (figura 01) baseia-se na manipulação simulada de uma balança de dois pratos na forma de um jogo, o qual consiste em descobrir os valores desconhecidos que são associados às letras. Na tela do programa além de simular uma balança de dois pratos, temos também desenhos de pesos com letras que representam os pesos

---

[2] http://www.vdl.ufc.br/ativa/programas/balanca.html
[3] http://www.proativa.vdl.ufc.br/oa/feiradosPesos/feiradosPesos.html
[4] http://www.proativa.vdl.ufc.br/

desconhecidos e desenhos de pesos com números que representam os pesos conhecidos. O usuário deverá utilizar o OA para pesar os pesos conhecidos e desconhecidos, podendo encontrar seus valores através do equilíbrio ou desequilíbrio na balança. A balança fica em equilíbrio quando os pesos dos dois lados forem iguais, o desequilíbrio acontece quando um dos pratos da balança fica mais pesado do que outro. Uma descrição mais completa do OA *Balança Interativa* pode ser encontrada no Apêndice A.

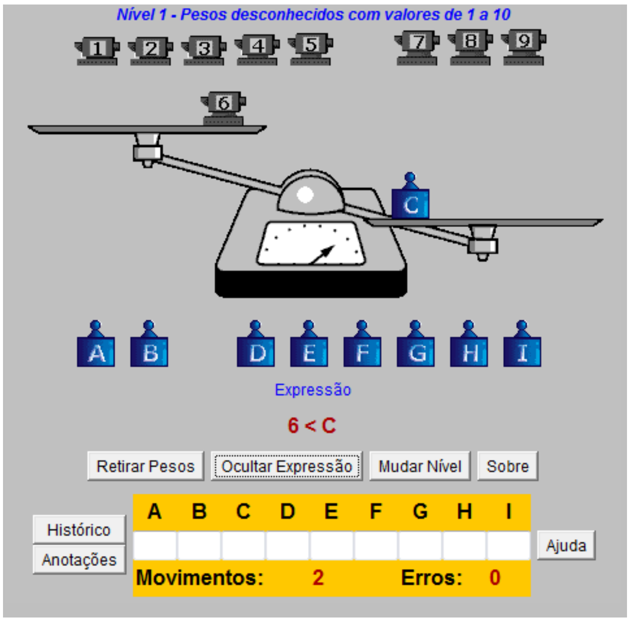


Figura 1 – Tela do OA Balança Interativa no primeiro nível

Assim como na *Balança Interativa*, o OA *Feira dos Pesos* (figura 02) simula uma balança de dois pratos. O OA possui cinco níveis e tem como objetivo fazer comparações entre os pesos nos quais os alunos não conhecem seus valores, colocando na ordem do menor para o maior de acordo com suas manipulações. Por exemplo, se o peso A é maior do que B e maior do que C, e C é menor do que B e menor do que A, a ordem dos pesos será: C, B e A.

No primeiro nível o OA oferece três pesos desconhecidos, todos do mesmo tamanho, mas com peso diferente para que o usuário possa classificar do maior para o menor ou do menor para o maior. No segundo, terceiro e quarto nível temos que ordenar do maior para o menor ou vice-versa quatro, cinco, seis pesos todos com o mesmo tamanho. No último nível o OA continua a oferecer seis pesos, no entanto, eles possuem formatos e pesos diferentes.

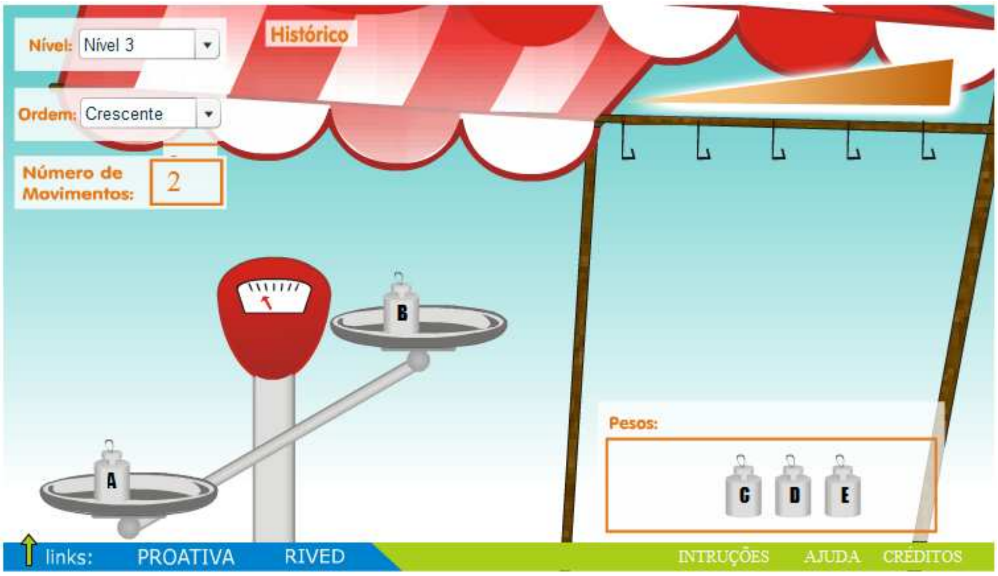


Figura 2 – Tela do OA Feira dos Pesos no terceiro nível

O OA conta o número de movimentos realizados com o objetivo de observar a quantidade de manipulações que o aluno fez para descobrir a sequência dos pesos desconhecidos. Esse OA não conta a quantidade de erros, pois o objetivo principal é saber se, ao final das manipulações, os alunos conseguem descobrir a real sequência entre os pesos desconhecidos.

Duas outras atividades fizeram parte deste estudo. Para isso, utilizamos uma balança de dois pratos idêntica àquelas que eram utilizadas em feiras (figura 03). Na primeira delas, os professores deveriam descobrir quanto pesam diferentes potes, utilizando os pesos que a balança oferece (50g, 100g, 200g, 500g, 1 kg e 2kg).

Figura 3 – Balança de dois pratos e pesos com valores conhecidos

Os pesos dos potes que os professores tentaram descobrir foram de: 150g, 300g, 350g, 400g, 450g e 900g (figura 04). Esses valores foram distribuídos dessa forma para que, durante as atividades, o usuário possa colocar mais de um peso em um lado da balança e, em algumas vezes, como no caso de 400g, 450g e 900g coloquem pesos nos dois pratos da balança. Por exemplo, para descobrir o peso de 400g, os professores tiveram que colocar no prato do peso desconhecido, o peso de 100g e no outro prato o peso 500g.

Figura 4 – Potes confeccionados pesando 150, 300, 350, 400, 450 e 900 gramas respectivamente

A proposta de segunda atividade é colocar os potes em sequências, considerando os pesos do menor para o maior. Os professores não tiveram acesso aos pesos conhecidos para descobrir o valor dos potes, apenas tiveram que compará-los entre si e ordenar em uma sequência do menor para o maior. O objetivo dessa atividade é similar à atividade com o OA *Feira dos Pesos*.

Essas atividades têm o objetivo de introduzir conceitos e notações algébricas guiadas na ideia de que devemos criar oportunidades e apresentar aos professores a proposta de como trabalhar equivalência. Essas atividades trabalham com o conceito de equivalência entre quantidades conhecidas e desconhecidas.

A balança de dois pratos tem sido usada como um material concreto para dar sentido às equações em situações didáticas (CORTES, KAVAFIAN, VERGNAUD, 1990; FILLOY, ROJANO, 1984) ou para analisar o entendimento de igualdades e manipulação de incógnitas (CARRAHER, SCHLIEMANN, 1987; SCHLIENANN, CARRAHER, BRIZUELA, 2005).

Entendemos que o uso de uma balança de dois pratos pode não trazer um modelo completo para o pensamento algébrico, mas é uma situação significativa para promover e analisar a compreensão inicial de equações e de regras de manipulação algébrica. No entanto, o conjunto das atividades nos mostrou como as professoras explicavam e entendiam o conceito de igualdade, desigualdade, comparação e relação entre quantidades. A presença de números conhecidos (pesos da balança) e objetos concretos desconhecidos pode ser um convite para que professores estimulem seus alunos a realizar cálculos com quantidades desconhecidas e estabelecer comparações diretas entre os objetos na balança. Após entender as atividades da oficina de formação, explicaremos no próximo tópico como a pesquisa se desenvolveu.

3.4 ETAPAS DA PESQUISA

Para o acompanhamento e registro do desenvolvimento de conceitos algébricos das professoras de Matemática, a pesquisa foi dividida em três etapas consecutivas, que chamaremos de: (1) oficina com as professoras; (2) planejamento das atividades e (3) prática (figura 05).

Na primeira etapa, realizamos uma oficina com as professoras para se discutir como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico em crianças dos anos iniciais e conhecer atividades que podem dar suporte ao desenvolvimento desse pensamento. Participaram da primeira etapa da pesquisa (formação de professores) onze professoras da educação infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Na segunda etapa, escolhemos uma professora que mostrou interesse em aplicar as atividades em sua sala de aula. Na última etapa da pesquisa, observamos a prática dessa professora ao utilizar os conhecimentos da oficina de formação com objetivo de despertar em seus alunos os conhecimentos algébricos.

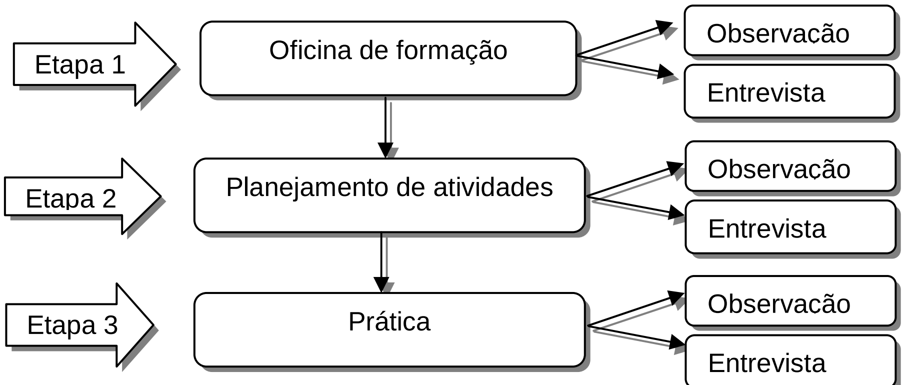


Figura 5 – Esquema das etapas que foram realizadas na pesquisa

Durante as três etapas da pesquisa utilizamos os instrumentos de observações e entrevistas (anexos A, B e C) que nos mostraram o conhecimento das professoras sobre as atividades em sala de aula e no laboratório de informática. No próximo tópico, detalharemos os instrumentos.

3.5 INSTRUMENTOS

Na coleta de dados trabalhamos com dois instrumentos: observação e entrevistas. Foram realizadas gravações em áudio e fotografias para auxiliar nas análises. Os instrumentos selecionados para a coleta de dados propiciaram informações necessárias para compreender como as discussões no momento da oficina com as professoras contribuíram para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Com isso, buscamos compreender a repercussão de atividades que favorecem no desenvolvimento do pensamento algébrico, conhecimento de novas práticas pedagógicas e utilização de objetos de aprendizagem.

Em estudos interpretativos, a observação ocorre dentro do contexto em que os participantes atuam com objetivo de entender o contexto no qual está inserido. As observações foram realizadas em todo o percurso da pesquisa: com todas as professoras durante a oficina e com uma professora ao longo do planejamento das atividades e prática em sala de aula. Esta técnica de coleta de dados nos ajudou a obter e registrar informações sobre acontecimentos da realidade e do comportamento do objeto investigado. As observações foram registradas mediante um plano prévio de tópicos a serem observados em cada etapa da pesquisa (anexos A, B e C). (CHIZOTTI, 2001).

Durante o planejamento com a professora e após cada aula ministrada, utilizamos entrevistas com interesse de que a professora falasse sobre sua prática para entender como se deu o desenvolvimento do pensamento algébrico. A entrevista foi de explicitação, realizada na sala dos professores ou na sala de aula (sem a participação dos alunos) a partir de um roteiro básico de questões (anexos B e C) que poderiam sofrer mudanças durante as falas e pontos levantados pela professora. Esta técnica de entrevista permite que o pesquisador ajude o entrevistado a lembrar-se de experiências vividas a fim de produzir uma verbalização detalhada de uma ação ou de uma vivência específica. (DUARTE, 2001).

O objetivo da pesquisa é investigar, a partir de uma proposta de formação, um estudo sobre prática e conhecimento do professor acerca dos conceitos algébricos. Durante a observação da prática, procuramos analisar como o professor introduz a atividade, que conceitos ou representações são utilizados, quais são as interações que acontecem durante cada atividade. Muitas vezes, durante a análise da prática docente, anotamos as falas dos alunos como resultado da prática da professora em sala de aula. Dessa maneira, o estudo do conhecimento matemático das professoras se manifestou a partir das relações que elas estabeleceram com os alunos.

3.6 DEFINIÇÕES PARA ANÁLISE DOS DADOS

Nesta seção, apresentaremos a sistematização dos resultados obtidos durante a pesquisa, com o objetivo de iniciar a organização dos dados coletados frente ao quadro teórico e compreender o problema da pesquisa. A análise foi realizada de acordo com a ordem cronológica das etapas da pesquisa a fim de descrever a relação das professoras com o saber matemático e especificamente o pensamento algébrico.

Para fins de organização dos dados, escolhemos apresentar primeiramente os resultados das participações do grupo das professoras durante oficina de formação (primeira etapa), depois o planejamento das atividades (segunda etapa) de uma professora e por fim a prática dessa professora em sala de aula (terceira etapa).

A proposta de análise visa identificar o conhecimento matemático das professoras do grupo de formação e o conhecimento da professora escolhida para observação de sua prática. Para isso organizamos esses conhecimentos em categorias dentro de cada etapa da pesquisa que foram sendo traçadas durante a análise e construída com suporte da proposta teórica. A descrição desse conhecimento foi baseada nas concepções do conhecimento de Shulman (1986), nas abordagens de ensino da álgebra (LINS, GIMENEZ, 1997; USISKIN, 1995), nas características do desenvolvimento da linguagem algébrica (VERGNAUD, 1997) e formação de conceitos. (VERGNAUD, 1990).

Durante a **oficina de formação,** as categorias de análise foram classificadas quando as professoras demonstravam ou elaboravam seus conhecimentos matemáticos acerca dos conteúdos abordados, a partir das realizações de atividades que envolviam esses conceitos. Na etapa de **planejamento,** este conhecimento apareceu quando a professora justificou a escolha de determinadas atividades e explicitou os conceitos matemáticos subjacentes a ela. Durante a **prática** em sala de aula, as categorias manifestaram-se quando a professora apresentou e falou sobre conteúdos, ou sobre como o pensamento algébrico emergiu durante a aula a partir das interações com os alunos. Nesta fase da pesquisa, as análises desta categoria centraram-se em explicar se a professora fez referência a conceitos algébricos ou se essa compreensão não foi clara.

Durante a oficina de formação, mostramos as participações das professoras e como elas participam das atividades, opinam sobre propostas de atividades e lidam com problemas que envolvem conceitos algébricos. Considerando que as professoras nunca tiveram contato em cursos de formação inicial ou continuada com tal conteúdo, as categorias discutidas trazem um panorama geral de como esse conhecimento se manifestou durante as atividades e diálogos com a pesquisadora. A partir disso, quatro categorias foram levantadas sobre o conhecimento algébrico:

- Conhecimento matemático;
- Uso de representações;
- Álgebra como relação e equivalência;
- Trabalho com relações entre quantidades desconhecidas e o uso de incógnita.

Depois apresentaremos os resultados de como a professora escolhida para observação da sua prática, organizou e planejou as atividades. Nesta etapa da pesquisa, entrevistamos a professora participante com o objetivo de perceber como ela pensa e age sobre o planejamento e como relaciona as atividades com o conhecimento algébrico. Na proposta de análise, descrevemos a organização das atividades pela professora e três categorias de como os conhecimentos algébricos se manifestaram:

- Sequência e dinâmica das atividades de sala de aula;
- Características aritméticas nas atividades planejadas;
- Manifestação da compreensão de conceitos algébricos pela professora.

Durante a prática em sala de aula, observamos como o conhecimento algébrico estava sendo explorado nas atividades, e como ela expressou esse conhecimento e refletiu sobre sua prática e aprendizagem dos alunos.

Destacamos cinco categorias de análise sobre o conhecimento algébrico:

- Exploração do sentido de equações ;
- Entendimento do pensamento relacional;
- Inequações e o trabalho com quantidades desconhecidas;
- Trabalho com letras;
- Generalização.

Durante a análise da última fase da pesquisa dois momentos fizeram parte das descrições dos dados: (1) interações e falas dos alunos com a professora e como eles realizam as atividades como fruto de uma ação docente, e (2) entrevista com a professora após cada atividade. A seguir, apresentaremos a discussão dos resultados.

4 RESULTADOS

> Transformar a experiência educativa em puro treinamento técnico é amesquinhar o que há de fundamentalmente humano no exercício educativo: o seu caráter formador. (FREIRE, 2007, p. 37).

De acordo com as discussões já realizadas, apresentaremos situações que sinalizam características importantes para entender o conhecimento algébrico. A partir da análise das observações realizadas com as professoras da oficina, bem como com a observação e entrevista com a professora participante durante a prática, verificamos diversos elementos que evidenciam os conhecimentos matemáticos. Esses elementos serão exemplificados através dos protocolos de transcrição das falas das professoras e das análises das observações do diário de campo.

As análises desses protocolos foram realizadas a partir das trocas argumentativas entre professoras e pesquisadora (etapas 01), professora e pesquisadora (etapa 02) e os diálogos entre a professora e alunos (etapa 03). As análises do diário de campo deram suporte para entender como as professoras construíram o conhecimento.

Para melhor compreensão da análise, dividimos os resultados em tópicos de acordo com as etapas da pesquisa, apresentando as categorias que sinalizam os conhecimentos descritos no capítulo anterior.

4.1 OFICINA DE FORMAÇÃO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS

Conforme relatado na metodologia, tínhamos uma proposta de formação mais ampla com as professoras. No entanto, devido às dificuldades da escola em encontrar horários disponíveis para a formação, tivemos apenas três encontros para discutir o conhecimento algébrico.

De início, não foi fácil fazer que as professoras falassem sobre o conhecimento que tinham de matemática e sobre suas dúvidas. Porém, ao longo do primeiro dia as docentes tornaram-se mais abertas para refletir a respeito das questões da pesquisadora. Depois de uma explicação da proposta dos encontros e apresentação de todas as professoras começamos as discussões sobre o conhecimento matemático, tanto referente ao pensamento algébrico quanto ao aritmético, com o objetivo de entender como se caracterizava esse conhecimento.

As categorias nessa etapa da pesquisa mostraram como o conhecimento matemático, principalmente o algébrico, se manifestou e como as professoras puderam formular e refletir sobre esse novo conhecimento. Durante a oficina, o papel da pesquisadora foi o de lançar questões e ajudar a encontrar respostas, partindo daquilo que já era de conhecimento e prática das professoras.

Os diálogos foram realizados com objetivo de fazer que as professoras contextualizassem de forma discursivo-argumentativa (DA ROCHA FALCÃO, 2003b) o desenvolvimento conceitual em Matemática, particularmente, da álgebra. Durante as discussões, a pesquisadora criava condições necessárias através de perguntas ou exemplos que estimulavam o processo de construção de significado para o surgimento de argumentações, fazendo que as professoras formulassem pontos de vista, justificassem posições e contra-argumentação da pesquisadora. Dessa forma, os resultados dos diálogos nos ofereceram informações epistêmicas de como as professoras tinham e desenvolveram, a partir do diálogo, elaborações do campo conceitual algébrico. (VERGNAUD, 1990).

No presente estudo, o conhecimento das professoras foi analisado com base nesses pressupostos de Vergnaud (1990). Para o autor, um conceito abrange um campo, denominado campo conceitual, no qual envolve um conjunto de situações, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. Para a aprendizagem de um determinado conceito, é importante que professores conheçam o conjunto de situações que dão sentido a esse conceito, tornando significativo, o conjunto de invariantes operatórios (objetos, propriedades e relações) utilizados para analisar as situações sobre os quais repousa a operacionalidade dos conceitos e o conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e ícones) que serão utilizadas para representar os invariantes e as situações.

4.1.1 Conhecimento matemático

Durante as discussões, percebemos que as professoras tiveram dificuldades em definir o que seria álgebra ou como poderiam trabalhar com esse conteúdo nos anos iniciais. Uma dessas dificuldades é mostrada no recorte a seguir. Percebe-se que as professoras não expressam de imediato o que sabem ou conhecem sobre álgebra, demonstrando ainda elaborar algum conceito sobre o conteúdo.

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) - Concepção algébrica inicial das professoras da formação.</u>

Pesquisadora: Gente, antes de falar sobre alfabetização algébrica. O que é álgebra?
Professoras: [Caladas].
Pesquisadora: Como definiríamos o conhecimento sobre a álgebra?
Professoras: [Caladas].
Pesquisadora: O que significa conhecer álgebra?
Professoras: [Caladas].
Pesquisadora: Quando a gente pensa em álgebra o que vem na nossa mente?
Professora A: Uma incógnita. Um fator de algo que a gente quer descobrir.
Pesquisadora: Então a gente pensa em algo desconhecido, né? O que mais a gente pensa sobre álgebra?
Professora B: Resolução de problemas.

Durante as discussões, as professoras mostravam que não tinham um conceito elaborado sobre o que seria álgebra ou mesmo exemplificar alguma atividade que utilizasse conceitos algébricos. Uma das professoras ainda mencionou que a álgebra é o conteúdo no qual se trabalha com incógnita ou com números desconhecidos. No entanto, o trabalho somente com esse conceito não caracteriza o pensamento algébrico. Ademais, mostra que relaciona o trabalho com símbolos e incógnita como parte do conhecimento algébrico. Isso pode nos mostrar o significado letrista que a professora atribui à álgebra. Quando a professora responde que “a álgebra é resolução de problema”, identificamos que não é um conhecimento inapropriado, no entanto, a resolução de problemas faz parte de atividades matemáticas de uma forma geral e não somente do campo conceitual da álgebra.

Ao longo no primeiro encontro, apesar das dificuldades em conceituar o que seria álgebra ou mesmo identificar as diferenças entre álgebra e aritmética, percebemos que elas conhecem alguns conceitos que podem representar indícios do trabalho com álgebra, por exemplo: conhecem que na álgebra se trabalha com incógnitas ou utilizam letras, como mostrado no exemplo anterior, como também o trabalho com funções. No exemplo abaixo, a professora explica como pode trabalhar com álgebra nos anos iniciais.

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Explicação da professora como pode trabalhar álgebra nas séries iniciais.</u>

Pesquisadora: E o que mais trabalhamos na álgebra?
Professora B: Também tem no livro de matemática assim: quantos alunos optaram por fazer futebol? Ai vai ter aqueles assim... [levanta a mão esquerda querendo imitar a barra de um gráfico].
Professora C: No gráfico.

O conhecimento da professora se manifesta através do exemplo de uma atividade em que podem ser explorados conceitos algébricos. Compreendemos que esse recorte nos mostra que a professora entende o uso de gráficos como uma atividade importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico. De fato, fornecer aos alunos, tabelas e gráficos que possibilitem observações de regularidades, estabelecendo relações é importante para o desenvolvimento desse pensamento. Segundo os PCN, o trabalho com gráficos através de interpretação de dados favorece que os alunos possam construir uma linguagem algébrica ao identificar e ao descrever simbolicamente suas estruturas. (BRASIL, 1998, p.117).

Apesar de demostrarem esse saber, durante o primeiro encontro, as professoras tiveram dificuldades em diferenciar como esse conhecimento favorece a resolução de problemas ou mesmo diferenciar como se trabalha com os símbolos na aritmética e na álgebra. Para as professoras, suas dificuldades advêm de sua formação na escola, lugar onde não aprenderam tal conteúdo.

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Tentativa de definição das professoras sobre o conceito algébrico</u>

Pesquisadora: O que mais que vocês lembram?
[Pausa]
Professora B: Minha mãe disse que quando a gente aprende a gente não esquece.

Professora C: Então é por isso que eu não aprendi.

Professoras: [Risos].

Pesquisadora: Vocês não aprenderam sobre álgebra?

Professora D: Se a gente soubesse a gente dizia.

De fato, sabemos das dificuldades dos alunos em aprender tal conteúdo e reforçamos que o aconteceu com as professoras, quando estiveram em situação escolar. A dificuldade das docentes com o conteúdo algébrico continua devido à formação inicial dos professores dos anos iniciais, que não possuem contato com este conceito. A aprendizagem de conceitos algébricos é visto somente em cursos de licenciatura em Matemática, já que é somente a partir dos anos finais do Ensino Fundamental que tal conteúdo é ensinado. Como as professoras não fizeram cursos de licenciatura em Matemática não vão conhecer detalhes que envolvem o conceito algébrico. Por isso os dados da análise da oficina serão apreciados, considerando que estas professoras estão trabalhando com esse conceito pela primeira vez. No entanto, isso não significa que as professoras desconheçam as características da organização curricular, a divisão de conteúdos, seus objetivos e caracterização ao longo do Ensino Fundamental. E isto inclui conhecer as características do currículo escolar tanto nos anos iniciais como nos anos finais do Ensino Fundamental.

Esperava-se que o grupo de professoras conhecesse os blocos de conteúdos que envolvem o ensino dos números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação e álgebra. Como tiveram dificuldades de formular conceitos sobre o que seria álgebra ou a atividade algébrica, questionamos o que entendiam sobre a aritmética, por ser também um conteúdo que já ensinam, e por serem professoras dos anos iniciais. As professoras concordaram que este conteúdo é o campo em que se estudam as quatro operações e depois tentamos relacionar este conteúdo com a álgebra.

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Professoras definido o campo conceitual algébrico e aritmético nas séries iniciais</u>

Pesquisadora: Sim. E as quatro operações é estudada somente na aritmética?

Professoras: Não. É na vivência. Na vida. (professoras falam ao mesmo tempo concordando simultaneamente).

Professora A: A aritmética de dentro da álgebra.

Professora C: Interligada a outra.

Professora B: Elas estão interligadas.

Professora A: Eu acho que a álgebra tá dentro da aritmética porque você pode esconder um fator ou somar o fator. Por exemplo: dois mais quadrado é igual a tanto. Esse quadrado ai é o X, entendeu?

Concordamos com as professoras A, B e C quando elas afirmam que a aritmética e álgebra devem ser trabalhadas juntas de maneira que proporcionem aos alunos experiências variadas, envolvendo noções algébricas de modo informal em um trabalho articulado com a aritmética. Percebemos nas professoras uma compreensão sobre a importância de trabalhar conceitos integrados ao longo do currículo escolar.

No decorrer do diálogo, as professoras relataram que as atividades da escola devem ser integradas, e que a divisão de conteúdos e seu ensino realizado separadamente podem "dificultar a vida dos alunos". Os argumentos das professoras sobre realizar um ensino integrado vão ao encontro das pesquisas realizadas sobre educação matemática, mais especificamente sobre o ensino da álgebra na escola. Sobre isso Lins e Gimenez (1997) explicam que a introdução da álgebra é o grande momento de corte na educação matemática escolar, e que a reação usual é deixar para depois, ao invés de antecipar essa introdução. Este corte acontece devido a dois motivos:

> Primeiro como consequência de um processo de transposição didática da matemática, reflexão segundo a qual se torna necessário vivenciar alguns conteúdos e procedimentos aritméticos para depois passar à álgebra. O segundo motivo vem ligado a algumas formulações da psicologia cognitiva, notadamente as de Piaget, que acreditava que a aritmética, por ser mais ligada ao concreto, com seus problemas e procedimentos de resolução de problemas ligados à semântica específica destes problemas, representaria um campo de trabalho mais acessível que a álgebra, com seus procedimentos formalizadores, generalizantes e fortemente sintáticos. (id. ibid, 2001, p. 74- 75).

Sobre o último protocolo, a professora A demonstra que utiliza a letra para indicar um valor único. A situação mostrada pela professora realmente usa um símbolo (quadrado ou o X), mas, neste exemplo, ainda representa uma quantidade que terá um valor a ser descoberto e não o sentido de incógnita como algo desconhecido e que pode vir ou não a ser descoberto.

Ao longo da discussão, pedimos que as professoras explicassem melhor como trabalhavam a "álgebra dentro da aritmética" ou como poderíamos trabalhar os conhecimentos algébricos, e uma delas explicou:

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Professora explicando como trabalha com conceito algébrico nas séries iniciais</u>

Professora B: Eu faço assim: dois mais quadrado pode ser qualquer coisa. Por exemplo: tenho dois lápis e depois ganhei mais alguns e fiquei com 5, posso descobrir quantos lápis eu ganhei. A aritmética vem com resolução de problemas e também tem valores desconhecidos que podemos descobrir que é característica da álgebra também.

