



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MATHEUS PINHEIRO RAMOS

**UM ESTUDO SOBRE ONDAS
GRAVITACIONAIS E RADIAÇÃO EMITIDA
POR UM PULSAR BINÁRIO**

FORTALEZA

2016

MATHEUS PINHEIRO RAMOS

Um estudo sobre ondas gravitacionais e radiação emitida por um pulsar binário

Monografia apresentada ao programa de graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

Fortaleza

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R144e Ramos, Matheus Pinheiro.
UM ESTUDO SOBRE ONDAS GRAVITACIONAIS E RADIAÇÃO EMITIDA POR UM
PULSAR BINÁRIO / Matheus Pinheiro Ramos. – 2016.
120 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro
de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2016.

Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

Coorientação: Prof. Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos.

1. Relatividade Geral. 2. Ondas gravitacionais. 3. Radiação gravitacional. 4. LIGO. 5.
Binária de Hulse e Taylor. I. Título.

CDD 530

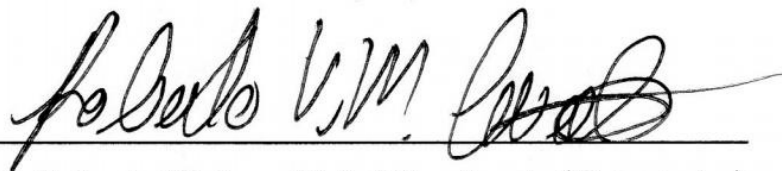
MATHEUS PINHEIRO RAMOS

Um estudo sobre ondas gravitacionais e radiação emitida por um pulsar binário

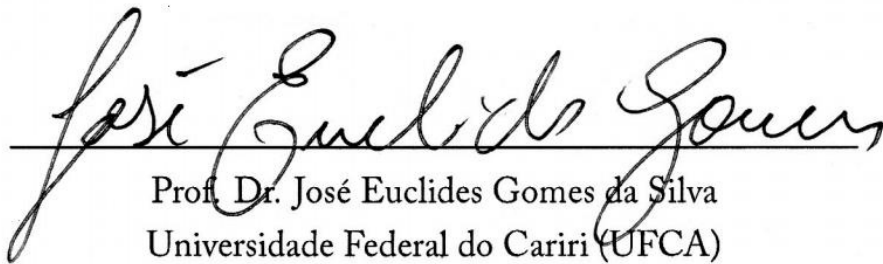
Monografia apresentada ao programa de graduação
em Física da Universidade Federal do Ceará como
parte dos requisitos para obtenção do título de
Bacharel em Física.

Aprovada em: 17/11/2016

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)



Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

RESUMO

Neste trabalho iremos apresentar um breve estudo sobre ondas gravitacionais. Primeiramente introduziremos a lei da gravitação universal de Isaac Newton, discutiremos suas implicações e um pouco de sua história. Essa lei se manteve inabalável durante muitas décadas e só teve sua primeira incompatibilidade com os experimentos no problema da precessão do periélio do planeta Mercúrio. Tal problema só foi resolvido em 1915, quando Albert Einstein publica sua teoria da Relatividade Geral.

Na teoria de Einstein, a noção newtoniana de espaço como um vasto vazio no qual os eventos acontecem e, portanto, não tendo efeito sobre o movimento da matéria é transformado em uma rede “espaço-tempo” que acolhe essa matéria e guia o seu curso. Nesse contexto, a própria ideia do que pensamos por forças gravitacionais, nada mais é do que uma expressão do espaço-tempo ser curvo.

A ideia de que a informação gravitacional pode se propagar é também uma consequência direta da gravitação einsteniana. Um dos postulados da teoria da relatividade especial (também presente na relatividade geral), é que nada pode ser mais rápido que a luz. Isto implica que a informação não pode ser transmitida instantaneamente como descreve a teoria de Newton, mas sim, deve levar um certo tempo. A esta propagação da informação damos o nome de radiação gravitacional, análoga a já conhecida radiação eletromagnética. Para fontes distantes (como os sistemas binários que estudaremos neste trabalho) esta radiação gravitacional oscila e a sua propagação se dá via distúrbios no espaço-tempo também oscilantes, os quais denominamos de ondas gravitacionais. A existência dessas ondas é certamente uma das previsões mais impactantes dessa nova teoria da gravitação.

Veremos que as referidas ondas surgem naturalmente como soluções das equações de Einstein linearizadas. E de acordo com essas soluções, quaisquer distribuições de matéria que sofrem algum tipo variação temporal são fontes em potencial de radiação gravitacional. No entanto, por mais que essas ondas sejam produzidas por qualquer corpo massivo acelerado, apenas os eventos mais cataclísmicos do universo produzem ondas gravitacionais consideráveis, como a própria onda detectada pelos observatórios do LIGO em um evento chamado de GW150914, que tratou da coalescência de um par de buracos negros.

Em seguida, partiremos para a obtenção de uma relação matemática que nos diga a taxa de energia emitida via radiação gravitacional por sistemas binários em órbita circular. Por fim, aplicaremos a teoria desenvolvida nos dados observacionais da *PSR 1913+16*, também conhecida por binária de Hulse e Taylor, obtendo assim uma noção dos valores que cercam este tipo de evento e também do quão precisa é a teoria apresentada.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Ondas gravitacionais. Radiação gravitacional. LIGO. Binária de Hulse e Taylor

ABSTRACT

In this work we present a brief study about gravitational waves. We start showing Newton's law of universal gravitation, focussing more on its historical points and implications. This law seemed to be totally right for decades, but it turned out to be incompatible with the precession of the perihelion of Mercury. In 1915, Albert Einstein came up with a theory called General Relativity which predicts perfectly the movement of Mercury.

In his theory, Einstein changes the newtonian idea of an immutable space that doesn't have any effect over matter and events by the idea of a space-time which is always evolving in time and affects the way matter moves and the way events take place. Considering this, Einstein realised that he could change the newtonian interpretation of gravitation, which is based on the existence of long-distance forces, by the idea of curved space-time.

The idea that gravitational information can propagate is also a consequence of Einstein's General Relativity. One of the Special Relativity postulates (also present in General Relativity), says that nothing can move faster than light. This implies that information can not be transmitted instantly, as Newton's theory states, but it has to take some time from two different points. We call gravitational waves this information propagation, which is analogous to the electromagnetic waves. For distant sources (such as binary systems that we study in this paper) this gravitational radiation oscillates and its propagation is via disturbances in the also oscillating space-time, which we call gravitational waves. The existence of these waves is certainly one of the most remarkable predictions of this new theory of gravitation.

We will see that these waves arise naturally as solutions of the linearized Einstein's equations. According to these solutions, any distributions of matter that suffer some temporal variation are potential sources of gravitational radiation. However, although we know that these waves are produced by any accelerated massive body, only the most cataclysmic gravitational events in the universe produce considerable gravitational waves, such as those waves detected by LIGO observatories in an event called GW150914 which dealt with the coalescence of a pair of black holes.

After this, we seek for a mathematical relation that gives us the energy emitted rate by binary systems in circular orbit via gravitational radiation. Finally, we apply the theory developed in observational data of *PSR 1513 + 16*, also known as Hulse e Taylor binary, thereby obtaining a notion of the values related to this type of event and seeing how precise is the theory presented.

Key-words: General Relativity. Gravitational Waves. Gravitational Radiation. LIGO. Hulse and Taylor binary

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida e por todas as minhas conquistas.

Aos meus pais Maria Joana Pinheiro e Marcos Antônio de Oliveira Ramos; e ao meu irmão Diego Pinheiro Ramos, por serem meus exemplos, a minha base para a vida e por sempre se fazerem presentes em todos os momentos.

Devo agradecer de forma muito especial à Andressa Barros Nogueira, por todo o apoio dado durante o nosso relacionamento e por toda a paciência e carinho que demonstrou durante as vezes que tive que me ausentar devido a graduação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante pela orientação ao longo do curso de graduação. O agradeço também pelo apoio e paciência constante, assim como a confiança depositada.

Ao Prof. Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos, pela sua enorme paciência em sanar todas as minhas dúvidas (algumas até de madrugada), por todos os conselhos e a sua disponibilidade. Suas aulas sobre Relatividade Geral foram uma das minhas principais motivações para seguir nessa área. Fica aqui meu sincero agradecimento.

Ao Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva, por aceitar o convite à banca examinadora e se prontificar a analisar esse trabalho.

Ao Colégio 7 de Setembro por ter me dado a oportunidade de estagiar durante 1 ano como monitor de física para alunos de terceiro ano e extensivo. Em especial gostaria de agradecer aos professores Ulisses Sampaio Castro e Yasmine Costa por estarem sempre disponíveis para sanar minhas dúvidas e por seus inúmeros conselhos no grande desafio que é ensinar física no ensino médio. Foi uma experiência bastante enriquecedora e deixo aqui o meu sincero agradecimento.

A todos os familiares e amigos que sempre me apoiaram e aconselharam em todas as decisões da minha vida. Em especial, agradeço aos meus primos que são verdadeiros irmãos e ao meu tio Manoel Murilo de Araújo por ter tido a paciência de fazer toda a revisão ortográfica deste trabalho.

Aos meus amigos que conheci no curso e pretendo levar para toda a vida: Nicolás Carvalho, Levi Félix, Bruno Duarte, Débora Gomes, Misael, Emanuel Fonteles (Nena), Pablo Ramon, Raul Peixoto, Michel Rodrigues, Michel Frost, Adáias Souza, Daniel Linhares e todos os outros no qual não citei o nome, mas que certamente não estão esquecidos.

Aos amigos do Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes (LASSCO), pela amizade a presença constante. E também pelas inúmeras conversas que muito me ajudaram em meu desenvolvimento acadêmico.

À todos os funcionários do Departamento de Física da UFC.

À CNPq, CAPES e FUNCAP pelo apoio financeiro.

A Ciência não tem medo de assumir a sua ignorância, de assumir os limites do que podemos explicar e com isso avançar. Quem se contenta com explicações fechadas e definitivas, ficam com elas. Nós, ficamos com eventos cósmicos capazes de mudar o universo.

(Autor Desconhecido)

Sumário

1	Introdução	1
1.1	A Lei da Gravitação Universal	1
1.1.1	Uma breve história...	3
1.2	A predição de Einstein - Ondas gravitacionais	11
1.2.1	O que é o LIGO?	12
1.2.2	Detecção	14
1.2.3	Experimento e Resultados	16
1.2.4	Localização do evento GW150914 no espaço	19
1.2.5	Por que detectá-las?	21
1.3	Organização do trabalho	23
2	A Teoria da Relatividade Geral	24
2.1	Princípio da Equivalência de Einstein	24
2.2	Forças gravitacionais	27
2.2.1	Relação Entre a Conexão Afim e o Tensor Métrico	30
2.3	Limite Newtoniano	31
2.4	O princípio da covariância geral	34
2.4.1	Derivada covariante	36
2.5	O tensor de curvatura	39
2.6	A equação de Einstein	42
2.6.1	Transformação de calibre	47
3	Teoria da perturbação	49
3.1	A equação de Einstein no regime linear	49
3.1.1	Invariância de calibre	52
3.2	Graus de liberdade	53
3.2.1	Fixação de calibre	58
3.3	Solução das equações de campo de Einstein no regime linear	61
3.3.1	Efeito de OG em partículas teste - Estados de polarização	64
4	Radiação gravitacional	70
4.1	Produção de ondas gravitacionais	70
4.1.1	A natureza quadrupolar da radiação gravitacional	73
4.2	A energia transportada por ondas gravitacionais	77
4.2.1	Ondas gravitacionais emitidas por um sistema binário em órbita circular	84
4.3	A binária de Hulse e Taylor	88
5	Conclusão & Perspectivas	93
	Apêndice A Propriedades do tensor de curvatura, tensor de Ricci e escalar de curvatura	99

Apêndice B	Identidade de Bianchi	102
Apêndice C	Solução da equação de onda com o termo de fonte	104

Lista de Figuras

1.1	Este é um exemplo de nebulosa, a chamada nebulosa de Órion (ou Messier 42 de acordo com a nomenclatura astronômica). É uma nebulosa difusa situada a aproximadamente 1350 anos-luz do nosso sistema solar, no sul do Cinto de Órion [1].	2
1.2	Representação do deslocamento do periélio de Mercúrio com o tempo [2]. . . .	8
1.3	Em (a) temos uma estrela emitindo luz. Tal estrela não deveria ser visível aqui da Terra por se encontrar do outro lado do Sol. Entretanto, o Sol por ser um corpo muito massivo deforma o espaço-tempo ao seu redor, gerando um ligeiro desvio na trajetória da luz e, portanto, na posição aparente da estrela. Assim, essa estrela será vista aqui da Terra como se estivesse localizada na posição (b) [3].	9
1.4	A grande bola no centro representa um corpo maciço como uma estrela. Seu peso faz com que o tecido fique curvado ao seu redor. Qualquer esfera mais leve jogada nesse tecido será então desviada por essa curvatura e passará a orbitar a grande bola, da mesma maneira que planetas submetidos ao campo gravitacional de uma grande estrela [3].	10
1.5	A figura acima ilustra ondas gravitacionais sendo emitidas por duas estrelas de nêutrons orbitando uma em relação a outra [4].	11
1.6	Da esquerda para a direita temos: Kip Thorne (Caltech), Ronald Drever (Caltech) e Rainer Weiss (MIT) [5].	12
1.7	A esquerda temos o observatório de Hanford (ou LHO - LIGO Hanford Observatory), enquanto a direita vemos o observatório de Louisiana (ou LLO - LIGO Louisiana Observatory) [6].	13
1.8	Na parte superior temos o GEO600 e na inferior, da esquerda para a direita, o Virgo e o KAGRA [7].	13
1.9	Simulação feita pela Caltech da fusão de um par de buracos negros [8].	15
1.10	À medida que os buracos negros iam executando o movimento espiralado um em direção ao outro, emitiam ondas gravitacionais, perdiam energia e se aproximavam [8].	16
1.11	Até que se fundiram, formando um único buraco negro mais massivo [8].	16
1.12	Em (a) são mostrado as posições dos dois observatórios LIGO, além de indicar o tempo que a luz demora para viajar entre eles, algo em torno de 10 ms. O gráfico em (b) nos mostra como a amplitude de ruído do instrumento variou em função da frequência em cada um dos detectores durante o evento. Quando menor é o ruído do instrumento, mais sensível é o detector. Os picos altos indicam faixas de frequência onde o ruído do instrumento é particularmente grande. Já em (c) temos uma esquematização do interferômetro usado pelo LIGO em suas medições [9].	17

1.13	Alguns dos principais resultados da análise de <i>GW150914</i> . No gráfico superior temos uma comparação entre as previsões do medelo teórico e os dados experimentais, em relação a amplitude da onda gravitacional detectada em três fases do evento: espiralação, fusão e estabilização. No gráfico que se encontra na parte inferior podemos ver a separação e a velocidade dos buracos negros, e como elas mudaram a medida que ocorria a fusão [9].	19
1.14	A região do céu acreditado para conter a fonte de <i>GW150914</i> . A localização aproximada da fonte de ondas gravitacionais detectadas pelos observatórios do LIGO. A linha púrpura define a região em que o sinal está previsto ter vindo e possui um nível de confiança de 90%; a linha amarela interna define a região alvo e possui nível de confiança de apenas 10% [10].	20
1.15	Antena projetada por Jansky em uma plataforma giratória para receber sinais na frequência de 20,5 MHz. O objetivo era detectar a causa do problema nos sinais de rádio utilizados nas transmissões telefônicas transoceânicas [11].	22
2.1	Do lado esquerdo da figura, temos um elevador subindo com aceleração a , sob ação de um campo gravitacional g . Já do lado direito, temos o mesmo elevador com aceleração nula, sob ação de um campo gravitacional $g + a$. De acordo com o princípio da equivalência de Einstein essas duas situações são análogas [12].	26
2.2	A curva que nos dá a menor distância entre dois pontos localizados na superfície da esfera é um grande círculo [13].	29
3.1	Ondas planas se propagando em direção ao sentido positivo do eixo z [14].	67
3.2	O efeito de uma onda gravitacional com polarização "+" em conjunto de partículas de teste originalmente localizadas num círculo no plano $x - y$. A deformação dos círculos em elipses segue um padrão que se parece com um sinal "+" [15].	68
3.3	Agora, temos o efeito de uma onda gravitacional com polarização " \times " em um conjunto de partículas de teste originalmente localizadas num círculo no plano $x - y$. A deformação dos círculos em elipses segue um padrão que se parece com um sinal " \times " [15].	68
3.4	O efeito de uma onda gravitacional com polarização R é distorcer um círculo de partículas teste em uma elipse que gira em um sentido com a mão direita [15].	69
4.1	O distúrbio no campo gravitacional no ponto (t, x^i) calculado em termos do evento no cone de luz passado [16].	72
4.2	Uma fonte de tamanho δr a uma distância $r \gg \delta r$ do observador [16].	74
4.3	Dois corpos de massas m_1 e m_2 efetuando órbitas circulares em torno de um centro de massa em comum.	85
4.4	Em vermelho, temos a curva de sensibilidade dos equipamentos LISA (Laser Interferometer Space Antenna Project). Em azul, a curva de sensibilidade dos equipamentos do Advanced LIGO. Apenas eventos localizados acima de tais curvas é que podem ser detectados. No entanto, como pode ser visto, <i>PSR 1913+16</i> não se encontra em nenhuma dessas regiões e, portanto, não pode ser detectada [17].	89
C.1	Contorno utilizado para calcular a integral (C.20)	107

NOTAÇÃO

i, j, k, \dots Letras latinas referem-se a coordenadas espaciais, variam de 1 a 3

μ, ν, ρ, \dots Letras gregas referem-se a coordenadas espaço-temporais, variam de 0 a 3

$\eta_{\mu\nu}$ Métrica de Minkowski

$g_{\mu\nu}$ Métrica do espaço curvo

$h_{\mu\nu}$ Pequena perturbação na métrica

$T \equiv T_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ Traço do tensor $T_{\mu\nu}$

∂_{μ} Derivada ordinária

∇_{μ} Derivada covariante

$\square \equiv \partial^{\mu}\partial_{\mu}$ Operador d'Alembertiano

c A velocidade da luz, que neste trabalho é tomada como unitária

Nesse trabalho também será usado as seguintes convenções:

$$2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} = \partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu}$$

$$2\partial_{[\mu}\xi_{\nu]} = \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}$$

Capítulo 1

Introdução

O objetivo desse trabalho é discutir uma das soluções da equação de Einstein que representa distúrbios no espaço-tempo que se propagam a velocidade da luz, as chamadas *ondas gravitacionais*. Essas soluções trazem consigo a explicação para alguns fenômenos interessantes, os quais discutiremos qualitativamente mais adiante e quantitativamente no final do capítulo 4. Entretanto, é muito importante que antes entendamos como a ciência se desenvolveu até chegar na teoria da Relatividade Geral e como esta, por sua vez, prevê a existência das ondas gravitacionais.

1.1 A Lei da Gravitação Universal

Talvez a única característica de cada ser humano que está presente em cada um de nós até hoje é a necessidade de buscar o conhecimento. Entre todos os assuntos fascinantes que poderíamos vir a discutir, não se pode negar que um dos que mais deslumbra o homem é a origem, o funcionamento e o fim do universo. Desde a antiguidade clássica, discussões sobre como se dá o movimento dos corpos celestes, incluindo a Terra (nascimento dos modelos geocêntrico e heliocêntrico), criaram brigas e reviravoltas, não só na ciência, como também na religião e na política. Nesse contexto, o apontar do telescópio de Galileu para o céu e a formulação da lei da gravitação universal de Newton, provocaram uma verdadeira revolução no nosso pensamento sobre o universo.

A lei da gravitação desenvolvida por Sir Isaac Newton (1643 - 1727) foi publicada em 1687, em sua obra intitulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Se comparada a outras leis da física, esta possui poucas aplicações. Por outro lado, dispõe de um papel fundamental no nosso entedimento sobre o funcionamento do universo. Na prospecção geofísica, a gravitação

nos permite explicar os efeitos das marés, possibilita o cálculo de trajetórias de satélites e sondas que enviamos ao espaço, além de nos dar uma descrição do movimento dos planetas [18, 19, 20].

No contexto astrofísico, a gravitação tem um papel fundamental no comportamento dos objetos celestes. Um dos mais interessantes que podemos citar é a formação de novas estrelas. A figura 1.1 nos mostra uma nebulosa gasosa, que não é um amontoado de estrelas, e sim um gás (mais precisamente nuvens de poeira, plasma, hidrogênio e hélio). Não se sabe ao certo como elas começam, mas o restante do fenômeno se deve à atração gravitacional, que atrai o gás para cada vez mais perto. Essas grandes quantidades de gás e pó absurdamente adensados formam bolas; ao se aproximarem ainda mais, o calor gerado pela compressão acende essas bolas, tornando-se assim estrelas. Tal evento é conhecido como *colapso gravitacional* [18, 19].

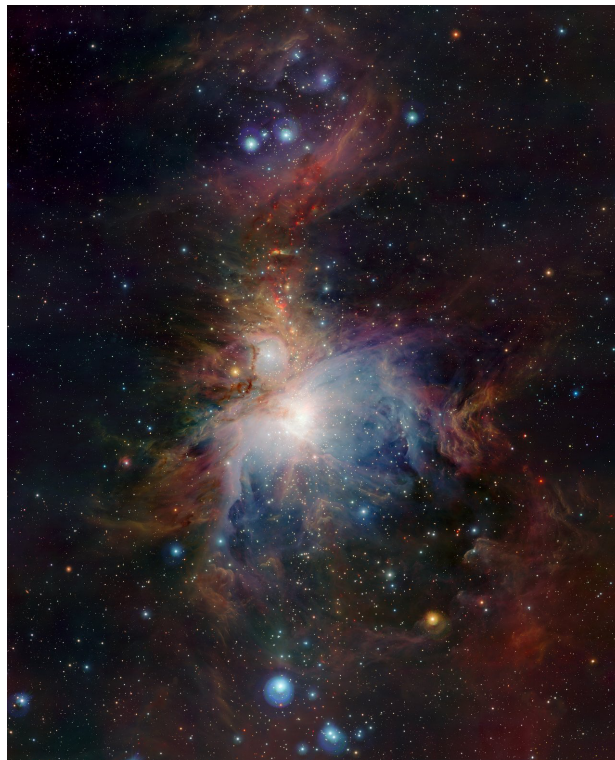


Figura 1.1 – Este é um exemplo de nebulosa, a chamada nebulosa de Órion (ou Messier 42 de acordo com a nomenclatura astronômica). É uma nebulosa difusa situada a aproximadamente 1350 anos-luz do nosso sistema solar, no sul do Cinto de Órion [1].

Uma das coisas mais impressionantes sobre a gravidade é a sua simplicidade. Como diz Richard Feynman (1918 - 1988) em [19]: “*O foco não está na nossa esperteza em tê-la descoberto, mas na esperteza da natureza em obedecê-la*”. É simples enunciar seus princípios e não deixar nada vago sobre a ideia dessa lei. E é exatamente o que faremos agora. A lei da gravitação diz que dois corpos exercem, um sobre o outro, uma força que varia inversamente com o quadrado da distância entre eles e diretamente com o produto de suas massas. Matematicamente, podemos

escrevê-la como:

$$\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.1)$$

onde G é a constante da gravitação¹, m_1 e m_2 as massas dos corpos que estão interagindo e r a distância entre eles. Se acrescentarmos que um corpo reage a uma força acelerando, ou mudando sua velocidade a cada segundo por uma quantidade inversamente proporcional à sua massa, então teremos tudo o que é necessário sobre a lei da gravitação. Todo o resto decorre matematicamente dessas duas coisas.

Essa lei de tão simples é bela. De fato, suas aplicações não são das mais elementares - muitas vezes é complicado calcular os movimentos dos vários planetas e as perturbações que causam uns sobre os outros; e, atualmente, está além da nossa capacidade calcular o movimento de todas as estrelas de um galáxia. As aplicações da lei são complicadas, mas o padrão básico do sistema por trás de tudo é simples. Isso é comum a todas as leis; todas se revelam simples, embora suas aplicações possam ser muitas vezes complexas.

As consequências dessa lei tão bela talvez não possam ser vistas de imediato. Começaremos então esse trabalho falando um pouco sobre a história de sua descoberta; do seu papel no desenvolvimento da ciência, algumas de suas consequências, os mistérios que ela esconde e os aperfeiçoamentos feitos por Einstein.

1.1.1 Uma breve história...

De forma resumida, a história é a seguinte: os antigos observaram a maneira como os planetas se moviam no céu e deduziram, principalmente por causa da influência da igreja, que todos, inclusive o Sol, giravam em torno da Terra (teoria geocêntrica). Essa visão geocêntrica tradicional foi abalada por Nicolau Copérnico (1473 - 1543) em 1537, quando começou a divulgar um modelo cosmológico em que os corpos celestes giravam ao redor do Sol, e não da Terra (teoria heliocêntrica). Até aproximadamente 1700, poucos astrônomos foram convencidos pelo sistema de Copérnico. Entretanto, seu modelo heliocêntrico conseguiu influenciar alguns cientistas renomados como Galileu e Brahe, adquirindo assim força. Com a aceitação desse novo modelo algumas questões surgiam naturalmente, entre elas: como, exatamente, os planetas se movem em torno do Sol, ou seja, com que tipo de órbita? Será que se movem ao longo de uma circunfe-

¹A primeira pessoa que conseguiu medir esse valor foi Cavendish. Realizado em 1797, seu experimento permitiu determinar o valor de G com uma diferença menor que 1% do valor aceito atualmente de $6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ [21].

rência com o Sol no centro ou seguem outro tipo de trajetória? Com que velocidade se movem? As respostas vieram apenas muitos anos mais tarde [18, 19, 22].

Motivado, talvez, pelos inúmeros debates que aconteciam em sua época sobre qual dos modelos cosmológicos estava correto, Tycho Brahe (1546 - 1601) procurou uma maneira de responder à questão. A resposta naturalmente só podia ser encontrada por exaustivas observações, assim, Brahe pensou que fosse uma boa ideia observar atentamente e anotar onde, exatamente, os planetas apareciam no céu. Com isso, as diferentes teorias poderiam ser comparadas entre si. Brahe era um homem muito rico que possuía uma ilha perto de Copenhague, o que fez foi equipar sua ilha com grandes instrumentos em posições favoráveis a observações e, noite após noite, registrou as posições dos planetas. O que lhe permitiu concluir que a teoria de Copérnico é realmente a correta [18].

Após a morte de Brahe em 1601, todos os dados coletados foram herdados por Johannes Kepler (1571 - 1630) que, através do método da tentativa e erro, procurou analisar que tipo de movimento os planetas faziam em torno do Sol. Kepler começou por estudar as medidas da posição do planeta Marte, tentando ajustá-las a uma órbita circular com o Sol no centro. O problema é que ao fazer isso, apareciam desvios entre os dados observacionais e o modelo, da ordem de 8 minutos de arco. Tais desvios não eram uma diferença muito grande para a época, e seriam por muitos considerados um erro observacional normal; mas Kepler sabia da precisão que tinha as medidas efetuadas por Brahe. Concluiu, portanto, que o modelo da órbita circular é que devia estar errado, não se adaptando à realidade [19, 18, 23].

Após anos de trabalho exaustivo, Kepler conseguiu finalmente descrever corretamente, através de três leis, o movimento de todos os planetas que se encontram em nosso sistema solar. Tais leis têm o caráter puramente descritivo, ou seja, apenas descrevem os movimentos; elas não o explicam. De uma maneira resumida, essas leis podem ser enunciadas como:

1. *Os planetas descrevem órbitas elípticas, com o Sol ocupando um dos focos;*
2. *Áreas iguais são varridas em tempos iguais;*
3. *A duração de uma volta completa varia com a potência $3/2$ do tamanho da órbita, ou seja, a raiz quadrada do cubo do eixo maior.*

Mas o que explica o movimento ser assim? Dito de outra maneira, o que faz os planetas se moverem em torno do Sol? No tempo de Kepler um grande número de pessoas simplesmente

diziam haver entidades celestiais (anjos) atrás deles, batendo suas asas e os empurrando ao longo de suas órbitas [19]. Voltaremos a essa discussão mais adiante.

Nesse meio-tempo, Galileu Galilei (1564 - 1642) estava investigando as leis que regem o movimento dos objetos aqui na Terra. Observando experimentos simples como a aceleração com que as bolas desciam em planos inclinados ou como os pêndulos oscilavam, Galileu foi capaz de descobrir um grande princípio, o qual foi denominado princípio da inércia. De uma maneira simples, esse princípio nos diz que *se nenhuma força agir sobre um objeto que se move a certa velocidade em linha reta, ele manterá a velocidade e permanecerá na mesma linha para sempre*. Por mais que hoje nos pareça elementar, na época era algo totalmente inacreditável.

“E se o objeto não se move em linha reta?” Quem respondeu a esta pergunta foi Newton, dizendo que seria necessária uma força para alterar a velocidade. Segundo ele essa força pode ser medida através de outros dois fatores. O quanto a velocidade muda em um curto intervalo de tempo, isto é, a aceleração. Juntamente com um coeficiente chamado “massa” do objeto ou coeficiente inércia. É o produto desses dois termos que nos dá a força resultante atuante sobre o corpo em questão (segunda lei de Newton).

Seguindo essa visão, Newton conclui que se não houvesse nenhuma força atuando sobre os planetas, então eles deveriam sair pela tangente. Mas isto não ocorre; eles se curvam na direção do Sol, isto é, seu movimento é defletido continuamente em direção ao Sol. Portanto, se o movimento se desse por causa das entidades celestiais como se pensava na época, elas deveriam bater suas asas não ao longo das órbitas, mas sim, em direção ao Sol [19].

Não se sabe explicar a razão pela qual todas as coisas tendem a manter movimento para sempre. Essa propensão de os planetas andarem sempre em linha reta não tem causa conhecida. Em outras palavras, não sabemos a origem da lei da inércia. As entidades celestiais contadas nessa história não existem, mas a conservação do momento sim; a alteração no movimento dos planetas só podia se dá via uma força, e a origem dessa força devia ser o Sol. Dito de uma forma mais simples: “massa atrai massa”, e esta é a base de sustentação de qualquer sistema planetário [18, 19].

Newton conseguiu demonstrar que a segunda lei de Kepler (lei das áreas) é uma consequência direta da ideia de que todas as variações de velocidade ocorrem na direção do Sol, ou seja, de que a própria força age na direção do Sol. E sabendo como os períodos dos planetas variavam com a distância ao Sol, conseguiu deduzir que a força era inversamente proporcional ao quadrado da distância e diretamente proporcional às massas dos corpos envolvidos. Obtendo assim a fórmula

dada em (1.1).

Mas a Lua gira em torno da Terra, e isto nos parece também um pequeno “sistema solar”. Com o uso de telescópios pessoas observaram pequenos corpos celestes, também chamados de luas, girando em torno de Júpiter, como se fossem atraídos para ele da mesma maneira que os planetas são pelo Sol. Parece-nos então que tudo é atraído em direção a tudo o mais. O próximo passo dado por Newton foi generalizar a lei da gravitação, afirmando que todos os objetos se atraem. Nessa perspectiva, a própria Terra atrai as coisas para si, nós mesmo estamos presos a ela devido ao fenômeno conhecido por gravidade. Foi então quando Newton teve um *insight*: a gravidade que mantém a Lua em órbita deve ser a mesma que atrai os objetos para o chão.

