UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

LUAN MISAEL GOMES DE MOURA

EQUAÇÕES DE EINSTEIN E CARTAN DE UM PRINCÍPIO VARIACIONAL

FORTALEZA

2016

LUAN MISAEL GOMES DE MOURA

EQUAÇÕES DE EINSTEIN E CARTAN DE UM PRINCÍPIO VARIACIONAL

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA
2016

Equações de Einstein e Cartan de um princípio variacional.

Luan Misael Gomes de Moura

NOTA DE APROVAÇÃO: 9,0

DATA:21 de Dezembro de 2016

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho - Orientador
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M887e Moura, Luan Misael Gomes de.
Equações de Einstein e Cartan de um princípio variacional / Luan Misael Gomes de Moura. – 2016.
44 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. relatividade geral. 2. princípio variacional. 3. equações de Einstein. 4. equações de Cartan. 5. Vierbeins. I. Título.

CDD 530

A Deus
e
suas falanges
divinas...

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus,

a meus pais,
a minha família,
o cursinho de Horizonte - CE,
as ex's,
o Mister e os seres ocultos da noite,
o Heavy Metal,
o rock 'n' roll,
a Paul McCartney e George Harrison,
os psicodélicos,
o Val e sua residência psilouca,
o Ícaro e Larissa,
o Daniel Brito e seus familiares,
o poeta Mardônio,
a todos os colegas do G.T.M.C.,
os colegas do C.R.E.U.,
os colegas do L.A.S.S.C.O.,
aos professores-orientadores Geová e Raimundo,
aos professores da banca, Maluf e Ramos,
a Albert Einstein,
a Nau Pirata e seus cyber-marinheiros,
a Casa das Fadas e suas bruxas,
o Yoga e as falanges do oriente,
os compositores clássicos e as cordas,
as medicinas da floresta,
a Igreja Céu do Ceará,
a todos os seres divinos
e toda a Irmandade de Juramidam.

RESUMO

Formulamos resumidamente a teoria da relatividade geral e a discussão de vários conceitos desta teoria. Introduzindo os vierbeins, que são objetos mais simples de se trabalhar e redefinimos os objetos que descrevem o nosso espaço-tempo em termos destes. Finalizamos utilizamos o princípio variacional para obter as equações que irão descrever o comportamento do nosso espaço-tempo. As equações de Einstein e as de Cartan.

Palavras-chave: relatividade; vierbein; Einstein; princípio variacional;Cartan;

ABSTRACT

Were briefly formulated the theory of general relativity and the discussion of several concepts of this theory. We introducted the Vierbeins, which are simpler objects to work on and we then redefine the objects that describe our space-time in terms of these. Finally we use the variational principle to obtain the equations that will describe the behavior of our space-time. The Einstein and Cartan equations.

Keywords: relativity vierbein Einstein variational principle Cartan

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria da relatividade geral foi proposta por Einstein em 1915 como generalização de sua teoria da relatividade restrita. Em 1928, em uma tentativa de unificar a gravitação com o eletromagnetismo, Einstein criou a teoria de campos de vierbeins que é uma teoria de campo de calibre para a relatividade geral onde as vierbeins são tomadas como sendo a raiz quadrada da métrica [13].

Neste trabalho, inicialmente definimos ideias básicas, conceitos importantes que são abordados na relatividade geral de forma mais qualitativa e logo em seguida definimos importantes estruturas matemáticas que serão utilizados ao longo do trabalho. Faz-se necessário para compreender o texto que o leitor já esteja familiarizado com o cálculo tensorial.

Desenvolvemos ao longo do texto um resumo de relatividade geral, construímos através do princípio variacional a equação da geodésica e através desta os símbolos de Christoffel, conhecidos como conexões. Abordamos também sobre a importância da covariância dos objetos definidos na nossa teoria, construindo assim as derivadas covariantes cuja comutação nos dá o tensor de curvatura do espaço.

Definimos as vierbeins que são objetos mais elementares que a métrica na descrição do espaço-tempo e através destes redefinimos nossos objetos. Os campos gravitacionais são de tal natureza que cada ponto do espaço-tempo pode ser transformado utilizando um certo sistema de coordenadas. Este sistema de coordenadas irá variar de ponto a ponto, mas sempre parecerá localmente livre de gravidade, pois podemos tratar tal referencial como um espaço sem curvatura de modo que podemos utilizar a métrica de Minkowski. Portanto, as quantidades definidas localmente podem ser expressas em termos das variáveis arbitrárias do espaço-tempo para que a interação gravitacional naturalmente apareça. Escrevemos as coordenadas locais com índices latinos e as globais com índices gregos. As vierbeins são matrizes de transformação entre o espaço local e o global [11]. Utilizamos o princípio variacional com o formalismo de vierbeins para construirmos as equações de campo de Einstein e as equações de Cartan. As equações de Einstein e Cartan relacionam a maneira com que meu espaço será encurvado e em consequência, como a gravidade irá agir com a matéria e energia que irá causar tal deformação no espaço.

A organização deste trabalho é dada como se segue: No capítulo 2, iniciamos fazendo um breve resumo de relatividade especial para que o leitor possa rever importantes conceitos desta teoria que serão utilizados ao longo do texto. Abordaremos as superfícies curvas e propriedades das mesmas, como as geodésicas e depois iremos formalizar estas ideias discutindo sobre espaços Riemannianos, variedades e objetos definidos nestas variedades, como vetores, tensores e a álgebra tensorial. Falaremos do tensor métrico e suas propriedades e finalizaremos falando um pouco sobre o princípio variacional. No capítulo 3 iremos, através do princípio variacional, escrever a equação da geodésica e definir as conexões afim. Discutiremos as coordenadas geodésicas e operadores diferenciais importantes, como a derivada covariante através da qual iremos tratar de transporte paralelo e o tensor de curvatura de Riemann. Por fim, iremos definir o tensor e escalar de Ricci e o tensor de Einstein. No capítulo 4 iremos utilizar o principio variacional na obtenção das equações de Einstein na ausência de campo gravitacional. Discutiremos o princípio da equivalência e o tensor energia-momento e através destes escreveremos a equação de Einstein com o termo de fonte. Definiremos os campos de vierbein e as bases tetradas e falaremos um pouco da álgebra destes vierbeins, definiremos a conexão de spin e o postulado tetrado. Finalizamos utilizando o princípio variacional obtendo as duas equações não-lineares acopladas de Cartan sem termo de fonte que são equivalentes a equação de Einstein e citamos a equação com termo de fonte.

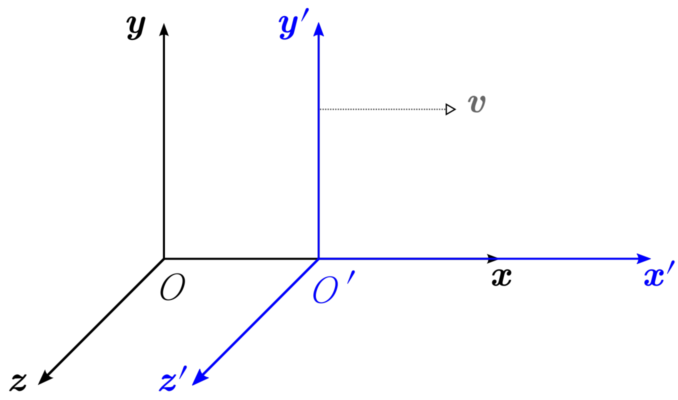
2 IDEIAS BÁSICAS

Este capítulo tem como objetivo desenvolver para o leitor as principais ferramentas que serão necessários para o estudo de relatividade geral, abordando alguns conceitos e ideias matemáticas que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

2.1 Princípios de Relatividade Especial

Dados dois observadores inerciais com velocidade relativa v entre eles, ambos veem um evento ocorrer. Para o observador no referencial S , este registra o evento por um conjunto de variáveis no espaço-tempo (x, y, z, t), o mesmo evento é registrado pelo observador em S' da forma (x', y', z', t'), como vemos na figura 1.

Figura 1



Sistemas inerciais em movimento relativo [14]

Podemos relacionar as medidas em diferentes referenciais utilizando as *tranformadas de Lorentz*:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \tag{2.1}$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ e c é a velocidade da luz no vácuo. Através destas relações é possível mostrar que a velocidade da luz no vácuo não varia de um referencial para outro e é o limite máximo de velocidade para partículas, de fato, é impossível para uma partícula massiva alcançar c.

Definimos a quantidade invariante

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{2.2}$$

que é invariante por transformações de Lorentz ($ds^2 = ds'^2$). Tal objeto define o espaço de Minkowski que é o espaço vetorial utilizado na relatividade restrita.

Podemos definir o objeto na forma

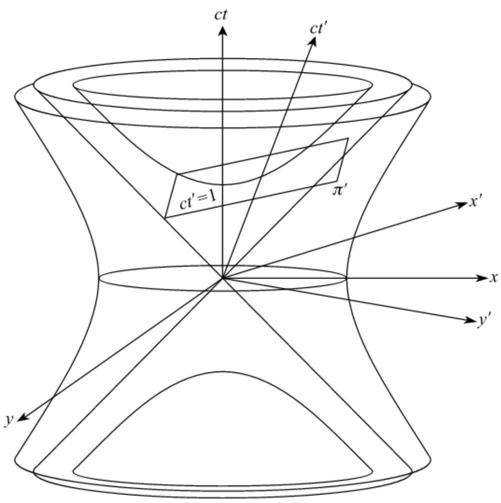
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.3}$$

onde $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ e os índices μ e ν vão de 0 a 3, onde $x^0 = ct$ e $x^1 = x,\ \ x^2 = y,\ \ x^3 = z$.

Tomando no referencial da partícula, as medidas espaciais são nulas, pois o referencial se move junto com a partícula e o tempo medido é chamado de *tempo próprio* τ, expressando estas ideias na equação (2.2), teremos $ds^2 = c^2 d\tau^2$ [12].

Podemos representar o espaço de Minkowski através dos diagramas de Minkowski (ver figura 2). Para duas dimensões espaciais mais uma temporal, podemos representar tal espaço através dos *cones de luz*:

Figura 2



Representação em duas dimensões espaciais e uma temporal do cone de luz [1].

O intervalo $ds^2 > 0$ é definido como sendo do tipo tempo que representa partículas que tem $v < c$. Estabelece-se uma relação causal de forma que todos os eventos possíveis para estas partículas estão representados na parte superior e interior do cone de luz e os eventos passados são representados na parte inferior e interior do cone de modo que uma partícula do tipo tempo terá uma *linha-mundo*, que é sua trajetória no espaço-tempo, de forma que esta linha-mundo está sempre dentro do cone de luz e nunca toca as bordas do cone. Objetos do tipo luz são representados pelo intervalo $ds^2 = 0$, movimentam-se com velocidade c e as linhas-mundo possíveis são representadas pelas bordas do cone. Objetos com $ds^2 < 0$ são chamados do tipo espaço e não respeitam a causalidade.

