



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DÉBORA AGUIAR GOMES

ASPECTOS QUÂNTICOS DE BURACOS NEGROS: RADIAÇÃO
HAWKING

FORTALEZA

2016

DÉBORA AGUIAR GOMES

ASPECTOS QUÂNTICOS DE BURACOS NEGROS: RADIAÇÃO HAWKING

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

Coorientador: Dr. Victor do Nascimento Santos.

FORTALEZA
2016

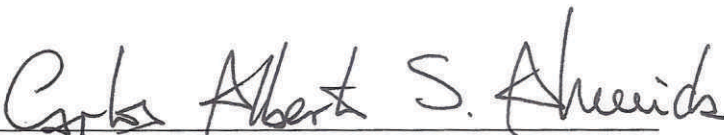
Aspectos Quânticos de Buracos Negros: Radiação Hawking

Débora Aguiar Gomes

NOTA DE APROVAÇÃO: 10,0

DATA: 14 de Dezembro de 2016

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida - Orientador
Universidade Federal do Ceará - UFC


Dr. Victor do Nascimento Santos
Universidade Federal do Ceará


Dr. Davi Monteiro Dantas
Universidade Federal do Ceará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- G613a Gomes, Débora Aguiar.
Aspectos Quânticos de Buracos Negros: Radiação Hawking / Débora Aguiar Gomes. – 2016.
74 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
Coorientação: Prof. Dr. Victor do Nascimento Santos.
1. Buracos Negros. 2. Entropia de Buracos Negros. 3. Radiação Hawking. I. Título.

CDD 530

*"A imaginação
muitas vezes
conduz-nos a mundos
a que nunca fomos,
mas sem ela não
iremos a lugar
nenhum" - Carl
Sagan*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer aos familiares e amigos pelo apoio e compreensão oferecidos, que foram de fundamental importância. Agradeço especialmente à minha mãe, pelo exemplo de dedicação, e aos amigos Sarah Rosas, Beatriz Santiago, Deborah Nogueira, Paulo Henrique Pessoa e Anderson Lemos, que me acompanharam de perto durante a minha graduação.

Quero agradecer ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida, por sua orientação e ensinamentos durante o período em que fui sua aluna de iniciação científica e por ter confiado na minha capacidade. Gostaria de agradecer também aos professores Vitor Santos, Euclides Gomes e Roberto Maluf que contribuíram muito para o meu desenvolvimento durante a iniciação científica e compartilharam seu conhecimento e experiência.

Aos colegas do Departamento de Física da UFC, Levi Félix, Matheus Pinheiro, Ewerton Avlis, Cleiton Estevão, Michelângelo Frost, Bruno Duarte, Misael Moura, Lemuel Ferreira, Nathanaell Sousa, Rafael Farias, Sofia Cunha, Michel Andrade, Nicolas com quem dividi as angústias e aprendizados e pelo companheirismo durante o período da graduação.

Por fim, gostaria de agradecer, ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, por proporcionar uma sólida formação acadêmica aos seus alunos, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo financiamento à pesquisa científica.

RESUMO

Desde a publicação da solução de Schwarzschild para as equações de campo de Einstein, muitos trabalhos vem sendo desenvolvidos em teoria de buracos negros. Classicamente, um buraco negro é definido como um objeto físico que não pode ejetar matéria ou radiação, mas somente absorvê-las. Porém, devido a efeitos quânticos, um buraco negro pode emitir radiação com espectro de corpo negro. Esse efeito, apresentado por Stephen Hawking em 1975, recebe o nome de radiação Hawking. A existência dessa radiação aponta uma conexão entre a mecânica de buracos negros e a termodinâmica. O mais importante exemplo disso é dado pela semelhança existente entre as propriedades da área de um buraco negro e a entropia associada a ele. Neste trabalho, apresentamos os principais resultados clássicos da teoria de buracos negros, a analogia entre a mecânica de buracos negros e a termodinâmica e descrevemos quanticamente a radiação Hawking.

Palavras-chave: Buracos Negros. Entropia de Buracos Negros. Radiação Hawking.

ABSTRACT

Many works have been developed in black hole theory since the publication of Schwarzschild's solution for Einstein's field equations. Classically, a black hole is defined as a physical object that can not eject matter or radiation, but only absorb them. However, due to quantum effects, a black hole can emit radiation with a blackbody spectrum. This effect, presented by Stephen Hawking in 1975, is called Hawking radiation. This effect points to a connection between the mechanics of black holes and thermodynamics. The most important example of this is given by the similarity between the properties of the area of a black hole and the entropy associated with it. In this work, we present the main classical results of black hole theory, the analogy between black hole mechanics and thermodynamics, and describe Hawking radiation quantically.

Keywords: Black Holes. Black Hole Entropy. Hawking Radiation.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparativo entre as principais métricas e seus parâmetros	43
Tabela 2 – Comparativo entre a termodinâmica clássica e a mecânica de buracos negros.	50

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fonte: [1]. Espaço-tempo na Relatividade Restrita	17
Figura 2 – Fonte: [1]. Espaço-tempo na mecânica Newtoniana.	18
Figura 3 – Fonte: [1]. Diagrama de espaço-tempo para dois eventos distintos.	18
Figura 4 – Fonte: [1]. Triângulo esférico.	26
Figura 5 – Fonte: [1]. Transporte paralelo num espaço plano.	27
Figura 6 – Fonte: [1]. Transporte paralelo numa superfície esférica.	27
Figura 7 – Fonte: [2]. Coordenadas de Eddington-Finkelstein incidentes e emergentes. As setas indicam a direção da coordenada temporal da métrica de original Schwarzschild. A figura da esquerda representa um buraco negro: os fótons que chegam atravessam o horizonte de eventos e alcançam a singularidade; A segunda figura representa um buraco branco no qual o contrário acontece: os fótons emergem da singularidade, atravessam o horizonte de eventos e se propagam no infinito.	36
Figura 8 – Fonte: [3]. Coordenadas de Kruskal-Szekeres.	40
Figura 9 – Fonte: [4]. (a) Criação e aniquilação de partículas. (b) Criação e ani- quilação de partículas nas proximidades de um buraco negro.	45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	TEORIA DA RELATIVIDADE	14
2.1	Relatividade Especial	14
2.1.1	Introdução e Princípios de Relatividade Especial	14
2.1.2	Transformações de Lorentz	15
2.1.3	Intervalo de Espaço-Tempo	16
2.1.4	Tempo Próprio	18
2.1.5	Dilatação do Tempo	19
2.1.6	Mecânica Relativística	20
2.2	Relatividade Geral	21
2.2.1	Princípio da Equivalência	21
2.2.2	Transporte Paralelo	26
2.2.3	Curvatura e Tensor de Riemann	27
2.2.4	Tensor Energia-Momento	29
2.3	Equação de Einstein	30
3	BURACOS NEGROS	34
3.1	Introdução	34
3.2	Buracos Negros de Schwarzschild	34
3.2.1	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	36
3.2.2	Coordenadas de Kruskal-Szekeres	37
3.3	Buracos Negros de Kerr	40
3.3.1	Horizonte de Kerr	41
3.3.2	Outras Métricas	43
4	RADIAÇÃO HAWKING	45
4.1	Analogia Termodinâmica	46
4.2	Transformações de Bogoliubov	50
4.3	Evidências Experimentais da Radiação Hawking	53
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
	APÊNDICE A – RELATIVIDADE	56
A.1	Transformações de Galileu x Transformações de Lorentz	56
A.2	Tensores e Álgebra de Tensores	58
A.2.1	Tensor Métrico	61

A.2.2	Conexão Afim	63
A.2.3	Derivada Covariante	63
A.2.4	Propriedades Algébricas do Tensor de Riemann	66
	APÊNDICE B - CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE BO-	
	GOLIUBOV	70
	REFERÊNCIAS	72

1 INTRODUÇÃO

A Relatividade Especial (RE) [5], proposta por Albert Einstein em 1905, foi responsável por uma revolução científica e até mesmo filosófica, ao substituir os conceitos de tempo e espaço, que eram independentes entre si, pelo conceito de espaço-tempo.

A necessidade da reformulação desses conceitos surgiu quando se provou que as leis da eletrodinâmica, ao contrário das leis da mecânica de Newton, não se conservam na passagem de um referencial inercial para outro por meio de uma transformação de Galileu. Neste caso, a noção de relatividade proposta por Galileu não podia ser válida. Para reconciliar as leis da eletrodinâmica com as leis mecânicas, sugeriu-se que o universo seria permeado por um fluido, o éter, meio material no qual as ondas eletromagnéticas se propagariam.

Apesar dos muitos experimentos feitos, dentre eles o interferômetro de Michelson-Morley, o éter não foi detectado. A existência do éter foi então bastante questionada ao final do século XIX. Nesse contexto, Einstein considerou o conceito do éter como desnecessário e partiu do pressuposto de que não existe um referencial absoluto mas sim que cada referencial está em movimento em relação a outro [6].

A teoria da Relatividade Geral [7], publicada por Einstein em 1915, conduziu a um entendimento sobre a geometria do espaço-tempo e de como ela é alterada pela matéria. Além disso, a RG tornou possível a compreensão de como a gravidade afeta a luz. Logo após, em 1916, Karl Schwarzschild publicou uma solução da equação de Einstein para o caso de simetria esférica [8]. Tal solução está relacionada a buracos negros perfeitamente simétricos e sem rotação.

Apesar do termo Buraco Negro ser de origem recente, tendo sido cunhado por John Wheeler em 1969 [9], a ideia do que seria esse objeto remete ao fim do século XVIII, quando John Michell, baseando-se na mecânica newtoniana, sugeriu a existência de estrelas tão massivas e compactas que nem mesmo a luz poderia escapar de seu campo gravitacional. À época, ele as batizou de estrelas escuras. Esses foram os objetos que mais tarde receberiam o sugestivo nome de buracos negros, pois não seria possível vê-los, já que sua luz não poderia nos atingir e, uma vez dentro de um buraco negro, não seria possível vencer seu campo gravitacional [10].

Após Schwarzschild, outras soluções de buracos negros surgiram, como por exemplo, a solução de Kerr para buracos negros com rotação [11]. Juntamente com os buracos negros de Schwarzschild, os buracos negros de Kerr constituem as duas soluções de maior interesse científico. A primeira por ser o caso mais simples e a segunda por

representar a maioria dos objetos astrofísicos conhecidos. Além delas, outras soluções como as métricas de Reissner-Nordström [12] para objetos simetricamente esféricos eletricamente carregados e a métrica de Kerr-Newman [13] para objetos eletricamente carregados e em rotação foram publicadas. Esta última, tem como parâmetros somente a massa do buraco negro, sua carga e seu momento angular. Com base nisso, o teorema “no-hair” foi proposto. Este teorema afirma que um buraco negro estacionário pode ser caracterizado somente por esses parâmetros, enquanto todas as demais informações sobre o objeto colapsado que gerou o buraco negro estariam inevitavelmente perdidas [9].

Na década de 1970, Stephen Hawking trouxe uma perspectiva quântica ao estudo de buracos negros, ao descobrir que eles emitem radiação [14]. A radiação Hawking, como ficou conhecida, possui um espectro tal como o espectro de corpo negro. Na mesma década, Bekenstein publicou a analogia entre as leis mecânicas de buracos negros e as leis da termodinâmica, calculando inclusive a entropia e a temperatura de um buraco negro [15].

Muitos trabalhos científicos vem sendo desenvolvidos tanto na tentativa de unificar a relatividade geral com a mecânica quântica, quanto na tentativa de provar experimentalmente a existência da radiação Hawking. Um importante passo nesse sentido, foi dado por Unruh [16], que percebeu que ondas sonoras se propagando em um fluido supersônico apresentam comportamento semelhante ao da luz sob a influência de um campo gravitacional. Desde então, surgiram muitos modelos teóricos de análogos acústicos de buracos negros e experimentos tem sido realizados no sentido de comprovar a existência dessa radiação.

Esta monografia tem como objetivo, abordar os conceitos básicos relacionados à teoria de buracos negros e à radiação Hawking e se divide da seguinte forma: O capítulo 2 se destina a uma introdução da teoria da relatividade especial e geral. No capítulo 3, apresentaremos alguns dos resultados mais importantes relacionados às principais soluções de buracos negros. O capítulo 4, aborda a radiação Hawking e está dividido em duas seções principais: a primeira se destina à apresentação das leis mecânicas de buracos negros, em analogia às leis termodinâmicas; a segunda se destina a estudar a radiação Hawking utilizando a mecânica quântica. No capítulo 5, apresentamos as considerações finais e as perspectivas de trabalho.

2 TEORIA DA RELATIVIDADE

A Teoria da Relatividade inclui duas teorias: a Relatividade Restrita ou Especial (1905) [5] e a Relatividade Geral (1915) [7]. Enquanto a Relatividade Especial se refere aos fenômenos físicos em referenciais inerciais, a Relatividade Geral os trata do ponto de vista não-inercial. Neste capítulo, faremos uma breve introdução da Teoria da Relatividade. Introduziremos o princípio da relatividade, a partir do qual, decorrem os principais conceitos de relatividade restrita. Após isso, utilizaremos o princípio da equivalência para estender esses conceitos à observadores não-inerciais.

2.1 Relatividade Especial

2.1.1 Introdução e Princípios de Relatividade Especial

Na Relatividade Especial, os eventos são descritos num espaço quadridimensional: o espaço de Minkowski. Podemos interpretar um evento como um ponto contido nesse espaço cujas coordenadas são dadas pelo quadri vetor $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i)$, onde x^i as coordenadas espaciais e x^0 denota a coordenada temporal, ou seja, a localização espacial de um evento e o instante de tempo no qual ele ocorreu. Ao conjunto de todos os eventos denominaremos espaço-tempo. Dessa forma, uma linha contínua no espaço-tempo descreve uma sucessão de eventos e será denominada de linha mundo [17].

Para descrever um evento, precisamos de um sistema de referência. Dentre os possíveis sistemas que podem ser utilizados, nos interessa um conjunto específico: os sistemas de coordenadas inerciais ou referenciais inerciais¹. Um referencial inercial é aquele no qual a 1ª lei de Newton é válida. Em outras palavras, uma partícula nesse referencial, se move com velocidade uniforme se desconsiderarmos as influências externas. Deste modo, se um referencial está em movimento retilíneo uniforme relativo a um referencial inercial então este referencial também será inercial. Logo, cada referencial inercial se move com velocidade constante em relação a outro [18].

A partir desses conceitos, podemos introduzir os dois postulados a partir dos quais Einstein desenvolveu a RE:

- 1 - Princípio da Relatividade (proposto por Galileu): As leis da física permanecem inalteradas em qualquer referencial inercial.
- 2 - Universalidade da velocidade da luz: As interações entre partículas não ocorrem instantaneamente. Existe uma velocidade máxima c (a velocidade da luz) na qual essas

¹Muitas vezes, utilizamos também o termo: observador inercial, para se referir a um referencial inercial.

interações podem se propagar.

Com isso, podemos concluir que a velocidade da luz deve ser a mesma para qualquer observador inercial [1]. Essa foi a pedra fundamental no desenvolvimento da RE.

2.1.2 Transformações de Lorentz

Como já mencionado, as leis da eletrodinâmica não são invariantes sob transformações de Galileu. Entretanto, resultados experimentais indicam que o eletromagnetismo está correto, portanto não é necessário corrigí-lo. Para resolver isso, Einstein propôs a substituição das transformações de Galileu pelas transformações de Lorentz. Tais transformações, foram obtidas empiricamente por Lorentz, afim de sustentar a teoria do éter.[6]. As transformações de Lorentz constituem um importante grupo de simetria chamado grupo de Lorentz. Sob estas transformações, tanto as leis de Maxwell quanto a velocidade da luz permanecem invariantes, mas as leis mecânicas de Newton não. Então, Einstein reformulou as leis de movimento de maneira que elas fossem invariantes sob transformações de Lorentz. Deste modo, surge o novo princípio da relatividade que diz que as leis físicas devem ser Lorentz invariantes [19].

Uma transformação de Lorentz transforma um sistema de coordenadas inercial x^α em outro sistema de coordenadas x'^α da seguinte forma [19]:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha, \quad (2.1)$$

onde a^α e Λ^α_β são constantes e valem:

$$\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}; \quad (2.2)$$

com

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1, & \text{se } \alpha = \beta = 0; \\ +1, & \text{se } \alpha = \beta = 1, 2, 3; \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (2.3)$$

Desejamos determinar as constantes Λ^α_β . Então, vamos supor que temos dois referenciais inerciais, e um deles se move com velocidade constante \mathbf{v} em relação ao outro. Se, para o primeiro referencial, O, temos uma partícula em repouso, então de acordo com o referencial O', essa mesma partícula estará em movimento com velocidade \mathbf{v} . Podemos relacionar os deslocamentos da partícula para ambos os referenciais da seguinte forma:

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta dx^\beta. \quad (2.4)$$

Como $dx^i = 0, i = 1, 2, 3$, obtemos

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_0 dx^0; \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx'^i = \Lambda^i_0 dt, & (i = 1, 2, 3); \\ dt' = \Lambda^0_0 dt. \end{cases} \quad (2.6)$$

Se dividirmos dx^i por dt , obteremos v^i .