Podemos facilmente calcular quanto a Lua “cai” em um segundo, pois sabemos o tamanho da órbita (distância Lua-Terra) e o período do movimento, que é de aproximadamente um mês. Estimando quanto ela se move em um segundo, podemos ter uma ideia de quanto sua órbita se desvia da linha reta, aquela que ela seguiria se nenhuma força atuasse. Incrivelmente, o valor encontrado por Newton para a gravidade concordava inteiramente com o valor obtido por Galileu em seus experimentos. Newton estava no caminho correto. Não havia mais volta, pois um fato novo, até então completamente independente (o período da Lua e sua distância da Terra), havia sido conectado a outro (a distância percorrida por um corpo em queda, em um segundo, na superfície da Terra) [19].

A lei da gravitação nos permitiu entender que o fato de a Terra ser redonda é porque tudo é atraído para o seu centro e não por estar em rotação como os antigos acreditavam, sendo necessária uma pequena deformação em sua forma para assegurar o equilíbrio. O Sol, a Lua e outros planetas possuem a forma arredonda pela mesma razão. Além disso, nos possibilitou também explicar o fenômeno das marés, que até então não sabíamos dizer o porquê de ser duas marés altas e duas baixas por dia, ao invés de apenas uma.

Ao olharmos a equação (1.1) poderíamos nos perguntar como essa lei dita o comportamento dos planetas. Um interessante comentário sobre essa questão é feita na obra [19]: *O que o planeta faz? ele olha para o Sol, vê a distância em que está e calcula em sua calculadora interna o inverso do quadrado da distância para então saber como deve se mover? Isso não explica o mecanismo da gravitação! Talvez você queira investigar mais. Muita gente tentou investigar mais. Questionaram Newton a respeito de sua teoria: “Ela não significa nada, não diz nada.” Ele respondeu: “Diz como os corpos se movem, não porquê. Isso deveria bastar”.*

Conforme a ciência foi se desenvolvendo e os instrumentos de medição tornando-se mais

precisos, os testes para a lei da gravitação ficaram mais exigentes. O primeiro conjunto de testes mais meticuloso foi feito com as luas de Júpiter. Observações prolongadas e minuciosas do movimento delas permitiram os cientistas checarem se tudo estava de acordo com o que previa a teoria de Newton. E para nossa surpresa, não estava. Em relação aos cálculos feitos a partir da lei da gravitação as luas pareciam 8 minutos adiantadas quando Júpiter estava mais perto da Terra e 8 minutos atrasadas quando estava mais distante [18, 19].

Confiante em que a teoria de Newton estava correta, Olaus Römer (1644 - 1710) chegou a uma brilhante conclusão que explicaria a não compatibilidade dos resultados observacionais com a teoria. Römer disse que a luz leva um certo tempo para viajar de Júpiter à Terra, de modo que quando olhamos as luas, não as vemos onde estão agora, mas onde estavam algum tempo atrás; o tempo necessário para que ela nos atinja. Então os atrasos e adiantamentos citados acima, deveriam ser corrigidos com base na diferença de tempo entre a luz emitida (no caso refletida) pelas luas e a recebida aqui na Terra. Foi com essa premissa que Römer conseguiu determinar, pela primeira vez na história, a velocidade da luz². Esta foi a primeira demonstração de que a propagação da luz não ocorre de forma instantânea [18, 19].

De acordo com a teoria de Newton, outro problema surgiu. Os planetas não deveriam mover-se em órbitas elípticas, pois além de serem atraídos pelo Sol, também são atraídos uns pelos outros e, por mais fraca que seja essa atração mútua, deveria alterar ligeiramente as órbitas. Na época, Júpiter, Saturno e Urano eram grandes planetas conhecidos. A atração de cada um sobre os demais deveria alterar as elipses perfeitas sugeridas por Kepler. Esse efeito foi calculado e ao final de todas as contas e observações, concluiu-se que dos três apenas dois (Júpiter e Saturno) moviam-se de acordo com o que era previsto; mas algo de estranho acontecia com Urano, sua órbita não era compatível com o que dizia a teoria. Surgia então uma nova oportunidade de encontrar algum defeito na lei de Newton. No entanto, dois astrônomos, John Adams (1819 - 1892) e Urbain Leverrier (1811 - 1877), fazendo cálculos separados e simultaneamente, propuseram que a estranheza no movimento de Urano era devido a um planeta até então desconhecido. Assim, entraram em contato com os respectivos observatórios, dizendo que deveriam apontar os telescópios para uma determinada região do céu e comparar com as cartas estelares. Se observassem alguma estrela que não estivesse na carta, possivelmente seria o planeta. Dessa forma foi descoberto Netuno [18, 19].

²Podemos observar aqui mais um importância que a teoria da gravitação teve. Se não há conhecêssemos provavelmente teríamos levado muito mais tempo para descobrir a velocidade da luz, pois não saberíamos o que esperar dos satélites de Júpiter.

Contudo, no começo do século XX, apareceu um problema que, finalmente, a teoria de Newton não conseguia explicar: a precessão anômala da órbita de Mercúrio. A lei da gravitação universal permite que calculemos, de maneira muito precisa, a precessão do periélio (ponto mais próximo do Sol) da órbita do planeta Mercúrio. Por causa da atração gravitacional dos outros planetas do nosso sistema solar, era previsto que o periélio de Mercúrio devesse sofrer um leve desvio (veja, por favor, a figura 1.2), cerca de 5700 segundos de arco por século. O desvio ocorre de fato; o problema reside na discrepância de 43 segundos por século, entre o valor calculado e o observado³. Vários astrônomos propuseram diversas soluções, mas todas foram descartadas. Pela primeira vez, a teoria de Newton parecia possuir falhas [2, 18].

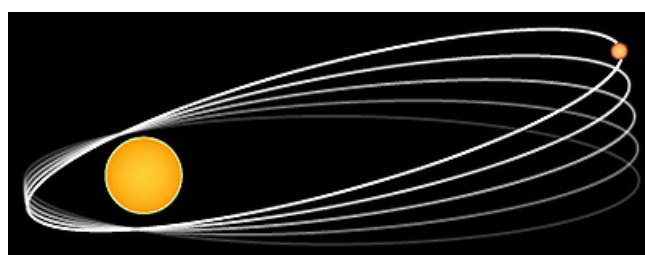


Figura 1.2 – Representação do deslocamento do periélio de Mercúrio com o tempo [2].

Coube a Albert Einstein (1879 - 1955), resolver esse problema através da formulação de sua Teoria da Relatividade Geral (abreviada às vezes por RG), publicada em 1915. A teoria de Einstein é a generalização da teoria da gravitação de Newton e teve como primeira grande vitória a previsão exata dos desvios existentes na órbita de Mercúrio; resolvendo de vez o problema. Contudo, devemos voltar um pouco na história para entender como isso aconteceu [24].

Em 1905, Einstein modificou a mecânica clássica de Newton (que se baseava na relatividade de Galileu) para que se ajustasse aos princípios, dois no total, da chamada Teoria da Relatividade Especial. O primeiro desses princípios é que as leis físicas são as mesmas em qualquer referencial inercial (referenciais que se movem com velocidade constante). O outro princípio afirma que a velocidade da luz é uma invariante⁴. Como consequência, obtêm-se que o espaço e o tempo são uma entidade geométrica unificada, o chamado espaço-tempo. A Teoria da Relatividade Especial também nos permite descrever o comportamento de corpos acelerados, desde que a dita aceleração não implique forças gravitacionais [24].

Somente anos mais tarde, Einstein generalizou o princípio da relatividade do movimento

³Na época os erros de observação eram de aproximadamente 0,1 segundos por século. O que garante que essa discrepância não é um erro na medida.

⁴Vale ressaltar a diferença entre um invariante e uma quantidade conservada. Um invariante é uma quantidade que possui o mesmo valor quando vista de qualquer referencial inercial. Já uma quantidade conservada é uma que possui o mesmo valor quando calculada pelo mesmo observador antes e depois de um dado processo.

para sistemas que incluíssem campos gravitacionais onde uma das implicações mais dramáticas é que a matéria curva o espaço-tempo a sua volta. Isto nos permite interpretar a gravidade não como uma força, mas como um efeito geométrico: uma distorção no tecido espaço-tempo. Nessa perspectiva, até mesmo a luz deveria sofrer um desvio ao passar perto de grandes massas (como o Sol por exemplo), pois tem energia e energia é equivalente à massa. Esses efeitos são mostrados na figura 1.3. De fato, o desvio da luz foi comprovado através da observação de um eclipse solar que ocorreu no dia 29 de maio de 1919 [24].

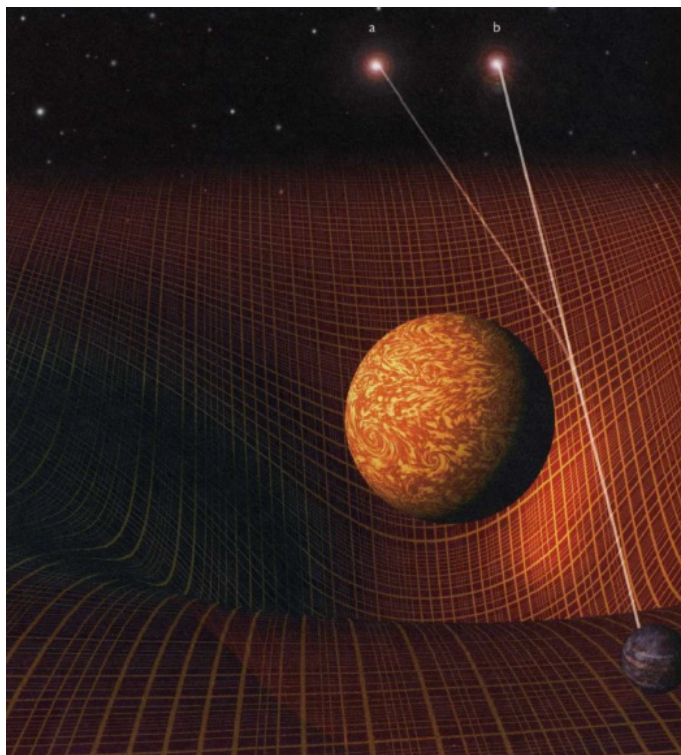


Figura 1.3 – Em (a) temos uma estrela emitindo luz. Tal estrela não deveria ser visível aqui da Terra por se encontrar do outro lado do Sol. Entretanto, o Sol por ser um corpo muito massivo deforma o espaço-tempo ao seu redor, gerando um ligeiro desvio na trajetória da luz e, portanto, na posição aparente da estrela. Assim, essa estrela será vista aqui da Terra como se estivesse localizada na posição (b) [3].

É difícil imaginarmos a geometria curva da RG. Uma maneira (grosseira, diga-se de passagem) encontrada para conseguirmos conceber essa ideia é imaginar o espaço-tempo como um tecido elástico. Ao colocarmos uma grande bola pesada (como uma de boliche) nesse tecido, o seu peso exercerá uma compressão, fazendo assim com que o tecido se curve ao seu redor. Ao jogarmos pequenas esferas mais leves (como bolas de gude) sobre o mesmo tecido, elas não passarão rolando diretamente para o outro lado, mas irão convergir em torno do peso maior, passando a orbitá-lo, como planetas orbitando o Sol. Essa situação é mostrada na figura 1.4. Trocando-se a bola de boliche pelo Sol e as bolas de gude pelos planetas, vê-se que a situação descrita exemplifica bem, até certo ponto, o que ocorre em nosso sistema solar.

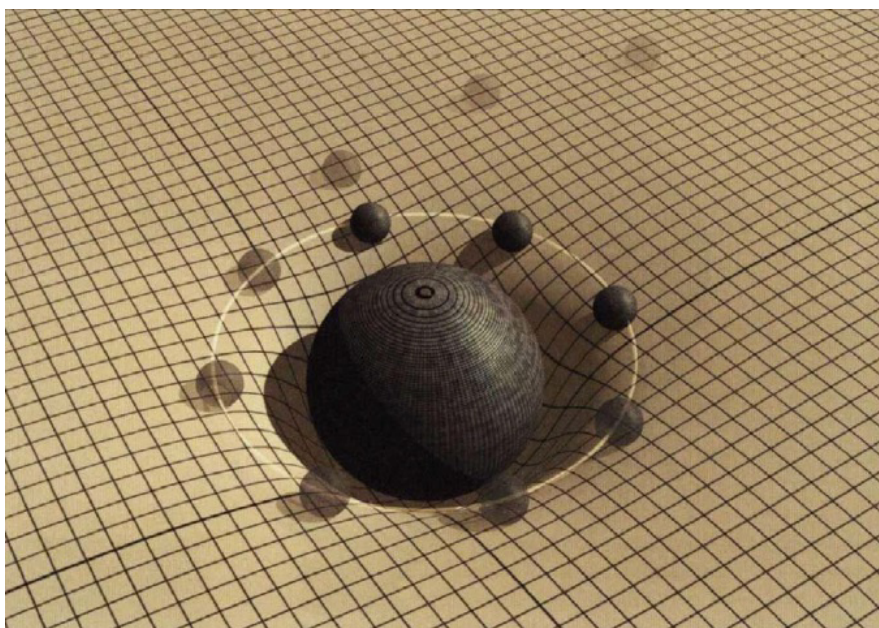


Figura 1.4 – A grande bola no centro representa um corpo maciço como uma estrela. Seu peso faz com que o tecido fique curvado ao seu redor. Qualquer esfera mais leve jogada nesse tecido será então desviada por essa curvatura e passará a orbitar a grande bola, da mesma maneira que planetas submetidos ao campo gravitacional de uma grande estrela [3].

Através desse exemplo, uma outra coisa fica bastante clara. A teoria de Einstein incorpora o efeito da gravidade ao afirmar que a distribuição de matéria e energia no universo, curva e deforma o espaço-tempo e por isso não é plano. Nesse contexto, objetos em tal espaço-tempo tentam se deslocar em linha reta, mas como o espaço é curvo, suas trajetórias parecem distorcidas. Eles se movem como que afetados por um campo gravitacional [3].

No entanto, como foi dito, esta analogia é grosseira e incompleta, pois nela apenas uma seção bidimensional do espaço (a superfície do tecido elástico) é curva e o tempo permanece imperturbado, como na teoria newtoniana. Como já explicitado, a teoria da RG que condiz com um grande número de experimentações, nos diz que o espaço e o tempo estão inextricavelmente entrelaçados. É impossível poder curvar o espaço sem afetar também o tempo. Logo o tempo possui forma. Como escrito por Stephen Hawking em [3]: “*Curvando o espaço e o tempo, a relatividade geral faz com que deixem de ser um fundo passivo no qual os eventos acontecem para se transformarem em participantes ativos, dinâmicos, dos acontecimentos*”. Essa afirmação fará ainda mais sentido quando começarmos a trabalhar com ondas gravitacionais.

1.2 A predição de Einstein - Ondas gravitacionais

Outra previsão de suma importância que vem da RG é que qualquer objeto massivo que possua aceleração produz ondas gravitacionais; desde pessoas correndo num ritmo acelerado, carros fazendo curvas, aviões ganhando velocidade para decolar ou buracos negros colidindo. Contudo, nunca as detectamos antes, pois as ondas produzidas por nós aqui na Terra são tão pequenas que chegam a ser desprezíveis. Para se ter uma ideia, não é remotamente possível construir uma máquina que possa girar um objeto rápido o suficiente para que se produza uma onda gravitacional detectável - nenhuma pessoa resistiria e mesmo os materiais mais fortes do mundo iriam voar distante nas velocidades de rotação que uma máquina desse tipo exigiria [4, 24, 25].

Essas ondas são ondulações no tecido do espaço-tempo que carregam energia e momento consigo e só são produzidas em quantidades consideráveis quando causadas por alguns dos processos mais violentos do cosmos, tais como: colisão de buracos negros ou de estrelas de nêutrons⁵ (figura 1.5), colapso de núcleos estelares, aglutinados de anãs brancas ou os restos da radiação gravitacional gerada pelo nascimento do próprio universo. Segundo Einstein, eventos dessa magnitude perturbam o espaço-tempo, de tal forma que ondas de espaço distorcido irradiam a partir da fonte, semelhante às ondas produzidas na superfície de um lago ao jogarmos uma pedra. Além disso, essas ondulações viajariam à velocidade da luz através do universo, levando consigo informações sobre suas origens cataclísmicas, bem como pistas inestimáveis à natureza da própria gravidade [4].

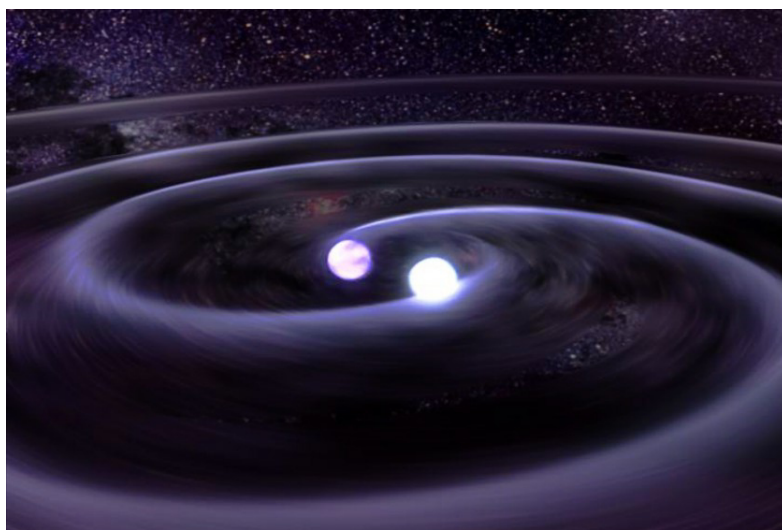


Figura 1.5 – A figura acima ilustra ondas gravitacionais sendo emitidas por duas estrelas de nêutrons orbitando uma em relação a outra [4].

⁵Estrelas de nêutrons são um dos possíveis estágios finais na vida de uma estrela. Elas são criadas quando estrelas com massa maior a oito vezes a do Sol esgotam sua energia nuclear e passam por uma explosão de supernova.

Desde sua predição, a detecção direta dessas ondas era amplamente desejada por toda a comunidade científica, pois iria fornecer maneiras novas e mais robustas para testar a relatividade geral sob condições extremas, inaugurando um novo modo de explorarmos o universo. Somente após uma busca incessante de quase 100 anos é que finalmente obtivemos a comprovação. As ondas gravitacionais foram detectadas em 14 de setembro de 2015, às 6h51 (horário de Brasília) pelos detectores gêmeos do Observatório Interferométrico de Ondas Gravitacionais (do inglês: Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory - LIGO) [25, 9].

Os cientistas não só detectaram tais ondas, como concluíram que elas foram produzidas durante uma fração final de segundo da fusão de dois buracos negros que geraram um único e mais massivo buraco negro em rotação. Com isso, além da detecção das ondas gravitacionais, tivemos a primeira observação da colisão e fusão de um par de buracos negros [25, 9].

1.2.1 O que é o LIGO?

O LIGO foi um projeto fundado em 1992 por Kip Thorne e Ronald Drever, ambos do Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech) e Rainer Weiss do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) e que é financiado pela Fundação Nacional de Ciências dos Estados Unidos (NSF, National Science Foundation). A iniciativa tem como principal objetivo observar ondas gravitacionais de origem cósmica e, para isso, conta com a colaboração de cientistas de todo o mundo para analisar e interpretar os dados obtidos [4].



Figura 1.6 – Da esquerda para a direita temos: Kip Thorne (Caltech), Ronald Drever (Caltech) e Rainer Weiss (MIT) [5].

O projeto possui dois grandes interferômetros a laser localizados a 3002 km de distância; um em Livingston, Louisiana e o outro em Hanford, Washington (figura 1.7). São, notadamente, os dois maiores observatórios de ondas gravitacionais da Terra. Naturalmente, existe uma colaboração com outros observatórios, uma vez que a melhor maneira de aprender sobre ondas gravitacionais e suas fontes é ter muitos detectores, fazendo observações simultaneamente [6].



Figura 1.7 – A esquerda temos o observatório de Hanford (ou LHO - LIGO Hanford Observatory), enquanto a direita vemos o observatório de Louisiana (ou LLO - LIGO Louisiana Observatory) [6].

Um primeiro conjunto de detectores foi concluído no início de 2000, incluindo *TAMA300* no Japão (que se encontra desativado, pelo menos até o momento da preparação desse texto), *GEO600* na Alemanha, LIGO nos Estados Unidos e Virgo na Itália (figura 1.8). A partir de combinações destes detectores, foram feitas observações conjuntas no período de 2002 – 2011 sem se obter qualquer detecção de ondas gravitacionais. Depois de progressos significativos realizados⁶, os detectores LIGO começaram a operar em 2015 como **LIGO Avançado**: os primeiros de uma rede global de detectores significativamente mais sensíveis [6].



Figura 1.8 – Na parte superior temos o GEO600 e na inferior, da esquerda para a direita, o Virgo e o KAGRA [7].

O Virgo que se localiza perto de Pisa, Itália, está passando por seus próprios upgrades (parecidos com o do LIGO) para aumentar a sua sensibilidade. Espera-se que ainda neste ano (2016) inicie a operação em grande escala. Nesse meio tempo, o Japão está construindo um novo interferômetro denominado de KAGRA (sigla para Kamioka Gravitational Wave Detector), que

⁶Tais progressos são descritos em [26].

se localizará dentro da mina Kamioka (a mesma que abriga o detector de neutrinos “Super Kamiokande”). Sendo subterrâneo, o detector estará exposto a menos vibrações sísmicas do que os instrumentos de superfície como LIGO, GEO600 e Virgo. KAGRA também utilizará sistemas criogénicos, o que significa que a óptica irá ser arrefecida de tal forma que as vibrações moleculares dentro do próprio material serão quase nulas⁷. Espera-se que seu funcionamento comece em 2018 [7].

1.2.2 Detecção

Como já comentamos no início dessa seção, as ondas gravitacionais só são consideráveis se o evento que as deu origem produzir energia em uma quantidade extraordinariamente grande. Perto das fontes que a geram, essas ondas podem ser extremamente violentas, mas para nossa sorte, eventos dessa magnitude geralmente ocorrem a grandes distâncias da Terra (da ordem de bilhões de anos-luz) e no momento em que nos atingem já são milhões de vezes menores e menos destrutivas. De fato, quando essas ondas chegam aqui, possuem uma amplitude tão pequena que detectá-las é um trabalho muito difícil. Só para se ter um respício, as ondas gravitacionais da primeira detecção do LIGO geravam uma oscilação no espaço-tempo que era milhares de vezes menor que o núcleo de um átomo [4, 9].

Na época de Einstein, a tecnologia para detecção dessas ondas era basicamente inexistente, mas ainda assim os primeiros experimentos começaram por volta de 1960 com o físico Joseph Weber e seus detectores de massa ressonante, mas que infelizmente não obtiveram nenhum sucesso. Em 1974, 20 anos após a morte de Einstein, os astrónomos Russell Hulse e Joseph Taylor que trabalhavam no observatório de Arecibo, em Porto Rico, descobriram o primeiro pulsar binário (duas estrelas extremamente densas e pesadas em órbita uma ao redor da outra) há 21.000 anos-luz da Terra. Este evento, denominado por *PSR 1913+16* ou *Binária de Hulse-Taylor*, era exatamente o tipo de sistema que, de acordo com a teoria de Einstein, deveria irradiar ondas gravitacionais [25].

Depois de aproximadamente sete anos de observações, os dois astrónomos concluíram que as duas estrelas estavam se aproximando exatamente como a RG previa. Isto só podia significar que o sistema estava perdendo energia de alguma forma, o que os levou a inferir que deveria estar havendo emissão de radiação gravitacional. Essa foi a primeira detecção indireta de ondas

⁷Isso é necessário pois a chave para a detecção de ondas gravitacionais é isolar o detector de todas e quaisquer vibrações terrestres que possam imitar ou mascarar uma vibração de ondas gravitacionais.

gravitacionais - indireta, pois não houve realmente a detecção de uma onda. Nesse contexto, a explicação desse fenômeno pode ser feita da seguinte maneira: conforme o pulsar binário emite ondas gravitacionais, as estrelas perdem energia, as órbitas encolhem cada vez mais e eventualmente as estrelas acabam colidindo⁸. Essas observações lhes renderam o nobel em Física de 1993 [11].

Em 2015, 41 anos depois da Binária de Hulse-Taylor ter sido descoberta, o LIGO fez a primeira observação direta de ondas gravitacionais. A situação é bem parecida com a que acabamos de descrever, a diferença é que dessa vez as ondas gravitacionais foram emitadas pela fusão de um par buracos negros há 1,3 bilhões de anos-luz da Terra. Esse evento recebeu o nome de GW150914 [8, 25].

Da morfologia do sinal recebido, pôde-se concluir que os buracos negros envolvidos na detecção do LIGO possuíam massa⁹ de $36^{+5}_{-4}M_{\odot}$ e $29^{+4}_{-4}M_{\odot}$ e após se fundirem, a massa do buraco negro resultante era de $62^{+4}_{-4}M_{\odot}$. Ao compararmos as massas antes e depois da fusão, vemos que a coalescência converteu aproximadamente três vezes a massa solar (ou seja, quase seis milhões de trilhões de trilhões de quilogramas) em energia que foi irradiada na forma de ondas gravitacionais, sendo a maior parte emitida em uma fração de segundo. Para se ter uma noção, o sol emite o equivalente a quatro bilhões de quilogramas por segundo via radiação eletromagnética. Além disso, a energia liberada pelo pico de GW150914 foi maior que seis vezes a luz combinada (isto é, a taxa à qual a energia é libertada como luz) de todas as estrelas e galáxias no universo observável [9, 25]. Nas figuras 1.9, 1.10 e 1.11 podemos ver uma simulação desse evento.

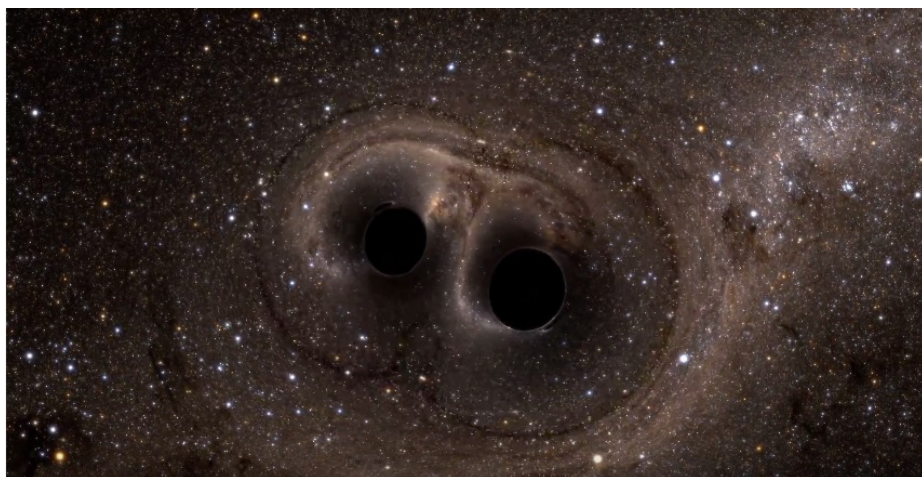


Figura 1.9 – Simulação feita pela Caltech da fusão de um par de buracos negros [8].

⁸No caso da *Binária de Hulse-Taylor* estima-se que as duas estrelas irão colidir em cerca de 300 milhões de anos.

⁹Onde $M_{\odot} = 1,9891 \times 10^{30}$ kg é a massa solar.

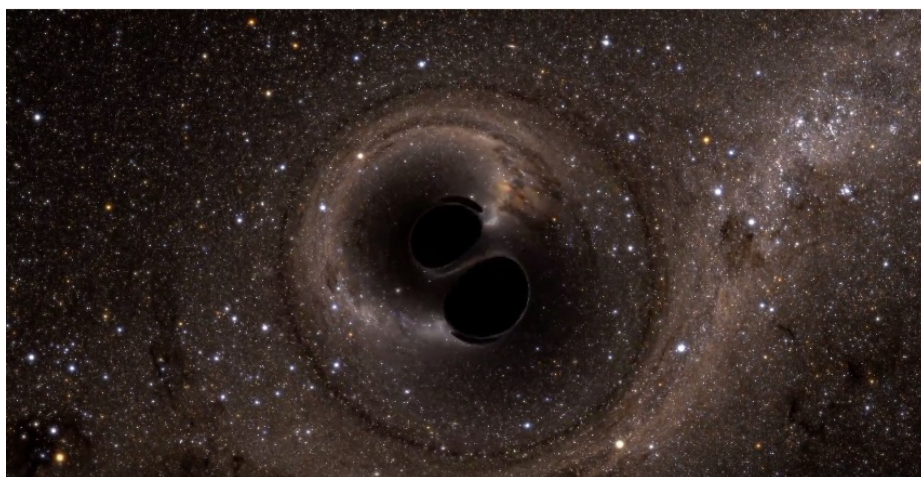


Figura 1.10 – À medida que os buracos negros iam executando o movimento espiralado um em direção ao outro, emitiam ondas gravitacionais, perdiam energia e se aproximavam [8].

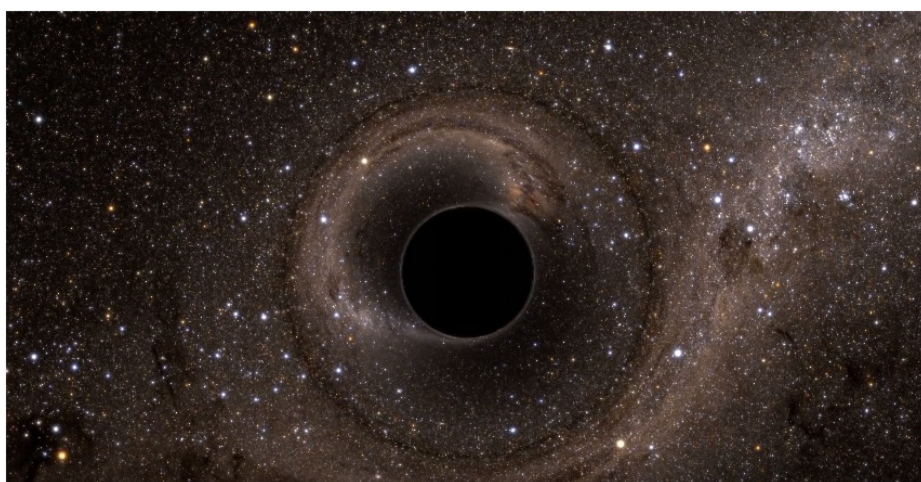


Figura 1.11 – Até que se fundiram, formando um único buraco negro mais massivo [8].

1.2.3 Experimento e Resultados

A detecção das ondas gravitacionais, além de ter sido um marco histórico para a física, também representou um grande desafio tecnológico; pois como veremos a seguir, a engenharia por trás desse feito é de um nível altíssimo.

Uma vez que queremos detectar ondas, a primeira ideia que nos vem à mente é trabalhar com o fenômeno de interferência, justamente por ser aplicável a todo tipo de onda. É nesse contexto, que a técnica escolhida para se detectar ondas gravitacionais foi a interferometria, uma das que tem conseguido maiores progressos nos últimos anos. Para essa técnica, faz-se necessário um aparelho chamado interferômetro, que possui esse nome por funcionar através da fusão de duas ou mais fontes de luz para criar um padrão de interferência que pode ser medido e analisado. Tais aparelhos são frequentemente usados em medições muito pequenas que não seriam realizáveis de outra maneira, e os padrões de interferência obtidos contêm informações importantes sobre o objeto ou fenômeno a ser estudado.

No caso do LIGO, os interferômetros foram projetados para medir uma distância de $1/10000$ da largura de um próton; que é a amplitude de deformação típica de uma onda gravitacional. A sua estrutura consiste de dois braços perpendiculares (medindo 4 km cada) em que um feixe de laser é enviado, e refletido pelos espelhos (massa teste suspensas) que se localizam no final de cada braço, como pode ser visto na figura 1.12 (c). O princípio de funcionamento é bem simples: quando uma onda gravitacional interage com os braços do interferômetro acaba por induzir pequenas variações no seu comprimento que podem ser medidas através do padrão de interferência, resultante da recombinação da luz que se propaga¹⁰ no instrumento [25, 26].