Podemos definir objetos em 4 dimensões chamados de *4-vetores* da forma $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, cujo módulo ao quadrado é dado por $\mathbf{A}^2 = A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 - A_4^2$, portanto podemos representar a posição em 4 dimensões de uma partícula pelo 4-vetor $\mathbf{R} = (ct, x, y, z)$ cuja derivada é

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \left(\frac{(ct)}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) \tag{2.4}$$

onde $\mathbf{U}$ é chamado de *4-velocidade* da partícula. Sabemos que a diferença entre o tempo t em um referencial em movimento em relação a uma partícula e o tempo no referencial próprio da partícula τ é dado por um fator de γ, assim, teremos as seguintes expressões:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u), \qquad \frac{dx_i}{d\tau} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = u_i\gamma(u). \tag{2.5}$$

Onde o índice i representa, neste caso, as coordenadas espaciais. Assim podemos escrever $\mathbf{U}$ na forma

$$\mathbf{U} = \gamma(u)(c, u_1, u_2, u_3) = \gamma(u)(c, \mathbf{u}). \tag{2.6}$$

Através da 4-velocidade definimos o *4-momento* $\mathbf{P}$ na forma

$$\mathbf{P} \equiv m_0\mathbf{U} = m_0\gamma(u)(c, \mathbf{u}) = (mc, \mathbf{p}), \tag{2.7}$$

onde $\mathbf{p}$ é momento nas dimensões espaciais, m_0 é a massa de repouso da partícula, ou seja, a massa da partícula no seu referencial próprio e $m = \gamma m_0$ é massa da partícula medido no referencial em movimento em relação a partícula, também chamado de massa relativística. Expandindo este termo, teremos:

$$m = m_0\gamma(u) = m_0\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}m_0u^2\right) + ... \approx m_0 + \frac{T}{c^2}. \tag{2.8}$$

Onde T é a energia cinética da partícula. Definimos a relação entre energia e massa através da fórmula

$$E \equiv mc^2 = m_0c^2 + T \tag{2.9}$$

e reescrevemos o 4-momento na forma $\mathbf{P} = (E/c, \mathbf{p})$ que nos leva a expressão

$$\mathbf{P}^2 = m_0^2c^2 = m^2/c^2 - p^2 = E^2/c^2 - p^2, \tag{2.10}$$

que permite escrever a relação entre a energia, momento e massa de uma partícula através da fórmula:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4. \tag{2.11}$$

Através de uma transformada de Lorentz para o referencial da partícula, sua velocidade é nula e a energia é relacionada com a massa através da fórmula :

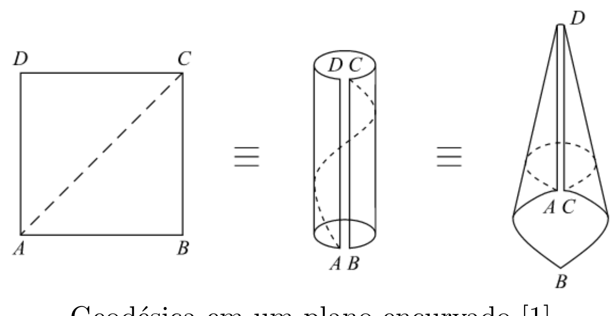
$$E = m_0c^2. \tag{2.12}$$

2.2 Superfícies curvas e geodésicas

Iremos analisar as propriedades intrínsecas das superfícies, que são aquelas que não dependem do que está fora da superfície, mas apenas da superfície em si. Uma maneira de visualizar estas propriedades seria visualizar o que é preservado quando encurvamos a superfície sem rasgá-la ou esticá-la, porém certas superfícies como uma casca esférica, por exemplo, não podem ser deformadas suavemente devido sua rigidez, esta teria que ser cortada se tentássemos colocá-la em um plano [1]. Podemos distinguir a curvatura intrínseca e extrínseca. Em um cilindro, por exemplo, podemos pensar que este é curvo, porém esta é sua curvatura extrínseca, que é a curvatura em relação ao espaço tridimensional plano que este faz parte. Por outro lado, o cilindro é feito de uma folha plana, portanto sua curvatura intrínseca é plana. Isto quer dizer que a distância entre dois pontos em um cilindro é igual a distância em um plano, enquanto que para a esfera, esta é intrinsecamente curva [3].

Uma característica intrínseca das superfícies mais importante é a *geodésica* que é definida como a menor distância entre dois pontos, onde esta distância é medida inteiramente na superfície e entre dois pontos podemos traçar apenas uma geodésica para conectá-los. Como a geodésica é uma propriedade intrínseca da superfície, esta permanece como uma geodésica mesmo que encurvemos a superfície e seu comprimento permanece estacionário, como vemos na figura 3, onde traçamos uma geodésica como uma linha pontilhada e encurvamos a superfície.

Figura 3

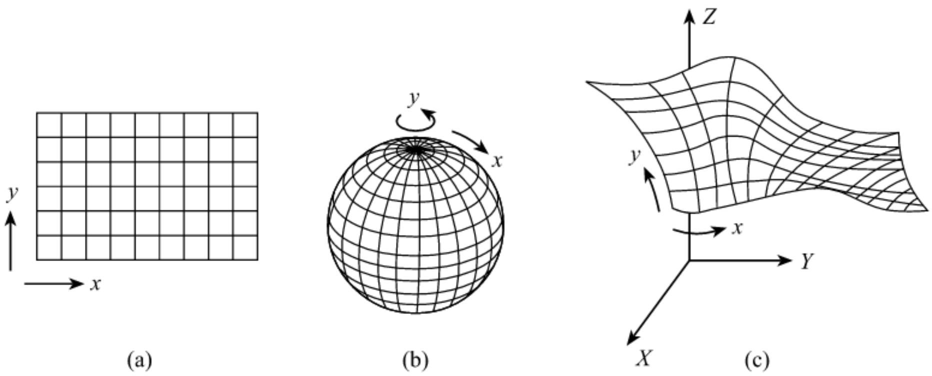


Geodésica em um plano encurvado [1].

2.3 Espaços Riemannianos

Em superfícies curvas, globalmente, não podemos utilizar as coordenadas cartesianas como em um plano, certas superfícies requerem, devido as suas simetrias, um sistema de coordenadas que seja natural ao seu tipo de superfície. Para especificar um ponto sobre a superfície, escolhemos a latitude e longitude de modo que o sistema pode ser ou não ortogonal como podemos ver na figura 4.

Figura 4



Diferentes tipos de superfícies riemannianas [1].

Observando a figura 4.c, vemos que esta superfície cujas coordenadas são x e y pode ser parametrizada a partir das coordenadas do espaço 3-dimensional Euclidiano (X, Y, Z) tendo a forma [1]:

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y), \quad Z = Z(x, y). \tag{2.13}$$

De fato, em um espaço Riemanniano, podemos definir em cada ponto deste espaço um conjunto de coordenadas local utilizando o espaço Euclidiano. No contexto da relatividade geral, estaremos tratando de espaços pseudo-Riemannianos onde em cada ponto do espaço podemos tratá-lo como um espaço de Minkowski. Nesta seção iremos utilizar a seguinte notação para derivadas parciais: $\partial/\partial x^\mu = \partial_\mu$.

2.3.1 Variedades e espaços topológicos

Um *espaço topológico* consiste de uma coleção τ de subconjuntos de X, onde X é um conjunto. Este deve satisfazer as seguintes propriedades:

- (1) A união arbitrária de uma coleção de subconjuntos, onde cada subconjunto pertence a τ, deve pertencer a τ: Se $O_\alpha \in \tau \ \forall \alpha$, então $\cup_\alpha O_\alpha \in \tau$.

- (2) A interseção de um número finito de subconjuntos de τ deve estar em τ: Se $O_1,...,O_n \in \tau$, então $\cap_i O_i \in \tau$.

- Todo o conjunto X e o conjunto vazio $\emptyset$ estão em τ.

Dizemos que τ é uma topologia em X e os subconjuntos de X estão em τ são chamados de *conjuntos abertos* [6].

Podemos definir uma *variedade* M como um espaço topológico que localmente se parece com espaço Minkowskiano e existe um homeomorfismo (função bijetiva e contínua) entre a variedade M e $\mathbb{R}^{(n-1,1)}$ (para uma variedade n-dimensional com n-1 dimensões espaciais e uma temporal). As variedades são generalizações de nossas ideias sobre curvas e superfícies para objetos com dimensões arbitrárias. Uma condição importante é que as variedades sejam *suaves* e C^{∞} (infinitamente diferenciáveis), de modo que podemos utilizar o cálculo nas mesmas. Deve existir uma função contínua que mapeia o espaço topológico para o espaço Minkowskiano e tal função deve possuir inversa [9]. Uma variedade deve satisfazer as seguintes propriedades:

- (1) Cada ponto $p \in M$ deve estar em pelo menos um conjunto aberto O_{α} onde O_{α} cobre uma certa região de M.

- (2) Para cada α, deve existir um mapeamento um-a-um onde um conjunto aberto O_{α} (cuja dimensão é n) pertencente a variedade é levado a um subconjunto $U_{\alpha} \in \mathbb{R}^{(n-1,1)}$, cujo mapeamento ψ é um homeomorfismo e é representado da seguinte forma:
$$\psi_{\alpha} : O_{\alpha} \to U_{\alpha}, \tag{2.14}$$
onde admitimos a inversa $\psi_{\alpha}^{-1} : U_{\alpha} \to O_{\alpha}$.

- (3) Dados dois conjuntos O_{α} e O_{β} sobrepostos onde $O_{\alpha} \cap O_{\beta} \neq \emptyset$, se considerarmos um mapeamento $\psi_{\beta} \cdot \psi_{\alpha}^{-1}$, este nos levará dos pontos em $\psi_{\alpha}[O_{\alpha} \cap O_{\beta}] \subset U_{\alpha} \subset \mathbb{R}^{(n-1,1)}$ para os pontos em $\psi_{\beta}[O_{\alpha} \cap O_{\beta}] \subset U_{\beta}\mathbb{R}^{(n-1,1)}$ (ver figura 5 para que fique mais claro).

Cada mapa ψ_{α} é chamado de *carta* e o conjunto de todos os mapas é denominado *atlas* [6].

2.3.2 Vetores na variedade

A ideia de um vetor como sendo uma flecha conectando os pontos e a origem não funciona na variedade, porém podemos definir o *vetor tangente* à curva em M. Para definirmos um vetor tangente precisamos de uma curva $c : (a, b) \to M$ e uma função $f : M \to \mathbb{R}$ onde (a, b) é um intervalo contendo $t = 0$. Definimos o vetor tangente em $c(0)$ como a derivada de $f(c(t))$ ao longo de c(t) em t=0, onde a variação de $f(c(t))$ em $t = 0$ é dada por
$$\left[\frac{df(c(t))}{dt}\right]_{t=0}, \tag{2.15}$$
que em termos das coordenadas locais ficam
$$\left[(\partial_{\mu})f\frac{dx^{\mu}(c(t))}{dt}\right]_{t=0}. \tag{2.16}$$

Figura 5

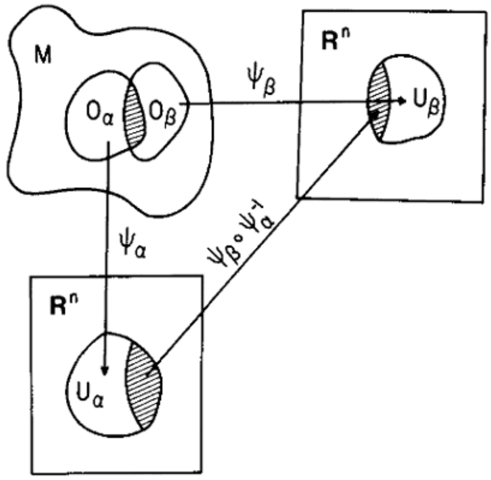


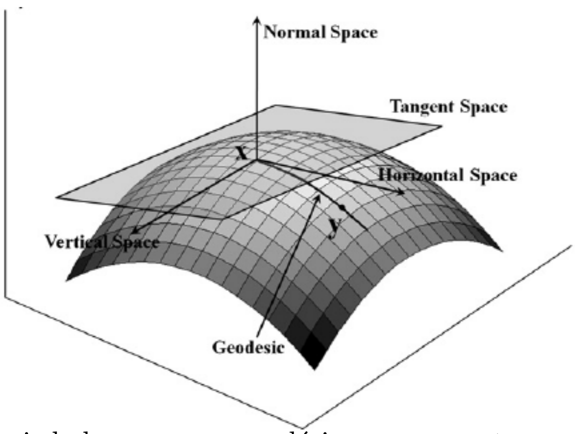
Ilustração de um mapeamento $\psi_\beta \cdot \psi_\alpha^{-1}$ vindo de uma sobreposição de dois sistemas de coordenadas [6].