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\Lambda^i_0}{\Lambda^0_0} = v^i = v_i, \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \Lambda^i_0 = v_i \Lambda^0_0. \quad (2.8)$$

Fazendo $\mu = \nu = 0$ em (2.2) obtemos

$$-1 = \eta_{00} = \Lambda^{\alpha}_0 \Lambda^{\beta}_0 \eta_{\alpha\beta} = (\Lambda^i_0)(\Lambda^i_0) - (\Lambda^0_0)^2. \quad (2.9)$$

Substituindo (2.8) na última equação, ficamos com

$$(\Lambda^0_0)^2 - (v_i \Lambda^0_0)(v_i \Lambda^0_0) = 1; \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda^0_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma, \\ \Rightarrow \Lambda^i_0 &= v_i \Lambda^0_0 = \gamma v_i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Não podemos determinar os termos $\Lambda^{\alpha}_{\beta}(\alpha, \beta \neq 0)$ univocamente, mas podemos fazer uma escolha conveniente e que satisfaça a condição (2.2) [19]:

$$\begin{aligned} \Lambda^i_j &= \delta^i_j + v_i v_j \frac{\gamma - 1}{v^2}, \\ \Lambda^0_j &= \gamma v_j. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1.3 Intervalo de Espaço-Tempo

Para provar a validade da relação (2.2), vamos definir o intervalo de espaço-tempo entre dois eventos P e Q como [1]

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (2.13)$$

Note que, para obtermos a coordenada temporal com dimensão de espaço, devemos ter $dx^0 = c dt$, mas aqui estamos usando as coordenadas naturais, nas quais $c = 1$.

Como o intervalo entre dois eventos deve ser o mesmo para qualquer referencial inercial, devemos ter $ds'^2 = ds^2$. A partir da equação (2.4) obtemos [19],

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} dx^{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} dx^{\beta} = (\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta}) dx^{\alpha} dx^{\beta} = ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (2.14)$$

Portanto, obtemos a equação (2.2).

Se $ds^2 = 0$, a separação entre os eventos será do tipo luz e, portanto, o evento Q está contido na superfície do cone de luz de P. Se $ds^2 > 0$ (ou seja, os deslocamentos espaciais dominam o deslocamento temporal), a separação entre os eventos será tipo espaço e o evento Q estará fora do cone de luz do evento P; se $ds^2 < 0$, a separação entre os eventos será tipo tempo e o evento Q estará contido no cone de luz do evento P. Como a velocidade da luz é a velocidade máxima de interação, nenhum evento fora do cone de luz de P possui alguma correlação com esse evento. Enquanto isso, os eventos dentro do cone de luz de P são fisicamente conectáveis com esse evento. Deste modo, eventos que fazem parte do futuro do evento P são chamados de futuro absoluto e eventos que fazem parte do passado de P são chamados de passado absoluto [1].

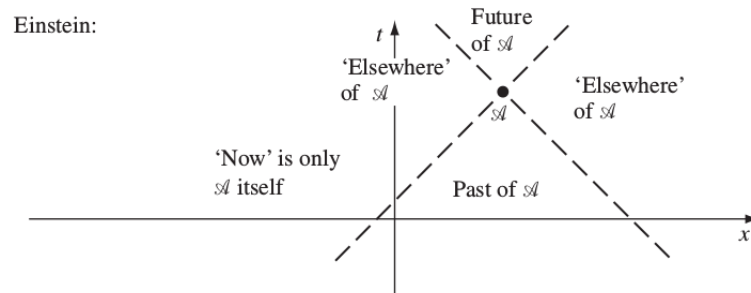


Figura 1: Fonte: [1]. Espaço-tempo na Relatividade Restrita

É interessante notar que na mecânica relativística, os eventos que estão contidos na superfície do cone de luz formam a fronteira que delimita o passado e o futuro desse evento, enquanto na mecânica Newtoniana, a fronteira que delimita o passado e o futuro é a linha que representa o "agora"; o passado está compreendido em tudo que ocorreu antes do "agora" e o futuro é tudo que ainda vai acontecer.

Além disso, como os intervalos entre eventos são invariantes, podemos considerar que o futuro e o passado de um evento são também entes invariantes. Logo, o passado e o futuro de um evento é o mesmo para qualquer observador inercial. Porém, o mesmo não ocorre entre eventos distintos, pois seus cones de luz não coincidem e, portanto, possuem passado e futuro distintos [1].

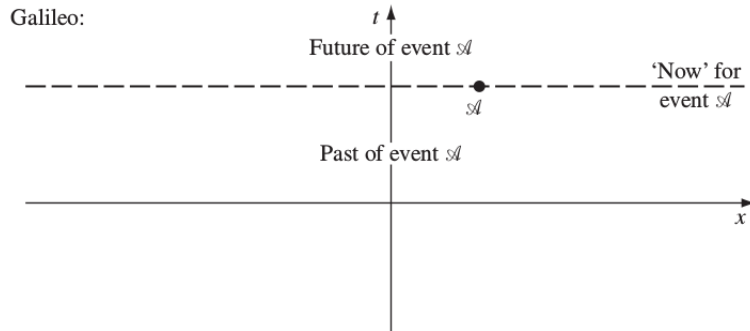


Figura 2: Fonte: [1]. Espaço-tempo na mecânica Newtoniana.

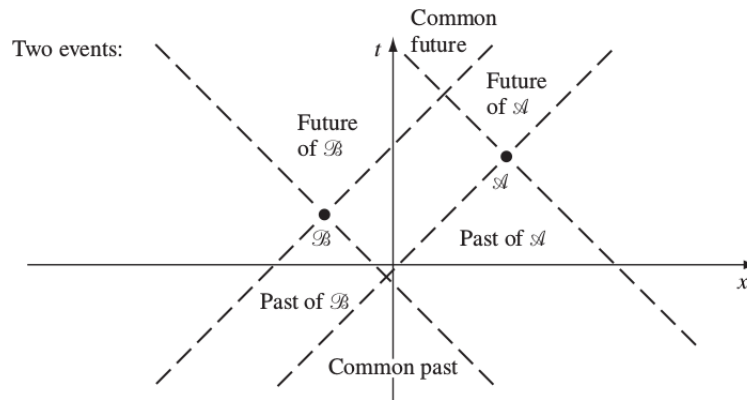


Figura 3: Fonte: [1]. Diagrama de espaço-tempo para dois eventos distintos.

2.1.4 Tempo Próprio

Assim como o conceito de posição da mecânica newtoniana é substituído pelo conceito de quadriposição na RE, o conceito de tempo global dá lugar ao tempo próprio $d\tau$, definido como [19]

$$d\tau^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.15)$$

Uma propriedade interessante do tempo próprio é que ele é invariante sob uma transformação de Lorentz, como desejado. Com efeito, usando a (2.4) e a condição (2.2), obtemos

$$d\tau'^2 = -\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = -\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \Lambda^\nu_\beta dx^\beta = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = d\tau^2 \quad (2.16)$$

Portanto, $d\tau'^2 = d\tau^2$. Note que, para a propagação da luz, temos $d\tau = 0$. Como já provamos que o tempo próprio é um invariante de Lorentz, segue que $d\tau' = 0$, ou seja,

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} \right| = c = 1 \quad (2.17)$$

Com isso, provamos que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial

inercial, como havia sido postulado inicialmente.

2.1.5 Dilatação do Tempo

Vamos supor que para um dado observador inercial O, temos um relógio A que está em repouso. O intervalo de espaço-tempo medido por esse relógio será tal que $d\mathbf{x} = 0$ e $dt = \Delta t$. Onde Δt é o período de tempo decorrido entre as duas medidas. Deste modo, seu tempo próprio será [19]

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - d\mathbf{x}^2} = \Delta t. \quad (2.18)$$

Vamos supor agora que um observador inercial O', que se move com velocidade \mathbf{v} em relação a O, possui um relógio A' que esteja em repouso de acordo com esse observador. O relógio A não estará em repouso em relação a O', mas sim movendo-se com velocidade \mathbf{v} . Para esse observador, se o intervalo de tempo medido para relógio A de acordo com o relógio A' for $dt' = \Delta t'$, então o intervalo espacial será $d\mathbf{x}' = vdt'$ e seu tempo próprio será dado por:

$$d\tau' = \sqrt{dt'^2 - d\mathbf{x}'^2} = \sqrt{1 - v^2} \Delta t'. \quad (2.19)$$

Como o tempo próprio é um invariante, temos

$$d\tau' = d\tau \Rightarrow dt' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.20)$$

Aparentemente, o relógio A anda mais depressa para o observador O' do que para o observador O. Paradoxalmente, em relação ao relógio A', temos o inverso: O relógio A' anda mais depressa para o observador O do que para O'. Ou seja, para o observador O o relógio A está adiantado em relação ao relógio A', enquanto para O' observa justamente o contrário. Mas isso parece contradizer o princípio da relatividade. Isso ocorre porque os relógios de O e O' não estão sincronizados. Realmente, cada observador mede o tempo do relógio de outro observador e chega a conclusão de que este anda mais devagar. O relógio do observador O está sincronizado com os seus próprios relógios, mas não com os relógios de O', e vice-versa. Na verdade, o engano está em considerar que a taxa de variação do tempo é invariante, o que não é verdade, já que a informação não pode viajar instantaneamente de um referencial a outro [1]. Decorre disso que observadores inerciais não podem concordar com a simultaneidade de eventos. Se, por exemplo, dois eventos P e Q são simultâneos de acordo com o observador O, eles não o serão para O'. Logo, o conceito de simultaneidade em RE não é invariante, mas sim dependente do referencial a ser considerado [17].

2.1.6 Mecânica Relativística

Na mecânica não-relativística, o tempo é absoluto para todos os referenciais, mas como vimos, isso não acontece na Relatividade. Deste modo, não podemos usar $v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$ para definir a velocidade pois esse objeto não se transforma como um vetor. Logo, a definição de velocidade também deve ser modificada. Para tanto, faremos uso do tempo próprio para definir a quadrivelocidade [17]

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (2.21)$$

Segue da definição anterior e da equação (2.4) a relação da velocidade de um referencial O para um referencial O' (lembrando que o tempo próprio $d\tau$ é um invariante):

$$U'^\mu = \frac{dx'^\mu}{d\tau'} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu. \quad (2.22)$$

Vamos considerar que uma partícula de massa m cuja trajetória seja descrita por $x^\mu(d\tau)$. Deste modo, podemos definir a força relativística que atua sobre esta partícula como: [19]

$$f^\mu = m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (2.23)$$

Podemos facilmente obter a força relativística para qualquer outro referencial inercial através da relação $f'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu f^\nu$. Com efeito,

$$f'^\mu = m \frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} = m \Lambda^\mu{}_\nu \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = \Lambda^\mu{}_\nu f^\nu. \quad (2.24)$$

Assim, vemos que a velocidade e a força relativísticas são quadri-vetores.

A partir da definição de velocidade (2.21), podemos definir o quadri-vetor momento [1]

$$p^\mu = mU^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.25)$$

onde $p^0 = E$ é a energia da partícula no referencial O e $p^i, i = 1, 2, 3$, são as componentes espaciais do momento. Assim, a segunda lei de Newton pode ser reescrita como:

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (2.26)$$

Naturalmente, vamos postular que a energia e o momento devem se conservar e, portanto, o quadri-vetor momento deve se conservar.

Como exemplo, vamos considerar que uma partícula de massa m se move em relação a O com velocidade \mathbf{v} na direção x . Então, neste caso a quadri-velocidade u^μ e o

quadri-momento p^μ da partícula serão dados por

$$\begin{aligned} u^0 &= \gamma & \Leftrightarrow p^0 &= m\gamma, \\ u^1 &= \gamma v & \Leftrightarrow p^1 &= m\gamma v, \\ u^2 &= u^3 = 0 & \Leftrightarrow p^2 &= p^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para pequenas velocidades, temos $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}v^2$, portanto,

$$E \equiv p^0 \cong m + \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.28)$$

ou seja, a energia da partícula será equivalente a sua massa de repouso m mais o termo de energia cinética.

2.2 Relatividade Geral

A partir de agora, trabalharemos não mais com referenciais inerciais, mas sim com referenciais gerais. Logo, as transformações de Lorentz darão lugar à transformações gerais de coordenadas e o sistema de coordenadas cartesianos dará lugar à sistemas de coordenadas gerais. Mas antes disso, vamos enunciar o princípio da equivalência de Einstein:

2.2.1 Princípio da Equivalência

O Princípio da Equivalência diz que: “Um referencial que tenha aceleração uniforme em relação à um referencial inercial é equivalente a um campo gravitacional.” Para entender melhor este princípio, vamos descrever um experimento mental proposto por Einstein. Imagine que tenhamos dois observadores, digamos O e O' , e que o primeiro esteja em um elevador em repouso sob o efeito do campo gravitacional como o da Terra, por exemplo, enquanto o outro esteja dentro de uma nave espacial que sobe com aceleração \mathbf{g} mas que não sofre a influência de campos gravitacionais. Se o observador O soltar um objeto, este responderá ao campo gravitacional atuando sobre ele e cairá. Da mesma forma se o observador O' soltar um objeto na nave, este permanecerá em repouso enquanto a nave avança, mas do ponto de vista do observador dentro da nave o objeto na verdade está caindo com aceleração $-\mathbf{g}$. Portanto, ambos os observadores obtiveram resultados equivalentes a seus experimentos. Em outras palavras, o Princípio da Equivalência afirma que leis de movimento observadas sob a influência de um campo gravitacional ou em um referencial com aceleração constante serão equivalentes, de modo que não há como distinguí-los [20].

Na verdade, a afirmação feita anteriormente costuma ser chamada de Princípio

da Equivalência Fraco enquanto na forma forte do Princípio da Equivalência todas as leis da física são equivalentes. Para tanto, postularemos que, pelo menos localmente, as equações físicas terão a mesma forma tanto em referenciais inerciais quanto em campos gravitacionais. Ou seja, para cada ponto do espaço-tempo que esteja sob a influência de um campo gravitacional podemos escolher um sistema de coordenadas inerciais local de modo que numa região suficientemente próxima desse ponto as leis da física terão a mesma forma que teriam em um sistema de coordenadas não acelerado na ausência de campo gravitacional [19].

Dessa forma, podemos usar as equações já conhecidas nos referenciais inerciais e encontrar sua forma sob a influência de um campo gravitacional. Digamos que temos um referencial inercial S com coordenadas y^α e um referencial não inercial com coordenadas x^μ . Tais sistemas de coordenadas se relacionam por meio de transformações gerais, de modo que temos $dy^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$. Lembrando que o intervalo de espaço-tempo é um invariante, temos [19]

$$ds_S^2 = \eta_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds_{S'}^2. \quad (2.29)$$

Onde definimos a métrica $g^{\mu\nu}$ como

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (2.30)$$

Mostraremos, no Apêndice A, que a métrica é um tensor covariante. Em particular, $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica do espaço de Minkowski, também conhecida como tensor de Minkowski. Vemos através dessa definição que a métrica está relacionada com a medida de comprimento de curva num determinado espaço, ou seja, através dela podemos definir como medir o comprimento de uma curva num espaço qualquer [21] [22]. Veremos adiante como a escolha da métrica para um determinado espaço define sua curvatura.

Agora, vamos ver qual é a forma da força relativística no referencial S'. Primeiro, devemos escrever a força relativística no referencial inercial S, que já conhecemos e depois utilizar as relações entre os dois sistemas de coordenadas [19]. Assim

$$F_S^\mu = m \frac{d^2 y^\mu}{d\tau^2} = m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dy^\mu}{d\tau} \right), \quad (2.31)$$

onde temos agora $d\tau = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Mas $\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d}{dx^\nu}$, então

$$\begin{aligned} F_S^\mu &= m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dy^\mu}{dx^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = m \left[\frac{dy^\mu}{dx^\nu} \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right] \\ &= m \left[\frac{dy^\mu}{dx^\nu} \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sabendo que $\frac{dx^\lambda}{dy^\mu} \frac{dy^\mu}{dx^\nu} = \delta_\nu^\lambda$, podemos multiplicar a última expressão por $\frac{dx^\lambda}{dy^\mu}$ e obter

$$F_S^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dy^\mu} F_S^\mu = m \left[\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{dx^\lambda}{dy^\mu} \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right], \quad (2.33)$$

$$\Rightarrow \frac{F_S^\lambda}{m} = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}, \quad (2.34)$$

onde definimos a conexão afim, também chamada de símbolo de Christoffel, como

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dy^\mu} \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}. \quad (2.35)$$

Note que, Γ pode ser nulo no referencial S e não nulo no referencial S', portanto não se transforma como um tensor. Demonstraremos isso formalmente no Apêndice A.

De acordo com o Princípio da Relatividade, todos os observadores inerciais são equivalentes. Baseado nisso, Einstein propôs o Princípio da Covariância Geral no qual afirma que todos os observadores são equivalentes, sejam eles inerciais ou não-inerciais. É natural, portanto, assumir que todas as equações que descrevem leis físicas devem ser invariantes e para isso, devem ser equações tensoriais [20]. Para tanto, uma equação escrita para um referencial sob influência de um campo gravitacional deve atender a duas condições [19]

- 1 - As equações encontradas devem concordar com a relatividade restrita, onde $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \rightarrow 0$;
- 2 - As equações devem ser covariantes sob uma transformação geral de coordenadas.

Se consideramos uma equação que satisfaça as condições acima, vemos, pela condição 2, que ela deverá ser verdadeira para todos os referenciais se for verdadeira para um referencial qualquer. A condição 1, nos diz que podemos escolher um sistema inercial local no qual não há influência de um campo gravitacional, onde as equações

obtidas devem ser verdadeiras e, portanto, serão verdadeiras em todos os outros sistemas inerciais. Desta forma, o Princípio da Covariância Geral resulta diretamente do Princípio da Equivalência. Logo, para tornar uma equação covariante, basta escrevê-la para um sistema de coordenadas e verificar como ela se transforma sob uma mudança de coordenadas. Porém, o Princípio da Covariância Geral só pode ser aplicado numa escala pequena o suficiente para que possamos construir um sistema de coordenadas local, para o qual não há influência gravitacional.