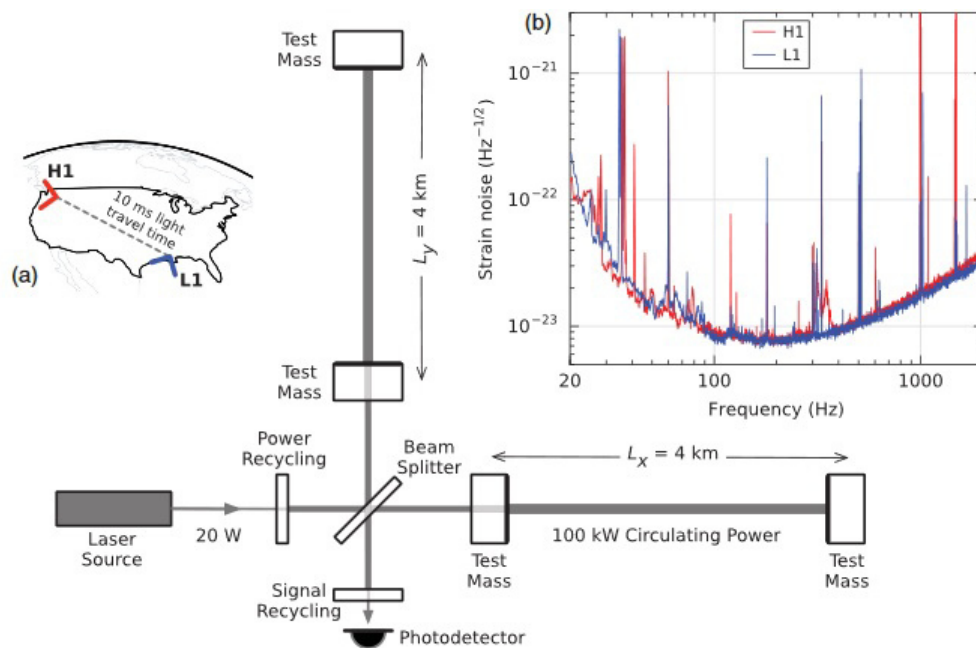


Figura 1.12 – Em (a) são mostrados as posições dos dois observatórios LIGO, além de indicar o tempo que a luz demora para viajar entre eles, algo em torno de 10 ms. O gráfico em (b) nos mostra como a amplitude de ruído do instrumento variou em função da frequência em cada um dos detectores durante o evento. Quando menor é o ruído do instrumento, mais sensível é o detector. Os picos altos indicam faixas de frequência onde o ruído do instrumento é particularmente grande. Já em (c) temos uma esquematização do interferômetro usado pelo LIGO em suas medições [9].

No entanto, existem diversos problemas que atrapalham a medição e para que fosse possível detectar com êxito uma onda gravitacional como a emitida pela GW150914, os detectores do LIGO precisaram não só de uma grande sensibilidade, como também a capacidade de isolar os sinais reais das fontes de qualquer ruído instrumental, isto é, pequenas perturbações devido, por

¹⁰Em geral, o tempo que a luz demora para percorrer o braço do interferômetro é muito menor que o período das ondas a que este método é sensível, e portanto, para uma dada frequência o efeito não será tão grande quanto seria possível. Para conseguir maximizar a variação do comprimento nos braços do detector foram desenvolvidas técnicas que permitem que a luz circule algumas centenas de vezes no instrumento antes que o padrão de interferência seja medido. Para se ter uma dimensão do desafio que é a medição precisa de deslocamentos extremamente pequenos, basta imaginar que se o braço do instrumento tivesse um comprimento da ordem da distância de separação Terra-Sol, então, os deslocamentos que desejamos medir teriam aproximadamente o tamanho do diâmetro de um fio de cabelo [6, 26].

exemplo, a efeitos ambientais ou ao próprio instrumento, que poderiam imitar (ou até mesmo superar) os padrões de ondas gravitacionais buscados. O que nos permite distinguir as ondas gravitacionais dos ruídos mencionados acima é justamente o fato de existirem dois detectores: só um verdadeiro sinal de uma onda gravitacional apareceria em ambos os detectores e levando exatamente o mesmo tempo que a luz (e, portanto, o que uma onda gravitacional) leva para se deslocar entre eles [9].

A figura 1.12 (b) descreve em um gráfico o problema que acabamos de discutir. Nela podemos ver como o ruído instrumental nos detectores do LIGO mudou em relação à frequência ao longo do evento GW150914. Na faixa de baixas frequências, o ruído é dominado por vibrações sísmicas que cobrem completamente qualquer sinal de onda gravitacional com uma frequência inferior a 10 Hz. A frequência média, a principal fonte de ruído é devido aos movimentos aleatórios dos átomos das massas teste. Já em altas frequências, os ruídos provêm principalmente de flutuações na potência do laser [9, 26].

Na figura 1.13, encontramos os principais resultados das análises realizadas pelo LIGO: a parte central nos mostra a reconstrução do padrão de amplitude da onda gravitacional vista pelo detector de Hanford. Como se pode ver, é clara a concordância entre a amplitude estimada (mostrada em cinza) e o modelo teórico da onda mais semelhante no caso de dois buracos negros coalescentes (mostrado em vermelho), tal como previsto pela RG. No topo da figura, temos imagens dos buracos negros em vários estágios do cálculo computacional: a **espiralação** para dentro, que é a fase na qual os buracos negros se aproximam; a **fusão**, na qual os dois se unem e a **estabilização**, quando o buraco negro remanescente oscila brevemente antes de estabilizar-se. Comparando-se as previsões teóricas dos dados de amplitude com os dados observacionais, tudo aponta que a RG é de fato a teoria correta para descrever esse evento [9].

Uma pergunta interessante que podemos nos fazer é a seguinte: o que nos garante que o evento GW150914 foi uma fusão de buracos negros? O fato é que existem alguns indícios que comprovam isso, entre eles podemos citar: os valores estimados das massas antes da fusão dos dois componentes de GW150914; esse indício torna-se ainda mais forte se considerarmos a enorme velocidade e a pequena separação dos dois componentes, tal como mostrado na parte inferior da figura 1.13. Nessa mesma figura, vê-se que as velocidades estimadas dos dois componentes são uma fração significativa da velocidade da luz e sua separação é cerca de apenas algumas vezes o tamanho característico de um buraco negro para uma dada massa - conhecido como o seu raio de Schwarzschild [9].

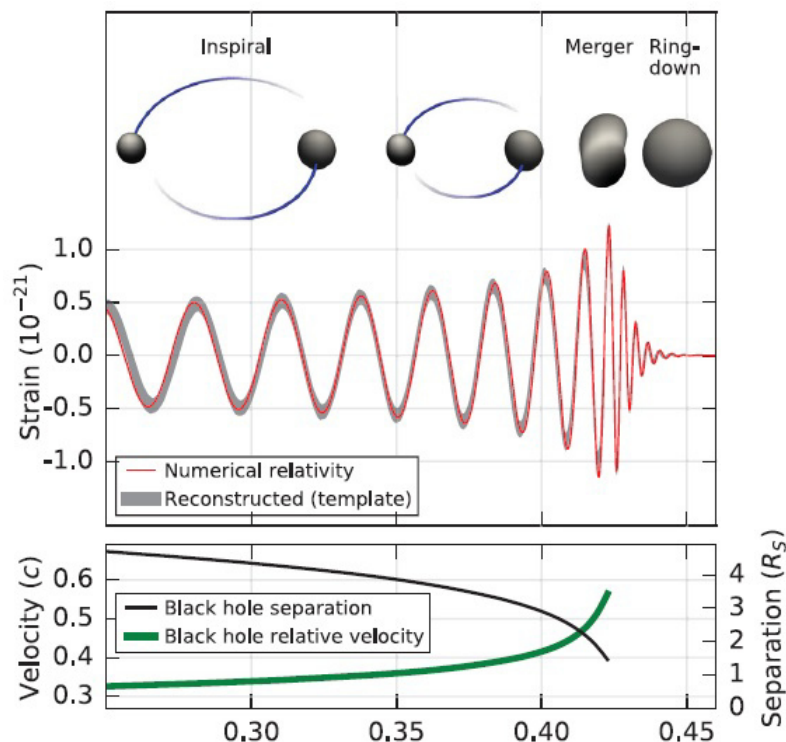


Figura 1.13 – Alguns dos principais resultados da análise de GW150914. No gráfico superior temos uma comparação entre as previsões do modelo teórico e os dados experimentais, em relação a amplitude da onda gravitacional detectada em três fases do evento: espiralação, fusão e estabilização. No gráfico que se encontra na parte inferior podemos ver a separação e a velocidade dos buracos negros, e como elas mudaram a medida que ocorria a fusão [9].

Outro indício muito forte é indicado no gráfico que se encontra na parte inferior da figura 1.13. Nele podemos ver que os dois componentes estiveram separados por uma distância muito pequena imediatamente antes de se fundirem, da ordem de poucas centenas de quilômetros, isso quando a frequência da onda gravitacional era de aproximadamente 150 Hz. Da literatura, os buracos negros são os únicos objetos conhecidos que são suficientemente compactos para estarem tão perto sem se fundir. Assim, juntando esse argumento à estimativa da massa dos componentes, temos que um par composto por uma estrela de nêutrons e um buraco negro, teriam se fundido em uma frequência inferior à 150 Hz e um par de estrelas de nêutros não seria massivo o suficiente. O que comprova que o evento GW150914 trata-se realmente da fusão de um par de buracos negros [9].

1.2.4 Localização do evento GW150914 no espaço

A localização aproximada do evento GW150914, fonte das ondas gravitacionais detectadas pelo LIGO, é mostrado na figura 1.14, onde podemos ver o mapa do céu do hemisfério sul. Cada uma dessas linhas coloridas representam diferentes probabilidades para a localização do sinal

originado: a linha **púrpura** define a região em que o sinal está previsto ter vindo e possui um nível de confiança de 90%; a linha **amarela** interna define a região alvo a um nível de confiança de apenas 10%. À medida que tentamos localizar a fonte, a incerteza vai aumentando [10].

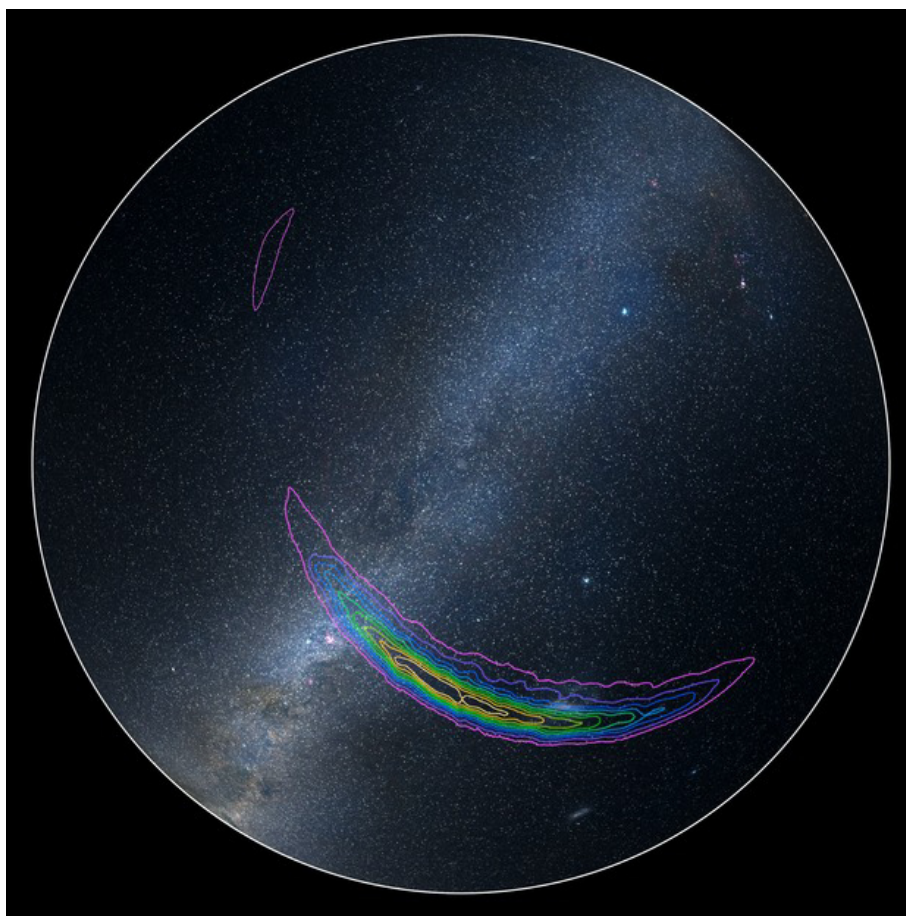


Figura 1.14 – A região do céu acreditado para conter a fonte de *GW150914*. A localização aproximada da fonte de ondas gravitacionais detectadas pelos observatórios do LIGO. A linha púrpura define a região em que o sinal está previsto ter vindo e possui um nível de confiança de 90%; a linha amarela interna define a região alvo e possui nível de confiança de apenas 10% [10].

Uma pequena galáxia perto da nossa chamada de *Grande Nuvem de Magalhães* pode ser vista na parte inferior da figura 1.14; é a mancha difusa que se localiza embaixo da região demarcada pela linha de cor púrpura. Enquanto que uma galáxia ainda menor, chamada de *Pequena Nuvem de Magalhães* está abaixo dela [10].

O mecanismo por trás desta localização é simples. Operar uma rede de três ou mais detectores nos permite, por triangulação, posicionar em que direção do céu essas ondas estão vindo. Isto é feito sabendo-se a diferença de tempo de chegada da onda em cada detector - da mesma forma que se usa três torres de telefonia celular para identificar a localização de um telefone celular. Quanto mais detectores na rede, mais precisa será a localização no céu da fonte emissora dessa onda gravitacional. É possível também obter essa localização com apenas dois detectores, como

foi o caso do LIGO, mas a região demarcada possui a forma de um anel ou um arco.

No presente caso, a obtenção da localização aproximada foi possível graças aos dados obtidos pelos observatórios LIGO em Livingston, Louisiana e Hanford, Washington. As ondas gravitacionais chegaram a Livingston 7 milésimos de segundo antes de chegarem a Hanford. Foi justamente esse atraso de tempo que revelou uma fatia particular do céu (na forma de anel, como visto na figura 1.14) a partir do qual o sinal deve ter se originado. Uma análise mais aprofundada da intensidade do sinal variável em ambas os detectores, acaba descartando partes do anel e localizando ainda mais a fonte [10].

1.2.5 Por que detectá-las?

A maneira pela qual observamos o cosmos quase sempre dependeu de instrumentos. Microscópios trouxeram a noção da existência de microrganismos, como as bactérias, que são uma das formas de vida mais comuns do planeta. Os telescópios nos deram a habilidade de observar o sistema solar, descrever as órbitas dos planetas e formular a noção de gravidade de Newton. Mas nem sempre essas descobertas aconteceram propositalmente.

Em 1930, o físico Karl Jansky (1905 – 1950) foi encarregado de melhorar os sinais de rádio utilizados nas transmissões telefônicas transoceânicas que, na época, estavam sofrendo interferência. Com o intento de localizar a causa do problema, isto é, alguma fonte de ondas de rádio que atrapalhavam a chamada com estática, Jansky construiu um antena giratória que podia apontar para todas as direções (figura 1.15). Foi quando ele descobriu ondas de rádio vindas de tempestades de raios próximas e distantes, além de uma terceira fonte (desconhecida) de rádio no céu. O sinal dessa fonte desconhecida tinha uma variação de intensidade a cada 23 horas e 56 minutos, que é o período de rotação da Terra. Depois de aproximadamente um ano de investigação, veio a incrível descoberta: as ondas provenientes dessa fonte misteriosa vinham de uma região da constelação de Sagitário, que se encontra em direção ao centro da Via Láctea. Uma descoberta por acaso, feita sem querer, por alguém que estava preparado para entender o que havia encontrado, uma verdadeira serendipidade [11, 27].

Foi com essa descoberta que, aos 26 anos, Jansky publicou o trabalho¹¹ que deu início a *Radioastronomia*: o ramo da astronomia que estuda as radiações eletromagnéticas emitidas ou refletidas pelos corpos celestes. Isto nos possibilitou uma maneira nova de observar o universo,

¹¹O título do trabalho é *Directional Studies of Atmospheric at High Frequencies* e pode ser encontrado em <http://adsabs.harvard.edu/full/2005ASPC..345....3J>.

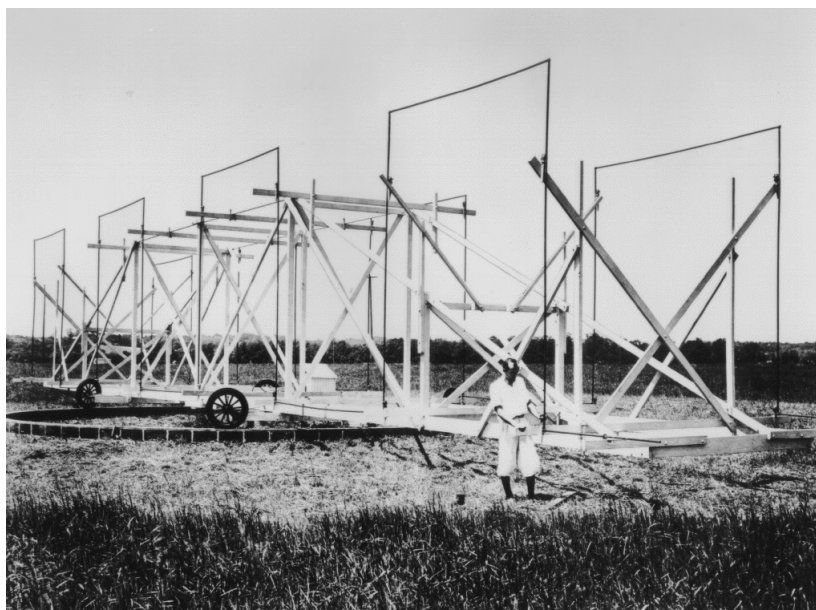


Figura 1.15 – Antena projetada por Jansky em uma plataforma giratória para receber sinais na frequência de 20,5 MHz. O objetivo era detectar a causa do problema nos sinais de rádio utilizados nas transmissões telefônicas transoceânicas [11].

pois agora poderíamos estudá-lo, usando todas as faixas do espectro eletromagnético e não mais nos limitar somente ao espectro da luz visível. Uma grande variedade de objetos são observáveis no comprimento de onda de rádio, incluindo supernovas, gás interestelar e pulsares. Enquanto isso, com espectro infravermelho passamos a poder estudar objetos que são muito frios para emitir luz visível, tais como planetas e discos circunestelares. Já o raio-X nos permitiu estudar remanescentes de supernovas, galáxias elípticas, aglomerados de galáxias e núcleos galácticos ativos [27, 28].

Durante a história da ciência, toda vez que tentamos visualizar o universo utilizando alguma faixa nova do espectro, acabamos por fazer descobertas fascinantes que não teriam sido possíveis se estivéssemos restritos apenas ao espectro da luz visível. Foi assim com as ondas de rádio, microondas, ultravioleta, infravermelho, raio X e até raios gama. Hoje conseguimos enxergar o universo em todas as faixas do espectro eletromagnético. Como veremos agora, o que a descoberta da radioastronomia teve de serendipidade, a das ondas gravitacionais teve de proposital [22, 28].

Ondas gravitacionais não são radiação eletromagnética, elas são um fenômeno completamente diferente, levando informações sobre eventos cósmicos que não são carregados de outra maneira. Para entender essa afirmação um pouco melhor, vamos tomar a colisão entre buracos negros como exemplo. Nesse tipo de colisão, a radiação eletromagnética emitida é muito baixa e praticamente inexistente, mas a radiação gravitacional, como já discutimos anteriormente, é

extremamente alta nesse tipo de evento (é o acender de um farol num mar cósmico totalmente escuro). Outra fato importante é que as ondas gravitacionais interagem muito fracamente com a matéria, ou seja, elas viajam através do universo praticamente desimpedidas, dando-nos uma visão clara sobre suas origens e o que acontece no cosmos [29].

A detecção direta e a análise da informação transportada por ondas gravitacionais nos permitirá observar o universo de uma forma totalmente nova, como nunca antes possível. Teremos um espectro completamente novo em mãos que nos possibilitará observar objetos cósmicos e eventos que o espectro eletromagnético inteiro não nos permitiria ver, como: estrelas de neutrons, formação de buracos negros ou estrelas supermassivas se explodindo. Certamente estamos abrindo uma nova janela de estudos sobre o universo, uma compreensão mais profunda desses eventos cataclísmicos e inaugurando a investigação de ponta nas áreas de física, astronomia e astrofísica [8, 29].

1.3 Organização do trabalho

O trabalho está organizado como se segue.

No capítulo 2, apresentamos uma breve introdução à Teoria da Relatividade Geral. Começaremos discutindo o princípio da equivalência e suas implicações, entre elas, a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional. Logo em seguida, passaremos a abordar o princípio da covariância geral; afirmando-nos que, sob uma transformação geral de coordenadas, as leis da física permanecem covariantes (ou seja, sua forma é invariante). Veremos então que esses dois princípios são na verdade faces de uma mesma moeda, isto é, são equivalentes. Por fim, chegaremos às equações de campo de Einstein, sem a inclusão da constante cosmológica.

No capítulo 3, usaremos o método perturbativo na equação de Einstein e a linearizaremos. Dentro do regime linear, veremos que a perturbação obedece a uma equação de onda e estudaremos as implicações físicas disso.

No capítulo 4, discutiremos a geração de ondas gravitacionais e a natureza quadrupolar da radiação gravitacional. Em seguida, calcularemos a energia emitida via radiação gravitacional por um sistema binário em órbita circular. Aplicaremos então a teoria desenvolvida nos dados observacionais da PSR 1931+16 (binária de Hulse e Taylor), comparando teoria e experiência.

Por fim, no capítulo 5 apresentamos um síntese dos resultados obtidos, mostrando perspectivas para a continuação dessa pesquisa.

Capítulo 2

A Teoria da Relatividade Geral

Nosso objetivo neste capítulo é descrever a formulação da teoria de Einstein para a gravitação, chegando assim, até as suas equações de campo. Essas equações nos dizem como a matéria gera gravidade e, por sua vez, como gravidade afeta a matéria. Como foi dito em [30]: *A concepção de Einstein da interação gravitacional tem por fundamento a generalização de que todos os referenciais (não apenas os inerciais) são equivalentes*. De fato, esta é a razão do nome Relatividade Geral, significando que não temos como diferenciar se a força sofrida por uma massa é devida a ela estar num referencial acelerado ou na presença de um campo gravitacional. Apenas ela está sujeita a tal equivalência. É com esse intento que começaremos por enunciar o princípio da equivalência de Einstein e discutir suas implicações.

2.1 Princípio da Equivalência de Einstein

O Princípio da Equivalência formulado por Einstein em 1909, constitui a base da sua Teoria da Relatividade Geral. Ao contrário do que possa parecer, a ideia por trás desse princípio é bastante simples e até intuitiva. Devido à ação do campo gravitacional terrestre, todos os corpos localizados, por exemplo, no interior de um elevador são puxados para baixo, em direção ao centro da Terra. Por esse mesmo motivo, um pêndulo preso ao teto oscila, quando abandonado do repouso com o fio inclinado ou uma bola de basquete cai em direção ao piso [12].

O interessante é que os campos gravitacionais conferem a mesma aceleração a qualquer corpo, seja uma bola de basquete, como citada anteriormente, ou uma bola de gude de massa muito menor; ambas adquirirão a mesma aceleração. Isto é um fato totalmente empírico. Uma vez estabelecido um local onde haja um campo gravitacional conhecido, verifica-se experimen-

mente que todos os objetos caem; quaisquer que sejam, quando soltos em queda livre¹ a partir de um mesmo ponto, exatamente com a mesma aceleração. Mas o que isso implica?

Para responder a essa pergunta façamos um experimento mental² bem simples. Imagine que derrubemos um objeto que se encontra sobre uma mesa, deixando assim com que cai em queda livre. A sua aceleração pode ser calculada através da segunda lei de Newton:

$$F_R = m_I a \quad (2.1)$$

onde m_I é a massa inercial do objeto e a é a aceleração por ele adquirida na queda. Nesse nosso experimento, só existe uma única força atuando no objeto que é a gravitacional, dada por:

$$F_G = m_G g \quad (2.2)$$

onde m_G é a massa gravitacional e g é a aceleração da gravidade nas proximidades da terra (que nesse contexto podemos considerar como constante). A partir dessas duas relações conclui-se, portanto, que

$$a = \frac{m_G}{m_I} g \quad (2.3)$$

ou seja, o fato de todos os corpos possuírem a mesma aceleração e todas igual a g quando em queda livre, implica que os conceitos de massa inercial e massa gravitacional são equivalentes, pois tem-se $m_I = m_G$.

Façamos um outro experimento mental. Dessa vez, imaginemos um elevador no espaço, longe de qualquer estrela ou planeta, num local onde não há nenhuma grande massa causando campo gravitacional considerável. Nessa situação, o pêndulo que citamos anteriormente não irá oscilar, permanecerá em repouso, preso ao teto do elevador com o fio frouxo. A bola de basquete, quando solta, também não cairá em direção ao piso do elevador, mas ficará levitando em repouso onde tiver sido abandonada. Ao indagarmos uma pessoa que se encontra dentro desse elevador, como ela se sentiu fisiologicamente, nos dirá sentir uma sensação de ausência de gravidade. A mesma sentida por uma pessoa em queda livre.

Imagine agora que instalamos propulsores embaixo desse elevador, de forma a acelerá-lo para cima, com uma aceleração a constante. O que ocorrerá no interior do elevador? No referencial

¹Lembrando que queda livre pressupõe a inexistência de atrito.

²Einstein denominava esses experimentos mentais como *Gedankenexperiment* [24].

do elevador, o pêndulo voltará a oscilar e a bola de basquete cairá com essa mesma aceleração a em direção ao piso. Todos os demais objetos tenderão a acelerar para baixo com aceleração a , da mesma forma que fariam se o elevador estivesse em repouso na superfície de um planeta onde o campo gravitacional tem intensidade a . Tal equivalência é mostrada na figura 2.1.

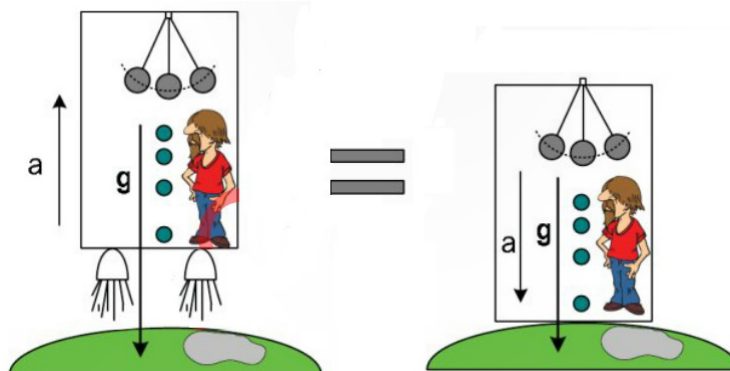


Figura 2.1 – Do lado esquerdo da figura, temos um elevador subindo com aceleração a , sob ação de um campo gravitacional g . Já do lado direito, temos o mesmo elevador com aceleração nula, sob ação de um campo gravitacional $g + a$. De acordo com o princípio da equivalência de Einstein essas duas situações são análogas [12].

A verdade é que essa aceleração a , para cima, que o elevador possui no referencial inercial, será sentida no referencial do elevador (referencial não inercial) como um legítimo campo gravitacional de intensidade a para baixo; na mesma direção e em sentido oposto ao da aceleração desse referencial não inercial. Essa é a ideia básica por trás do chamado Princípio da Equivalência.

Se tivéssemos um observador dentro desse elevador, procurando entender em que estado de movimento se encontra, mesmo realizando os mais diversos experimentos e fazendo as mais diversas análises, ele concluiria, inevitavelmente, estar em repouso na presença de um campo gravitacional. Ou seja, devido à equivalência entre massa inercial e massa gravitacional, o observador não sabe dizer se encontra em um referencial acelerado ou num referencial em repouso, porém na presença de um campo gravitacional.

Finalmente, podemos enunciar o princípio da equivalência: *Não há nenhum experimento que observadores possam efetuar para distinguir se uma aceleração surge devido a uma força gravitacional ou porque o seu referencial está acelerando* [31].

Por fim, é importante ressaltar que o princípio da equivalência não se aplica a forças não gravitacionais (como a força elétrica, por exemplo). Ou seja, não temos como encontrar um referencial no qual essas forças se anulem. Isso é uma característica exclusiva das forças gravitacionais devido à equivalência entre massa inercial e massa gravitacional.

2.2 Forças gravitacionais

Suponhamos uma partícula movendo-se numa região onde existem apenas campos gravitacionais. De acordo com o princípio da equivalência, discutido na seção anterior, existe um sistema de coordenadas ξ^α no qual localmente nenhum campo gravitacional é observado (dessa vez não vamos supor que tais campos sejam uniformes, o próprio campo gravitacional produzido pela terra não é, diminuindo à medida que nos afastamos dela). Tal referencial é exatamente aquele que, localmente, anula o efeito do campo gravitacional e por esse motivo é chamado de *referencial localmente inercial*. Nesse sistema de referência, a segunda lei de Newton é escrita como:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.4)$$

onde $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ é o tempo próprio³.

Mas como um segundo sistema (digamos de coordenadas x^μ), que não seja localmente inercial, escreveria a sua equação de movimento para essa mesma partícula? Certamente ele o fará de uma forma diferente, mas que felizmente pode ser relacionada com (2.4), através de uma transformação de coordenadas. Nessa transformação de ξ^α para x^μ , temos que as coordenadas ξ^α são funções das coordenadas x^μ . Assim, a equação (2.4) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.5)$$

multiplicando a expressão acima por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$ e usando a relação

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\lambda \quad (2.6)$$

obtemos

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.7)$$

³É o intervalo de tempo decorrido entre dois eventos medidos por um observador que encontra-se em um referencial na qual os eventos ocorrem na mesma posição. É um parâmetro invariante em relação ao qual calculamos as derivadas temporais, para que assim, grandezas físicas como a velocidade, continuem se transformando como vetores, quando submetidas a uma mudança de coordenadas.

logo, a equação de movimento no segundo sistema (de coordenadas x^μ) é

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.8)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são os coeficientes da chamada *conexão afim*, definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.9)$$

Ao fazermos uma simples mudança de coordenadas, observamos o aparecimento de um termo completamente novo. Como a única diferença entre os dois sistemas de referência considerados são os campos gravitacionais presentes, só podemos associar a segunda parcela do lado esquerdo da equação (2.8) a eles.

Enquanto no sistema de coordenadas ξ^α , a partícula descrevia seu movimento em linha reta. Devido à presença dos campos gravitacionais, ela começará a se mover ao longo de uma curva nas coordenadas x^μ . Tal curva é a solução da equação (2.8). Nessa perspectiva, pode-se interpretar a gravidade como uma força inercial.

Outro fato interessante, que reforça o que acabamos de falar, é a interpretação da equação (2.8), também conhecida na literatura [32, 33, 15] como a equação de uma geodésica sobre uma superfície curva. Dentre todas as curvas que ligam dois pontos fixos A e B de uma determinada superfície, apenas uma, denominada geodésica entre A e B , tem comprimento menor que todas as outras. A solução da equação (2.8) nos dá exatamente essa curva.