Neste recorte, a professora exemplifica, na sua visão, uma atividade algébrica. O exemplo dado pela professora, apesar de envolver um valor desconhecido e trabalhar com a relação entre duas quantidades, ainda trabalha na finalidade de encontrar um valor numérico para a situação.

Para Teles (2004), a visão de que a álgebra trabalha com fatores desconhecidos está ligada a uma visão da Idade Média na qual se produziam sistemas de representações que permitissem a resolução generalizada de problemas gregos. Por isso, pensamos que a aritmética está relacionada à manipulação de quantidades conhecidas como as propriedades e tratamento dos números e suas operações, no qual o foco das atividades é encontrar determinadas respostas numéricas, enquanto que a álgebra é uma ferramenta para resolver problemas que envolvam quantidades desconhecidas.

O pensamento algébrico deve envolver outras características que não sejam apenas o uso de símbolos ou letras desconhecidas, e sim o trabalho com atividades que utilizem outros aspectos da álgebra, como a representação simbólica para escrever uma situação problema, a observação de um conjunto de regularidades e tentativas de expressar uma situação problema, utilizando um processo de generalização.

Os aspectos abordados no parágrafo anterior descrevem uma forma ideal de se trabalhar conceitos algébricos, desde que os alunos produzam e entendam os significados durante as atividades. Conforme já relatamos, a falta de caracterização dos conceitos algébricos pelas professoras já era esperado, porém, neste primeiro momento, é importante destacar alguns aspectos sobre o conhecimento algébrico por parte das professoras. Dessa forma, destacamos duas características que as professoras demonstraram ter sobre a álgebra: (1) as atividades algébricas devem ter um significado dentro da aritmética e vice-versa; (2) a resolução de problemas também deve fazer parte das atividades algébricas, e não somente das atividades aritméticas. Essas características demonstradas pelas professoras sobre a atividade algébrica já foram relatadas nos estudos de Lins e Gimenez (1997), contudo, percebemos nos nossos primeiros diálogos que as professoras precisam aprimorar como criar significados para as atividades algébricas e entender como a resolução de problemas pode conter aspectos do pensamento algébrico. Sobre isso os autores explicam:

> Tomemos agora essa ideia de coexistência e façamos uma transposição para o caso da aritmética e da álgebra; a coexistência das duas permitiria que: i) a álgebra fosse vista como falando de afirmações que envolvem – assim como a aritmética – números, operações aritméticas e igualdades (desigualdades); e ii) que a aritmética fosse vista – assim com a álgebra – como uma ferramenta que toma parte do processo de organização das atividades humana. (id. ibid. p. 28- 29).

A partir dessas ideias, continuamos os encontros com objetivo de fazer que as professoras começassem a dar sentido às atividades realizadas em sala de aula e não especificamente aos conteúdos. Isso significa ampliar nosso entendimento sobre como produzir significado para as relações numéricas dentro da Matemática.

Essas relações numéricas envolvem o sentido de número com base em uma grande variedade de experiências e situações, atribuindo diferentes significados. As relações numéricas podem ser exploradas em diversas relações entre números e podem ser igualmente trabalhadas, procurando identificar e generalizar regularidades, promovendo o desenvolvimento do pensamento algébrico. (PONTE, BRANCO e MATOS, 2005). Por exemplo, o trabalho com a relação inversa de adição e subtração (12 – 10 = 02, pois 02 = 12 – 10), a relação de compensação (11 + 9 = 10 + 10), a composição e decomposição de números (23 + 11 + 9 = 23 + 20). Para Ponte, Branco e Matos (2005), o professor deve estimular seus alunos a explicar as relações encontradas mesmo em situações numéricas e com base em sua compreensão verificar a validade destas relações para todos os números e depois relacionar às expressões algébricas.

Outro aspecto que merece ser levantado sobre o conhecimento é a relação delas com a Matemática. Ao longo dos encontros, foi possível perceber que as professoras tinham pouco conhecimento sobre materiais didáticos, não usavam os materiais concretos e nunca fizeram nenhuma formação continuada em Matemática. No entanto, relatavam que utilizavam o QVL (quadro de valor e lugar), moedas, tampinhas e palitos para ensinar as operações matemáticas.

Ao longo da oficina, foi possível perceber que as professoras possuíam uma relação negativa com a Matemática. A primeira manifestação das professoras ao entrar em sala de aula foi: "Eita, é Matemática!". Em outros momentos, a maioria delas confirmava que não gostavam de Matemática, pois aprenderam de forma tradicional e seus professores não a ensinavam a pensar e refletir, podendo ser uma das causas de suas dificuldades no entendimento. No recorte abaixo, as professoras D e F demonstram como as discussões durante a oficina podem ajudá-las a refletir sobre a forma como ensinam.

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Professora relacionando o ensino de sua época com a metodologia da pesquisadora</u>

Professora D: Mas antigamente não era assim, não. Meu professor não fazia essa pressão que você faz. Só falava 'abra a matéria'. Ele não tinha essa dedicação, de ir atrás, de questionar, de motivar, de ajudar a gente a pensar, jogar essas coisas, trabalhar o raciocínio. Na minha época não era assim, não. E eu não sou tão velha assim, não! [risos]

(...)

Professora F: Eu tinha medo. Agora eu até estranho. Você vai ajudando a gente a pensar, a questionar. Vejo que é importante fazer isso.

Entendemos que a forma como as professoras percebem Matemática pode influenciar consideravelmente em seu ensino. (BALL, 1991). A forma dialogada durante os encontros com as professoras a fizeram pensar sobre como poderiam criar novas relações com a Matemática e, consequentemente, fazer que seus alunos comecem a pensar sobre conceitos matemáticos. A professora D fala da importância de ajudar a pensar e de se dedicar ao conteúdo. Já a professora F, ao longo do primeiro encontro, refletiu sobre a importância de questionar sobre conteúdos matemáticos. Essas reflexões fizeram que as professoras pensassem sobre sua visão sobre a Matemática, reconhecendo que suas crenças iniciais podem atrapalhar no ensino.

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Professora analisando como a forma que foi ensinada a prejudica hoje</u>

Professora E: É, essa a questão hoje. E tem a história: eu não gosto de matemática. Porque a matemática não é trabalhada do jeito que é pra ser trabalhada. A questão hoje é: antigamente, a matemática não foi trabalhada do jeito que é para ser. Então eu não gosto de matemática. Eu acho que é por causa disso. Alguma coisa barrou na vida, por conta disso.

(...)

Professora C: E isso [maneira como as professora percebem a matemática] pode atrapalhar na maneira que a gente ensina.

Essas reflexões das professoras sobre como podem envolver seus alunos em contexto de significado através de diálogos, inclui o conceito de Shulman (1986) sobre "conhecimento pedagógico do conteúdo", ou seja, formas de representação matemática para que outros (no nosso caso os alunos) possam compreender. E mais, as reflexões das professoras sobre como elas conhecem a matemática e como possuem o conhecimento didático do conteúdo, podem colaborar para que elas pensem sobre como fazer Matemática e quais os meios para se fazer matemática. (Ball, 2008). Isso faz que as professoras possam compreendê-la no sentido definido por Ball (1991), o qual engloba conhecimento substantivo ou conhecimento da substância do domínio, que implica, além do conhecimento específico, o conhecimento de ideias e disposições para ensinar o conteúdo.

Nesta categoria, descrevemos como as professoras conceituavam a Matemática, como entendiam o ensino da aritmética e da álgebra e a maneira como elas refletem sobre fazer Matemática. Na próxima categoria, descrevemos mais especificamente como o conhecimento algébrico surgiu ao resolverem uma situação-problema, como elas usam representações para expressar conhecimentos matemáticos, sendo eles algébricos ou aritméticos, e quando citavam exemplos de como podem trabalhar com esses conceitos.

4.1.2 Uso de representações

Neste tópico, apresentamos como as professoras se utilizam de representações (simbólicas e icônicas) para resolver as situações algébricas propostas na pesquisa. Essas representações exercem influência sobre como representam seu conhecimento e como a elaboração desse conhecimento é influenciada pelas representações que utilizam. Os suportes representacionais para o desenvolvimento de conceitos em Matemática pode ser mediada dentro do contexto da atividade de resolução de problema por ícones ou outro símbolo proposto espontaneamente pelos sujeitos. (DA ROCHA FALCÃO, 2003a).

Para Da Rocha Falcão (1993, 1996) e Lessa e Da Rocha Falcão (2005), as representações simbólicas são elementos importantes na aprendizagem da Matemática, pois não se restringem a uma mera *roupagem* de estruturas operatórias e servem de elemento para a construção conceitual. Para Lautert e Spinillo (1999), as representações matemáticas parecem ter a dupla função de expressar e de ampliar ou limitar o conhecimento sobre o conceito. Para as autoras, o uso de representações cada vez mais elaboradas demonstra ser uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento da compreensão matemática, pois esta depende tanto da lógica do sujeito como de sua capacidade de utilizar os sistemas de representação. Para Nunes (1997) as representações são sistemas de signos que possibilitam a construção de diferentes modos de pensar sobre um conceito nas quais refletem a importância da noção de ação como forma de mediação para compreender o raciocínio matemático.

Nesta categoria, mostraremos indícios de como as representações se aproximam de procedimentos aritméticos ou algébricos. Proceder algebricamente significa realizar operações nas quais as professoras compreendam o sentido de incógnita, demonstrem relações entre as quantidades conhecidas e desconhecidas no problema através de uma representação explícita ou de uma representação mental. (LESSA, DA ROCHA FALCÃO, 2005). O uso de representações também pode estar vinculado ao uso de letras e símbolos, seja ele utilizado de maneira mecânica e por meio de procedimentos, ou de forma que produza entendimentos sobre sua utilização.

A primeira manifestação de que a álgebra está associada à utilização de letras e símbolos, foi encontrada quando a professora explicava como a álgebra pode ser caracterizada dentro das atividades escolares:

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Tentativa da professora em explicar como a álgebra pode se caracterizada dentro das atividades escolares</u>

Professora B: Eu acho que a álgebra tá dentro da aritmética porque você pode esconder um fator ou somar o fator. Por exemplo: dois mais quadrado é igual a tanto. Esse quadrado ai é o X, entendeu?

Enquadramos esse mesmo exemplo na categoria anterior (conhecimento matemático), mas gostaríamos de registrar a fala da professora quando explica que “esse quadrado ai é o X”. Esse recorte demonstra a característica letrista que ela atribui ao conceito algébrico, ligando a álgebra ao ensino de símbolos e trabalho com letras.

Considerando que as professoras nunca discutiram o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais, esse argumento, demonstra que, de alguma forma, a professora sabe ou conhece sobre a utilização de letras, signos e símbolos na álgebra. O que de fato não é algo negativo, falta agora ela perceber como dar significado a esse símbolo, conhecendo como pode representar quantidades desconhecidas.

Em busca de entender como elas entendem a utilização da incógnita, perguntamos o sentido do *x* durante as atividades algébricas. A professora explica:

Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Explicação da professora B sobre entendimento de incógnita

Pesquisadora: E porque a gente usa o X? Vamos pensar no ensino.

Professora B: Porque é a horizontal, como se fosse um quadrante. Como se fosse um quadrante, a linear, na horizontal. E o y sempre na vertical como na função tem o x e o y.

A professora não consegue explicar o sentido da incógnita, confundindo com os eixos do plano cartesiano. Isso demonstra o pouco conhecimento que as professoras possuem sobre as atividades que envolvem o conceito algébrico ou utilização de variáveis. Outra professora também explica como trabalha com o conceito algébrico:

Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Explicação da professora F sobre seu entendimento de incógnita

Pesquisadora: Que outras atividades vocês fazem em sala de aula que podem conter o pensamento algébrico?

Professora F: Olhando para o x e o y, como podemos fazer uma forma geométrica?

Pesquisadora: Ah, então você usa o plano cartesiano para fazer a figura geométrica?

Professora F: Isso. Ou no plano você pergunta qual a figura que está no 2y e 4x.

Pesquisadora: Ah, então no plano teriam várias figuras geométricas.

Professora F: É. Justamente na escala. Localizando através de várias gravuras em que ponto eles se encontram. Às vezes ele vai localizar até o aluno ver a figura geométrica e onde ele está na escala. Ou localizar através do ponto a figura geométrica. Sempre partindo, disciplinando, do zero, né? Na vertical o valor do x, na horizontal o valor do x e na vertical o valor do y.

A partir desse relato, percebemos que a professora utiliza o plano cartesiano somente para reconhecer uma figura geométrica e não para interpretar informações ou produzir significado. Esses relatos ainda demonstram que as professoras não entendem como podem trabalhar e explorar as atividades em um gráfico. Leitura, representação e interpretação de gráficos são ferramentas úteis para o desenvolvimento do pensamento algébrico uma vez que os alunos podem manipular variáveis.

As atividades e discussões durante a oficina tiveram o objetivo de fazer que as professoras refletissem sobre a importância de entender a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas. As atividades matemáticas precisam explorar tanto conceitos aritméticos como algébricos e ser uma orientação transversal do currículo. (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009). Dar sentido ao pensamento algébrico nas atividades do Ensino Fundamental significa promover sempre que possível diversas formas de representação em que se proponha generalização de modelos, tratar os números e as operações algebricamente, isso significa prestar atenção às relações e não somente aos valores numéricos e promover atividades que reconheçam padrões e regularidades. (BLANTON, KAPUT, 2005).

A partir desse objetivo, pedimos que as professoras resolvessem uma situação problema na qual eram levadas a pensar sobre valores desconhecidos dentro de uma equação, podendo a resolução do problema ser feita através de sistemas de equação ou não. Trabalhamos com a seguinte situação: “Em um sítio existem vacas e galinhas, num total de 10 cabeças e 26 patas. Quantos animais de cada tipo existem nesse sítio?”

O objetivo da questão foi perceber como elas resolvem a situação: se usam formas de resolução mais próximas do raciocínio aritmético ou se estabelecem relações entre as expressões se aproximando do pensamento algébrico. Das onze professoras participantes foi possível registrar 10 resoluções porque uma delas não resolveu a situação, preferindo observar como as outras professoras resolviam. Durante a resolução conversavam entre si, usava outros papéis como borrão para tentar resolver. Das dez resoluções, cinco professoras acertaram e cinco erraram. Faremos ao longo do trabalho, uma classificação de acordo com o aspecto do pensamento utilizado pelas professoras. As análises dessas situações problemas mostraram se as professoras resolviam as atividades por um método aritmético ou usavam alguma forma de resolução ligada ao pensamento algébrico. A figura abaixo mostra como a professora I tentou resolver a situação, montando uma equação e juntando os dados do problema (figura 6).

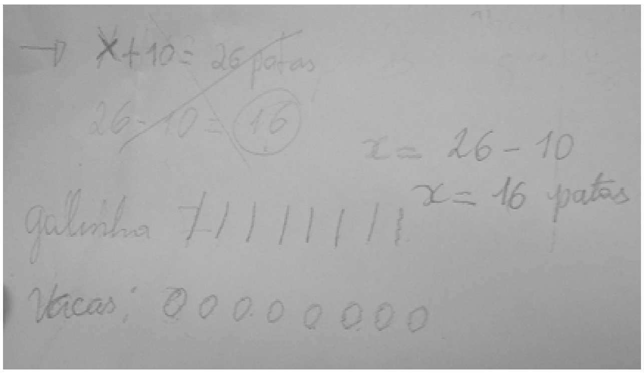


Figura 6 – Uso de representação pela professora I

O recorte a seguir mostra o diálogo entre a professora e a pesquisadora durante a resolução do problema. A professora I tenta resolver o problema, usando os dados da situação-problema e, primeiramente, monta a equação x = 26 – 10, resolve o procedimento e descobre que x é igual a 16 (dezesseis).

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro)</u>

Pesquisadora: O que você encontrou?

Professora: Que no sítio tem 16 (dezesseis) patas.

Pesquisadora: No total?

Professora: Não, diminui as cabeças e as patas para dar a quantidade de patas.

Pesquisadora: E porque diminuindo cabeças por patas dá patas?

Professora: Ah, aqui são cabeças [refere-se ao resultado da equação que deu 16.] Deixa eu ver...

Pesquisadora a deixa resolver e depois volta.

Pesquisadora: E ai?

Professora: Tem oito galinhas e oito vacas.

Pesquisadora: Nas no problema tem dizendo que tem 10 cabeças? Como pode ter oito galinhas e oito vacas? Dessa maneira dá 16 cabeças...

Professora: É mesmo... Então, aqui são as patas?

Pesquisadora: O problema já diz que são 26 patas.

A professora escreve mais acima outra equação: x + 10 = 26 e fica pensando olhando para a equação.

A pesquisadora se afasta para que a professora resolva a situação. Depois, a professora conversa com algumas professoras e observa como outra professora resolveu. Quando a pesquisadora volta, a professora diz que concorda com a resposta da professora ao lado, uma resposta que estava correta. Essa dificuldade em utilizar uma linguagem simbólica própria da Álgebra revela dificuldades que foram adquiridas durante sua trajetória escolar, como relatada pelas próprias professoras e também limitações em sua formação inicial.

A professora C não utiliza letras para resolver o problema, mas outros símbolos para expressar a quantidade de animais no sítio e consegue resolver a situação mesmo utilizando círculo para representar galinhas e triângulos para representar vacas[5].

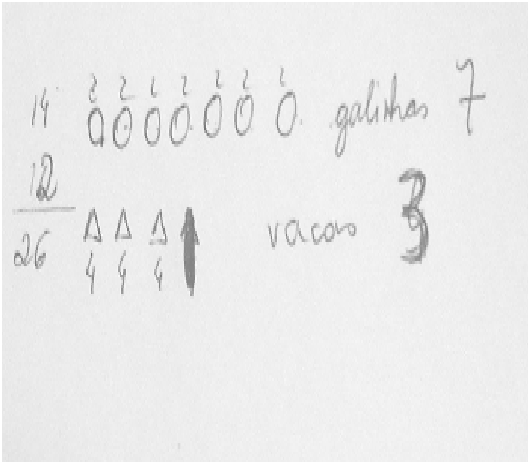


Figura 7 – Forma de representação icônica da professora C

Embora a professora não use a representação icônica para representar uma quantidade desconhecida ela relaciona os ícones (triângulos e círculos) à quantidade de patas de cada animal, o que pode representar um indício de relação entre quantidades dos dados do problema. Pesquisas realizadas com alunos (DA ROCHA FALCÃO, 1993 e BRITO MENEZES, 2006) mostram que a construção do sentido de incógnita pode ser mediada por ícones ou símbolos usados espontaneamente pelos sujeitos ou mesmo quando criam seus próprios símbolos para representar uma quantidade desconhecida. A professora em questão também utiliza procedimentos aritméticos para resolver o problema. No entanto, para autores

[5] Essa situação-problema será explicada mais adiante na categoria de álgebra como relação e equivalência. Colocamos nesta categoria para ilustrar a construção do sentido de incógnita.

acima citados, os procedimentos algébricos e aritméticos têm suas especificidades e conexões podendo ser abordados conjuntamente, desde muito cedo, no âmbito da educação matemática. Já a professora B, ao resolver o problema das vacas e galinhas, utilizou seus conhecimentos sobre regras e procedimentos e montou uma equação com os dados numéricos que tinha no enunciado. O exemplo a seguir mostra sua tentativa em utilizar símbolos para dar sentido à situação (figura 8).

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro)</u>

Pesquisadora: O que é esse V e G?
Professora B: É assim, V é vaca que é igual a uma cabeça mais quatro patas [aponta para o P4 em sua resolução]. E aqui é galinha [aponta para a letra G logo abaixo], que tem também uma cabeça, mas tem duas patas [aponta para o P2].
Pesquisadora: E o X aqui?
Professora: Eu peguei o que tinha aqui. [aponta para o enunciado do problema].
Pesquisadora: Mas é vaca ou galinha?
Professora: Sei não. (risos)

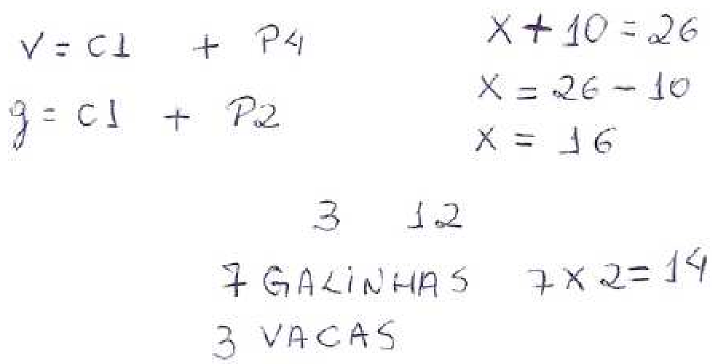


Figura 8 – Representação da professora B

Observa-se na figura que ao final do problema a professora colocou a resposta (7 galinhas e 3 vacas), pois algumas professoras já sinalizavam a resposta. Ela escreve em seu papel as respostas faladas pelas outras professoras (7 galinhas e 3 vacas) e tenta fazer uma multiplicação direta (7 x 2 = 14) para encontrar o número de cabeças.

Ainda durante a resolução do problema para calcular o número de vacas e galinhas em um sítio, a professora D (figura 9) utiliza um sistema de signos para resolver o problema.

Apesar de não ter escrito a quantidade de patas e galinhas, a professora explicou verbalmente como resolveu:

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Explicação da professora D sobre como resolveu o problema</u>

Professora D: Eu achei. Olha só...[a resposta].

Pesquisadora se aproxima para escutar a explicação da professora.

Professora D: No sítio tem 3 vacas e 7 galinhas.

Pesquisadora: Como você descobriu?

Professora D: Se eu tenho 3 vacas [aponta para o V da segunda expressão] vou ter 12 patas [aponta para o primeiro parênteses] e seu eu tenho 7 galinhas [aponta para o G da segunda expressão] vou ter 14 patas [aponta para o segunda parênteses], dando 26 aqui.

Pesquisadora: E o que é esse 4 (quatro)?

Professora D: Por que a vaca, que é esse v, tem 4 patas e a galinha tem duas, esse dois aqui.

Pesquisadora: E porque você escreveu isso aqui? [V + g = 10 cab.]

Professora D: Para verificar com o resultado da outra expressão. Aqui, 7 (sete) mais 3 (três) dá 10 (dez) mesmo.

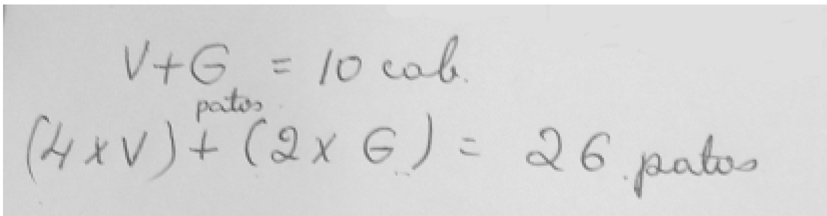


Figura 9 – Expressão montada pela professora D

Apesar da professora não ter resolvido as equações conforme procedimentos algébricos, explicou verbalmente seu raciocínio de resolução. Essa professora foi a única que conseguiu montar um sistema de equações. Ela também compreendeu a relação das variáveis do problema o que indica algum indício de pensamento algébrico.

Quando todas as professoras resolveram seus problemas, discutimos como elas poderiam estimular seus alunos a trabalhar e entender o sentido dos símbolos nos anos iniciais. Os tipos de representação das professoras ao resolver os problemas foram vistos como uma forma de construção de significado para a noção de incógnita a partir do momento em que se consegue propor uma representação para um tanto de coisas desconhecidas.

Durante a oficina relacionamos essa forma de representar um valor desconhecido como importante caminho que seus alunos vão fazer para construir o sentido de incógnita.

Queremos discutir a questão da importância da leitura e compreensão da linguagem algébrica. Pesquisas já apontam para as dificuldades de leitura, tradução de enunciados e resultados verbais por parte dos alunos quando estão aprendendo álgebra pela primeira vez e recomendam que os professores precisam fazer um trabalho de exploração de diversas situações nas quais os alunos possam traduzir uma situação da língua materna para a linguagem simbólica, utilizem grandezas que variam de acordo com uma relação funcional, utilizando generalização de regularidades observadas. (BOOTH, 1995). Para isso é de fundamental importância que professores saibam trabalhar e explorar essas situações.

A resolução da situação-problema mostrada anteriormente mostra que resolver uma equação não requer somente manipulações padronizadas para encontrar um resultado como costumeiramente é feito nas escolas. Entender e ler a linguagem matemática consiste em observar e questionar seus diferentes significados simbólicos. Para se trabalhar com a linguagem algébrica é necessário interpretar informações apresentadas em diversas linguagens simbólicas, entender os dados do problema e estabelecer uma estratégia de resolução.

Em outra discussão sobre como os alunos aprendem Matemática, a pesquisadora e as professoras discutiam porque os alunos chegam à escola com dificuldades em entender a linguagem matemática. Refletimos sobre a seguinte situação: Porque um aluno que vende algo no comércio sabe dar um troco de treze reais quando tem que tirar quatro de dezessete reais, mas quando chega à escola sente dificuldade em resolver o algoritmo 17 – 4 = ___. Essa discussão foi proposta para entender como as professoras trabalhavam com os símbolos e resolução de algoritmos dentro da aritmética. Sempre nos reportamos a uma atividade aritmética para entender primeiro como lidavam com as atividades que envolviam esse conteúdo, para que de alguma forma possa refletir sobre as atividades algébricas.

O trabalho com símbolos deve ser inserido com intuito de desenvolver uma linguagem matemática e favorecer o pensamento dos alunos sobre como operar com eles. Para isso, o (a) professor (a) precisa reconhecer a importância de como utilizar e operar de maneira significativa com esses símbolos, tanto na aritmética como na álgebra. Por exemplo, na aritmética os alunos deverão conhecer e aprender símbolos como 1, 2, 3, 4, -, +, = e na álgebra, além de aprenderem novos símbolos, como x, y, tem de modificar a compreensão dos sinais, visto que +, -, = e outros símbolos têm significados diferentes. Em aritmética, o sinal de adição (+) significa efetivamente realizar a operação e o sinal de igual (=) significa escrever uma resposta. (BOOTH, 1995).

O trecho a seguir ilustra como as professoras falaram sobre as atividades simbólicas durante a oficina:

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Como as professora falaram sobre as atividades simbólicas</u>

Professora A: Ele [o aluno] sabe que isso [o cálculo de dar um troco] é uma ferramenta do dia a dia. Então ele vai saber mentalmente. De memória, que é o trabalho dele, a vivência dele.

Pesquisadora: A professora A falou que ele sabe de memória, mas ai ele [o aluno] vai à escola e faz isso aqui olha... [coloca no quadro o cálculo 17 – 3 = 4]. Essa conta tá certa?

Professoras: Não.

Professora D: Mas mentalmente ele acerta.

Pesquisadora: Então, se ele vende bombons, ele vendeu 3 (três) reais de bombons quiser dá um troco para 17 reais. Ele vai saber?

Professoras: Vai.

Pesquisadora: Ou ele vai dar o troco de 4 (quatro) reais à pessoa?

Professora B: É o seguinte. Ele na prática sabe, mas na hora de transformar em símbolo ele não faz.

Professora E: O problema é o simbólico que ele não conhece. No dia a dia ele vai, na escola não.

Quando a professora fala "o problema é o simbólico que ele não conhece", percebemos que ela atribui o problema à linguagem simbólica (matemática) e não à forma como os alunos aprendem ou como a escola está trabalhando e apresentando essa linguagem. Se os alunos não conhecem os símbolos, ou têm dificuldades de operar com eles, é importante que a escola saiba e conheça como trabalhar com esse problema.

A proposta de discussão ao longo da oficina foi fazer que elas percebessem a importância e como podem trabalhar com os símbolos para que os alunos superem essas dificuldades ainda na aritmética. Entendemos que, se quisermos desenvolver uma educação algébrica já nos anos iniciais, precisamos compreender que a operação simbólica algébrica pode ser desenvolvida juntamente com operações aritméticas que também são simbólicas. Para isso, é importante que as professoras dos anos iniciais reconheçam e saibam trabalhar com essa linguagem e entendam a operação simbólica como parte de uma aprendizagem matemática e não somente algo particular da álgebra.

Buscando trabalhar com as expressões algébricas, lançamos uma discussão sobre como as professoras resolviam a situação abaixo:

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Situação de equação do 1º grau para as professoras</u>

Pesquisadora: Como resolvemos isso aqui? X – 3 = 7

Professora G: X = 7 – 3.

