UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA

NICOLAS CARVALHO DE BRITO

SOBRE A CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN DA GRAVITAÇÃO

FORTALEZA
2016

NICOLAS CARVALHO DE BRITO

SOBRE A CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN DA GRAVITAÇÃO

Monografia apresentada ao Curso de Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física

Orientador: Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos

FORTALEZA
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B876s Brito, Nicolas Carvalho de.
Sobre a construção das equações de Einstein da gravitação / Nicolas Carvalho de Brito. – 2016.
37 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos.

1. Equações de Einstein. 2. Relatividade. 3. Gravitação. I. Título.

CDD 530

NICOLAS CARVALHO DE BRITO

SOBRE A CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN DA GRAVITAÇÃO

Monografia apresentada ao Curso de Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física

Aprovada em: 08 de Julho de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Victor Santos

Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

José Ramos Gonçalves

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Samuel Batista Bastos

MSc. Samuel Batista Bastos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Fortaleza
2016

Dedico este trabalho a todos aqueles que anseiam por entender a natureza da forma mais profunda possível e que não se amedrontam por qualquer obstáculo que se faça presente ao longo dessa árdua caminhada.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço aos meus familiares, em especial à minha mãe, por toda a paciência e fé que esta tem tido comigo. Mesmo quando eu não conseguia acreditar que era capaz, ela acreditava.

Ao Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos, pela amizade, por ser alguém que desejo seguir os passos e pela orientação. Sem este, com certeza, o presente trabalho não seria possível.

Aos professores do Departamento, em especial, José Ramos Gonçalves, Raimundo Nogueira Costa Filho, Andrey Chaves.

Aos amigos, sem os quais todas as conquistas que tenho tido não teriam qualquer valor. Em especial, agradeço a Levi Félix, Jucelino Taleires, Juliane Medeiros, Raul Peixoto, Airton dos Santos, Arilo Pinheiro, Rodrigo Almeida, Matheus Pinheiro, Gabriela Aragão, Michelângelo Frost, Charles Xavier, Emanuel Fontelles, Michel Rodrigues, Sofia Magalhães, Nathanael Bandeira, Gabriel Oliveira, Marlon dos Santos, Thiago Moura, Marcos Mirado, Afonso Silva, Maurílio.

Aos funcionários do departamento, muitos dos quais tornaram-se amigos.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma construção da teoria de Einstein da gravitação. Para isto partimos do princípio da relatividade galileana e formulamos as leis de Newton do movimento. Fazemos então uma breve revisão histórica sobre gravitação, buscando explicitar as motivações que levaram à passagem entre diferentes modelos, concluindo com a teoria de Newton da gravitação. Após uma discussão acerca dos conceitos fundamentais da teoria da relatividade especial segue-se uma breve formulação desta teoria. Finalmente mostramos como a tentativa de estender a validade do princípio da relatividade especial leva-nos naturalmente à elaboração de uma teoria da gravitação capaz de explicar os fenômenos observados até então.

Palavras-chave: Equações de Einstein; Relatividade; Gravitação.

ABSTRACT

In this work we present an approach to Einstein's theory of gravitation. In order to do this we start stating Galileo's principle of relativity and we formulate Newton's laws of motion. We then make a brief review about the history of gravitation, expliciting the motivations which led the passage from one model to another, and concluding with Newton's theory of gravitation. After discussing some aspects of the special theory of relativity, we make a short formulation of the theory. Finally we show how the search for a generalization of the principle of relativity leads us naturally to a theory of gravitation that is capable of explaining all the observed gravitational phenomena until now.

Key-words: Einstein's Equations; Relativity; Gravitation.

NOTAÇÃO

Neste trabalho vamos utilizar a convenção de soma de Einstein, como em (WEINBERG, 1972), para simplificar a escrita das expressões tensoriais. Essa notação estabelece que uma soma sempre estará implícita quando houver a presença de índices repetidos. Por exemplo,

$$x_\alpha \, y^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{3} x_\alpha \, y^\alpha = x_0 y^0 + x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3.$$

A assinatura da métrica adotada é $(-+++)$, conforme (WALD, 1984). A convenção para os índices tensoriais se dá como se segue:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$	Letras gregas do início do alfabeto; índices espaço-temporais, variando de 0 a 3, para sistemas coordenadas planos, como os utilizados na Relatividade Especial.
$\lambda, \mu, \nu, \ldots$	Letras do final do alfabeto grego, variando de 0 a 3, serão usadas para sistemas de coordenadas curvos, isto é, na presença de um campo gravitacional. Tais sistemas são usados majoritariamente na Relatividade Geral.
$i, j, k, l, \ldots$	Índices espaciais, variando de 1 a 3.

Sumário

1 Introdução

Neste capítulo iremos falar sobre a formulação galileana do princípio da relatividade e sobre o papel desempenhado pelos referenciais inerciais nesse princípio. Veremos também como Isaac Newton, ao fazer uso destes conceitos, estabeleceu as três leis que descrevem o movimento dos corpos.

1.1 Princípio da relatividade Galileana e referenciais inerciais

O nosso ponto de partida na construção de uma teoria capaz de explicar os fenômenos gravitacionais observados e também capaz de prever fenômenos gravitacionais ainda não observados será em Galileu Galilei (1564-1642), tendo em vista que foram as ideias de Galileu que levaram ao estabelecimento da base sobre a qual a ciência moderna e a mecânica newtoniana estão alicerçadas.