Numa tentativa de deixar o conceito de geodésica menos abstrato, podemos imaginar, por exemplo, uma partícula obrigada a mover-se em cima de uma superfície esférica. Se supormos que a tal partícula deseja ir de um ponto A até um outro B (ambos os pontos localizados sobre a superfície esférica), percorrendo a menor distância possível, ela certamente não seguirá em linha reta, pois isso significaria “entrar” na esfera, o que não é permitido. Dessa maneira, vemos que a menor distância entre dois pontos, dado a geometria do problema, não é sempre uma reta e sim uma outra curva que chamamos de geodésica, diferente para cada geometria. Para o caso da esfera, essa curva é o que chamamos de um grande círculo⁴, como se pode ver na figura 2.2.

⁴Um círculo traçado sobre a superfície de uma esfera com o mesmo perímetro de sua circunferência, dividindo-a em dois hemisférios iguais.

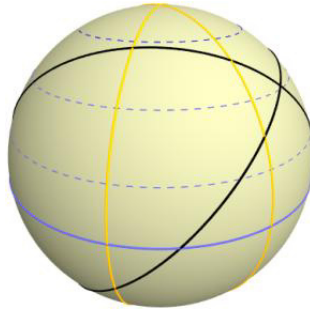


Figura 2.2 – A curva que nos dá a menor distância entre dois pontos localizados na superfície da esfera é um grande círculo [13].

Um elemento de linha invariante, também chamado de *intervalo espaço-temporal* (análogo à distância no espaço Euclidiano), é definido por

$$ds^2 = -d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.10)$$

No entanto, nosso principal interesse não é nesse objeto em si, mas em um outro, de extrema importância em RG, que aparece quando expressamos o intervalo espaço-temporal⁵ em um sistema de coordenadas arbitrário x^μ

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \right) \left(\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \right) \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (2.12)$$

é o objeto procurado. Ele é o chamado *tensor métrica*, ou também conhecido simplesmente por *métrica*. É um tensor simétrico ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) de segunda ordem, que transmite todas as informações sobre geometria do espaço-tempo. Usando-o, podemos definir noções de distâncias, volumes, ângulos e curvatura; exatamente o que faremos na seção (2.5). No momento, precisamos saber expressar a conexão afim em termos da métrica, pois sabendo a geometria do espaço-tempo, isto é, conhecendo $g_{\mu\nu}$, conheceremos $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e por meio da equação (2.8) saberemos o movimento do objeto ou partícula considerado [32].

⁵No caso do espaço euclidiano tridimensional: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

2.2.1 Relação Entre a Conexão Afim e o Tensor Métrico

Como explicado anteriormente, estamos interessados em obter uma relação entre a conexão afim e o tensor métrica, definidos respectivamente pelas equações (2.9) e (2.12). De agora em diante, usaremos sempre que necessário a notação simplificada, que foi apresentada no início desse trabalho. Nessa notação, a equação (2.12) pode ser reescrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}(\partial_\mu \xi^\alpha)(\partial_\nu \xi^\beta) \quad (2.13)$$

tomando-se a derivada com relação à x^λ e fazendo uma permutação cíclica nos índices, obtemos:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}(\partial_\lambda \partial_\mu \xi^\alpha)(\partial_\nu \xi^\beta) + \eta_{\alpha\beta}(\partial_\mu \xi^\alpha)(\partial_\lambda \partial_\nu \xi^\beta) \quad (2.14)$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = \eta_{\alpha\beta}(\partial_\nu \partial_\lambda \xi^\alpha)(\partial_\mu \xi^\beta) + \eta_{\alpha\beta}(\partial_\lambda \xi^\alpha)(\partial_\nu \partial_\mu \xi^\beta) \quad (2.15)$$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = \eta_{\alpha\beta}(\partial_\mu \partial_\nu \xi^\alpha)(\partial_\lambda \xi^\beta) + \eta_{\alpha\beta}(\partial_\nu \xi^\alpha)(\partial_\mu \partial_\lambda \xi^\beta) \quad (2.16)$$

somando as equações (2.14) e (2.15) e subtraindo a equação (2.16), ficamos com

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} = 2\eta_{\alpha\beta}(\partial_\mu \xi^\alpha)(\partial_\lambda \partial_\nu \xi^\beta) \quad (2.17)$$

De (2.9), temos que:

$$\partial_\lambda \partial_\nu \xi^\beta = (\partial_\sigma \xi^\beta) \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \quad (2.18)$$

e substituindo (2.18) em (2.17), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} &= 2\eta_{\alpha\beta}(\partial_\mu \xi^\alpha)(\partial_\sigma \xi^\beta) \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \\ &= 2g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \end{aligned} \quad (2.19)$$

Neste momento, faz-se necessário definirmos a inversa do tensor métrica $g_{\mu\nu}$. A denotaremos por $g^{\mu\nu}$ e obedecerá a seguinte relação:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\kappa} = \delta_\kappa^\mu \quad (2.20)$$

aplicando a identidade acima na equação (2.19), obtêm-se finalmente a relação procurada

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\mu}g_{\nu\lambda}) \quad (2.21)$$

O que essa equação faz é nos dizer como obter as componentes da conexão afim, uma vez conhecida a métrica. Recorreremos a esta relação com frequência no restante deste trabalho.

Outra informação conceitualmente muito importante é que a conexão afim não é um tensor. Existem duas maneira simples e diretas de se demonstrar isso: a primeira é que se o tensor é nulo num dado sistema de coordenadas, então ele também o será em todos os outros. E através das equações (2.4) e (2.8), vimos que isso não ocorre com a conexão afim. Matematicamente, podemos chegar a essa mesma conclusão submetendo a conexão a uma transformação de coordenadas que, de acordo com (2.9), deve se dar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\kappa}} \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde, usando novamente a definição (2.9), obtemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \quad (2.23)$$

se $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ fosse de fato um tensor, esperaríamos obter apenas o primeiro termo do lado direito da equação (2.23); mas existe um segundo termo, não-homogêneo, que faz com que essa transformação não seja a de um tensor. É justamente esse termo extra que garante podermos encontrar referenciais nos quais a conexão afim é nula (os referenciais inerciais) e outros nos quais ela não é (referenciais não inerciais).

2.3 Limite Newtoniano

Reformulando a lei da gravitação. Não podemos dizer que a teoria de Newton está errada e simplesmente esquecê-la. Vimos, no primeiro capítulo, os seus grandes feitos e inúmeros experimentos que comprovam a sua veracidade. A teoria de Newton é bela, simples e correta, mas infelizmente limitada. Foi isto que levou a Einstein a querer reformulá-la. Segundo diz Einstein

em [34]: *o destino mais belo que uma teoria física pode ter é quando ela abre caminho para o estabelecimento de uma teoria mais ampla, na qual continua a viver como um caso particular.* Portanto, antes de prosseguirmos no desenvolvimento dessa nova teoria da gravitação, devemos verificar se ela carrega consigo a gravitação newtoniana como caso particular.

Para isso, consideremos o caso de uma partícula movendo-se lentamente numa região permeada por um campo gravitacional fraco e estacionário. Neste caso, a equação (2.8) se reduz à

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\lambda \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.24)$$

onde, com o auxílio de (2.9) podemos escrever Γ_{00}^λ na forma

$$\Gamma_{00}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} (\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) \quad (2.25)$$

Mas, por suposição, estamos considerando o campo estacionário. Assim, todas as derivadas temporais⁶ da métrica são nulas e a equação (2.25) se escreve como

$$\Gamma_{00}^\lambda = -\frac{1}{2} g^{\lambda\nu} \partial_\nu g_{00} \quad (2.26)$$

Falta ainda usarmos a última suposição que é a do campo gravitacional ser fraco. Neste caso, devemos ter uma métrica igual à de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$) mais uma pequena perturbação ($h_{\mu\nu}$), onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Diremos então que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) em (2.26), ficamos com⁷

$$\Gamma_{00}^\lambda = -\frac{1}{2} (\eta^{\lambda\nu} - h^{\lambda\nu}) (\partial_\nu \eta_{00} + \partial_\nu h_{00}) \quad (2.28)$$

mas a perturbação é pequena, o que nos permite considerar apenas correções de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$. Lembrando também que $\eta_{\mu\nu}$ é constante e, portanto, a sua derivada temporal é nula.

⁶Lembre-se que $\partial_0 \equiv \partial/\partial t$.

⁷Temos $g^{\mu\nu} \equiv (g_{\mu\nu})^{-1} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})^{-1} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$

Assim, nos resta que

$$\Gamma_{00}^{\lambda} = -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu}\partial_{\nu}h_{00} \quad (2.29)$$

substituindo (2.29) em (2.24), encontramos que a equação de movimento, para esse caso particular, é dada por

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu}\partial_{\nu}h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (2.30)$$

Temos um conjunto de 4 equações, uma para cada valor de λ . Podemos separar essas equações em duas partes, sendo que a primeira é a parte temporal; neste caso $\lambda = 0$ e obtemos

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \text{constante} \quad (2.31)$$

A segunda parte é a espacial; neste caso $\lambda = i = 1, 2, 3$, o que implica em $\nu = j = 1, 2, 3$ e a equação (2.30) é reescrita da forma

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (2.32)$$

Como $\eta^{ij} = \delta^{ij}$, podemos escrever (2.32) na forma vetorial da seguinte maneira

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00} \quad (2.34)$$

onde nesse último passo, usamos o que obtemos na equação (2.31) para reescrevermos $d^2\mathbf{x}/d\tau^2$ como $d^2\mathbf{x}/dt^2$. Comparando o resultado obtido, equação (2.34) com o resultado da teoria newtoniana, que é

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi \quad (2.35)$$

em que ϕ é o potencial gravitacional. Concluimos que:

$$h_{00} = -2\phi + \text{constante} \quad (2.36)$$

Mas é esperado que, em regiões muito distantes da distribuição de matéria, os efeitos gravitacionais sejam desprezíveis, de tal forma que a métrica $g_{\mu\nu}$ reproduza a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. O que implica que no infinito h_{00} deva ser nulo. Já sabemos, pela teoria newtoniana, que $\phi \propto 1/r$; assim, no infinito, o potencial gravitacional é nulo. Ou seja, para que h_{00} seja igual a zero no infinito, devemos impor que a constante da equação (4.38) seja nula. Portanto

$$h_{00} = -2\phi \quad (2.37)$$

e, conseqüentemente,

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) \quad (2.38)$$

dessa maneira, estamos garantindo que a nossa nova gravitação reproduza a de Newton no limite não-relativístico. Isto é o que chamamos de *princípio da correspondência*.

É interessante que façamos algumas considerações sobre o que acabamos de obter. Como visto em [33], o potencial gravitacional ϕ é muito pequeno, da ordem de 10^{-39} na superfície de um próton, 10^{-9} na da terra, 10^{-6} na do sol e 10^{-4} na de uma anã branca. Isso torna evidente que a distorção na métrica $g_{\mu\nu}$, produzida pela gravitação, é muito fraca. Esse é um dos motivos pelos quais a lei da gravitação de Newton é viável.

Existe ainda um outro fato muito interessante a ser notado. A equação (2.38) nos mostra claramente que o potencial newtoniano contém informações apenas da componente g_{00} da métrica; deixando evidente quanta informação acerca dos campos gravitacionais a teoria de Einstein carrega, enquanto que a de Newton simplesmente deixa de lado⁸. Os resultados obtidos nessa seção também nos sugerem que a métrica e a conexão afim na teoria de Einstein se relacionam respectivamente com o potencial e o campo gravitacional da teoria newtoniana.

2.4 O princípio da covariância geral

Desde o início desse capítulo, estamos usando o princípio da equivalência para obter os efeitos gravitacionais em sistemas físicos. Esse método consiste nos seguintes passos:

⁸Isso é esperado uma vez que estamos construindo uma teoria mais geral, e portanto, espera-se que ela contenha muito mais informações do que a antiga. É válido ressaltar que a teoria de Einstein surge de um princípio que aparenta ter validade geral (o princípio da equivalência), o que nos permite pensar que tudo que resultar desta teoria terá também validade geral, ou pelo menos valerá onde o princípio valer [35].

1. Escrever as equações em um sistema de coordenadas localmente inercial;
2. Realizar uma transformação de coordenadas para encontrar as equações correspondentes em um sistema de coordenadas geral.

Poderíamos continuar a usar este mecanismo, mas ele já se demonstrou muito trabalhoso. Em vez disso, usaremos um método alternativo, muito mais elegante, conveniente e que possui o mesmo conteúdo físico. Ele é chamado de *Princípio da Covariância Geral* e nada mais é do que uma versão alternativa do princípio da equivalência. A ideia por trás da construção desse novo princípio é que as coordenadas não existem à priori na natureza, mas são apenas artifícios usados para descrevê-la e, portanto, não devem desempenhar nenhum papel na formulação das leis físicas fundamentais [36]. O Princípio da Covariância Geral afirma que uma equação física é válida em um campo gravitacional qualquer se obedecer à dois requisitos [33]:

1. Ser satisfeita na ausência de gravidade; isto é, concordar com as leis da relatividade restrita quando a métrica $g_{\mu\nu}$ for igual à de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ for a zero;
2. Possuir covariância geral; isto é, preservar a sua forma sob transformações de coordenadas gerais $x \rightarrow x'$ (e não apenas sob as transformações de Lorentz).

Suponhamos a existência de um campo gravitacional arbitrário e uma equação qualquer que satisfaça as duas condições acima, simultaneamente. A segunda condição garante que se nossa equação for verdadeira em um determinado sistema de coordenadas, então será também em todos os outros. Contudo, em qualquer ponto dado existe uma classe de referenciais, os localmente inerciais, nos quais não temos efeitos gravitacionais. Para essa classe de referenciais, a primeira condição garante que nossas equações também serão válidas. É justamente neste ponto que percebemos a relação entre os dois princípios, ou seja, não havendo como um observador saber se a aceleração, por ele sentida, surge devido ao seu referencial estar acelerado ou por existir uma força gravitacional [37].

Como veremos, esse novo princípio facilitará muito o desenvolvimento da teoria, mas se quisermos utilizá-lo, devemos ter em mente, de agora em diante, que nossas equações devem ser invariantes sob transformações de coordenadas gerais. O primeiro passo para isso é mudarmos a nossa definição de derivada, pois como será visto a seguir, a derivada de um tensor geralmente não é um tensor.

2.4.1 Derivada covariante

Vejamos como construir essa nova derivada que será uma invariante sob transformações de coordenadas. Para isso, vamos considerar um vetor contravariante A^λ que se transforma, segundo a lei

$$A'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} A^\rho \quad (2.39)$$

e tomando-se a derivada com respeito a x'^μ , obtêm-se

$$\frac{\partial A'^\lambda}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A^\rho}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A^\tau \quad (2.40)$$

Atentemos para o fato de que $\partial A^\lambda / \partial x^\mu$ não é um tensor, pois se fosse, esperaríamos obter apenas o primeiro termo do lado direito da equação (2.40). O problema está no segundo termo que destrói o comportamento tensorial.

Felizmente, mesmo $\partial A^\lambda / \partial x^\mu$ não sendo um tensor, podemos usá-lo de tal maneira a construirmos um. Para isso, retornamos à equação (2.23) e a reescrevemos como

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\kappa\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \quad (2.41)$$

onde, apenas utilizamos a identidade

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda_\nu \quad (2.42)$$

derivada em relação a x'^μ :

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} = - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \quad (2.43)$$

O próximo passo é fazer uma contração da conexão afim com o vetor contravariante A^μ , da forma que se segue

$$\begin{aligned} \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} A'^\nu &= \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\kappa\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \right] \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau} A^\tau \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \Gamma^\rho_{\kappa\tau} A^\tau - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A^\tau \end{aligned} \quad (2.44)$$

somando (2.40) à (2.44), teremos o cancelamento do termo não-homogêneo, resultando em

$$\frac{\partial A'^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} \left[\frac{\partial A^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\kappa\tau}^{\rho} A^{\tau} \right] \quad (2.45)$$

Dessa maneira, concluímos que o objeto

$$\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A^{\nu} \equiv \nabla_{\mu} A^{\lambda} \quad (2.46)$$

se transforma como um tensor. Podemos finalmente definir uma derivada com comportamento tensorial, a chamada *derivada covariante*. A equação (2.46) será a derivada covariante de um vetor contravariante que, em notação simplificada, é escrita como

$$\nabla_{\mu} A^{\lambda} \equiv \partial_{\mu} A^{\lambda} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} A^{\kappa} \quad (2.47)$$

Aplicando o mesmo procedimento para um vetor covariante A_{λ} , chegaremos à conclusão de que a derivada covariante de um vetor covariante⁹ será

$$\nabla_{\mu} A_{\lambda} \equiv \partial_{\mu} A_{\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} A_{\kappa} \quad (2.48)$$

Podemos estender essa definição a tensores de ordem mais alta. Para um tensor geral da forma (p, q) , tem-se

$$\nabla_{\mu} T_{\delta_1 \dots \delta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \partial_{\mu} T_{\delta_1 \dots \delta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} + \sum_i \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha_i} T_{\delta_1 \dots \delta_n}^{\alpha_1 \dots \rho \dots \alpha_n} - \sum_i \Gamma_{\mu\delta_i}^{\rho} T_{\delta_1 \dots \rho \dots \delta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \quad (2.49)$$

A derivada covariante, que acabamos de definir, possui propriedades semelhantes à derivada ordinária, dentre elas:

(A) Linearidade;

$$\nabla_{\lambda} (\alpha T_{\nu}^{\mu} + \beta S_{\nu}^{\mu}) = \alpha \nabla_{\lambda} T_{\nu}^{\mu} + \beta \nabla_{\lambda} S_{\nu}^{\mu} \quad (2.50)$$

⁹O termo covariante possui dois significados: um deles é o que foi visto acima, para designar a “invariância de forma”. O outro é uma das representações que designamos a um vetor [30].

(B) Regra do produto de Leibniz.

$$\nabla_\lambda(T^\mu_\nu S^\kappa) = (\nabla_\lambda T^\mu_\nu)S^\kappa + T^\mu_\nu(\nabla_\lambda S^\kappa) \quad (2.51)$$

Outro resultado de suma importância, que usaremos futuramente, é o da derivada covariante da métrica ser nula

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} = 0 \quad (2.52)$$

onde se quisermos demonstrar isto, basta que derivemos em relação x^λ à expressão (2.12). O que nos dá como resultado

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} \quad (2.53)$$

ou seja,

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} = 0 \quad (2.54)$$

A principal importância da derivada covariante reside em duas de suas propriedades [37], são elas:

1. Converter tensores em outros tensores;
2. Reduzir-se a uma derivada ordinária na ausência de gravidade, isto é, quando a conexão afim é nula.

O primeiro passo já foi dado. Mas como devemos prosseguir? Qual será o nosso guia? As propriedades acima nos dão uma pista. Elas nos dizem que devemos seguir um algoritmo simples para incluirmos efeitos gravitacionais em sistemas físicos. O primeiro passo é escrever nossas equações de acordo com a relatividade especial (que são as equações válidas na ausência de gravidade), mas substituindo a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por uma mais geral, que pode descrever espaços curvos, $g_{\mu\nu}$. Além disso, devemos substituir todas as derivadas ordinárias por derivadas covariantes. Dessa forma, as equações obtidas ao final dessas substituições possuirão covariância geral e, portanto, serão corretas também na presença de gravidade [37].

2.5 O tensor de curvatura

Como já discutido nas seções anteriores, em especial na (2.2), a gravidade está ligada à curvatura do espaço-tempo. Desta maneira, para que consigamos prosseguir na construção de uma equação de campo para a gravidade, devemos parar um momento e focar nossa atenção no problema da curvatura¹⁰. Precisamos de um objeto (um tensor) que nos diga como é a curvatura do espaço-tempo em questão e como esta muda à medida que acrescentamos gravidade. Neste momento, duas perguntas aparecem: como, exatamente, esse tensor irá entrar em nossa teoria? E de que forma devemos construí-lo? O nosso guia para responder a essas perguntas é a equação de Poisson da gravitação newtoniana [33, 38].

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (2.55)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional e ρ a densidade de matéria. O que a equação (2.55) faz é relacionar as derivadas segundas do potencial com a densidade de matéria de uma dada distribuição. Assim, uma vez resolvida (juntamente com as condições de contorno), ela nos dará a função potencial ϕ para uma dada distribuição de matéria.

A equação de Poisson da gravitação será a base para a construção das equações de campo de Einstein. O que faremos apenas na próxima seção. Mas, desde já, é necessário que se faça uma breve discussão acerca do seu conteúdo físico. No final da seção (2.3), discutimos que o potencial gravitacional ϕ da teoria newtoniana está relacionado com o tensor métrica na teoria de Einstein e a gravidade com a conexão afim que, por sua vez, está relacionada com as derivadas de primeira ordem da métrica. Uma vez que a massa (contabilizada no lado direito da equação (2.55)) gera gravidade, esperamos também que ela cause algum tipo de deformação (ou curvatura) no espaço-tempo. Portanto, é o lado esquerdo da equação (2.55) que deve estar ligado à curvatura que, por sua vez, deve se relacionar com as derivadas segundas da métrica.

A equação (2.52) nos diz para que não se utilize a derivada covariante na métrica para a construção desse tensor, pois fatalmente obteríamos um resultado nulo. Para resolver esse problema, começaremos aplicando a derivada covariante em um vetor qualquer A_λ e a aplicaremos duas vezes, para que assim apareça termos proporcionais à segunda derivada da métrica. Isso nos leva

¹⁰Problema esse que foi desenvolvido principalmente por Riemann e Gauss [33].

a um tensor de terceira ordem da forma

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\nu A_\lambda &= \partial_\mu (\nabla_\nu A_\lambda) - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \nabla_\nu A_\kappa - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \nabla_\kappa A_\lambda \\ &= \partial_\mu (\partial_\nu A_\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma A_\sigma) - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa (\partial_\nu A_\kappa - \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma A_\sigma) - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa (\partial_\kappa A_\lambda - \Gamma_{\lambda\kappa}^\sigma A_\sigma)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\nu A_\lambda &= \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda - (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma) A_\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \partial_\mu A_\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \partial_\nu A_\kappa + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma A_\sigma \\ &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \partial_\kappa A_\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \Gamma_{\lambda\kappa}^\sigma A_\sigma\end{aligned}\quad (2.56)$$

Os termos proporcionais à primeira derivada de A_λ não permitem que encontremos o tensor procurado, mas felizmente esses termos são simétricos na troca dos índices μ por ν , de modo que para eliminá-los basta tomarmos

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\lambda = \left[\partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa \Gamma_{\kappa\mu}^\sigma \right] A_\sigma \quad (2.57)$$

Temos que o lado esquerdo de (2.57) é um tensor e que A_σ (que se encontra do lado direito dessa mesma equação) é um vetor, então obrigatoriamente o termo entre colchetes também deverá ser um tensor. Como a conexão afim é formada somente pela métrica e suas derivadas primeiras, então

$$R_{\lambda\nu\mu}^\sigma \equiv \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa \Gamma_{\kappa\mu}^\sigma \quad (2.58)$$

é formado somente pela métrica e suas derivadas de primeira e segunda ordem, além de ser linear nas de segunda. Esse é o único tensor que pode ser construído com todas essas propriedades¹¹. Não nos resta outra alternativa. Esse deve ser o tensor que procurávamos e é o que passaremos a chamar de tensor de curvatura¹². O restante de suas propriedades são descritas e demonstradas no apêndice A.

Podemos ainda construir outros objetos usando o tensor de curvatura, mas para o objetivo desse capítulo, que é a obtenção das equações de campo de Einstein, precisaremos apenas de suas formas contraídas que são:

¹¹A demonstração de sua unicidade pode ser encontrada em [33], na página 133. Ela não será feita aqui, pois foge aos interesses deste trabalho.

¹²Também conhecido na literatura por tensor de curvatura de Riemann-Christoffel [32].

(A) O tensor de Ricci;

$$R_{\lambda\mu} \equiv R_{\lambda\nu\mu}^{\nu} \quad (2.59)$$

(B) Escalar de curvatura.

$$R \equiv g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} \quad (2.60)$$

as propriedades desses tensores também se encontram no apêndice [A](#).

As derivadas covariantes do tensor de curvatura satisfazem uma identidade muito importante, chamada *identidade de Bianchi*:

$$\nabla_{\rho} R_{\lambda\nu\mu}^{\sigma} + \nabla_{\mu} R_{\lambda\rho\nu}^{\sigma} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\mu\rho}^{\sigma} = 0 \quad (2.61)$$

ou, escrevendo na forma em que todos os índices fiquem covariantes¹³, teremos

$$\nabla_{\rho} R_{\sigma\lambda\nu\mu} + \nabla_{\mu} R_{\sigma\lambda\rho\nu} + \nabla_{\nu} R_{\sigma\lambda\mu\rho} = 0 \quad (2.62)$$

a demonstração dessa identidade é feita no apêndice [B](#).

Existe ainda uma relação que será muito importante na construção das equações de campo. Para obtê-la, comecemos por contrair σ com ν em (2.61) e desta forma obtêm-se

$$\nabla_{\rho} R_{\lambda\mu} - \nabla_{\mu} R_{\lambda\rho} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\mu\rho}^{\nu} = 0 \quad (2.63)$$

fazendo outra contração, dessa vez λ com μ , encontramos

$$\nabla_{\rho} R - \nabla_{\mu} R^{\mu}_{\rho} - \nabla_{\nu} R^{\nu}_{\rho} = 0 \quad (2.64)$$

¹³Isso é conseguido facilmente graças ao fato da derivada covariante da métrica ser nula, equação (2.52). Assim a métrica pode entrar em cada um dos termos da equação (2.61) e descer os índices.

multiplicando (2.64) por $g^{\rho\nu}$ e trocando os índices ρ por μ (pois são índices mudos), obtemos

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}R - 2\nabla_{\mu}R^{\mu\nu} = 0 \quad (2.65)$$

e finalmente

$$\nabla_{\mu}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = 0 \quad (2.66)$$

É exatamente a equação (2.66) que terá um papel fundamental na construção das equações de campo.

2.6 A equação de Einstein

Estamos finalmente aptos a construir a equação de campo de Einstein. Já sabemos como incluir os efeitos gravitacionais em sistemas físicos; eles são descritos pelo termo extra na equação (2.8), onde a conexão afim é obtida através de (2.21). Uma simples análise nessas equações nos permite concluir que tais efeitos só são incluídos através da métrica. Entretanto, como obteremos a métrica? Precisamos de uma equação que, dada a informação acerca da distribuição de matéria e energia, nos forneça o tensor $g_{\mu\nu}$ ponto a ponto.

Como discutido na seção anterior, uma vez conhecido a distribuição de matéria ρ , o potencial ϕ é obtido através de (2.55). No caso da gravitação einsteiniana, o potencial ϕ se relaciona com métrica $g_{\mu\nu}$ e a equação procurada deverá, dentro das condições impostas na seção (2.3), concordar com a mesma equação (2.55). Infelizmente, não há uma maneira clara de se formular precisamente as equações de campo, partindo de postulados gerais como os apresentados nas seções (2.1) e (2.4). Por isso, teremos que, inicialmente, trabalhar na aproximação newtoniana.

Como mostrado em [39], a teoria da relatividade restrita nos fez concluir que qualquer corpo, pelo simples fato de existir, tem uma energia que é proporcional à massa de repouso¹⁴. O objeto mais geral que carrega em si informação da massa, energia e momento de um determinado sistema físico é o chamado tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ e é esse objeto que tomará o lugar de ρ

¹⁴Mais precisamente temos $E = mc^2$.

na RG. A componente T_{00} para matéria não relativística é tal que

$$T_{00} \simeq \rho \quad (2.67)$$

A equação (2.55) sugere que no limite newtoniano deva ser válida a relação:

$$\nabla^2 g_{00} = \kappa T_{00} \quad (2.68)$$

substituindo (2.38) em (2.68) e comparando o resultado encontrado com a equação (2.55), obtemos o valor da constante¹⁵ κ que é

$$\kappa = -8\pi G \quad (2.69)$$

e portanto

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00} \quad (2.70)$$

Essa equação, além de ser apenas um caso limite, ainda é baseada na suposição de que um campo estacionário e fraco é gerado por matéria não relativística e isso ainda não é o que procuramos. Por outro lado, ela nos leva a pensar que se o tensor momento-energia fosse o mais geral possível (para qualquer distribuição de matéria/energia) e se os campos gravitacionais pudessem assumir qualquer intensidade, não precisando mais serem necessariamente fracos e estacionários, nossa equação deveria tomar a forma

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.71)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o chamado *tensor de Einstein*, que deverá ser uma combinação linear do tensor métrico com suas derivadas de primeira e segunda ordem¹⁶.

Na seção anterior, vimos que o tensor de curvatura, dado por (2.58), é o único objeto que pode ser construído a partir de combinação linear das derivadas de primeira e de segunda ordem do tensor métrica e ainda ser linear nas de segunda ordem. Como demonstrado no apêndice A,

¹⁵Como se pode verificar, o valor numérico de κ é da ordem de 10^{-43} no sistema MKS, o que pode ser interpretado como um indicador da grande “rigidez” do espaço-tempo.

¹⁶Lembre-se da nossa discussão na seção (2.5) sobre o lado esquerdo da equação (2.55), ela é fundamental para se entender a afirmação que acabamos de fazer sobre $G_{\mu\nu}$.

a anti-simetria de $R_{\sigma\lambda\nu\mu}$ nos permite construir somente outros dois tensores por contração que possuem essas mesmas características, são eles: o tensor de Ricci, dado por (2.59), e o escalar de curvatura, equação (2.60). Concluimos assim que a forma mais geral de $G_{\mu\nu}$ é uma combinação linear desses dois objetos, ou seja

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (2.72)$$

Como o tensor momento-energia obedece à equação da continuidade que, na forma tensorial, é escrita como

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.73)$$

então, substituindo (2.72) em (2.71) e utilizando a relação (2.73), obtemos

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = C_1 \nabla_\mu R^{\mu\nu} + C_2 g^{\mu\nu} \nabla_\mu R = 0 \quad (2.74)$$

mas de (2.66) temos

$$\nabla_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \quad (2.75)$$

e, portanto, substituindo esse resultado na equação (2.74), ficamos com

$$\left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) \nabla_\mu R = 0 \quad (2.76)$$

Assim, uma dessas condições deve ser satisfeita: $C_2 = -C_1/2$ ou $\nabla_\mu R = 0$. Automaticamente devemos rejeitar a segunda, pois usando (2.72) em (2.71) e fazendo uma contração indicial, obtemos que

$$G_\mu{}^\mu = (C_1 + 4C_2)R = -8\pi G T_\mu{}^\mu \quad (2.77)$$

onde concluimos que se $\nabla_\mu R = 0$, então $\nabla_\nu T_\mu{}^\mu$ será sempre nulo, o que é falso, quando por exemplo, consideramos o caso da matéria não homogênea e não relativística [33]. Assim, só nos

resta que $C_2 = -C_1/2$ e, conseqüentemente, a equação (2.72) toma a forma

$$G_{\mu\nu} = C \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \quad (2.78)$$

O valor de C pode ser obtido retornando ao limite newtoniano ($g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$). Nesse limite temos $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$ e, portanto, devemos considerar $|G_{ij}| \ll |G_{00}|$. Assim, de (2.78) tem-se

$$G_{ij} \simeq C \left(R_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} R \right) \simeq 0 \quad (2.79)$$

o que implica em

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2} \eta_{ij} R = \frac{1}{2} \delta_{ij} R \quad (2.80)$$

Nessa aproximação, o escalar de curvatura pode ser escrito como

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &\simeq \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &\simeq R_{ii} - R_{00} \\ &\simeq \frac{1}{2} \delta_{ii} R - R_{00} \\ &\simeq \frac{3}{2} R - R_{00} \end{aligned}$$

ou

$$R \simeq 2R_{00} \quad (2.81)$$

substituindo esse resultado na equação (2.78), onde faremos os índices $\mu, \nu = 0$, obtemos

$$G_{00} \simeq C \left(R_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} R \right) \simeq 2CR_{00} \quad (2.82)$$

Precisamos agora obter o valor de R_{00} , para isso faremos uso da equação (A.7) que foi demonstrada no apêndice A. No limite de campos fracos essa equação pode ser escrita na forma

$$R_{\sigma\lambda\nu\mu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\nu \partial_\lambda g_{\sigma\mu} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma \partial_\mu g_{\lambda\nu} \right) \quad (2.83)$$

e levando em conta o limite de campos estacionários, teremos

$$R_{0000} \simeq 0 \quad (2.84)$$

$$R_{i0j0} \simeq -\frac{1}{2}\partial_i\partial_j g_{00} \quad (2.85)$$

Da definição do tensor de Ricci, vê-se

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu} &= g^{\sigma\nu}R_{\sigma\lambda\nu\mu} \simeq \eta^{ij}R_{i\lambda j\mu} + \eta^{00}R_{0\lambda 0\mu} \\ &\simeq \delta^{ij}R_{i\lambda j\mu} - R_{0\lambda 0\mu} \\ &\simeq R_{i\lambda i\mu} - R_{0\lambda 0\mu} \end{aligned} \quad (2.86)$$

assim

$$R_{00} = R_{i0i0} - R_{0000} \simeq -\frac{1}{2}\partial_i\partial_j g_{00} \quad (2.87)$$

ou

$$R_{00} \simeq -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} \quad (2.88)$$

de (2.82) e (2.88), concluímos que

$$G_{00} \simeq -C\nabla^2 g_{00} \quad (2.89)$$

Por outro lado, era esperado que no limite de campos fracos, estacionários e produzidos por matéria não relativística, tivéssemos

$$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00} \quad (2.90)$$

ou seja $C = -1$. Aplicando esse resultado em (2.78) e redefinindo o tensor de Einstein como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.91)$$

então, conseqüentemente, obtemos que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.92)$$

ou simplesmente

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.93)$$

Essa é a chamada *equação de Einstein* e constitui um conjunto de 10 equações diferenciais parciais não lineares em $g_{\mu\nu}$. Com essa equação é possível obter a métrica $g_{\mu\nu}$, quando conhecido o tensor momento-energia do sistema físico em questão. Dessa forma, saberemos como o espaço-tempo tem sua estrutura geométrica modificada pela presença de matéria¹⁷.