Para uma partícula livre, a equação de movimento será dada por [19]

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (2.36)$$

Note que, na ausência da gravidade retornamos aos resultados já conhecidos da relatividade restrita

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = 0, \quad d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.37)$$

A equação (2.36) é invariante sob transformações gerais de coordenadas, pois, para um novo referencial x'^μ ela será

$$\frac{d^2 x'^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma'_{\nu\sigma}{}^\lambda \frac{dx'^\nu}{d\tau} \frac{dx'^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (2.38)$$

Mas $\frac{d^2 x'^\lambda}{d\tau^2}$ se transforma como

$$\frac{d^2 x'^\lambda}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\rho}, \quad (2.39)$$

enquanto o símbolo de Christoffel se transforma como (ver Apêndice A)

$$\Gamma'_{\nu\sigma}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \Gamma_{\kappa\rho}^\alpha - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\alpha}. \quad (2.40)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{dx'^\nu}{d\tau} \frac{dx'^\sigma}{d\tau}$ obtemos

$$\Gamma'_{\nu\sigma}{}^\lambda \frac{dx'^\nu}{d\tau} \frac{dx'^\sigma}{d\tau} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \Gamma_{\kappa\rho}^\alpha - \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\alpha}. \quad (2.41)$$

Com isso, a equação (2.38) se torna

$$\frac{d^2 x'^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma'_{\nu\sigma}{}^\lambda \frac{dx'^\nu}{d\tau} \frac{dx'^\sigma}{d\tau} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \Gamma_{\kappa\rho}^\alpha = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \left(\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\kappa\rho}^\alpha \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right). \quad (2.42)$$

Portanto, a equação (2.36) é invariante sob qualquer transformação de coordenadas. Logo,

pelo princípio da covariância geral, a equação deve ser verdadeira para qualquer sistema de referência [20].

Desejamos agora, encontrar uma relação entre a conexão afim Γ e a métrica g [19]. Para isso, derivaremos $g_{\mu\nu}$ em relação a x^λ , $g_{\lambda\mu}$ em relação a x^ν e $g_{\lambda\nu}$ em relação a x^μ :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}; \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda}; \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu}. \quad (2.45)$$

Se somarmos as duas primeiras e então subtraírmos a última, obteremos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}. \quad (2.46)$$

Como $\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda = \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}$, então

$$\frac{g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma = 2g_{\mu\sigma} \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma. \quad (2.47)$$

A inversa de $g_{\mu\sigma}$ é definida de modo que $g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = \delta_\sigma^\nu$. Logo, multiplicando ambos os lados da última equação por $g^{\mu\sigma}$ obtemos

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \right]. \quad (2.48)$$

A equação (2.48) pode ser reescrita como

$$g_{\mu\sigma} \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma = \Gamma_{\sigma\lambda\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \right], \quad (2.49)$$

onde $\Gamma_{\sigma\lambda\nu}$ é o que chamamos que de símbolo de Christoffel de primeiro tipo e $\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma$ é o símbolo de Christoffel de segundo tipo. A partir da equação (2.48) obtemos duas propriedades básicas do símbolo de Christoffel [21]

- 1) $\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma$ (simetria nos índices inferiores);
- 2) $\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma$ é nulo se todos os $g_{\mu\nu}$ são constantes.

2.2.2 Transporte Paralelo

Queremos investigar a curvatura do espaço e como ela influencia as leis físicas e para isso é preciso desenvolver nossa noção de curvatura. Para começar, devemos definir dois tipos de curvatura: intrínseca e extrínseca. Podemos pensar, inicialmente, num cilindro, que é uma superfície curva, do ponto de vista tridimensional. Esta é sua curvatura extrínseca. Por outro lado, podemos pensar num cilindro como uma folha de papel enrolada, logo, sua curvatura extrínseca é aquela do papel, ou seja, do ponto de vista da superfície bidimensional da folha de papel, o cilindro é plano. Esta é sua curvatura intrínseca. De fato, os axiomas de Euclides continuam valendo na superfície do cilindro. A distância entre dois pontos continua sendo medida como num espaço euclidiano e linhas paralelas continuam paralelas quando estendidas indefinidamente [1]. Com este exemplo, podemos definir a curvatura extrínseca como a curvatura da superfície em relação a um espaço de dimensão superior no qual ela está contida e a curvatura intrínseca como a curvatura da própria superfície. Porém, nos limitaremos agora em diante a nos referir somente a curvatura intrínseca, pois é a única que interessa em RG [22].

Ao contrário do cilindro, que é intrinsecamente plano, a superfície de uma esfera é intrinsecamente curva. Podemos ver isso traçando linhas paralelas a partir do equador. As linhas que partem dos pontos A e B são paralelas nas proximidades desses pontos, porém, quando estendemos essas linhas na direção do “Pólo Norte” elas se encontram no ponto P. Portanto, na superfície de uma esfera, linhas paralelas não permanecem paralelas quando estendidas indefinidamente, logo a superfície não é plana [1].

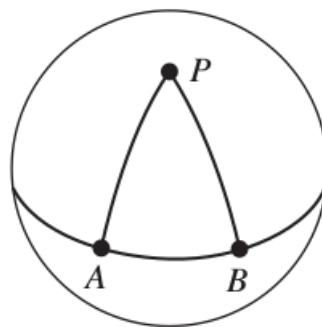


Figura 4: Fonte: [1]. Triângulo esférico.

Uma outra forma de ver isso, é por meio do transporte paralelo. Por exemplo, desenhamos uma curva fechada num espaço plano e um vetor no ponto A. Se, partindo do ponto A, desenharmos, em cada ponto da curva, um vetor paralelo ao vetor no ponto anterior, obteremos ao final de uma volta completa, um vetor no ponto A que será paralelo ao vetor original.

O mesmo não acontece na superfície de uma esfera, por exemplo. Agora desenhamos um

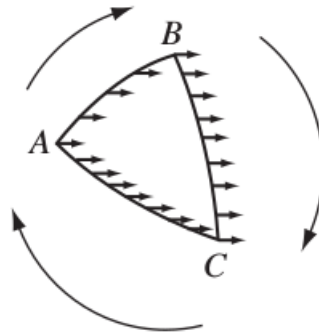


Figura 5: Fonte: [1]. Transporte paralelo num espaço plano.

triângulo na superfície da esfera com os pontos A e C no equador e o ponto B no Pólo Norte. Vamos repetir o mesmo procedimento, começando com um vetor tangente ao ponto A e paralelo ao Equador. Os vetores transportados paralelamente do ponto A ao ponto B serão portanto todos perpendiculares ao arco AB. Porém, no ponto B o vetor tangente será paralelo ao arco BC e portanto todos os vetores paralelamente transportados de B a C serão paralelos ao arco BC até que no ponto C o vetor tangente será perpendicular ao Equador e o mesmo acontecerá a todos os vetores paralelamente transportados no arco CA. Por fim, o vetor tangente no ponto A não será paralelo ao vetor tangente inicial, mas sim perpendicular. Isso ocorreu devido à curvatura intrínseca da esfera [1]. Portanto, podemos concluir com esses exemplos que um espaço curvo é aquele no qual não se pode definir o transporte paralelo globalmente [22].

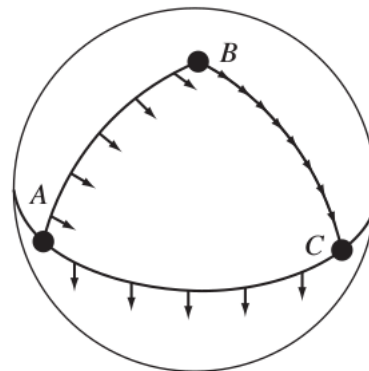


Figura 6: Fonte: [1]. Transporte paralelo numa superfície esférica.

2.2.3 Curvatura e Tensor de Riemann

Agora que já definimos a curvatura de um espaço, devemos ver qual o efeito de um campo gravitacional na curvatura do espaço. Para isso, vamos construir o tensor de curvatura a partir do tensor métrico e de suas derivadas segundas. O tensor de curvatura surge quando respondemos a seguinte pergunta: A ordem com que as derivadas covariantes

são tomadas altera o resultado final? Para responder, calcularemos $A_{\mu;\nu\sigma} - A_{\mu;\sigma\nu}$, onde usamos estamos usando $V_{\nu;\mu} = \nabla_{\mu}V_{\nu}$ como notação da derivada covariante [21].

$$\begin{aligned}
(A_{\mu;\nu})_{;\sigma} &= \frac{\partial A_{\mu;\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}(A_{\rho;\nu}) - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho}(A_{\mu;\rho}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}A_{\lambda} \right) - \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \left(\frac{\partial A_{\rho}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}A_{\lambda} \right) - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}A_{\lambda} \right) \\
&= \frac{\partial^2 A_{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} A_{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} A_{\lambda} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} A_{\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Agora, subtraindo da equação anterior a mesma equação com índices σ e ν trocados, ficamos com

$$A_{\mu;\nu\sigma} - A_{\mu;\sigma\nu} = \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} \right] A_{\lambda} = R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda} A_{\lambda}, \tag{2.51}$$

Onde definimos o tensor curvatura ou tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}^{\delta}$ como sendo

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}. \tag{2.52}$$

No Apêndice A, mostramos que $R_{\mu\nu\rho}^{\delta}$ é um tensor e algumas de suas propriedades. Com isso, vemos que para a derivada covariante de segunda ordem, o resultado depende da ordem em que as derivadas são tomadas. Mas, para espaços onde a métrica é constante, o símbolo de Christoffel é nulo e, conseqüentemente, obtemos o resultado de que derivadas parciais de segunda ordem são independentes da ordem com que as derivadas são tomadas. Vemos, também, que o tensor de Riemann está relacionado com a curvatura do espaço, pois este será não-nulo somente em espaços onde a métrica não é constante, ou seja, espaços curvos [19].

A partir do tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}^{\delta}$ podemos obter outros tensores, como:

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = g_{\delta\lambda} R_{\mu\nu\sigma}^{\delta}, \tag{2.53}$$

onde $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ é o tensor de Riemann de primeiro tipo [1]. Se contrairmos dois dos índices do tensor de Riemann, obteremos o tensor de Ricci [19]

$$R_{\mu\lambda\sigma}^{\lambda} = R_{\mu\sigma}, \tag{2.54}$$

a partir do qual podemos obter o escalar de curvatura ou escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma}. \tag{2.55}$$

No apêndice A, obtivemos a seguinte relação entre o tensor de Riemann e o tensor métrico:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(g_{\nu\lambda,\mu\rho} - g_{\mu\nu,\lambda\rho} - g_{\rho\lambda,\mu\nu} + g_{\rho\mu,\lambda\nu}) + g_{\sigma\delta}[\Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^{\delta} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\delta}]. \quad (2.56)$$

Se escolhermos um sistema de coordenadas inercial local tal que as conexões afim $\Gamma_{\rho\lambda}^{\sigma}$ se anulam num ponto x , podemos derivar $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ nesse ponto e obter [19]

$$R_{\lambda\mu\nu\rho;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} (g_{\nu\lambda,\mu\rho} - g_{\mu\nu,\lambda\rho} - g_{\rho\lambda,\mu\nu} + g_{\rho\mu,\lambda\nu}). \quad (2.57)$$

Se permutarmos ciclicamente $\nu\rho$ e η , obteremos a identidade de Bianchi:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\eta;\nu} = 0. \quad (2.58)$$

Se contrairmos a última equação com $g^{\lambda\nu}$, obteremos

$$R_{\mu\nu\rho;\eta}^{\nu} - R_{\mu\eta\nu;\rho}^{\nu} + R_{\mu\rho\eta;\nu}^{\nu} = R_{\mu\rho;\eta} - R_{\mu\eta;\rho} + R_{\mu\rho\eta;\nu}^{\nu} = 0. \quad (2.59)$$

Contraindo novamente, ficamos com

$$R_{;\eta} - R_{\eta;\rho}^{\rho} - R_{\eta;\nu}^{\nu} = R_{;\eta} - 2R_{\eta;\nu}^{\nu} = 0 \quad (2.60)$$

Deste modo, podemos escrever

$$(R_{\eta}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\eta}^{\nu}R)_{;\nu}, \quad (2.61)$$

ou, numa forma equivalente

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\nu} = 0. \quad (2.62)$$

2.2.4 Tensor Energia-Momento

O tensor momento-energia é uma importante quantidade tensorial, em Relatividade, que descreve o fluxo de momento e energia. Deste modo, o fluxo da componente p^{μ} do quadri-momento através de uma superfície x^{ν} é descrita por um tensor do tipo $T^{\mu\nu}$ [1]. Assim,

- 1 - T^{00} é o fluxo de energia;
- 2 - T^{i0} é o fluxo de momento linear p^i ;
- 3 - T^{ii} é a tensão normal na direção i , ou seja, a pressão;
- 4 - T^{ij} é a tensão de cisalhamento.

Para um fluido perfeito, com densidade ρ e pressão p e cuja quadri-velocidade é dada por $U^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ para um sistema de coordenadas comóveis x^{μ} , teremos [19]

$$T^{00} = \rho, \quad (2.63)$$

$$T^{i0} = T^{0i} = 0, \quad (2.64)$$

$$T^{ij} = p\delta_{ij}. \quad (2.65)$$

Como $T^{\mu\nu}$ deve ser um tensor, sua relação com o sistema referencial do laboratório x^μ é dada por

$$T^{\mu\nu} = \lambda_\alpha^{mu} \lambda_\beta^{nu} T^{\alpha\beta}. \quad (2.66)$$

Portanto,

$$T^{00} = \frac{\rho + pv^2}{1 - v^2}, \quad (2.67)$$

$$T^{i0} = (p + \rho) \frac{v_i}{1 - v^2}, \quad (2.68)$$

$$T^{ij} = p\delta_{ij} + (p + \rho) \frac{v_i v_j}{1 - v^2}. \quad (2.69)$$

Podemos escrever as últimas relações obtidas numa única equação

$$T^{\mu\nu} = p\eta^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu, \quad (2.70)$$

onde U^μ é a quadri-velocidade do fluido. Note que podemos generalizar a equação anterior para um sistema não-inercial apenas fazendo a troca $\eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$. Sabendo que $\mathbf{U} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^\alpha} = 0$ e $g^{\mu\nu}{}_{;\beta} = 0$, obtemos a lei de conservação para o tensor momento-energia [1]

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.71)$$

2.3 Equação de Einstein

De acordo com a mecânica newtoniana temos [1]

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \quad (2.72)$$

onde G é a constante gravitacional universal e ρ é a densidade de massa. A solução dessa equação de Poisson para uma partícula de massa m é dada por:

$$\phi = -\frac{Gm}{r}, \quad (2.73)$$

onde fizemos a velocidade da luz $c = 1$. Com isso, vemos que a fonte do campo gravitacional na mecânica newtoniana é a densidade de massa. Para fazer a analogia entre a Relatividade Geral e a Mecânica Clássica, vamos considerar o caso de uma partícula movendo-se a

baixas velocidades sob a influência de um campo gravitacional fraco. Se considerarmos que a velocidade da partícula é suficientemente pequena, podemos desconsiderar os termos $dx^i/d\tau$, $i = 1, 2, 3$ e obter da equação (2.36) [19]

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\lambda \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (2.74)$$

Como o campo é estacionário, $g_{\mu\nu}$ não depende explicitamente do tempo, portanto,

$$\Gamma_{00}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left[\frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right] = -\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}. \quad (2.75)$$

Como o campo é fraco, podemos dizer que a métrica é aproximadamente a métrica do espaço de Minkowski mais um termo de perturbação, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.76)$$

Deste modo, ficamos com

$$\Gamma_{00}^\lambda = -\frac{1}{2} (\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma}) \left[\frac{\partial \eta_{00}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma} \right] = -\frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma}, \quad (2.77)$$

onde desprezamos os termos de segunda ordem em h . Substituindo na equação de movimento, obtemos

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2; \quad (2.78)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2,$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{00} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (2.79)$$

Na última equação utilizamos o fato de que h é estacionário. A solução da equação para t nos dá $\frac{dt}{d\tau} = \text{constante}$, então, se dividirmos a equação de $\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2}$ por $\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$ obteremos

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}. \quad (2.80)$$

Comparando a última equação com o caso newtoniano (equação (2.72)) vemos que [1]

$$h_{00} = -2\phi + \text{constante}. \quad (2.81)$$

Devemos notar que quanto mais distante o observador, mais o espaço se aproximará do espaço de Minkowski. Então, no limite $r \rightarrow \infty$, h_{00} deverá se anular. Mas, de acordo com a equação (2.73), $\phi \rightarrow 0$ no infinito, portanto a constante será nula. Com isso, vemos que

a métrica será dada por

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \quad (2.82)$$

Como temos $T_{00} \simeq \rho$ no caso de matéria não-relativística, então, a partir da equações (2.72) e (2.82), obtemos

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \quad (2.83)$$

Devemos lembrar, que a última equação é válida para o caso de campos fracos e estacionários gerados por matéria não-relativística [19]. Podemos supor que, para uma distribuição de momento e energia arbitrária $T_{\alpha\beta}$, as equações de campo fraco possuem a mesma forma da equação anterior. Ou seja,

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (2.84)$$

onde $G_{\alpha\beta}$ é uma combinação linear das derivadas de primeira e segunda ordem da métrica. De acordo com princípio da equivalência, podemos estender esse resultado para o caso mais geral, no qual estão atuando campos gravitacionais quaisquer

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.85)$$

Como $T_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, segue por definição que $G_{\mu\nu}$ também deve ser um tensor simétrico. No limite para campos fracos produzidos por matéria não-relativística, a componente G_{00} deve se reduzir a $\nabla^2 g_{00}$. Além disso, sabemos que $G_{\mu\nu}$ é combinação linear das derivadas de primeira e segunda ordem da métrica, então, deve ser combinação linear do tensor e do escalar de Ricci [19]. Portanto,

$$G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R. \quad (2.86)$$

Pela lei de conservação do tensor momento-energia, devemos ter $G_{\nu;\mu}^\mu = 0$. Então,

$$G_{\nu;\mu}^\mu = aR_{\nu;\mu}^\mu + b\delta_\nu^\mu R_{;\mu} = \left(\frac{a}{2} + b\right)R_{;\nu} = 0, \quad (2.87)$$

onde na penúltima igualdade utilizamos a equação (2.61). Devemos ter $a/2 + b = 0$, pois $R_{;\nu} = 0$ em todo espaço não ocorre em geral. Se fixarmos $a = 1$ obtemos

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.88)$$

Vemos, pela equação acima, que a curvatura do espaço, representada pelo tensor de Curvatura, está relacionada com a matéria presente nesse espaço que, por sua vez, é representada pelo tensor energia-momento. Tal relação pode ser sintetizada pela seguinte frase de John Wheeler:

“Spacetime tells matter how to move and matter tells spacetime how to curve”.