Professoras: Olha aí...! [Exclamando e surpresa pela resposta].

Pesquisadora: Por quê?

Professora D: A operação inversa.

Pesquisadora: Porque a gente tem que colocar o 3 para cá? E porque deixar o x ai?

Professoras: [risos. Algumas brincam dizendo que não aprenderam nada].

Percebemos que a professora errou a resolução de um procedimento, empregando uma regra comumente utilizada para resolver a expressão. Ela simplesmente coloca o número para o outro lado da equação o que caracteriza a concepção da álgebra como estudo de procedimentos. Entender a álgebra como manipulações de letras e números e não entender o sentido da manipulação simbólica é muito comum também em alunos que estão estudando álgebra pela primeira vez. (BOOTH, 1995).

Outro fato que nos chama a atenção é quando as professoras se surpreendem pela resposta da professora G, que resolveu errado. Este fato mostra que poucas professoras sabiam a resposta para a situação, mostrando espanto quando a professora G resolve tal situação. Quando a professora D responde que a professora G fez “a operação inversa” nos mostra que ela conhece regras e procedimentos para resolver uma situação. Mais uma vez percebemos a concepção algébrica como regras e procedimentos para resolver a situação problema, pois fazer “a operação inversa” é apenas aceitar o que fazer em uma determinada situação não entendendo o sentido dela.

Continuando a discussão acima de como resolve a situação e o porquê da troca o sinal, a professora A explica o procedimento, dizendo “quando muda troca o sinal” e como a professora D entende as relações matemáticas, explicando “regra é regra”.

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Explicação da professora A sobre o procedimento da troca de sinal</u>

Professora F: De qualquer maneira ficaria correto.

Professora A: É mais três. Fica positivo.

Pesquisadora: E por que fica positivo?

Professora A: Porque quando muda troca o sinal.

Professora B: Ninguém sabe. [Risos].

Professoras D: Regra é Regra!
Professoras concordam: É!

Esse recorte nos mostra que a Matemática, segundo a visão das professoras, não é um conhecimento apropriado, adquirido, mas é um conhecimento que deve ser absorvido, aceitado. Veja como a professora explica a regra para a não mudança do sinal.

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Explicação da professora B sobre troca de sinais</u>

Professora B: É assim: olha, o sete não é maior do que três? Por isso recebe sinal positivo. [Enquanto isso barulho na sala com discussões entre as professoras]. Eu aprendi assim.
Professora C: De qualquer maneira ia ser positivo.
Professora B: É não, é porque o três é menor.

A professora B descreve uma regra inexistente e as outras professoras ficam observando e pensando sobre a equação. Depois disso, a professora A fala que o sinal muda, mas não sabe explicar o motivo. As outras professoras falam que a mudança de sinal é uma regra e que devemos aceitá-la.

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Explicação de outras professoras sobre a troca de sinais</u>

Professora A: Não... quando troca muda o sinal.
Pesquisadora: Por quê?
Professora A: [Faz sinal dizendo que não sabe explicar].
Pesquisadora: E ai gente? Como fica? Positivo ou negativo?
Professora B: Negativo.
Professora F: É uma regra.
Pesquisadora: Mas por quê? Que regra é essa?
Professoras: [Risos].
Professora A: É uma regra. Quando muda o número, muda o sinal.
Professora B: Mas a gente se confunde.

Na continuação da discussão, a pesquisadora pede que as professoras expliquem mais sobre essa regra de colocar números para um lado e letras no outro lado. Mais uma vez a professora explica uma regra sem nenhum embasamento matemático.

Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Explicação da professora A sobre o posicionamento da incógnita na equação

Pesquisadora: Porque vocês colocaram o x para o lado esquerdo e os números para o lado direito?
Professora A: Por que a gente sempre escreve da esquerda para direita.

O trabalho significativo com expressões, igualdades e símbolos algébricos deve ser desenvolvido de forma que os professores possam fazer que seus alunos entendam o significado dos símbolos nos diversos campos da matemática. Para isso, professores precisam explorar nas práticas em sala de aula a análise e a interpretação dos problemas, fazendo que seus alunos leiam e escrevam expressões que utilizem diversos significados para um mesmo símbolo. Porém, para isso eles precisam primeiro compreender o sentido das expressões.

Percebemos nos exemplos mostrados que as professoras usam letras como uma forma de dar sentido a algo desconhecido e para resolver a situação-problema, mas sentem dificuldade em estabelecer um significado para o uso da letra. Na representação da professora I (página 85), ela usa o *x* como forma de representar algo que precisa ser descoberto, apesar de não estabelecer relações para a incógnita *x*, pois em um momento diz que *x* seria as patas e, em outro, as cabeças. A professora B (página 87) também utiliza símbolos para resolver a situação tentando estabelecer relações como os dados do problema quando escreve "$v = c1 + p4$ e $g = c1 + p2$" a professora demonstra a tentativa de operar sobre os dados do problema. O uso correto do sentido de incógnita foi demonstrado pela professora D, que representou uma equação para as cabeças e patas dos animais.

Após cada professora explicar como resolveu o problema, foi discutida a necessidade de criar na sala de aula situações nas quais seus alunos pudessem representar alguma quantidade desconhecida ou mesmo representar uma situação, usando ícones, símbolos ou mesmo letras. Para que os alunos entrem em contato com o pensamento algébrico, é necessário realizar atividades no sentido de favorecer a produção de significados, conectando os novos conhecimentos ao conhecimento prévio dos alunos.

Durante as atividades, percebemos que as professoras também possuem dificuldades em atribuir significado às letras existentes em uma expressão, em dar sentido a uma expressão algébrica e passar informação da linguagem natural para a algébrica. Tais resultados são similares aos obtidos em estudos realizados com alunos que estão aprendendo álgebra pela primeira vez. (ROJANO, 2002; CORTES, KAVAFIAN, VERGNAUD, 1990). O entendimento e a apropriação do uso de símbolos devem ser construídos ao longo de atividades que estimulem a investigação e o sentido desse conceito.

Para Arcavi (1994) o sentido de símbolo (*symbol sense*) na Álgebra deve ter o mesmo significado de sentido de número assumido no trabalho com a Aritmética. Na sua perspectiva, é preciso compreender que os símbolos podem desempenhar diferentes papéis, dependendo do contexto. Assim, os alunos devem criar estratégias que permitam interpretar e ser capaz de decidir quando os símbolos devem ser usados. Para Ponte, Branco e Matos (2009) o sentido de símbolo é a capacidade de manipular e interpretar as expressões algébricas de forma eficiente. Para isso, o professor deve dar significado ao sentido de símbolo, realizando atividades em diversos contextos, permitindo o desenvolvimento do pensamento algébrico e a elaboração de raciocínios cada vez mais abstratos e complexos.

Na próxima seção, descreveremos outro aspecto importante de como a álgebra pode ser desenvolvida nos anos iniciais. Descreveremos os momentos da oficina em que as professoras e a pesquisadora discutiam a álgebra como uma equivalência.

4.1.3 Álgebra como relação e equivalência

O trabalho envolvendo relações começa ainda nos anos iniciais, quando se estabelecem relações entre números a partir das propriedades das operações e das relações entre diferentes operações. Nos primeiros anos de escolaridade, os alunos devem compreender e representar essas relações, usando linguagem natural e, posteriormente, usando alguns símbolos matemáticos. (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009). Para isso, é importante conhecer como professores trabalham com esses conceitos e resolvem situações entre variáveis de um problema. As atividades aqui descritas exemplificam como as professoras podem começar a entender aspectos relacionados ao pensamento algébrico.

Para demonstrar como as professoras utilizaram esse tipo de pensamento, voltaremos para a situação problema das vacas e galinhas. A professora C (figura 10), ao tentar resolver a situação, utilizou uma relação entre os dados do problema para resolvê-lo. A pesquisadora observava como a professora resolvia e depois fez algumas perguntas para que elas explicassem sua forma de pensamento.

A professora em questão colocou, primeiramente, 06 (seis) galinhas e 04 (quadro) vacas, somando mentalmente a quantidade de patas de cada animal. Dessa forma, encontrou 12 (doze) patas de galinhas e 16 (dezesseis) patas de vacas, totalizando 28 (vinte e oito) patas. Logo após, diminuiu a quantidade de vacas, rabiscando um dos triângulos que representava uma vaca e acrescentou um círculo, símbolo que representava as galinhas, para que o total de patas fosse 26 (vinte e seis). Veja como a professora resolveu a questão:

<u>Transcrição do 1º encontro (02 de outubro) – Resolução da situação problema pela professora C</u>

Pesquisadora: Por que você riscou uma vaca e colocou uma galinha aqui? (Aponta para o círculo que a professora acabara de colocar).

Professora C: Porque o sítio tem 10 cabeças.

Pesquisadora: Hum. Você podia ter tirado somente uma galinha? Assim, olha: você desenhou seis galinhas. Poderia ter tirado somente uma galinha, ai ficava com cinco galinhas. Dava 10 patas com quatro vacas dava 16. Ai a gente tinha 26 patas.

Professora: É, mas ficam só nove cabeças... Por isso que eu tirei uma vaca e coloquei mais uma galinha.

As respostas às perguntas da pesquisadora mostram que a professora estabeleceu relações entre quantidades da situação problema. Durante sua explicação, percebemos que ela manipulou os dados de uma expressão, levando em consideração os dados da outra expressão, fazendo a relação necessária entre ambas.

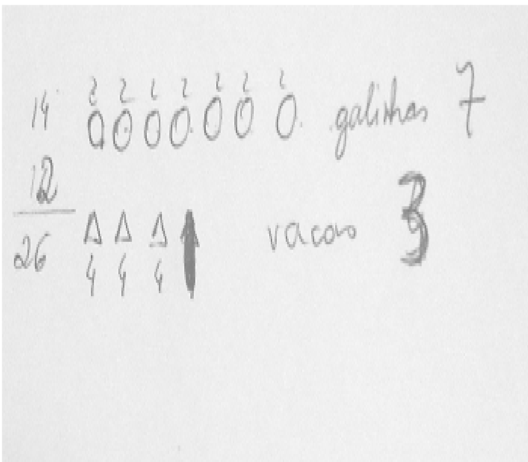


Figura 10 – Relação entre as variáveis do problema demonstrado pela professora C

Durante a oficina, atentamos para a importância de o professor promover uma discussão com os alunos em situações que envolvam relações, de modo que justifiquem as relações entre expressões numéricas ou simbólicas, a fim de que entendam as propriedades numéricas sem recorrer ao cálculo.

O mesmo aconteceu com a professora E, durante a resolução. Ela acertou a situação quando fez a contagem geral de cabeças, percebendo que teria que trocar vacas por galinhas. Na quarta cabeça (da esquerda para direita) ela marcou um V (indicando a quantidade de vacas) e G (indicando a quantidade de galinhas), conforme mostra a figura 11. Apesar de resolver o problema por tentativa e erro e expressar-se aritmeticamente, essas professoras tentam utilizar uma linguagem icônica e simbólica para simplificar uma situação matemática, uma das características do pensamento algébrico.

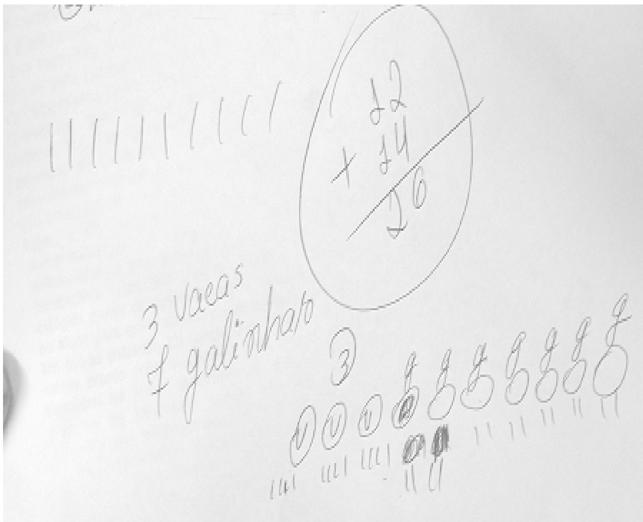


Figura 11 – Representação do problema pela professora E

A professora F também fez tentativas, estabelecendo a quantidade de patas, e aumentando ou diminuindo a quantidade de cabeças. Veja como ela explicou seu pensamento: “Eu tentei e sobrou quatro pernas e depois diminui (risos) G cada uma, duas patinhas. Fui somando as patinhas até chegar 26. Eu tentei e sobrou quatro pernas. Eu fui eliminando as patas.”

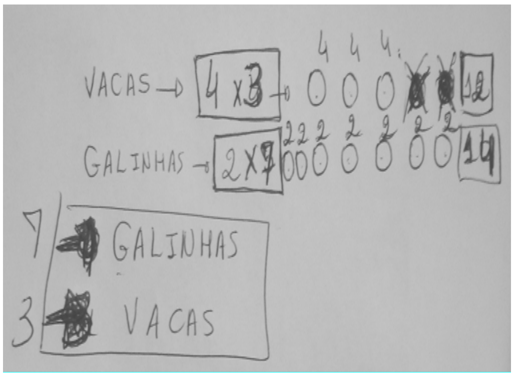


Figura 12 – Representação do problema pela professora F

A professora A, depois de fazer várias tentativas em outro papel acertou a situação através da multiplicação direta. Durante a tentativa sempre multiplicava as cabeças pelas patas de cada animal e ao final somava cada multiplicação, verificando se o resultado obtido era o total de cabeças que o problema mostrava (figura 13).

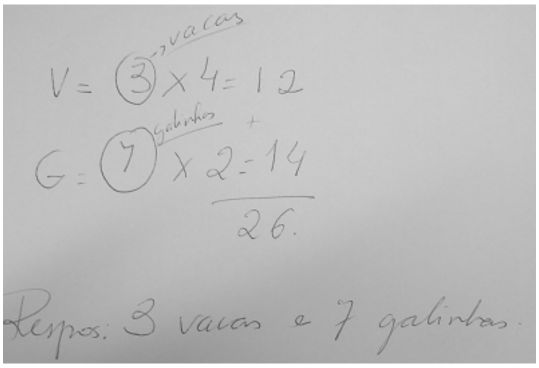


Figura 13 – Resolução da professora A

Observando a figura 13, percebemos que, na primeira linha, a professora multiplicou as cabeças das vacas pela quantidade de patas de vacas e, na segunda linha, a cabeça das galinhas pela quantidade de patas de galinhas. Analisando a resolução das professoras, percebemos que a maioria (quatro das que acertaram) ainda utiliza estratégias ligadas ao pensamento aritmético, o que comprova a ênfase das professoras em resolver problemas, utilizando esse pensamento.

Essas professoras resolveram a situação através de procedimentos aritméticos, utilizando ícones e símbolos, e estabelecendo relações entre quantidades conhecidas de uma mesma situação. Apesar de esses exemplos mostrarem a resolução realizada pelas professoras através da representação icônica, percebemos a tentativa dessas em utilizar uma linguagem simbólica, quando atribuem formas (triângulo e círculos) para vacas e galinhas, ou mesmo quando atribuem letras (g para galinhas e v para vacas) para resolver o problema. No entanto, essa forma de representação ainda não demonstra o domínio do pensamento algébrico, pois essas letras e símbolos estão representando quantidades conhecidas de um problema.

No segundo encontro com as professoras, exploramos duas atividades com a balança de dois pratos. A primeira tinha o objetivo de encontrar o valor de pesos de objetos com formatos diferentes a partir de comparações com pesos conhecidos e a outra tinha o objetivo de comparar potes com formatos iguais e pesos diferentes. Essas atividades fizeram que as professoras refletissem sobre a noção de relação e equivalência.

Existem vários estudos realizados sobre o uso da balança na compreensão de conceitos algébricos (FILLOY, ROJANO, 1984; VERGNAUD, CORTEZ, 1986; DA ROCHA FALCÃO, 1995) que apontam a situação da balança como ferramenta importante no desenvolvimento das noções de igualdade entre os membros de uma equação, o significado de uma incógnita e a manipulação de incógnitas, especialmente no que diz respeito à ideia de que, retirando (ou adicionando) quantidades iguais nos dois lados da balança, o equilíbrio é mantido e a igualdade permanece.

Estudos anteriores apontam a balança de dois pratos como importante aporte físico para o entendimento de manipulações de medidas e equivalências, sendo utilizado como base para a compreensão de equações e incógnitas em situações da vida cotidiana. (CARRAHER, SCHLIEMANN, 1988). Já outros autores analisaram seu uso no contexto escolar (CORTEZ, VERGNAUD, KAVAFIAN, 1990) para que alunos de 8º e 9º anos (antiga 7ª e 8ª série) escrevessem uma equação para representar uma balança em equilíbrio, contendo bilas e pesos conhecidos em um prato e pesos conhecidos em outro prato. O estudo aponta a balança de pratos como ferramenta para estabelecer o significado de equações e manipulações simbólicas com os alunos.

Meira (1996) investigou a balança de dois pratos como elemento mediador no desenvolvimento da compreensão de álgebra como equivalências algébricas e manipulação simbólica com dois estudantes do 8ª ano (antiga 7ª série). Os alunos tinham dificuldades em representar as configurações e manipular as equações de forma simbólica, mas encontraram soluções para os problemas, envolvendo pesos conhecidos e desconhecidos na balança de dois pratos e resolver uma equação após uma referência ao mecanismo de funcionamento da balança em que os pesos estão em diferentes pratos e que o equilíbrio deve ser mantido. Através dessa analogia, os estudantes gradualmente atribuíam significado para ações que usualmente não possuem sentido na prática escolar, tais como a manipulação simbólica e o uso de equações.

Durante as atividades da oficina, as professoras eram motivadas a descobrir o peso de alguns objetos. Um deles foi um pote de farinha que pesava 450 gramas. Uma das maneiras de encontrar o valor desse peso é colocando o pote de farinha juntamente com o peso de 50 gramas em um dos lados da balança e 500 gramas do outro lado. Primeiramente elas pegaram no pote e, utilizando os pesos conhecidos (50g, 100g, 200g, 500g, 1kg) tentaram descobrir seu valor.

Inicialmente descobriram que o peso do pote de farinha era maior do que 300, depois descobriram que era maior do que 350 e, por fim, menor do que 500 gramas. Durante essas testagens, as professoras discutiam sobre as relações encontradas (inequações) entre os pesos testados para ajudá-las a descobrir a equivalência (equação).

O trabalho com inequações foi utilizado nessa atividade no momento em que discutem a relação entre as quantidades de cada prato representadas, quando elas falavam que uma quantidade era "maior do que" e "menor do que", a outra quantidade que estava no outro prato da balança. Já o trabalho com o entendimento de equações foi explorado quando elas interpretavam as inequações, encontrando a equivalência entre os pratos da balança.

Ao discutirem as relações de desigualdade (inequações) encontradas para descobrir o valor do pote de farinha, a professora A explica que não seria ideal colocar na balança o peso de 200 gramas juntamente com o pote de farinha, conforme mostra o relato a seguir:

<u>Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Explicação da professora A sobre qual peso colocar na balança.</u>

[A professora B quer colocar 200 gramas no mesmo lado do pote de farinha enquanto tinha 500 gramas do outro lado da balança.]

Professora A: Mas 300 não é.

Pesquisadora: A professora A tá dizendo que 300 não é, por quê?

Professora A: Não porque ali... [pára para pensar]. Aqui o peso não é 500, a gente já viu que não é 300, então ele vai ser o que? 400 ou 450g.

Pesquisadora: Mas porque não testar e colocar o peso aqui?
Professora A: Porque 500 – 200 = 300 e vai ficar do mesmo jeito de antes.

Quando a professora fala que “mas 300 não é”, quis dizer que, se a professora B colocasse os 200 gramas na balança era como se ela considerasse que o pote de farinha fosse 300 gramas, já que tinha 500 gramas do outro lado. Dessa forma, podemos inferir que a professora B estabeleceu uma estratégia de operação inversa, inferindo que, ao se colocar um peso de um lado, seria o equivalente a diminuir o peso a ser comparado. Portanto, ao colocar 200 do mesmo lado do pote de farinha, estaria agora se comparando o pote com 300 gramas e não mais com 500 gramas. Como já havia sido observado que o peso é menor que 500 gramas, não seria necessário fazer essa comparação.

O relato abaixo mostra como as professoras encontraram a equivalência após adicionar um peso conhecido do mesmo lado do pote de farinha (peso desconhecido). Esta ação determinou encontrar o valor do peso do pote.

<u>Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Explicação das professoras sobre como acharam o peso do pote de farinha</u>

Pesquisadora: E aqui ta mais leve? [Aponta para o pote de farinha].
Professora B: Tá.
Pesquisadora: E aqui mais pesado? [Aponta para o peso de 500 gramas].
Professora B: Tá.
Pesquisadora: E o que é que a gente faz?
Professoras: Coloca peso aqui, este aqui... [Aponta para o lado onde está o peso de 500 gramas e pedem para colocar o peso de 50 gramas].
Pesquisadora: E eu posso colocar 50? [Confirma o pedido das professoras].
Professora D: Pode mas.... [Discussão entre professoras].
Professora B: Posso ver?
[Coloca o peso de 50 gramas no mesmo lado onde está o peso de 500 gramas deixando o mais pesado].
Professoras: Nem mexeu!
Pesquisadora: E o que é que a gente faz?
Professora E: Vai ser dois de 200.
Pesquisadora: Mas só temos um de 200.
Professora E: Também sabe o que você pode fazer? Colocar um pesinho no lado de cá para equilibrar, coloca nesse aqui. [Aponta para o lado onde está o pote de farinha].

Ao perceber que poderiam colocar um peso no mesmo lado do valor desconhecido foram capazes de entender as relações implícitas em uma equação, como a adição de valores em um dos lados da equação para encontrar o equilíbrio.

O relato a seguir mostra o momento em que elas descobrem o valor do pote de farinha logo após essa reflexão das professoras A e E:

Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Entendimento das professoras sobre o sentido de equivalência

Professora B: Vou colocar o... 100. Não deu! [o pote de farinha com o peso de 100 gramas ficou mais pesado do que 500].
Professora E: Então quer dizer que o total de peso aqui é mais para cá... [explica que é preciso mais peso do lado do pote de farinha].
Professora B: [Troca o peso de 100 gramas e coloca de 50 gramas.] Equilibrou!
Pesquisadoras: Então?
Professora A: É 450.
Professora F: É 450!
Pesquisadora: Porque é 450?
Professora B: Vê se eu entendi direito. Aquele pequeno vale 50. E 450 mais 50 gramas vai dar 500 gramas.

Ressaltamos que, no primeiro encontro, as professoras não conseguiram resolver uma equação simples como $x - 3 = 7$, mas com essa atividade conseguiram descobrir o valor do peso desconhecido, fazendo relações entre os pesos e os valores já encontrados. Também destacamos a explicação da professora, quando ela esclarece a igualdade da balança, dizendo que “450 mais 50 gramas vai dar 500 gramas”. Consideramos esta explicação voltada para o raciocínio aritmético, pois a professora relaciona o equilíbrio da balança não como uma equivalência, mas como uma relação unidirecional voltada para a soma de partes em busca de dar um resultado.

Depois que descobriram esse primeiro peso, a pesquisadora perguntou o que elas acharam de trabalhar com a balança:

Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Percepção das professoras de como seus alunos trabalham com números

Professora F: É legal trabalhar com essa balança, mas não podemos colocar esses pesos de 50, 300, 500, pois eles [alunos] não sabem diminuir com dezenas e centenas.

Percebemos mais uma vez as professoras considerando uma dificuldade dos alunos como barreira para realizar uma atividade. Entendemos que os alunos, dentro dessa atividade, podem trabalhar com centenas e dezenas, pois já trabalham com esses valores no cotidiano. Além disso, o pensamento dessa professora não se confirma com resultados de pesquisas anteriores, na qual os alunos manipularam os pesos, fizeram cálculos mentais sobre situações com pesos que envolvem as dezenas e as centenas. (FREIRE, 2007).

Com o intuito de saber como a atividade realizada pode favorecer a aprendizagem da álgebra, a pesquisadora pergunta para as professoras:

Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Percepção das professoras de como a balança de dois pratos contribui para a aprendizagem de conceitos algébricos

Pesquisadora: Por que é que eu trouxe a balança? O que eu queria mostrar para vocês? O que é que a balança trabalha? Trabalha o que? E ai gente... [As perguntas aqui descritas foram feitas pausadamente na espera de alguma resposta das professoras]
Professora F: Medida de massa...
Professora C: Ela trabalha adição, subtração...
Pesquisadora: Certo. Mas com essa atividade, vocês acham que os alunos de vocês podem aprender alguma coisa sobre equação?
[Silêncio].
Pesquisadora: Hein? Será que já daria para eles aprenderem?
Professora A: Dava.
Professora F: E para eles já tem que levar de forma concreta, para os alunos.

O que nos chama atenção nesse recorte é o fato de as professoras ligarem sempre o trabalho de Matemática com o concreto quando a professora fala “para eles já tem que levar de forma concreta”. Esta crença de que o aluno só aprende com o concreto também foi manifestada no primeiro dia da oficina de formação. Fomentamos aqui a discussão que, enquanto as professoras tiverem a concepção que seus alunos só aprendem com o concreto, dificilmente criarão situações que trabalham com a abstração do conhecimento, raciocínio importante para o campo conceitual algébrico.

Para descobrir o peso de 400 gramas (um pote de granola), as professoras mais uma vez conseguem fazer a estratégia de colocar um peso conhecido (100 gramas) ao lado do pote de granola. Primeiro colocam o pote de granola em um dos lados da balança e o peso de 500 gramas no outro lado. Durante a atividade, as professoras não podiam pegar nos potes para sentir seu peso, apenas os viam e a pesquisadora colocava e os retirava da balança de acordo com o pedido delas. Decidimos fazer assim para que as professoras não usassem a estimativa para tentar descobrir os valores dos potes. Apesar disso, percebemos que, durante as testagens, as professoras analisavam o formato e tamanho do pote para tentar descobrir o peso.

Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Interação entre as professoras utilizando a estratégia de operação inversa

[Professoras pedem para colocar o peso de 500 gramas].
Professora F: Tá pesado demais... [Refere-se ao peso de 500 gramas].
Pesquisadora: E o que é que a gente tem que fazer?
Professora A: Bota 100.
Pesquisadora: Eu boto aqui ou eu boto aqui?
Professoras: [Apontam para o lado da balança onde tem o pote de granola].
Pesquisadora: Eu boto 100 aqui? Por que que eu vou botar 100?
Professoras: Porque você não tem 400.
Pesquisadora: É, eu não tenho 400, eu só tenho 200, 50, 100, 1 Kg, mas eu não tenho 2 de 200, né? Vocês acham que é 400?
Professora B: Ninguém pegou né? A gente ta só olhando. [Explica que não pegou no peso].
Professora F: É!
Professora C: Quando a gente pega tem mais noção!
Pesquisadora: Então vamos colocar o 100 onde vocês pediram. [A balança entre em equilíbrio]. E ai? Quanto vale a granola?
Professora C: 400.
Pesquisadora: Por quê?
Professora B: Porque 400 com mais 100...
Professora A: Porque 400 com mais 100 é igual ao que tem aqui.

Nesta situação, elas tinham descoberto que o pote de granola pesava menos do que 500 e mais do que 350 gramas. Portanto, ele só poderia pesar 400 ou 450. Quando pedem que coloquem 100 gramas do mesmo lado da balança, em que está o pote de granola, podemos inferir a intenção das professoras em testar se o pote pesa 400 gramas.

No peso seguinte (garrafa de soro), percebemos mais uma vez que usaram a estratégia de operação inversa, pois colocaram um peso conhecido ao lado da garrafa de soro para encontrar a igualdade.

<u>Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Interações entre as professoras para descobrir o peso da garrafa de soro</u>

Pesquisadora: Bota onde? [perguntando onde coloca a garrafa de soro].
Professoras: Em qualquer lado...
Pesquisadora: E agora?
Professora D: 500, vai!
Professora G: 500.
Pesquisadora: Coloco mesmo 500?
Professora B: Bota logo 500.
Pesquisadora: 500?
Professora A: 500 pra experimentar...
Professora G: Pra comparar...

Ao continuar com as testagens, perceberam que o peso de 500 gramas era mais pesado do que a garrafa de soro e pedem para trocar o peso de 500 gramas por 300 (100 + 200 gramas). Concluíram então que a garrafa de soro é maior do que 300 e menor do que 500 gramas.