Vale ressaltar que as equações de campo da RG são consideravelmente mais complexas do que as equações de campo presentes na física clássica, como por exemplo as equações de Maxwell do eletromagnetismo. Tal complexidade surge por causa da natureza não-linear do campo gravitacional. Enquanto no eletromagnetismo as equações de Maxwell são lineares justamente por causa do campo eletromagnético não transportar carga e não interagir consigo próprio. Em uma teoria de campo efetiva, o campo gravitacional é portador de energia¹⁸ e momento e, portanto, acaba gerando auto-interação, uma vez que no contexto da relatividade, energia e momento, além da massa, também são fontes de campo gravitacional.

2.6.1 Transformação de calibre

O tensor de Einstein, dado por (2.91), é simétrico (pois $R_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ são simétricos) e o fato de trabalharmos num espaço-tempo quadridimensional implica que ele possui apenas 10 componentes independentes, da mesma maneira que a métrica $g_{\mu\nu}$. Portanto, a equação (2.92) consiste em um conjunto de dez equações algebricamente independentes. Poderíamos supor que a equação de Einstein acrescida das condições de contorno, seriam suficientes para que determinemos a métrica univocamente, mas isso não ocorre, pois as dez componentes de $G_{\mu\nu}$ estão relacionadas

¹⁷Não discutiremos a inclusão da constante cosmológica. Considerações acerca desta podem ser encontradas em [32], [33] ou [16].

¹⁸Deve-se ter cuidado com essa afirmação. A definição de energia para o campo gravitacional é uma questão bastante delicada, discutiremos isso no capítulo 4.

pela identidade de Bianchi

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0 \tag{2.94}$$

formando assim um conjunto de quatro identidades diferenciais que devem ser respeitadas.

Como consequência, o nosso conjunto de dez equações funcionalmente independentes se reduz apenas em seis, deixando-nos ainda com quatro graus de liberdade na determinação das dez componentes de $g_{\mu\nu}$. É importante entender que esses graus de liberdade correspondem ao fato de que se $g_{\mu\nu}$ é solução de (2.92), então fazendo-se uma transformação de coordenadas gerais ($x \rightarrow x'$) e obtendo uma nova métrica $g'_{\mu\nu}$ que, por sua vez, também será solução de (2.92).

No eletromagnetismo, tínhamos um problema parecido, que era determinar univocamente o quadripotencial¹⁹ A_{μ} , através das quatro equações de Maxwell. Tal problema só era resolvido quando adotávamos um gauge particular²⁰. O problema da unicidade da métrica pode ser resolvida de forma semelhante, basta simplesmente que adotemos um sistema de coordenadas específico, que será o nosso gauge. É a escolha desse sistema (que pode ser expressa por quatro condições), em adição às seis equações independentes que já possuímos devido à (2.92), que nos permite determinar a métrica univocamente. Voltaremos a esse assunto no próximo capítulo, quando se fará necessário adotarmos um gauge.

¹⁹ $A_{\mu} = (\phi, \mathbf{A})$, onde ϕ é o potencial escalar e \mathbf{A} o potencial vetor.

²⁰Como por exemplo, $\square\phi + \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0$, o chamado gauge de Lorentz.

Capítulo 3

Teoria da perturbação

Neste capítulo, abordaremos uma solução para a equação de Einstein que descreve as chamadas ondas gravitacionais. Primeiramente, usaremos o *método perturbativo* que consiste, neste caso, em escrevermos a métrica $g_{\mu\nu}$ como a de Minkowski mais uma pequena perturbação $h_{\mu\nu}$; substituir essa métrica perturbada na equação de Einstein e então linearizá-la, de modo a obter a perturbação em função de algum parâmetro ou classe de parâmetros. No regime linear, veremos que tal perturbação obedece a uma equação de onda e estudaremos as implicações físicas disso.

3.1 A equação de Einstein no regime linear

A teoria linearizada da gravitação é baseada no pressuposto de que sobre regiões inteiras do espaço-tempo e em qualquer ponto na vizinhança das fontes gravitacionais o campo é fraco e a métrica se desvia apenas levemente da de Minkowski [40]. O que torna essa suposição válida, é o fato de encontrarmos frequentemente na natureza situações nas quais a distribuição de matéria é cercada pelo vácuo e os corpos mais próximos estão muito afastados; de forma que o campo gravitacional pode ser tido como fraco pelo menos em uma região intermediária onde a métrica é a minkowskiana mais uma pequena perturbação. Tal região é conhecida como *zona de campo distante* (ou *far field*) e em geral o estudo das soluções ondulatórias das equações de campo são restritos às soluções que exibem tal região.

Matematicamente, a aproximação mencionada acima é descrita como uma perturbação linear

de primeira ordem na métrica de Minkowski¹, na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. A inversa da métrica fica dada por

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Pode-se interpretar a versão linearizada da RG (onde consideramos apenas efeitos de até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$), como uma teoria que descreve a propagação da perturbação ao longo de um espaço-tempo minkowskiano² [16]. Para compreendermos melhor a propagação dessa perturbação, devemos encontrar as equações de movimento que regem esse comportamento. Para isso, examinaremos a equação de Einstein no regime linear. Iniciemos então pela conexão afim, dada por (2.21), que neste regime é escrita como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\nu}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_{\nu}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

vemos que os coeficientes da conexão afim são quantidades de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$. Portanto, ao calcularmos o tensor de curvatura, equação (2.58), podemos negligenciar os termos $\Gamma\Gamma$ e a única contribuição será das derivadas de Γ , obtendo assim

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= g_{\mu\lambda}R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma} \\ &= \eta_{\mu\lambda}(\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}) \\ &= \frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda}\eta^{\lambda\tau}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\tau\sigma} - \partial_{\rho}\partial_{\tau}h_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\tau\rho} + \partial_{\sigma}\partial_{\tau}h_{\nu\rho}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\sigma}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹Esse fato também nos permitirá usar $\eta_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu}$ para levantar e descer índices, respectivamente.

²Estamos considerando pequenas perturbações apenas sobre o espaço-tempo de Minkowski e isso não precisa ser sempre assim. Poderíamos, por exemplo, considerar essas mesmas perturbações sobre um outro espaço-tempo qualquer de métrica $g_{\mu\nu}^0$, e para esses casos escreveríamos nossa métrica perturbada como $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}$. Obtendo assim uma teoria que descreve a propagação da perturbação ao longo de um espaço-tempo de métrica $g_{\mu\nu}^0$. Essa abordagem é necessária, por exemplo, na cosmologia.

e, através de uma contração dos índices μ e ρ , obtemos o tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma} &= g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} (\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h^\mu_\sigma + \partial_\mu \partial_\sigma h^\mu_\nu - \partial_\sigma \partial_\nu h - \partial_\mu \partial^\mu h_{\nu\sigma}) \end{aligned}$$

ou

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) \quad (3.5)$$

que como esperado é um tensor simétrico. Fazendo uma nova contração, mas dessa vez no tensor de Ricci, obtemos o escalar de curvatura

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^{\sigma\nu} + \partial_\sigma \partial_\mu h^{\sigma\mu} - \partial_\mu \partial^\mu h - \square h) \end{aligned}$$

e assim

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \quad (3.6)$$

substituindo (3.1), (3.5) e (3.6) em (2.91) obtemos o tensor de Einstein linearizado

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} - \eta_{\mu\nu} \square h) \end{aligned} \quad (3.7)$$

e a equação de campo linearizada fica portanto

$$\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} - \eta_{\mu\nu} \square h = 16\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia, calculado na ordem zero em $h_{\mu\nu}$. Não incluímos correções de alta ordem em $T_{\mu\nu}$ pois a quantidade de energia e momento devem ser muito pequena no

limite de campos fracos [16]. Em outras palavras, os termos não nulos de ordem mais baixa do tensor momento-energia são da mesma ordem de magnitude que a perturbação. Além disso, para ordens baixas, a lei de conservação dada por (2.73), se reduz à $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Com as equações de campo linearizadas em mãos, estamos quase prontos para começar a resolvê-las. Entretanto, ainda, devemos lidar com a questão da invariância de gauge.

3.1.1 Invariância de calibre

Como explicado anteriormente, o problema da invariância de gauge aparece porque a procura por uma métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ não especifica completamente o sistema de coordenadas no espaço-tempo; podemos ter outros sistemas de coordenadas em que a métrica continue a ser escrita como a de Minkowski acrescida de uma pequena perturbação, mas a perturbação será diferente. Assim, a decomposição da métrica como feita em (3.1) não é unívoca.

Não devemos esperar, portanto, que as equações de campo nos deem uma única solução, pois qualquer solução obtida dessas equações sempre pode gerar outras através de uma transformação de coordenadas (tal característica é assegurada pelo princípio da covariância geral). Precisamos então especificar de maneira unívoca nossa perturbação $h_{\mu\nu}$. Segundo [16], a transformação de coordenadas mais geral que deixa o campo fraco é da forma³

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x) \quad (3.9)$$

onde $\partial\xi^\mu/\partial x^\nu$ é, no máximo, da mesma ordem de magnitude que $h_{\mu\nu}$. A métrica no novo sistema de coordenadas (as coordenadas com linha) é dada por

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} g^{\lambda\rho} \quad (3.10)$$

usando (3.2) e (3.9) em (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} \eta'^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} &= \left(\delta_\lambda^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \left(\delta_\rho^\nu - \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho} \right) (\eta^{\lambda\rho} - h^{\lambda\rho}) \\ &\simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} - \delta_\lambda^\mu \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho} - \delta_\rho^\nu \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda} \\ &\simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \end{aligned} \quad (3.11)$$

³Onde o sinal negativo é apenas uma convenção adotada.

e assim

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} \quad (3.12)$$

onde $\xi_\mu = \eta_{\mu\nu}\xi^\nu$. A equação (3.12) é a chamada *transformação de gauge para a teoria linearizada*, e a invariância da teoria perante estas transformações é a chamada *invariância de gauge*. Pode-se provar, por inspeção direta, que essa transformação deixa o tensor de curvatura, dado por (3.4), invariante

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = & \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu\partial_\mu\xi_\sigma + \partial_\rho\partial_\nu\partial_\sigma\xi_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\nu\xi_\rho + \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\rho\xi_\nu \\ & - \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\mu\xi_\rho - \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\rho\xi_\mu - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\nu\xi_\sigma - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\sigma\xi_\nu) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

A física do nosso problema está principalmente no tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, pois nele é que está contida toda a informação sobre a curvatura do espaço-tempo, e como vimos é um invariante sobre a transformação (3.12). Consequentemente, as equações de campo dadas por (3.8), também serão invariantes sobre a mesma transformação⁴. Assim, fixando as coordenadas ξ^μ , estaremos especificando univocamente nossa perturbação e resolvendo definitivamente o problema da invariância de gauge. Voltaremos a essa discussão na próxima seção.

3.2 Graus de liberdade

De posse do tensor de Einstein linearizado, equação (3.7), e a expressão (3.12) para os efeitos da transformação de gauge, poderíamos imediatamente escolher um sistema de coordenadas apropriado e assim resolver a equação de Einstein. Contudo, será de grande enriquecimento conceitual discutirmos melhor a física por detrás de cada uma das componentes da perturbação $h_{\mu\nu}$; dessa maneira poderemos acumular *insights* físicos, alguns até que nos auxiliaram na escolha de coordenadas apropriadas para resolvermos a equação (3.8).

Nossa perturbação $h_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico de rank 2 e a sua decomposição dar-se-á da

⁴Essa invariância que estamos falando é semelhante a invariância de gauge do eletromagnetismo. Na teoria eletromagnética a física está contida nos campos eletromagnéticos, que são geralmente escritos em termos do quadripotencial A^μ . O problema é que o quadripotencial não é unívoco (diferentes quadripotenciais podem gerar os mesmos campos), então, resolvemos o problema fixando-o através da transformação $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\lambda$. No caso da RG, a física está contida no tensor de curvatura, que por sua vez, é escrito em termos da métrica. Dessa vez, o problema é que a métrica não é unívoca, então a fixamos através da transformação (3.12), resolvendo assim a questão.

seguinte forma: componente 00 um escalar, as componentes $0i$ (que são iguais às componentes $i0$) formando um trivetor e as componentes ij formando um tensor simétrico que representa a parte espacial da perturbação. Por razões que apareceram mais à frente, ainda iremos decompor a parte espacial em outras duas: a parte com traço e a sem traço. Matematicamente, escrevemos⁵

$$h_{00} = -2\phi \quad (3.14)$$

$$h_{0i} = \omega_i \quad (3.15)$$

$$h_{ij} = 2s_{ij} - 2\psi\delta_{ij} \quad (3.16)$$

onde ψ é a parte que contém o traço de h_{ij} , enquanto s_{ij} é a parte sem traço. Assim, com um rápido processamento algébrico na equação (3.16), chegamos à conclusão que

$$\psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij} \quad (3.17)$$

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{mn}h_{mn}\delta_{ij}\right) \quad (3.18)$$

e dessa maneira a métrica como um todo é escrita na forma

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + 2\omega_i dt dx^i + [2s_{ij} + (1 - 2\psi)\delta_{ij}]dx^i dx^j \quad (3.19)$$

Até agora não fizemos nada de novo, apenas definimos a notação que será utilizada. De fato, algumas vezes a decomposição das componentes espaciais em partes com e sem traço não irá nos ajudar e é por isso que, por enquanto, contiuremos a usar h_{ij} no lugar de s_{ij} e ψ . Apenas quando formos trabalhar com o tensor de Ricci e consequentemente com as equações de campo é que essa diferenciação vai ser fundamental para chegarmos à uma conclusão muito importante: o tensor sem traço s_{ij} , conhecido na literatura por *strain*, é quem irá conter a radiação gravitacional [15, 16].

Como foi dito, procuraremos agora obter algum sentimento sobre a física desses diferentes campos na métrica perturbada. Para isso, vamos considerar o movimento de uma partícula teste, como descrito pela a equação da geodésica (2.8). Nosso objetivo inicial é descrever esse movimento, saber o comportamento da partícula quando solta numa região de espaço-tempo plano no qual existe apenas uma pequena perturbação $h_{\mu\nu}$. Primeiramente, calculamos as componentes

⁵Como mostrado no capítulo anterior a componente 00 é dada pela expressão (2.37).

da conexão afim usando (3.3) e encontramos que

$$\Gamma_{00}^0 = \partial_0 \phi \quad (3.20)$$

$$\Gamma_{00}^i = \partial_i \phi + \partial_0 \omega_i \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{j0}^0 = \partial_j \phi \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{j0}^i = \partial_{[j} \omega_{i]} + \frac{1}{2} \partial_0 h_{ij} \quad (3.23)$$

$$\Gamma_{jk}^0 = \frac{1}{2} \partial_0 h_{jk} - \partial_{(j} \omega_{k)} \quad (3.24)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \partial_{(j} h_{k)i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \quad (3.25)$$

De posse delas, estamos aptos a escrever a equação da geodésica. No entanto, será conveniente reescrevê-la em termos do quadrimomento $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ (onde $\lambda = \tau/m$ e m é a massa da partícula teste), no qual

$$p^0 = \frac{dt}{d\lambda} = E \quad (3.26)$$

$$p^i = \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx^i}{dt} = E v^i \quad (3.27)$$

onde E é a energia e v^i é a velocidade da partícula na i -ésima direção. Assim, em termos do quadrimomento a equação (2.8) pode ser escrita como

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu p^\rho p^\sigma = 0 \quad (3.28)$$

ou ainda

$$\frac{dp^\mu}{dt} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{p^\rho p^\sigma}{E} \quad (3.29)$$

Uma rápida comparação com a segunda lei de Newton é suficiente para nos mostrar que o lado direito da equação (3.29) é o termo de força, [16]. A componente $\mu = 0$ dessa mesma equação descreve a evolução da energia

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{E} \left(\Gamma_{00}^0 p^0 p^0 + \Gamma_{j0}^0 p^j p^0 + \Gamma_{0j}^0 p^0 p^j + \Gamma_{jk}^0 p^j p^k \right) \\ &= -E \left[\partial_0 \phi + 2v^k \partial_k \phi - (\partial_{(j} \omega_{k)}) - \frac{1}{2} \partial_0 h_{jk} v^j v^k \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

e como podemos ver, ela não se conserva. Vale ressaltar que $E = p^0 = m\gamma$ inclui apenas a energia de repouso da partícula (e, no caso de baixas velocidades, é a energia de repouso mais a cinética) e não temos energia das interações com o campo gravitacional.

Nas componentes espaciais, $\mu = i$, a equação (3.29) fica

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{dt} &= -\frac{1}{E} \left(\Gamma_{00}^i p^0 p^0 + \Gamma_{j0}^i p^j p^0 + \Gamma_{0j}^i p^0 p^j + \Gamma_{jk}^i p^j p^k \right) \\ &= -E \left[\partial_i \phi + \partial_0 \omega_i + (2\partial_{[i} \omega_{j]} + \partial_0 h_{ij}) v^j + \left(\partial_{(j} h_{k)i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \right) v^j v^k \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

para uma melhor interpretação física é conveniente definirmos os campos *gravito-elétrico* e *gravito-magnético*, respectivamente como

$$G^i \equiv -\partial_i \phi - \partial_0 \omega_i \quad (3.32)$$

$$H^i \equiv (\nabla \times \omega)^i = \epsilon^{ijk} \partial_j \omega_k \quad (3.33)$$

tais nomes são justificados ao compararmos a definição acima com a definição dos campos elétricos e magnéticos em termos do potencial escalar e potencial vetor. Neste caso, temos que ϕ atua como potencial escalar gravitacional (como esperado) e ω_k , por sua vez, atua como o potencial vetor gravitacional. Essa é a essência desses termos. Assim, reescrevendo (3.31) em função dos campos *gravito-eletromagnéticos*, teremos

$$\frac{dp^i}{dt} = E \left[G^i + (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^i - 2(\partial_0 h_{ij}) v^j + \left(\partial_{(j} h_{k)i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \right) v^j v^k \right] \quad (3.34)$$

Observando atentamente a equação acima, podemos ver que os dois primeiros termos do lado direito, que descrevem como a partícula teste se move ao longo de uma linha geodésica, possuem uma aparência incrivelmente semelhante ao da força de Lorentz do eletromagnetismo. Observando ainda a mesma equação, detectamos acoplamentos da parte espacial da perturbação (h_{ij}) com termos lineares e quadráticos em v^i . Tais termos extras dependem da situação física considerada⁶.

O estudo que acabamos de fazer nos permitiu interpretar melhor dois dos três campos presentes na perturbação (ϕ e ω_i); mas ainda não concluímos nada sobre a parte espacial h_{ij} . A física, por trás desse último, aparecerá ao discutirmos as equações de campo da perturbação (3.8), que é

⁶Se tomarmos velocidades muito baixas, por exemplo, então $\frac{dp}{dt} \simeq E [\mathbf{G} + (\mathbf{v} \times \mathbf{H})]$ e tudo se passa como se a partícula estivesse sob a ação de uma força de Lorentz da gravitação.

a própria equação de Einstein linearizada. De agora em diante faremos a distinção entre a parte com traço (ψ) e a sem traço (s_{ij}) de h_{ij} . Usando (3.5), as componentes do tensor de Ricci podem ser escritas como

$$R_{00} = \nabla^2 \phi + \partial_0 \partial_k \omega^k + 3\partial_0^2 \psi \quad (3.35)$$

$$R_{0j} = \frac{1}{2} \partial_j \partial_k \omega^k + 2\partial_0 \partial_j \psi + \partial_0 \partial_k s_j^k - \frac{1}{2} \nabla^2 \omega_j \quad (3.36)$$

$$R_{ij} = 2\partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k + \square \psi \delta_{ij} - \square s_{ij} - \partial_i \partial_j (\phi - \psi) - \partial_0 \partial_{(i} \omega_{j)} \quad (3.37)$$

onde $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ é o laplaciano no espaço flat tridimensional. Através de (3.6) obtemos o escalar de Ricci⁷

$$\begin{aligned} R &= 2\partial_i \partial_j (s^{ij} - \psi \delta^{ij}) - 2\partial_0 \partial_i \omega^i - 2\nabla^2 \phi + 6\nabla^2 \psi - 6\partial_0^2 \psi \\ &= 2\partial_i \partial_j s^{ij} - 2\partial_0 \partial_i \omega^i + 4\nabla^2 \psi - 2\nabla^2 \phi - 6\partial_0^2 \psi \end{aligned} \quad (3.38)$$

e substituindo esses resultados em (2.91) determinamos o tensor de Einstein, que em componentes fica

$$G_{00} = 2\nabla^2 \psi + \partial_k \partial_l s^{kl} \quad (3.39)$$

$$G_{0j} = 2\partial_0 \partial_j \psi + \partial_0 \partial_k s_j^k + \frac{1}{2} \partial_j \partial_k \omega^k - \frac{1}{2} \nabla^2 \omega_j \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= (\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) (\phi - \psi) + \delta_{ij} \partial_0 \partial_k \omega^k - \partial_0 \partial_{(i} \omega_{j)} \\ &\quad + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \psi - \square s_{ij} + 2\partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k - \delta_{ij} \partial_k \partial_l s^{kl} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Agora, podemos finalmente tirar algumas conclusões importantes. Usando a equação de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, veremos que apenas alguns componentes da métrica são verdadeiros graus de liberdade (ou, por motivos que aparecerão mais tarde, também são chamados de graus de liberdade de propagação) do campo gravitacional. As componentes restantes obedecerão a restrições que serão determinadas em termos dos outros campos. Para confirmarmos a veracidade dessa afirmação vamos começar analisando $G_{00} = 8\pi G T_{00}$. Para isso, usamos a equação (3.39)

⁷Onde usamos $h = h^\mu{}_\mu = 2\phi - 6\psi$, e portanto, $\square h = 2\square\phi - 6\square\psi = 2\nabla^2\phi - 6\nabla^2\psi + 6\partial_0^2\psi$.

e escrevemos

$$\nabla^2\psi = 4\pi GT_{00} - \frac{1}{2}\partial_k\partial_l s^{kl} \quad (3.42)$$

se soubermos o valor de T_{00} e s_{ij} em qualquer instante de tempo, como também as condições de contorno no infinito espacial, podemos determinar ψ através de (3.42). Portanto, ψ não é por si só um grau de liberdade de propagação; ele é determinado pelo tensor momento-energia e o tensor s_{ij} . Analisemos agora $G_{0j} = 8\pi GT_{0j}$, usando a expressão (3.40), podemos escrever

$$(\delta_{jk}\nabla^2 - \partial_j\partial_k)\omega^k = -16\pi GT_{0j} + 4\partial_0\partial_j\psi + 2\partial_0\partial_k s_j^k \quad (3.43)$$

assim, da mesma forma, se conhecermos o valor do tensor momento-energia e de s_{ij} , podemos determinar ψ e, conseqüentemente, determinaremos ω^i usando a equação (3.43). Portanto, ω^i também não é por si só um grau de liberdade de propagação. Resta-nos apenas analisar $G_{ij} = 8\pi T_{ij}$ e é com essa intenção que faremos uso de (3.41), para assim escrever

$$\begin{aligned} (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\phi &= 8\pi GT_{ij} + (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j - 2\delta_{ij}\partial_0^2)\psi \\ &\quad - \delta_{ij}\partial_0\partial_k\omega^k + \partial_0\partial_{(i}\omega_{j)} + \square s_{ij} - 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl} \end{aligned} \quad (3.44)$$

o que nos leva a concluir que ϕ não é um grau de liberdade, mas apenas uma função dos outros campos. Dessa maneira, chegamos à inevitável conclusão de que o único grau de liberdade de propagação nas equações de Einstein é o tensor sem traço s_{ij} . Na próxima seção, veremos que tal tensor é que será utilizado para descrever as ondas gravitacionais. Todas as outras componentes de $h_{\mu\nu}$ são determinadas em termos de s_{ij} e o campo de matéria.

3.2.1 Fixação de calibre

Na seção passada, mostramos como as transformações de gauge $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$ são geradas por um campo vetorial ξ^μ . Vejamos como cada uma das componentes da métrica são

transformadas de acordo com (3.12), a começar pelo potencial gravitacional ϕ :

$$\begin{aligned} h'_{00} &= h_{00} + \partial_0 \xi_0 + \partial_0 \xi_0 \\ -2\phi' &= -2\phi - 2\partial^0 \xi_0 \\ \phi' &= \phi + \partial_0 \xi^0 \end{aligned}$$

logo

$$\phi \rightarrow \phi + \partial_0 \xi^0 \quad (3.45)$$

aplicando-se o mesmo procedimento para os outros campos, obtemos

$$\omega_i \rightarrow \omega_i + \partial_0 \xi^i - \partial_i \xi^0 \quad (3.46)$$

$$\psi \rightarrow \psi - \frac{1}{3} \partial_i \xi^i \quad (3.47)$$

$$s_{ij} \rightarrow s_{ij} + \partial_{(i} \xi_{j)} - \frac{1}{3} \partial_k \xi^k \delta_{ij} \quad (3.48)$$

Enquanto na teoria eletromagnética, precisamos fixar os potenciais através de alguma condição, aqui precisaremos fixar o tensor s_{ij} . O problema é que existem várias escolhas possíveis de gauge, cada uma mais apropriada para uma dada circunstância; algumas delas são inclusive comentadas em [16]. A nossa escolha será por aquela que simplifique o máximo possível nossas equações de campo e é por esse motivo que escolheremos o chamado *gauge transverso*⁸, que é bastante semelhante ao gauge de Coulomb do eletromagnetismo. Nesse gauge impomos que s_{ij} seja espacialmente transverso, matematicamente isso é escrito como

$$\partial_i s^{ij} = 0 \quad (3.49)$$

⁸O significado desse nome torna-se imediato quando tomamos como exemplo o caso do potencial vetor. No eletromagnetismo geralmente escrevemos $\mathbf{A} = \mathbf{A}_t + \mathbf{A}_l$, onde \mathbf{A}_t e \mathbf{A}_l são, respectivamente, as partes transversal e longitudinal de \mathbf{A} , e que obedecem as condições: $\nabla \cdot \mathbf{A}_t = 0$ e $\nabla \times \mathbf{A}_l = 0$. Quando impomos o gauge de Coulomb, ou seja, que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, isso implica imediatamente que $\nabla \cdot \mathbf{A}_l = 0$; juntando isso, ao fato de que geralmente no infinito \mathbf{A}_l tende a zero, temos que $\mathbf{A}_l = 0$. Portanto o que esse gauge faz é anular a componente longitudinal do potencial vetor, e é por isso que muitas vezes o gauge de Coulomb é também chamado de gauge transverso. A mesma ideia se aplica ao tensor s_{ij} , isto é, ao fazermos $\partial_i s^{ij} = 0$ estamos anulando todas as suas componentes longitudinais e deixando apenas as transversais.

e isto é possível desde que ξ^j satisfaça

$$\nabla^2 \xi^j + \frac{1}{3} \partial_j \partial_i \xi^i = -2 \partial_i s^{ij} \quad (3.50)$$

No entanto, vemos que ξ^0 ainda não está determinado; assim, podemos usar esse grau de liberdade restante para obrigar que o vetor perturbação ω_i seja também transversal, isto é

$$\partial_i \omega^i = 0 \quad (3.51)$$

para isso basta que ξ^0 satisfaça

$$\nabla^2 \xi^0 = \partial_i \omega^i + \partial_0 \partial_i \xi^i \quad (3.52)$$

De fato, as equações (3.50) e (3.52) ainda não fixam completamente o valor de ξ^μ ; pois ambas são equações diferenciais parciais de segunda ordem e requerem condições de contorno para que nos deem soluções únicas. Felizmente, para os propósitos desse trabalho é suficiente que as soluções sempre existam e não nos preocuparemos em encontrá-las. As condições (3.49) e (3.51) juntas é o que definem o gauge transverso e nele temos que (3.42), (3.43) e (3.44) tomam a forma

$$G_{00} = 2\nabla^2 \psi = 8\pi G T_{00} \quad (3.53)$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \omega_j + 2\partial_0 \partial_j \psi = 8\pi G T_{0j} \quad (3.54)$$

$$G_{ij} = (\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j)(\phi - \psi) + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \psi - \partial_0 \partial_{(i} \omega_{j)} - \square s_{ij} = 8\pi G T_{ij} \quad (3.55)$$

O que acabamos de fazer foi aproveitar-se do fato de nossas equações de campo serem invariantes de gauge para usar os graus de liberdade da nossa teoria, ou seja, a liberdade que temos no tensor s_{ij} , para reescrevê-las de forma mais simplificada. À primeira vista nos parece que essas simplificações não serão tão úteis, porém, como veremos na próxima seção, elas nos trarão vários benefícios. Passaremos agora a resolver as equações (3.53), (3.54) e (3.55) na ausência de fontes.

3.3 Solução das equações de campo de Einstein no regime linear

Vamos enfim começar a resolver as equações de campo de Einstein no regime linear. Em outras palavras, o que vamos fazer é estudar a livre propagação dos graus de liberdade do campo gravitacional. Inicialmente tal estudo será feito desconsiderando a existência de fontes locais. Portanto, retornemos às equações linearizadas no gauge transverso dadas por (3.53) à (3.55). Como foi dito nessa primeira abordagem, vamos considerar estar situados numa região do espaço-tempo longe de qualquer tipo de distribuição de matéria. Assim, $T_{\mu\nu} = 0$ e no infinito devemos ter $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$, ou seja, $h_{\mu\nu} = 0$. Nesse contexto a equação (3.53) se reduz à

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{3.56}$$

essa equação acrescida da condição de contorno no infinito nos garante que $\psi = 0$. Uma análise semelhante em (3.54) nos permite escrever

$$\nabla^2\omega_j = 0 \tag{3.57}$$

e portanto $\omega_j = 0$. Tomando-se o traço da equação (3.55) obtemos

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{3.58}$$

o que implica em $\phi = 0$. Resta-nos apenas estudar o que ocorre com a parte sem traço da equação (3.55), o que nos dá

$$\square s_{ij} = 0 \tag{3.59}$$

que é uma equação de onda para o tensor s_{ij} .