Isto é, a matéria é responsável pela curvatura do espaço-tempo e a curvatura do espaço-tempo é responsável pelo movimento dos corpos. Uma solução interessante é para o caso do vácuo, onde $T_{\mu\nu} = 0$ e recaímos na solução de Schwarzschild [23].

3 BURACOS NEGROS

Neste capítulo, apresentaremos as principais propriedades relativas a buracos negros. Daremos atenção, em especial: à solução de Schwarzschild, que se refere a buracos negros eletricamente neutros e sem rotação, e à solução de Kerr, que se refere a buracos negros com rotação. Na última seção, faremos um breve comentário a respeito de outras métricas e calcularemos o raio dos horizontes de eventos e a área de um buraco negro de Kerr-Newman, que é eletricamente carregado e com rotação.

3.1 Introdução

De acordo com a mecânica newtoniana, um buraco negro é um corpo tão denso que nem mesmo a luz poderia escapar dele. Podemos redefinir o conceito de buraco negro usando sua velocidade de escape. A velocidade de escape de um corpo massivo é a velocidade mínima necessária para que um objeto possa escapar de seu campo gravitacional. Assim, a velocidade de escape da Terra é a velocidade mínima na qual um objeto deve ser lançado de modo que não volte a cair na superfície terrestre. Então, definiremos o buraco negro como um objeto cuja densidade seja suficientemente grande ao ponto de que sua velocidade de escape seja maior que a da luz. Em outras palavras, nenhum objeto pode escapar a um buraco negro, uma vez que a velocidade máxima no universo é a velocidade da luz [23].

Ao tentar escapar do buraco negro, a luz é atraída de volta pelo intenso campo gravitacional. A região do espaço-tempo que limita as trajetórias dos raios de luz que não conseguem escapar é chamada de horizonte de eventos. O horizonte de eventos de um buraco negro é, portanto, a região que o delimita, ou seja, é a distância máxima a partir do centro do buraco negro para a qual não é possível escapar. Deste modo, o horizonte de eventos age como uma membrana, pois permite que objetos a atravessem e caiam no buraco negro, mas nunca que façam o caminho inverso. Assim, não temos nenhuma informação a respeito da matéria encontrada dentro de um buraco negro, já que a luz emitida por ela nunca nos alcançará [4].

3.2 Buracos Negros de Schwarzschild

Trataremos agora da solução de Schwarzschild para as equações de Einstein. A geometria de Schwarzschild, definida pela métrica que leva o mesmo nome, é a geometria que descreve a região do espaço-tempo exterior a um corpo esférico. Tal solução, é obtida

quando resolvemos a equação de Einstein para o vácuo, onde $T_{\mu\nu} = 0$. Deste modo, a métrica de Schwarzschild é útil para descrever a geometria de um buraco negro que seja esfericamente simétrico. Como a massa do buraco negro é seu único parâmetro associado à métrica de Schwarzschild, então buracos negros que tenham a mesma massa serão equivalentes [10]. O intervalo de espaço-tempo para um corpo esférico de massa M será dado pela seguinte expressão [1]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$.

Note que, para o limite $r \rightarrow \infty$ obtemos a métrica do espaço “flat” (plano), o que é natural pois, quanto mais distante se está de um objeto massivo, mais plano o espaço se torna. Para $r = 2M$ o termo que acompanha dr^2 fica indeterminado, ou seja, a equação deixa de valer nesse ponto. As condições de contorno para obtenção dessa métrica só dizem respeito a região onde $r > 2M$. Portanto, ela deve valer somente nessa região. Como a solução parte do pressuposto de que estamos considerando somente pontos fora de um corpo esférico e ao mesmo tempo só é válida para $r > 2M$ podemos definir $r_S = 2M$ como o raio de Schwarzschild. Se um corpo esférico de massa M tiver raio menor que r_S então esse corpo será um buraco negro e o raio de Schwarzschild se refere ao seu horizonte de eventos, cuja superfície possui área $4\pi r_S^2$ [23]. A métrica de Schwarzschild pode ser então reescrita como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.2)$$

Essa métrica descreve, portanto, um buraco negro esférico e estático, ou seja, sem rotação. Por isso, o único parâmetro associado a ele é sua massa M .

A singularidade $r = r_S$ não é física pois, no caso de um buraco negro, um observador em queda livre não teria como notar nenhuma singularidade ao passar por $r = r_S$. Podemos reescrever a métrica de Schwarzschild de modo a evitar a singularidade no horizonte de eventos, quando $r = r_S$. Para isso, podemos fazer uma escolha de coordenadas que seja mais adequada.

3.2.1 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Ao solucionar as geodésicas para a métrica de Schwarzschild ($ds = 0$), encontramos as condições $t = \pm r^* + K$, onde $r^* = r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|$ e K é uma constante. As coordenadas u e v que tem a direção das geodésicas nulas são obtidas a partir de [3]

$$u = t - r^* \quad e \quad v = t + r^*, \quad (3.3)$$

de modo que

$$dt = \frac{1}{2}(dv + du) \quad e \quad dr^* = \frac{1}{2}(dv - du). \quad (3.4)$$

onde as geodésicas nulas incidentes são definidas por $v = \text{constante}$ e as emergentes são definidas por $u = \text{constante}$ [2].

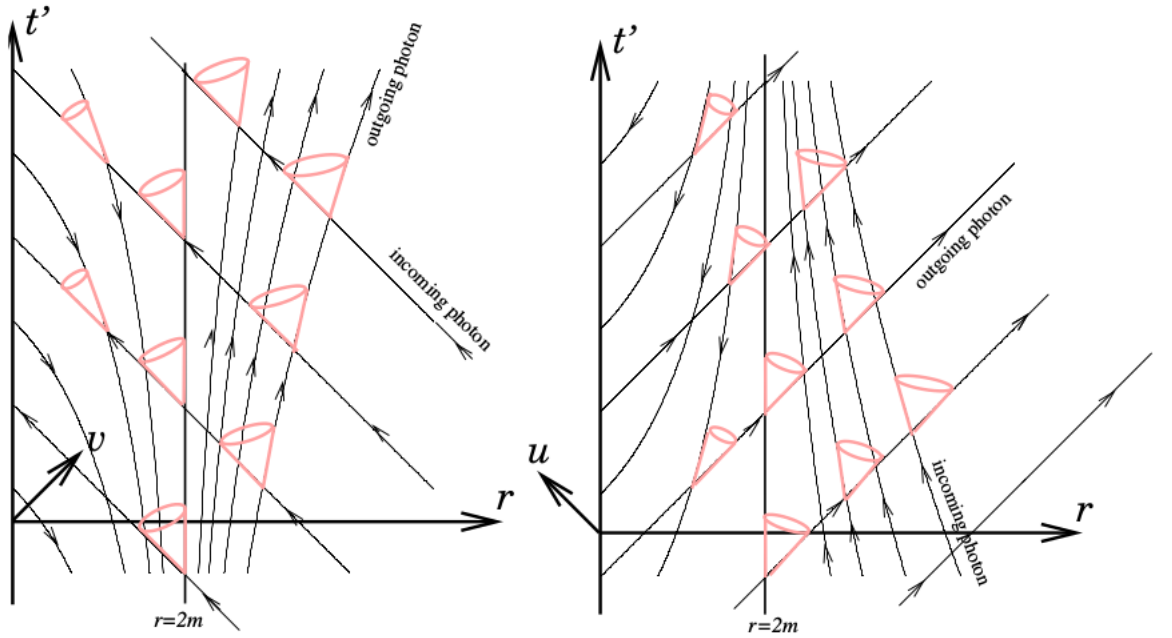


Figura 7: Fonte: [2]. Coordenadas de Eddington-Finkelstein incidentes e emergentes. As setas indicam a direção da coordenada temporal da métrica de original Schwarzschild. A figura da esquerda representa um buraco negro: os fótons que chegam atravessam o horizonte de eventos e alcançam a singularidade; A segunda figura representa um buraco branco no qual o contrário acontece: os fótons emergem da singularidade, atravessam o horizonte de eventos e se propagam no infinito.

Se mantivermos as coordenadas r , θ e ϕ e fizermos a mudança de coordenadas $t \rightarrow v - r - 2M \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|$, obtemos [2]

$$dt = dv - dr - \frac{dr}{\frac{r}{r_S} - 1} = dv - \left(\frac{\frac{r}{r_S} - 1 + 1}{\frac{r}{r_S} - 1} \right) dr = dv - \left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{-1} dr. \quad (3.5)$$

Assim,

$$dt^2 = dv^2 + \left(1 - \frac{r}{r_S}\right)^{-2} dr^2 - 2\left(1 - \frac{r}{r_S}\right)^{-1} dvdr. \quad (3.6)$$

Substituindo dt^2 na métrica de Schwarzschild (3.2), obteremos as chamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein incidentes [2] [23]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left[dv^2 + \left(1 - \frac{r}{r_S}\right)^{-2} dr^2 - 2\left(1 - \frac{r}{r_S}\right)^{-1} dvdr \right] + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (3.7)$$

Note que agora não temos mais a singularidade no horizonte de eventos, o que torna essa escolha de coordenadas muito mais adequada uma vez que podemos “enxergar” além do horizonte de eventos, ainda que não possamos ir além do raio do buraco negro r_B . Ao mesmo tempo, continuamos com a singularidade em $r = 0$, que se trata de uma singularidade física (pois representa o centro do buraco negro), e não de uma consequência da escolha de coordenadas [23].

De maneira análoga, se mantivermos as coordenadas r , θ e ϕ e fizermos a mudança de coordenadas $t \rightarrow u + r + 2M \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|$, obteremos as coordenadas de Eddington-Finkelstein emergentes

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2. \quad (3.8)$$

3.2.2 Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Uma outra transformação de coordenadas largamente utilizada para remover a singularidade do horizonte de evento resulta nas coordenadas de Kruskal-Szekeres [3]. A partir da relação $r^* = r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|$ obtemos

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \Rightarrow dr = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dr^* = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{(dv - du)}{2}, \quad (3.9)$$

onde na última igualdade utilizamos (3.4). Deste modo, temos

$$dr^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2 (dv^2 + du^2 - 2dvdu),$$

$$dt^2 = \frac{1}{4} (dv^2 + du^2 + 2dvdu). \quad (3.10)$$

Substituindo no intervalo de espaço-tempo (3.2), obtemos

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r(u,v)}\right) dudv + r^2(u,v) d\Omega^2. \quad (3.11)$$

Lembrando que $r^* = r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|$ e $r^* = \frac{1}{2}(v - u)$ podemos igualar essas duas expressões e aplicar a função exponencial para obter

$$\frac{r}{r_S} - 1 = \frac{r}{r_S} \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) = \exp \left(-\frac{r}{r_S} + \frac{v - u}{2r_S} \right), \quad (3.12)$$

o que, substituindo na equação (3.11) resulta em

$$ds^2 = -\frac{r_S}{r(u, v)} e^{-\frac{r_S}{r}} \left(e^{-\frac{(u-v)}{2r_S}} dudv \right) + r^2(u, v) d\Omega^2. \quad (3.13)$$

Podemos reparametrizar as coordenadas u e v da seguinte forma

$$U = -e^{-u/2r_S} \quad e \quad V = e^{v/2r_S}, \quad (3.14)$$

onde U e V são definidos na região $r > r_S$. Deste modo que o intervalo de espaço-tempo será reescrito como

$$ds^2 = -\frac{4r_S^3}{r(U, V)} e^{-\frac{r(U, V)}{r_S}} dU dV + r^2(U, V) d\Omega^2. \quad (3.15)$$

Agora, faremos uma última mudança de coordenadas para coordenadas tipo tempo $T = (V - U)/2$ e tipo espaço $X = (V + U)/2$ [2]. Com isso, a última equação se torna:

$$ds^2 = \frac{4r_S^3}{e^{-\frac{r}{r_S}}} (dT^2 - dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (3.16)$$

que é a métrica de Kruskal-Szekeres. Podemos obter as coordenadas X e T em termos das coordenadas originais r e t :

$$\begin{aligned} T &= \frac{e^{v/2r_S} + e^{-u/2r_S}}{2} = e^{r^*/2r_S} \left(\frac{e^{t/2r_S} + e^{-t/2r_S}}{2} \right) \\ T &= \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp \left(\frac{r}{2r_S} \right) \cosh \left(\frac{t}{2r_S} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Analogamente,

$$X = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp \left(\frac{r}{2r_S} \right) \sinh \left(\frac{t}{2r_S} \right). \quad (3.18)$$

Além disso, obtemos diretamente das duas últimas equações as seguintes relações [3]

$$T^2 - X^2 = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) e^{r/r_S}, \quad (3.19)$$

$$\frac{t}{r_S} = 2 \operatorname{arctgh} \left(\frac{X}{T} \right). \quad (3.20)$$

Essas relações são válidas para $X > 0$ e $T < 0$, pois a métrica de Kruskal-Szekeres foi definida para esse domínio, mas podemos estendê-lo continuamente para

$X < 0$ e $T > 0$. Deste modo, a relação (3.19) será reescrita como:

$$T^2 - X^2 = \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right| e^{r/r_S}. \quad (3.21)$$

Essa relação é válida nos domínios denotados por I, II, III e IV para os quais temos [2]

$$(I) : X > 0 \Rightarrow \begin{cases} X = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \sinh\left(\frac{t}{2r_S}\right), \\ T = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \cosh\left(\frac{t}{2r_S}\right). \end{cases} \quad (3.22)$$

$$(II) : T > 0 \Rightarrow \begin{cases} X = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \cosh\left(\frac{t}{2r_S}\right), \\ T = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \sinh\left(\frac{t}{2r_S}\right). \end{cases} \quad (3.23)$$

$$(III) : T < 0 \Rightarrow \begin{cases} X = -\left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \cosh\left(\frac{t}{2r_S}\right), \\ T = -\left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \sinh\left(\frac{t}{2r_S}\right). \end{cases} \quad (3.24)$$

$$(IV) : X < 0 \Rightarrow \begin{cases} X = -\left(\frac{r}{r_S - 1} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \sinh\left(\frac{t}{2r_S}\right), \\ T = -\left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \cosh\left(\frac{t}{2r_S}\right). \end{cases} \quad (3.25)$$

Além disso, temos agora

$$\frac{t}{r_S} = \begin{cases} 2 \operatorname{arctgh}\left(\frac{X}{T}\right), \text{ para I e IV;} \\ 2 \operatorname{arctgh}\left(\frac{T}{X}\right), \text{ para II e III.} \end{cases} \quad (3.26)$$

Podemos notar que a singularidade em $r = r_S$ é agora correspondente a $T = \pm X$ (que corresponde a $U = 0$ ou $V = 0$ nas coordenadas U e V). Já a singularidade física $r = 0$ corresponde a $X^2 - T^2 = 1$ (ou $UV = 1$) que está indicada pelas hipérbolas nas regiões II e III da figura [3] [2].

As regiões I e IV correspondem a um universo chato, com $r > r_S$. Um objeto que esteja em queda livre na região I e atravesse a linha $T = +X$ (onde fica o horizonte de eventos), adentra na região II e cai na singularidade $r = 0$. Nenhum sinal de luz emitido na região II poderá fazer o caminho inverso e adentrar na região I. Nesse sentido, vemos que a região II descreve um buraco negro. A região III é similar à região I, apenas com a

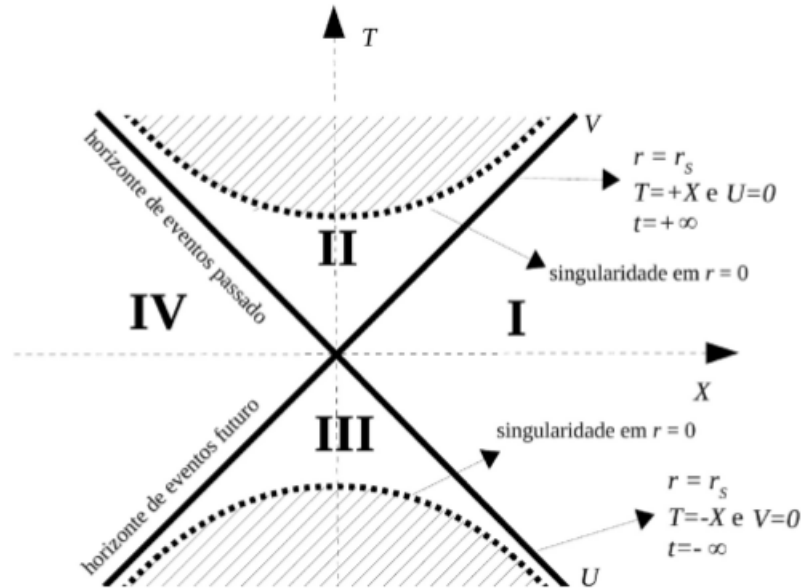


Figura 8: Fonte: [3]. Coordenadas de Kruskal-Szekeres.

coordenada temporal T invertida. Assim, um objeto na região III faz o caminho inverso do objeto que cai na singularidade da região 2, ou seja, se origina na singularidade, atravessa a linha $T = -X$ em direção à região I. Deste modo, a região III representa o que chamamos de buraco branco. Nas regiões I e IV, quando $T \rightarrow \pm X$ temos, de acordo com a equação (3.26), $t \rightarrow \infty$. Nas proximidades do horizonte de eventos, alguns efeitos quânticos, como efeito Unruh e radiação Hawking podem ser relevantes [3]. Tais efeitos serão discutidos no próximo capítulo.