<u>Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Continuação do diálogo das professoras para descobrir o peso da garrafa de soro</u>

Professora A: 500 é mais pesado.
Professora B: Realmente...
Pesquisadora: E aí? Esse aqui tá mais pesado? O que eu faço? O que é que eu posso fazer?
Professora B: Tira...
Professora A: Menos... Bem menos que 500. Bota 200 e 100.
Professora B: Bota do outro lado pra ver...
Pesquisadora: Bota 200 e 100? Eu tiro o 500? [perguntando se tira as 500 gramas e coloca 100 juntamente com o peso de 200 gramas.]
Professoras: Tira!
Pesquisadora: 100 e 200. Que é que a gente já sabe?
Professoras: Hã?

Pesquisadora: O que é que a gente já sabe?

Professora F: Menos pesado que 500 e mais que 300.

Professora C: Mais que 300 e ...

Pesquisadora: Então é 400 de novo!

Pesquisadora: 400?

Professora: Bota 500 e 100 pra cá. [pedindo para colocar 500 em um dos lados da balança e depois 100 do outro lado].

Pesquisadora: 500... e 100

Professoras: Ah, Rá! Nada! Caiu...

P – Menina é 50! [pensando na possibilidade de trocar o peso de 100 gramas pelo peso de 50 gramas].

Pesquisadora: Porque que vocês querem tirar 100 e colocar 50? Botar 50?

Professoras: – É.

Pesquisadora: Boto 50 aqui?

Professora B: É. Bota 50.

A professora percebeu que, ao diminuir o peso de um dos lados da balança, pode encontrar o equilíbrio na balança. Durante essa atividade, podemos perceber que as professoras fizeram análise de relações de desigualdade (inequações), utilizaram as noções de transformação e o pensamento qualitativo, importante meio para esboçar caminhos e respostas entre relações matemáticas.

Segundo os PCN, o pensamento qualitativo contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico) sendo, portanto, uma importante ferramenta para criação de modelos numéricos, como também de seleção, organização e produção de informações e construção de relações abstratas e genéricas. (BRASIL, 1998).

O próximo objeto testado foi um pote branco que pesava 900 gramas. Como o pote era maior do que os outros, as professoras pediram que colocassem um quilo na balança. Assim, perceberam que o pote branco era mais leve do que um quilo. Logo depois, pediram que colocassem 200 gramas no mesmo prato do pote branco e perceberam que o pote, juntamente com 200 gramas, era mais pesado do que um quilo. Então as professoras pediram que fossem retirados 200 gramas e que colocassem 100 gramas. A pesquisadora, então, pediu que as professoras explicassem o porquê da troca.

<u>Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Interações entre as professoras para descobrir o pote branco</u>

Pesquisadora: Se eu botar 200 aqui e equilibrar [aponta para o prato no qual as professoras sugerem colocar o peso de 200 gramas], esse aqui [pote branco] tem quanto?

Professoras: 800.

Pesquisadora: Porque que é 800?

Professora D: Por que é...

Professora F: Mil menos duzentos...

Pesquisadora: Mil menos 200, que vai dar o que tem aqui?

Professora C: O peso é 800 com 200... [Neste momento ainda não colocamos o peso de 200 gramas na balança].

Pesquisadora: Então seria assim, esse é 800 com mais 200 é igual ao que tem aqui, né?

[Professoras confirmam e pesquisadora coloca o peso de 200 gramas no prato da balança].

Professora A: É não...

Pesquisadora: E então vocês achavam que era quanto?

Professora A: 800.

Professora C: Olha ela ai... [surpresa pela resposta da professora A].

Pesquisadora: E agora, é maior ou menor que 800?

Professora F: Eu achei que era 700, 750 ou 800, mas agora... Eu volto atrás.

Pesquisadora: É maior ou menor que 800?

Professora B: Maior.

Professora C: Menor.

Pesquisadora: Menor ou maior?

Professora D: Menor.

Professora A: Troca pelo de 100!

Professora B: Maior que 800.

Pesquisadora: Porque que é maior que 800?

Professora A: Porque é 900.

Professora C: Porque... Ele tem mais de um quilo.

Pesquisadora: A gente botou aqui 200 e aqui ficou mais pesado.

Professoras: Foi.

Pesquisadora: Então ele é ainda maior que 800, por quê?

Professora A: Porque ... Coloca o 100.

[Risos]

Pesquisadora: Por que colocar o 100?

Professoras: Para comparar.

Pesquisadora: E o que mais? E aí?

Professoras: Coloca 100.

Pesquisadora: Vocês acham que esse pote é maior ou menor que 800?

Professoras: Menor!

Pesquisadora: Por que que é menor que 800?

[Silêncio]

Pesquisadora: Vamos lá gente. Vamos tentar!

Professoras: É que *tamo* cansadas.

Pesquisadora: Olha, aqui não está mais pesado? [aponta para o lado da balança que tem o pote e o peso de 200 gramas].

Professoras: Tá...

Pesquisadora: Então aqui a gente tem que diminuir ou aumentar o peso. Aqui.

Professoras: Diminuir.

Os últimos pesos a serem testados foram três saquinhos que pesavam 50 (cinquenta) gramas, cada. Os três foram pesados juntos. Primeiro, as professoras pegaram nos saquinhos e estimaram que eles pudessem pesar 300 (trezentos) gramas, sendo um peso de 200 (duzentos) e outro de 100 (cem) gramas. Perceberam que 300 (trezentos) gramas era mais pesado; assim, tiraram 100 (cem) gramas e perceberam que 200 (duzentos) gramas era mais pesado que os saquinhos. Depois tiraram o peso de 200 (duzentos) gramas, colocaram o de 100 (cem) e depois o peso de 50 (cinquenta) gramas. Após constatar que os três saquinhos juntos pesavam 150 (cento e cinquenta gramas), a professora falou que cada peso possuía 50 (cinquenta) gramas.

Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Interações entre as professoras para descobrir o peso de três saquinhos

Pesquisadora: Por que cada saquinho ai tem 50?

Professora: Três vezes cinquenta?

Pesquisadora: Mas como é que a gente pode garantir que todos são do mesmo peso?

Professora E: Aproximado.

Pesquisadora: Só pelo tamanho?

Professora E: Não.

Professora F: Sei não.

Pesquisadora: Tem a mesma coisa dentro de cada um?

[Discussão dos professores sobre a atividade]

Professora A: Mas não tem isso não, viu?

Pesquisadora: Por quê?

Professora A: Um quilo de pena é do mesmo tamanho de um quilo de algodão? Quer dizer, de ferro?

Professora F: Mas não é o tamanho não, mas o peso...

Professora C: Aqui os tamanhos são iguais.

Professora F: Vai pelo peso ou pelo tamanho?

Professora A: [pesa cada saco um por um].

Mais uma vez percebemos que as professoras manipularam os dados do problema, desenvolvendo ações e estratégias para encontrar o peso desconhecido, demonstrando o conhecimento de sintaxe (regras de resolução) de uma equação, que, de acordo com os PCN, é um elemento importante para o entendimento de uma equação como equivalência e não como expressão para indicar um resultado como na aritmética. (BRASIL, 1998).

As noções de equação devem ser exploradas em situações nas quais os alunos possam compreender seu sentido como uma equivalência em situações de exploração. A compreensão desse sentido foi trabalhada em vários momentos da oficina, quando perguntávamos às professoras por que elas queriam trocar, colocar ou tirar algum peso. Apesar de nem sempre elas explicarem o motivo das trocas, como no exemplo referido, discutimos a importância de elas priorizarem esses questionamentos e o processo de raciocínio com seus alunos para resolução de situações problemas. Essa orientação foi dada para que as professoras entendessem e refletissem sobre a importância de desenvolver o raciocínio qualitativo no sentido de fazer que os alunos pensem mais no processo do que no resultado. Segundo Lins e Gimenez (1997), as dificuldades dos alunos em entender álgebra ocorrem devido ao ensino totalmente mecânico, baseado na obtenção de respostas ao invés de entender o processo de resolução. Entendemos que, para pensarmos em uma educação algébrica nos anos iniciais, é importante que os professores compreendam a importância de valorizar esse tipo de pensamento.

Percebemos também a utilização de relação e equivalência durante as atividades do OA *Balança Interativa*. Estudos anteriores (FREIRE, 2007; CASTRO-FILHO, LEITE, FREIRE, PASCHOAL, 2003; CASTRO-FILHO, 2007) mostram como esse auxilia na construção do pensamento algébrico em alunos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental uma vez que trabalha com noções de igualdade, desigualdade e incógnita.

Assim como nas atividades da balança concreta, as professoras desenvolviam estratégias para encontrar o valor das caixinhas. Essas estratégias também coincidem com as pesquisas realizadas com crianças e adolescentes pelos autores desse trabalho. (CASTRO-FILHO, LEITE, FREIRE, PASCHOAL, 2003; CASTRO FILHO, FREIRE, FERNANDES, LEITE, 2008). Dentre elas estão: estratégia de busca pela metade, teste do valor intermediário e estratégia subtrativa.

A estratégia de busca pela metade consiste em tentar descobrir o valor de um peso desconhecido (caixinha A, por exemplo) de um lado da balança e o peso 5 (cinco) do outro lado. Assim, sabe-se de antemão que, se o peso desconhecido é maior, menor ou igual a 5 (cinco). Se o peso desconhecido for maior que 5, ele só poderá assumir os valores 6, 7, 8 ou 9; e se o peso desconhecido for menor que 5, ele só poderá assumir os valores de 1 a 4, dentro de uma escala de 1 a 10. Se encontrar que o peso é menor que 5, por exemplo, o próximo valor a ser testado poderia ser o 2 ou o 3. Essa estratégia reduz pela metade o número de testes para encontrar o valor do peso desconhecido. Embora essa estratégia ainda possa ser considerada um raciocínio aritmético, ela representa uma base para compreender algoritmos de busca em linguagens de programação.

A estratégia teste do valor intermediário foi utilizada, quando apenas três valores são possíveis para o peso desconhecido. Por exemplo, se a balança demonstrar que D é menor do que 6 (seis) e analisando que os valores 1 e 2 já foram atribuídos para os outros valores desconhecidos, percebe-se que D só poderá ter o valor de 3, 4 ou 5. Dessa maneira, as professoras utilizaram o valor intermediário entre os três valores possíveis. Neste caso, seria o peso 4 (quatro), pois com este valor, podemos descobrir mais rapidamente o peso desconhecido. Se, por exemplo, o peso D fosse maior que 4 (quatro), seu valor só poderia ser 5 (cinco) e, se menor que 4 (quatro) seu valor só poderá ser 3 (três). Dessa forma, com apenas um teste é possível descobrir o valor do peso desconhecido. O uso dessa estratégia requer planejamento e demonstra que o sujeito não está utilizando o OA de forma aleatória.

A estratégia subtrativa consiste em verificar que acrescentar um peso em um prato da balança é equivalente a subtrair um peso do mesmo valor no outro prato da balança. Por exemplo, uma dupla de professoras encontrou o equilíbrio, possuindo os pesos G e 4 em um dos pratos e o peso 9 no outro prato e utilizar essa informação para concluir que G é igual a 5. Essa estratégia também foi encontrada nas atividades com a balança de dois pratos, quando entendiam que tinham que colocar pesos conhecidos mais leves ou pesados para estabelecer a igualdade na balança. A diferença é que no OA *Balança Interativa* essa estratégia é utilizada não somente para encontrar uma igualdade, mas também a para encontrar um valor de uma quantidade desconhecida quando a relação não é de igualdade. Veja a interação entre uma dupla de professoras (C e A) ao descobrir o valor do peso I.

<u>Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Utilização da estratégia subtrativa das professoras C e A</u>

Professora C: I mais 5 (I + 5) é maior do que 8.

Professora A: Então I só pode ser 4!!

Professora C: Por quê?

Professora A: Olha que o 3 não pode ser, se não seria igual a oito. Se fosse 2 seria menor do que oito e não maior. Porque 2 mais 5 é sete. Se não é 3, nem 2, é quatro.

Professora C: Pode ser o cinco também. Cinco mais cinco é maior do que 8.

Professora A: É mais o cinco já saiu. Foi o peso F. Olha aqui.

Professora C: É mesmo.

Essa generalização de uma igualdade para uma desigualdade demonstra que o sujeito está pensando em termos de relações entre os valores no prato e não apenas buscando o equilíbrio ou igualdade.

A partir das considerações entre as duas atividades podemos descrever algumas diferenças entre a atividade com o OA Balança Interativa e balança de dois pratos. Comparando as duas atividades, destacamos algumas diferenças em usar o computador simulando uma balança de dois pratos. Uma delas é que nas atividades na balança de dois pratos os professores sempre buscaram encontrar o valor dos potes através de uma igualdade que era representada pelo equilíbrio na balança. Já no OA, o objetivo não é somente equilibrar, mas descobrir os pesos desconhecidos, o que algumas vezes pode ser atingido através do desequilíbrio. No objeto de aprendizagem, os professores encontram os valores das incógnitas a partir de análises das outras incógnitas da atividade, ou seja, a mesma se torna uma ferramenta para encontrar os pesos desconhecidos ao invés de resolver apenas uma determinada situação.

Outra diferença que as atividades no OA *Balança Interativa* apresentam em relação à balança de dois pratos é no trabalho de desenvolvimento de noções algébricas. Na balança de dois pratos, o desequilíbrio destes dá alguma indicação da estimativa entre as diferenças de pesos, pois se colocarmos ou compararmos dois pesos, um pote de 200 gramas e outro de 300 gramas nos dois pratos, terão uma relação perceptível diferente do que se colocássemos um de 200 gramas e outro de 900 gramas nos dois pratos.

No OA *Balança Interativa,* os valores dos pesos desconhecidos não podem ser determinados por aproximação, pois as relações de desigualdade são somente *maior que* e *menor que,* não havendo nenhuma indicação perceptível do tamanho dessa relação. Portanto, ao colocarmos A e 5 e a balança informar que A>5, não pode ser determinado diretamente o valor de A ou concluir se esse valor é um pouco maior (6) ou muito maior (9). É preciso usar outras informações já encontradas ou encontrar novas informações, manipulando a balança.

Essa restrição do objeto afasta o uso de estimativas e, portanto, de soluções aritméticas. Os professores tiveram oportunidades de analisar várias situações de desigualdade para encontrar o valor dos pesos desconhecidos. Por exemplo, os professores encontraram que B>3 e B<5 se utilizam dessas duas descobertas para concluir que B=4.

Outra diferença do Balança *Interativa* sobre a manipulação de uma balança de dois pratos é que, no objeto de aprendizagem, cada vez que um nível é iniciado os pesos desconhecidos assumem novos valores. Isso levou os professores a compreender que um mesmo símbolo (os pesos desconhecidos com letras) pode ter valores diferentes. Esse conhecimento é essencial na álgebra para se compreender a forma de representar incógnitas em equações e posteriormente variáveis em funções.

Devido a essas diferenças relacionadas com o material, as atividades no OA *Balança Interativa* se aproximam mais do pensamento algébrico por possibilitar o trabalho em cima do desconhecido uma vez que não podemos fazer estimativa sobre os pesos. Outra diferença da atividade com a balança de dois pratos para o OA é referente às mudanças dos pesos para cada atividade. Durante as atividades, os professores percebem que os pesos mudam de valor, ou seja, para um mesmo peso (representado por uma letra), a cada novo jogo, seus valores mudam. Essa característica do objeto de aprendizagem se relaciona com a noção do sentido de variável dentro de perspectiva da atividade algébrica, na qual um mesmo símbolo pode, em contextos diferentes, representar diferentes quantidades.

As atividades com objeto de aprendizagem se modificam facilmente, pois a cada vez que se seleciona um novo jogo, os valores dos pesos mudam. Por exemplo, se jogarmos a primeira vez e o valor do peso A for igual a oito, na segunda vez, o valor do peso A será outro. Já na atividade com a balança concreta, os valores dos objetos são modificados caso os professores façam isso, portanto, se uma garrafa pesa 350 gramas, o professor terá que confeccionar novos pesos ou mudar este peso para que os alunos possam interagir novamente com a atividade.

As atividades de manipulação na balança de dois pratos permitiram que os professores reconhecessem através de estimativas, o valor do peso desconhecido. Isso aconteceu porque, algumas vezes, na balança de dois pratos, podemos sentir e testar o peso com a mão e no computador isso não é possível. Fazer hipóteses de algo desconhecido trabalha a relação dos pesos ao contrário de apenas estimar seu valor a partir de algo que pode ser sentido. As atividades na balança de dois pratos também podem ser realizadas sem que as professoras sintam o objeto, como fizemos na oficina. Mas há uma tendência a reconhecer o peso dos objetos e a utilizar estimativas para encontrar o valor dos pesos.

Essa diferença entre a estimativa e o raciocínio algébrico pode ser também analisada sob o ponto de vista da diferença entre conceitos espontâneos e científicos. (VYGOTSKY, 1986). O que se deseja não é eliminar a estimativa, mas possibilitar que os alunos atribuam significados aos conceitos científicos ou à manipulação simbólica da mesma forma que o fazem com os conceitos espontâneos ou com a manipulação de quantidades.

Durante as discussões, perguntamos quais as diferenças que as professoras analisaram que o objeto de aprendizagem facilita na compreensão de conceitos algébricos. Uma das professoras comentou: "Aqui o estudante pode ver a expressão e começar a entender alguns símbolos". Neste momento, percebemos um indício de que elas compreendem a importância de entender o sentido de equação, uso de incógnitas e a importância de fazer a leitura de uma linguagem simbólica dentro de uma situação. Outra professora acrescenta: "Parece que aqui a gente pensa mais". A professora explicou: "Com aquela balancinha a gente pode pegar e já sabe mais ou menos quanto é aqui a gente não consegue".

Em estudos anteriores (FREIRE, FERNANDES, CASTRO-FILHO, 2008; CASTRO-FILHO, FREIRE, FERNANDES, LEITE, 2008) também foi possível fazer comparações de como estudantes resolviam situações-problema, usando os dois materiais (balança de dois pratos e OA Balança Interativa). Pode-se dizer que o contexto e as características do OA favoreceram o surgimento de raciocínio próximas do pensamento algébrico, pois trabalhavam com incógnitas, equações e inequações e comparação entre pesos desconhecidos, utilizando representações. Durante as atividades do OA percebe-se a construção de um pensamento abstrato e o entendimento das noções algébricas. As atividades no OA não podem ser resolvidas através de estimativas, conduzindo o aluno a criar novas estratégias de resolução.

As discussões posteriores a essa atividade giraram em torno da importância de fazer que as professoras compreendessem o sentido e montagem de uma equação e incógnitas, a partir de atividades como essas, dando oportunidades para que elas falassem e registrassem sobre o que descobriram durante a oficina. Dessa forma, estávamos procurando favorecer oportunidades para o desenvolvimento de uma linguagem matemática.

As estratégias das professoras perante as atividades como o OA foram importantes para que elas conhecessem e refletissem sobre as regras de resolução de uma equação a partir de situações diferentes e entrassem em contato com o que Vergnaud (1990) chama de *invariantes operatórios*.

Para Da Rocha Falcão (1993), o pensamento algébrico envolve, além de outros aspectos, o conjunto de procedimentos necessários à resolução de uma equação, tais como: captura e descrição dos dados de um problema, utilização de símbolos para representar os valores desconhecidos, montagem da equação, resolução da equação, conferência dos resultados e solução ao problema. Estes procedimentos servem de suporte representacional na resolução de problemas algébricos.

Na próxima seção, discutiremos as atividades que contribuíram para o trabalho com quantidades desconhecidas e uso de incógnitas.

4.1.4 Trabalho com relações entre quantidades desconhecidas e o uso de incógnita

Nesta seção, discutiremos como o trabalho com quantidades desconhecidas e uso de incógnitas apareceu nas atividades com a utilização da balança de dois pratos para comparar pesos, e durante a utilização do OA *Feira dos Pesos*. E depois, como esta categoria se manifestou também na atividade do OA *Balança Interativa*.

Na atividade de comparar pesos desconhecidos na balança de dois pratos, permitimos que as professoras primeiramente sentissem o peso de todos os potes. Depois que elas pegaram em todos os potes, eles faziam comparações de dois em dois potes e comparavam entre si, cada um em uma das mãos e descobriam qual o mais pesado. Depois separavam esse peso e procurava o outro mais pesado dentro dos elementos que restaram, utilizando a mesma estratégia (comparar dois pesos em cada mão). Essa atividade foi feita rapidamente. Na medida em que sentiam o peso do pote em suas mãos, já o classificavam. Outras vezes, quando sentiam o peso de outro pote, não precisavam pegar novamente para saber qual a relação com um novo pote, pois lembravam o peso do pote anterior.

Logo quando as professoras terminaram, a pesquisadora perguntou como elas sabiam que o amarelo era o mais pesado de todos. Elas responderam que estavam sentindo, e era só ver sempre qual o mais pesado ou o mais leve. Depois, a pesquisadora misturou os pesos e sugeriu que descobrissem a relação na balança de dois pratos. No entanto, elas não podiam mais pegar nos pesos, apenas falar qual pote queriam que testassem na balança. Apesar de ter feito rapidamente da primeira vez pegando nos pesos, elas discutiram qual seria o primeiro passo a ser feito.

Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Diálogo com as professoras e pesquisadora durante a atividade de comparação entre pesos

Professoras: Vamos ver qual o maior ou o menor?
Pesquisadora: Vocês decidem. Querem ordenar do maior ou do menor?
Professoras: Do maior para o menor. Qual a gente coloca? Como a gente faz?
Pesquisadora: Como que vocês iam ver se um é mais pesado que o outro? Sem pegar.
Professora C: A gente tem que ver a quantidade.
Pesquisadora: Mas não tem quantidade.
Professora F: Sem ver a quantidade?
Pesquisadora: Isso.
Professora F: A gente ia ter que ver a quantidade.
Professora D: Ahh! A gente tem que comparar.
Pesquisadora: Como vocês iam fazer isso?
Professora A: Não tem como ver as gramas não? Não, né?
Professora F: Não tem a quantidade não?
Professora D: Vai comparando com outro. A gente ia ter que pegar dois pesos e comparar. Pega o verde com o preto. Pronto, o verde é mais pesado. E deixa o verde do lado.
R: E agora o que a gente faz?

As professoras solicitaram para tirar o verde e pesar o pote preto com o vermelho. Percebendo que o preto era mais leve, pediram que tirasse o preto e testasse o vermelho com o amarelo. Dessa maneira, percebemos que não estavam usando nenhuma lógica ou raciocínio de resolução para descobrir a relação de ordem entre eles, já que pesavam os potes aleatoriamente. Percebendo isto, perguntamos por que as professoras ao comparar o preto com o verde tiraram o verde. Esta pergunta foi feita com objetivo de fazer que as professoras criassem estratégias de comparação e de ordem entre os pesos. Elas respondem que o verde era mais pesado. Perguntamos depois porque tiraram o preto. As professoras respondem que o tiraram porque era o mais leve. Por fim, perguntamos o que é necessário fazer para descobrir o mais pesado, tirar o mais leve ou o mais pesado. Todas fazem um “Ahhh!”, demonstrando que descobriram como podem encontrar a relação entre eles e fazer a relação de ordem.

Alguma professora fala: “Temos que encontrar o maior, então tira o menor”. Depois disso as professoras comparam os pesos, deixando sempre o maior na balança e tirando o menor. Dessa maneira, encontraram uma estratégia para fazer a ordem entre os pesos.

Diferente de ordenar com as mãos, elas sentiram necessidade de anotar a relação entre os pesos encontrados. Essa diferenciação na atividade possibilitou a representação dos pesos, alargando seu conhecimento em relação às noções de inequações. A cada peso testado elas anotavam no quadro a relação entre eles para que, em uma testagem posterior, relembrassem essa relação. O registro de situações matemáticas é fundamental nos processos de aprendizagem de conceitos matemáticos, que necessita da elaboração de uma lógica que traduza a representação desses conceitos.

A partir do momento que elas não sentiam o peso do pote, e registraram a relação entre eles, puderam descobrir a relação de transitividade, mostrada no recorte a seguir:

<u>Transcrição do 2º encontro (15 de outubro) – Explicação da professora C sobre a descoberta da transitividade</u>

Professora C: Se ele, o amarelo é mais pesado que o verde, e o verde é mais pesado que o preto, então o amarelo é mais pesado que o preto também.

A relação de transitividade é uma das propriedades lógicas da igualdade, uma importante característica para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, esse tipo de relação construída permite a construção de um pensamento abstrato. (NUNES, BRYANT,1997). Essas estratégias eram discutidas com as professoras ao longo da oficina, para entender como elas poderiam aproveitar as atividades com intuito de reconhecer como seus alunos poderiam desenvolver, também, características do pensamento algébrico.

Quando perguntadas sobre a diferença entre a atividade de ordenar pegando nos potes e sem sentir o peso dos potes, as professoras respondem:

<u>Transcrição do 3º encontro (17 de novembro) – Explicação da professora C sobre a diferença das duas atividades</u>

Professora C: Na balança utilizamos nosso raciocínio e quando a gente usa as mãos a gente consegue ver logo o peso, pois a gente consegue pegar nos pesos. A partir do momento que não podemos pegar, temos que montar outras relações.

Pesquisadora: Como assim outras relações?

Professora C: Assim... pensar diferente, pensar mais sobre a relação entre os potes.

A fala da professora demonstra reconhecer a importância de elaborar outras estratégias de resolução, para encontrar a relação entre os pesos quando não podem pegar ou sentir o peso dos potes. Esse reconhecimento é importante para o planejamento de atividades, nas quais podem desenvolver estratégias ligadas ao pensamento algébrico.

Perguntamos por que essa atividade trabalha com o pensamento algébrico e algumas responderam: “Porque são possibilidades”, “Trabalha com valor desconhecido”, “A gente compara os pesos”. Depois dessas afirmações, conversamos sobre a importância da comparação e relação entre pesos conhecidos e desconhecidos para o desenvolvimento de conceitos algébricos.

Depois da atividade da balança de dois pratos comparando pesos, as professoras foram convidadas a conhecer o OA *Feira dos Pesos*. Assim como nas primeiras interações com a balança de dois pratos, as professoras colocavam o peso de forma aleatória, sem usar alguma relação entre eles e o retiravam sem uma sequência lógica. Por exemplo, se estavam procurando o maior peso, não o comparavam com outros para saber se ele realmente era o maior.

Outro aspecto observado nas primeiras testagens foi a dificuldade das professoras em interpretar o que a balança apontava, pois erravam a leitura da balança. Quando um peso era maior do que o outro elas falavam que era menor. No começo da atividade, também foi observado que as professoras liam o resultado das comparações na balança somente da esquerda para a direita: se A era maior do que B, elas falavam “A maior do que B” e nunca “B é menor do que A”. Contudo, depois de algumas testagens conseguiam fazer a leitura do resultado das comparações tanto da esquerda para direita como da direita para esquerda. Interpretamos que isso se deve ao fato de que as professoras estavam conhecendo o material e entendendo suas características e propriedades. Então a leitura que faziam da balança demonstrava a maneira do como sabiam interpretar aqueles dados. Após compreender a lógica, conseguiam fazer essa leitura de qualquer maneira, seja da esquerda para direita ou da direita para esquerda.

Ao utilizar o OA *Feira dos pesos* as professoras entraram em contato com outra representação para a resolução de uma atividade ligada ao mesmo conceito, mas que exige processos cognitivos e respostas diferentes. Segundo Vergnaud (1994), a aprendizagem de um campo conceitual é necessária uma grande variedade de situações e representações que deem sentido aos conceitos e procedimentos no qual queremos que os alunos aprendam. Por exemplo, a situação da atividade de comparar pesos sem pegar no pote ajudou as professoras a entender um componente importante das relações entre quantidades desconhecidas, que é a relação de transitividade. Essa compreensão foi expressa na forma que as professoras adotaram para resolver os problemas e justificar sua solução.

Essas situações propiciarão a construção de esquemas que são os comportamentos elaborados pelo sujeito através de uma situação ou por um significante (representação simbólica) que constituem o sentido dessa situação.

Observamos também que, mesmo as professoras utilizando a relação transitiva, preferiam fazer o teste na balança de dois pratos do OA para descobrir a última relação. As docentes, mesmo falando explicitamente sobre as relações encontradas, pareciam não acreditar na relação que encontraram e testavam a veracidade dessa relação no balança do OA. Por exemplo, uma dupla de professoras descobriu que A é maior do que B e B menor do que C, então podemos inferir que o A será maior do que C sem precisar testar na balança. Porém, depois de fazer algumas comparações, as professoras, com algumas intervenções da pesquisadora, não testavam os pesos, quando descobriam as relações de transitividade. As intervenções da pesquisadora giravam em torno de encorajar as professoras a confiarem nas relações encontradas nas conversas das duplas, exemplo: “se vocês concordam que A é maior do que C, já que viram que A é maior do que B e B é menor do que C, não precisa testar na balança.”