Embora tenha sido conveniente trabalharmos com s_{ij} até agora, é mais comum na literatura [15, 16, 33] encontrarmos expressões escritas em termos da métrica perturbada $h_{\mu\nu}$. Felizmente, como acabamos de ver, os termos ψ , ϕ e ω_j são todos nulos, restando assim apenas o tensor sem traço s_{ij} , que também é transverso (por conta do gauge adotado). Ao trabalharmos com $h_{\mu\nu}$, tal gauge passa a ser chamado de *gauge transverso e sem traço (TT)* e escrevemos

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 2s_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

assim, a equação de movimento (4.50) torna-se

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (3.60)$$

onde, mantendo-se em mente que $h_{\mu\nu}^{TT}$ é puramente espacial, transverso e possui traço nulo, então

$$h_{0\nu}^{TT} = 0 \quad (3.61)$$

$$\partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.62)$$

$$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (3.63)$$

Nosso problema então passa a ser encontrar soluções para a equação de onda (3.60), questão essa bastante parecida com o que ocorre no eletromagnetismo. Felizmente, soluções para essa equação já são bem conhecidas e bastante difundidas na literatura; são as chamadas *soluções de onda plana*⁹, matematicamente escritas como¹⁰

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (3.64)$$

onde $C_{\mu\nu}$ é uma constante que deve ser simétrica, puramente espacial e possuir traço nulo, ou seja

$$C_{\mu\nu} = C_{\nu\mu} \quad (3.65)$$

$$C_{0\nu} = 0 \quad (3.66)$$

$$\eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 0 \quad (3.67)$$

⁹O nome *plana* se deve ao fato de as soluções serem uniformes sobre todos os planos perpendiculares à direção de propagação da onda.

¹⁰Claramente $e^{ik_\sigma x^\sigma}$ é complexo, enquanto $h_{\mu\nu}^{TT}$ é real; portanto carregamos as partes real e imaginária nas contas e no final de todos os cálculos a nosso solução será somente a parte real.

e k_σ é o quadrivetor onda, tal que a componente tipo tempo é a frequência angular ω e as tipo espaço são as componentes do vetor de onda, isto é, $k^\sigma = (\omega, k^1, k^2, k^3)$. Substituindo (3.64) em (3.60) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \square h_{\mu\nu}^{TT} \\
&= \eta^{\tau\sigma} \partial_\tau \partial_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} \\
&= \eta^{\tau\sigma} \partial_\tau (ik_\sigma h_{\mu\nu}^{TT}) \\
&= k_\sigma k^\sigma h_{\mu\nu}^{TT}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Assim, para que (3.64) seja realmente solução de (3.60) um dos termos acima deve ser nulo. Como estamos interessados em soluções não-triviais, devemos impor que

$$k_\sigma k^\sigma = 0 \tag{3.69}$$

que é equivalente à

$$\omega^2 = \delta_{ij} k^i k^j \tag{3.70}$$

o que nos permite concluir que tais ondas devem se propagar à velocidade da luz¹¹.

Com efeito, vemos que essas perturbações no espaço-tempo se propagam como uma onda à velocidade da luz, e é exatamente por isso que recebem o nome de ondas gravitacionais. Vale ressaltar também que nossa solução está longe de ser a mais geral, pois qualquer combinação linear de ondas planas também gerará outra solução, mas por enquanto, ela nos será suficiente. O que precisamos no momento é garantir que a perturbação seja transversal, isso significa que

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} \\
&= iC^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}
\end{aligned}$$

o que é verdade apenas se

$$k_\mu C^{\mu\nu} = 0 \tag{3.71}$$

¹¹Se não tivéssemos tomado $c = 1$ teríamos $\omega^2 = c^2 \delta_{ij} k^i k^j$, ou seja, a velocidade de propagação da onda é c que é a velocidade da luz.

implicando que o quadri vetor onda deve ser ortogonal à $C^{\mu\nu}$.

Geralmente tem-se o costume, principalmente no eletromagnetismo, de escolher o eixo z como a direção de propagação das ondas. Aqui diremos que nossa perturbação se propaga na direção x^3 e assim devemos ter

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, k^3) = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (3.72)$$

neste caso, usando as condições (3.71) e (3.66) encontramos que

$$C_{3\nu} = 0 \quad (3.73)$$

Levando-se em consideração que $C_{\mu\nu}$ é simétrico, puramente espacial, possui traço nulo e respeita a condição (3.73), a sua forma mais geral é

$$C_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e com isso vemos que nossa onda fica completamente caracterizada por apenas dois números h_\times e h_+ , juntamente com a frequência angular ω . Onde, por conveniência futura, definimos:

$$C_{11} = h_+ \quad (3.74)$$

$$C_{12} = h_\times \quad (3.75)$$

A nomenclatura dos graus de liberdade h_+ e h_\times é feita de acordo com os efeitos produzidos em partículas testes com a passagem da frente de onda [41]. Precisamos, portanto, aprofundar mais nossa interpretação física sobre a solução que acabamos de obter.

3.3.1 Efeito de OG em partículas teste - Estados de polarização

Vejamos os efeitos físicos da propagação de ondas gravitacionais (OG) em partículas materiais. Para entender tais efeitos, a primeira tentativa natural seria escrever a equação da geodésica (2.8)

para uma partícula teste, que em termos do quadri vetor velocidade $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ é dada por:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho = 0 \quad (3.76)$$

É também instintivo pensarmos que se resolvêssemos a equação (3.76) na métrica correspondente a uma onda gravitacional TT , conseguiríamos determinar os efeitos físicos [15]. Curiosamente esta abordagem não funciona, como pode ser visto a partir da seguinte análise.

Consideremos uma partícula que está em repouso, num dado instante $\tau = \tau_0$, no sistema de coordenadas na qual a métrica é $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{TT}$ (que chamaremos de sistema de coordenadas TT). Neste caso $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ para partícula no instante τ_0 e a equação (3.76) toma a forma

$$\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma_{00}^i = 0 \quad (em \tau = \tau_0) \quad (3.77)$$

fazendo uso das equações (3.3) e (3.61) em (3.77) obtemos

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}(2\partial_0 h_{i0}^{TT} - \partial_i h_{00}^{TT}) = 0 \quad (3.78)$$

e portanto

$$\frac{du^i}{d\tau} = 0 \quad (em \tau = \tau_0) \quad (3.79)$$

concluindo assim que a aceleração é nula no dado instante τ_0 . Deste modo, se uma partícula estava inicialmente em repouso, ela permanecerá em repouso ($x^i = \text{constante}$) mesmo depois da passagem da onda gravitacional. Infelizmente, isso nos mostra que esse método não nos será útil para a determinação dos efeitos físicos; por outro lado, nos mostra também que a condição do gauge TT é equivalente a escolher um conjunto de coordenadas que se move juntamente com a partícula (pelo menos para ordem baixas em $h_{\mu\nu}$). Essa característica peculiar aparece porque a transformação de coordenadas gerais e a transformação de gauge estão intimamente ligadas numa teoria linearizada [15]. A escolha do gauge implica na escolha das coordenadas.

Entretanto é fácil ver que as ondas gravitacionais tem efeitos mensuráveis. Para isso, tomaremos como exemplo duas partículas em queda livre que estão na presença de uma onda gravitacional no gauge TT (que se propaga ao longo do eixo z). Vamos supor que tais partículas partem inicialmente de $z = 0$, mas separadas ao longo do eixo x . Se L é a distância própria entre

as duas partículas, é possível demonstrar que¹²:

$$\frac{\delta L}{L} \simeq \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t, z=0) \quad (3.80)$$

ou seja, a separação própria entre as partículas passa a oscilar devido à presença da onda gravitacional e como já citado, tal efeito é mensurável.

Um modo de compreender mais claramente esse efeito é estudando o *desvio geodésico*¹³ de duas partículas próximas, digamos A e B . Para isso, vamos trabalhar em um sistema de coordenadas próprio para uma das partículas, A por exemplo, e o que faremos é estudar a variação do desvio geodésico nesse sistema [15]. A separação S^μ entre duas geodésicas próximas satisfaz a equação do desvio geodésico¹⁴, dada por

$$\frac{D^2}{D\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} u^\nu u^\rho S^\sigma \quad (3.81)$$

onde $(D/D\tau) = u^\lambda \nabla_\lambda$. Considerando que a partícula teste move-se muito lentamente, então $u^\mu \simeq \delta_0^\mu$. Isto pode ser tomado como verdade, pois as componentes espaciais do quadrivetor velocidade são da ordem de $h_{\mu\nu}$ e podem ser ignoradas, uma vez que o tensor de curvatura é linear em $h_{\mu\nu}$. Tendo $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, precisaremos calcular apenas a componente $R_{\mu 0 0 \sigma}$ do tensor de curvatura, que no sistema de coordenadas TT fica

$$R_{\mu 0 0 \sigma} = \frac{1}{2} \left(\partial_0^2 h_{\mu\sigma}^{TT} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{00}^{TT} - \partial_\sigma \partial_0 h_{\mu 0}^{TT} - \partial_0 \partial_\mu h_{0\sigma}^{TT} \right) = \frac{1}{2} \partial_0^2 h_{\mu\sigma}^{TT} \quad (3.82)$$

onde se fez necessário usar a condição (3.61). Esse é o tensor de Riemann no sistema de coordenadas TT e uma vez que ele é um invariante de gauge, devemos obter esse mesmo resultado, em ordem linear, para qualquer outro sistema de coordenadas; incluindo o sistema de coordenadas próprio. Como $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ é nulo no sistema de coordenadas próprio, o lado esquerdo da equação (3.81)

¹²Esse resultado é demonstrado em [15], na página 410.

¹³Tal desvio descreve a tendência de objetos de recuar ou se aproximar um do outro enquanto se movem sob a influência de um campo gravitacional [15].

¹⁴A demonstração dessa equação é feita em qualquer livro de relatividade geral, consulte por exemplo [15], página 198.

pode ser aproximado por $\partial^2 S^\mu / \partial t^2$ e, portanto, a equação que precisamos resolver passa a ser

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S_\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{TT}^{\mu\sigma} \quad (3.83)$$

Sabendo que $h_{\mu\nu}^{TT}$ pode ser expresso em termos de h_+ e h_\times , o que queremos é entender o que tais termos significam. Para isso, vamos inicialmente considerar uma situação em que $h_+ \neq 0$ e h_\times é nulo. Neste caso a equação (3.83) nos retorna¹⁵

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = -\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (3.85)$$

cujas soluções são

$$S^1 = \left(1 + \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^1(0) \quad (3.86)$$

$$S^2 = \left(1 - \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^2(0) \quad (3.87)$$

Para facilitar nossa compreensão, vamos considerar os eixos x^1, x^2 e x^3 como sendo, respectivamente, x, y e z do plano cartesiano. Podemos então representar as nossas soluções de onda plana como mostra a figura 3.1.

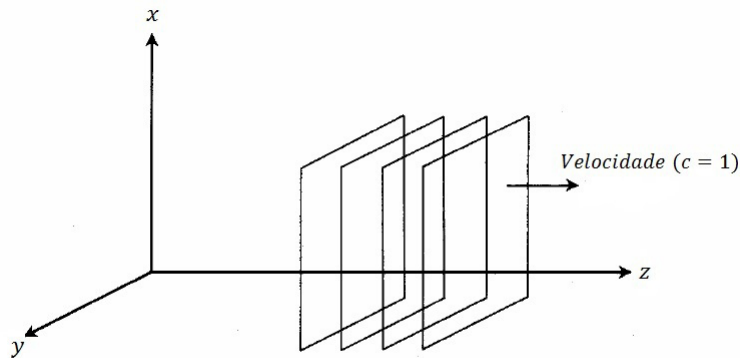


Figura 3.1 – Ondas planas se propagando em direção ao sentido positivo do eixo z [14].

As soluções (3.86) e (3.87) nos dizem que partículas separadas na direção x , irão inevitavelmente oscilar ao longo do eixo x , enquanto as que estão inicialmente separadas na direção y , oscilarão ao longo do eixo y . Se nossa distribuição de partículas estiver na forma de um anel

¹⁵Lembre-se que S^1 é a separação das partículas ao longo do eixo x^1 , analogamente S^2 é a separação ao longo do eixo x^2 e nossa onda se propaga ao longo do eixo x^3 .

que se encontra no plano $x - y$, elas irão saltar para trás e para frente, formando uma elipse com eixo principal ora em y , ora em x . A deformação dos círculos em elipses segue um padrão que se parece com um sinal "+", como pode ser visto, a seguir, na figura 3.2. Tal efeito é o que chamamos de polarização "+" da onda gravitacional e é o que justifica o subscrito "+" em h_+ [15].

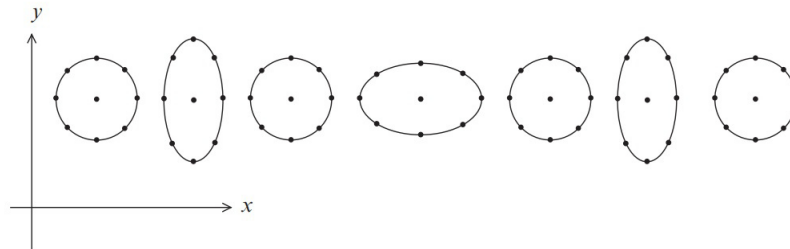


Figura 3.2 – O efeito de uma onda gravitacional com polarização "+" em conjunto de partículas de teste originalmente localizadas num círculo no plano $x - y$. A deformação dos círculos em elipses segue um padrão que se parece com um sinal "+" [15].

Passemos agora ao caso $h_{\times} \neq 0$ e $h_+ = 0$. Aplicando o mesmo procedimento anterior, obtemos

$$S^1 = S^1(0) + \frac{1}{2}h_{\times}e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}}S^2(0) \quad (3.88)$$

$$S^2 = S^2(0) + \frac{1}{2}h_{\times}e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}}S^1(0) \quad (3.89)$$

Essa é a chamada polarização " \times ", o que justifica o subscrito \times em h_{\times} . Nessa polarização, a mesma distribuição de partículas, citada anteriormente, oscilará agora ao longo de linhas que fazem 45° com os eixos x e y . A deformação dos círculos em elipses segue um padrão que se parece com um sinal " \times "; como pode ser visto, a seguir, na figura 3.3. É interessante notar também que, enquanto a onda gravitacional propaga-se ao longo da direção z , as perturbações ocorrem nos eixos perpendiculares x e y , o que caracteriza a nossa onda como transversal [15].

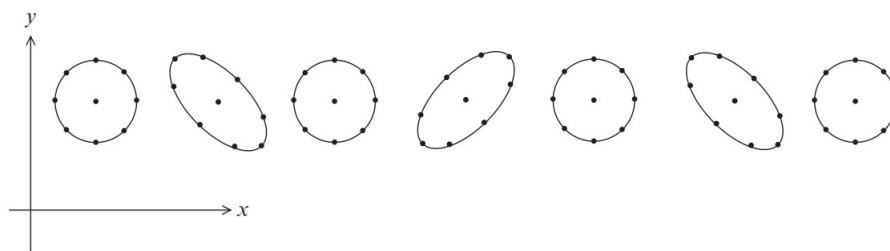


Figura 3.3 – Agora, temos o efeito de uma onda gravitacional com polarização " \times " em um conjunto de partículas de teste originalmente localizadas num círculo no plano $x - y$. A deformação dos círculos em elipses segue um padrão que se parece com um sinal " \times " [15].

Existe ainda um outro efeito muito interessante a ser discutido, que consiste na combinação desses dois que acabamos de presenciar. Tais efeitos (veja, por favor, a figura 3.4) surgem dos modos de polarização circulares, definidos por:

$$h_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_+ + ih_\times) \quad (3.90)$$

$$h_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_+ - ih_\times) \quad (3.91)$$

O efeito de uma onda h_R pura é o de girar as partículas no sentido horário, enquanto uma onda h_L pura, as gira no sentido anti-horário. É importante ressaltar que as partículas individuais não viajam ao redor do anel em que se encontram, elas apenas se movem em pequenos epiciclos.

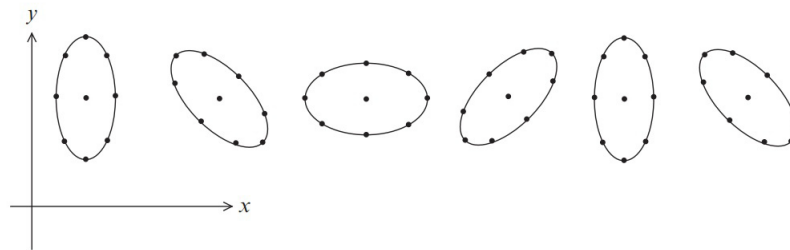


Figura 3.4 – O efeito de uma onda gravitacional com polarização R é distorcer um círculo de partículas teste em uma elipse que gira em um sentido com a mão direita [15].

Capítulo 4

Radiação gravitacional

Neste capítulo discutiremos a geração de ondas gravitacionais e a natureza quadrupolar da radiação gravitacional. Além disso, trataremos também do problema envolvido na definição de energia para o campo gravitacional. Em seguida, chegaremos a uma expressão matemática que nos forneça a taxa de energia irradiada por um sistema devido exclusivamente à emissão de ondas gravitacionais. E, por fim, aplicaremos a teoria aqui desenvolvida aos dados observacionais da binária de Hulse e Taylor.

4.1 Produção de ondas gravitacionais

No capítulo passado, fizemos um estudo sobre ondas gravitacionais no espaço-tempo de fundo plano e na ausência de fontes. O que faremos agora é acrescentar o termo de fonte, isto é, conceber a existência de uma dada distribuição de matéria e energia. Para isso, o primeiro passo é considerarmos a equação de Einstein acoplada com o tensor momento-energia:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

Voltando às equações (3.53), (3.54) e (3.55) percebemos que, se $T_{\mu\nu}$ é não nulo, a nossa perturbação irá conter novamente os termos $(\phi, \psi$ e $\omega^i)$, além do tensor s_{ij} . Isso implica que não podemos assumir o gauge transverso e sem traço no caso de presença de matéria. Contudo, esse problema pode ser contornado se assumirmos estar longe da fonte, pelo menos o suficiente para tratar o problema como tratamos o caso sem matéria. Depois incluímos o tensor $T_{\mu\nu}$ à mão. Isso nos autorizará impor novamente o gauge TT quando necessário.

Antes de prosseguir, será conveniente introduzirmos a *perturbação de traço reverso*¹, definida por

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (4.2)$$

esse nome é justificado pelo fato de que $\bar{h} = -h$. Tal perturbação, quando submetida a (3.12) se transforma como

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} - \partial_\sigma\xi^\sigma\eta_{\mu\nu} \quad (4.3)$$

Em termos dessa nova perturbação, o tensor de Einstein que no regime linear é dado por (3.7), fica

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left[\partial^\sigma\partial_\sigma\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} - \partial^\sigma\partial_\nu\bar{h}_{\mu\sigma} - \partial^\sigma\partial_\mu\bar{h}_{\nu\sigma}\right] \quad (4.4)$$

onde foram desprezados termos de ordem superior em $\bar{h}_{\mu\nu}$.

Se $\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} = 0$, teríamos que apenas a primeira parcela $\partial^\sigma\partial_\sigma\bar{h}_{\mu\nu} = \square\bar{h}_{\mu\nu}$ seria não nula, fazendo assim com que a expressão acima ficasse mais simples. Graças à liberdade na escolha do gauge essa simplificação pode ser obtida, para isso basta obrigar que

$$\square\xi_\mu = -\partial_\sigma\bar{h}^\sigma{}_\mu \quad (4.5)$$

Devido à enorme semelhança com o gauge de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) do eletromagnetismo, a condição acima ($\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} = 0$) recebe o mesmo nome². Assim, no gauge de Lorentz, o tensor de Einstein assume a forma

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

A expressão acima é um pouco mais confusa, quando escrita em termos da perturbação original e essa é a razão pela qual introduzimos a perturbação de traço reverso. A equação de Einstein linearizada nesse gauge é portanto uma equação de onda para cada uma das componentes da per-

¹Podemos reconstruir a perturbação original a partir de $\bar{h}_{\mu\nu}$, assim nenhuma informação é perdida ao fazermos essa mudança. É interessante notar também que no gauge TT temos $\bar{h}_{\mu\nu}^{-TT} = h_{\mu\nu}^{TT}$.

²Vale ressaltar que a perturbação original não é transversa nesse gauge, pois $\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\nu h$.

turbação. Matematicamente temos

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

Dada uma fonte $T_{\mu\nu}$, nosso objetivo é encontrar a solução geral para a equação (4.7) e trabalhar as propriedades da radiação emitida por um sistema em diferentes tipos de movimento. Matematicamente isso é semelhante ao problema de encontrar a solução para as equações de Maxwell na presença de fontes, onde tínhamos de resolver $\square A^\mu = -4\pi J^\mu$ para determinar o quadripotencial. A solução da equação (4.7) é obtida a partir do método da função de Green e sua demonstração é feita no apêndice C, cuja a solução é

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y}) d^3y \quad (4.8)$$

onde $t = x^0$. Referimo-nos à quantidade $t_r \equiv t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ como tempo retardado.

Esse resultado é exato e mesmo tendo sido obtido no gauge de Lorentz, trata-se de uma solução bem geral [16]. A equação (4.8) pode ser interpretada da seguinte maneira: a perturbação no campo gravitacional em (t, \mathbf{x}) é a soma das influências da energia e momento da fonte no ponto $(t_r, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ no cone de luz passado, como representado na figura 4.1. Percebemos que isso é coerente com a teoria discutida no capítulo passado, pois enquanto a dinâmica é trivial (acontece de forma instantânea) na gravitação de Newton, ela passa a ser não trivial na de Einstein, ou seja, a perturbação gerada na fonte deve levar um certo tempo até chegar a outro ponto do espaço-tempo. Como pode ser visto no apêndice C, existe ainda outra solução para a equação (4.7) que está relacionada com o tempo acelerado $t_a \equiv t + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, no entanto a descartamos, pois viola causalidade.

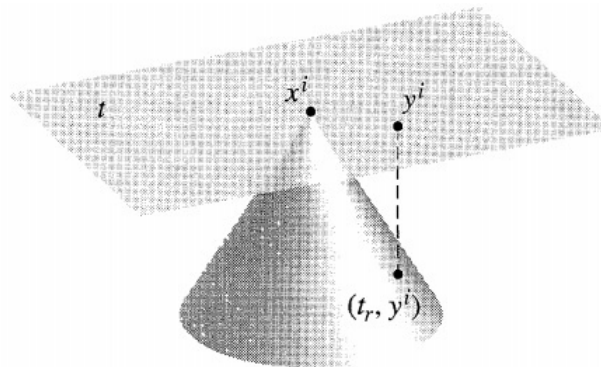


Figura 4.1 – O distúrbio no campo gravitacional no ponto (t, x^i) calculado em termos do evento no cone de luz passado [16].

4.1.1 A natureza quadrupolar da radiação gravitacional

O próximo passo é obter informações acerca da radiação gravitacional emitida por uma fonte $T_{\mu\nu}$, mas como se pode ver, é muito difícil extraí-las da equação (4.8). Por isso aplicaremos algumas aproximações: que a fonte encontra-se isolada, muito distante e é composta apenas por matéria não relativista³; tais aproximações ficarão mais precisas à medida que avançarmos.

Antes de prosseguir, será conveniente eliminarmos a dependência de $T_{\mu\nu}$ no tempo retardado, o que pode ser conseguido através de uma transformada de Fourier na variável tempo [15, 16]. Se $\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})$ e $\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier de $T_{\mu\nu}(t, \mathbf{y})$ e $\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$, então

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \int d^3y \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r e^{i\omega t_r} \int d^3y \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y}) \\ &= 4G \int d^3y \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})\end{aligned}\quad (4.9)$$

e é com (4.9) que trabalharemos na nossa aproximação.

Pondo a origem do nosso sistema de coordenadas perto da fonte, a aproximação adotada nos permite trocar na equação (4.9) $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ por $r = |\mathbf{x}|$, o que faz com que o termo $e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ possa ser reescrito como $e^{i\omega r}/r$. Caso não tenha ficado claro, realçaremos os motivos pelos quais essa troca é válida. Vamos supor que a fonte possui tamanho δr e que exista um observador localizado no ponto onde queremos calcular a radiação gravitacional. Como por hipótese, a fonte encontra-se muito distante do observador ($\delta r \ll r$), então para quem observa, ela parece ser puntiforme. Isto nos permite desprezar suas dimensões⁴ e realizar a troca descrita acima. Essa situação é exemplificada na figura 4.2.

A aproximação de baixas velocidades (quando comparadas à velocidade da luz) nos permite assumir que r é praticamente constante, pois demora muito tempo até que a distância entre a fonte e o observador tenha alguma diferença significativa. Com tudo isso podemos reescrever

³Matéria cuja a velocidade típica é muito menor que a da luz.

⁴De fato, $\delta r \ll r$ não implica que a fonte precise ser “pequena” ou localizada próxima de um ponto específico do espaço; essa condição é verificada apenas tomando r suficientemente grande.

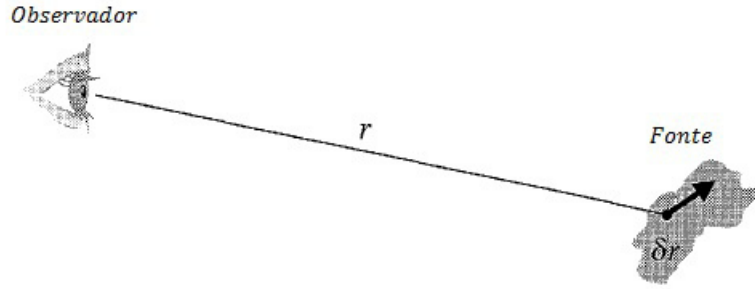


Figura 4.2 – Uma fonte de tamanho δr a uma distância $r \gg \delta r$ do observador [16].

(4.9) como

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}) \quad (4.10)$$

Felizmente precisaremos calcular apenas as componentes espaciais de $\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$, e as razões para isso são duas: uma de caráter físico e outra matemático. A motivação de caráter físico reside no fato de que a lei de conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ implica que todas as integrais sobre $T^{0\nu}$ são conservadas e independentes do tempo [15]. Dito de outra maneira, a transformada de Fourier de $T^{0\nu}$ com respeito à variável tempo, conterá apenas termos estáticos ($\omega = 0$). Isso nos mostra que a parte dependente do tempo da métrica, que é a que caracteriza a radiação, está contida nas componentes espaciais da perturbação.

A razão de ordem matemática está associada com o gauge adotado $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ (que implica $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ por causa de (4.7)). Esta por sua vez, estabelece uma relação entre as componentes da perturbação no espaço de Fourier, dada por:

$$\bar{h}^{\approx 0\nu} = -\frac{i}{\omega} \partial_j \bar{h}^{\approx j\nu} \quad (4.11)$$

Tal equação nos mostra que $\bar{h}^{\approx 0j}$ pode ser determinado a partir de $\bar{h}^{\approx ij}$. Além disso, juntando o conhecimento de que $\bar{h}^{\approx 0i} = \bar{h}^{\approx i0}$ com a equação (4.11), é possível determinar $\bar{h}^{\approx 00}$. Portanto, precisamos calcular apenas as componentes espaciais da perturbação, pois todas as outras podem ser obtidas a partir delas.

Dadas as devidas motivações, passamos então a resolver (4.10) apenas para as componentes espaciais. Começamos por efetuar uma integração por partes

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) = \int d^3y \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3y y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}) \quad (4.12)$$

onde o primeiro termo do lado direito da igualdade é uma integral de superfície que irá desaparecer pelo fato de a fonte se encontrar isolada; enquanto o segundo termo pode ser relacionado com \tilde{T}^{0j} , uma vez que a lei de conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, quando escrita no espaço de Fourier, impõe que

$$\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = -i\omega \tilde{T}^{0\mu} \quad (4.13)$$

Assim

$$\begin{aligned} \int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) &= i\omega \int d^3y y^i \tilde{T}^{0j} \\ &= \frac{i\omega}{2} \int d^3y (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) \\ &= \frac{i\omega}{2} \int d^3y [\partial_k (y^i y^j \tilde{T}^{0k}) - y^i y^j (\partial_k \tilde{T}^{0k})] \\ &= -\frac{\omega^2}{2} \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00} \end{aligned} \quad (4.14)$$

a segunda linha é justificada por conta da simetria dos índices i e j , enquanto as duas últimas foram simples aplicações da integração por partes e a equação (4.13). É uma convenção dos livros de relatividade geral [33, 16, 15], definir o chamado *tensor momento de quadrupolo* da distribuição de matéria, como sendo

$$I^{ij}(t) = \int d^3y y^i y^j T^{00}(t, \mathbf{y}) \quad (4.15)$$

e a partir disso a equação (4.10) fica escrita como

$$\tilde{\bar{h}}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2G\omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega) \quad (4.16)$$

e usando a transformada inversa de Fourier, obtemos

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}(t_r) \quad (4.17)$$

que é a chamada *fórmula de quadrupolo*; onde, como antes $t_r = t - r$.

Esse resultado nos mostra que a radiação gravitacional emitida por uma fonte, nas condições descritas, é proporcional à derivada temporal de segunda ordem do tensor momento de

quadrupolo da distribuição de matéria. Podemos observar que isso contrasta com a radiação eletromagnética, em que a maior contribuição é proporcional à derivada temporal de segunda ordem do momento de dipolo da distribuição de cargas, e o motivo disso é fácil de entendermos.

O momento de dipolo no eletromagnetismo é definido usando-se a distribuição de cargas, e para um sistema feito de cargas com diferentes taxas q/m , ele pode mudar. No caso gravitacional, o momento de dipolo \mathbf{d} de um sistema de massas é dado por:

$$\mathbf{d} = M\mathbf{R}_{CM} \quad (4.18)$$

onde M é a massa total do sistema e \mathbf{R}_{CM} é o vetor que localiza o centro de massa. No caso de distribuições isoladas, temos que o centro de massa se move com velocidade constante e, portanto, $\ddot{\mathbf{R}}_{CM} = 0$. Concluindo, então, que não podemos ter radiação gravitacional proveniente do momento de dipolo [15]. Assim, na decomposição multipolar, o termo de ordem mais baixa para a radiação gravitacional é o momento de quadrupolo. Vale ressaltar também que o momento de quadrupolo é geralmente menor que o de dipolo, e é por essa razão, bem como o fraco acomplamento de matéria a gravidade, que implica que a radiação gravitacional é tipicamente muito menor do que a eletromagnética [16]. Uma comparação entre essas radiações pode ser encontrada na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Comparação entre a radiação gravitacional e a eletromagnética [15].