3.3 Buracos Negros de Kerr

Após a solução de Schwarzschild, outras soluções da equação de Einstein foram publicadas. Entre elas, podemos citar a métrica de Reissner-Nordström para objetos simetricamente esféricos eletricamente carregados, a métrica de Kerr para objetos massivos em rotação e a métrica de Kerr-Newman para objetos eletricamente carregados e em rotação. A métrica de Kerr tem importância fundamental, uma vez que muitos objetos astrofísicos, como por exemplo estrelas e buracos negros, são dotados de rotação. Portanto, a métrica de Kerr possui como parâmetros a massa M e o momento angular J . Podemos descrever o espaço-tempo ao redor de um objeto rotativo pelo intervalo de espaço-tempo ds^2 , que neste caso será dado por [24]

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin \theta}{\rho^2} d\phi dt + \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \\
 & + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2,
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde, $a = J/M$ é o momento angular por unidade de massa, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$. As coordenadas utilizadas (t, r, θ, ϕ) nas quais a métrica de Kerr é expressa são chamadas de coordenadas Boyer-Lindquist [25]. Podemos destacar algumas propriedades importantes da métrica de Kerr [24] :

- É estacionária: não depende explicitamente do tempo;
- É simétrica: não depende explicitamente de ϕ
- Para $r \gg M$ e $r \gg a$ temos $\rho^2 \approx r^2$ e $\Delta \approx r^2$. Assim, o intervalo de espaço tempo assume a forma

$$ds^2 \approx - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \frac{4Ma}{r^2} \sin^2 \theta (rd\phi) dt + \dots \quad (3.28)$$

Assim, no limite $r \rightarrow \infty$ a métrica de Kerr se aproxima assintoticamente da métrica de Minkowski em coordenadas polares.

- No limite $a \rightarrow 0$ (buraco negro sem rotação), a métrica de Kerr se aproxima da métrica de Schwarzschild, pois $\rho^2 \rightarrow r^2$ e $\Delta \rightarrow r(r - 2M)$, então

$$ds^2 \rightarrow - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.29)$$

3.3.1 Horizonte de Kerr

A métrica de Kerr é singular tanto para $\rho^2 = 0$ quanto para $\Delta = 0$. No limite de Schwarzschild ($a \rightarrow 0$) temos $\rho^2 = r^2 = 0$, que representa a singularidade física $r = 0$ enquanto que para $r \neq 0$, $\Delta = r(r - 2M) = 0$ representa a singularidade $r = 2M$ que não é física. Podemos concluir então que $\rho^2 = 0$ é realmente uma singularidade física, enquanto $\Delta = 0$ é uma singularidade decorrente da escolha de coordenadas. Para $\Delta = 0$, o discriminante é $\Delta' = 4(M^2 - a^2)$, portanto se $a^2 > M^2$, Δ não terá solução real. Neste caso, não teríamos um horizonte de eventos. Por isso, vamos analisar o caso em que $a^2 \leq M^2$. Se resolvermos a equação $\Delta = 0$, vamos encontrar como soluções [24]

$$\begin{aligned} r_+ &= M + \sqrt{M^2 - a^2}, \\ r_- &= M - \sqrt{M^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Devemos notar que $r_+ \rightarrow r_S$ quando $a \rightarrow 0$, portanto r_+ é o horizonte de eventos, enquanto $r_- \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow 0$ e é chamado de horizonte de Cauchy [2].

Para uma superfície onde r e t são constantes, temos [1]

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 = g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2. \quad (3.31)$$

Com $g_{\theta\theta} = \rho^2$ e

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta = \left(\frac{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \\ &= \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - (r^2 + a^2)a^2 \sin^2 \theta + 2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta = \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Assim $g = \det[g_{ij}] = ((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta$. Tomando integral de $g^{1/2}$ em θ e ϕ , obtemos a área da superfície:

$$A(r) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sqrt{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta} \sin \theta d\theta. \quad (3.33)$$

Como a superfície do horizonte de eventos é definida para $\Delta = 0$, temos em $r = r_+$

$$A_{horizonte} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta = 4\pi(r_+^2 + a^2). \quad (3.34)$$

Mas, temos [2]

$$r_+^2 = 2M^2 - a^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2} = 2Mr_+ - a^2 \Rightarrow 2Mr_+ = r_+^2 + a^2. \quad (3.35)$$

Então a equação (3.34) se torna

$$A_{horizonte} = 8\pi Mr_+ = 8\pi M(M + \sqrt{M^2 - a^2}) = 8\pi(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}), \quad (3.36)$$

onde usamos $J = ma$. Vemos portanto que a área do horizonte de eventos para o buraco negro de Kerr depende não somente de sua massa, como no caso de Schwarzschild, mas também de seu momento angular. Mais uma vez, quando $a = 0$, obteremos $A_{horizonte} = 4\pi r_g^2$ a área do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild.

Numa superfície para a qual $g_{tt} = 0$, devemos ter [1]

$$\rho^2 = 2Mr \Rightarrow r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.37)$$

cujas soluções determinarão as ergosferas

$$\begin{aligned} r_{E+} &= M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \\ r_{E-} &= M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Denominaremos r_{E_+} como ergosfera externa e r_{E_-} como ergosfera interna. Podemos notar que no limite $a \rightarrow 0$, $r_{E_+} \rightarrow r_S$ enquanto $r_{E_-} \rightarrow 0$, o que era esperado, uma vez que para a solução de Schwarzschild temos apenas um horizonte de eventos [2].

3.3.2 Outras Métricas

Vimos que os buracos negros de Kerr são uma generalização dos buracos negros de Schwarzschild para o caso em que haja rotação. Outras generalizações podem ser feitas, porém com menor relevância astrofísica. Por exemplo, a métrica de Reissner-Nordström estende a métrica de Schwarzschild para o caso em que haja a presença de cargas elétricas. A métrica de de Reissner-Nordström para um objeto de carga elétrica Q é dada por [26]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{r_Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.39)$$

onde $r_Q^2 = \frac{kGQ^2}{c^4}$ com k a constante de Coulomb, G a constante gravitacional e Q a carga elétrica do buraco negro. Podemos notar que a massa e a carga são os únicos parâmetros dessa métrica e que no limite $Q \rightarrow 0$, recuperamos a solução de Schwarzschild.

Uma outra generalização pode ser feita acrescentando carga elétrica à métrica de Kerr, obtendo assim a métrica de Kerr-Newman que tem como parâmetros a massa M , a carga Q e o momento angular J e terá a mesma estrutura que a métrica de Kerr, somente com a alteração $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$. A solução da singularidade $\Delta = 0$ resulta agora em [2]

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2},$$

$$A_{horizonte} = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 4\pi[2M(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}) - Q^2] = 4\pi(2Mr_+ - Q^2). \quad (3.40)$$

Assim, podemos obter as demais métricas a partir da métrica de Kerr-Newman. Para o limite $Q \rightarrow 0$, obtemos a métrica de Kerr; para o limite $a \rightarrow 0$ obtemos a métrica de Reissner-Nordström; para $Q \rightarrow 0$ e $a \rightarrow 0$ obtemos a métrica de Schwarzschild. Podemos sumarizar esses resultados na seguinte tabela [2]

Tabela 1: Comparativo entre as principais métricas e seus parâmetros

	sem rotação ($J = 0$)	com rotação ($J \neq 0$)
sem carga ($Q = 0$)	Schwarzschild	Kerr
com carga ($Q \neq 0$)	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Vemos que para descrever um buraco negro, não precisamos de nenhuma informação a respeito do objeto colapsado que o originou, uma vez que as informações desse objeto se perdem no buraco negro. Ao invés disso, somente alguns poucos parâmetros (massa, momento angular e carga) são necessários para caracterizar um buraco negro, o que é resumido pela máxima: “Um buraco negro não tem cabelos” [10].

4 RADIAÇÃO HAWKING

Até agora temos tratado de buracos negros do ponto de vista clássico, ou seja, não envolvendo mecânica quântica. Porém, sob o ponto de vista quântico, buracos negros não são tão negros assim. Ou seja, haveria algum tipo de emissão de radiação associada a eles [10]. De fato, em 1974 Stephen Hawking provou matematicamente a existência dessa radiação, conhecida como Radiação Hawking [14].

Devido às flutuações do vácuo, pares de partículas virtuais podem aparecer e logo após se aniquilar mutuamente. Se um desses pares estiver próximo ao horizonte de eventos de um buraco negro uma das partículas do par pode eventualmente cair no buraco negro enquanto a outra permaneceria livre. Essas partículas livres seriam aparentemente uma radiação proveniente do buraco negro [4].

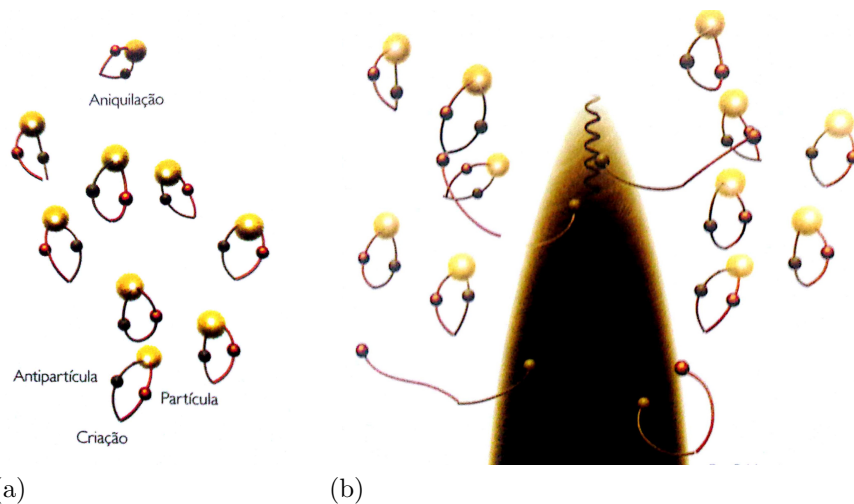


Figura 9: Fonte: [4]. (a) Criação e aniquilação de partículas. (b) Criação e aniquilação de partículas nas proximidades de um buraco negro.

Naturalmente essa é apenas uma explicação heurística, que foi apresentada pelo próprio Hawking, mas que apresenta algumas inconsistências físicas, como veremos.

O objetivo deste capítulo é discorrer sobre aspectos termodinâmicos e quânticos relacionados à radiação Hawking de buracos negros. Na primeira seção trataremos das analogias com a termodinâmica e obteremos as leis da termodinâmica de buracos negros, bem como a entropia e a temperatura de Bekenstein-Hawking. Logo em seguida, utilizaremos as transformações de Bogoliubov para analisar a radiação Hawking sob o ponto quântico. Na última seção, apresentaremos os métodos utilizados para detectar a radiação Hawking.

4.1 Analogia Termodinâmica

Como discutido no capítulo anterior, somente alguns poucos parâmetros são necessários para descrever um buraco negro. Esse resultado é conhecido como Teorema “no-hair”. Na termodinâmica ocorre o mesmo. Um sistema pode ser caracterizado por meio de poucas variáveis macroscópicas, como seu volume e pressão, por exemplo. Portanto, é natural relacionarmos as propriedades de um buraco negro com a termodinâmica [27].

A área do horizonte de eventos de um buraco negro apresenta a propriedade de ser não decrescente. Sempre que houvesse acréscimo de matéria no buraco negro a área de sua superfície aumentaria. E se dois buracos negros colidissem de modo a formar um único buraco negro esperaria-se que a área do horizonte de eventos do buraco negro resultante fosse pelo menos igual ou maior que a soma das áreas dos horizontes de evento dos dois primeiros. Esse comportamento assemelha-se muito com o da entropia pois, de acordo com a segunda lei da termodinâmica a entropia de um sistema isolado sempre aumenta com o decorrer do tempo. Além disso, quando dois sistemas são somados, a entropia do sistema final é maior que a soma das entropias dos sistemas iniciais [10]. Podemos portanto supor que a entropia para um buraco negro é diretamente proporcional à área de seu horizonte de eventos, ou seja

$$S \propto A, \quad (4.1)$$

como proposto em 1973 por Bekenstein [15].

De acordo com a lei zero da termodinâmica, um sistema se encontra em equilíbrio quando sua temperatura é constante em todos os pontos. Um buraco negro torna-se esféricamente simétrico quando a força gravitacional atuando na superfície do horizonte é constante. Nesse sentido, um buraco negro se encontra em equilíbrio quando a força gravitacional atuando em seu horizonte é constante. De acordo com a mecânica newtoniana, a aceleração gravitacional é dada por $a = GM/r^2$. Podemos definir na superfície do horizonte de eventos $r = r_S$ (aqui não faremos $c = G = 1$) [27]

$$\kappa = a(r_S) = \frac{c^4}{4GM}, \quad (4.2)$$

onde κ é a gravidade superficial do horizonte. Definiremos a gravidade superficial como a aceleração de uma partícula estática próxima ao horizonte de eventos, medida por um observador no infinito. Então, para buracos negros estacionários, a gravidade superficial κ será constante na superfície do horizonte de eventos. Está é a Lei Zero para termodinâmica de buracos negros.

Como discutido anteriormente, se a massa de um buraco negro aumenta por

um fator dM , a área de sua superfície deve aumentar por um fator dA

$$dM \propto dA. \quad (4.3)$$

A área do horizonte de eventos para um buraco negro de Schwarzschild, por exemplo, é dada por $A = 16\pi G^2 M^2 / c^4$. Portanto,

$$dA = \frac{32\pi G^2 M dM}{c^4} = \frac{8\pi}{\kappa} G dM. \quad (4.4)$$

De modo que encontramos a primeira lei para buracos negros de Schwarzschild na forma [27]

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA. \quad (4.5)$$

Podemos estender esses conceitos para um caso mais geral, como o buraco negro de Kerr-Newman. No capítulo anterior encontramos a área do horizonte de eventos de um buraco negro. De acordo com a equação (3.40), temos

$$A = 4\pi[2M(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2})]. \quad (4.6)$$

Se diferenciarmos essa equação, considerando que os parâmetros M , Q e J são variáveis, obteremos [15]

$$\begin{aligned} \frac{dA}{8\pi} &= \left(\frac{2M(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}) - a^2 - Q^2}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \right) dM \\ &\quad - \frac{aMda}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} - \left(\frac{Q(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2})}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \right) dQ \\ \frac{dA}{8\pi} &= \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} dM - \frac{a}{r_+ - r_-} dJ - \frac{Qr_+}{r_+ - r_-} dQ. \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde na última equação utilizamos $dJ = d(Ma) = a dM + M da$. Reorganizamos os termos da equação anterior, encontramos [28]

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (4.8)$$

onde κ é a gravidade superficial, Ω é a velocidade angular e Φ é o potencial elétrico no horizonte e [28]

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{r_+ - r_-}{\alpha}, \\ \Omega &= \frac{a}{\alpha}, \\ \Phi &= \frac{Qr_+}{\alpha}, \end{aligned}$$

com $\alpha = A/4\pi = r_+^2 + a^2$ sendo a área racionalizada do buraco negro [15].

Bekenstein propôs que a equação (4.8) para o buraco negro devia ser análoga à expressão termodinâmica

$$dE = TdS - PdV. \quad (4.9)$$

Nesse sentido, ΩdJ e ΦdQ podem ser interpretados como o trabalho realizado sobre o buraco negro por um agente externo que promove uma variação dJ no momento angular do buraco negro e uma variação dQ em sua carga. Por isso, ao compararmos as expressões para o trabalho realizado pela rotação de um corpo e sua carga, vemos que ΩdJ e ΦdQ tratam-se, respectivamente, do velocidade angular e do potencial elétrico [15]. Ainda de acordo com as equações (4.8) e (4.9), podemos ver que a entropia é análoga à área do buraco negro, como argumentado no início da seção e cuja relação encontraremos mais adiante.

Naturalmente, podemos estender a lei zero da termodinâmica para a gravidade superficial κ , redefinida como [29]

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{2M(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}) - Q^2}. \quad (4.10)$$

Lei Zero: Na superfície do horizonte de eventos de um buraco negro estacionário, a gravidade superficial κ deverá constante.

Além disso, decorre diretamente da equação (4.8) a primeira lei [28]

Primeira Lei: Um buraco negro deve satisfazer a equação

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (4.11)$$

onde κ é a superfície gravitacional do buraco negro Ω é velocidade angular do horizonte de eventos e Φ é o potencial elétrico no horizonte.

De acordo com a lei zero, podemos esperar que a gravidade superficial κ esteja relacionada com a temperatura de um buraco negro, e de certa forma, podemos considerar que a gravidade superficial exerça o papel da temperatura de um buraco negro [28]. De fato, se considerarmos que o buraco negro emite radiação, haverá uma temperatura associada a essa radiação proporcional κ , que será dada por [27]

$$k_B T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M}, \quad (4.12)$$

onde \hbar é a constante de Planck, c é a velocidade da luz no vácuo, k_B é a constante de Boltzmann, G é a constante gravitacional de Newton e M a massa do buraco negro. Vemos que a temperatura tem a massa como único parâmetro

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}. \quad (4.13)$$

Contudo, essa expressão para a temperatura do buraco negro nos diz que a temperatura decresce com o aumento da massa, ou seja, buracos negros menores apresentam temperatura maior que os mais massivos. Se a massa do buraco negro for grande o suficiente de modo que sua temperatura seja menor que a da radiação cósmica de fundo, então não seria possível detectar sua radiação. De fato, a temperatura para a radiação cósmica de fundo é da ordem de 3K, enquanto a temperatura para a radiação Hawking é da ordem de $10^{-9}K$ para um buraco negro com massa da ordem da massa sol [28].

Se reescrevermos a equação (4.5) da seguinte forma

$$dE = d(Mc^2) = \frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B c} \frac{k_B c^3}{4G\hbar} dA = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} T dA, \quad (4.14)$$

e compararmos com a primeira lei da termodinâmica na forma $dE = TdS$, obteremos a entropia de Bekenstein-Hawking [27]

$$S_{BH} = \frac{Ak_B c^3}{4\hbar G}. \quad (4.15)$$

Utilizando coordenadas naturais ($c = G = 1$), temos que $\frac{\kappa}{8\pi} dA = TdS$, de modo que podemos reescrever a primeira lei como:

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (4.16)$$

e com isso obtemos não mais uma lei mecânica para buracos negros, mas sim uma lei termodinâmica [28].