Assim como na balança de dois pratos, ao utilizarem o OA *Feira dos Pesos,* as professoras sentiram a necessidade de fazer anotações para relembrar as relações dos pesos. Como o OA registrava as relações no botão *histórico*, era comum escutar entre as duplas o pedido de rever o histórico.

Durante a atividade, as professoras podiam escolher o primeiro nível novamente, (comparando somente três pesos) ou ir para os outros níveis. Quando escolhiam o segundo nível (comparação de quatro pesos), acharam que as relações entre eles continuavam iguais ao do nível anterior. No entanto, se repetissem o nível ou fossem para um novo nível, as relações entre os pesos mudavam, fazendo que o usuário descobrisse novamente a relação entre eles. Essa característica do OA é uma vantagem em relação à atividade de comparar os pesos na balança, uma vez que não precisamos reajustar os pesos do pote para se ter nova relação. Esta característica favorece aos professores, que optem a trabalhar com este OA, mais oportunidade de diálogo entre os usuários durante cada nível. O diálogo a seguir demonstra parte de uma interação entre uma professora e a pesquisadora:

Transcrição do 3º encontro (17 de novembro) – Explicação de uma professora como encontrou a relação de transitividade

Professora C: Qual o mais pesado de todos mesmo? O A? Não o B!

Pesquisadora: A gente viu que o A é maior do que o B e maior do que o E, né? Mas aí a gente viu que o maior do que o A é o D e o C. Qual [peso] temos que testar agora?

Professora C: O B e o C.

Pesquisadora: Assim a gente descobre qual o maior de todos?

Professora C: O C.

Pesquisadora: E depois? Qual o outro mais pesado, depois do C?

Professora C: É o B. É o B?

Pesquisadora: Por que é o B?

Professora C: Deixa eu ver. Eu testei A com B e o A é mais pesado. A com C e o A é mais pesado. O A com o D e o E e vi que o A era mais leve. Então o D e o E são mais pesados que os pesos que eu testei com o A, que são os B e o C.

A professora explica sua análise durante as testagens. Portanto, se A maior do que B e C e menor do que D e E, os pesos D e E são mais pesados do que B e C. Depois disso, ela teria que descobrir a relação entre B e C e depois entre D e E.

As atividades do terceiro dia da oficina despertaram, nas professoras, o entendimento de relações, igualdade, desigualdade e comparações entre elementos desconhecidos. O trabalho com esses conceitos pode colaborar para o entendimento do significado de incógnitas em anos posteriores. Além disso, as atividades de trabalho com relações desconhecidas favorecem a construção de novas estratégias que possibilitam o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Através das discussões apresentadas nas duas atividades, percebemos que elas se diferenciam, pois nas atividades com o material digital é exigido usar outra lógica diferente de quando elas avaliam os valores do peso com as mãos. Ao comparar os potes sem a balança, as professoras não tinham a necessidade de usar a estratégia de transitividade.

No quadro abaixo, sintetizamos a característica de cada atividade descrevendo como as professoras descobrem a relação entre os pesos, as formas de registro e a característica do pensamento transitivo.

	Medindo pesos sem a balança	Balança de dois pratos	OA Feira dos pesos
Características da atividade	Favorece o trabalho de relação de ordem de forma intuitiva.	Favorece o trabalho de relações de ordem através do desenvolvimento de estratégias e representações.	Favorece o trabalho de relações de ordem através do desenvolvimento de estratégias e leitura de expressões algébricas.
Como descobrem a relação entre os pesos	Quando pegam nos pesos, utilizam esquemas intuitivos para medir os pesos dos potes.	Como não podem pegar nos pesos, descobrem a relação entre os potes através da indicação na balança. Porém, uma vez descobrindo a relação dos potes, é necessário fabricar novos potes.	Descobrem a relação entre os potes através da indicação na balança. Porém, essa relação é refeita a cada novo nível ou jogo, o que possibilita o entendimento que um elemento pode, em outras situações, representar outra quantidade.
Formas de registro (representação)	Não foram usados formas de registro, já que na mesma hora descobrem a relação existente entre os potes.	Provoca a necessidade de registrar uma linguagem matemática quando precisam anotar as relações encontradas.	Possibilita a leitura e interpretação de símbolos matemáticos e relação de ordem.
Característica da relação de transitividade	Não foi usada a relação de transitividade.	Poucas relações de transitividade devido à característica do material.	Várias relações de transitividade a cada nova atividade. Possibilidade de o professor escolher a quantidade de pesos a ser comparado.

Quadro 1 – Características das atividades de comparação

Percebemos uma evolução em cada atividade quanto à exploração e entendimento das características relacionadas ao pensamento algébrico. Entendemos que essas atividades são ricas em significados que podem permitir aos alunos estabelecerem relações entre grandezas, expressar ideias matemáticas e explorar significados matematicamente produzidos durante a atividade.

As atividades durante a oficina propiciaram um entendimento geral de como as professoras compreenderam as atividades algébricas e contribuíram, também, para que elas conhecessem outras situações de como trabalhar com conceitos algébricos. Essas situações levaram as professoras a utilizar estratégias e representações para resolver as atividades. As estratégias podem ser consideradas teoremas-em-ação (VERGNAUD, 1990) que levam a refletir sobre os conceitos algébricos presentes nas atividades. Assim, as atividades fizeram que elas relacionassem essas situações e representações com os conhecimentos prévios sobre álgebra e ampliassem, através das discussões, conceitos algébricos.

As considerações sobre o desenvolvimento dos conceitos algébricos pelas professoras procuraram demonstrar como o conhecimento sobre Matemática se relaciona com o pensamento algébrico. Em busca de compreender como esses conceitos chegam à sala de aula, discutiremos, na sessão seguinte, como o conhecimento algébrico se manifestou durante o planejamento da professora. Nesta fase da pesquisa, acompanhamos a professora C, por ser aquela docente que se mostrou disponível para utilizar as atividades em sua prática docente.

4.2 PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

As pesquisas discutidas neste estudo mostram o conhecimento do professor como ponto importante para a aprendizagem e ensino da Matemática. O conhecimento do professor que ensina Matemática deve propiciar condições para que os alunos aprendam não só o conteúdo específico (SHULMAN, 1986), mas também a fim de torná-las capazes de resolver uma determinada situação. (BALL,1991).

Um dos conhecimentos do professor proposta do Shulman (1986) refere-se ao conhecimento pedagógico do conteúdo no qual o incorporamos como o modo que o professor vai apresentar e abordar a Matemática para que seja compreensível para o aluno. Este conhecimento é caracterizado por um modo de pensar que colabora na transformação e ações que enriquecem o entendimento do conteúdo. Essas ações precisam ser planejadas de forma a contribuir com a real aprendizagem, portanto, parece-nos pertinente entender os conhecimentos pedagógicos do professor de Matemática a partir do planejamento de suas aulas.

O trabalho docente é uma atividade complexa que exige, além de conhecimentos teóricos, práticas conscientes e sistemáticas com objetivo de fazer que os alunos aprendam. Assim, o planejamento é uma ferramenta fundamental para organizar o trabalho docente e deve ser um momento de reflexão e de tomada de decisão sobre a ação em sala de aula, como também um processo de prever os materiais necessários de acordo com o objetivo da aula. É no momento do planejamento que o professor estabelece caminhos que possam nortear mais apropriadamente a execução da ação educativa. Portanto, consideramos o planejamento de atividades como um momento importante para entender como o conhecimento da professora se manifestará na prática.

O planejamento foi realizado por meio de entrevistas nas quais a professora poderia refletir sobre as atividades da oficina de formação, fazer alguma modificação e prever o que seus alunos poderiam aprender com aquela atividade. Dessa maneira, a professora ficou livre para utilizar outros materiais; no entanto, era preciso que ela associasse o material com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

As características do pensamento algébrico nesta fase da pesquisa serão descritas pela maneira como a professora compreende que tais atividades podem levar ao desenvolvimento deste pensamento em seus alunos.

Durante o planejamento, discutimos as situações-problema que não foram contempladas durante a oficina e como elas poderiam propiciar o pensamento algébrico. As categorias nesta fase da pesquisa foram divididas da seguinte forma: (1) sequência e dinâmica das atividades de sala de aula; (2) Características aritméticas nas atividades planejadas; (3) Manifestação da compreensão de conceitos algébricos pela professora. Estas categorias serão explicadas e discutidas a seguir:

4.2.1 Sequência e dinâmica das atividades de sala de aula

Segundo (Blanco, 2003), os professores além de ter o conhecimento do conteúdo e preciso saber ensiná-lo. Isto significa também ter o conhecimento sobre preparação da aula e o conhecimento sobre como fazer uma análise de conteúdo no sentido de definir como apresentá-los. Na passagem à prática, o professor necessita, além de promover a interação com os alunos, ter capacidade para estruturar a aula.

Durante o planejamento a professora optou em construir a sequência de atividades da seguinte forma:

1. Balança de dois pratos comparando potes;
2. Balança de dois pratos pesando objetos;
3. Probleminhas;
4. OA *Feira dos pesos*;
5. OA *Balança Interativa.*

A docente também explicou que seria melhor começar com a balança de dois pratos para trabalhar com o concreto, porque assim os alunos se interessariam e gostariam mais da atividade. Depois de trabalhar o concreto usaria as atividades abstratas, utilizando o computador.

<u>Explicação da professora sobre o trabalho com atividades concretas</u>

Pesquisadora: Por qual atividade começaríamos?
Professora: Balança! No concreto, primeiro no concreto. E assim também desperta o interesse deles. Porque a balança concreta é o que eles mais gostam! E por último, a gente corre o risco de eles não se interessarem tanto. Então a gente trabalha primeiro a balança porque lá a gente vai fazer mais ou menos como a gente fez, né? A gente poderia ter uma balança improvisada pra comparar, fazer as primeiras comparações na sala e depois desse momento da sala à gente marca o momento no LIE pra trabalhar com o abstrato. Ai é bom! Porque assim eles já ficam sabendo o que a gente ta fazendo. Entendeu?

A professora relaciona a aprendizagem ao uso de materiais na escola. A justificativa pela utilização do material concreto no ensino de Matemática é baseada em uma interpretação simplista das características dos estágios de desenvolvimento da criança proposta nos estudos de Piaget. (SELVA, 1998). Dentro dessa concepção, educadores afirmam que crianças no estágio das operações concretas só podem pensar ou aprender algum conceito, quando utilizam objetos concretos ou aportes físicos. Contudo, mais importante do que o material utilizado é que os professores precisam entender como se trabalha com o material e a criação de situações e representações que dão significado para o material a ser utilizado.

No contexto escolar, tem-se a concepção de que o processo de construção do conhecimento desenvolve-se a partir de uma situação concreta para uma abstrata. O processo de construção do conhecimento não é um movimento unidirecional e de único sentido, do concreto ao abstrato ou do abstrato ao concreto. (MACHADO, 1989). Não podemos reduzir a abstração a um modo de aprender, e nem relacioná-la apenas ao domínio de fórmulas matemáticas, como também não podemos entender o concreto apenas como algo empírico.

Além disso, uma atividade pode utilizar materiais concretos, mas favorecer ao pensamento abstrato por construir uma rede de significados. O fato de os objetos de aprendizagem ser realizados no computador, não garante que despertem o pensamento abstrato ou que sejam classificados como abstratos. O pensamento abstrato é construído, quando não nos limitamos mais na representação imediata de uma situação, nem somente às relações prévias existentes, mas na capacidade de pensar em todas as relações possíveis, buscando soluções a partir de hipóteses e não apenas pela observação da realidade. O pensamento abstrato pode ser desenvolvido em qualquer atividade, quando estimulamos os alunos a construir habilidades de selecionar novas estratégias para alcançar um determinado objetivo.

As atividades propostas neste trabalho, mesmo a partir da manipulação dos pesos na balança, podem despertar o raciocínio abstrato, a partir do momento em que o professor sugere que o aluno busque novas suposições, classificações, comparações, interpretações, criação de hipóteses, imaginação e entendimento das situações-problema organizando os dados e favorecendo a tomada de decisões. No entanto, a professora C relaciona a Balança interativa com algo abstrato por ser realizado no computador e a balança de dois pratos como concreta por ser um aporte físico. Assim, ela relaciona as características do material às formas de construção de pensamento.

Quanto ao tempo da atividade, a professora acha melhor fazê-las no primeiro tempo de aula, pois dessa forma os alunos estão mais calmos.

Explicação da professora sobre a melhor hora para aplicar as atividades

O ideal é no primeiro tempo, pois eles chegam mais relaxados. No segundo tempo já tem passado o recreio, aí fica mais complicado pro raciocínio. Agitados, com muita energia, o calor! Mas no primeiro tempo, assim que chegar, entregar... Assim que chegar! Depois da oração já foi feita!

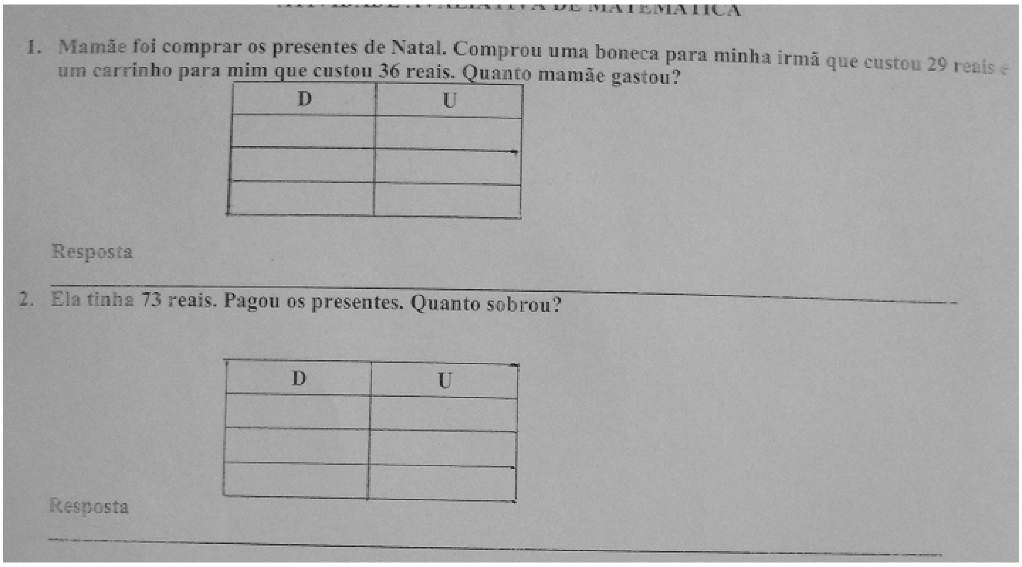
(...)

Geralmente a gente coloca assim. A gente bota todas as atividades de matemática no primeiro tempo, porque no primeiro tempo eles estão mais calmos.

Perceba como a professora relaciona as atividades escolares e a distribuição de conteúdos ao longo do dia, com a necessidade de que, para aprender, é preciso calma e concentração. Em sua fala, para trabalhar ou ensinar Matemática é melhor que eles estejam calmos, pois só dessa maneira conseguem raciocinar. Os outros conteúdos do currículo como história e português, por trabalhar com leitura, não exige tanto o raciocínio dos alunos.

Parece que, a Matemática, por ser uma matéria considerada difícil, precisa ser ensinada em um momento no qual os alunos estejam mais calmos, ou seja, antes do recreio. O planejamento de atividades precisa ser elaborado de acordo com seus objetivos e finalidades de ensino, e não de acordo com o estado emocional dos alunos.

Quando conversávamos sobre as mudanças nas atividades, a professora propôs modificações em relação às situações problema. Segundo ela, os problemas estavam com o enunciado demasiadamente grande, dessa forma seria difícil o aluno ler ou entender a situação problema, pois as dificuldades de leitura atrapalhariam o raciocínio (ver anexo D). Além disso, eles poderiam se confundir durante a resolução, e que o ideal era "quebrar em partes" os problemas. A professora ainda falou que era importante colocar uma tabela para que eles resolvam a situação. Relatou que os alunos possuem dificuldade de montar o problema e que, mesmo colocando a tabela, eles erram muito. A sugestão da professora for que: "Você pergunta uma coisa, dá espaço para eles responderem e depois pergunta outra coisa igual a esse problema aqui." (figura 14).



1. Mamãe foi comprar os presentes de Natal. Comprou uma boneca para minha irmã que custou 29 reais e um carrinho para mim que custou 36 reais. Quanto mamãe gastou?

D	U

Resposta

2. Ela tinha 73 reais. Pagou os presentes. Quanto sobrou?

D	U

Resposta

Figura 14 – Exemplo de tabela que a professora sugere colocar no exercício

A professora sugere uma representação baseada em atividades comumente aplicadas na aritmética. A representação imposta pela professora sugere que as crianças atribuam valores para serem somados, enquanto as situações-problemas propostas têm o objetivo de fazer que as crianças entendam as relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas que se modificam ao longo da situação. Além disso, a professora não deixa que os alunos usem outras representações do que aquela importa pela escola.

As situações escolares devem ser propostas para que as crianças possam construir suas representações e entendimento sobre relações entre quantidade ao invés de impor uma representação à criança. Quando as representações não podem ser construídas pelos sujeitos dificilmente a criança construirá pontes que auxiliem a construção de conceitos. (SPINILLO, 1993; SELVA, 1998).

Para Spinillo (1993) os esforços didáticos devem ser fundados no desenvolvimento do sentido de número, muito mais do que na aplicação de algoritmos corretos. Para a autora, as situações de ensino devem propiciar a construção de diferentes sistemas e suportes de representação (simbólica, icônica e gráfica), que trabalhe as relações numéricas a partir de situações em que os alunos reflitam sobre seu modo de pensar e comentando suas posições e ouvindo a dos outros.

Esperava-se também que a professora entendesse a atividade como parte de um conjunto de situações que favorecesse a construção de representações escritas sobre o pensamento das crianças. Dados dos estudos de Lautert e Spinillo (1999) mostram que as representações das crianças podem expressar mais do que suas habilidades lógicas-matemáticas, elas expressam a forma de como entendem o enunciado do problema e os procedimentos adotados para resolver a situação. Essas representações são importantes para que o professor entenda como as crianças entendem a situação. Este estudo também afirmou a importância das representações gráficas ao resolver problemas de divisão e complementou que situações que utilizam materiais concretos fazem representações elementares, quando comparadas às situações gráficas nas quais produziam representações bem mais elaboradas.

Segundo Vergnaud (2005) o desenvolvimento do pensamento algébrico se caracteriza, quando o aluno tem a possibilidade através de diversas situações de se expressar matematicamente e estabelecer relações entre números ou expressões numéricas, utilizando representações. No entanto, a professora não relaciona como o pensamento algébrico pode ser trabalhado dentro de uma situação e não reconhece a importância de registros e representações dentro das atividades das situações-problema.

Ao longo do planejamento, a professora também sugeriu que fossem inseridas figuras nos probleminhas verbais para que a atividade ficasse mais interessante e, assim, fazendo que os alunos se sintam motivados a resolver. A professora acrescenta que, caso não mude o enunciado dos problemas, poderíamos ler para os alunos, pois considera que a dificuldade com a leitura e interpretação pode atrapalhar na resolução de problemas matemáticos.

Compreensão da professora sobre o pensamento matemático dos alunos

Mas é por que eles não conseguem raciocinar! Não sei se é porque a maioria tem problema de leitura ai tem dificuldade em raciocinar... Aí tem dificuldade em interpretação. Alguns não! Eu tenho uns aqui que sabem sozinho, rapidinho, pegam o problema e vão fazer! Mas os outros raciocinam bem devagarzinho, mesmo!

Quando perguntada sobre as dificuldades dos alunos em Matemática, a professora responde:

Compreensão da professora sobre as dificuldades dos alunos

Não na matemática... Tem dificuldade nas operações, assim no caso de fazer as contas e tudo. Em coisas simples de raciocínio, não! Como eu te disse: Quando é ligado pro dia-a-dia eles não tem dificuldade. Mas quando vai passar pro papel... Ai pronto! Enquanto você ta aqui oral, explica a situação que uma coisa é assim... Ai eles vão respondendo, mas na hora que vai botar no papel eles não sabem.

Com esse recorte, percebemos uma contradição sobre a percepção da professora em relação às dificuldades dos alunos e formas de responder as atividades. Se a professora acha que eles possuem dificuldade em colocar no papel, não poderia exigir de seus alunos o rigor em resolver o algoritmo com dezenas e unidades. Questionada sobre isso, a professora responde:

<u>Explicação da professora de como auxilia a aprendizagem dos alunos</u>

Pesquisadora: Você disse que eles têm dificuldade de colocar as contas no papel, então por que colocar essa tabela nesse exercício?

Professora: Ah! Mas eu já coloco isso pra ajudar. Se eu não colocar, aí é que eles não vão resolver.

Neste recorte percebemos a crença de que os algoritmos escritos são as únicas representações para respostas na matemática escolar. Apesar da sugestão de mudança para colocar uma tabela com espaços para a dezena e unidades, a pesquisadora sugeriu que não havia necessidade de colocá-la, pois além de trabalharmos somente com unidades, o objetivo dos problemas não era achar um resultado, mas sim encontrar relações entre quantidade conhecida e desconhecida.

A pesquisadora também falou da importância de deixar os alunos resolver da maneira que desejarem para observarmos suas formas de resolução e representação. O importante da atividade era perguntar como encontraram a relação entre as quantidades expressa nos problemas.

Quando perguntada sobre as atividades do laboratório, a professora comenta que acha necessário dividir a turma, pois todos ao mesmo tempo ela não consegue dar a aula.

<u>Explicação da professora sobre o uso do laboratório</u>

Professora: Agora *pro* laboratório eu vou pedir ajuda pra ficar no computador com eles, pois eles ficam na maior aueira. Uma loucura. [Risos].

Pesquisadora: São quantos alunos?

Professora: Frequentando... Eles oscilam muito na frequência, mas são entre 25. Mas pela minha experiência aqui, fazer com muitos não dá certo.

A professora comenta que nem sempre leva seus alunos ao laboratório, pois além de não tem computador suficiente para todos os alunos, sendo necessário dividir a turma, precisa organizar com a bibliotecária uma dinâmica de divisão dos alunos.

Ao final do planejamento, a professora não sugeriu outras atividades. Na próxima sessão, veremos como ela relacionou as atividades com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

4.2.2 Características aritméticas nas atividades planejadas

Durante o planejamento, mostramos uma sugestão de situações-problema e percebemos a dificuldade da professora em encontrar significado algébrico nessa atividade, pois as relacionava com a necessidade dos alunos em aprender algum conceito aritmético. A professora falou que antes de trabalhar com tais problemas era importante rever noções de adição, subtração e divisão.

Quando apresentamos o problema abaixo, a professora falou da necessidade de rever adição e subtração e que, antes de iniciar esses problemas, gostaria de fazer uma aula para rever tais conceitos. A mesma considera que a questão central do problema é juntar quantidades e não relacionar quantidades e entender transformações que acontecem ao longo do problema.

Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas, e Joana também ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia Joana tem a mesma quantidade de presentes como Bárbara?

A professora argumenta:

<u>Explicação sobre a importância de rever conteúdos</u>

Professora C: Eu vou dar recuperação de adição e subtração com reserva, com agrupamento eles... Eles desaprenderam tudo. Porque quando teve o recesso do Natal, eles voltaram e já não sabiam nada não. Aí eu fiz uma revisão com eles *pra* partir da recuperação, só essa semana. É tanto que segunda-feira eu já estou querendo entrar na divisão.

Pesquisadora: E como você vai fazer a revisão?

Professora C: Eu passo as continhas *pra* eles. Trabalho também com o concreto e trago encarte do jornal, peço para eles fazerem contas.

Pesquisadora: Como assim?

Professora C: Assim, eu trago o encarte desses supermercados e digo “olha, faz de conta que você tem 50 reais, o que pode comprar?” Ai eles vão fazendo a conta. Mas eu já fiz isso. Estou pensando em usar o material dourado para relembrar a adição.

Pesquisadora: Como?

Professora C: Eu posso criar situações e os cubinhos são dinheiros.

Pesquisadora: E como podemos trabalhar com o pensamento algébrico?

Professora C: Nessa atividade não, essa atividade é de revisão.

O mesmo aconteceu com problemas que não tem quantidades explícitas. A professora, ao ver o problema abaixo, fala que eles não conseguirão resolver, já que não sabem dividir. Vejamos que o problema tem a palavra *dividiu*, por isso a professora relaciona com a necessidade de aprender noções de divisão:

Rodrigo e André foram pegar conchas do mar na praia cedo da manhã. Rodrigo pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. André encontrou o mesmo número de conchas que Rodrigo, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Rodrigo encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de André. Desta vez cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Rodrigo tem o mesmo número de conchas que André? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro?

A pesquisadora confirma:

<u>Explicação de como vai ensinar a divisão</u>

Pesquisadora: Então, tu acha que, pra eles resolverem esse problema é melhor eles aprenderem divisão?

Professora: Só noções que eu quero dar, o que é que tem... A divisão eu vou dar noções na próxima semana, aí eu já vou usar as tampinhas. Formo grupos de quatro e dou as tampinhas, para dividir em dois, em três e quatro, até quatro!

Nestas situações, percebemos dois aspectos importantes. O primeiro diz respeito ao entendimento da professora sobre a situação-problema. No primeiro problema, os alunos terão que adicionar pouca quantidade não exigindo realizar o algoritmo da adição. No segundo problema, não é necessário saber realizar o algoritmo da divisão até mesmo porque não existem números para serem divididos. Os alunos precisam relacionar a divisão de quantidades e comparar com outra quantidade desconhecida. O segundo aspecto é o conhecimento da professora sobre conhecimentos prévios dos alunos. Mesmo que os alunos não saibam somar ou utilizar o algoritmo da divisão, chegam à escola com conhecimentos espontâneos sobre vários conceitos matemáticos (SPINILLO, 1994) e isso não foi explorado pela professora, como também não foi explorado o sentido algébrico da atividade.

A não valorização dos conceitos espontâneos também foi registrada durante o planejamento das atividades com a balança de dois pratos, a professora também considera importante dos alunos entendam medidas de massa e volume para realizar as atividades.

Durante o planejamento, foi discutida a importância de sempre perguntar aos alunos sobre como eles pensaram ao resolver alguma situação durante as atividades propostas para que pudéssemos entender o pensamento deles ou fazer perguntas a respeito das atividades. Com isso, poderíamos entender como eles estavam pensando sobre a situação e a partir daí fazer novas perguntas que explorassem o conhecimento algébrico. Outra boa estratégia para entendermos o pensamento algébrico seria se déssemos oportunidades para que os alunos pudessem registrar algo durante a atividade. A professora responde:

<u>Explicação das professoras sobre a participação dos alunos em sala de aula</u>

Pesquisadora: Agora a gente tem que ver, que durante a aula... Como a gente vai fazer pra que eles falem ou registrem o pensamento deles.

Professora: Não se preocupe que eles falam!

Pesquisadora: Falam?

Professora: Falam que tem dia que eu não aguento, fala todo mundo junto! Falar eles falam. São bem eletricozinhos!

A professora não percebe a diferença entre a participação de todos os alunos nas atividades em sala de aula e a importância de os alunos explicarem suas representações mentais e até mesmo investir na representação simbólica de forma espontânea. A professora ainda acrescenta que muitas vezes é complicado dar aula, quando se pergunta muito sobre a situação, pois eles falam todos de uma vez e que aulas desse estilo são cansativas e a deixam sem voz. O que esperávamos da professora era o entendimento da importância do registro mental ou escrito e de entender como poderia explorar as situações algébricas.

Para Ball e Bass (2003), os professores precisam perceber que estão envolvidos no desenvolvimento de capacidades dos alunos e precisam realizar atividades que permitam a construção de demonstrações matemáticas e compreensão da necessidade de justificações e para serem capazes de distinguir justificações válidas e justificações inválidas.

Podemos perceber que a professora ainda tem uma visão estreita sobre como as atividades podem colaborar com a construção do pensamento algébrico. No que diz respeito à compreensão do pensamento algébrico, estudos (DA ROCHA FALCÃO, 1995; VERGNAUD, 1990; BRITO MENEZES, 2006; LESSA, 1996) mostram que o raciocínio neste domínio se desenvolve gradualmente e depende das situações em que os estudantes estão engajados.

> O uso de situações significativas para o ensino da álgebra é particularmente interessante porque existem muitos professores de matemática que consideram a álgebra uma situação muito abstrata, sem qualquer correspondência em situações concretas. Quando é introduzida a simbologia algébrica nota-se, no ensino da matemática, uma verdadeira ruptura no progresso de certos alunos, que pareciam, até então, muito capazes para lidar com operações aritméticas. (CARRAHER, SCHILIEMANN, 1993, p. 128).