Onde μ são índices em 3 dimensões espaciais e 1 temporal na variedade. Definimos um operador diferencial X da forma

$$X = X^\mu(\partial_\mu), \;\; X^\mu = \left[\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}\right]_{t=0}. \tag{2.17}$$

Temos que X será definido como o vetor tangente de M em $p = c(0)$ ao longo da direção dada pela curva $c(t)$ e o conjunto de todos os vetores tangentes em p formam um espaço vetorial chamado de *espaço tangente* (veja a figura 6) de M em p, denotado por T_pM, onde os vetores de base de T_pM são os objetos covariantes $\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)} = \partial_{(\mu)}$. O vetor X deve existir independentemente da escolha de coordenadas devido a nossa construção.

Figura 6



Representação de uma variedade com suas geodésicas e espaço tangente para um dado vetor normal [15].

Para o espaço vetorial T_pM, deve existir um espaço vetorial dual cujos elementos são uma função linear de T_pM para $\mathbb{R}$. O espaço dual é chamado *espaço cotangente* em p e é denotado por T_p^*M onde um elemento $\omega : T_pM \to \mathbb{R}$ de T_p^*M é chamado de *vetor dual*, *vetor cotangente* ou *1-forma*.

Seja o elemento contravariante $dx^{(\mu)}$ uma base dual de T_p^*M, temos que

$$< dx^{(\nu)}, \partial_{(\mu)} > = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu. \tag{2.18}$$

Podemos escrever um 1-forma arbitrário como $\omega = \omega_\mu dx^{(\mu)}$ onde definimos o vetor da base dual $\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)} = dx^{(\mu)}$.

2.3.3 Tensor

Um tensor do tipo (μ, ν) é um objeto multilinear que mapeia μ elementos de T_p^*M e ν elementos de T_pM para um numero real e é denotado por $T^\mu{}_\nu$ [9].

Por conveniência, utilizaremos a notação

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = p^{\alpha'}{}_\alpha, \qquad \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = p^\alpha{}_{\alpha'}, \qquad \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = p^{\alpha'}{}_{\alpha\beta}. \tag{2.19}$$

Dado um tensor $A^{\alpha\beta\dots\mu}$, chamamos de *tensor contravariante* de ordem n e se transforma como

$$A^{\alpha'\beta'\dots\mu'} = A^{\alpha\beta\dots\mu} p^{\alpha'}{}_\alpha p^{\beta'}{}_\beta \dots p^{\mu'}{}_\mu, \tag{2.20}$$

um exemplo de tensor contravariante é um 1-forma dx^i. Similarmente definimos um *tensor covariante* $A_{\alpha\beta\dots\mu}$ de ordem n que se transforma como

$$A_{\alpha'\beta'\dots\mu'} = A_{\alpha\beta\dots\mu} p^\alpha{}_{\alpha'} p^\beta{}_{\beta'} \dots p^\mu{}_{\mu'}, \tag{2.21}$$

podemos exemplificá-lo com o gradiente de uma função posição $\partial_i\phi$ onde $\phi = \phi(x^1, ..., x^N)$. Um *tensor misto* possui componentes covariantes e contravariantes. Note que cada índice covariante e contravariante repetido representa uma soma, estamos adotando a convenção de Einstein, como no seguinte exemplo:

$$\sum_{i=1}^{N} A_\alpha B^\alpha = A_\alpha B^\alpha. \tag{2.22}$$

A contração de um tensor do tipo (s, t) (s superíndices e t subíndices) consiste na repetição de um índice de forma que este terá um índice covariante e contravariante igual, como no exemplo: $A^\alpha_{\mu\nu} = B^{\alpha\beta}_{\beta\mu\nu}$, formando um tensor do tipo $(s-1, t-1)$.

Dados dois tensores do mesmo tipo $A^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$ e $B^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$, podemos escrever sua soma na forma: $C^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = A^{\alpha\dots}_{\beta\dots} + B^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$. Podemos também escrever o produto de dois tensores arbitrários fazendo uma justaposição de suas componentes, por exemplo: $C^{\alpha\nu\beta}_{\mu\sigma\lambda} = A^\alpha_\mu B^{\nu\beta}_{\sigma\lambda}$ [1].

2.4 Propriedades do tensor métrico

Todas as propriedades intrínsecas de uma superfície podem ser verificadas a partir da métrica. A métrica determina as relações de distância nas superfícies e através dela podemos construir e mapear tais superfícies.

Para o caso N-dimensional introduziremos a seguinte notação [1]:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, ..., N). \tag{2.23}$$

Na presença de um campo gravitacional, o espaço-tempo é modificado para esta forma [7]. Uma propriedade importante do tensor métrico é que este é simétrico: $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ [1]. O tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ determina todas as propriedades internas do espaço métrico, mas estas dependem da escolha da rede de coordenadas [4].

As métricas na forma da equação (2.23) são *pseudo-Riemmanianas* e localmente são Minkowskianas [1]. Notemos que ds^2 nos dá a distância quadrática infinitesimal. A equação (2.23) também é chamada de *forma métrica* ou *primeira forma fundamental* [2].

Podemos definir a norma de um vetor contravariante X^α da seguinte forma $X^2 = g_{\alpha\beta}(x) X^\alpha X^\beta$. Para dois vetores X^α e Y^β, estes são ortogonais se $g_{\alpha\beta}(x) X^\alpha Y^\beta = 0$.

Definimos o determinante da métrica da seguinte forma $g \equiv -det(g_{\alpha\beta})$. Uma condição importante é que o determinante da métrica deve ser diferente de zero ($g \neq 0$) para que admita inversa. A inversa da métrica é $g^{\alpha\beta}$, onde a contração nos dá a *delta de Kronecker* na forma $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ [2].

2.5 Princípio Variacional

Para um dado sistema, a sua configuração pode ser descrita por n coordenadas generalizadas $q_1, ..., q_n$, correspondendo um ponto em um plano Cartesiano n-dimensional chamado de espaço de configurações. Com a evolução temporal a partícula descreverá uma curva neste espaço de configurações considerando o tempo como o parâmetro. O princípio de Hamilton nos diz que o movimento de um sistema de um tempo t_1 até t_2 é tal que a integral de linha, chamada *ação* terá um valor estacionário,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{2.24}$$

onde $L = T - V$ é a *Lagrangiana.* A variação desta integral de linha será então zero:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t) dt = 0. \tag{2.25}$$

Onde a notação $\dot{q}$ é a derivada de q em relação ao parâmetro. Consideremos f uma função das variáveis independentes y_i e suas derivadas $\dot{y}_i$ cuja ação possui um valor estacionário J, sua variação é

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x), y_2(x), ..., \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), ..., x) dx, \tag{2.26}$$

então, consideramos J como uma função de um parâmetro α que indica um conjunto de possíveis curvas $y_i(x, \alpha)$ onde introduzimos α fazendo o seguinte ajuste:

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x). \tag{2.27}$$

Temos que $y_i(x, 0)$ são soluções do problema que serão obtidas e η_i são funções de x independentes que anulam-se nos extremos e continuas até a segunda derivada. Variando J em relação a α obteremos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx. \tag{2.28}$$

Integrando por partes o termo envolvendo a segunda soma,

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx = - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx, \tag{2.29}$$

onde os termos de fronteira anulam-se pois os pontos extremos são fixos. Substituindo (2.29) e (2.28),

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx. \tag{2.30}$$

As variações δy_i são independentes, lembrando que δJ é nulo, cada coeficiente δy_i deve anular-se separadamente. Portanto teremos

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0. \tag{2.31}$$

Onde a equação (2.31) é chama de *Equação de Euler-Lagrange* [5].

3 CURVATURA

Iremos abordar como se comportaram objetos como vetores em uma variedade transportando-os e verificando a curvatura da região em que se encontram, primeiramente definiremos então as conexões chamadas de *símbolos de Christoffel* que conectam um vetor transportado ao longo de uma variedade e um vetor transportado paralelamente através desta mesma variedade, a maneira em que esta conexão é feita será explicada nas subseções seguintes.

3.1 Equação da geodésica

Considerando a geodésica que liga dois pontos A e B e várias curvas vizinhas que também conectam A e B, utilizando o princípio variacional podemos encontrar a curva geodésica,

$$0 = \delta \int ds = \delta \int |g_{\alpha\mu} dx^{\alpha} dx^{\mu}|^{1/2} = \delta \int_{u_1}^{u_2} |g_{\alpha\mu} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\mu}|^{1/2} du. \tag{3.1}$$

Onde $\dot{x}^{\alpha} = dx^{\alpha}/du$ e u é um parâmetro arbitrário com os pontos da curva fixados u_1 e u_2 ao longo da geodésica, temos:

$$\delta \int |g_{\alpha\mu} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\mu}|^{1/2} du = \delta \int L(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha}) du = 0. \tag{3.2}$$

Podemos resolver este problema variacional por meio das equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} = 0. \tag{3.3}$$

temos da equação (3.1) que:

$$\frac{ds}{du} = |g_{\alpha\mu} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\mu}|^{1/2}. \tag{3.4}$$

No tempo próprio da partícula vemos que,

$$ds^2 = c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 \longrightarrow \frac{ds}{d\tau} = c. \tag{3.5}$$

Tomando a raiz positiva, fazendo $c = 1$ e analisando a trajetória ao longo da curva, podemos tomar $L = 1$ de modo que podemos definir o quadrado na forma:

$$\mathcal{L} = g_{\alpha\mu} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\mu} = \pm L^2. \tag{3.6}$$

Onde $\mathcal{L}$ não será uma Lagrangiana, utilizando-a no princípio variacional, teremos como resultado as mesma equações de movimento que teríamos se tivéssemos utilizado L, porém será bem mais fácil através de $\mathcal{L}$, teremos

$$\delta \int \mathcal{L} \ ds = 0. \tag{3.7}$$

Agora estamos utilizando o parâmetro s e $\dot{x}^\mu = dx^\mu/ds$. Teremos então,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{3.8}$$

Utilizando a equação (3.6) e sabendo que a métrica é simétrica, teremos que a derivada de $\mathcal{L}$ em relação a $\dot{x}$ fica:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}(g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) = g_{\alpha\beta}\delta^\alpha_\mu \dot{x}^\beta + g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \delta^\beta_\mu = g_{\mu\beta}\dot{x}^\beta + g_{\alpha\mu}\dot{x}^\alpha = 2g_{\mu\beta}\dot{x}^\beta. \tag{3.9}$$

Lembrando que a métrica é função apenas de x e não de $\dot{x}$, teremos da equação (3.8) e (3.9):

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{ds}(g_{\mu\beta}\dot{x}^\beta) - \partial_\mu g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= 0, \\ 2g_{\mu\beta}\ddot{x}^\beta + 2\dot{x}^\nu(\partial_\nu g_{\mu\beta})\dot{x}^\beta - \partial_\mu g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Onde

$$\frac{d}{ds} = \frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \dot{x}^\nu \partial_\nu. \tag{3.11}$$