Da segunda lei da termodinâmica $dS \geq 0$ obtemos uma segunda lei análoga para buracos negros: $dA \geq 0$.

Entretanto, a medida que o buraco negro irradia, sua massa decresce e consequentemente a área de seu horizonte de eventos também. Mas isso seria uma contradição à segunda lei que acabamos de enunciar e também a segunda lei da termodinâmica. Pensando nisso, Bekenstein propôs que mesmo que a entropia S_{BH} decresça, a entropia total $S_T = S_{ext} + S_{BH}$, onde S_{ext} é a entropia da região exterior ao buraco negro, é uma função não decrescente no tempo. Assim, ele propôs a segunda lei generalizada para buracos negros [30]

Segunda Lei (Generalizada): Para a entropia total, temos

$$dS_T \geq 0, \quad (4.17)$$

qualquer que seja o processo ocorrido.

Sabendo que a superfície gravitacional κ tem relação direta com a temperatura de um buraco negro, e que a terceira lei da termodinâmica afirma que é impossível alcançar $T = 0$ por meio de processos físicos, portanto, podemos enunciar a terceira lei análoga para buracos negros [31]:

Terceira Lei : É impossível, por meio de qualquer processo físico, alcançar $\kappa = 0$.

Podemos reunir as analogias entre a termodinâmica e a mecânica de buracos negros na seguinte tabela:

Tabela 2: Comparativo entre a termodinâmica clássica e a mecânica de buracos negros.

Leis	Termodinâmica	Buraco Negro
Lei Zero	T constante para um sistema em equilíbrio	κ constante para um buraco negro estacionário
1ª Lei	$dE = TdS + PdV$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ$
2ª Lei	$dS \geq 0$	$dS_T = S_{ext} + \frac{1}{4}A_{BH} \geq 0$
3ª Lei	Impossível alcançar $T = 0$	Impossível alcançar $\kappa = 0$

Embora, num primeiro momento, as leis mecânicas para buracos negros fossem somente analogias à termodinâmica, sem qualquer interpretação física mais profunda, a partir do momento em que Hawking provou a relação entre a área de um buraco e sua entropia, viu-se que as leis obtidas não eram meramente analogias mas na verdade descreviam a termodinâmica de buracos negros [28].

4.2 Transformações de Bogoliubov

Evidentemente, o ponto de vista clássico não é o mais adequado para abordar o fenômeno pois a radiação Hawking é um efeito quântico. Portanto, o objetivo dessa seção é abordar a radiação Hawking por meio da mecânica quântica, o que será feito através das chamadas transformações de Bogoliubov.

Ao comparar as soluções da equação de Klein Gordon para partículas não massivas a partir do ponto de vista de um observador inercial e de um observador não-inercial, surge o chamado efeito Unruh, no qual o número de partículas depende do

observador. Em outras palavras, um observador uniformemente acelerado observa radiação de partículas enquanto um observador inercial observa o vácuo.

Para calcular a produção de partículas, devemos utilizar as transformações de Bogoliubov entre o estados de vácuo externo e interno [32]. Sejam u_i e v_i conjuntos completos de soluções da equação de Klein-Gordon satisfazendo [33]

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &= - \langle u_i^*, u_j^* \rangle = \delta_{ij}, & \langle u_i, u_j^* \rangle &= 0; \\ \langle v_k, v_l \rangle &= - \langle v_k^*, v_l^* \rangle = \delta_{kl}, & \langle v_k, v_l^* \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

u_i está relacionado ao modos emergentes e v_i está relacionado aos modos incidentes, vistos no capítulo 3. Podemos escrever o operador campo escalar $\hat{\phi}$ como

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i u_i + \hat{a}_i^\dagger u_i^*) = \sum_j (\hat{b}_j v_j + \hat{b}_j^\dagger v_j^*), \quad (4.19)$$

onde \hat{a}_i e \hat{a}_i^\dagger são, respectivamente, os operadores de aniquilação e criação relativos a u_i e \hat{b}_j e \hat{b}_j^\dagger são os operadores criação e aniquilação relativos a v_i .

Esses operadores obedecem as seguintes relações de comutação [32]

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{ij}, & [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0; \\ [\hat{b}_k, \hat{b}_l^\dagger] &= \delta_{kl}, & [\hat{b}_k, \hat{b}_l] &= [\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_l^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O estado de vácuo será definido por [34]

$$\hat{a}_i |0\rangle_a = 0, \quad \hat{b}_k |0\rangle_b = 0. \quad (4.21)$$

Além disso, temos

$$|1_i\rangle_a = \hat{a}_i^\dagger |0\rangle_a, \quad |1_j\rangle_b = \hat{b}_j^\dagger |0\rangle_b. \quad (4.22)$$

Por completeza, podemos escrever v_i e v_i^* em termos de u_i e u_i^* através das transformações de Bogoliubov [33]

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*), \\ v_j^* &= \sum_i (\alpha_{ji}^* u_i^* + \beta_{ji}^* u_i), \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde α_{ki} e β_{ki} são as coeficientes de Bogoliubov. Utilizando as transformações de Bogoliubov

na equação (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \sum_i (\hat{a}_i u_i + \hat{a}_i^\dagger u_i^*) = \sum_j \left(\hat{b}_j \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*) + \hat{b}_j^\dagger \sum_i (\alpha_{ji}^* u_i^* + \beta_{ji}^* u_i) \right) \\ &= \sum_i u_i \sum_j (\alpha_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger) + \sum_i u_i^* \sum_j (\alpha_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger + \beta_{ji} \hat{b}_j),\end{aligned}\quad (4.24)$$

que nos leva às relações entre os operadores \hat{a}_i , \hat{a}_i^\dagger e \hat{b}_j , \hat{b}_j^\dagger

$$\begin{aligned}\hat{a}_i &= \sum_j (\alpha_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger), \\ \hat{a}_i^\dagger &= \sum_j (\alpha_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger + \beta_{ji} \hat{b}_j).\end{aligned}\quad (4.25)$$

Pelas condições de ortogonalidade (4.18) obtemos as seguintes relações para os coeficientes de Bogoliubov [33]

$$\begin{aligned}0 &= \langle v_k, v_l^* \rangle = \sum_i \sum_j (\alpha_{ki} \beta_{lj}^* \langle u_i, u_j \rangle + \beta_{ki} \alpha_{lj}^* \langle u_i^*, u_j^* \rangle) \\ &\Rightarrow \sum_i (\alpha_{ki} \beta_{lj}^* - \beta_{ki} \alpha_{lj}^*) = 0,\end{aligned}\quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned}\delta_{kl} &= \langle v_k^*, v_l^* \rangle = \sum_i \sum_j (\alpha_{ki} \alpha_{lj}^* \langle u_i, u_j \rangle + \beta_{ki} \beta_{lj}^* \langle u_i^*, u_j^* \rangle) \\ &\Rightarrow \sum_i (\alpha_{ki} \alpha_{lj}^* - \beta_{ki} \beta_{lj}^*) = \delta_{kl}.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Podemos analogamente obter as transformações de Bogoliubov inversas

$$\begin{aligned}u_i &= \sum_k (\alpha_{ki}^* v_k - \beta_{ki} v_k^*), \\ u_i^* &= \sum_k (\alpha_{ki} v_k^* - \beta_{ki}^* v_k),\end{aligned}\quad (4.28)$$

e também as relações inversas entres os operadores de aniquilação e criação

$$\begin{aligned}\hat{b}_k &= \sum_i (\alpha_{ki} \hat{a}_i - \beta_{ki}^* \hat{a}_i^\dagger), \\ \hat{b}_k^\dagger &= \sum_i (\alpha_{ki}^* \hat{a}_i^\dagger - \beta_{ki} \hat{a}_i).\end{aligned}\quad (4.29)$$

Com base nisso, podemos definir o operador [34]

$$\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \quad \hat{N}_j = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \quad (4.30)$$

cujo valor esperado é o número de partículas. No vácuo, temos

$$\begin{aligned} {}_a \langle 0 | \hat{N}_i | 0 \rangle_a &= 0, \\ {}_b \langle 0 | \hat{N}'_i | 0 \rangle_b &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Porém, se calcularmos o valor esperado de \hat{N}'_k para os estados de vácuo $|0\rangle_a$ obteremos [[33] [35]

$$\begin{aligned} {}_a \langle 0 | \hat{N}'_k | 0 \rangle_a &= {}_a \langle 0 | \sum_i \sum_j (\alpha_{ki}^* \hat{a}_i^\dagger - \beta_{ki} \hat{a}_i) (\alpha_{kj} \hat{a}_j - \beta_{kj}^* \hat{a}_j^\dagger) | 0 \rangle_a \\ &= {}_a \langle 0 | \sum_i \sum_j (\alpha_{ki}^* \alpha_{kj} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j) | 0 \rangle_a + {}_a \langle 0 | \sum_i \sum_j \beta_{ki} \beta_{kj}^* \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger | 0 \rangle_a \\ {}_a \langle 0 | \hat{N}'_k | 0 \rangle_a &= \sum_i |\beta_{ki}|^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Os coeficientes β_{ki} não são todos nulos, portanto, ${}_a \langle 0 | \hat{N}'_k | 0 \rangle_a \neq 0$. Da mesma forma, se calcularmos o valor esperado de \hat{N}_i para os estados de vácuo $|0\rangle_a$, obteremos ${}_b \langle 0 | \hat{N}_i | 0 \rangle_b = \sum_j |\beta_{ij}|^2$. Assim, o observador B (que se encontra na região incidente) observa partículas no vácuo do observador A (que se encontra na região emergente) e vice-versa. Este é o caso mais simples de Radiação Hawking. No Apêndice B, calculamos os coeficientes de Bogoliubov e obtivemos

$${}_a \langle 0 | \hat{N}'_k | 0 \rangle_a = \frac{1}{e^{2\pi\omega_k/\kappa} - 1}, \quad (4.33)$$

que corresponde ao espectro de um corpo negro com temperatura $T = \kappa/(2\pi k_B)$, e havíamos assumido em (4.12) [14].

4.3 Evidências Experimentais da Radiação Hawking

Como já mencionado, a detecção direta da radiação radiação Hawking é muito pouco viável, do ponto de vista prático, uma vez que a temperatura associada a essa radiação é muito inferior à da radiação cósmica de fundo. Pensando nisso, em 1981 Unruh propôs um método experimental para a detecção da evaporação de buracos negros [16]. De acordo com ele, haveria um sistema físico dotado de propriedades análogas às propriedades de buracos negros.

A ideia básica por trás desses sistemas análogos, é que os mesmos argumentos utilizados para prever a radiação de buracos negros também são válidos para prever o espectro térmico de ondas sonoras que deve ser obtido a partir do horizonte sônico de um fluido supersônico. Por esta razão, os análogos de buracos negros são denominados buracos negros acústicos. Hoje em dia, sabe-se que aspectos da Relatividade Geral como

a existência de horizontes de eventos, a definição de uma métrica e de uma gravidade superficial, possuem análogos em mecânica dos fluidos. Além disso, se a velocidade do fluido exceder a velocidade do som, então as ondas sonoras não poderão escapar da região de fluxo supersônico, semelhantemente ao que ocorre com a luz aprisionada em um buraco negro. Ou seja, os fônons exercem um papel semelhante ao dos fótons. A região do fluido na qual isso ocorre é denominada ergoregião [36].

Desde que foram propostos por Unruh, os análogos de buracos negros se tornaram uma importante linha de pesquisa teórica. Recentemente, Steinhauer observou a radiação Hawking em um análogo de buraco negro obtido a partir do confinamento de um condensado de Bose-Einstein em um feixe de laser [37]. Esse resultado é de grande importância para a confirmação da radiação Hawking, que por sua vez, traz muitas implicações positivas no desenvolvimento de uma teoria que una gravidade e mecânica quântica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, fizemos uma revisão da teoria da relatividade, apresentando seus conceitos mais fundamentais e obtivemos as equações de campo de Einstein, a partir das quais, surgem as principais soluções de buracos negros. Após isso, apresentamos, no contexto da relatividade geral, uma revisão teórica das principais propriedades relacionadas às soluções clássicas de buracos negros, com ênfase nas métricas de Schwarzschild e Kerr. Calculamos os raios dos horizontes de eventos e a área correspondentes a cada uma das soluções apresentadas. A partir da expressão para a área de um buraco negro de Kerr-Newman, obtivemos uma relação análoga à primeira lei da termodinâmica, por meio da qual construímos toda a analogia termodinâmica de buracos negros. Por último, analisamos, quanticamente, a radiação Hawking. Para isso, utilizamos as transformações de Bogoliubov e calculamos o valor esperado do operador número de partículas. Concluímos que a radiação Hawking é um efeito quântico e que a emissão de radiação de um buraco negro é similar ao de um corpo negro. Nosso interesse é aplicar a chamada violação da simetria de Lorentz a esse contexto. Partindo de um modelo onde um campo vetorial possui uma direção preferencial, pretendemos calcular sua influência no cálculo do raio do horizonte de eventos. Cálculos anteriores impõem um requisito de não-dinâmica, exigindo que o campo vetorial adquira um VEV (“Vacuum Expectation Values”) puramente radial. A expectativa é de que a introdução de dinâmica pode trazer interessantes contribuições da violação de Lorentz no contexto da radiação de Hawking.

APÊNDICE A - RELATIVIDADE

Neste apêndice, serão tratados alguns aspectos mais técnicos de Relatividade Restrita e Geral, em especial em relação à álgebra de tensores, ferramenta fundamental para o desenvolvimento matemático da teoria de relatividade.

A.1 Transformações de Galileu x Transformações de Lorentz

Queremos mostrar que a teoria eletromagnética é invariante por transformações de Lorentz, mas não por transformações de Galileu. Para tanto, basta mostrarmos que a equação da onda [6]

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

é mantida invariante apenas por transformações de Lorentz.

Dados dois referenciais inerciais com velocidade relativa V entre si, podemos encontrar uma relação entre o sistema de coordenadas de S no sistema de coordenadas de S' .

As transformações de Galileu são dadas por:

$$x' = x - Vt, \quad (\text{A.2})$$

$$y' = y, \quad (\text{A.3})$$

$$z' = z, \quad (\text{A.4})$$

$$t' = t. \quad (\text{A.5})$$

Como $x = x(x', t') = x' + Vt'$, $y = y(y', t') = y'$, $z = z(z', t') = z'$ e $t = t(x', t') = t'$, as derivadas parciais se transformam da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad (\text{A.8})$$

Deste modo temos $\nabla^2 = \nabla'^2$, porém, o mesmo não vale para as derivadas temporais. Com efeito, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -V \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \quad (\text{A.9})$$

e a equação da onda se torna

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla'^2 \phi - \frac{1}{c^2} \left(V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \phi \quad (\text{A.10})$$

Portanto vemos que a equação da onda não permanece invariante sob transformações de Galileu. As transformações de Lorentz não consideram o tempo absoluto, logo, a coordenada temporal no referencial S' deve depender não só da coordenada temporal como também das coordenadas espaciais de S. Para este caso as transformações de Lorentz serão dadas por

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) \quad (\text{A.11})$$

$$y' = y \quad (\text{A.12})$$

$$z' = z \quad (\text{A.13})$$

$$t' = \gamma(V) \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right) \quad (\text{A.14})$$

enquanto as transformações inversas são

$$x = \gamma(V)(x' + Vt') \quad (\text{A.15})$$

$$y = y' \quad (\text{A.16})$$

$$z = z' \quad (\text{A.17})$$

$$t = \gamma(V) \left(t' + \frac{Vx'}{c^2} \right) \quad (\text{A.18})$$

onde $\gamma(V) = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$.

Mas, utilizaremos as transformações de Lorentz na forma geral para provar a

invariância da equação da onda:

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \Leftrightarrow x^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} x'^{\beta} \quad (\text{A.19})$$

lembrando que Λ^{α}_{β} e Λ_{β}^{α} são constantes.

As derivadas parciais se transformam da seguinte forma

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \Lambda_{\mu}^{\beta} \partial_{\beta} \quad (\text{A.20})$$

$$\partial'^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \partial'_{\nu} = \eta^{\mu\nu} \Lambda_{\nu}^{\alpha} \partial_{\alpha} = \eta^{\mu\nu} (\eta_{\nu\beta} \eta^{\alpha\gamma} \Lambda^{\beta}_{\gamma}) \partial_{\alpha} = \delta^{\nu}_{\beta} \eta^{\alpha\gamma} \Lambda^{\beta}_{\gamma} \partial_{\alpha} = \Lambda^{\mu}_{\gamma} (\eta^{\alpha\gamma} \partial_{\alpha}) = \Lambda^{\mu}_{\gamma} \partial^{\gamma} \quad (\text{A.21})$$

onde usamos $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\beta} = \delta^{\nu}_{\beta}$.

Como o produto interno é definido por $A_{\mu} B^{\mu} = \eta_{\mu\nu} A^{\nu} B^{\mu}$, temos

$$\square^2 = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = -\partial_0 \partial^0 + \partial_i \partial^i = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{A.22})$$

\square é o operador D'Alambertiano.

Assim, para transformações de Lorentz, a equação de onda se transforma da seguinte maneira:

$$\square'^2 \phi = (\partial'_{\mu} \partial'^{\mu}) \phi = (\Lambda_{\mu}^{\beta} \partial_{\beta} \Lambda^{\mu}_{\gamma} \partial^{\gamma}) \phi = (\Lambda_{\mu}^{\beta} \Lambda^{\mu}_{\gamma}) \partial_{\beta} \partial^{\gamma} \phi = \partial_{\gamma} \partial^{\gamma} \phi = \square^2 \phi \quad (\text{A.23})$$

onde usamos $\Lambda_{\mu}^{\beta} \Lambda^{\mu}_{\gamma} = \delta_{\gamma}^{\beta}$. Portanto, provamos que o operador D'Alambertiano, assim como a equação de onda são invariantes por transformações de Lorentz.