Professores do Ensino Fundamental precisam compreender que as atividades aritméticas podem ser utilizadas e que podemos explorar outras formas de raciocínio ligadas ao pensamento algébrico. Um bom exemplo é compreender que as propriedades aritméticas básicas são importantes para a aprendizagem da álgebra, como compreender princípios básicos da adição ou multiplicação pode ser uma ponte para compreender aspectos relacionados às expressões numéricas com quantidades conhecidas e desconhecidas.

Apesar de relacionar as atividades com contextos aritméticos, a professora também manifestou entendimento sobre como as atividades trabalham com conceitos algébricos. Na próxima sessão, apresentaremos como os conhecimentos algébricos se manifestaram durante o planejamento.

4.2.3 Manifestação da compreensão de conceitos algébricos pela professora

Neste tópico, vamos relacionar como, durante o planejamento, a professora relacionava as atividades com o desenvolvimento dos conceitos algébricos. Com objetivo de organizar os dados, discutiremos conforme sequência de atividades estabelecida pela professora, como ela atribuiu significado algébrico às atividades, que foram divididas da seguinte forma: balança de dois pratos comparando os potes; balança de dois pratos pesando objetos; probleminhas; OA *Feira dos pesos*; OA *Balança Interativa.*

Balança de dois pratos comparando os potes

Ao planejar as atividades com a balança de dois pratos, comparando potes a professora explica que essa atividade desenvolve a comparação entre os pesos e é uma atividade introdutória para utilizar a balança de dois pratos, pesando objetos.

Importância da atividade de comparação atribuída pela professora

Pesquisadora: Como essa atividade ajudará os alunos a entender conceitos algébricos?

Professora: Assim, porque eles vão comparar um peso com outro, né? Essa atividade também vai ajudar eles a entender a noção de peso.

Pesquisadora: Por quê?

Professora: Ela vai ajudar na próxima atividade que é para medir os pesos. Eles vão conhecer a balança.

Pesquisadora: Ah! E por que é importante eles compararem os pesos?

Professora: [Risos]. Para descobrir a relação entre eles. Descobrir qual o maior e o menor. Assim eles podem aprender a ordenar do maior para o menor.

Pesquisadora: E você acha que eles vão conseguir fazer? Assim, porque não tem a quantidade dos potes?

Professora: Eu acho que vão, se usar o raciocínio.

Professora: E por que você acha que não tem o valor do peso desses potes?

Professora: Pra dificultar, para eles usarem mais o raciocínio.

Pesquisadora: E como eles podem usar o raciocínio?

Professora: Nas situações do dia-a-dia, perguntando.

Pesquisadora: Você acha que eles vão precisar de outro material para fazer essa atividade? Ou vão precisar fazer alguma anotação?

Professora: Não, não. Essa eles fazem rapidinho.

Apesar de a professora compreender que esta atividade na balança de dois pratos pode desenvolver conceitos de comparação entre quantidades, algo ligado ao conceito algébrico, ela não soube explicar a importância dessas comparações, ou como o trabalho com estabelecimento de relações entre quantidades desconhecidas pode favorecer o entendimento de conceitos algébricos. Percebemos também que a professora ainda não investe na representação seja escrita ou mental da situação.

Balança de dois pratos pesando objetos

Ao planejar as atividades de descobrir pesos de objetos com a balança de dois pratos, a professora explica que esta atividade também ajudará os alunos a descobrirem os valores de pesos desconhecidos, e poderá ser uma boa atividade para trabalhar com medida de massa.

Explicação da professora sobre como atribui significado algébrico na atividade.

Pesquisadora: E como as atividades desse dia podem ajudar na compreensão de conceitos algébricos?

Professora: Eu não sei bem, acho que vão descobrir os valores dos pesos que são desconhecidos. Mas elas vão poder ajudar também aos alunos na noção de massa. Eles vão poder trabalhar com medida de massa que eu ainda vou dar. Ai vai ser bom pra eles, ver as gramas, quanto pesa um pote.

Pesquisadora: E descobrir valores desconhecidos pode ajudar a entender alguma coisa de álgebra?

Professora: É, na álgebra temos que descobrir um valor, né? Esse valor pode ser esses potes aqui.

Pesquisadora: E você acha que eles vão poder aprender algo de equação?

Professora: Vão.

[Pausa]

Pesquisadora: Como?

Professora: Quando a balança fica em equilíbrio ele entende, né?

Pesquisadora: Como assim?

Professora: Assim, quando ela tá em equilíbrio as duas coisas que tem no prato são iguais e pode ter um pote no prato que eles vão ter que raciocinar para descobrir o valor deles.

Esse diálogo nos mostra como a ideia de desenvolvimento do pensamento algébrico se relaciona em descobrir um valor, um resultado, algo ligado ao pensamento aritmético. O pensamento algébrico, mais do que descobrir um resultado, exige a capacidade de lidar com expressões, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. O pensamento algébrico compreende a capacidade de lidar com relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas, entender estruturas matemáticas e saber interpretá-las. (KAPUT, 1994; NCTM 1989).

Outro aspecto que merece ser observado no diálogo é que, mesmo que ela não tenha falado que a atividade pode desenvolver conceitos de incógnita, percebemos que, sua explicação sobre o equilíbrio da balança traduz um possível trabalho com valores desconhecidos dentro de uma situação.

Situação-problema

Sobre as atividades com os problemas verbais, a professora falou que os alunos terão dificuldade de entender a situação-problema devido a dificuldades com leitura. Além disso, precisam ter noção mais aprofundada de divisão. Mesmo a pesquisadora explicando que os problemas não usavam noção de divisão, a professora explica: “Eles não estão acostumados com esse tipo de problema.”. E quando perguntada se tais problemas usam algum conceito algébrico, a professora responde: “Não sei, talvez por ter o termo desconhecido também. Eu tenho que ver direito”.

Uma aula antes de a professora aplicar as atividades com as situações-problemas, a pesquisadora traz os problemas modificados de acordo com as indicações de mudanças proposta pela professora durante a sessão de planejamento (Anexo E). A pesquisadora pergunta mais detalhes da aula e a professora comenta que os alunos terão dificuldade de resolver as situações-problema por ser diferente dos problemas que costumam resolver. E que a melhor maneira de fazer essa atividade é ler oralmente para os alunos, para que eles respondam durante a leitura. Quando perguntada sobre como poderá despertar algum conceito algébrico, a professora responde: “eles vão comparar a quantidade das pessoas”.

A pesquisadora também perguntou à professora se não seria interessante que os alunos tentassem registrar algo durante a atividade, para analisarmos como eles faziam registro daquelas situações. A professora responde: “É, pode ser. Mas eu acho que eles não vão conseguir registrar, não.” A pesquisadora sugere que os alunos façam livremente seus registros para perceber como os símbolos são utilizados pelos alunos, e como podem favorecer na construção de uma linguagem simbólica. Mais uma vez percebe-se a negação da representação, uma ferramenta tão importante para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

OA *Feira dos pesos*

Ao planejar as atividades com OA Feira dos pesos, a professora fala que esse objeto pode favorecer o entendimento de um termo desconhecido, podendo desenvolver noções de expressões algébricas.

Planejamento da professora na atividade com OA *Feira dos pesos*

Pesquisadora: E esse OA, como você pretende trabalhar?

Professora: Vou ter que dividir [a turma] como falei.

Pesquisadora: E porque você acha que ele importante para trabalhar com álgebra?

Professora: Ah... porque, a gente pode trabalhar com o termo desconhecido. Eles têm que descobrir, né? Podem ver essa expressão aqui e comparar esses pesinhos entre outros também desconhecidos.

Neste recorte, a professora demonstra compreender melhor o objetivo da atividade, quando fala sobre o trabalho com termo desconhecido e a comparação entre eles, como também da importância de entender a relação entre esses termos, falando que os alunos "podem ver essa expressão". Para compreender e resolver situações-problema, que utilizam a variável como termo desconhecido ou incógnita, é necessário explorar a capacidade dos alunos em reconhecer, dentro de uma situação, a relação que os alunos fazem sobre uma quantidade de valor desconhecido com outros desconhecidos, e a capacidade de relacionar a quantidade desconhecida com a expressão algébrica.

OA *Balança Interativa*

Durante o planejamento das atividades com o OA Balança Interativa, a professora explica:

Explicação da professora como o OA Balança Interativa auxilia no desenvolvimento do pensamento algébrico

Pesquisadora: E como esse último OA pode nos ajudar a entender o pensamento algébrico nos alunos?

Professora: Ah! Esse objeto de aprendizagem ajuda a compreender as expressões algébricas, como também a manipulação simbólica. Além de descobrir o valor das caixinhas, ele vai manipulando até encontrar o valor. Ele entende porque tem que encontrar um valor desconhecido.

Pesquisadora: E isso não era feito na balança?

Professora: Era também. Mas esse mostra as expressões que ajuda a entender o movimento da balança, eles não podem pegar nos pesos e fica mais difícil de encontrar. Aí eles têm que usar o raciocínio, não tem jeito.

Pesquisadora: Como assim usar o raciocínio?

Professora: Eles vão ter que descobrir estratégias para saber quanto mais ou menos vai pesar uma caixinha dessa. Ele não tem noção nenhuma porque é aqui no computador. Lá na balança ele pega, ver o tamanho do pote, aqui é tudo mais abstrato.

Pesquisadora: E porque essa balança trabalha com a álgebra?

Professora: Você tem várias coisas, essas letras podem ser as incógnitas, eles podem ver essas expressões aqui [aponta para o lugar onde mostra as expressões de equações e inequação], eles usam estratégias que vão ter que achar o valor da caixinha dentro de algumas possibilidades de números.
Pesquisadora: Como assim?
Professora: Como você falou naquele dia, o valor do B pode ser um valor. Por exemplo, se for menor do que sete? E maior do que dois? Ele pode ser um conjunto de número, o três, quatro, cinco e seis. Ai ele vai usar outras estratégias para descobrir.

Neste diálogo, já percebemos que a professora já consegue explicar melhor como uma atividade pode favorecer o pensamento algébrico. Também consegue associar os mecanismos de resolução da situação com o desenvolvimento desses conceitos. Isso ocorre, quando ela explica que o OA tem “várias coisas”, como letras que podem representar incógnita e o reconhecimento de símbolos algébricos em expressões mostradas pelo OA, e as estratégias que podem desenvolver no entendimento de manipulação entre os termos conhecidos e desconhecidos.

Na próxima seção, mostraremos como a professora realizou as atividades com seus alunos. Algumas vezes mostraremos recortes de fala da professora com os alunos, cujos nomes são fictícios para preservar sua identidade.

4.3 PRÁTICA EM SALA DE AULA

A seguir, mostraremos como o conhecimento algébrico se manifestou em diversos momentos na prática em sala de aula tanto pelos alunos como pela professora. Discutiremos as falas dos alunos, como fruto das interações com a professora em sala de aula. Apesar de não ser o conhecimento do professor em si, classificamos que essas interações são as formas de condução do conteúdo por parte do professor, são as formas como esse conhecimento se manifesta em sala de aula. Outras vezes, mostraremos esse conhecimento a partir da entrevista que fizemos com a professora ao final da aula, o que identifica como a professora reflete sobre sua aula e como o conhecimento se manifestou durante sua prática.

4.3.1 Exploração do sentido de equações

O trabalho com equações é caracterizado pela mudança do ponto de vista processual das operações aritméticas para um entendimento relacional de expressões algébricas. Para Kieran (1992) uma das marcas dessa transição é a compreensão do sentido do sinal de igual ao longo da educação básica. Como já discutido anteriormente, o símbolo “=” tem ganhado destaque em pesquisas que estudam a passagem da aritmética para a álgebra (LESSA, 1996; BRITO MENEZES, 1996), mostrando que esse símbolo possui diferentes sentidos em atividades aritméticas e algébricas.

Kieran (1981) mostrou que crianças em anos elementares geralmente consideram que o sinal de igual significa a realização de processos de cálculos. Por exemplo, quando perguntadas como podem resolver o problema 8 + 4 = __ + 5, estudantes colocaram o número 12 no espaço em branco, alguns incluíam o 5 no total e colocavam 17, e outros colocavam o sinal de igual após o 5 e o número 17, desconsiderando o primeiro sinal de igual. Portanto, o trabalho com equações deve envolver atividades nas quais os alunos percebam o sentido do simbolo de igualdade.

Neste tópico, mostraremos como a professora criou situações que visavam favorecer o entendimento de equações ao trabalhar com a ideia de que dois termos se relacionam, ao invés de ser um resultado. A atividade desenvolvida pela professora poderá ajudar o entendimento do sinal de igual utilizado tanto na aritmética como na álgebra. Enquanto nos anos iniciais os alunos entendem o sinal de igual como um símbolo que representa o resultado de uma operação, em anos posteriores os discentes terão que entender este símbolo como com uma relação de igualdade.

O trabalho envolvendo este conceito se caracterizou, quando a professora criava situações, estimulando os alunos a pensarem que duas quantidades em uma balança de dois pratos se relacionavam com a outra ao invés de representar um resultado. Entendemos que essa atividade favorece a compreensão dos diferentes sentidos do sinal de igual, fazendo que o aluno compreenda este sentido antes de se deparar com uma expressão algébrica.

Percebemos que a condução da aula pela professora ajudou que seus alunos interagissem com diversas situações ligadas ao pensamento algébrico, motivando que seus alunos buscassem o valor de pesos de objetos com pesos conhecidos em uma balança de dois pratos. Algumas vezes, o peso do pote não era encontrado facilmente na balança, pois o seu valor não podia ser descoberto pela soma dos pesos conhecidos. Dessa maneira, os alunos desenvolviam estratégias de operação inversa para atingir o objetivo de encontrar o valor do pote. Essa estratégia foi utilizada quando os alunos não encontravam o valor do peso do pote somando os valores de pesos conhecidos. Por exemplo, o pote de granola pesava 400 gramas, para isso os alunos tinham os pesos conhecidos de 50, 100, 200 e 500 gramas, para encontrar o valor do pote, os alunos teriam que ter dois pesos de 200, ou 4 pesos de 100 gramas. Como não dispunham desses pesos, tiveram que colocar o pote de granola de um lado com o peso de 100 gramas e o peso de 500 gramas do outro lado. Dessa forma, a professora favoreceu esse entendimento com os três pesos desconhecidos que propiciavam esse raciocínio.

Essa estratégia também apareceu quando os alunos encontraram o valor de três saquinhos com 50 gramas cada um. Eles colocaram os três saquinhos em um dos pratos da balança e no outro prato o peso de 100 (cem) gramas junto com o peso de 50 (cinquenta) gramas. Ao encontrarem o valor o peso a professora pergunta:

<u>Manifestação da estratégia de operação inversa</u>

Professora: E quanto pesa somente 1?

Alunos: 50 gramas. [Respondem todos juntos].

Professora: Por que?

[Vários alunos respondem ao mesmo tempo]

Professora: Pera! Deixa o Lucas, falar. Diga Lucas, por que vocês acham que cada saquinho é 50 gramas?

Aluno: Porque é cento e cinquenta gramas, cada um vale cinqüenta. Cinquenta, cinquenta e cinquenta é cento e cinquenta

Encontramos ainda o entendimento de equações, quando a professora criava situações de igualdade que motivava o aluno a responder o resultado da igualdade, não como um resultado, mas como uma relação. Isso foi trabalhado, quando os alunos encontravam uma relação na balança de dois pratos que não tinha resultado em números e eram estimulados a responder sobre elas. Quando a professora pediu que os alunos encontrassem o valor da garrafa de soro que valia 350 gramas, tirou o peso de 50 gramas para não fazer parte das testagens, deixando todos os outros pesos, inclusive os potes de seis cores diferentes utilizados nas atividades de comparação entre eles. Dessa maneira só teria uma resposta possível para descobrir o valor da garrafa de soro, que seria um peso de 200 gramas, outro de

100 gramas e um pote da cor preta. Mesmo ao encontrar o equilíbrio na balança de dois pratos, os estudantes relatavam que não dava para encontrar o valor. Mas a professora perguntava:

Diálogo da professora ao explorar o raciocínio dos alunos

Aluno: Não dá pra saber não... É um pouco mais que 300 gramas.
Professora: Mas o que tem ai na balança?
Aluno: Um de 200 [gramas], um de 100 [gramas], e esse potinho aqui.

Os alunos entenderam que o objetivo da atividade não era encontrar uma resposta numérica, mas compreender o sentido da relação encontrada na balança. Agora vejamos como ela reconhece o sentido de equação no OA *Balança Interativa*:

Reconhecimento da professora sobre o conhecimento algébrico

Pesquisadora: O que você achou de interessante nesta atividade?
Professora: Eles procurarem meios para ter menos movimento. É legal ver eles engajados.
Pesquisadora: O que você acha que eles aprenderam hoje?
Professora: Bem, acho que a relacionar, né?
Pesquisadora: Relacionar quantidades?
Professora: É...
Pesquisadora: E como você acha que relacionar é importante?
Professora: Assim... eu acho que eles começaram a entender esse negócio de movimentar os números.
Pesquisadora: Como assim?
Professora: Eles entendem que tudo que tem em um prato tem que ser igual no outro.

Diferente das formas como os alunos na pesquisa de Kieran (1981), a professora demonstra compreender a importância do trabalho de equivalência entre membros de uma equação. Consideramos que esse conhecimento do professor em entender que se pode trabalhar com diferentes situações para o desenvolvimento da noção de igualdade é fundamental para se começar a trabalhar com o pensamento algébrico nos anos iniciais. A seguir mostraremos como a professora através de atividades trabalhou com outro raciocínio importante para o desenvolvimento desse pensamento.

4.3.2 Entendimento do pensamento relacional

Franke, Carpenter e Battey (2008) discutem que os professores devem engajar seus estudantes a desenvolver o pensamento relacional desde cedo, como suporte ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Os autores caracterizam esse pensamento pela capacidade de analisar expressões e equações como um todo ao invés de entendê-las como um processo a ser realizado passo a passo. Para eles, o pensamento relacional deve usar propriedades fundamentais dos números e das operações. Por exemplo, ao resolver a expressão 78 + 34 – 34 = ___ começando pela operação 78 + 34 e depois subtraindo 34 ao resultado, não envolve o pensamento relacional. No entanto, esse conhecimento é usado se tivermos atenção que 34 – 34 é zero. Quando se entende esta relação estaremos usando o pensamento relacional.

De modo geral, o pensamento relacional está ligado à capacidade de compreender e deduzir procedimentos matemáticos de forma significativa e não procedimental. O pensamento relacional é empregado quando o aluno tem a capacidade de examinar situações matemáticas ligadas ao pensamento algébrico, na sua totalidade e não como um processo mecânico.

O pensamento relacional se configura quando o aluno usa o raciocínio, compreende ideias importantes sobre as relações entre as operações e propriedades fundamentais da matemática. Este pensamento tem relação com a álgebra nos anos iniciais, a partir do momento em que os alunos comparam expressões aritméticas sem efetuar cálculos explicando o porquê de serem verdadeiras ou falsas, como por exemplo, 2 + 5 = 5 + 2, ou quando efetuam cálculos para obter igualdades verdadeiras, justificando seu sentido.

Muitos estudantes não têm a oportunidade de desenvolver desse tipo de pensamento no Ensino Fundamental porque professores não trabalham com as propriedades numéricas de uma maneira que os alunos compreendam essas propriedades de acordo com o pensamento relacional. No entanto, no momento em que a professora estava fazendo atividades de comparação entre os pesos conhecidos e desconhecidos, ela encorajou seus alunos nesse tipo de pensamento. Primeiro mostrou todos os pesos conhecidos e desconhecidos, colocou 500 gramas em um dos lados da balança e os pesos 200, 300 e 100 gramas do outro lado; assim, pediu que os alunos tentassem equilibrar a balança, ou seja, achar algum peso que pudesse equilbrar aquela desigualdade. Os alunos pegavam qualquer objeto da sala de aula até achar a igualdade. Depois de equilibrar a balança, a professora perguntava quanto vale aquele peso desconhecido. Os alunos discutem entre si e logo descobrem: “Se aqui é meio quilo tem que ter 100 gramas para ficar igual a esse [prato da balança]”.

Em outro momento a professora colocou um pote de farinha, todos sabiam que ele pesava 450 gramas, com 50 gramas em um lado da balança, mais 100 gramas do outro lado. Dessa maneira foram motivados a encontrar a igualdade da relação: 450 + 50 = 100 + ___ . Os alunos vão colocando e tirando materiais que encontram pela sala, ao final, quando encontraram a relação de igualdade na balança, a professora pergunta quanto valia todos aqueles objetos juntos. Os alunos pensam sobre a situação e respondem corretamente: “A farinha é 450 com 50 gramas aqui, dá 500, meio quilo! Esse aqui é 100, então isso tudinho é 400 gramas”.

4.3.3 Inequações e o trabalho com quantidades desconhecidas

Conforme discussões anteriores, o trabalho com álgebra nos anos iniciais deve envolver um conjunto de situações nas quais os alunos possam compreender relações e funções, representar e analisar situações usando símbolos matemáticos, usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas, analisar a variação de diversos contextos. (NCTM, 1989). Dentro dessas situações professores devem proporcionar aos alunos a capacidade de lidar com equações, inequações e funções.

Para Ponte (2005), o estudo desses tópicos proporciona aos alunos um amplo conjunto de ferramentas para a modelação de situações da realidade, contribuindo para o desenvolvimento de uma linguagem algébrica e o raciocínio matemático e a capacidade de resolver problemas. Para o autor o trabalho com inequações deve ser visto com uma relação de desigualdade para expressar relações numéricas e proporcionar uma maior riqueza de significados aos objetos e procedimentos algébricos.

Para introduzir a atividade de comparação de potes com pesos desconhecidos na balança de dois pratos, a professora desenvolveu uma sequência de momentos na sala de aula com objetivo de trabalhar e explorar conceitos de comparação entre quantidade desconhecidas, trabalhando com o sentido de inequações. Foram elas: (1) comparações entre objetos da sala com nítida percepção de sobre qual era o mais pesado; (2) comparações entre objetos da sala com pouca percepção qual era o mais pesado; (3) comparação entre potes de diferentes formatos; (4) comparações entre potes de mesmo formato. A seguir, descreveremos como elas foram desenvolvidas durante a aula da professora.

A primeira exploração do conceito de comparação, propiciada pela professora aconteceu em uma conversa com seus alunos quando ela explicava que os objetos possuem peso e que podemos saber qual o mais pesado ou o mais leve entre eles. Assim, comparava os pesos dos objetos da sala de aula e fazia perguntas sobre ele, por exemplo: “Qual o mais pesado? A mochila da Gabriela ou o caderno dela?”, “O Jonas ou o cadernos dele?”, “O estojo do Mateus ou essa régua?”. Dessa maneira a professora questionava a respeito de vários objetos fazendo comparações entre seus pesos que era fácil perceber sua relação.

Depois pergunta a comparação de objetos que não podemos perceber nitidamente qual é mais pesado. A professora pergunta qual de dois cadernos, aparentemente iguais, é mais pesado. Alguns dizem que um caderno é mais pesado e outros falam que o outro é mais pesado por ter mais página. Eles são motivados a pegar e atestar qual o mais pesado.

Posteriormente, a professora mostra os objetos utilizados na oficina (um pote de granola, garrafa pet de refrigerante, garrafa de soro, pote branco, pote de farinha) e pergunta a relação entre eles. Os alunos decidem o mais pesado pelo tamanho e outros pela largura.

<u>Interação entre a professora e os alunos sobre características do objeto</u>

Aluno 1: Esse pote branco é mais pesado que esse pote de farinha.
Professora: Por que?
Aluno 1: Porque ele é comprido assim [mostra que ele é grande de comprimento].
Alunos 2: É não tia, é não! A farinha é mais assim [mostra com as mãos que o pote de farinha é mais grosso].
(Discussão entre os alunos)
Alunos 2: E tem mais! Ele [o pote de farinha] está todo completo e o pote branco eu não sei.

Dessa maneira, a professora encorajava os alunos a justificar o pensamento, a criar hipóteses sobre a situação, a relacionar as propriedades dos objetos e despertar um entendimento sobre a relação de desigualdade. A professora segue a atividade fazendo comparações com diversos potes de tamanho diferentes. A cada comparação proposta é discutida entre os alunos e depois eles fazem a confirmação na balança de dois pratos.

Depois a professora mostra os potes do mesmo formato e pede para que eles descubram a relação entre eles. Pergunta se lembram como ordenar valores na ordem crescente e decrescente. A turma se confunde algumas vezes e ela ajuda:

<u>Explicação da professora sobre a ordem dos pesos dos objetos</u>

Professora: Se eu peço para vocês colocarem esses potes do maior peso, para o menor, vocês estão usando a ordem decrescen..
Alunos: ... te!
Professora: E seu eu ordeno do menor para o maior? É cres...
Alunos: ... cente!

A docente pergunta qual pote eles querem sentir o peso para começar a ordená-los na ordem crescente. Eles estão em círculo e a professora, a pedido dos alunos, passa o pote branco para que todos possam sentir o peso dos potes. O pote branco é o mais leve de todos e eles falam que aquele pote possui “zero quilos” e outros falam “não tem nada”. Depois, os alunos pedem o pote azul e todos concordam que ele é mais pesado do que o branco. Os pesos ficam em cima da mesa da professora e os alunos a orientam que o pote azul deve vir depois do pote branco. Dessa maneira, a professora vai passando todos os pesos para que os alunos possam sentir seu peso e depois eles orientam onde os potes devem ficar.

A cada pote que pegavam, tentavam relembrar qual a relação com o anterior ou dentro do conjunto de pesos já testados. Eles sentiram o peso do pote branco, o azul, o verde, o preto, e, quando escolheram o pote vermelho, tinham que decidir qual a relação dele com todos os outros e colocá-lo no lugar onde achavam que era.

Quando eles tinham alguma dúvida sobre a ordem de um pote, a turma escolhia um representante para examinar o peso posterior e anterior ao peso elegido e verificar se o pote estava no lugar correto. Após a atividade de comparar os potes de mesmo tamanho com as mãos, todas as crianças comparavam os mesmos potes na balança de dois pratos. Dessa maneira, as crianças não podendo sentir os pesos dos potes, descobriam estratégias para encontrar a ordem dos potes. Veja a explicação de dois alunos:

<u>Explicação de dois alunos sobre atividade de ordenar</u>

Eu botei o mais pesado aqui e vai descendo... Menos pesado, menos pesado, menos pesado... [o aluno está traduzindo o que encontrou na balança ao comparar o amarelo com azul, vermelho e verde]. De um por um e descobri qual é o mais pesado, depois o outro mais pesado e assim vai.

Ele escolheu o pote amarelo e foi colocando outros potes para verificar se ele era o mais pesado de todos. Depois que verificou que este era o mais pesado, escolheu outro pote e comparava com todos outros. Outros também explicam como encontraram a sequência:

<u>Explicação de um aluno sobre atividade de ordenar</u>

Eu vou vendo um com o outro. Se eu quero o mais pesado tenho que encontrar sempre qual é e depois ver qual o outro mais pesado, até chegar o mais leve.

Apenas uma aluna sentiu dificuldade e errou ao ordenar os potes na ordem pedida pela professora (ordem crescente), pois ao invés de comparar um com todos, comparava dois a dois e não fazia mais comparações com o restante do conjunto de potes. Ao comparar o preto com o verde, percebendo que o verde era mais pesado, não o comparou com outros pesos do conjunto de potes, considerando que este o era mais pesado de todos.

Após essas atividades, perguntamos o que a professora achou de interessante no trabalho e se alguma coisa chamou sua atenção. Ela reconheceu que muitas vezes conduziu a atividade em situações diversas para que os alunos pudessem comparar os pesos dos objetos sem necessariamente saber o valor deles. Quando perguntada se a atividade trabalhou algum conceito algébrico, ela responde: “Quando eles comparavam aquelas caixinhas e não sabiam o valor. Eu acho sim, trabalhamos! Porque eles não precisam saber a quantidade das coisas”.

Apesar de a professora ter trabalhado com a atividade de maneira bem diversificada, explorado o sentido das relações entre quantidades desconhecidas e estimulando os alunos a raciocinar sobre a situação, não criou outras possibilidades para ampliar o pensamento algébrico como traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação.

O trabalho com inequações foi claramente percebido pela professora após o trabalho das atividades com o OA feira dos pesos. Veja no diálogo abaixo a reflexão da professora sobre o trabalho com o objeto.

<u>Entrevista com a professora após atividade com o OA Feira dos Pesos.</u>

Pesquisadora: O que você acha que eles aprenderam nessa atividade?