Utilizando propriedades da simetria da métrica, sabemos que:

$$2\partial_\nu g_{\mu\beta}\dot{x}^\nu \dot{x}^\beta = (\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\nu})\dot{x}^\nu \dot{x}^\beta. \tag{3.12}$$

Dividindo a equação (3.10) por 2 e utilizando a equação (3.12), teremos:

$$g_{\mu\beta}\ddot{x}^\beta + \frac{1}{2}[\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}]\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0. \tag{3.13}$$

Definimos o objeto entre colchetes como sendo o *símbolo de Christoffel de primeira espécie* na forma:

$$\Gamma_{\mu\beta\alpha} \equiv \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\beta\alpha}). \tag{3.14}$$

Podemos reescrever a equação (3.13) com o *símbolo de Christoffel*,

$$\Gamma_{\nu\mu\beta}\dot{x}^\mu \dot{x}^\beta + g_{\nu\mu}\ddot{x}^\mu = 0. \tag{3.15}$$

Podemos encontrar o *símbolo de Christoffel de segunda espécie*, também chamado de coeficiente de *conexão*, levantando o índice α:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} = g^{\mu\alpha}\Gamma_{\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\beta}). \tag{3.16}$$

Podemos fazer a contração com a métrica $g^{\nu\alpha}$ na equação (3.15) e obtemos a *equação da geodésica*:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\beta} + \ddot{x}^{\alpha} = 0. \tag{3.17}$$

O símbolo de Christoffel não é um tensor, pois $\Gamma_{\mu\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\mu\beta} = \partial_\beta g_{\mu\alpha}$, onde a derivada parcial de um tensor não se transforma como um tensor. Este possui simetria nos dois últimos índices na forma $\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \Gamma_{\alpha\mu\beta}, \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$[1].

3.2 Coordenadas geodésicas

Dado um ponto P, podemos construir um sistema de coordenadas em sua vizinhança tal que todos os símbolos de Christoffel se anulam em P. Um sistema de coordenadas com esta propriedade é chamado de *coordenadas geodésicas* em P onde P é um *polo*. Esta afirmação nos mostra que os $g_{\alpha\mu,\beta}$ anulam-se em P [1]. Seja s o parâmetro que mede os arcos na linha de mundo de uma partícula na geodésica, chamamos u e s de *parâmetros afim*, pois se definimos este da forma $u = as + b$, onde a e b são constantes, então u é um parâmetro que também satisfaz a equação (3.17) [2].

Seja um sistema de coordenadas ortonormal em P. Construímos então a hiperesfera $\Sigma(y^{\alpha})^2 = \epsilon^2$ para um ϵ conveniente, isto é análogo ao círculo $x^2 + c^2t^2 = \epsilon^2$. Façamos $u = \epsilon$ e em P, $u = 0$ e u é o parâmetro afim das geodésicas saindo de P. Nas vizinhanças de nossa hiperesfera, cada ponto Q é conectado à P por uma única geodésica que consideramos ser $y^{\alpha}(u)$, teremos

$$\left(\frac{dy^{\alpha}}{du}\right)_{u=0} \equiv a^{\alpha} \tag{3.18}$$

no vetor tangente em P. Se em Q o parâmetro tem valor u, definimos novas coordenadas x^{α} na forma $x^{\alpha} = a^{\alpha}u$, os sistemas de coordenadas cujas geodésicas em P podem ser escritos desta maneira são chamadas *Riemannianos*.

Quando u varia, x^{α} caminha sobre toda a geodésica. Como u é um parâmetro afim, este satisfaz a equação da geodésica (3.17),

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}a^{\mu}a^{\beta} = 0. \tag{3.19}$$

Isto é verdade para todas geodésicas em que passam por P, concluímos que ${\Gamma^{\alpha}}_{\mu\beta} = 0$ em P e que x^{α} nos dá um sistema de geodésicas com polo em P.

Dados dois sistemas de geodésicas x^{α} e $x^{\alpha'}$ em P, podemos estabelecer a relação:

$$(p^{\alpha'}{}_{\mu\beta})_P = 0. \tag{3.20}$$

Todo sistema que é relacionado a um sistema de geodésica é este também uma geodésica, a equação (3.20) nos mostra a equivalência entre os sistemas de coordenadas. Podemos demonstrar da seguinte forma ($\dot{x} = dx/du$),

$$\begin{aligned} \dot{x}^{\alpha'} &= p^{\alpha'}{}_{\mu}\dot{x}^{\mu}, \\ \ddot{x}^{\alpha'} &= p^{\alpha'}{}_{\mu\beta}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\beta} + p^{\alpha'}{}_{\alpha}\ddot{x}^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Toda geodésica $x^{\alpha}(u)$, deve satisfazer a equação (3.17), portanto $\ddot{x}^{\alpha} = 0$ em P , onde x^{α} é uma geodésica. Para dois sistemas de geodésicas, deduzimos da (3.21) que $(p^{\alpha'}{}_{\mu\beta})_P = 0$, pois como $x^{\alpha'}$ também é uma geodésica em P, esta deve satisfazer que $\ddot{x}^{\alpha'} = 0$ em P, daí a (3.17) nos dá que $(\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'})_P = 0$.

Suponhamos que temos um sistema de geodésicas $x^{\alpha'}$ que é geodésica em P e queremos transformá-lo em um sistema arbitrário x^{α}. Todas geodésica em P satisfazem $\ddot{x}^{\alpha'} = 0$ em P, a equação (3.21) nos mostra que,

$$\begin{aligned} p^{\alpha'}{}_{\alpha}\ddot{x}^{\alpha} + p^{\alpha'}{}_{\mu\beta}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\beta} &= 0, \\ \ddot{x}^{\alpha} + p^{\alpha'}{}_{\mu\beta}p^{\alpha}{}_{\alpha'}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\beta} &= 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

comparando com a (3.17), temos que

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = p^{\alpha'}{}_{\mu\beta}p^{\alpha}{}_{\alpha'}. \tag{3.23}$$

Se diferenciarmos o objeto $p^{\alpha}{}_{\alpha'}p^{\alpha'}{}_{\mu} = \delta^{\alpha}{}_{\mu}$ em relação a x^{β} teremos,

$$p^{\alpha}{}_{\alpha'}p^{\alpha'}{}_{\mu\beta} + p^{\alpha}{}_{\alpha'\beta'}p^{\beta'}{}_{\beta}p^{\alpha'}{}_{\mu} = 0, \tag{3.24}$$

comparando agora com a (3.23), vemos que:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = -p^{\alpha}{}_{\alpha'\beta'}p^{\beta'}_{\beta}p^{\alpha'}{}_{\mu} \tag{3.25}$$

3.3 Operadores Diferenciais: Derivada Covariante, Derivada Absoluta e 4-divergente

A operação de derivação parcial de um tensor não nos retorna um tensor, mas tal objeto comporta-se como tensor sob transformações lineares de coordenadas [1]. De fato, podemos verificar para A^μ e ∂_ν

$$\partial_\mu \to \partial'_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\partial_\lambda, \tag{3.26}$$

a combinação $\partial_\nu A^\mu$ não se transforma apropriadamente, a expressão para $\partial'_\nu A'^\mu$ é

$$\partial'_\nu A'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}A^\rho\right) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}(\partial_\lambda A^\rho) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\nu \partial x^\rho}A^\rho. \tag{3.27}$$

Vemos que há um termo extra [10]. Devemos buscar um objeto que no espaço plano se reduz a uma derivada parcial, mas se transforma como tensor para um espaço-tempo de curvatura arbitrária, tal objeto também deve ser linear e obedecer a regra do produto de Leibniz [8].

A derivada de um campo vetorial envolve a diferença entre vetores em dois pontos distintos no limite em que estes se aproximam. No espaço curvo, devemos tratar com cuidado, pois tais vetores, apesar de serem iguais no espaço plano, não irão necessariamente apontar na mesma direção.

No limite em que os vetores estão a uma distância infinitesimal, o espaço é localmente plano e as derivadas dos vetores de base (que são constantes) anulam-se, pois estamos trabalhando com um referencial localmente inercial em um dado ponto P [3].

Definimos a *derivada covariante* de $F^\alpha{}_\beta$ [1]:

$$\nabla_\mu F^\alpha{}_\beta = \partial_\mu F^\alpha{}_\beta + F^\nu{}_\beta \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - F^\alpha{}_\nu \Gamma^\nu_{\beta\mu}. \tag{3.28}$$

A regra acima pode ser generalizada para um tensor arbitrário, escrevemos a sua derivada parcial, primeiramente, mais um número de termos de correção para cada índice, onde os termos com índice em cima (contravariante) terão sinal positivo e para os de índice em baixo (contravariante) terão sinal negativo. Cada termo de correção é o produto de uma Γ e do tensor original com o índice trocado por um índice mudo contraído com a Γ.

A derivada covariante leva em conta o fato de que os vetores de base irão variar de ponto a ponto no nosso espaço-tempo, diferente do caso Euclidiano onde os vetores de base são constantes. Como não podemos reduzir a métrica à forma Cartesiana globalmente em um espaço-tempo curvo, os vetores de base terão a necessidade de variar de ponto a ponto, nossas Γs não irão se anular globalmente também, portanto deve-se usar a derivada covariante no lugar da derivada ordinária [7].

A derivada covariante nos dá a taxa de variação de um campo tensorial em relação a como o tensor seria se fosse transportado paralelamente [8]. Para um escalar $\phi(x^\alpha)$, a derivada covariante reduzir-se-á a uma derivada parcial [1] e o operador de derivada covariante aplicado em um campo tensorial suave do tipo (α, β) leva a um novo campo tensorial suave do tipo $(\alpha, \beta + 1)$ [6].

Podemos definir a derivada absoluta de um vetor V^α na forma:

$$\frac{DV^\alpha}{Du} = \frac{dV^\alpha}{du} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} V^\nu \dot{x}^\beta. \tag{3.29}$$

Podemos estabelecer uma relação entre a derivada covariante e a derivada absoluta:

$$\frac{DV^\alpha}{Du} = \nabla_\beta V^\alpha \dot{x}^\beta. \tag{3.30}$$

A expressão (3.30) é a generalização da derivada direcional de um campo vetorial em uma direção dada pelo vetor tangente $\dot{x}^\beta$. Escrevendo para um tensor $F^\alpha{}_\beta$ temos:

$$\frac{DF^\alpha{}_\beta}{Du} = \nabla_\nu F^\alpha{}_\beta \dot{x}^\nu = \frac{dF^\alpha{}_\beta}{du} + F^\mu{}_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{x}^\nu - F^\alpha{}_\mu \Gamma^\mu_{\beta\nu} \dot{x}^\nu. \tag{3.31}$$

A definição de derivada absoluta e derivada covariante ficaram mais claras nas próximas seções onde iremos aplicá-las [1].

Considerando o transporte geral de um 4-vetor através da derivada covariante, podemos definir o *4-divergente* na forma

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} V^\lambda. \tag{3.32}$$

Para a conexão $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$, contraindo os índices σ e μ, teremos

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_\nu g_{\rho\mu} + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_\nu g_{\rho\mu}. \tag{3.33}$$

Como o termo entre parênteses é anti-simétrico em μ e ρ e o tensor métrico é simétrico, este produto na equação acima anula-se. Podemos então escrever o 4-divergente na forma:

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\lambda \sqrt{-g}) V^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu). \tag{3.34}$$

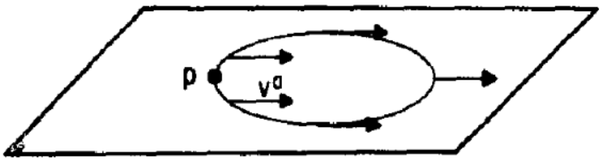
Esta relação será útil no capítulo 4 [13].