A.2 Tensores e Álgebra de Tensores

Ao construir equações físicas, é de grande interesse que estas sejam invariantes sob transformações gerais de coordenadas. Para tanto, devemos saber como as quantidades físicas descritas por tais equações se transformam de um sistema de coordenadas para outro. Os escalares como por exemplo, um número ou o tempo próprio ($d\tau$), não se alteram sob transformações gerais [19]. Um outro exemplo simples é o da transformação de um vetor. Dizemos que um vetor V^{μ} é cotravariante se, sob uma transformação de coordenadas $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$ ele se transforma da seguinte maneira

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad (\text{A.24})$$

Por exemplo, a derivada total de x^μ é um vetor cotravariante, pois

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (\text{A.25})$$

Um vetor U_μ é covariante se sob uma transformação de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ ele se transforma da seguinte maneira

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu \quad (\text{A.26})$$

A derivada parcial é vetor covariante pois

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \quad (\text{A.27})$$

No caso da transformação de Lorentz temos $x^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu x'^\nu$, portanto, $\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$.

Os tensores são objetos matemáticos extremamente importantes em física, pois, equações tensoriais válidas em um determinado sistema de coordenadas são válidas em qualquer outro sistema de coordenadas. Em particular, se um tensor é nulo em um determinado sistema de coordenadas, então ele será nulo em todos os outros [21]. Podemos definir os tensores a partir da definição de vetores contravariantes e covariantes. Um tensor contravariante de ordem n se transforma como o produto de dois vetores contravariantes:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} \quad (\text{A.28})$$

Portanto, sabendo que um tensor contravariante de ordem n $T^{\mu_1 \dots \mu_n}$ se transforma como o produto de n vetores contravariantes $V^{\mu_1} W^{\mu_2} \dots$, temos

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}} T^{\nu_1 \dots \nu_n} \quad (\text{A.29})$$

Da mesma forma, um tensor covariante de ordem m $T_{\mu_1 \dots \mu_m}$ se transforma como o produto de m vetores covariantes $= R^{\nu_1} S^{\nu_2} \dots$. Logo,

$$T'_{\mu_1 \dots \mu_m} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_m}}{\partial x'^{\mu_m}} T_{\nu_1 \dots \nu_m} \quad (\text{A.30})$$

Um tensor misto é aquele que possui índices covariantes e contravariantes. Por exemplo, o tensor T^μ_ν é covariante de ordem um e contravariante de ordem um e obedece a seguinte regra de transformação:

$$T'^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T^\alpha_\beta \quad (\text{A.31})$$

Podemos facilmente estender essa definição para o caso mais geral de um tensor

contravariante de ordem n e covariante de ordem m [21]

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \right) \left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}} \right) T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} \quad (\text{A.32})$$

A partir da definição geral de tensor podemos notar que:

- 1) Se todos os índices são contravariantes (covariantes), então temos um tensor puramente contravariante (covariante);
- 2) Os tensores contravariantes (covariantes) de ordem um são vetores contravariantes (covariantes);
- 3) Tensores de ordem 0 são escalares.

Os tensores obedecem as seguintes regras algébricas [19] [21]

1) Combinação Linear: A combinação linear de dois tensores de mesma ordem deve resultar num terceiro tensor de mesma ordem. Por exemplo, sejam $U = U^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$ e $V = V^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$ tensores mistos de mesma ordem, e a e b constantes. Temos

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = aU + bV = aU^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} + bV^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} \quad (\text{A.33})$$

Logo T deve ser uma tensor de mesma ordem que U e V . Com efeito, temos

$$\begin{aligned} T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} &= a \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \right) \left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}} \right) U^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} \\ &+ b \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \right) \left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}} \right) V^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Portanto,

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \right) \left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}} \right) T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m}. \quad (\text{A.35})$$

De maneira geral, se R_1, R_2, \dots, R_p são tensores de mesma ordem e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ são escalares, então $R = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_p R_p$ é um tensor de mesma ordem que os R_s .

2) Produto Direto: O produto direto de um tensor $U = U^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$ com um tensor $V = V^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}$ resulta num tensor de ordem $m + n + p + q$, pois,

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \dots \mu_n \rho_1 \dots \rho_p}_{\nu_1 \dots \nu_m \sigma_1 \dots \sigma_q} &= (U^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} \cdot V^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}) \\ &= \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \cdot \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}} U^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} \right) \times \\ &\quad \left(\frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\rho_p}}{\partial x^{\lambda_p}} \cdot \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x^{\gamma_q}}{\partial x'^{\sigma_q}} V^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\gamma_1 \dots \gamma_q} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Portanto,

$$T_{\nu_1 \dots \nu_m \sigma_1 \dots \sigma_q}^{\mu_1 \dots \mu_n \rho_1 \dots \rho_p} = \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \cdot \frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\rho_p}}{\partial x^{\lambda_p}} \right) x \left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}} \cdot \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x^{\gamma_q}}{\partial x'^{\sigma_q}} \right) T_{\beta_1 \dots \beta_m \gamma_1 \dots \gamma_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \lambda_1 \dots \lambda_p}. \quad (\text{A.37})$$

3) Contração: Se, para um tensor $U = U_{\nu_1 \dots \nu_i \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_n}$ fazemos $\mu_i = \nu_i = j$ e somamos em j , o tensor resultante U' será a contração de U e terá ordem $m + n - 2$. Ou seja,

$$U' = U_{\nu_1 \dots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_n} = U_{\nu_1 \dots \nu_{i-1} j \nu_{i+1} \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} j \mu_{i+1} \dots \mu_n} \quad (\text{A.38})$$

A.2.1 Tensor Métrico

Antes de mais nada, vamos mostrar que a métrica é um tensor. A métrica é definida como [19]

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (\text{A.39})$$

onde y^α é um referencial inercial e x^μ é não-inercial. A métrica $g'_{\mu\nu}$ num novo sistema de coordenadas x'^μ é

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x'^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} = \left(\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\lambda} \right) \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \quad (\text{A.40})$$

Com isso concluímos que a métrica é um tensor covariante de ordem 2, pois

$$g'_{\mu\nu} = g_{\gamma\lambda} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \quad (\text{A.41})$$

Sabendo que a métrica é um tensor, se fizermos o produto direto da métrica $g_{\mu\nu}$ com um tensor que tenha índices covariantes (por exemplo, $U_\alpha^{\mu\lambda}$) e uma contração no índice μ , obteremos de acordo com as regras 2 e 3 da seção anterior, um novo tensor V definido como:

$$V_{\nu\sigma}^\lambda = g_{\mu\nu} U_\sigma^{\mu\lambda}. \quad (\text{A.42})$$

Chamaremos essa operação de abaixamento de índices, por razões óbvias. Analogamente, podemos definir uma operação de levantamento de índices utilizando a inversa da métrica $g^{\mu\nu}$:

$$W_\sigma^{\nu\lambda} = g^{\mu\nu} V_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (\text{A.43})$$

onde $W_\sigma^{\nu\lambda}$. É fácil ver que as operações levantamento e abaixamento devem ser inversas entre si, ou seja, abaixar (levantar) um índice e depois levantá-lo(abaixá-lo) nos leva ao

tensor original [19]

$$W_{\sigma}^{\nu\lambda} = g^{\mu\nu}V_{\mu\sigma}^{\lambda} = g^{\mu\nu}g_{\mu\gamma}U_{\sigma}^{\gamma\lambda} = U_{\sigma}^{\nu\lambda}. \quad (\text{A.44})$$

Para que $U_{\sigma}^{\nu\lambda} = g^{\mu\nu}g_{\mu\gamma}U_{\sigma}^{\gamma\lambda}$ devemos ter

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\gamma} = \delta_{\lambda}^{\nu}. \quad (\text{A.45})$$

Ou seja, baixar um índice de $g^{\mu\nu}$ ou levantar um índice de $g_{\mu\nu}$ resulta no delta de Kronecker. Podemos notar que baixando ambos índices de $g^{\mu\nu}$ obtemos $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}g^{\mu\nu} = g_{\mu\sigma}\delta_{\lambda}^{\mu} = g_{\lambda\sigma}, \quad (\text{A.46})$$

e, inversamente, levantando ambos os índices de $g_{\mu\nu}$ obtemos $g^{\mu\nu}$.

Uma das funções fundamentais da métrica é definir a noção de distância entre dois pontos em espaços não-Euclidianos [1]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \quad (\text{A.47})$$

Portanto, o tensor métrico obedece as seguintes propriedades [1]

- 1) g é simétrico ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$);
- 2) O conceito de distância é invariante sobre uma transformação de coordenadas

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu} = g_{\gamma\lambda}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}dx'^{\mu}dx'^{\nu} = g_{\gamma\lambda}dx^{\gamma}dx^{\lambda} = ds^2 \quad (\text{A.48})$$

Dados dois vetores \mathbf{U} e \mathbf{V} , seu produto interno deve depender somente dos vetores e não do sistema de coordenadas no qual foram especificados [schaum]. Em outras palavras, o produto interno de dois vetores deve ser um invariante. Sejam $\mathbf{U} = U^{\mu}$ e $\mathbf{V} = V^{\mu}$ vetores contravariantes. Com o auxílio da métrica podemos definir o produto interno geral

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = g_{\mu\nu}U^{\mu}V^{\nu} = U_{\mu}V^{\mu} = U^{\mu}V_{\mu}. \quad (\text{A.49})$$

Da mesma forma para vetores covariantes, temos

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = g^{\mu\nu}U_{\mu}V_{\nu} = U_{\mu}V^{\mu} = U^{\mu}V_{\mu}. \quad (\text{A.50})$$

Logo, para realizar o produto interno de dois vetores de mesmo tipo, devemos levantar ou abaixar o índice de um deles e utilizar as regras 2 e 3 da seção anterior. Como exemplo, vamos calcular o produto interno entre o quadri-vetores velocidade

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -1, \quad (\text{A.51})$$

onde usamos $d\tau^2 = -ds^2$. Como $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$ é constante, temos

$$\mathbf{U} \cdot \frac{\mathbf{U}}{d\tau} = 0 \quad (\text{A.52})$$

A.2.2 Conexão Afim

No capítulo 1 definimos o símbolo de Christoffel, ou conexão afim, e afirmamos que este não se trata de um tensor. Nesta seção vamos mostrar como o símbolo de Christoffel se transforma sob uma mudança de coordenadas e verificar que ele não é um tensor [19]. Lembrando da definição da conexão afim:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}}. \quad (\text{A.53})$$

Mudando o sistema de coordenadas $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\nu\sigma}{}^{\lambda} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\sigma}} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\mu}} \left[\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\rho}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Rearranjando os termos e usando a identidade $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\rho}} = \delta_{\rho}^{\alpha}$, obtemos

$$\Gamma'_{\nu\sigma}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma_{\kappa\rho}^{\alpha} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\sigma}}. \quad (\text{A.55})$$

O primeiro termo é o que se esperaria do comportamento de um tensor sob uma transformação de coordenadas, mas a existência do segundo termo nos diz que o símbolo de Christoffel não é realmente um tensor. Desejamos encontrar uma fórmula alternativa para o termo inhomogêneo no símbolo de Christoffel. Para isso vamos derivar a relação $\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\sigma}} = \delta_{\sigma}^{\lambda}$ em relação a x'^{ν} e encontrar [19]

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\sigma}} = - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\alpha}}. \quad (\text{A.56})$$

Deste modo podemos reescrever a equação (A.55)

$$\Gamma'_{\nu\sigma}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma_{\kappa\rho}^{\alpha} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\alpha}}. \quad (\text{A.57})$$

A.2.3 Derivada Covariante

Ao trabalhar com tensores muitas vezes desejamos derivá-los para obter alguma equação física. É desejável que tais derivadas de tensores tenham comportamento tensorial, mas isso nem sempre acontece [19]. Com efeito, dado um tensor contravariante V^{α} , cuja transformação de um conjunto de coordenadas x^{μ} para um conjunto de coordenada x'^{μ} é

do tipo

$$V'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} V^{\beta} \quad (\text{A.58})$$

Se diferenciarmos V'^{α} em relação a x'^{λ} obtemos

$$\frac{\partial V'^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} V^{\beta} \right) = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\beta}} V^{\beta} \quad (\text{A.59})$$

O primeiro termo corresponde ao que se esperaria se $\frac{\partial V'^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}}$ fosse um tensor mas, o segundo termo que é inhomogêneo, faz com que essa derivada não se comporte como um tensor. Logo, precisamos redefinir a operação derivada de maneira que a derivada de um tensor gere um novo tensor. Isolando o termo inhomogêneo da equação (A.57)

$$\frac{\partial^2 x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} - \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\delta\gamma}^{\kappa} \quad (\text{A.60})$$

e substituindo na equação (A.59), obtemos [21]

$$\frac{\partial V'^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} + \left[\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\sigma\beta}^{\tau} - \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} \Gamma_{\kappa\gamma}^{\alpha} \right] \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\beta} \quad (\text{A.61})$$

Lembrando que $\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} = \delta_{\gamma}^{\kappa}$, $\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} V^{\beta} = V'^{\gamma}$ e rearranjando os termos obtemos

$$\frac{\partial V'^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha} V'^{\gamma} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \left[\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\tau}^{\beta} V^{\tau} \right] \quad (\text{A.62})$$

Segue imediatamente da equação anterior que se definirmos a derivada covariante de um tensor contravariante V^{μ} como

$$V^{\mu}_{;\lambda} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\tau}^{\mu} V^{\tau} \quad (\text{A.63})$$

essa derivada será também um tensor.

Podemos obter de maneira análoga a derivada covariante de um tensor covariante. Para um vetor covariante V_{α} , que se transforma da seguinte maneira

$$V'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} V_{\beta} \quad (\text{A.64})$$

a derivada com relação a x^{λ} será

$$\frac{\partial V'_{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\alpha}} V_{\beta} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V'_{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \quad (\text{A.65})$$

Neste caso como temos

$$\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\tau} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} - \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\delta\gamma}^{\kappa} \quad (\text{A.66})$$

e a equação (A.65) se torna

$$\frac{\partial V'_\alpha}{\partial x'^\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\gamma} V'_\gamma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \left[\frac{\partial V_\beta}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\beta\sigma}^{\tau} V_\tau \right] \quad (\text{A.67})$$

Deste modo, podemos definir a derivada covariante de um tensor covariante como

$$V_{\mu;\lambda} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\tau} V_\tau \quad (\text{A.68})$$

e a equação (A.67) nos garante que essa derivada gera um tensor.

Note que, uma vez que o símbolo de Christoffel é obtido das derivadas do tensor métrico, este deve se anular para espaços cuja métrica é constante. Logo, no espaço de Minkowski a derivada parcial e a derivada covariante coincidem [19] [21].

Podemos estender a definição de derivada covariante para um tensor mais geral $T = T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ para obter um tensor $T_\kappa = T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m;\kappa}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ da seguinte forma [21]

$$\begin{aligned} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m;\kappa}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} &= \frac{\partial T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\alpha\kappa}^{\mu_1} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}^{\alpha\mu_2\dots\mu_n} + \Gamma_{\alpha\kappa}^{\mu_2} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}^{\mu_1\alpha\dots\mu_n} + \dots + \Gamma_{\alpha\kappa}^{\mu_n} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}^{\mu_1\mu_2\dots\alpha} \\ &\quad - \Gamma_{\alpha\kappa}^{\nu_1} T_{\alpha\nu_2\dots\nu_m}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} - \Gamma_{\alpha\kappa}^{\nu_2} T_{\nu_1\alpha\dots\nu_m}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} - \dots - \Gamma_{\alpha\kappa}^{\nu_m} T_{\nu_1\nu_2\dots\alpha}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Podemos verificar algumas propriedades da derivada covariante [21] [19]. Dados dois tensores arbitrários de mesma ordem \mathbf{U} e \mathbf{V} e escalares a e b :

1) A derivada covariante de uma combinação linear de tensores é a combinação linear das derivadas covariantes

$$(a\mathbf{U} + b\mathbf{V})_{;\lambda} = a\mathbf{U}_{;\lambda} + b\mathbf{V}_{;\lambda}; \quad (\text{A.70})$$

2) A derivada covariante do produto direto de dois tensores obedece à regra de Leibniz

$$(\mathbf{UV})_{;\lambda} = (\mathbf{U}_{;\lambda}\mathbf{V}) + (\mathbf{UV}_{;\lambda}); \quad (\text{A.71})$$

3) A derivada covariante de um tensor contraído é a contração da derivada covariante

$$U^\mu_{;\lambda} = (U^\mu_\alpha)_{;\lambda} = \frac{\partial U^\mu_\alpha}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu U^\nu_\alpha = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu U^\nu. \quad (\text{A.72})$$

Podemos notar que em espaços com métrica constante as propriedades 1 e 2

recaem nas propriedades da derivada usual. Além disso, a derivada covariante da métrica é sempre nula [19]. Com efeito,

$$g_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\sigma\mu}. \quad (\text{A.73})$$

Usando a definição da métrica e derivando com relação a x^α obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \right) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \\ &= \eta_{\alpha\beta} \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \frac{dx^\alpha}{dy^\sigma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \frac{dx^\alpha}{dy^\sigma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Onde na última igualdade usamos $\frac{dx^\alpha}{dy^\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}$, de acordo com a definição do símbolo de Christoffel dada no capítulo 1. Assim

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\sigma\mu}, \quad (\text{A.75})$$

e concluímos que o resultado a equação (A.73) é zero e o mesmo vale para $g^{\mu\nu}$. Portanto, a métrica é constante perante a derivada covariante e vemos que as operações levantamento e abaixamento de índices comutam com a derivada covariante

$$\begin{aligned} (g_{\mu\nu} V^\mu)_{;\lambda} &= g_{\mu\nu} (V^\mu)_{;\lambda} = V_{\nu;\lambda} \\ (g^{\mu\nu} V_\mu)_{;\lambda} &= g^{\mu\nu} (V_\mu)_{;\lambda} = V_{;\lambda}^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Portanto, as equações obtidas na ausência de gravidade podem ser reescritas na presença de campos gravitacionais apenas substituindo $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e a derivada usual pela derivada covariante e o princípio da covariância geral nos garantirá que as equações obtidas serem verdadeiras [19] [20].