	Radiação eletromagnética	Radiação gravitacional
Equação básica	$\square A^\mu = -4\pi J^\mu$	$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi G T^{\mu\nu}$
Condição imposta para obter a equação básica	$\partial_\mu A^\mu = 0$	$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$
Solução (com $t_r = t - \mathbf{x} - \mathbf{y} $)	$A^\mu(t, \mathbf{x}) = \int d^3 y \frac{J^\mu(t_r, \mathbf{y})}{ \mathbf{x} - \mathbf{y} }$	$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G \int d^3 y \frac{T^{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y})}{ \mathbf{x} - \mathbf{y} }$
Interdependência das componentes devido à condição de calibre (gauge)	A^0 obtido de A^i	$\bar{h}^{0\nu}$ obtido de \bar{h}^{ij}
Solução para os modos espaciais quando $\delta r \ll r$ e $v \ll c$	$A^i \simeq \frac{1}{r} \int d^3 y J^i$	$\bar{h}^{ij} \simeq \frac{4G}{r} \int d^3 y T^{ij}$
Resultado simplificado	$A^i \simeq \frac{1}{r} \partial_0 d^i$	$\bar{h}^{ij} \simeq \frac{2G}{r} \partial_0^2 I^{ij}$
Identidade satisfeita pela fonte	$\int d^3 y J^i = \frac{d}{dt} \int d^3 y J^0 y^i$	$\int d^3 y T^{ij} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3 y T^{00} y^i y^j$
Modo radioativo	Transverso	Transverso e sem traço

4.2 A energia transportada por ondas gravitacionais

Vamos agora a uma das questões mais delicadas da teoria: a energia carregada pelas ondas gravitacionais. Assunto por sinal muito importante, pois nas teorias de campo tratadas por intermédio da RG, temos que o fator decretório para a existência de ondas não é apenas que os campos sejam dependentes do tempo; mas que, além disso, haja transporte de energia e momento sem haver transporte de matéria. No entanto, essa é uma questão muito difícil de se lidar [42].

As complexidades desse assunto não são apenas de origem técnica, mas também conceituais, uma vez que o próprio princípio da equivalência - pilar básico da RG - não nos permite definir a energia associada a um campo gravitacional⁵. Contudo, no contexto do regime linear em que estamos trabalhando, a perturbação é interpretada como um campo tensorial definido sobre um *background* fixo. Então, uma alternativa viável seria encontrar um tensor momento-energia para as flutuações de $h_{\mu\nu}$, como feito em outras teorias de campo [41, 42].

Até o momento, todas as grandezas necessárias foram computadas em primeira ordem. O problema é que em primeira ordem $h_{\mu\nu}$ não interage com nada e precisamos de interação para definir energia para os campos gravitacionais. Dessa maneira, torna-se necessário incluir os termos de segunda ordem, proporcionais a $(h_{\mu\nu})^2$, pois assim aparecerá a auto-interação, uma vez que a energia e momento transportado pelas ondas contribuem para modificar a si próprias. Em até segunda ordem, a métrica e o tensor de Ricci são escritos como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} \quad (4.19)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(0)} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} \quad (4.20)$$

onde $R_{\mu\nu}^{(1)}$ é considerado como sendo da mesma ordem que $h_{\mu\nu}^{(1)}$, enquanto $R_{\mu\nu}^{(2)}$ e $h_{\mu\nu}^{(2)}$ são da mesma ordem que $(h_{\mu\nu}^{(1)})^2$.

Como $h_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}$ é uma solução trivial da equação de Einstein no vácuo, então $R_{\mu\nu}^{(0)} = 0$. E, portanto, a equação de vácuo de primeira ordem se reduz à

$$R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(1)}] = 0 \quad (4.21)$$

é esta equação que, juntamente com a transformação de gauge, determina a perturbação de

⁵Na RG a definição de energia (componente 00 do tensor momento-energia) depende do observador. Uma forma simples de ver isto é a seguinte: não sabemos dizer se a gravidade sentida é devido ao referencial está acelerado ou por existir realmente um campo gravitacional.

primeira ordem $h_{\mu\nu}^{(1)}$. A perturbação de segunda ordem $h_{\mu\nu}^{(2)}$ será determinada pela equação da respectiva ordem, dada por:

$$R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(2)}] + R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] = 0 \quad (4.22)$$

onde, como pode ser visto, separamos o tensor de Ricci de segunda ordem em duas partes. A notação $R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(2)}]$ indica a parte que é proporcional às derivadas da conexão afim ($\partial\Gamma$), calculada em termos de $h_{\mu\nu}^{(2)}$; enquanto isso, $R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}]$ é a parte proporcional a $(\Gamma\Gamma)$, calculada em termos de $h_{\mu\nu}^{(1)}$. Explicitamente temos:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(2)}] = & \frac{1}{2} \left[(\partial_\nu h^{\rho\sigma}) (\partial_\mu h_{\sigma\rho} + \partial_\rho h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\rho}) - (\partial_\rho h^{\rho\sigma}) (\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) \right] \\ & + \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} (\partial_\nu \partial_\mu h_{\sigma\rho} + \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\sigma\nu}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] = & (\partial^\sigma h^\rho{}_\nu) \partial_{[\sigma} h_{\rho]\mu} - h^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_{(\mu} h_{\nu)\sigma} + \frac{1}{2} \left[h^{\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\nu h_{\rho\sigma} + \partial_\sigma (h^{\rho\sigma} \partial_\rho h_{\mu\nu}) \right] \\ & + \frac{1}{4} \left[(\partial_\mu h_{\rho\sigma}) \partial_\nu h^{\rho\sigma} - (\partial_\rho h_{\mu\nu}) \partial^\rho h \right] - \left(\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \partial^\rho h \right) \partial_{(\mu} h_{\nu)\rho} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Agora vamos escrever as equações de Einstein no vácuo $G_{\mu\nu} = 0$; isto é equivalente a $R_{\mu\nu} = 0$, mas podemos expressar esse resultado de forma mais sugestiva, como

$$R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(2)}] - \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{(1)}[h^{(2)}] \eta_{\mu\nu} = 8\pi G t_{\mu\nu} \quad (4.25)$$

onde definimos

$$t_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{8\pi G} \left\{ R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] - \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{(2)}[h^{(1)}] \eta_{\mu\nu} \right\} \quad (4.26)$$

Dessa maneira, conseguimos definir um tensor momento-energia ($t_{\mu\nu}$) para as flutuações de $h_{\mu\nu}$. Embora essa linha de raciocínio que estamos adotando seja viável, dificuldades técnicas impedem que haja um senso comum na forma desse tensor. O conforto vem com o fato de que a maioria dessas aproximações prevêem os mesmos resultados para fenômenos físicos de maior interesse, como por exemplo, a taxa na qual um sistema binário emite energia [41].

Antes de prosseguirmos, existem algumas considerações importantes a serem feitas. O lado esquerdo da equação (4.25) não é o tensor de Einstein de segunda ordem completo, movemos os termos envolvendo $R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}]$ para o lado direito com o propósito de definir um novo tensor

momento-energia $t_{\mu\nu}$. Esse novo tensor é simétrico, quadrático em $h_{\mu\nu}$ e representa como a perturbação afeta a métrica do espaço-tempo; análogo ao que faz um verdadeiro tensor momento-energia de matéria [16]. Além disso, $t_{\mu\nu}$ é conservado; no caso de um espaço-tempo de fundo plano temos

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0 \quad (4.27)$$

tal expressão é obtida da identidade de Bianchi $\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

Existem também algumas limitações na nossa interpretação de $t_{\mu\nu}$ como um tensor momento-energia. Até agora estávamos dizendo que $t_{\mu\nu}$ é um tensor, no entanto isto não é verdade, ele é um pseudo-tensor, mas por enquanto estamos deixando isso de lado. Outro problema é que como se pode averiguar por uma substituição direta, $t_{\mu\nu}$ não é invariante sob transformações de gauge (3.12). Além dessas, outra questão muito importante é a sua localidade, o fato de ele depender das derivadas primeiras da métrica nos permite zerá-lo, escolhendo um sistema de coordenadas conveniente. Tal problema inclusive já era esperado, pois como já foi discutido, a própria energia não tem uma definição precisa na RG, então era de se supor que esse problema se refletiria no tensor momento-energia [16, 41].

Felizmente, existe uma maneira de contornar o problema da localidade de $t_{\mu\nu}$ que consiste em trabalharmos com a sua média ao longo de vários comprimentos de onda, pois a média, sim, é uma propriedade global. Não entraremos no mérito do cálculo da média, apenas diremos que ela é calculada através de uma operação denotada por $\langle \dots \rangle$. Tal procedimento tem vantagens filosóficas e práticas. Do ponto de vista filosófico, sabemos que a nossa capacidade de escolher um sistema de coordenadas inercial em qualquer ponto, torna impossível definir uma medida confiável (que seja puramente local, isto é, definido em cada ponto em termos da métrica e suas derivadas primeiras) da energia e momento de uma onda gravitacional. Por outro lado, trabalhando com a média de muitos comprimentos de onda, esperamos capturar o suficiente da curvatura física em uma pequena região, para assim descrever uma medida que seja uma invariante de gauge [16]. Do ponto de vista prático, quaisquer termos que são derivados possuem média nula, ou seja

$$\langle \partial_\mu(X) \rangle = 0 \quad (4.28)$$

o que implica (efetuando uma integração por partes) em

$$\langle A(\partial_\mu B) \rangle = -\langle (\partial_\mu A)B \rangle \quad (4.29)$$

expressão essa que irá gerar um grande número de simplificações em contas futuras.

Com isso em mente, vamos calcular a média de $t_{\mu\nu}$ a partir de sua definição dada por (4.26) e usando a expressão (4.24) para $R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}]$. Apesar da motivação de calcularmos a média para obter como resposta um invariante de gauge, o cálculo real é muito complicado, então o faremos apenas no gauge TT ⁶, onde são válidas as igualdades (3.62) e (3.63). Assim, o tensor de Ricci de segunda ordem (apenas a parte proporcional a $h^{(1)}$) é reescrito nesse gauge como

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)TT}[h^{(1)}] = & \frac{1}{2}h_{TT}^{\rho\sigma}\partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\rho\sigma}^{TT} + \frac{1}{4}(\partial_{\mu}h_{\rho\sigma}^{TT})\partial_{\nu}h_{TT}^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial^{\sigma}h_{\rho\nu}^{TT})\partial_{\sigma}h_{\lambda\mu}^{TT} \\ & - \frac{1}{2}(\partial^{\sigma}h_{\rho\nu}^{TT})\partial^{\rho}h_{\sigma\mu}^{TT} - h_{TT}^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\partial_{(\mu}h_{\nu)\sigma}^{TT} + \frac{1}{2}h_{TT}^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\partial_{\rho}h_{\mu\nu}^{TT} \end{aligned} \quad (4.30)$$

e sua média é

$$\left\langle R_{\mu\nu}^{(2)TT}[h^{(1)}] \right\rangle = -\frac{1}{4}\left\langle (\partial_{\mu}h_{\rho\sigma}^{TT})(\partial_{\nu}h_{TT}^{\rho\sigma}) + 2\eta^{\rho\lambda}(\square h_{\rho\nu}^{TT})h_{\lambda\mu}^{TT} \right\rangle \quad (4.31)$$

No entanto, a perturbação obedece à equação de movimento de primeira ordem $\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0$. E portanto (4.31) se reduz à:

$$\left\langle R_{\mu\nu}^{(2)TT}[h^{(1)}] \right\rangle = -\frac{1}{4}\left\langle (\partial_{\mu}h_{\rho\sigma}^{TT})(\partial_{\nu}h_{TT}^{\rho\sigma}) \right\rangle \quad (4.32)$$

Para obtermos o escalar de curvatura tiramos o traço de (4.32). Depois de uma integração por partes encontramos novamente um termo $\square h_{\mu\nu}^{TT}$, que é nulo, restando assim

$$\left\langle \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(2)TT}[h^{(1)}] \right\rangle = 0 \quad (4.33)$$

Inserindo (4.32) e (4.33) em (4.26), obtemos uma expressão mais simples para o tensor momento-energia das ondas gravitacionais no gauge TT , dada por:

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G}\left\langle (\partial_{\mu}h_{\rho\sigma}^{TT})(\partial_{\nu}h_{TT}^{\rho\sigma}) \right\rangle \quad (4.34)$$

Entretanto, na literatura (consulte, por exemplo, [15, 16]) muitas vezes iremos ver a expressão acima escrita em termos das componentes espaciais, em vez das componentes espaço-temporais. Mas como sabemos $h_{0\nu}^{TT} = 0$ e, portanto, essas duas versões são claramente equivalentes.

⁶Não esqueça que só estamos autorizados a usar esse gauge no vácuo.

Como demonstrado em [16], o cálculo da média de $t_{\mu\nu}$ sem considerar o gauge TT é

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \left\langle (\partial_\mu h_{\rho\sigma})(\partial_\nu h^{\rho\sigma}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial_\nu h) - (\partial_\rho h^{\rho\sigma})(\partial_\mu h_{\nu\sigma}) - (\partial_\rho h^{\rho\sigma})(\partial_\nu h_{\mu\sigma}) \right\rangle \quad (4.35)$$

que como se pode verificar diretamente, trata-se de um invariante de gauge. Esse resultado foi mostrado aqui apenas a título de curiosidade, mas continuaremos a usar a expressão (4.34) para o tensor momento-energia.

O que faremos agora é usar a expressão (4.34) para o tensor momento-energia das ondas gravitacionais, com o intuito de calcular a taxa de energia perdida (E_{GW}), por um sistema que emite radiação gravitacional de acordo com a fórmula quadrupolar (4.17). A energia total contida na radiação gravitacional em uma superfície Σ (constante no tempo) é definida como:

$$E_{GW} = \int_{\Sigma} t_{00} d^3x \quad (4.36)$$

enquanto a energia total irradiada, até o infinito, pode ser expressa na forma

$$\Delta E_{GW} = \int L_{GW} dt \quad (4.37)$$

onde L_{GW} é a potência irradiada (energia emitida por unidade de tempo), definida por

$$L_{GW} = \int_{S_{\infty}^2} t_{0\mu} n^\mu r^2 d\Omega \quad (4.38)$$

onde a integral é calculada sobre uma 2-esfera infinita (S_{∞}^2) e n^μ é um vetor tipo espaço unitário⁷ normal a S_{∞}^2 .

Gostaríamos de calcular a potência irradiada usando (4.34). No entanto, surge um problema: a expressão (4.38) é escrita em termos da perturbação transversa e sem traço, enquanto a fórmula quadrupolar é escrita em termos das componentes espaciais (\bar{h}_{ij}) do gauge de Lorentz (perturbação de traço reverso). Assim, o primeiro passo é converter (\bar{h}_{ij}) para o gauge TT , o que nos é permitido, uma vez que estamos interessados no comportamento das ondas no vácuo. As componentes TT desse tensor podem ser obtidas aplicando-se o seguinte procedimento. Primeiro, a parte transversa é obtida com a projeção de \bar{h}_{ij} na superfície ortogonal à direção $n^i = \frac{k^i}{|k|}$ em que

⁷Em coordenadas esféricas: $n^\mu = (0, 1, 0, 0)$.

a onda se propaga, isto é

$$\bar{h}_{ij}^T = P_i^k P_j^l \bar{h}_{kl} \quad (4.39)$$

sendo $P_i^j = \delta_i^j - n_i n^j$ o operador projeção. Em seguida, extraímos o traço $\bar{h}_{ij}^{TT} = \bar{h}_{ij}^T - \frac{1}{2} P_{ij} \bar{h}^T$, obtendo assim

$$\begin{aligned} \bar{h}_{ij}^{TT} &= \frac{2G}{r} \left(P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right) \frac{d^2}{dt^2} I_{kl}(t_r) \\ &= \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}^{TT}(t_r) \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde

$$I_{ij}^{TT} = \left(P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right) I_{kl} \quad (4.41)$$

Devido à ausência do traço \bar{h}_{ij}^{TT} é igual a perturbação original h_{ij}^{TT} e, portanto

$$h_{ij}^{TT} = \bar{h}_{ij}^{TT} = \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}^{TT}(t_r) \quad (4.42)$$

De fato, o momento de quadrupolo como definido em (4.15), não é uma quantidade muito conveniente para se usar na expressão de geração de ondas, pois envolve uma integral sobre toda a densidade de energia, o que é muito difícil de se determinar [16]. Em vez disso, usaremos o chamado *momento de quadrupolo reduzido*, definido por:

$$\mathcal{I}_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I \quad (4.43)$$

que como se pode ver é a parte sem traço de I_{ij} . Logicamente que no gauge TT o momento de quadrupolo reduzido é igual ao momento de quadrupolo. No entanto, existem argumentos plausíveis para o seu uso, que podem ser encontrados em [16], mas que não iremos comentar aqui. Em termos de \mathcal{I}_{ij} , a equação (4.42) é reescrita como

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{I}_{ij}^{TT}(t_r) \quad (4.44)$$

Para o cálculo da potência, estamos interessados apenas em $t_{0\mu} n^\mu = t_{0r}$, pois assim já estamos considerando uma direção genérica \mathbf{r} para os cálculos. Usando-se (4.34), podemos computar essa

componente, obtendo

$$\begin{aligned}
t_{0r} &= \frac{1}{32\pi G} \left\langle \left(\partial_0 h_{ij}^{TT} \right) \left(\partial_r h_{TT}^{ij} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{32\pi G} \left\langle \left(\frac{2G}{r} \frac{d^3 \mathcal{F}_{ij}^{TT}}{dt^3} \right) \left(-\frac{2G}{r} \frac{d^3 \mathcal{F}_{TT}^{ij}}{dt^3} \right) \right\rangle \\
&= -\frac{G}{8\pi r^2} \left\langle \frac{d^3 \mathcal{F}_{ij}^{TT}}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{F}_{TT}^{ij}}{dt^3} \right\rangle
\end{aligned} \tag{4.45}$$

onde levamos em conta que o momento de quadrupolo depende apenas do tempo retardado e, portanto, têm-se:

$$\partial_0 h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{r} \frac{d^3}{dt^3} \mathcal{F}_{ij}^{TT}(t_r) \tag{4.46}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_r h_{ij}^{TT} &= -\frac{2G}{r} \frac{d^3}{dt^3} \mathcal{F}_{ij}^{TT}(t_r) - \frac{2G}{r^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_{ij}^{TT}(t_r) \\
&\simeq -\frac{2G}{r} \frac{d^3}{dt^3} \mathcal{F}_{ij}^{TT}(t_r)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

em que nesta última equação jogamos fora o termo r^{-2} , uma vez que estamos interessados no limite de $r \rightarrow \infty$.

O próximo passo é colocar (4.45) em termos de \mathcal{F}_{ij} . Usando-se o operador que projeta e deixa o traço nulo $P_{ijkl} \equiv \left(P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \right)$, e lembrando que \mathcal{F}_{ij} trata-se de um tensor de sem traço, podemos escrever

$$\mathcal{F}_{ij}^{TT} \mathcal{F}_{TT}^{ij} = \mathcal{F}_{ij} \mathcal{F}^{ij} - 2 \mathcal{F}_i^j \mathcal{F}^{ik} n_j n_k + \frac{1}{2} \mathcal{F}^{ij} \mathcal{F}^{kl} n_i n_j n_k n_l \tag{4.48}$$

o que implica em

$$t_{0r} = -\frac{G}{8\pi r^2} \left\langle \frac{d^3 \mathcal{F}_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{F}^{ij}}{dt^3} - 2 \frac{d^3 \mathcal{F}_i^j}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{F}^{ik}}{dt^3} n_j n_k + \frac{1}{2} \frac{d^3 \mathcal{F}^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{F}^{kl}}{dt^3} n_i n_j n_k n_l \right\rangle \tag{4.49}$$

substituindo esse resultado em (4.38) obtêm-se

$$L_{GW} = -\frac{G}{8\pi} \int_{S_\infty^2} \left\langle \frac{d^3 \mathcal{F}_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{F}^{ij}}{dt^3} - 2 \frac{d^3 \mathcal{F}_i^j}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{F}^{ik}}{dt^3} n_j n_k + \frac{1}{2} \frac{d^3 \mathcal{F}^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{F}^{kl}}{dt^3} n_i n_j n_k n_l \right\rangle d\Omega \tag{4.50}$$

Essas integrais são facilmente calculadas se lembrarmos que o momento de quadrupolo reduzido não depende das coordenadas angulares e, portanto, podem sair da integral. Para esse cálculo, são usadas também as identidades abaixo⁸

$$\int d\Omega = 4\pi \quad (4.51)$$

$$\int n_i n_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (4.52)$$

$$\int n_i n_j n_k n_l d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.53)$$

substituindo essas identidades em (4.50), encontramos finalmente que

$$L_{GW} = \frac{dE_{GW}}{dt} = -\frac{G}{5} \left\langle \frac{d^3 \mathcal{F}_{ij}^{TT}}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{F}_{TT}^{ij}}{dt^3} \right\rangle \quad (4.54)$$

onde o momento de quadrupolo reduzido é calculado no tempo retardado. A fórmula acima representa a taxa de energia que é trocada, e fontes irradiantes estão perdendo energia, por isso o sinal negativo na igualdade.

4.2.1 Ondas gravitacionais emitidas por um sistema binário em órbita circular

O próximo passo consiste em usar a fórmula (4.54) para calcular a energia emitida (via radiação gravitacional) por um sistema bem simples: dois corpos de massas m_1 e m_2 efetuando órbitas circulares em torno de um centro de massa em comum. Tal situação é descrita na figura 4.3:

Faremos uma análise dessa situação através da mecânica newtoniana, válida em baixas ordens. Neste caso, os parâmetros orbitais são completamente determinados pela massa reduzida μ e pela distância l_0 entre os dois corpos envolvidos. Baseando-se na figura acima para a nossa análise, onde adotamos a origem do sistema de coordenadas coincidindo com o centro de massa do sistema, podemos escrever, em termos da massa reduzida $\mu = m_1 m_2 / M$ e a separação orbital $l_0 = r_1 + r_2$, que as distâncias r_1 e r_2 valem respectivamente

$$r_1 = \frac{m_2 l_0}{M} \quad (4.55)$$

$$r_2 = \frac{m_1 l_0}{M} \quad (4.56)$$

⁸Essas identidades são demonstradas escrevendo-se o vetor normal unitário n^i em coordenadas cartesianas: $n^i = (\text{sen}\theta \cos\phi, \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \cos\theta)$.

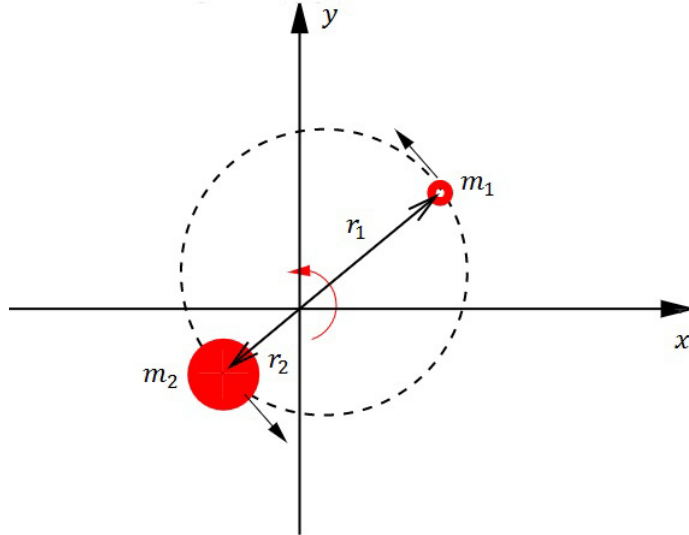


Figura 4.3 – Dois corpos de massas m_1 e m_2 efetuando órbitas circulares em torno de um centro de massa em comum.

onde $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema.

A frequência orbital Ω é obtida igualando-se a força gravitacional, dada por (1.1), a resultante centrípeta. Para cada uma das massas teremos

$$G \frac{m_1 m_2}{l_0^2} = m_1 \Omega^2 \frac{m_2 l_0}{M} \quad (4.57)$$

$$G \frac{m_1 m_2}{l_0^2} = m_2 \Omega^2 \frac{m_1 l_0}{M} \quad (4.58)$$

o que implica que para ambas as massas

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{l_0^3}} \quad (4.59)$$

e, portanto, as equações de movimento serão

$$x_1 = \frac{m_2 l_0}{M} \cos(\Omega t) \quad ; \quad y_1 = \frac{m_2 l_0}{M} \sin(\Omega t) \quad (4.60)$$

$$x_2 = -\frac{m_1 l_0}{M} \cos(\Omega t) \quad ; \quad y_2 = -\frac{m_1 l_0}{M} \sin(\Omega t) \quad (4.61)$$

De posse dessas equações estamos aptos a computar o tensor momento de quadrupolo, definido por (4.15). Para este caso temos

$$T^{00} = \sum_{n=1}^2 m_n \delta(x - x_n) \delta(y - y_n) \delta(z) \quad (4.62)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= m_1 \int x^2 \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) \delta(z) dx dy dz \\
&+ m_2 \int x^2 \delta(x - x_2) \delta(y - y_2) \delta(z) dx dy dz \\
&= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 \\
&= \mu l_0^2 \cos^2(\Omega t) \\
&= \frac{\mu}{2} l_0^2 \cos(2\Omega t) + \frac{\mu}{2} l_0^2
\end{aligned} \tag{4.63}$$

aplicando-se o mesmo procedimento para as outras componentes, encontramos que todas são nulas, exceto

$$I_{yy} = -\frac{\mu}{2} l_0^2 \cos(2\Omega t) - \frac{\mu}{2} l_0^2 \tag{4.64}$$

$$I_{xy} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \text{sen}(2\Omega t) \tag{4.65}$$

No entanto, uma breve olhada na equação (4.54) é suficiente para perceber que nos interessa apenas a parte temporal dessas componentes e, portanto, as contas serão efetuadas tomando-se

$$I_{xx} = -I_{yy} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \cos(2\Omega t) \tag{4.66}$$

$$I_{xy} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \text{sen}(2\Omega t) \tag{4.67}$$

Antes de prosseguirmos é interessante notar uma primeira informação importante que nos aparece: a frequência das ondas gravitacionais emitidas é o dobro da frequência orbital. Em uma forma matricial o tensor momento de quadrupolo é escrito como

$$I_{ij} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \begin{pmatrix} \cos(2\Omega t) & \text{sen}(2\Omega t) & 0 \\ \text{sen}(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou de forma mais reduzida

$$I_{ij} = \frac{\mu}{2} l_0^2 A_{ij} \tag{4.68}$$

onde A_{ij} são os elementos da matriz apresentada acima.

O momento de quadrupolo reduzido, dada por (4.43), é portanto⁹

$$\mathcal{I}_{ij}(t_r) = \frac{\mu}{2} l_0^2 \begin{pmatrix} \cos(2\Omega t_r) & \text{sen}(2\Omega t_r) & 0 \\ \text{sen}(2\Omega t_r) & -\cos(2\Omega t_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e o derivando três vezes em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d^3}{dt^3} \mathcal{I}_{ij}(t_r) = 4\mu l_0^2 \Omega^3 \begin{pmatrix} \text{sen}(2\Omega t_r) & -\cos(2\Omega t_r) & 0 \\ -\cos(2\Omega t_r) & -\text{sen}(2\Omega t_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

substituindo esse resultado em (4.54) encontramos finalmente que

$$L_{GW} = \frac{dE_{GW}}{dt} = \frac{32 G^4 \mu^2 M^3}{5 c^5 l_0^5} \quad (4.69)$$

onde reinsertamos a constante c nas contas.

A amplitude das ondas gravitacionais pode ser calculada substituindo-se (4.68) na fórmula do quadrupolo (4.42), o que implica em

$$\begin{aligned} h_{ij}^{TT} &= \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} P_{ijkl} I_{kl} \\ &= \frac{2G}{r} \frac{\mu}{2} l_0^2 \frac{d^2}{dt^2} P_{ijkl} A_{kl} \\ &= \frac{2G}{r} \frac{\mu}{2} l_0^2 (2\Omega)^2 P_{ijkl} A_{kl} \\ &= \frac{4\mu M G^2}{r l_0} A_{kl}^{TT} \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde, nesta última linha, usamos o valor da frequência orbital expressa em (4.59). Assim, a ordem de magnitude da amplitude dessas ondas é dada por:

$$h_0 = \frac{4\mu M G^2}{r l_0 c^4} \quad (4.71)$$

⁹Note que o traço de I_{ij} é nulo, implicando assim que $I_{ij} = \mathcal{I}_{ij}$.

4.3 A binária de Hulse e Taylor

No capítulo 1, discutimos a descoberta feita por Russell Hulse e Joseph Taylor de uma estrela binária formada por um pulsar e outra estrela de nêutrons que orbitam um baricentro comum. Tal sistema foi designado por *PSR 1913+16*. O que faremos agora é aplicar os resultados obtidos na seção anterior a este sistema, para assim, termos uma ideia dos valores envolvidos nesse tipo de evento; por exemplo, a taxa da liberação de energia devido à emissão de ondas gravitacionais. Como consultado em [17], os dados do referido evento são:

$$m_1 \sim 1,441M_{\odot}$$

$$m_2 \sim 1,387M_{\odot}$$

$$\Omega \sim 3,58 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$$

$$l_0 = 0,19 \cdot 10^{12} \text{ cm} \sim 2R_{\odot}$$

$$P = 7\text{h } 45\text{m } 7\text{s}$$

$$r = 1,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}$$

onde os parâmetros acima são os mesmos descritos na seção anterior; P o período e r a distância binária-Terra. De posse desses dados, podemos concluir que a frequência ν_{GW} das ondas emitidas nesse evento são da ordem de

$$\nu_{GW} = 2\Omega \sim 7,16 \cdot 10^{-5} \text{ Hz} \quad (4.72)$$

além disso, usando-se (4.69) e (4.71) encontramos também

$$L_{GW} = 7,0 \cdot 10^{23} \text{ W} \quad (4.73)$$

$$h_0 \sim 6 \cdot 10^{-23} \quad (4.74)$$

Os resultados acima nos permitem tirar algumas conclusões imediatas. Primeiro, a amplitude de tais ondas é ínfima. Já havíamos explicitado isso no primeiro capítulo, mas agora demonstramos essa afirmação, pelo menos para um caso particular. A perda de energia devido à emissão de ondas gravitacionais é altíssima. Para se ter uma ideia de quanta energia estamos falando, o próprio Sol irradia uma quantidade equivalente a $4,3 \cdot 10^{26} \text{ W}$ através de radiação eletromag-

nética, mas apenas $5 \cdot 10^3 \text{ W}$ via radiação gravitacional. Incrivelmente, por mais alta que seja a energia irradiada nesse evento, nem mesmo os observatórios do *Advanced LIGO* seriam capazes de detectar essas ondas, como pode ser visto no gráfico abaixo (figura 4.4) [17].