3.4 Transporte Paralelo e Tensor de Curvatura de Riemann

Podemos explorar a noção de curvatura utilizando a noção de transporte paralelo. Na figura 7 temos uma superfície plana e na figura 8, uma superfície esférica. Vemos que para uma trajetória fechada, um vetor tangente inicialmente em um ponto p é transportado paralelamente nesta trajetória de modo que quando este retorna ao ponto p percebemos que sua direção e sentido foram preservados.

Isto não acontece na esfera, vemos na figura 6 que o vetor retorna rotacionado. Isto é devido p fato de que o plano possui curvatura nula e a esfera possui curvatura não

Figura 7

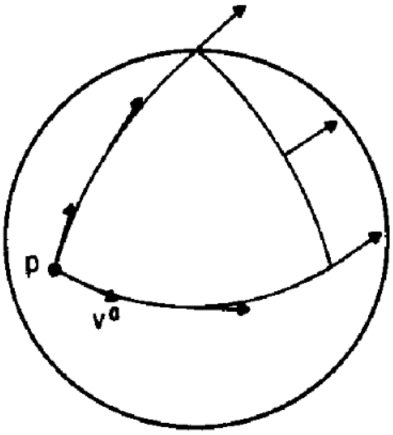


Representação de um vetor paralelamente transportado em um plano, nota-se que este aponta sempre na mesma direção [6].

nula [6].

Para compararmos vetores em um espaço curvo, não podemos simplesmente adicioná-los ou subtrai-los, pois os vetores de base mudam de ponto a ponto, utilizaremos então a noção de transporte paralelo de um vetor que nos permite comparar a diferença entre vetores em diferentes locais da variedade.

Figura 8



Representação de um vetor paralelamente transportado em uma esfera, este transporte não preserva a direção [6].

O resultado do transporte paralelo de um vetor de um ponto a outro irá depender do caminho percorrido em um espaço curvo [8]. Em um espaço plano, um vetor tangente é paralelamente transportado ao longo de uma linha reta que é o caminho mais curto e preserva a direção do vetor. No espaço curvo, os caminhos mais curtos serão geodésicas por onde os vetores serão transportados paralelamente, o que requer a condição de que a derivada absoluta irá se anular, isto é, $dV^\alpha/du = 0$ [7]. Dado um vetor X^α, a equação para a propagação paralela generalizada para espaços curvos é

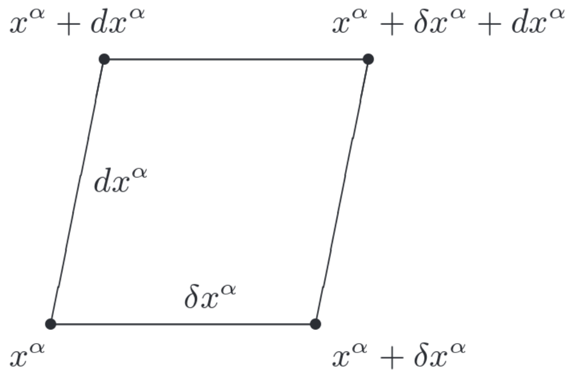
$$\frac{DX^\alpha}{Du} = \frac{dx^\mu}{du}\nabla_\nu X^\alpha = 0, \tag{3.35}$$

como $\dot{x}^\mu$ é arbitrário, a derivada covariante de X^α é nula,

$$\nabla_\beta X^\alpha = \partial_\beta X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} X^\beta = 0. \tag{3.36}$$

Consideremos a propagação do vetor X^α em um circuito infinitesimal de x^α a $x^\alpha + \delta x^\alpha + dx^\alpha$ através dos dois caminhos possíveis representados na Figura 9 [2].

Figura 9



Representação de um vetor paralelamente transportado em um circuito infinitesimal [13].

Fazemos o transporte paralelo de x^α para $x^\alpha + \delta x^\alpha$:

$$X^\alpha(x+\delta x) = X^\alpha(x) + \partial_\beta X^\alpha X^\beta(x)\delta x^\mu = X^\alpha(x) - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} X^\beta(x)\delta x^\mu. \tag{3.37}$$

Da mesma forma, transportando este vetor para $x^\alpha + \delta x^\alpha + dx^\alpha$ obteremos

$$X^\alpha(x+\delta x + dx) = X^\alpha(x+\delta x) + \partial_\mu X^\alpha(x+\delta x)dx^\mu, \tag{3.38}$$

onde

$$\partial_\mu X^\alpha(x+\delta x)dx^\mu = -\Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x+\delta x)X^\beta(x+\delta x)dx^\mu. \tag{3.39}$$

Expandindo em série de Taylor teremos

$$\partial_\mu X^\alpha(x+\delta x)dx^\mu = -\Gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta dx^\mu - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta \delta x^\nu dx^\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\zeta\xi}X^\zeta \delta x^\xi dx^\mu + \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\zeta\xi}X^\zeta \delta x^\nu \delta x^\xi dx^\mu. \tag{3.40}$$

Descartando o termo de terceira ordem, temos

$$X^\alpha(x+\delta x+dx) = X^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta \delta x^\mu - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta dx^\mu - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta \delta x^\nu dx^\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\zeta\xi}X^\zeta \delta x^\xi dx^\mu. \tag{3.41}$$

Analisando o caminho por $x^\alpha + dx^\alpha$, basta trocarmos δx^α por dx^α que teremos

$$X^\alpha(x+dx+\delta x) = X^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta dx^\mu - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta \delta x^\mu - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta dx^\nu \delta x^\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\zeta\xi}X^\zeta dx^\xi \delta x^\mu. \tag{3.42}$$

A diferença entre os dois caminhos é

$$\Delta X^\alpha = (\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha_{\zeta\nu}\Gamma^\zeta_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\zeta\mu}\Gamma^\zeta_{\beta\nu})X^\beta \delta x^\mu dx^\nu = R^\alpha{}_{\beta\nu\mu}X^\beta \delta x^\mu dx^\nu. \tag{3.43}$$

Definimos o objeto entre parênteses como sendo o *tensor de curvatura de Riemann* que descreve a curvatura do nosso espaço-tempo [2]. Como este tensor está relacionado com a diferença gerada ao transportar paralelamente um vetor por dois caminhos diferentes, portanto no espaço plano $R^{\alpha}{}_{\beta\nu\mu} = 0$ [3].

3.4.1 Propriedades do tensor de Riemann

Podemos escrever o tensor de curvatura em sua forma totalmente covariante utilizando a métrica:

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = g_{\alpha\xi} R^{\xi}{}_{\beta\nu\mu} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta\mu} + \Gamma^{\zeta}_{\beta\mu}\Gamma_{\zeta\alpha\nu} - \Gamma^{\zeta}_{\beta\nu}\Gamma_{\zeta\alpha\mu}. \tag{3.44}$$

Uma outra forma alternativa é escrever na forma

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha\partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu}) + \Gamma^{\zeta}_{\beta\mu}\Gamma_{\zeta\alpha\nu} - \Gamma^{\zeta}_{\beta\nu}\Gamma_{\zeta\alpha\mu}. \tag{3.45}$$

No polo das coordenadas geodésicas o produto das Γ's anulam-se e podemos facilmente definir as seguintes relações de simetria e anti-simetria:

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\alpha\beta\mu\nu}, \tag{3.46}$$

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}, \tag{3.47}$$

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\nu\mu\alpha\beta}, \tag{3.48}$$

Temos ainda a seguinte identidade:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0, \tag{3.49}$$

levando em conta que a Γ é simétrica nos dois últimos índices.

As derivadas covariantes não comutam, como podemos verificar para um vetor V^α, onde

$$\nabla_\mu V^\alpha = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} V^\beta, \tag{3.50}$$

derivando novamente,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha = \partial_\nu(\partial_\mu V^\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}V^\beta) + \Gamma^{\alpha}_{\nu\zeta}(\partial_\mu V^\zeta + \Gamma^{\zeta}_{\mu\beta}V^\beta) - \Gamma^{\zeta}_{\nu\mu}(\partial_\zeta V^\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\zeta\beta}V^\beta), \tag{3.51}$$

invertendo a ordem das derivadas temos

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha = \partial_\mu(\partial_\nu V^\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}V^\beta) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\zeta}(\partial_\nu V^\zeta + \Gamma^{\zeta}_{\nu\beta}V^\beta) - \Gamma^{\zeta}_{\mu\nu}(\partial_\zeta V^\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\zeta\beta}V^\beta), \tag{3.52}$$

a diferença nos dá

$$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha - \nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha = V^\beta(\partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\zeta}\Gamma^{\zeta}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\zeta}\Gamma^{\zeta}_{\nu\beta}) = -V^\beta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}. \tag{3.53}$$

Vemos que as derivadas covariantes não comutam e a não-comutatividade destas está relacionada com o tensor de Riemann [1]. De fato, podemos definir o *comutador* da derivada covariante em termos do tensor de Riemann:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu \tag{3.54}$$

isto significa que em espaços curvos devemos ter cuidado na ordem em que aplicamos as derivadas covariantes.

A equação (3.54) está relacionada a nossa derivação do tensor de Riemann através do transporte paralelo, pois este problema pode ser visto da forma que primeiro variamos o vetor V^μ em uma direção e depois em outra e subtraímos para ver a diferença e é exatamente o que o comutador de derivadas covariantes faz [3].

3.4.2 Tensor de Ricci e tensor de Einstein

Através da contração do tensor de Riemann e utilizando suas relações de simetria e anti-simetria construimos o *tensor de Ricci*:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\nu\alpha} = R_{\nu\alpha}{}^\alpha{}_\mu = R_\nu{}^\alpha{}_{\alpha\mu} = R^\alpha{}_{\nu\mu\alpha} = R_{\nu\mu}, \tag{3.55}$$

e o escalar de curvatura [1]:

$$R = R^\alpha{}_\alpha = R^{\alpha\beta}{}_{\beta\alpha}. \tag{3.56}$$

Seja o tensor de Riemann

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \tag{3.57}$$

Utilizando a definição de derivada covariante, podemos escrever o tensor de Ricci seguinte na forma:

$$R_{\sigma\nu} = \nabla_\rho\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \nabla_\nu\Gamma^\rho_{\sigma\rho}. \tag{3.58}$$

Onde a identidade acima é conhecida como *identidade de Palatini* [13].