A.2.4 Propriedades Algébricas do Tensor de Riemann

No capítulo 1, definimos o tensor curvatura ou tensor de Riemann $R_{\mu\nu\sigma}^\lambda$ de segundo tipo como sendo

$$R_{\mu\nu\sigma}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda. \quad (\text{A.77})$$

Iremos demonstrar que $R_{\mu\nu\sigma}^\lambda$ é um tensor. Para tanto, devemos lembrar de como a conexão afim se comporta sob uma transformação de coordenadas. Da equação (A.57) podemos isolar o termo inhomogêneo da transformação do símbolo de Christoffel e obter a equação (A.60) [19]

$$\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\tau} \Gamma_{\mu\nu}^\tau - \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\delta\gamma}^{\prime\kappa}. \quad (\text{A.78})$$

Vamos derivar a última equação em relação a x^ρ e obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\kappa}{\partial x^\rho \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\rho \partial x^\tau} \Gamma_{\mu\nu}^\tau + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\rho \partial x^\tau} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\tau}{\partial x^\rho} - \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\rho} \frac{\partial \Gamma_{\delta\gamma}^{\prime\kappa}}{\partial x^\eta} \\ &\quad - \Gamma_{\delta\gamma}^{\prime\kappa} \left[\frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\gamma}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Utilizando a equação (A.78), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\kappa}{\partial x^\rho \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \Gamma_{\mu\nu}^\tau \left[\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\delta} \Gamma_{\rho\tau}^\delta - \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\tau} \Gamma_{\delta\tau}^{\prime\kappa} \right] + \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\tau} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\tau}{\partial x^\rho} - \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\rho} \frac{\partial \Gamma_{\delta\gamma}^{\prime\kappa}}{\partial x^\eta} \\ &\quad - \Gamma_{\delta\eta}^{\prime\kappa} \left[\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\tau} \Gamma_{\rho\mu}^\delta - \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\mu} \Gamma_{\sigma\theta}^{\prime\delta} \right) + \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\tau} \Gamma_{\rho\nu}^\tau - \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\sigma\theta}^{\prime\gamma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Organizando os termos comuns e alterando alguns índices, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\kappa}{\partial x^\rho \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\delta} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\delta}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\rho\tau}^\delta \right) - \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial \Gamma_{\delta\gamma}^{\prime\kappa}}{\partial x^\eta} - \Gamma_{\eta\delta}^{\prime\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\prime\kappa} - \Gamma_{\eta\gamma}^{\prime\sigma} \Gamma_{\delta\sigma}^{\prime\kappa} \right) \\ &\quad - \Gamma_{\delta\gamma}^{\prime\kappa} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\tau} \left(\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\tau + \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\mu}^\tau + \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\mu} \Gamma_{\rho\nu}^\tau \right). \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

Agora vamos subtrair da equação anterior a mesma equação com índices ρ e ν trocados [19]

$$0 = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\delta} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\delta}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\delta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\rho\tau}^\delta - \Gamma_{\mu\rho}^\tau \Gamma_{\nu\tau}^\delta \right) - \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial \Gamma_{\delta\gamma}^{\prime\kappa}}{\partial x^\eta} - \frac{\partial \Gamma_{\delta\eta}^{\prime\kappa}}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\eta\delta}^{\prime\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\prime\kappa} + \Gamma_{\gamma\delta}^{\prime\sigma} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} \right). \quad (\text{A.82})$$

Se multiplicarmos por $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}$ obteremos

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\kappa}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda}^{\prime\kappa}}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\lambda\alpha}^{\prime\sigma} \Gamma_{\sigma\beta}^{\prime\kappa} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\prime\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\prime\kappa} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\delta} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\delta}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\delta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\rho\tau}^\delta - \Gamma_{\mu\rho}^\tau \Gamma_{\nu\tau}^\delta \right). \quad (\text{A.83})$$

Deste modo obtivemos a seguinte regra de transformação

$$R_{\alpha\beta\lambda}^{\prime\kappa} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\delta} R_{\mu\nu\rho}^\delta, \quad (\text{A.84})$$

demonstrando assim que $R_{\mu\nu\rho}^\delta$ é um tensor.

Na verdade, $R_{\mu\nu\sigma}^\lambda$ é o tensor de Riemann de segundo tipo e fazendo a operação abaixamento de índice obtemos o tensor de Riemann de primeiro tipo [21]

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = g_{\delta\lambda} R_{\mu\nu\rho}^\delta \quad (\text{A.85})$$

Agora, queremos escrever explicitamente a relação entre $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ e a métrica $g_{\mu\nu}$.

Usando a equação (2.48), obtemos [19]

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}g_{\delta\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[g^{\delta\eta}\left(g_{\mu\eta,\nu} + g_{\nu\eta,\mu} - g_{\mu\nu,\eta}\right)\right] - \frac{1}{2}g_{\delta\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[g^{\delta\eta}\left(g_{\mu\eta,\rho} + g_{\rho\eta,\mu} - g_{\rho\mu,\eta}\right)\right] + g_{\delta\lambda}\left[\Gamma_{\mu\nu}^\tau\Gamma_{\rho\tau}^\delta - \Gamma_{\mu\rho}^\tau\Gamma_{\nu\tau}^\delta\right]. \quad (\text{A.86})$$

Usaremos a seguinte relação

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\rho}(\delta_\lambda^\eta) = \frac{\partial}{\partial x^\rho}(g_{\delta\lambda}g^{\delta\eta}) = g_{\delta\lambda}\frac{\partial g^{\delta\eta}}{\partial x^\rho} + g^{\delta\eta}\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x^\rho} \\ \Rightarrow g_{\delta\lambda}\frac{\partial g^{\delta\eta}}{\partial x^\rho} = -g^{\delta\eta}\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x^\rho} = -g^{\delta\eta}[\Gamma_{\rho\delta}^\sigma g_{\lambda\sigma} + \Gamma_{\rho\tau}^\sigma g_{\sigma\delta}], \quad (\text{A.87})$$

onde na última igualdade usamos a equação (A.75). Então a equação (A.86) se torna

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\delta_\lambda^\eta(g_{\mu\eta,\nu\rho} + g_{\nu\eta,\mu\rho} - g_{\mu\nu,\eta\rho}) - [\Gamma_{\rho\delta}^\sigma g_{\lambda\delta} + \Gamma_{\rho\tau}^\sigma g_{\sigma\delta}]\Gamma_{\mu\nu}^\delta \\ - \frac{1}{2}\delta_\lambda^\eta(g_{\mu\eta,\rho\nu} + g_{\rho\eta,\mu\nu} - g_{\rho\mu,\eta\nu}) + [\Gamma_{\nu\delta}^\sigma g_{\sigma\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma g_{\sigma\delta}]\Gamma_{\mu\rho}^\delta + g_{\tau\lambda}\left[\Gamma_{\mu\nu}^\delta\Gamma_{\rho\delta}^\tau - \Gamma_{\mu\rho}^\delta\Gamma_{\nu\delta}^\tau\right]. \quad (\text{A.88})$$

Após cancelarmos alguns termos, obtemos

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(g_{\nu\lambda,\mu\rho} - g_{\mu\nu,\lambda\rho} - g_{\rho\lambda,\mu\nu} + g_{\rho\mu,\lambda\nu}) + g_{\sigma\delta}[\Gamma_{\nu\lambda}^\sigma\Gamma_{\mu\rho}^\delta - \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma\Gamma_{\mu\nu}^\delta]. \quad (\text{A.89})$$

Diretamente da equação acima podemos verificar as seguintes propriedades do tensor de Riemann [19] [21]

1) Simetria na troca do primeiro par de índices com o segundo:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\lambda\mu}; \quad (\text{A.90})$$

2) Anti-simetria na troca de dois índices do primeiro ou do segundo par:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = -R_{\mu\lambda\nu\rho} = -R_{\lambda\mu\rho\nu} = R_{\mu\lambda\rho\nu}; \quad (\text{A.91})$$

3) Ciclicidade nos três últimos índices:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\lambda\rho\mu\nu} + R_{\lambda\nu\rho\mu} = 0. \quad (\text{A.92})$$

Da propriedade 2 concluímos que termos como $R_{\lambda\lambda\nu\rho}$ ou $R_{\lambda\mu\nu\nu}$ (sem soma em λ ou ν) são nulos. Além disso, para os seguintes casos, supondo que cada índice varie de 1 até n , temos (sem soma nos índices repetidos)[21] i) Para $R_{\lambda\mu\lambda\mu}$, λ ; μ temos $n(n-1)/2$ componentes independentes e não-nulos; ii) Para $R_{\lambda\mu\lambda\nu}$, μ ; ν , temos $n(n-1)(n-2)/2$ componentes independentes e não-nulos; iii) Para $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ temos $n(n-1)(n-2)(n-3)/12$

componentes independentes e não-nulos. Somando todos esses termos concluímos que o tensor de Riemann possui $n^2(n^2 - 1)/12$ componentes independentes. Logo, para um espaço de 4 dimensões, por exemplo, temos 20 componentes independentes!

A partir da definição do tensor de Riemann, obtivemos o tensor de Ricci, que é um tensor simétrico [19], pois

$$R_{\mu\sigma} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\sigma} = g^{\lambda\nu} R_{\nu\sigma\lambda\mu} = R_{\sigma\lambda\mu}^{\lambda} = R_{\sigma\mu}. \quad (\text{A.93})$$

Podemos ver que o tensor de Ricci possui 10 componentes independentes num espaço de 4 dimensões. Além disso, devido a anti-simetria do tensor de Riemann, vemos que esta é a única forma de obter um tensor de segunda ordem não nulo a partir do tensor de Riemann [21].

APÊNDICE B – CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE BOGOLIUBOV

Este apêndice destina-se ao cálculo dos coeficientes de Bogoliubov. Por simplicidade, consideraremos um campo escalar não massivo e utilizaremos a geometria de Schwarzschild. A frequência positiva está relacionada com os modos emergentes u e a frequência negativa está relacionada aos modos incidentes v , definidos no capítulo 3. Para frequências positivas, o campo escalar que satisfaz a equação de Klein-Gordon tem o seguinte comportamento [38]

$$\Phi_\omega \sim e^{-i\omega u}. \quad (\text{B.1})$$

Lembrando da transformação (3.14), obtemos, a partir do parâmetro afim U da região emergente

$$u = -2r_s \ln(-U) = -\frac{1}{\kappa} \ln(-U), \quad (\text{B.2})$$

e o campo escalar se torna

$$\Phi_\omega \sim e^{\frac{i\omega}{\kappa} \ln(-U)}. \quad (\text{B.3})$$

Na região dos modos incidentes, o parâmetro afim não será V , pois este foi definido na região $r > r_s$, mas sim v . Deste modo, temos

$$\Phi_\omega \sim \exp\left(\frac{i\omega}{\kappa} \ln(-v)\right), \quad (\text{B.4})$$

para $v < 0$. Para $v > 0$, os raios de luz incidentes cruzam o horizonte de eventos futuro e portanto, não alcançam um observador externo. Portanto,

$$\Phi_\omega = \begin{cases} 0, & \text{se } v > 0; \\ \exp\left(\frac{i\omega}{\kappa} \ln(-v)\right), & \text{se } v < 0; \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Tomando a transformada de Fourier, obtemos

$$\tilde{\Phi}_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega'v} \Phi_\omega = \int_{-\infty}^0 \exp\left(i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(-v)\right) dv. \quad (\text{B.6})$$

Podemos mostrar que [38]

$$\tilde{\Phi}_\omega(-\omega') = -\exp\left(\frac{\pi\omega}{\kappa}\right) \tilde{\Phi}_\omega(\omega'). \quad (\text{B.7})$$

Com efeito, para $\omega' > 0$, podemos utilizar o eixo imaginário e escrever $v = ix$,

obtendo

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_\omega(\omega') &= -i \int_0^{+\infty} \exp\left(-\omega'x + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(xe^{-i\pi/2})\right) dx \\ &= -i \exp\left(\frac{\pi\omega}{2\kappa}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\omega'x + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(x)\right) dx.\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

Para $\omega' < 0$, utilizaremos $v = -ix$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_\omega(-\omega') &= i \int_0^{+\infty} \exp\left(\omega'x + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(xe^{i\pi/2})\right) dx \\ &= i \exp\left(\frac{-\pi\omega}{2\kappa}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(\omega'x + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(x)\right) dx,\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

e obtemos com isso, a relação (B.7). Com isso, podemos identificar os coeficientes de Bogoliubov da seguinte forma (para $\omega' > 0$):

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega\omega'} &= \tilde{\Phi}_\omega(\omega'), \\ \beta_{\omega\omega'} &= \tilde{\Phi}_\omega(-\omega') = -\exp\left(\frac{-\pi\omega}{\kappa}\right) \tilde{\Phi}_\omega(\omega').\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

Portanto,

$$|\beta_{ij}|^2 = \exp\left(\frac{-2\pi\omega_i}{\kappa}\right) |\alpha_{ij}|^2. \quad (\text{B.11})$$

A partir da última relação e de (4.27), obtemos [14]

$$\sum_j |\beta_{ij}|^2 = \frac{1}{e^{\pi\omega_i/\kappa} - 1}. \quad (\text{B.12})$$

REFERÊNCIAS

- [1] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [2] C. Heinicke and F. W. Hehl, “Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein’s field equation: An introduction,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 24, no. 02, p. 1530006, 2015.
- [3] C. Coimbra-Araújo, “Diagramas de Carter-Penrose em relatividade geral: Buracos negros e outros exemplos explícitos,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 38, no. 3, p. e3305, 2016.
- [4] S. Hawking, *O Universo numa Casca de Noz*. Nova Fronteira, 2009.
- [5] A. Einstein, “Zur elektrodynamik bewegter körper,” *Annalen der physik*, vol. 322, no. 10, pp. 891–921, 1905.
- [6] J. Barcelos Neto, *Matemática para Físicos com Aplicações: Vetores, Tensores e Espinores*, vol. 1. Editora Livraria da Física, 2010.
- [7] A. Einstein, “Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie,” *Annalen der Physik*, vol. 354, no. 7, pp. 769–822, 1916.
- [8] K. Schwarzschild, “Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der Einsteinschen theorie (1916),” *Sitzungsberichte der Kniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, vol. 1, pp. 189–196, 1916.
- [9] R. Ruffini and J. A. Wheeler, “Introducing the black hole,” *Physics Today*, vol. 24, p. 30, 1971.
- [10] S. Hawking, *Uma Breve História do Tempo*. Editora Intrinseca, 2015.
- [11] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics,” *Physical review letters*, vol. 11, no. 5, p. 237, 1963.
- [12] G. Nordström, “On the energy of the gravitation field in Einstein’s theory,” *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, vol. 20, pp. 1238–1245, 1918.
- [13] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, “Metric of a rotating, charged mass,” *Journal of mathematical physics*, vol. 6, no. 6, pp. 918–919, 1965.
- [14] S. W. Hawking, “Particle creation by black holes,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 43, no. 3, pp. 199–220, 1975.
- [15] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Physical Review D*, vol. 7, no. 8, p. 2333, 1973.
- [16] W. G. Unruh, “Experimental black-hole evaporation?,” *Physical Review Letters*, vol. 46, no. 21, p. 1351, 1981.

- [17] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [18] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Mecânica*, vol. 1. Edgard Blücher, 1997.
- [19] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley New York, 1972.
- [20] R. A. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, 1998.
- [21] D. C. Kay, *Schaum’s Outline of Tensor Calculus*. McGraw Hill, 1988.
- [22] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago press, 1984.
- [23] D. Simpson, R. Gardner, and M. Giroux, “A mathematical derivation of the general relativistic Schwarzschild metric,” *Departments of Physics and Mathematics, East Tennessee State University*, 2007.
- [24] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity*. Addison Wesley, 2003.
- [25] M. Visser, “The Kerr spacetime: A brief introduction,” *arXiv preprint arXiv:0706.0622*, 2007.
- [26] T. Adamo and E. Newman, “The Kerr-Newman metric: A review,” *arXiv preprint arXiv:1410.6626*, 2014.
- [27] M. Natsuume, *AdS/CFT duality user guide*. Springer, 2015.
- [28] A. Peltola, *Studies on the Hawking Radiation and Gravitational Entropy*. Citeseer, 2007.
- [29] T. Jacobson, “Introductory lectures on black hole thermodynamics,” *Given at Utrecht U. in*, vol. 26, 1996.
- [30] J. D. Bekenstein, “Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics,” *Physical Review D*, vol. 9, no. 12, p. 3292, 1974.
- [31] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The four laws of black hole mechanics,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 31, no. 2, pp. 161–170, 1973.
- [32] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. No. 7, Cambridge University Press, 1984.
- [33] M. Socolovsky, “Rindler space, Unruh effect and Hawking temperature,” in *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, vol. 39, p. 1, 2014.
- [34] M. Padmanath, “Hawking radiation,” *General Relativity*, vol. 2010, 2009.
- [35] L. Ford, “Quantum field theory in curved spacetime.,” in *Cosmology and Gravitation*, vol. 1, p. 89, 1994.
- [36] M. Visser, “Acoustic black holes,” *arXiv preprint gr-qc/9901047*, 1999.

- [37] J. Steinhauer, “Observation of thermal Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole,” *arXiv preprint arXiv:1510.00621*, 2015.
- [38] P. K. Townsend, “Black holes,” *arXiv preprint gr-qc/9707012*, 1997.