Professora: Assim... eu vi que hoje eles não estavam buscando somente a igualdade como a gente fez na aula passada com a balança [atividade com a balança de dois pratos pesando objetos] eles estavam trabalhando com a diferença também.

Pesquisadora: Como assim diferença?

Professora: Porque aqui a balança não entrou em equilíbrio, né? Eles trabalham também com as... inequações. Isso. Assim eles vêem *maior que* um peso, *menor do que* outro peso. Isso também é importante trabalhar, né? É assim, eu já trabalhava isso com eles pedindo para colocarem o sinal, mas aqui eles que fazem a relação dos pesos.

Pesquisadora: Como assim o sinal?

Professora: Assim, eu coloco 4 e 7, aí eles colocam qual o sinal entre esses números.

Pesquisadora: Ah, o sinal de *maior que* e *menor que*?

Professora: É!

Pesquisadora: E aqui como eles fazem?

Professora: Eles que criam a situação, né? Eles analisam...

Pesquisadora: E porque isso é importante para que eles aprendam sobre álgebra?

Professora: Hum... deixa eu ver. Bem, na situação que eu fazia para eles colocarem o sinal, trabalhavam só com o sinal e com o número. Aqui na feira dos pesos eles trabalham de forma mais geral, analisando a situação, tem que analisar todo um contexto. Ah! Além do mais não tem um número, né?

Pesquisadora: Como assim?

Professora: Assim, eu acho que pode trabalhar várias coisas da álgebra, os alunos entendem a inequação como eu já disse e trabalham com um elemento desconhecido. Eu acho que é isso. Porque comparam uma coisa desconhecida com outra, e essa comparação não é uma coisa igual, mas diferente.

Neste recorte percebemos o conhecimento da professora sobre a atividade e sua análise sobre como pode trabalhar com relações de desigualdade. Após a entrevista com as atividades da balança de dois pratos comparando os pesos, percebemos a professora motivada para criar várias atividades que os alunos pensassem sobre as relações de desigualdades. Mas foi na entrevista após a atividade com o OA Feira dos pesos que a professora percebeu como poderia trabalhar inequações e a importância de relacionar pesos com valores desconhecidos uma vez que queremos trabalhar com conceitos algébricos nos anos iniciais. Analisamos que esse reconhecimento não se deu devido ao objeto de aprendizagem em si, mas segundo todo o contexto que a professora trabalhou durante a pesquisa desde o momento da oficina, o planejamento das atividades e prática em sala de aula.

4.3.4 Trabalho com letras

Em discussões anteriores mostramos que a educação algébrica possui várias concepções. Uma dela é a visão letrista na qual as atividades com álgebra é proposta no currículo das escolas. Apesar das críticas com a utilização das letras, ela é uma característica da atividade algébrica e deve ser trazida para as atividades escolares como forma de entender seu real significado e não somente com sentido de manipulação simbólica.

Para Ponte, Branco e Matos (2005) o trabalho com equações precisam ser escritas preferencialmente usando letras para designar a “incógnita”, termo que pode aparecer de forma natural no trabalho na sala de aula. Para o autor, é muito possível que alguns alunos sugiram que em vez de 1+ ___ = 9 se escreva 1+ x = 9. Caso essa sugestão não surja espontaneamente da parte dos alunos, o professor terá de decidir qual o momento oportuno para introduzir a linguagem algébrica.

Entendendo que o trabalho com letras também é importante para a compreensão do pensamento algébrico, trouxemos alguns exemplos que demonstram o conhecimento da professora sobre a utilização de incógnitas.

Percebemos o trabalho com valores desconhecidos e incógnitas, durante as atividades com o OA *Feira dos Pesos* e *Balança Interativa*. A professora comentou em entrevista, após a atividade, que os alunos ao utilizar o OA *Feira dos Pesos* pensavam nas relações e utilizaram mais as incógnitas no laboratório, pois “falavam constantemente em letras”. Esse trabalho ocorreu durante as atividades utilizando os materiais digitais, pois as crianças se referiam às letras para falar sobre as ordens dos pesos (*Feira dos Pesos*) ou seus valores (*Balança Interativa*). Nos diálogos durante o uso do material digital, constantemente eles se referiam a um pote pela letra: “O B é maior que o C”, “O D é menor do que A”, etc. Isso acontecia porque no contexto da atividade os potes eram reconhecidos pelas letras.

Vale ressaltar que essa característica dos materiais digitais não os torna vantajosos em relação ao material concreto, pois os potes das atividades com o material concreto também poderiam representar letras ao invés de cores, como o material utilizado pela professora durante as aulas. O que propiciará essa característica é o planejamento que professores farão antes da atividade. Depois de perceber seus alunos conversando sobre quantidades desconhecidas representadas por letras, nas atividades no laboratório, a professora reconhece que poderia trabalhar mais esse conceito em sala de aula também.

Fala da professora explicando como poderia trabalhar representação da incógnita em sala de aula.

Pesquisadora: Você disse que aqui [no laboratório de informática] eles falavam mais sobre letras para representar quantidades. Mas isso não poderia ser feito em sala?
Professora: Podia...
Pesquisadora: Como?
Professora: Era só colocar as letras naqueles potinhos.

Durante essa entrevista destacamos dois pontos importantes sobre o trabalho da professora: (1) reconhecimento de que seus alunos relacionaram uma quantidade qualquer com uma letra ou as comparavam mesmo sem saber um valor numérico, e (2) reflexão de que podia ter modificado a atividade que tinha feito anteriormente para atingir outros objetivos para a atividade.

Reconhecer como os alunos utilizavam esses conceitos nas atividades e refletir que poderia ter aprimorado uma atividade já realizada é um passo importante para que ela desenvolva novos materiais, metodologias e formas de intervenção caso queira inserir este conceito em suas atividades escolares. Além disso, esses aspectos demonstram que a professora, através de uma ação, refletiu sobre sua prática, o que pode favorecer mudanças em sua prática nas próximas atividades.

Durante as atividades com o OA *Balança Interativa*, a professora acompanhava os alunos nas conversas com os outros colegas sobre os valores das caixinhas e compreendendo que a cada nova atividade elas mudavam de valor. Portanto, mesmo que descobrissem que uma caixinha, em um determinado nível, pesava três, em outro nível, ou se jogasse novamente, ele teria outro valor.

No começo da atividade, um dos alunos, contente ao encontrar o valor da caixinha A, gritou em sala: “O A vale sete!” A professora explica para toda sala: “Gente, o André encontrou que a caixinha dele vale sete, mas em cada computador a mesma caixinha pode ter um valor diferente.” Centrados nessa informação, os alunos não priorizavam o resultado, mas discutiam estratégias para encontrar o valor dos pesos: “Ei, é melhor pegar logo nesse aqui no meio” - um dos alunos explicando que se os valores variam de um a dez, é melhor colocar o número cinco para achar o valor de uma caixinha, “Esse peso não pode ser 15” - uma aluna explicando para sua colega que o valor de uma caixinha não poderia ser quinze, pois os valores variavam de um a dez.

Todas essas interações eram acompanhadas pela professora que ficava visitando cada dupla de alunos para ver como eles estavam resolvendo as situações. Os alunos desenvolviam o entendimento de incógnita e valor desconhecido quando relacionavam e comparavam as quantidades desconhecidas. Veja como a professora considera a interação das crianças:

<u>Entrevista com a professora após aula com Feira dos Pesos</u>

Pesquisadora: Houve alguma coisa que chamou sua atenção?

Professora: Achei legal porque eles falavam dos pesos sem dificuldade. Eu ficava perguntando a eles e eles conseguiam relacionar os pesos mesmo sem saber o valor deles, isso é... E eu vi que eles não tiveram dificuldade. E quando eles falavam comigo ou com os outros [colegas] dos pesos eles não chamavam pela representação numérica deles e sim pela letra.

Pesquisadora: E por que você acha isso interessante?

Professora: Porque eles podem fazer a representação da letra com a quantidade, não?

O final da fala da professora demonstra que ela, de alguma forma, reconhece a importância de começar a trabalhar com representações de quantidades e utilização de símbolos como incógnita.

Já nas atividades no OA *Feira dos Pesos*, os alunos nunca descobriam o valor dos pesos e podiam escolher como queriam ordená-los, em suas duplas decidiam se queriam na ordem crescente e decrescente. Como não podiam sentir os pesos dos objetos criavam estratégias para ordená-los.

Diferente da atividade realizada na sala de aula, os alunos no laboratório de informática não sentiram necessidade de descobrir o valor dos potes. Isso foi observado porque em nenhum momento eles perguntaram isso para professora. Diferente da sala de aula que durante as atividades eles tiveram a curiosidade de perguntar quanto pesavam os potinhos. No material concreto, seria mais difícil trabalhar sem atribuir valores, já que eles estão sentindo o valor dos pesos.

4.3.5 Generalização

Segundo Usiskin (1995) o trabalho com padrões e generalizações é primordial, pois possui aspectos importantes, não só para a álgebra, mas também para a aritmética. Para o autor é impossível estudar álgebra adequadamente, sem lidar implícita ou explicitamente com o estudo de padrões. Para isso, é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam compreendidos dentro do contexto aritmético. Se isso não acontecer ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito dessas relações, seu desempenho em álgebra poderá ser prejudicado. Neste caso, algumas dificuldades que o aluno tem em álgebra não são de álgebra propriamente dita, e sim dificuldades conceituais em aritmética que não foram superadas.

Entendemos que o aspecto generalizador da álgebra acontece quando se trabalha com padrões numéricos ou geométricos, promovendo o desenvolvimento da investigação e descoberta de uma regra geral que identifique casos particulares.

Embora as atividades desenvolvidas nesta pesquisa não tivessem o objetivo de trabalhar com o desenvolvimento de padrões, observamos uma ação espontânea dos alunos a partir de sua curiosidade e motivação da professora em despertar o raciocínio da generalização.

Depois que os alunos descobriram a relação entre os seis potes de cores diferentes, um dos alunos perguntou à professora quanto valia cada pote daquele. A professora com intuito de responder ao aluno pegou os pesos conhecidos e pediu que ele encontrasse o valor de cada um. Os potes estavam na ordem crescente e o aluno começou a encontrar o valor do peso a partir do mais leve. O primeiro pote (de cor branca) pesava menos que cinquenta gramas, o aluno ainda balançou o pote e falou: “Não tem nada”. O pote seguinte (pote preto) pesava cinquenta gramas, o próximo (pote verde) pesava cem gramas, depois (pote vermelho) pesava cento e cinquenta gramas, o seguinte (pote azul) pesava duzentos gramas e o último (pote amarelo) pesava duzentas e cinquenta gramas. Professora e alunos discutem:

<u>Diálogo entre professora e alunos sobre a atividade de comparação</u>

Alunos: Vai sempre de cinquenta em cinquenta.

Professora: E se eu tivesse outra cor aqui? [aponta para um suposto pote depois do amarelo].

Alunos: Ia ser trezentas. Trezentas gramas, tia!

Professora: E se eu tivesse outro?

Alunos: Trezentos e cinquenta.

Agora a professora pergunta individualmente para alguns alunos. Até que um dos alunos responde: “Vai ser sempre o peso do último pote mais 50!”. A professora fica satisfeita com a resposta do aluno e vai para outra atividade.

Mesmo que não seja uma observação e identificação de um padrão numérico ou geométrico, os alunos desenvolveram um aspecto importante para o entendimento da generalização. Neste momento, percebemos o começo do desenvolvimento de um processo de generalização, pois o aluno observou e analisou uma determinada situação entendendo uma regra geral fazendo conjecturas sobre essa situação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Saber a calma para ir, perder a pressa para estar,
perder o verbo para si, saber o sonho para lá,
ouvir a rima para dor, cantar a nota para o céu,
achar a forma para a flor (...).
(*Naturalmente*, Lenine).

Chegando ao final do estudo, apresentaremos uma reflexão sobre a investigação realizada, buscando responder aos objetivos da pesquisa e fazendo uma síntese dos principais conhecimentos das professoras que participaram da oficina e da docente que participou do planejamento e da prática. Encerraremos com algumas recomendações sobre possibilidades de novos estudos que descrevam a formação do professores de Matemática nas séries iniciais.

Este trabalho teve como objetivo geral investigar o desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, utilizando atividades manipulativas e recursos digitais. Dessa forma, faremos algumas reflexões nos parágrafos seguintes.

A investigação realizada baseou-se nos estudos e pesquisas que descrevem como os estudantes de séries iniciais participam de atividades que exigem a utilização do raciocínio e pensamento algébrico (BRIZUELA, 2004; BRIZUELA, LARA-ROTH, 2001; CARRAHER, BRIZUELA, SCHLIEMANN, 2000; SCHILIEMANN, GOODROW, LARA-ROTH, 2001).

Essas pesquisas comprovam que estudantes de anos elementares podem realizar conjecturas e argumentos, estabelecer generalizações sobre dados e relações matemáticas expressas através de linguagens cada vez mais formais. (KAPUT, 1994). Esses trabalhos nos impulsionaram a investigar como os alunos brasileiros demonstram esse pensamento, utilizando recursos digitais e atividades manipulativas com a balança de dois pratos. (FREIRE, 2007). Outros trabalhos também investigaram como estudantes de séries finais do Ensino Fundamental resolviam e desenvolviam esse pensamento com diversas situações dentre elas a balança de dois pratos. (LESSA, 1996; BRITO MENEZES, 2006).

Partindo do pressuposto que era possível desenvolver o pensamento algébrico nos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, este trabalho foi pensado com intuito de trazer uma parte desses estudos para a sala de aula por considerar um passo essencial que os resultados de pesquisas cheguem à escola.

Portanto, para a realização do estudo foi necessário, mais do que ir à escola, mas chegar à sala de aula. Para atingir tal objetivo, o professor foi uma peça chave para a realização do presente estudo. Por esse motivo, foi importante trazer estudos que nos ajudassem a compreender seu conhecimento dentro de uma perspectiva de desenvolvimento profissional (SHULMAN, 1986), que nos mostrou como o conhecimento docente pode influenciar o ensino. O estudo do conhecimento proposto por Shulman (1986) tem sido base para a realização de muitos trabalhos, proporcionando um maior aprofundamento do conhecimento do professor. Relacionamos os estudos de Shulman (1986) sobre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico com estudos de Ball (1990, 2003, 2005, 2008), os quais mostraram como o professor de Matemática desenvolve seu conhecimento. Esses trabalhos argumentam que os conhecimentos dos professores são mais complexos do que os conhecimentos propostos por Shulman (1986), pois o conhecimento nunca é totalmente completo e se desenvolve durante a prática. Os conhecimentos são adaptativos e evoluem à medida que enfrentam novas questões em sua prática. (CASTRO-FILHO, 1999).

Esses estudos embasaram reflexões sobre como o conhecimento do professor de Matemática dos anos iniciais se manifestava durante a pesquisa. Tais trabalhos foram essenciais para compreender o conhecimento dos professores manifestados na oficina, no planejamento e na prática.

Durante as atividades da oficina pudemos levantar considerações sobre o conhecimento de novos métodos de ensino que propiciem uma aprendizagem mais significativa para a Álgebra nos anos iniciais e a formação docente.

A iniciativa de discutir com os professores da escola a possibilidade de trabalhar conceitos algébricos nas séries iniciais possibilitou uma descrição sobre o conhecimento matemático das professoras participantes da pesquisa. Os conhecimentos algébricos limitavam-se às concepções algébricas de ensino discutidas pelos estudos de Lins e Gimenez (1997), Booth (1995), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). As professoras possuíam dificuldades relacionadas à aprendizagem algébrica, pois não lembravam como resolviam uma equação de 1º grau, relacionavam o ensino da álgebra a procedimentos de resolução de equações e não conheciam as possibilidades de um ensino de noções algébricas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

As atividades durante a oficina de formação fizeram que as professoras resolvessem e explorassem situações ligadas ao pensamento algébrico, refletissem sobre o uso de representações, entendessem a álgebra como uma atividade de relação e equivalência desenvolvendo diferentes modos de produzir significado, e aprimorassem a capacidade de usar materiais para explorar conceitos algébricos.

Esses dados refletem que é preciso investir na formação inicial e continuada de professores de séries iniciais para a compreensão do ensino de Matemática a partir de uma articulação entre os conteúdos. Não se pode mais pensar em um currículo separado sem conexão da aritmética com os conhecimentos algébricos. Conforme Lins e Gimenez (1997) a álgebra precisa ser vista como atividade que envolve, assim como a aritmética, números e operações, igualdades e desigualdades, e a aritmética precisa ser vista, assim como a álgebra, como uma ferramenta que toma parte do processo de organização da atividade humana.

As atividades durante a oficina mostraram que também é necessário investir nos conhecimentos pedagógicos dos professores que considere os conhecimentos prévios discentes para a aprendizagem da Matemática. Um passo é compreender o conhecimento específico, no nosso caso o algébrico; outro é compreender como realizar atividades para o desenvolvimento desse pensamento.

Com objetivo de investigar o desenvolvimento algébrico das professoras dos anos iniciais, consideramos que as atividades propostas durante a oficina puderam começar uma reflexão sobre o desenvolvimento desse conhecimento tanto no que se refere ao conhecimento do conteúdo como no conhecimento pedagógico.

A situação-problema de encontrar a quantidade de animais em um sítio propiciou a reflexão de como as professoras podem relacionar uma quantidade desconhecida a uma letra, fazendo que elas refletissem como podiam representar e analisar situações e dados de um problema, usando símbolos algébricos. Isso foi percebido pelas diversas representações que as professoras utilizavam durante a resolução. Infelizmente não tivemos mais espaço para resolver e discutir aspectos da resolução de problemas na álgebra, entretanto, temos a clareza que é preciso investir na formação docente e ter mais espaço nas escolas para discutir sobre esse tipo de conhecimento.

As atividades com a balança de dois pratos, pesando objetos e as atividades no OA *Balança Interativa* fizeram com que as professoras refletissem sobre as relações de igualdade e desigualdade, quantidades desconhecidas e o algoritmo de resolução de equações. Apesar de resolverem as situações na balança de dois pratos através de estratégias baseadas na estimativa, pois em alguns pesos as professoras puderam sentir o peso dos objetos, compreenderam as regras de manipulação de equação. No entanto, puderam desenvolver outras estratégias que são importantes para o entendimento de regras de resolução de uma equação durante as atividades no *Balança Interativa*.

Já as atividades na balança de dois pratos, comparando potes e as atividades no OA *Feira dos Pesos*, propiciaram que as professoras entrassem em contato com outro aspecto importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico que é o trabalho com inequações e o pensamento transitivo. Essas duas atividades propiciaram a discussão sobre as relações de desigualdade diferente das atividades da balança de dois pratos, medindo pesos que tinham o objetivo de encontrar a igualdade na balança.

Após a oficina, percebemos que não era necessário fazer somente com que as professoras conhecessem tal concepção sobre as atividades algébricas nos anos iniciais, era preciso investigar como elas levavam tal concepção para a sala de aula. Antes disso, acompanhamos uma das professoras da oficina para analisar como ela relacionou os conhecimentos e atividades da formação no desenvolvimento de conceitos algébricos.

Durante o planejamento, relacionamos como a docente participante caracterizava, dentro das atividades de sala de aula, o conhecimento algébrico. As categorias descritas mostraram como a professora organizava e criava um ambiente de aprendizado relacionado ao pensamento algébrico. As análises das transcrições de planejamento identificaram que a professora ainda relacionava às atividades características aritméticas e não investia em outros tipos de representação. Apesar de a professora relacionar conteúdos aritméticos às atividades, identificamos que ela também atribuiu sentido às atividades, explicando como elas podem trabalhar com aspectos de pensamento algébrico.

O desenvolvimento do pensamento algébrico se manifestou também na prática de sala de aula a partir do momento que a professora diversificou as atividades de comparação, explorou o sentido de equações, inequações, pensamento relacional e criou uma atividade de generalização.

As atividades durante a pesquisa permitem constatar os avanços do conhecimento docente sobre conceitos algébricos em sua atividade de sala de aula. Os conhecimentos algébricos das professoras durante a oficina eram limitados a conhecimentos essencialmente aritméticos. O conhecimento da professora que participou do planejamento e da prática em sala de aula aponta para uma relação mais próxima do pensamento algébrico e desenvolvimento do sentido de símbolo. (ARCAVI, 1994). A pesquisa possibilitou descobertas que favorecerão uma melhor compreensão sobre desenvolvimento de conceitos algébricos de professores dos anos iniciais.

Contudo, ainda é preciso investir em outras atividades que trabalhem outros aspectos relacionados a conceitos algébricos como compreender padrões e funções, utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e analisar a variação em diversos contextos. É preciso também investir na formação de professoras para a utilização desses conceitos de forma que esse conhecimento seja aplicado de forma mais ampla do que no contexto dessa pesquisa.

Uma forma de ampliação deste trabalho é o desenvolvimento de um estudo que permita acompanhar um maior número de professores durante a aplicação de diversas atividades e explore de forma mais exaustiva a integração das atividades aritméticas e algébricas ao longo da educação básica.

Concluímos que os resultados levantados durante esta pesquisa podem contribuir para ampliar a visão atual dos professores sobre o ensino e a aprendizagem e o desenvolvimento de novas ferramentas para o trabalho de conceitos algébricos nos anos iniciais, cumprindo com os objetivos propostos inicialmente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCAVI, A. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. In: *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 1994, p. 24-35.

ALMEIDA, M. E. *Informática e formação de professores*. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

ARAÚJO, C, R.; BRITO LIMA; A. P.; DA ROCHA FALCAO; J. T, LESSA; M, M, L.; OLIVEIRA; LEITÃO, S.M. *Negotiating algebraic sense-making in the context of student-student-teacher interaction activities*. III Conference for Sociocultural Research. Contion Center. São Paulo-Campinas: UNICAMP, 2000.

BALL, D. L. The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. In: *Elementary School Journal*. n. 90. 1990, p.449-466.

______.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: DAVIS, B.; SIMMT, E. (Eds.). *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*. Edmonton, AB: CMESG/GDEDM, 2003, p.3-14.

______.; HILL, H.C; BASS, H. *Knowing mathematics for teaching:* Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, 2005.

______.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: *Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*. Groupe Canadien D'E´Tude En Didactique Des Mathematiques (CMESG/GCEDM), 2002, Edmonton. Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group. Edmonton, AB: CMESG/GDEDM, 2003, p. 3-14.

______.; LEWIS, J; THAMES, M.H. Making mathematics work in school. *Journal for Research in Mathematics Education* - Monograph 14, A Study of Teaching: Multiple Lenses, Multiple Views, 2008.

______.; THAMES, M.H; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *In: Journal of Teacher Education*, 59 (5). 2008, p.389-407.

BARRETO, R. G. Tecnologia e educação: trabalho e formação docente. In: *Revista Educação e Sociedade*, Campinas, n. 89, v. 25, Set./Dez. 2004, p. 1181-1201. Disponível em: <http://www.cedes.unicamp.br>. Acesso em: 31 mar.2009.

BITTAR, M.; VASCONCELLOS, M. A formação dos professores que ensinam matemática na educação infantil e nos anos iniciais: um estudo sobre a produção dos eventos realizados no ano de 2006. In: *IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte: SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. único, 2007.

______. *A integração da tecnologia na pratica do professor que ensina matemática na educação básica:* uma proposta de pesquisa-ação. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 38, 2008b, p. 84-94,

______. Desafios para pesquisa em educação matematica na sala de aula. In: *2º Simposio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 2008, Recife. Matematica formal e matematica não-formal 20 anos depois: sala de aula e outros contextos, 2008a.

BLANTON, M.; KAPUT, J. *Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.* In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 2005, p. 412-446.

BOGDAN, R; BIKLEN, S, K. *Qualitative research for education*. Boston, Allyn and Bacon, Inc., 1982.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da Álgebra.* São Paulo: Atual, 1995.

BORBA, M. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BRASIL, MEC/SEF. *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental: Introdução aos PCN.* Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998a.

______. *Matemática.* Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1998b.

BRASIL. *Referenciais para formação de professores*, Brasília, MEC / SEF, 2000.

BRASIL. *Explorando o Ensino da Matemática*. v. II. Brasília: Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica, 2004.

BRASIL. *Declaração Conferência Mundial sobre Educação para Todos - Unesco.* Disponível em: <http://www.unesco.org.br/publicacoes/copy_of_pdf/decjomtien>. Acesso em: 19 Ago. 2006.

BRITO MENEZES, A. P. A. *Contrato didático e transposição didática:* inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco: 2006.

BRIZUELA, B. M. *Desenvolvendo matemática na criança*: explorando notações. Trad. Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 2004.

______.; LARA-ROTH, S. Additive relations and function tables. In: *Journal of. Mathematical Behavior*, 20(3), 2002, p. 309-319.

CARRAHER, D.; BRIZUELA, B. M.; SCHLIEMAN, A. D. Bringing out the algebraic character of arithmetic: Instantiating variables in addition and subtraction. In: T. Nakahara e M. Koyama (Eds.). *Proceedings of the 24th conference of the International Group for the PME*. v. 2. Japan: Hiroshima University, 2000, p. 145-152.

______. A Aprendizagem de conceitos matemáticos com auxílio do computador. In: ALENCAR, Eunice M.S Soreano de (Org.). *Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem.* São Paulo: Cortez, 1992.

______.; EARNEST, D. Guess My Rule Revisited. In: *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Honolulu, HI, July, 2003.

______.; SCHLIEMANN, A., BRIZUELA, B. M., & EARNEST, D. Arithmetic and algebra in early mathematics education. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 2006, p. 87-115.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.W.; SCHLIEMANN, A.D. *Na vida Dez na Escola Zero.* São Paulo: Cortez, 2002.

______.; N.; SCHLIEMANN, A D. Álgebra na feira?. In: SCHLIEMANN, A D. et al. *Na vida dez, na escola zero.* 7. ed. São Paulo: Cortez, 1993, p.127-141.

CASTRO-FILHO, J. A. *Teachers, Math, and Reform:* An Investigation of Learning in Practice. Tese de doutorado. University of Texas at Austin: Doutorado em Mathematics Education, 2000.

______.; DE MACÊDO, L. N.; FREIRE, R. S.; LEITE, M.A. *Cartas Interativas: Desenvolvendo o pensamento algébrico mediado por um software educativo.* XXI Workshop de Informática na Escola (WIE). Anais do XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. São Leopoldo - RS, 2005.

______.; LEITE, M. A.; FREIRE, R. S.; PASCHOAL, I.V.A. Balança Interativa: um software para o ensino da Álgebra. In: *XVI Encontro de Pesquisa Educacional das Regiões Norte e Nordeste* (EPENN), Aracaju, 2003.

______.; Objetos de aprendizagem e sua utilização no ensino de matemática. In: *ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 9, 2007, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte - MG: SBEM, 2007.

______.; FREIRE, R. S.; FERNANDES, A. C.; LEITE, M. A. Quando objetos digitais são efetivamente para aprendizagem: o caso da matemática. In: *XIX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação* (SBIE), 2008, Fortaleza. Anais do XIX SBIE. v. 1. Porto Alegre: Sociedade brasileira de Computação, 2008, p. 583-592.

CHIZOTTI, A. *Pesquisa em ciências humanas e sociais*. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

CONFREY, J. Using computers to promote students' inventions on the function concept. In: Malcom, S.; Roberts, L.; Sheingold, K. (ed.). *The year in school science 1991.* Washington, DC: American Association for the Advancement of Science, 1992, p. 141-174.

CORTES, A.; KAVAFIAN, N.; VERGNAUD, G. From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. In: *Proceeding of the fourteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, México, 1990, p 27-34.

CYSNEIROS, P. G. Competências para ensinar com novas tecnologias. In: Revista Diálogo Educacional. Curitiba, Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR), n.12, v.5, 2004.

D'AMBROSIO, B. *Como ensinar matemática hoje?* Temas e Debates. SBEM. Ano II. No. 2, Brasília, 1989, p. 15-19.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHILLIEMAN, A.D; CARRAHER, D.W.; SPINILLO, A.G.; MEIRA, L.L; DA ROCHA FALCÃO, J.T. (orgs) *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

______. A case study of algebraic scaffolding: From balance scale to algebraic notation. In: *Proceedings Of The XXI International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, v. 2, Recife-PE: 1995, p. 66-73.

______. Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos. In: DIAS, M. G.; SPINILLO, A. G. (orgs.). *Tópicos em psicologia cognitiva*. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1996, p. 141-167.

______. *Relações entre Pensamento e Linguagem:* Explorações teóricas no contexto da educação matemática. Boletim Gepem. 41. 2003, p.43-56.