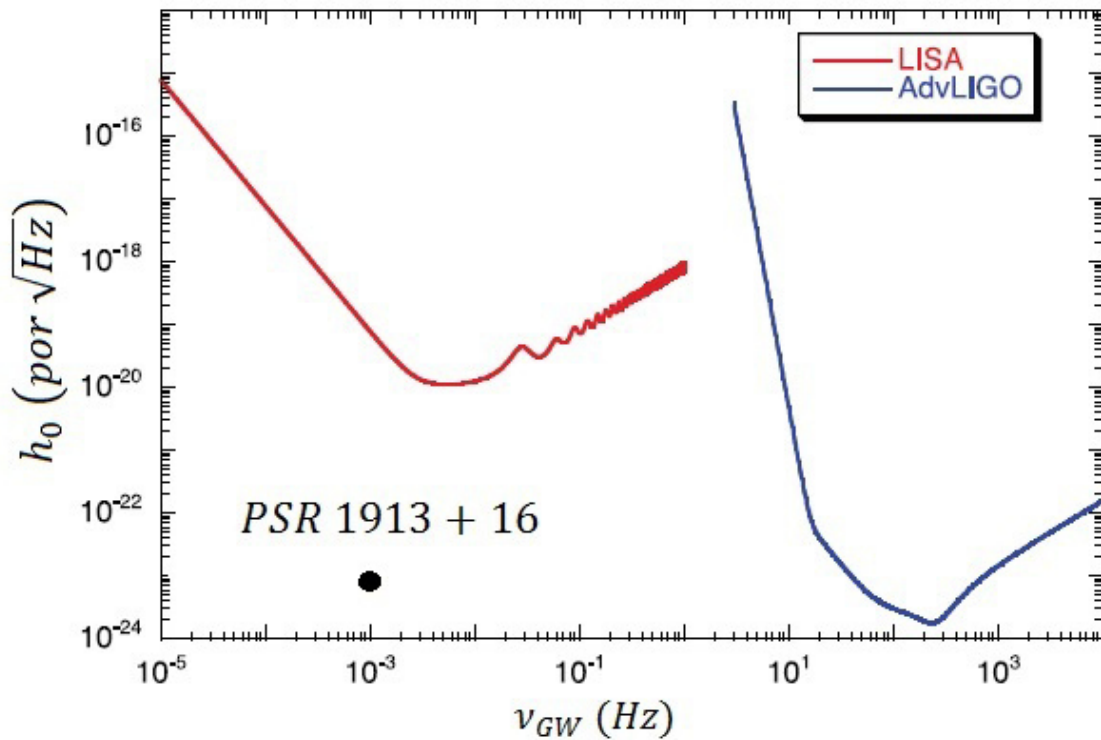


Figura 4.4 – Em vermelho, temos a curva de sensibilidade dos equipamentos LISA (Laser Interferometer Space Antenna Project). Em azul, a curva de sensibilidade dos equipamentos do Advanced LIGO. Apenas eventos localizados acima de tais curvas é que podem ser detectados. No entanto, como pode ser visto, *PSR 1913 + 16* não se encontra em nenhuma dessas regiões e, portanto, não pode ser detectada [17].

É de se esperar que com a perda de toda essa energia as componentes da binária acabem se aproximando, o que acarreta na diminuição do período orbital. Para finalizar o trabalho, o que faremos agora é aproveitar todos os resultados obtidos até aqui para calcular essa diminuição no período. Isso nos possibilitará ter uma noção de quando irá acontecer a coalescência das referidas componentes.

A expressão (4.69) foi obtida a partir de (4.54). Isto implica que ela deve ser considerada como uma média de muitos comprimentos de onda ou, equivalentemente, sobre um número muito grande de períodos. Portanto, a fim de que L_{GW} seja uma grandeza definida, devemos estar em uma região onde os parâmetros orbitais não mudam significativamente durante o intervalo de tempo necessário para executar tal média. Esta hipótese é chamada de *aproximação adiabática* e, certamente, é aplicável a sistemas tais como *PSR 1913 + 16* que estão muito longe

da coalescência¹⁰.

No regime adiabático, o sistema tem tempo de ajustar a órbita para compensar a energia perdida pela emissão de ondas gravitacionais com uma mudança na energia orbital, de tal maneira que:

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} + L_{\text{GW}} = 0 \quad (4.75)$$

vejamos agora as consequências dessa equação.

A energia orbital é igual à energia cinética E_c de cada uma das componentes, acrescida da energia potencial U de ligação (que neste caso é de origem gravitacional), isto é

$$E_{\text{orb}} = E_c + U \quad (4.76)$$

onde

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m_1(\Omega r_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\Omega r_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Omega^2 \left[\frac{m_1 m_2^2 l_0^2}{M^2} + \frac{m_1^2 m_2 l_0}{M^2} \right] \\ &= \frac{G\mu M}{2l_0} \end{aligned} \quad (4.77)$$

e

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{l_0} = -\frac{G\mu M}{l_0} \quad (4.78)$$

substituindo (4.77) e (4.78) em (4.76), obtemos

$$E_{\text{orb}} = -\frac{G\mu M}{2l_0} \quad (4.79)$$

e tomando-se a derivada temporal da expressão acima

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = \frac{G\mu M}{2l_0} \left(\frac{1}{l_0} \frac{dl_0}{dt} \right) = -E_{\text{orb}} \left(\frac{1}{l_0} \frac{dl_0}{dt} \right) \quad (4.80)$$

No entanto, a expressão acima pode ser escrita de uma maneira mais sugestiva, para isso,

¹⁰Os dados mostrados acima indicam que essa coalescência está longe de ocorrer. O que queremos é ter ideia do quão longe.

reescreveremos dl_0/dt em termos da derivada temporal de Ω . De (4.59), temos

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{dl_0}{dt} \quad (4.81)$$

e substituindo (4.81) em (4.80), ficamos com

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{E_{\text{orb}}}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} \quad (4.82)$$

por outro lado, a frequência orbital Ω é relacionada com o período P pela relação $\Omega = 2\pi/P$, o que implica em

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} \quad (4.83)$$

pondo isso na equação (4.82), obtemos

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{P}{E_{\text{orb}}} \frac{dE_{\text{orb}}}{dt} \quad (4.84)$$

ou, fazendo uso de (4.75)

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P}{E_{\text{orb}}} L_{\text{GW}} \quad (4.85)$$

A relação acima nos permite computar o quanto o período da órbita muda devido a emissão de ondas gravitacionais. Supondo que nossa órbita seja circular e, portanto, que os dados acima são verdadeiros, temos que

$$P = 27907 \text{ s}$$

$$E_{\text{orb}} \sim -1,4 \cdot 10^{41} \text{ J}$$

$$L_{\text{GW}} = 7,0 \cdot 10^{23} \text{ W}$$

logo

$$\frac{dP}{dt} \sim -2,2 \cdot 10^{-13} \text{ s/s} \quad (4.86)$$

No entanto, o valor de dP/dt foi obtido a partir de medições. Tal valor, medido com uma precisão altíssima, foi encontrado depois de aproximadamente três décadas de monitoramento e vale:

$$\frac{dP}{dt} = -(2,4184 \pm 0,0009) \cdot 10^{-12} \text{ s/s} \quad (4.87)$$

o que implica em uma taxa de redução de período orbital de aproximadamente 76,5 microssegundos por ano. Com isso, o tempo de vida calculado para a inspiral final é de 300 milhões de anos [17].

Como pode ser visto, existe uma grande diferença entre o valor obtido teoricamente e o medido. Na verdade, tal discrepância já era de ser esperada. Isto porque a órbita real do sistema não é circular, mas sim uma elipse de excentricidade $\epsilon \approx 0,617$ [17]. Como explicado em [15], se refizéssemos os cálculos usando as equações de movimento apropriadas para uma órbita excêntrica, obteríamos

$$\frac{dP}{dt} \sim -2,4 \cdot 10^{-12} \text{s/s} \quad (4.88)$$

que é incrivelmente próximo do valor medido.

Em 2004, Taylor e Joel M. Weisberg publicaram uma nova análise dos dados experimentais, concluindo que a disparidade de 0,2% entre os dados e os resultados previstos é devido a constantes galácticas pouco conhecidas, incluindo a distância do Sol ao centro da galáxia, movimento próprio do pulsar e sua distância da Terra [17].

Capítulo 5

Conclusão & Perspectivas

O objetivo deste trabalho foi fazer um estudo introdutório sobre ondas gravitacionais. Começamos por uma breve análise da lei da gravitação newtoniana, discutindo seus feitos e um pouco de sua história. Ainda na introdução debatemos um pouco sobre a teoria da Relatividade Geral e uma de suas previsões mais impactantes, a existência de ondas gravitacionais. Em seguida, discutimos como se deu a detecção das ondas produzidas pelo evento chamado GW150914, que tratou da fusão de um par de buracos negros. Essa detecção além de confirmar, mais uma vez, a veracidade da teoria de Einstein, inaugura também uma nova maneira de observarmos o universo.

No capítulo 2, fizemos um apanhado geral sobre a RG e discutimos os dois princípios que regem essa teoria: o *princípio da equivalência* e o *princípio da covariância geral*. Por fim, obtivemos as equações de Einstein da gravitação.

No capítulo 3, aplicamos o método perturbativo nas equações de Einstein e em seguida as linearizamos. Como consequência obtivemos que as componentes espaciais da perturbação obedecem a uma equação de onda, e estudamos tal equação no caso de ausência de fontes. Logo após, discutimos os dois estados de polarização das ondas gravitacionais.

No capítulo 4, estudamos a geração de ondas gravitacionais. Para isso, voltamos a equação de onda obedecida pelas componentes espaciais da perturbação, mas dessa vez com a inclusão do termo de fonte, isto é, considerando a presença de matéria. Passamos então a discutir a natureza quadrupolar da radiação e suas diferenças em relação à radiação eletromagnética que é de natureza dipolar. Por fim, computamos a energia emitida via radiação gravitacional por sistemas binários em órbita circular e aplicamos nossos resultados aos dados experimentais da PSR 1913 + 16 (Binária de Hulse e Taylor). Os dados desse pulsar binário levam à previsão teórica de que a potência irradiada nesse evento, devido exclusivamente às ondas gravitacionais, é da

ordem de $7 \cdot 10^{23} \text{ W}$. Para se ter uma ideia do que significa essa quantidade de energia, o próprio Sol irradia uma quantidade equivalente a $4,3 \cdot 10^{26} \text{ W}$ através de radiação eletromagnética, mas apenas $5 \cdot 10^3 \text{ W}$ via radiação gravitacional.

Outro dado de suma importância obtido aqui foi a diminuição do período orbital dessa binária, algo em torno de $dP/dt \simeq -2.2 \cdot 10^{-13} \text{ s/s}$. No entanto, este resultado não é tão próximo do valor medido $dP/dt \simeq -(2,4184 \pm 0,0009) \cdot 10^{-13} \text{ s/s}$ (uma redução de aproximadamente $76,5 \mu\text{s}$ por ano). Tal medição foi resultado de aproximadamente três décadas de muitas observações e realizada com uma precisão altíssima. De fato, esse erro já era esperado, pois a órbita do sistema real não é circular e sim elíptica, com excentricidade $e \simeq 0,617$. Como pode ser visto em [15], fazendo-se novamente os cálculos, mas dessa vez usando as equações de movimento apropriadas para uma órbita excêntrica, iríamos encontrar $dP/dt \simeq -2.4 \cdot 10^{-12} \text{ s/s}$, o que concorda totalmente com resultado experimental. Portanto, concluímos que o desenvolvimento teórico feito por Einstein e reproduzido em parte aqui, sobre as ondas gravitacionais, é realmente a correta para descrever esses eventos cataclísmicos que ocorrem no universo.

É pensado, como perspectiva, desenvolver os cálculos da emissão de energia considerando a excentricidade das órbitas e então aplicar os resultados a outros sistemas binários. Além disso, o formalismo descrito neste trabalho pode ser aplicado para calcular ondas gravitacionais emitidas por outras configurações; por exemplo, a de oscilador harmônico que, apesar de não existir no universo, em muitos casos especiais torna-se uma aproximação bastante razoável.

Referências Bibliográficas

- [1] European Southern Observatory. Imagem infravermelha vista da nebulosa de Órion. <https://www.eso.org/public/brazil/images/eso1006a/>. Acessado em 02 de Outubro de 2016.
- [2] Wikipédia. Precessão do periélio de mercúrio. https://pt.wikipedia.org/wiki/Precess%C3%A3o_do_peri%C3%A9lio_de_Merc%C3%BArio. Acessado em 27 de Julho de 2016.
- [3] Stephen Hawking. *The Universe in a Nutshell*. Bantam Spectra, 2001.
- [4] Caltech. What are gravitational wave? <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-are-gw>. Acessado em 28 de Agosto de 2016.
- [5] Caltech. The laser interferometer gravitational-wave observatory. <http://www.astro.caltech.edu/research/ligo/>. Acessado em 26 de Agosto de 2016.
- [6] Caltech. Ligo's dual detectors. <https://www.ligo.caltech.edu/page/ligo-detectors>. Acessado em 29 de Agosto de 2016.
- [7] Caltech. Our sister facilities. <https://www.ligo.caltech.edu/page/ligo-sister-facilities>. Acessado em 29 de Agosto de 2016.
- [8] Caltech. Two black holes merge into one. <https://www.ligo.caltech.edu/video/ligo20160211v3>. Acessado em 27 de Agosto de 2016.
- [9] B. P. Abbott. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett*, 116:1–16, Feb 2016.
- [10] Caltech. Where the gravitational waves came from. <https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20160211b>. Acessado em 27 de Agosto de 2016.

- [11] Simon Singh. *Big Bang*. HarperCollins, 2004.
- [12] Renato Brito. *Fundamentos de mecânica – Volume 1*. Vestseller, 2010.
- [13] Wikipédia. Círculo máximo. https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%ADrculo_m%C3%A1ximo. Acessado em 16 de Julho de 2016.
- [14] Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford, 1992.
- [15] T. Padmanabhan. *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [16] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [17] Joel M. Weisberg and Joseph H. Taylor. The relativistic binary pulsar b1913+16: Thirty years of observations and analysis. *ASP Conference Series*, TBD:1–7, Jul 2004.
- [18] Kepler de Oliveira. *Astronomia e Astrofísica*. Livraria da física, 2013.
- [19] Richard Phillips Feynman. *The character of physical law*. British Broadcasting Corporation (BBC), 1964.
- [20] Isaac Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. University of California Press, 1687.
- [21] Wikipédia. Experiência de cavendish. https://pt.wikipedia.org/wiki/Experi%C3%Aancia_de_Cavendish. Acessado em 21 de Julho de 2016.
- [22] Ronaldo E. de Souza. *Introdução À Cosmologia*. Edusp, 2004.
- [23] Moysés Nussenzveig. *Um curso de física básica*. Blucher, 2002.
- [24] Albert Einstein; tradução de Silvio Levy. *A teoria da relatividade*. LePM, 2013.
- [25] Caltech. Gravitational waves detected 100 years after einstein’s prediction. <https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20160211>. Acessado em 26 de Agosto de 2016.
- [26] Caltech. Ligo technology. <https://www.ligo.caltech.edu/page/ligo-technology>. Acessado em 29 de Agosto de 2016.

- [27] Ciência Hoje. Nas ondas do rádio. http://www.cienciahoje.org.br/noticia/v/ler/id/2737/n/nas_ondas_do_radio. Acessado em 31 de Agosto de 2016.
- [28] Kepler de Oliveira. *Astronomia e Astrofísica*. Livraria da Física, 2013.
- [29] Caltech. Why detect them? <https://www.ligo.caltech.edu/page/why-detect-gw>. Acessado em 01 de Setembro de 2016.
- [30] João Barcelos Neto. *Matemática para físicos com aplicações*. Livraria da Física, 2010.
- [31] Raymond A. Serway. *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. John W and Jewett Jr., 1982.
- [32] Robert M. Wald. *General Relativity*. The university of Chicago press, 1984.
- [33] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.
- [34] Albert Einstein. *Teoria da Relatividade Especial e Geral*. Contraponto, 1916.
- [35] Nicolas Carvalho de Brito. Sobre a construção das equações de einstein da gravitação, 2016.
- [36] Sergei Kopeikin and Michael Efroimsky. *Relativistic Celestial Mechanics of the Solar System*. John Wiley and Sons, 2011.
- [37] Ivan Carneiro Jardim. Promediação dos campos gravito-eletromagnéticos na aproximação pós-newtoniana. Master's thesis, Universidade Federal do Ceará, 2007.
- [38] Jerry B. Marion e Stephen T. Thrnton. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. Cengage Learning, 2011.
- [39] Wolfgang Rindler. *Relativity Special, General, and Cosmological*. Oxford, 2006.
- [40] Hans Stephani. *General Relativity: an introduction to the theory of the gravitational field*. Cambridge University Press, 1982.
- [41] Rodrigo Panosso Macedo. *Emissão de ondas gravitacionais por fontes compactas: o regime não-linear*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2011.

- [42] Edgard de Freitas Diniz Evangelista. *Um novo método para o cálculo dos fundos estocásticos em ondas gravitacionais gerados por sistemas binários compactos*. PhD thesis, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2013.

Apêndice A

Propriedades do tensor de curvatura, tensor de Ricci e escalar de curvatura

O objetivo desse apêndice é fazer um breve estudo sobre as propriedades do tensor de curvatura, tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Começando pelo tensor de curvatura. As propriedades desse objeto tornam-se mais evidentes se o reescrevemos na forma totalmente covariante, isto é $R_{\sigma\lambda\nu\mu}$ em vez de $R_{\lambda\nu\mu}^{\sigma}$; o que é obtido graças a uma simples contração

$$R_{\sigma\lambda\nu\mu} = g_{\kappa\sigma} R_{\lambda\nu\mu}^{\kappa} \quad (\text{A.1})$$

onde, substituindo (2.58) obtemos

$$R_{\sigma\lambda\nu\mu} = g_{\kappa\sigma} \left[\partial_{\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} - \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^{\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\kappa} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\kappa} \right] \quad (\text{A.2})$$

Para uma melhor visualização das simetrias envolvidas em $R_{\sigma\lambda\nu\mu}$ vamos escrevê-lo em termos das derivadas segundas da métrica. Para isso, substituímos (2.21) em (A.2) o que nos dá

$$\begin{aligned} R_{\sigma\lambda\nu\mu} = & \frac{1}{2} g_{\kappa\sigma} \partial_{\nu} \left[g^{\alpha\kappa} (g_{\alpha\mu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\alpha}) \right] - \frac{1}{2} g_{\kappa\sigma} \partial_{\mu} \left[g^{\alpha\kappa} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\alpha}) \right] \\ & + g_{\kappa\sigma} \left[\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\kappa} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\kappa} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

mas,¹

$$g_{\kappa\sigma}\partial_\nu g^{\alpha\kappa} = -g^{\alpha\kappa}\partial_\nu g_{\kappa\sigma} \quad (\text{A.4})$$

o que ainda pode ser reescrito, através de (2.53), como

$$g_{\kappa\sigma}\partial_\nu g^{\alpha\kappa} = -g^{\alpha\kappa} \left[\Gamma_{\nu\kappa}^\eta g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\eta g_{\kappa\eta} \right] \quad (\text{A.5})$$

Substituindo esse resultado em (A.3) e usando novamente a equação (2.21) nos leva a:

$$\begin{aligned} R_{\sigma\lambda\nu\mu} = & - \left(\Gamma_{\nu\kappa}^\eta g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\eta g_{\kappa\eta} \right) \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + \left(\Gamma_{\mu\kappa}^\eta g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^\eta g_{\kappa\eta} \right) \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \\ & + \frac{1}{2} \delta_\sigma^\alpha \left[\partial_\nu \partial_\lambda g_{\alpha\mu} - \partial_\nu \partial_\alpha g_{\mu\lambda} - \partial_\mu \partial_\lambda g_{\alpha\nu} + \partial_\mu \partial_\alpha g_{\lambda\nu} \right] \\ & + g_{\kappa\sigma} \left[\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\kappa - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\kappa \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

e portanto

$$R_{\sigma\lambda\nu\mu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\nu \partial_\lambda g_{\sigma\mu} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\lambda} - \partial_\mu \partial_\lambda g_{\sigma\nu} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\lambda\nu} \right) + g_{\kappa\eta} \left[\Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \Gamma_{\mu\sigma}^\eta - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \Gamma_{\nu\sigma}^\eta \right] \quad (\text{A.7})$$

A equação (A.7) nos permite enxergar as seguintes propriedades:

(A) Simetria;

$$R_{\sigma\lambda\nu\mu} = R_{\nu\mu\sigma\lambda} \quad (\text{A.8})$$

(B) Anti-simetria;

$$R_{\sigma\lambda\nu\mu} = -R_{\lambda\sigma\nu\mu} \quad (\text{A.9})$$

$$R_{\sigma\lambda\nu\mu} = -R_{\sigma\lambda\mu\nu} \quad (\text{A.10})$$

(C) Ciclicidade.

$$R_{\sigma\lambda\nu\mu} + R_{\sigma\mu\lambda\nu} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} = 0 \quad (\text{A.11})$$

¹Essa relação pode ser obtida aplicando-se a derivada ordinária na igualdade $g_{\kappa\sigma}g^{\alpha\kappa} = \delta_\sigma^\alpha$.

O tensor de curvatura possui um total de 256 elementos distintos, mas devido as propriedades acima esse número cai para apenas 20. Além disso, essas simetrias (mais especificamente a propriedade B) restringe os tipos de tensores que podem ser formados a partir de $R_{\sigma\lambda\nu\mu}$. O único tensor de rank 2 que pode ser obtido é o chamado *tensor de Ricci* e definido por:

$$R_{\lambda\mu} \equiv g^{\sigma\nu} R_{\sigma\lambda\nu\mu} \quad (\text{A.12})$$

e pela propriedade A vemos que ele é simétrico, isto é

$$R_{\lambda\mu} = R_{\mu\lambda} \quad (\text{A.13})$$

o que implica que possui apenas 10 graus de liberdade.

Existe ainda mais um único objeto que podemos construir, denominado de *escalar de curvatura* e definido como

$$R \equiv g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} R_{\sigma\lambda\nu\mu} = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} \quad (\text{A.14})$$

e por se tratar de um escalar é invariante sobre mudanças de coordenadas.

Apêndice B

Identidade de Bianchi

O objetivo desse apêndice é a demonstração da identidade de Bianchi, muito útil na obtenção das equação de campo de Einstein para a gravitação. No apêndice A demonstramos que:

$$R_{\sigma\lambda\nu\mu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\nu \partial_\lambda g_{\sigma\mu} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\lambda} - \partial_\mu \partial_\lambda g_{\sigma\nu} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\lambda\nu} \right) + g_{\kappa\eta} \left[\Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \Gamma_{\mu\sigma}^\eta - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \Gamma_{\nu\sigma}^\eta \right] \quad (\text{B.1})$$

A derivada covariante do tensor de curvatura é dada por

$$\nabla_\rho R_{\sigma\lambda\nu\mu} = \partial_\rho R_{\sigma\lambda\nu\mu} - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha R_{\alpha\lambda\nu\mu} - \Gamma_{\rho\lambda}^\alpha R_{\sigma\alpha\nu\mu} - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha R_{\sigma\lambda\alpha\mu} - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha R_{\sigma\lambda\nu\alpha} \quad (\text{B.2})$$

substituindo (B.1) em (B.2), ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\nu\mu} = & \frac{1}{2} \partial_\rho \left[\partial_\nu \partial_\lambda g_{\sigma\mu} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\lambda} - \partial_\mu \partial_\lambda g_{\sigma\nu} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\lambda\nu} \right] + \partial_\rho \left\{ g_{\kappa\eta} \left[\Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \Gamma_{\mu\sigma}^\eta - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \Gamma_{\nu\sigma}^\eta \right] \right\} \\ & - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha R_{\alpha\lambda\nu\mu} - \Gamma_{\rho\lambda}^\alpha R_{\sigma\alpha\nu\mu} - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha R_{\sigma\lambda\alpha\mu} - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha R_{\sigma\lambda\nu\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Tentar demonstrar a identidade de Bianchi usando a relação acima seria muito trabalhoso. Felizmente, existe uma maneira fôrmidável de resolvermos esse impasse, como surgerido em [33]. Temos que $\nabla_\rho R_{\sigma\lambda\nu\mu}$ é um legítimo tensor, o que implica que se conseguirmos demonstrar que ele obedece uma determinada relação em um sistema de coordenadas específico, então, obedecerá a mesma relação em todos os outros.

Suponha um determinado ponto \mathbf{x} , no qual adotamos um sistema de coordenadas localmente inercial, assim, para este ponto, temos que $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ (mas não suas derivadas) serão todos nulos. Por-

tanto em x temos

$$\begin{aligned}\nabla_{\rho}R_{\sigma\lambda\nu\mu} &= \frac{1}{2}\partial_{\rho}\left[\partial_{\nu}\partial_{\lambda}g_{\sigma\mu} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu}\partial_{\lambda}g_{\sigma\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\sigma}g_{\lambda\nu}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_{\rho}\partial_{\nu}\partial_{\lambda}g_{\sigma\mu} - \partial_{\rho}\partial_{\nu}\partial_{\sigma}g_{\mu\lambda} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}g_{\sigma\nu} + \partial_{\rho}\partial_{\mu}\partial_{\sigma}g_{\lambda\nu}\right]\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

Fazendo uma permutação cíclica nos índices λ , ν e ρ na equação acima, nos permite concluir que

$$\nabla_{\rho}R_{\sigma\lambda\nu\mu} + \nabla_{\mu}R_{\sigma\lambda\rho\nu} + \nabla_{\nu}R_{\sigma\lambda\mu\rho} = 0 \quad (\text{B.5})$$

que é a chamada *identidade de Bianchi*; e que como já dito, é válida em qualquer sistema de coordenadas.

Apêndice C

Solução da equação de onda com o termo de fonte

O objetivo desse apêndice é encontrar as soluções para a equação

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{C.1})$$

o que será feito através do método da função de Green.

A função de Green $G(x^\sigma - y^\sigma)$ por definição satisfaz

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma) \quad (\text{C.2})$$

onde \square_x denota o operador d'Alembertiano com respeito as coordenadas x^σ . A utilidade dessa função reside no fato de que a solução geral de (C.1) pode ser escrita na forma

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4y \quad (\text{C.3})$$

como se pode verificar por uma substituição direta¹. Assim, determinando $G(x^\sigma - y^\sigma)$, estaremos determinando também a solução geral de (C.1).

A notação utilizada no desenvolvimento das contas será a seguinte²: $x^\sigma = (ct, \mathbf{r})$ e $y^\sigma =$

¹Vale salientar que não é necessário incluir o fator \sqrt{g} na integração uma vez que estamos trabalhando em um espaço-tempo de fundo plano.

²Tomaremos $c = 1$ somente no final do processamento algébrico.

(ct', \mathbf{r}') . Portanto, nessa notação, a equação (C.2) pode ser reescrita como

$$\square G(\mathbf{r}, ct, \mathbf{r}', ct') = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(ct - ct') \quad (\text{C.4})$$

ou

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, ct, \mathbf{r}', ct') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, ct, \mathbf{r}', ct') = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(ct - ct') \quad (\text{C.5})$$

e aplicando-se a transformada de Fourier sobre a variável ct em ambos os membros da equação acima, obtemos

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', ct') + \omega^2 g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', ct') = \frac{e^{i\omega ct'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{C.6})$$

onde usamos a representação integral da função delta de Dirac, isto é

$$\delta(ct - ct') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega c(t-t')} \quad (\text{C.7})$$

e definimos

$$G(\mathbf{r}, ct, \mathbf{r}', ct') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega ct} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', ct') \quad (\text{C.8})$$

Tomando-se outra transformada de Fourier, mas agora na equação (C.6) e com a relação à variável \mathbf{r} , obtemos

$$-k^2 \bar{g}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', ct') + \omega^2 \bar{g}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', ct') = \frac{1}{(2\pi)^4} e^{[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' + i\omega ct']} \quad (\text{C.9})$$

onde novamente utilizamos uma representação integral da função delta de Dirac, mas dessa vez dada por

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (\text{C.10})$$

e definimos

$$g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', ct') = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', ct') \quad (\text{C.11})$$

De (C.9) concluímos que

$$\bar{g}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', ct') = \frac{e^{[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'+i\omega ct']}}{(2\pi)^4[-k^2 + \omega^2]} \quad (\text{C.12})$$

e portanto

$$g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', ct') = \int d^3k \frac{e^{[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+i\omega ct']}}{(2\pi)^4[-k^2 + \omega^2]} \quad (\text{C.13})$$

substituindo (C.13) em (C.8) obtemos que a função de Green é

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', ct - ct') = \int d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\omega c(t-t')]} (2\pi)^4[-k^2 + \omega^2]} \quad (\text{C.14})$$

ou ainda

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, ct) &= \int d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega ct]}}{(2\pi)^4[-k^2 + \omega^2]} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega ct} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(k^2 - \omega^2)} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Precisamos agora resolver as integrais acima, e a melhor maneira de se fazer isto é trabalhar em coordenadas esféricas, pois assim

$$\begin{aligned} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(k^2 - \omega^2)} &= \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\phi_k \int_0^\pi d\theta_k \text{sen}\theta_k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(k^2 - \omega^2)} \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} dk \int_0^\pi d\theta_k \text{sen}\theta_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

e escolhendo-se o eixo z do espaço dos vetores de onda \mathbf{k} , como sendo paralelo ao vetor \mathbf{r} , ficamos com

$$\begin{aligned} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(k^2 - \omega^2)} &= 2\pi \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} dk \int_0^\pi d\theta_k \text{sen}\theta_k e^{ikr\cos\theta_k} \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} dk \int_{-1}^1 e^{ikru} du \\ &= \frac{2\pi}{ir} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 - \omega^2} [e^{ikr} - e^{-ikr}] dk \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

onde utilizamos a substituição $u = \cos\theta_k$. Usando agora o fato de que

$$\int_0^{\infty} \frac{k}{k^2 - \omega^2} e^{-ikr} dk = - \int_{-\infty}^0 \frac{k}{k^2 - \omega^2} e^{ikr} dk \quad (\text{C.18})$$

podemos escrever

$$\int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(k^2 - \omega^2)} = \frac{2\pi}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2 - \omega^2} e^{ikr} dk \quad (\text{C.19})$$

A integral acima é facilmente resolvida no plano complexo, para isso, devemos resolver

$$\oint_C \frac{Z}{(Z - \omega)(Z + \omega)} e^{irZ} dZ \quad (\text{C.20})$$

onde $\pm\omega$ são os polos e o contorno C é fechado sobre o semi-plano complexo superior, como mostra a figura (C.1).

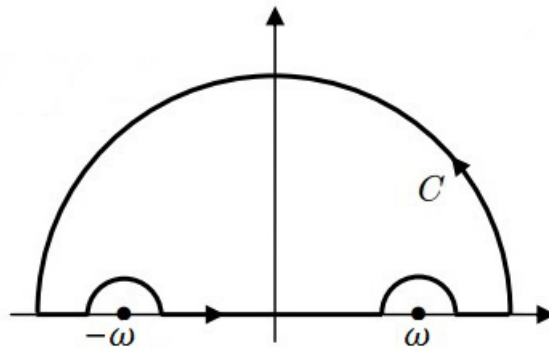


Figura C.1 – Contorno utilizado para calcular a integral (C.20)

Usando o teorema dos resíduos, chegamos a conclusão de que:

$$\oint_C \frac{Z}{(Z - \omega)(Z + \omega)} e^{irZ} dZ = \pi i e^{(\pm i\omega r)} \quad (\text{C.21})$$

e portanto

$$\int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(k^2 - \omega^2)} = \frac{2\pi^2}{r} e^{(\pm i\omega r)} \quad (\text{C.22})$$

substituindo (C.22) em (C.15) ficamos com

$$\begin{aligned}
G_{\pm}(\mathbf{r}, ct) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega ct} \frac{2\pi^2}{r} e^{(\pm i\omega r)} \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega ct} e^{(\pm i\omega r)} \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(ct \mp r)} \\
&= -\frac{1}{4\pi r} \delta(ct \mp r)
\end{aligned} \tag{C.23}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
G_{\pm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', ct - ct') &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(ct - ct' \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\
&= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(ct' - ct \pm |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)
\end{aligned} \tag{C.24}$$

e voltando para a notação indicial (com $c = 1$ novamente)

$$G_{\pm}(x^{\sigma} - y^{\sigma}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta[\pm|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0) \tag{C.25}$$

onde a função $\theta(x^0 - y^0)$ vale 1 se $x^0 > y^0$ e 0 caso contrário. Como explicado na seção (4.1), estamos interessados apenas na solução expressa em função do tempo retardado, dada por

$$G(x^{\sigma} - y^{\sigma}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta[|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0) \tag{C.26}$$

substituindo (C.26) em (C.3) ficamos com

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G \int \left[-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta[|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0) \right] T_{\mu\nu}(y^0, \mathbf{y}) d^3y dy^0$$

e utilizando a função delta para calcular a integral em y^0 , obtemos finalmente a solução de (C.1), que é

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y}) d^3y \tag{C.27}$$