Da equação (3.4.2) tomada no polo das coordenadas geodésicas, lembrando que a derivada covariante se reduz à derivada parcial,

$$\nabla_\zeta R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\zeta\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu\partial_\zeta\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}. \tag{3.59}$$

Podemos demonstrar a seguinte identidade,

$$\partial_\mu\partial_\zeta\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu\partial_\zeta\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \partial_\nu\partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\beta\zeta} - \partial_\zeta\partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} + \partial_\zeta\partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} - \partial_\mu\partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\beta\zeta} = 0, \tag{3.60}$$

$$\nabla_\zeta R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\zeta} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\zeta\mu} = 0. \tag{3.61}$$

Devido a comutatividade da derivada parcial os termos se anulam, a equação acima é conhecida como a *identidade de Bianchi*. Da identidade de Bianchi, contraímos α e ν:

$$\nabla_\zeta R_{\beta\mu} - \nabla_\mu R_{\beta\zeta} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\zeta\mu} = 0, \tag{3.62}$$

em seguida levantando o índice β através de um $g^{\beta\xi}$,

$$\nabla_\zeta R^\xi{}_\mu - \nabla_\mu R^\xi{}_\zeta + \nabla_\alpha R^{\alpha\xi}{}_{\zeta\mu} = 0 \tag{3.63}$$

e contraindo μ com ξ,

$$\nabla_\zeta R - \nabla_\mu R^\mu{}_\zeta - \nabla_\alpha R^\alpha{}_\zeta = 0. \tag{3.64}$$

Trocando os índices mudos no último termo da equação acima, teremos:

$$\nabla_\zeta R - 2\nabla_\mu R^\mu{}_\zeta = 0. \tag{3.65}$$

Esta é a identidade de Bianchi duplamente contraída, através desta, temos que

$$\delta^\mu{}_\zeta \nabla_\mu R - 2\nabla_\mu R^\mu{}_\zeta = 0, \tag{3.66}$$

multiplicamos por $\frac{1}{2}g^{\zeta\nu}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g^{\zeta\nu}\nabla_\mu[\delta^\mu{}_\zeta R - 2R^\mu{}_\zeta] &= 0, \\ \nabla_\mu\left[\frac{g^{\mu\nu}}{2}R - R^{\mu\nu}\right] &= 0. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Aqui utilizamos o fato que a derivada covariante da métrica é nula, assim esta pode entrar na derivada, demonstraremos posteriormente na seção 4.2.2. Definimos então o *Tensor de Einstein*:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \tag{3.68}$$

Da equação (3.67), vemos que

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \tag{3.69}$$

[1] onde nosso tensor $G^{\mu\nu}$ é construído apenas com o tensor de Riemann e a métrica, o desenvolvimento destas identidades ficará mais claro no próximo capítulo onde estas serão utilizadas na construção das equações de campo de Einstein [3].

4 CAMPO DE VIERBEIN E EQUAÇÕES DE CAMPO

Neste capítulo iremos inicialmente utilizar o princípio variacional de modo a obter as equações de Einstein de maneira convencional, em seguida introduziremos as vierbeins e relacionaremos nossos resultados de forma a obtermos expressões mais gerais e observarmos que estas irão facilitar a obtenção das equações de campo. No final, iremos utilizar apenas as vierbeins e conexões para obtermos as equações de estrutura de Cartan.

4.1 Equações de Einstein

4.1.1 Ação na ausência de campo gravitacional

Utilizando um sistema de unidades onde $c = 1$, teremos que a ação livre de campo gravitacional é:

$$I_G = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}R(x)d^4x. \tag{4.1}$$

Para determinarmos a equação de movimento, devemos variar a ação acima em relação a métrica,

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \tag{4.2}$$

Da identidade de Palatini (3.58), teremos que a variação do tensor de Ricci pode ser escrita na forma

$$\delta R_{\mu\nu} = -\nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{4.3}$$

onde a variação comuta com a derivada covariante, podemos expandir o terceiro termo depois da igualdade na equação (4.2):

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= -\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu}\nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}]\\ \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= -\sqrt{-g}[\nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) - \nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})],\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde a métrica entra na derivada covariante, pois sabemos que $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$, teremos que

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) + \partial_\lambda(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}). \tag{4.5}$$

Estes termos de superfície integrados em todo espaço irão a zero, portanto o terceiro termo da direita na equação (4.2) anula-se [13].

Dada uma matriz A, esta pode ser expandida na forma $A = \mathbb{I} + M + ...$ Por uma transformação de similaridade podemos diagonalizar A. Defini-se que $A = e^M$. Seja os elementos da matriz A denotados por a_{ij}, teremos que $detA = e^{a_1 1}e^{a_2 2}...e^{a_n n} =$

$e^{a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}}$ de forma que

$$ln[detA] = TrM = Tr[lnA] \tag{4.6}$$

Se diferenciarmos a relação acima, onde a derivação comuta com o traço, obteremos

$$\frac{\delta detM}{detM} = Tr[M^{-1}\partial_\nu M] \tag{4.7}$$

Tomando então que $M = g_{\alpha\beta}$ e $M^{-1} = g^{\alpha\beta}$, iremos chegar na expressão $\delta g = gg^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$, o que nos dá [7]

$$g^{-1}\partial_\alpha g = \partial_\alpha ln[Det(g_{\mu\nu})] = \partial_\alpha ln[-g] = g^{\mu\nu}\partial_\alpha g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\partial_\alpha g^{\mu\nu}. \tag{4.8}$$

Utilizando a relação acima, podemos escrever a equação (3.33) na forma

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\partial_\nu ln[-g] = \partial_\nu ln\sqrt{-g} \tag{4.9}$$

Teremos a seguinte relação:

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\sqrt{-g}. \tag{4.10}$$

Portanto, podemos escrever:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{4.11}$$

Para o segundo termo do lado direito na equação (4.2), iremos utilizar a identidade acima de forma que reescreveremos a variação da ação em termos da métrica:

$$\delta I_G = \frac{1}{16\pi G}\int\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\delta g_{\mu\nu}\right]d^4x. \tag{4.12}$$

Sabendo que a variação da identidade é nula,

$$\delta[\delta^\mu_\lambda] = \delta[g^{\mu\tau}g_{\tau\lambda}] = (\delta g^{\mu\tau})g_{\tau\lambda} + g^{\mu\tau}\delta g_{\tau\lambda} = 0, \tag{4.13}$$

onde encontramos a seguinte relação

$$\delta g^{\mu\tau}g^{\nu\lambda}g_{\tau\lambda} + g^{\nu\lambda}g^{\mu\tau}\delta g_{\tau\lambda} = 0, \tag{4.14}$$

teremos então

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\nu\lambda}g^{\mu\tau}\delta g_{\tau\lambda}. \tag{4.15}$$

Através desta identidade reescreveremos a nossa ação da forma:

$$\delta I_G = -\frac{1}{16\pi G}\int\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu}g^{\mu\tau}g^{\nu\lambda}\delta g_{\tau\lambda} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\delta g_{\mu\nu}\right]d^4x \tag{4.16}$$

$$= -\frac{1}{16\pi G}\int\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right]\delta g_{\mu\nu}d^4x \tag{4.17}$$

$$\delta I_G = -\frac{1}{16\pi G}\int\sqrt{-g}G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}d^4x. \tag{4.18}$$

Como a variação da métrica não é nula em geral, este deve se anular. A equação de movimento na ausência de campo gravitacional fica na forma [13]

$$G^{\mu\nu} = 0. \tag{4.19}$$

4.1.2 Princípio da Equivalência

Quando temos um referencial inercial, uma partícula em repouso neste referencial permanece em repouso caso nenhuma força atue.

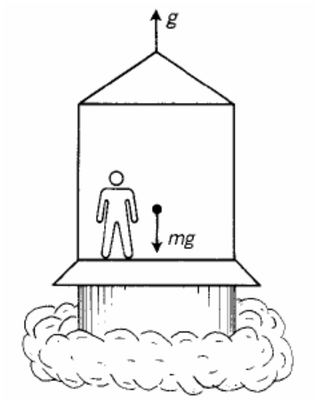
Analisando o campo gravitacional da Terra, deve existir um referencial no qual as partículas possuem velocidade uniforme, este é o referencial que cai livremente no campo gravitacional, pois este referencial acelera na mesma taxa que as partículas livres tomadas localmente. Nossas medidas podem ser feitas em referenciais inerciais, vale ressaltar que apesar do efeito de aceleração que a partícula experimenta, cada elemento infinitesimal no espaço-tempo da trajetória da partícula é tido como um referencial localmente inercial [2].

Considerando em um espaço livre de gravidade um foguete em movimento uniformemente acelerado (ver figura 10), pra um observador dentro do foguete, este sente que existe um campo gravitacional onde os objetos dentro do foguete experienciam uma aceleração que independe da composição do material. Um objeto que permanece estacionário em relação a nave possui um 'peso' igual a força que este é acelerado pela nave que é proporcional a massa do objeto como na gravidade. Neste caso um referencial ideal para analisarmos seria um que cai livremente devido a ação da aceleração do foguete, como as partículas [3].

Vemos que referenciais com um campo gravitacional uniforme é equivalente a um referencial que é uniformemente acelerado em relação aos referenciais inerciais, formando assim o princípio da equivalência entre a gravidade e a aceleração.

Todas forças as inerciais são proporcionais a massa do objeto experienciando-as, assim como a força gravitacional. O princípio da equivalência diz que devemos tratar a gravitação como um efeito inercial, que vem do fato de não ser utilizado um referencial inercial [2].

Figura 10



Foguete subindo com aceleração g [2].

4.1.3 Tensor energia-momento e equação de Einstein com termo de fonte

Devido a equivalência entre matéria e energia da relatividade especial e do princípio da equivalência, concluímos que toda forma de energia gera um campo gravitacional, o que nos leva a crer que o *tensor de energia-momento* é um termo de fonte nas equações de Einstein. Impondo a condição da relatividade especial de que o tensor de energia-momento é conservado, pois queremos a conservação da energia e do momento no campo de matéria, no espaço de Minkowski teremos que

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \tag{4.20}$$

podemos generalizar utilizando a derivada covariante para um espaço curvo:

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \tag{4.21}$$

Sabemos a derivada covariante do tensor de Einstein também é nula (3.69), o que sugere que os tensores sejam proporcionais:

$$G^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}. \tag{4.22}$$

Onde κ é chamada de constante de acoplamento. [3] A constante é obtida fazendo com que as equações de Einstein predigam corretamente o movimento dos planetas no sistema polar. Obtermos que $\kappa = 8\pi G$, de modo que ficamos com a equação

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi G T^{\alpha\beta}. \tag{4.23}$$

A equação de Einstein é uma equação tensorial não-linear de segunda ordem que representa um sistema de 10 equações diferenciais não-lineares acopladas, uma maneira de simplificá-la é utilizando as vierbeins [2].

4.2 Campo de Vierbein

Definiremos um conjunto de bases vetoriais $\hat{\mathbf{e}}_{(a)}$ que são vetores unitários não-coordenados com índices latinos para o referencial não-coordenado onde tal base é ortonormal e podemos expressar o produto interno na forma

$$< \hat{\mathbf{e}}_{(a)}, \hat{\mathbf{e}}_{(b)} > \; = \eta_{ab} \tag{4.24}$$

onde η_{ab} é a métrica de Minkowski [13].

Dizemos que os objetos são não-coordenados quando definidos por bases vetoriais em um espaço tangente na variedade que não são derivadas de nenhum sistema de coordenadas e possuem a condição de que tais bases devem ser ortonormais [8].

A base ortonormal não-coordenada é chamada de *base tetrada*. De uma perspectiva local, qualquer vetor pode ser expresso como uma combinação linear da base tetrada fixa naquele ponto.