______. *Psicologia da Educação Matemática:* uma introdução. Belo horizonte: Autêntica, 2003b.

DAVYDOV, V. *Soviet studies in mathematics education:* Psychological abilities of primary school children in learning mathematics. v. 6. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1969.

DIRENE, A. I.; CARVALHO, E. M.; CASTILHO, R.; MARCZAL, P. *Objetos de Aprendizagem Generalizáveis para o Currículo de Matemática do Ensino Médio*. WIE - XV Workshop sobre Informática na Escola. Sociedade Brasileira de Computação. Bento Gonçalves – RS: 2009.

DUARTE, R. Pesquisa qualitativa: reflexões sobre trabalho de campo. In: Cadernos de Pesquisa, Campinas, n. 115. Jul. 2001, p. 139-154.

FENNEMA, E.; FRANKE, M. L. Teachers' knowledge and its impact. In: GROUWS, D. A (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan Publishing, 1992, p. 147-164.

FERNANDES, A. C. A. *Objeto de aprendizagem na escola*: estudo de um modelo de implementação. Dissertação de Mestrado: Universidade Federal do Ceará – Fortaleza UFC, 2009.

FIORENTINI, D. *Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil.* Bolema: Mathematics Education Bulletin = Bolema: Boletim de Educação Matemática [Online] 21:29, . Disponível em: <http://cecemca.rc.unesp.br/ojs/index.php/bolema/article/view/1718/1495>. Acesso em: 27 set.2008.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar, In: *Pro-Posições* - Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp. n.1, v. 4, [10]. Campinas: Cortez Editora, 1993, p.78-91.

______.; FERNANDES, F.L.P.; CRISTOVÃO, E.M. *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.* (Artigo). Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas e na Formação de Professores, Lisboa: FCUL, 2005 Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes /jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>.Acesso em: 10 Ago.2007.

FILLOY, E.; ROJANO, T. *From an arithmetical thought to an algebraical thought:* A clinical study with 12-13 year olds. Proceedings of the sixth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Winsconsin: EUA, 1994, p. 51-56.

FRANKE, M.; CARPENTER, T.; BATTEY, D. Content matters: Algebraic reasoning in teacher professional development. In: KAPUT, J. J., CARRAHER. D. W., BLANTON, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades.* New York, NY: Routledge, 2008, p. 333-359.

______.; FENNEMA, E.; CARPENTER, T. *Changing teachers: Interactions between beliefs and classroom practice.* In: Fennema, E.; NELSON, B. S. (Eds.). Mathematics teachers in transition. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 1997, p. 255-282.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia*. São Paulo: Editora Paz e Terra, 1997.

FREIRE. R. S. *Ambientes Computacionais para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará, 2007.

______.; CASTRO FILHO, J. A. *Desenvolvendo conceitos algébricos no Ensino Fundamental com o auxílio de um Objeto de Aprendizagem*. Workshop de Informática na Escola, 12., Campo Grande. Proceedings. Campo Grande: SBC, 2006, p.156-163.

______.; FERNANDES, A. C.; CASTRO-FILHO, J. A. *Iniciação à álgebra e a utilização de objetos de aprendizagem.* II SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - SIPEMAT, 2008, Recife. Anais do II SIPEMAT. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008.

GIROUX, H. A. *Os professores como intelectuais: rumo a uma pedagogia crítica da aprendizagem.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. *Resultado do Saeb (Versão Preliminar).* Brasília: MEC, 2004. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/basica/saeb/anos_anteriores.htm>. Acesso em: 15 mar.2007.

______. SAEB – 2005. *Primeiros Resultados: Médias de desempenho do SAEB/2005 em perspectiva comparada*. Brasilia: MEC, 2007. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/basica/saeb/anos_anteriores.htm>. Acesso em 15 de março de 2007.

______. *Matrizes Curriculares de Referência:* SAEB (2. ed.). Brasília: MEC/INEP, 1997.

KAPUT, J. Democratizing access to calculus. In: SCHOENFELD, A. (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1994, p. 77-156.

______. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K–12 curriculum. In: FENNEL, S. (Ed.). *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum:* Proceedings of a national symposium. Washington, DC: National Research Council, National Academy Press, 1998.

______.; BLANTON, M. Algebrafying the elementary mathematics experience. (Part I). In: CHIC, H. K; STACEY, K.; VINCENt, J. (Eds.). *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference.* v. 1. Australia: The University of Melbourne, 2001, p. 344-350.

KENSKI, V. M. *Educação e Tecnologias*: o novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papirus, 2007.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. *In: Educational Studies in Mathematics*, 12, 1981, p. 317-326.

______. The learning and teaching of school algebra. In: GROWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan, 1992, p. 390-419.

______. Research on the learning and teaching of algebra. In: Gutierrez, A.; Boero, P. (Eds.). *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education*: Past, present and future. Roterdham: Sense, 2006, p. 11-50.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. ***Como as crianças representam a operação de divisão:*** da linguagem matemática oral para outras formas de representação. Temas em Psicologia. 7 (1), 1999, p. 23-36.

LEITE, M. A. *Construção de Conceitos Matemáticos e trocas dialógicas:* dois contextos de interação. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará (UFC). Fortaleza, 2006.

______.; CASTRO FILHO, J. A. *Aprendizagem de conceitos matemáticos e interação entre pares durante o uso de um objeto de aprendizagem.* WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 12., 2006, Campo Grande. **Proceedings of XXVI Congresso da SBC**. Campo Grande: SBC. v.1, 2006, p.59-67.

______.; FREIRE, R. S.; PASCHOAL, I. V. A.; CABRAL, B. S.; CASTRO FILHO, J. A. *Estratégias Encontradas durante atividades com software e manipulativos.* II Jornada de Educação Matemática do Ceará, 2003, Fortaleza. A Formação Pedagógica do Professor de Matemática, 2003.

LESSA, M.M.L. *Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à álgebra:* um estudo comparativo**.** Dissertação de Mestrado. UFPE. Recife, 1996.

______.; DA ROCHA FALCÃO, J. T. *Pensamento e linguagem:* uma discussão no campo da psicologia da educação matemática. Psicologia e Reflexão Crítica**.** v. 18, n. 3, Porto Alegre: 2005.

LIMA, L. *A Aprendizagem Significativa do Conceito de Função na Formação Inicial do Professor de Matemática.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, 2008.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas, SP: Papirus Editora, 1997.

LTSC. *Learning Technology Standards* Committee website [on-line], 2000. Disponível em: <http//ltsc.ieee.org/>. Acesso em: 03 abr.2010.

MACEDO, L. N. *Análise do uso de uma sequência didática com objetos de aprendizagem digitais no desenvolvimento de conceitos algébricos.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco-Recife: 2009.

MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna:* análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

MEIRA, L. Atividade algébrica e produção de significados em matemática: um estudo de caso. In: DIAS, M. G; SPINILLO, A. G. (org). *Tópicos em Psicologia Cognitiva.* Recife: Editora Universitária da UFPE, 1996.

MIGUEL, A. et al . *A educação matemática:* breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. Revista Brasileira de Educação. n. 27. Rio de Janeiro: 2004 .

MIZUKAMI, M. G. N. *Aprendizagem da docência:* Algumas contribuições de L.S. Shulman. Revista do Centro de Educação. n. 2, v. 29. Santa Maria: 2004, p. 33-49.

NCTM. (National Council of Teachers of Mathematics). *Curriculum and Evaluation, Standards for School Mathematics.* Reston - VA: The Council, 1989.

NUNES, A. I. B. L. Formação como espaço de aprendizagem docente: reflexões à luz da psicologia histórico-cultural. In: SALES, J. A. et all. *Formação e práticas docentes*. Fortaleza: EdUECE: 2007.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças Fazendo Matemática.* São Paulo: Artes Médicas, 1997.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática:* uma análise da influencia francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PELED, I.; CARRAHER, D.W. Signed numbers and algebraic thinking. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.). *Algebra in the Early Grades.* Mahwah-N: Erlbaum, 2007, p. 303-327 (now Taylor & Francis).

PIAGET, J.; INHELDER, B. *A psicologia da criança*. São Paulo: DIFEL, 1982.

PINTO, G.A.T**.** *A atribuição de significado em atividades pré-algébricas por crianças do segundo ano do primeiro ciclo do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2001

PONTE, J. P. *Educação matemática:* Temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 185 – 239.

______. *O professor de Matemática:* um balanço de dez anos de investigação. Quadrante; 2, 1994, p. 79-114.

______. *Álgebra no currículo escolar.* Educação e Matemática, 85, 2005, p. 36-42.

______.; BRANCO, N.; MATOS, A. *Álgebra no Ensino Básico.* [on line] Ministério da Educação, Portugal, Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC), Portugal, 2009. Disponível em: <area.dgidc.min-edu.pt/.../003_Brochura_Algebra_NPMEB _(Set2009).pdf>. Acesso em: 05 out.2010.

ROJANO, T. *Mathematics learning in the junior secondary school:* Students access to significant mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), Handbook of international research in mathematics education. Mahwah-NJ: Lawrence Erlbaum, 2002, p. 143-164.

SCHLIEMANN, A.D.; GOODROW, A.; LARA-ROTH, S. *Functions and Graphs in Third Grade.* Symposium Paper, Research Presession. Orlando-FL: NCTM 2001.

______.; CARRAHER, D.W. *The Evolution of Mathematical Reasoning: Everyday versus Idealized Understandings.* Developmental Review 22, doi:10.1006/drev.2002.0547, 2002, p. 242–266.

______.; CARRAHER, D.; BRIZUELA, B.; JONES, W. *Solving algebra problems before Algebra Instruction.* Arlington, VA: National Science Foundation, 1998.

______.; GOODROW, A. & LARA-ROTH, S. *Functions and Graphs in Third Grade.* Symposium Paper. NCTM 2001 Research Presession. Orlando-FL: 2001.

SELVA, A.C.V. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas e divisão. In: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Orgs.). *A compreensão de conceitos aritméticos.* Ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998, p. 95-119.

SHULMAN, L. S. *Those who understand: Knowledge growth in teaching.* Educational Researcher, 1986, p. 4-14.

SPINILLO, A. G. Proporções nas Séries Iniciais do Primeiro Grau. In: SCHILLIEMAN, A.D; CARRAHER, D.W.; SPINILLO, A.G.; MEIRA, L.L.; DA ROCHA FALCÃO, J.T. (orgs) *Estudos em Psicologia da Educação Matemática.* Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

______. *O conhecimento matemático de crianças antes da matemática na escola.* A Educação Matemática em Revista (SBEM), 2, (3), 1994, p. 41-50.

SZTAJN, P. *O que precisa um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana nos anos 90.* Educação Matemática em Revista, 11 A, 2002, p. 17-28.

TELES, R. A. M. *A relação entre a Aritmética e a álgebra na matemática escolar:* a influência da compreensão das propriedades da igualdade e o conceito de operações inversas na resolução de equações polinomiais do 1º grau. Anais Vlll Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: jul.2004.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.(Org). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995

VALENTE, J. A. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: *Integração das Tecnologias na Educação.* Brasília: MEC/SEED, 2005.

VASCONCELOS, L. Problemas de adição e subtração: modelos teóricos e práticas de ensino. In: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Orgs). *A compreensão de conceitos aritméticos:* ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998, p.53-72.

VERGNAUD, G.; CORTEZ, A. *Introducing algebra to “low-level” 8th and 9th graders.* Proceedings of the tenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. London: 1986, p. 319-324.

______. *La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques.* n. 2.3, v. 10. 1990, p. 133-70.

______. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (1994). (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albany - N.Y: State University of New York Press, 1994, p. 41-59.

______. The Nature of Mathematical Concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (eds). *Learning and Teaching Mathematics:* an International Perspective. Psychology Press, East Sussex, 1997, p. 5-28.

VYGOTSKY, L. S. *Thought and language.* Cambridge, MA: MIT Press, 1986.

WILEY, D. A. Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In: WILEY, D. A. (Ed.). *The Instructional Use of Learning Objects*: Online Version, 2000. Disponível em: <http://reusability.org/read/chapters /wiley.doc>. Acesso em: 18 jan.2011.

ANEXOS

ANEXO - A

<u>Etapa 1 – Formação de Professores</u>

<u>Observação</u>

Observação geral

1. Quais os conhecimentos sobre álgebra os professores possuem?

2. Que dificuldades eles apresentaram durante a formação?

3. A (o) professor (a) demonstrou interesse ou conhecimento e aprimorar os conceitos de álgebra inicial?

4. Criou outras atividades? Explorou as situações e os objetos de aprendizagem?

5. A (o) professor(a) fizeram questionamentos? Fez ligações da atividade com outras atividades? Se faz, descreva como essa ligação é feita.

6. A (o) professor(a) apresenta dificuldades no conteúdo? Se sim, quais dificuldades?

Interações com o conhecimento matemático

1. Como os professores trabalham? Em pares, grupos ou individualmente?

2. O que o(a) professor(a) faz par se manter engajado nas atividades? Faz perguntas? Se sim, quais questões? Como elas se relacionam com os conceitos ou conteúdos?

3. Como as discussões são concluídas?

Interações com a tecnologia

1. Como o professor usa a tecnologia?

2. Que dificuldades e facilidades os professores apresentam no uso da tecnologia?

3. Essa dificuldades estão relacionadas com o conteúdo ou com a tecnologia?

<u>Entrevista</u>

Perguntas gerais

1. Quanto tempo ensina na escola?

2. Há quanto tempo é professor? Quantos de escola pública e se tem experiência na escola particular?

3. Ensina que séries e conteúdos?

4. Qual sua Formação?

Perguntas específicas

1. O que você pode dizer sobre os conteúdos aprendidos?

2. Houve alguma coisa que chamou sua atenção? OBS: Se o professor responder de forma positiva, perguntar o oposto – alguma coisa te decepcionou?

3. Se o professor responder de forma negativa, perguntar o oposto – alguma coisa te agradou?

4. Que dificuldades você encontrou em entender as atividades aqui propostas? Sentiu dificuldades em entender alguns conceitos? Quais? E o manejo da tecnologia?

5. Quais as vantagens de ter utilizado a tecnologia para o trabalho com o conteúdo?

6. Já imaginou ou utilizou alguns desses recursos?

ANEXO - B

<u>Etapa 2 – Planejamento</u>

<u>Observação</u>

1. Quais os conhecimentos sobre álgebra os professores demonstram possuir?

2. Que dificuldades eles apresentaram durante o planejamento das atividades?

3. A (o) professor (a) demonstrou interesse ou conhecimento em desenvolver novas atividades? Criou outras atividades? Explorou as situações e os objetos de aprendizagem?

5. A (o) professora (o) elaborou o planejamento fazendo ligações entre as atividades? Fez ligações da atividade com outras atividades? Se fez, descreva como essa ligação é feita.

6. A (o) professor(a) apresenta dificuldades no conteúdo? Se sim, quais dificuldades?

<u>Entrevista</u>

1. Como a aula foi planejada?

2. Os objetivos, estratégias e recursos (principalmente os tecnológicos estão integrados)?

3. Como integrou todas as atividades?

4. Que dificuldades espera dos seus alunos?

5. Quais as vantagens da utilização da tecnologia para o trabalho com o conteúdo?

6. Pedir para relatar um planejamento de uma aula usual.

Ex: Descreva atividades que normalmente são feitas em sala para ensinar os conteúdos que serão abordados com o uso da tecnologia.

Tecnologia e conhecimento matemático

1. Já ministrou aulas com uso da tecnologia? Que tecnologia?

3. Que conteúdos matemáticos você trabalhará que é diferente do conteúdo normalmente utilizado pro você?

4. Descreva algumas experiências anteriores com tecnologia como aluno ou como professor?

ANEXO - C

Etapa 3 – Prática e utilização das atividades

Observação

1. Como a atividade é introduzida na sala?

2. Que conceitos ou representações são usados e enfatizados?

3. A (o) professor (a) usou alguma analogia ou metáfora em suas explicações? Se sim, que analogias? Como essas analogias ou metáforas podem se relacionar com os conceitos ou conteúdos sendo abordados? OBS: faça anotações dessas analogias, metáforas e representações usadas para serem discutidas em uma entrevista posterior.

5. A (o) professor(a) fez algum resumo de aulas passadas? Fez ligações da atividade com outras atividades? Se faz, descreva como essa ligação é feita.

6. A (o) professor(a) apresenta dificuldades no conteúdo? Se sim, quais dificuldades?

Interações

1. Como os estudantes trabalham? Em pares, grupos ou individualmente?

2. O que o (a) professor (a) faz para manter os alunos engajados nas atividades? Faz perguntas? Se sim, quais questões? Como elas se relacionam com os conceitos ou conteúdos?

3. O professor sugere trabalhos em grupo ou apresentações para seus alunos?

Interação professor x alunos

1. Como o professor responde ás questões dos alunos?

2. Como o professor responde ás dificuldades dos alunos?

3. O professor presta atenção aos alunos de modo individualizado? Foca em pequenos grupos?

4. Como as discussões são concluídas?

Tecnologia

1. Como o professor usa a tecnologia?

2. Que dificuldades e facilidades os professores apresentam no uso da tecnologia?

3. Essa dificuldades estão relacionadas com o conteúdo ou com a tecnologia?

Entrevista após a aula

1. O que você pode dizer sobre a aula, em relação ao que foi planejado?

2. Houve alguma coisa que chamou sua atenção? OBS: Se o professor responder de forma positiva, perguntar o oposto – alguma coisa te decepcionou?

3. Se o professor responder de forma negativa, perguntar o oposto – alguma coisa te agradou?

4. Que dificuldades você encontrou na aula? Sentiu dificuldades em explicar atividade? E o manejo da tecnologia?

5. Quais as vantagens de ter utilizado a tecnologia para o trabalho com o conteúdo?

6. Se você for refazer a aula, o que mudaria para melhorar a aula? Ex: Se o professor mencionar apenas ter mais computadores, pergunte: Isso mudaria a aula de alguma forma?

ANEXO - D

Situações-problema

1. Bruno e Tiago adoram comer chocolate. Um dia, Brunon levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na loja da escola. Tiago levou 5 chocolates, comprou então mais 5 na loja da escola e ganhou mais 2 de um outro amigo. No recreio, Tiago comeu 2 de seus chocolates e Bruno comeu também 2 de seus chocolates. Você pensa de que após o recreio Tiago tem a mesma quantidade de chocolates que Bruno? Ou, você acha que um tem mais chocolates do que o outro?

2. Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas, e Joana também ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia Joana tem a mesma quantidade de presentes como Bárbara?

3. Patrícia e Daniel são brincando fora da vizinhança. Como os dois gostam de laranja, foram nas suas casas pegar laranja. Patrícia pegou 6 laranjas e Daniel pegou 3. Depois eles voltaram para suas casas pegar mais laranja. Patrícia pegou mais 4 laranjas e Daniel pegou mais 3. Daniel voltou pela terceira vez na sua casa e retornou com mais 4 laranjas. Nessa hora chegou um amigo deles e Patrícia deu para esse amigo 6 laranjas e Daniel deu 3 laranjas. Você acha que, agora, depois de eles terem dado algumas laranjas Patrícia e Daniel tem a mesma quantidade de laranjas? Ou você acha que um tem mais laranja que outro?

4. João e Sara estão brincando de bolas de gudes. João pegou 4 bolas de gudes do seu bolso esquerdo para brincar. João pegou então mais 4 bolas de gudes do seu bolso direito para brincar. Sara levou 8 bolas de gudes da sua coleção para brincar. Durante o jogo, Sara ganhou mais 2 bolas de gudes. João também ganhou 2 bolas de gude durante o jogo. Você acha que João tem a mesma quantidade de bolas de gude da Sara? Ou você acha que um tem mais bolas de gudes que outro?

5. Rodrigo e André foram pegar conchas do mar na praia cedo da manhã. Rodrigo pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. André encontrou o mesmo número de conchas que Rodrigo, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Rodrigo encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de André. Desta vez cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Rodrigo tem o mesmo número de conchas que André? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro?

6. Carlos e Marcelo adoram biscoitos. Cada um deles possui um pacote de biscoito com a mesma quantidade. Carlos colocou todos seus biscoitos em uma cesta. Marcelo dividiu seus biscoitos em duas cestas. Então, eles pegaram um outro pacote. Carlos e Marcelo pegaram a mesma quantidade de biscoito, mas desta vez os dois colocaram os biscoitos em um depósito para comer depois. O irmão mais nova de Carlos foi na cozinha foi na cozinha e disse que queria biscoito também. Carlos deu pra ela sua cesta de biscoito e Marcelo deu pra ela uma de suas cestas de biscoito. Agora, depois de ter dividido seus biscoitos, você acha que Carlos tem

o mesmo número de biscoitos que Marcelo? Ou você acha que um tem mais biscoito que os outro?

7. Rosa e Claudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Claudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Claudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Claudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra?

8. Em um fim de semana Lucas e Francisco foram pescar. No sábado eles pescaram a mesma quantidade de peixes. Lucas e Francisco pescaram no domingo também. No final do dia eles contaram a quantidade de peixes que cada um tinha pescado. Eles descobriram Lucas pescou mais do que Francisco. No final do fim de semana, você acha que Lucas pescou a mesma quantidade de peixes de Francisco? Ou você acha que um pescou mais do que outro?

ANEXO - E

1. Bruno e Tiago adoram comer chocolate. Um dia, Bruno levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na banca de bombons. Tiago levou 5 chocolates, depois comprou mais 5 e ganhou mais 2 de um amigo. No recreio, Tiago comeu dois chocolates e Bruno também comeu dois. Será que Bruno e Tiago têm mesma quantidade de chocolates ou quantidades diferentes?

2. Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas e Joana ganhou 7 presentes de seus pais. No outro dia tiveram uma festa surpresa na escola. Bárbara ganhou mais 6 presentes e Joana recebeu mais 3 presentes. Será que Bárbara e Joana têm a mesma quantidade de presentes ou você acha que uma tem mais que a outra?

3. Patrícia e Daniel adoram bombons. Patrícia tem 6 bombons na sua casa e Daniel tem 3. Depois Patrícia achou mais 4 bombons e Daniel achou 3. Depois de procurar mais, Daniel achou mais 4 bombons. No outro dia Patrícia comeu 6 bombons e Daniel comeu 3 bombom. Será que Patrícia e Daniel têm a mesma quantidade de bombons ou você acha que um tem mais que a outro?

4. João e Elton estão brincando de bola de gude. João tem 4 bolas de gudes no seu saquinho e 4 bolas no seu bolso. Elton tem 8 bolas de gudes no saquinho. Durante o jogo, João ganhou 2 bolas de gude e Elton ganhou mais 2 também. Você acha que João e Elton possuem a mesma quantidade de bolas de gudes ou quantidades diferentes?

Nome: ____

1. Rodrigo e André colecionam carrinhos. Rodrigo colocou seus carrinhos em uma caixa grande. André tem o mesmo número de carrinhos que Rodrigo, mas arrumou seus carrinhos em duas caixas pequenas. Depois os dois meninos acharam mais carros para guardar.

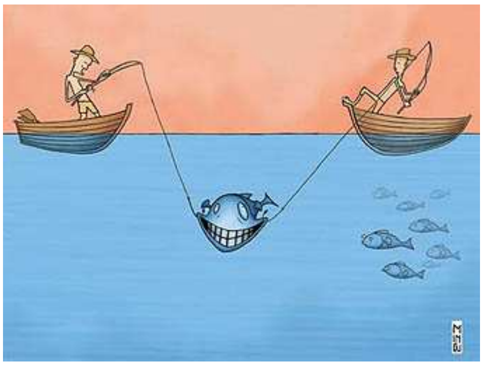
Dessa vez cada menino colocou os carrinhos em um saco. No dia seguinte foram contar quantos carrinhos tinham ao todo, mas não acharam o saco. Você acha que ele tem a mesma quantidade de carrinhos ou um tem mais que o outro?

2. Carlos e Marcelo adoram biscoitos. Cada um deles possui um pacote de biscoito com a mesma quantidade. Carlos colocou todos seus biscoitos em um depósito. Marcelo dividiu seus biscoitos em dois depósitos. Então, eles pegaram outro pacote.

Carlos e Marcelo pegaram a mesma quantidade de biscoito, mas desta vez os dois colocaram os biscoitos em um pote para comer depois. O irmão mais novo de Carlos foi na cozinha e disse que queria biscoito também. Carlos deu pra ele seu depósito de biscoito e Marcelo deu pra ele um de seus depósitos. Agora, depois de ter dividido seus biscoitos, você acha que Carlos tem o mesmo número de biscoitos que Marcelo? Ou você acha que um tem mais biscoito que o outro?

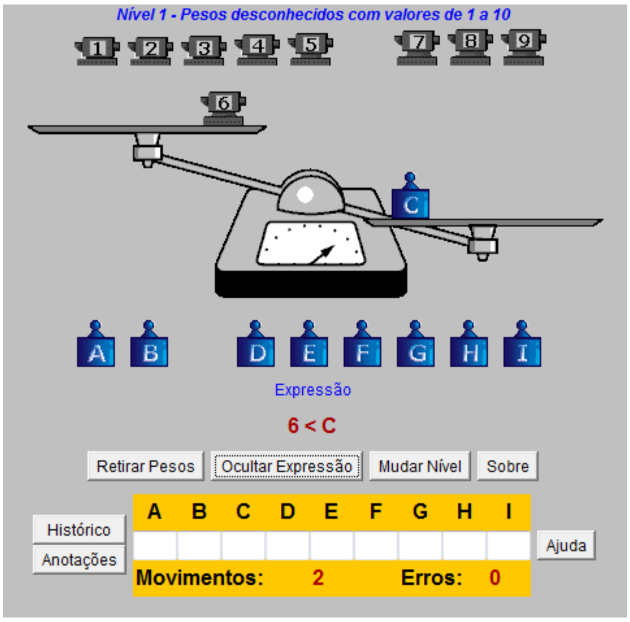
3. Rosa e Claudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Claudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Claudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Claudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra?

4. Em um fim de semana Lucas e Francisco foram pescar. No sábado eles pescaram a mesma quantidade de peixes. Lucas e Francisco pescaram no domingo também. No final do dia eles contaram a quantidade de peixes que cada um tinha pescado. Eles descobriram Lucas pescou mais do que Francisco. No final do fim de semana, você acha que Lucas pescou a mesma quantidade de peixes de Francisco? Ou você acha que um pescou mais do que outro?



APÊNDICE

Apêndice A



O OA Balança Interativa possui dez níveis. Do primeiro ao quinto nível ele apresenta a balança de dois pratos e a equação que representa os movimentos realizados. Do sexto ao décimo nível, o jogo apresenta apenas a equação. Esta diferenciação foi feita com o objetivo de levar o usuário a manipular equações de modo cada vez mais simbólico. Durante a pesquisa os professores optaram por utilizar somente o primeiro nível com seus alunos, pois os outros níveis exigem um nível maior de representação simbólica. Além disso, as atividades do primeiro nível já oferecem uma boa quantidade de estratégias de pensamento que os usuários podem trabalhar.

No primeiro nível o OA oferece pesos que variam de 1 a 10 e pesos desconhecidos representados por letras que vão de A até o I. O usuário, então, terá que descobrir usando os valores conhecidos o valor dos pesos desconhecidos. Através de suas hipóteses e com o estabelecimento de combinações de igualdade e desigualdade conseguimos descobrir o valor do peso desconhecido. Por exemplo, se o usuário escolhe o peso A, coloca em um dos pratos da balança, escolhe o peso 6, coloca no outro prato da balança e descobre que A é menor que

6 (A < 6), o valor de A pode ser cinco, quatro, três, dois ou um. Depois dessa descoberta ele pode fazer novas manipulações. O OA registra o número de manipulações que o aluno faz durante a descoberta dos pesos. Ao final do nível o software oferece a quantidade de manipulações que o aluno fez para descobrir todos os pesos desconhecidos. Essa funcionalidade serve para identificar a quantidade de vezes que ele moveu os pesos. Supõe-se que, se o usuário diminui a quantidade de movimentos quando repete um nível, é porque está criando estratégias de manipulação.

Entre outras opções, o OA possui um botão para visualização da equação algébrica representada na movimentação dos pesos. Este botão estabelece uma ligação entre uma representação icônica ou simbólica com uma expressão algébrica. Ainda tem outro botão para retirar os pesos que estiverem nos pratos da balança, um outro para mostrar o histórico dos movimentos já realizados e outro para anotações caso o aluno queira fazer alguma. O OA possui ainda um botão para mudar de nível, outro para fornecer informações sobre o programa e outro de ajuda. Para uma melhor análise dos dados, o OA oferece uma opção de gravar todos movimentos que o aluno fará ao manipular os pesos. Essa opção facilitará uma posterior análise dos movimentos realizados.