Seja um elemento da base tetrada $\hat{\mathbf{e}}_{(a)}$, expressamos uma base coordenada na forma de uma combinação linear

$$\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)}(x) = e_{\mu}{}^{a}(x)\hat{\mathbf{e}}_{(a)}. \tag{4.25}$$

A matriz $e_{\mu}{}^{(a)}$ é chamada de *campo de vierbein* ou *vierbein* e admite inversa denotada por $e^{\mu}{}_{a}$ de forma que satisfaz as condições de ortonormalidade

$$e^{\mu}{}_{a}(x)e_{\nu}{}^{a}(x) = \delta^{\mu}_{\nu}, \qquad e_{\mu}{}^{a}(x)e^{\mu}{}_{b}(x) = \delta^{a}_{b}. \tag{4.26}$$

Podemos fazer um produto da métrica com os vierbeins de modo que obtemos e relacionar o espaço local com a variedade na forma

$$g_{\mu\nu}(x)e^{\mu}{}_{a}(x)e^{\nu}{}_{b}(x) = \eta_{ab}, \qquad g_{\mu\nu}(x) = e_{\mu}{}^{a}(x)e_{\nu}{}^{b}(x)\eta_{ab}. \tag{4.27}$$

Através da relação acima, definimos o determinante do vierbein:

$$g = -E^2, \qquad E = \sqrt{-g} \tag{4.28}$$

Definimos uma base ortonormal não-coordenada dual denotada por $\hat{\mathbf{e}}^{(a)}$ que satisfaz

$$\hat{\mathbf{e}}^{(a)}\hat{\mathbf{e}}_{(b)} = \mathbb{I}^{a}{}_{b}. \tag{4.29}$$

Podemos escrever estes 1-formas como combinação linear dos 1-formas da base coordenada e vice-versa:

$$\hat{\mathbf{e}}^{(a)} = e_{\mu}{}^{a}(x)\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)}(x), \qquad \hat{\mathbf{e}}^{(\mu)}(x) = e^{\mu}{}_{a}(x)\hat{\mathbf{e}}^{(a)}. \tag{4.30}$$

Qualquer vetor no espaço-tempo pode ser escrito na base coordenada e na não-coordenada

$$\mathbf{V} = V^{\mu}\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)} = V^{a}\hat{\mathbf{e}}_{(a)}, \tag{4.31}$$

portanto, as componentes estão relacionadas da forma

$$V^{a} = e_{\mu}{}^{a}V^{\mu}, \qquad V^{\mu} = e^{\mu}{}_{a}V^{a}. \tag{4.32}$$

4.2.1 Conexão de Spin

Para a base não-coordenada, utilizaremos a conexão de spin $\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}$ no lugar da conexão afim usual $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Cada índice latino corresponde a um fator da conexão de spin contraída. Para um tensor $T^{a}{}_{b}$ temos [13]

$$\nabla_{\mu}T^{a}{}_{b} = \partial_{\mu}T^{a}{}_{b} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}T^{c}{}_{b} - \omega_{\mu}{}^{c}{}_{b}T^{a}{}_{c}. \tag{4.33}$$

O nome conexão de spin vem do fato de que estes são utilizados para derivar spinores, o que não é possível utilizando a conexão usual [8]. Os termos de correção são positivos para os índices de contravariantes e negativos para índices covariantes. Para um tensor com índices da base local e global, a derivada covariante será dada em termos das conexões de spin e das Γ's:

$$\nabla_{\mu}T^{a\nu} = \partial_{\mu}T^{a\nu} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}T^{c\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}T^{a\lambda}. \tag{4.34}$$

A derivada covariante de um vetor X em uma base coordenada é

$$\begin{aligned}\nabla X &= (\nabla_{\mu}X^{\nu})dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu}\\ &= (\partial_{\mu}X^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}X^{\lambda})dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu}.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Onde ⊗ denota o produto direto. Seja a derivada covariante de um objeto em uma base mista sendo convertido para uma base coordenada na forma

$$\begin{aligned}\nabla X &= (\nabla_{\mu}X^{a})dx^{\mu} \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(a)}\\ &= (\partial_{\mu}X^{a} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}X^{b})dx^{\mu} \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(a)}.\end{aligned}$$

Escrevendo $\hat{\mathbf{e}}_{(a)} = e^{\sigma}{}_{a}\partial_{\sigma}$, escreveremos também $X^{a} = e_{\nu}{}^{a}X^{\nu}$ e $X^{b} = e_{\lambda}{}^{b}X^{\lambda}$ de forma que a expressão acima ficará na seguinte forma,

$$\begin{aligned}&= (\partial_{\mu}(e_{\nu}{}^{a}X^{\nu}) + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}e_{\lambda}{}^{b}X^{\lambda})dx^{\mu} \otimes (e^{\sigma}{}_{a}\partial_{\sigma})\\ &= e^{\sigma}{}_{a}(e_{\nu}{}^{a}\partial_{\mu}X^{\nu} + X^{\nu}\partial_{\mu}e_{\nu}{}^{a} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}e_{\lambda}{}^{b}X^{\lambda})dx^{\mu} \otimes \partial_{\sigma}\end{aligned}$$

$$= (\partial_\mu X^\sigma + e^\sigma{}_a \partial_\mu e_\nu{}^a X^\nu + e^\sigma{}_a e_\lambda{}^b \omega_\mu{}^a{}_b X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\sigma.$$

Renomeando os índices na forma $\sigma \to \nu \to \lambda$ ficamos com a expressão

$$\nabla X = (\partial_\mu X^\nu + e^\nu{}_a \partial_\mu e_\lambda{}^a X^\lambda + e^\nu{}_a e_\lambda{}^b \omega_\mu{}^a{}_b X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\nu \tag{4.36}$$

$$= [\partial_\mu X^\nu + (e^\nu{}_a \partial_\mu e_\lambda{}^a + e^\nu{}_a e_\lambda{}^b \omega_\mu{}^a{}_b) X^\lambda] dx^\mu \otimes \partial_\nu. \tag{4.37}$$

Comparando as equações (4.35) e (4.37), vemos que podemos escrever a conexão afim em termos da conexão de spin na forma

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = e^\nu{}_a \partial_\mu e_\lambda{}^a + e^\nu{}_a e_\lambda{}^b \omega_\mu{}^a{}_b. \tag{4.38}$$

Podemos inverter a expressão (4.38) e obter a conexão de spin em termos da conexão afim:

$$\omega_\mu{}^a{}_b = e_\nu{}^a e^\lambda{}_b \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda{}^a. \tag{4.39}$$

Como o símbolo de Christoffel é composto pela métrica e suas derivadas, podemos escrevê-lo totalmente em termos das vierbeins, temos que a Γ é dada por

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\zeta\nu} (\partial_\lambda g_{\zeta\mu} + \partial_\mu g_{\zeta\lambda} - \partial_\zeta g_{\lambda\mu}). \tag{4.40}$$

Relacionamos as métricas com as vierbeins através da (4.27), teremos

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} (e^\zeta{}_a e^\nu{}_b)(\partial_\lambda [e_\zeta{}^a e_\mu{}^b] + \partial_\mu [e_\zeta{}^a e_\lambda{}^b] - \partial_\zeta [e_\lambda{}^a e_\mu{}^b]), \tag{4.41}$$

Agora também podemos escrever a conexão de spin apenas em termos de vierbeins e suas derivadas utilizando a equação (4.41) e a (4.39), onde teremos a contração de $e_\nu{}^a e^\zeta{}_a = \delta^\zeta_\nu$, a conexão de spin fica na forma

$$\omega_\mu{}^a{}_b = \frac{1}{2} e^\lambda{}_b e^\nu{}_b (\partial_\lambda [e_\nu{}^a e_\mu{}^b] + \partial_\mu [e_\nu{}^a e_\lambda{}^b] - \partial_\nu [e_\lambda{}^a e_\mu{}^b]) - e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda{}^a. \tag{4.42}$$

Utilizando a regra da cadeia nas derivadas, veremos que algumas vierbeins irão contrair,

$$\begin{aligned} \omega_\mu{}^a{}_b = \frac{1}{2} (\delta^\nu_\mu e^\lambda{}_b \partial_\lambda e_\nu{}^a + e^\lambda{}_b \delta^a_b \partial_\lambda e_\mu{}^b + e^\lambda{}_b \delta^\nu_\lambda \partial_\mu e_\nu{}^a + e^\lambda{}_b \delta^a_b \partial_\mu e_\lambda{}^b - \delta^a_b e^\nu{}_b \partial_\nu e_\mu{}^b \\ - \delta^\nu_\mu e^\lambda{}_b \partial_\nu e_\lambda{}^a) - e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda{}^a. \end{aligned}$$

Fazendo as devidas contrações,

$$\begin{aligned} \omega_\mu{}^a{}_b = \frac{1}{2} (e^\lambda{}_b \partial_\lambda e_\mu{}^a + e^\lambda{}_a \partial_\lambda e_\mu{}^a + e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda{}^a + e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda{}^a - e^\nu{}_a \partial_\nu e_\mu{}^a \\ - e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda{}^a) - e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda{}^a. \end{aligned}$$

Vemos que alguns termos se cancelam. Atuamos, no quarto termo, a delta apenas na derivada parcial da vierbein. Renomeando, no segundo termo, o índice mudo λ para ν, esta cancela o quinto termo, ficaremos com uma expressão bem reduzida na forma:

$$\omega_\mu{}^a{}_b = \frac{1}{2}(e^\lambda{}_b\partial_\lambda e_\mu{}^a - e^\lambda{}_b\partial_\mu e_\lambda{}^a). \tag{4.43}$$

4.2.2 Postulado Tetrado

O postulado tetrado nos diz que a derivada covariante do campo de vierbein anula-se, $\nabla_\mu e_\nu{}^a = 0$, podemos mostrar multiplicando a equação (4.39), o que nos dá

$$\omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b = e_\sigma{}^a e^\lambda{}_b e_\nu{}^b \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - e^\lambda{}_b e_\nu{}^b \partial_\mu e_\lambda{}^a \tag{4.44}$$

$$= e_\sigma{}^a \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\mu e_\nu{}^a. \tag{4.45}$$

Reorganizando os termos, temos:

$$\nabla_\mu e_\nu{}^a \equiv \partial_\mu e_\nu{}^a - e_\sigma{}^a \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b = 0. \tag{4.46}$$

Como o campo de vierbein é invariante sob transporte paralelo, isto é, $\nabla_\mu e_\nu{}^a = 0$, teremos como consequência que o tensor métrico também será invariante por transporte paralelo:

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = \nabla_\mu(e_\nu{}^a e_\lambda{}^c \eta_{ab}) \tag{4.47}$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = (\nabla_\mu e_\nu{}^a) e_\lambda{}^b \eta_{ab} + e_\nu{}^a (\nabla_\mu e_\lambda{}^b) \eta_{ab} = 0. \tag{4.48}$$

Utilizando a relação anterior na métrica do espaço local teremos:

$$\nabla_\mu \eta_{ab} = 0 \tag{4.49}$$

$$\partial_\mu \eta_{ab} + \omega_\mu{}^{ac} \eta_{cb} + \omega_\mu{}^{bc} \eta_{ac} = 0. \tag{4.50}$$

Como a derivada parcial de η é nula, a equação acima nos permite concluir que a conexão de spin possui antissimetria na forma [13]:

$$\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}. \tag{4.51}$$

4.3 Equações de estrutura de Cartan

Nesta seção, a notação para as vierbeins será alterada, utilizar-se-á os índices sem fazer o espaçamento horizontal entre os índices covariantes e contravariantes, a modificação apenas tem como objetivo compactar as equações a seguir.

Podemos escrever o tensor de curvatura de Riemann em termos das vierbeins e conexões de spin, para isto iremos encontrar o comutador das derivadas covariantes de um vetor com índices locais, o procedimento é análogo ao feito para encontrarmos o tensor de Riemann dado pelas Γ's. Dadas as seguintes derivadas,

$$\nabla_a V^p = \partial_a V^p + \omega_a{}^p{}_c V^c, \qquad \nabla_b V^p = \partial_b V^p + \omega_b{}^p{}_c V^c. \tag{4.52}$$

Derivando novamente, teremos:

$$\nabla_a(\nabla_b V^p) = \partial_a(\partial_b V^p + \omega_b{}^p{}_c V^c) + \omega_a{}^p{}_q(\partial_b V^q + \omega_b{}^q{}_c V^c) - \omega_a{}^r{}_b(\partial_r V^p + \omega_r{}^p{}_c V^c), \tag{4.53}$$

teremos também, mudando a ordem de derivação:

$$\nabla_b(\nabla_a V^p) = \partial_b(\partial_a V^p + \omega_a{}^p{}_c V^c) + \omega_b{}^p{}_q(\partial_a V^q + \omega_a{}^q{}_c V^c) - \omega_b{}^r{}_a(\partial_r V^p + \omega_r{}^p{}_c V^c). \tag{4.54}$$

A diferença entre estas derivadas é

$$\nabla_b(\nabla_a V^p) - \nabla_a(\nabla_b V^p) = V^c[\partial_b\omega_a{}^p{}_c - \partial_a\omega_b{}^p{}_c + \omega_b{}^p{}_q\omega_a{}^q{}_c - \omega_a{}^p{}_q\omega_b{}^q{}_c \tag{4.55}$$

$$-V^c R^p{}_{cab} = e^\mu_a e^n_b[\partial_\nu\omega_\mu{}^p{}_c - \partial_\mu\omega_\nu{}^p{}_c + \omega_\nu{}^p{}_q\omega_\mu{}^q{}_c - \omega_\mu{}^p{}_q\omega_\nu{}^q{}_c]V^c. \tag{4.56}$$

Portanto, podemos escrever o nosso tensor de Riemann na forma

$$R_{mn}{}^{pq} = e^\mu_m e^\rho_n[\partial_\mu\omega_\rho{}^{pq} - \partial_\rho\omega_\mu{}^{pq} - \omega_\mu{}^{rp}\omega_{\rho r}{}^q + \omega_\rho{}^{rp}\omega_{\mu r}{}^q] \tag{4.57}$$

onde a antissimetria em μ e ρ nos permite escrever

$$R_{mn}{}^{pq} = (e^\mu_m e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_m)(\partial_\mu\omega_\rho{}^{pq} - \omega_\mu{}^{rp}\omega_{\rho r}{}^q). \tag{4.58}$$

Escreveremos, então, a ação de Einstein da seguinte forma:

$$S_E = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x E R_{mn}{}^{mn}. \tag{4.59}$$

Obteremos as equações de movimento variando e utilizando o princípio da mínima ação em relação aos vierbeins e as conexões.

4.3.1 Variação em relação as conexões de spin

Primeiramente, em relação as conexões teremos:

$$\delta_\omega S_E = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x[E(e^\mu_m e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_m)][\delta(\partial_\mu\omega_\rho{}^{mn}) - \delta(\omega_\mu{}^{rm}\omega_{\rho r}{}^n)] \tag{4.60}$$

Para o termo com a variação da derivada da conexão, iremos utilizar integração por partes:

$$\int d^4x[E(e^\mu_m e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_m)]\delta(\partial_\mu {\omega_\rho}^{mn}) = \int d^4x\delta({\omega_\rho}^{mn})\partial_\mu[E(e^\mu_n e^\rho_m - e^\mu_m e^\rho_n)], \tag{4.61}$$

onde descartamos os termos de superfície e compensamos o sinal da integração por partes trocando a ordem dos produtos das vierbeins.

Para a variação do produto de conexões, teremos que

$$-\delta({\omega_\mu}^{rm}{\omega_{\rho r}}^n) = -{\omega_{\rho r}}^n\delta{\omega_\mu}^{rm} - {\omega_\mu}^{rm}\delta{\omega_{\rho r}}^n = {\omega_{\rho r}}^n\delta{\omega_\mu}^{mr} - {\omega_\mu}^{rm}\delta{\omega_{\rho r}}^n \tag{4.62}$$

Utilizamos acima a relação de antissimetria da conexão de spin (4.51). Renomeando os índices mudos, teremos:

$$(e^\mu_m e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_m){\omega_{\rho r}}^n\delta{\omega_\mu}^{mr} = (e^\rho_m e^\mu_q - e^\mu_m e^\rho_q){\omega_{\mu n}}^q\delta{\omega_\rho}^{mn} \tag{4.63}$$

e

$$-(e^\mu_m e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_m){\omega_\mu}^{rm}\delta{\omega_{\rho r}}^n = -(e^\mu_q e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_q){\omega_\mu}^{mq}\delta{\omega_{\rho m}}^n = -(e^\mu_q e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_q){\omega_{\mu m}}^q\delta{\omega_\rho}^{mn}. \tag{4.64}$$

A nossa variação ficará na forma:

$$\frac{1}{16\pi G}\int d^4x(\delta{\omega_\rho}^{mn})(\partial_\mu[E(e^\mu_n e^\rho_m - e^\mu_m e^\rho_n)] + E(e^\rho_m e^\mu_q - e^\mu_m e^\rho_q){\omega_{\mu n}}^q - E(e^\mu_q e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_q){\omega_{\mu m}}^q) = 0 \tag{4.65}$$

Ficaremos com a seguinte equação:

$$\partial_\mu[E(e^\mu_m e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_m)] - E(e^\rho_m e^\mu_q - e^\mu_m e^\rho_q){\omega_{\mu n}}^q + E(e^\mu_q e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_q){\omega_{\mu m}}^q = 0 \tag{4.66}$$

que reconhecemos como a derivada covariante:

$$\nabla_\mu[E(e^\mu_m e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_m)] = 0. \tag{4.67}$$

A equação (4.67) será primeira equação tensorial de Cartan sem termo de fonte.

4.3.2 Variação em relação as vierbeins

Podemos escrever a variação em relação as vierbeins na seguinte forma:

$$\delta S_E = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x[\delta E {R_{mn}}^{mn} + E(\partial_\mu{\omega_\rho}^{mn} - {\omega_\mu}^{rm}{\omega_{\rho r}}^n)\delta(e^\mu_m e^\rho_n - e^\mu_n e^\rho_m)] = 0. \tag{4.68}$$

Como $\delta(detM) = (detM)Tr[M^{-1}\partial_\nu M]$, podemos escrever

$$\delta E = Ee^\mu_m\delta e^m_\mu. \tag{4.69}$$

A relação abaixo também será útil:

$$\delta e^{\rho}_{m} = -e^{\mu}_{m} e^{\rho}_{n} \delta e^{n}_{\mu}. \tag{4.70}$$

Podemos escrever o produto de vierbeins retirando da forma antissimétrica, sua variação ficará na forma

$$\delta(e^{\mu}_{m} e^{\rho}_{n} - e^{\mu}_{n} e^{\rho}_{m}) = 2\delta(e^{\mu}_{m} e^{\rho}_{n}) = 2[e^{\mu}_{m} \delta(e^{\rho}_{n}) + e^{\rho}_{n} \delta(e^{\mu}_{m})]. \tag{4.71}$$

Escreveremos as variações em termos de δe^{n}_{μ}, de forma que teremos $\delta E = E e^{\mu}_{n} \delta e^{n}_{\mu}$, $\delta e^{\mu}_{m} = -e^{\mu}_{m} e^{\mu}_{n} \delta e^{n}_{\mu}$ e $\delta e^{\rho}_{n} = -e^{\mu}_{n} e^{\rho}_{n} \delta e^{n}_{\mu}$. A variação da ação em relação as vierbeins ficará na seguinte forma:

$$\delta S_E = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [E e^{\mu}_{n} \delta e^{n}_{\mu} R_{mn}{}^{mn} + 2E(\partial_{\mu} \omega_{\rho}{}^{mn} - \omega_{\mu}{}^{rm} \omega_{\rho r}{}^{n})(e^{\rho}_{n}[-e^{\mu}_{m} e^{\mu}_{n} \delta e^{n}_{\mu}]) + e^{\mu}_{m}[-e^{\mu}_{n} e^{\rho}_{n} \delta e^{n}_{\mu}])], \tag{4.72}$$

nos fornecendo a equação

$$e^{\mu}_{n} R_{mn}{}^{mn} - 4(\partial_{\mu} \omega_{\rho}{}^{mn} - \omega_{\mu}{}^{rm} \omega_{\rho r}{}^{n})(e^{\rho}_{n} e^{\mu}_{m} e^{\mu}_{n}) = 0. \tag{4.73}$$

Contraindo com e^{q}_{μ},

$$\delta^{q}_{n} R_{mn}{}^{mn} - 4(\partial_{\mu} \omega_{\rho}{}^{mn} - \omega_{\mu}{}^{rm} \omega_{\rho r}{}^{n}) e^{\rho}_{n} e^{\mu}_{m} \delta^{q}_{n} = 0, \tag{4.74}$$

$$\frac{1}{2} R \delta^{q}_{n} - (\partial_{\mu} \omega_{\rho}{}^{mq} - \omega_{\mu}{}^{rm} \omega_{\rho r}{}^{q})(e^{\mu}_{m} e^{\rho}_{n} - e^{\mu}_{n} e^{\rho}_{m}) = 0. \tag{4.75}$$

Obtivemos a segunda equação tensorial de Cartan (4.75). Estas equações que obtivemos variando em relação as vierbeins e as conexões de spin são equivalentes a equação de Einstein tensorial sem termo de fonte, a grande vantagem é que Cartan transformou uma equação tensorial de segunda ordem não-linear em duas equações tensoriais não-lineares de primeira ordem acopladas, nos dando 20 equações acopladas não-lineares [11].

5 CONCLUSÃO

Construímos através do princípio variacional as equações de campo de Einstein sem presença de matéria e através do princípio variacional e do tensor-energia momento, construímos a equação de Einstein com termo de fonte de matéria. Desenvolvemos as equações de Cartan fazendo a variação da nossa ação em relação as vierbeins e a conexão de spin de modo que reduzimos a equação de Einstein, que é uma equação tensorial de segunda ordem não-linear (que representa 10 equações acopladas) para duas equações tensoriais não-lineares de primeira ordem e acopladas (representando 20 equações não-lineares acopladas). Temos como motivação introduzir campos spinoriais como o campo de Dirac que naturalmente aparece utilizando as vierbeins, onde a teoria de campos de vierbein nos permite representar uma teoria quântica de campos relativística em espaços curvos e construir uma teoria de calibre para a gravitação.

REFERÊNCIAS

[1] W. Rindler, *Relativity*. Oxford University Press , Oxford (2006)

[2] R. D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, Oxford (2006)

[3] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, New York (2009)

[4] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley Press, New York (1972)

[5] H. Goldstein. *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Press, San Francisco (2002)

[6] R. M. Wald. *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984)

[7] T. Padmanabhan. *Gravitation: Foundations and Frontiers*, Cambridge University Press, Cambridge (2010)

[8] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley Press, San Francisco (2004)

[9] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*, Taylor & Francis Group, Boca Raton (2003)

[10] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A basic introduction*, Oxford University Press, Oxford (2010)

[11] Pierre Ramond. *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley Press. (1990)

[12] J. Barcelos Neto. *Matemática para físicos com aplicações: vetores, tensores e spinores, volume 1*, Editora Livraria da Física, São Paulo (2010)

[13] J. Yepez. Einstein's vierbein field theory of curved space. Air Force Research Laboratory, Hanscom Air Force Base MA, 2008. arXiv:1106.2037 [gr-qc].

[14] https://writelatex.s3.amazonaws.com/wshccgfxnrxt/uploads/8044/7555699/1.png

[15] https://www.researchgate.net/publication/251542142_Conjugate_gradient_on _Grassmann_manifolds_for_robust_subspace_estimationa