Antes de iniciarmos, gostaria de deixar claro quando me refiro a uma teoria capaz de prever fenômenos gravitacionais não observados. No século XVII, o movimento observado para Urano não condizia com aquele previsto pela Teoria da Gravitação Universal de Newton. De maneira independente, os astrônomos John Couch Adams (1819–1892) e Urbain Le Verrier (1811–1877) concluíram que isto poderia se dar pela existência de um planeta fora da órbita de Urano, o qual se fosse levado em conta nas equações de movimento levaria à concordância entre previsão e observação. Pouco tempo depois, o planeta previsto foi descoberto por Johann Galle (1812–1910), e posteriormente, passou a ser conhecido como Netuno (TAYLOR, 2013).

Galileu foi um dos primeiros a se perguntar qual o papel do observador na descrição da natureza. A concepção de Aristóteles, do observador absoluto, era a dominante a aquela época. Galileu passou a realizar experimentos com observadores em diferentes estados de movimento. Este observou que um determinado experimento, quando realizado por ele, em repouso relativo à Terra, forneceria resultados indistinguíveis daqueles obtidos quando ele realizava o mesmo experimento movendo-se em linha reta sem acelerar, também relativo à Terra.

Vejamos um exemplo acerca do que foi exposto acima. Imagine Galileu sentado na poltrona de um trem, que está parada em relação à Terra, arremessando para cima uma maçã. Agora, imagine que o trem está se movendo em linha reta sem acelerar, e Galileu continua realizando o mesmo experimento. Procedendo desta forma Galileu não veria diferença alguma na trajetória da maçã. A conclusão dele foi que se você está em algum desses estados de movimento não há experimento que você possa realizar que seja capaz de informar se você está num estado ou no outro.

Galileu estava ciente da existência de uma classe de referenciais, todos equivalentes entre si, no que diz respeito à descrição do mundo físico. Em outras palavras, quaisquer que sejam as leis que regem o movimento dos corpos, elas devem ser as mesmas quando vistas por um referencial em repouso na Terra ou por outro que se move com velocidade constante e em linha reta relativo ao primeiro.

Estamos prontos para afirmar, de forma mais precisa, o princípio da relatividade galileana:

Princípio da relatividade galileana
Se as leis que descrevem o movimento dos corpos tomam uma forma em relação a um referencial em repouso relativo à Terra, tomarão a mesma forma quando vistas por um referencial que se move com velocidade constante e em linha reta em relação ao primeiro.

A importância deste princípio é indiscutível, pois sem ele não haveria praticidade na construção da ciência moderna, tendo em vista que se ele não fosse verdadeiro, precisaríamos especificar diferentes leis, regentes do comportamento da natureza, para cada observador considerado.

É importante que fique claro que este princípio não especifica como devem ser esses referenciais, só diz qual a relação devem guardar entre si. Neste ponto que se faz necessária a postulação da existência de uma classe de referenciais, que passaremos a chamar *inerciais*, nos quais as leis que estamos discutindo tomam a forma mais simples possível.

Para entender melhor esse postulado, consideremos um objeto totalmente isolado. De todos os referenciais que o observam, aqueles que o virem movendo-se com velocidade constante e em linha reta serão os inerciais. Todas as outras classes de referenciais verão esse objeto mover-se de uma forma mais complicada que essa. É por isso que, ao postularmos a existência dos referenciais inerciais, fazemos uso da expressão o mais simples possível.

Unindo esse postulado ao princípio da relatividade galileana, podemos afirmar:

> Se as leis que descrevem o movimento dos corpos tomam a forma mais simples possível em um referencial inercial, tomarão também a forma mais simples quando vistas por um referencial que se move com velocidade constante em relação ao primeiro.

Concluímos a partir do enunciado acima que se um referencial for inercial, todos os outros que se movem com velocidade constante e em linha reta relativo a ele também o serão.

Note que encontramos um modo de testar se um referencial é inercial ou não, fazendo uso do fato de um corpo observado estar isolado (daí sai a primeira lei de Newton), e também aprendemos a dizer qual a relação outros referenciais devem ter com um referencial inercial de modo que eles também sejam inerciais.

Com essas conclusões Galileu havia preparado o cenário para a atuação de Isaac Newton, que formulou as leis que descrevem o movimento dos corpos.

1.2 Leis de Newton do Movimento

A primeira lei de Newton do movimento reafirma o princípio da inércia de Galileu, que afirma a existência de uma classe de referenciais que vê objetos isolados moverem-se em linha reta e com velocidade constante. Mas para Galileu o foco era na na existência desses referenciais, e numa forma de verificar quais referenciais se comportavam como um inercial. O foco da primeira lei de Newton está no uso dos referenciais inerciais para a determinação do movimento dos corpos.

Um enunciado mais preciso da primeira lei de Newton é

Primeira lei de Newton
Todo corpo isolado (isto é, que não esteja interagindo com outros corpos), move-se com velocidade constante e em linha reta, em relação a qualquer referencial inercial.

Fica claro, pelo enunciado acima, que geralmente podemos identificar referenciais inerciais como sendo aqueles não acelerados, pois qualquer referencial acelerado, não vê uma partícula livre mover-se com velocidade constante e em linha reta. Portanto a Terra não é um perfeito referencial inercial, tendo em vista que é fortemente acelerada pelo Sol, mas para a análise do movimento de corpos sobre a sua superfície, a aproximação dela por um referencial inercial é bastante razoável.

A segunda lei de Newton pode ser enunciada da seguinte forma:

Segunda lei de Newton
Todo corpo atuado por uma força resultante não-nula, move-se de forma acelerada, em relação a qualquer referencial inercial.

Essa lei pode ser expressa matematicamente por

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{1.1}$$

onde $\mathbf{F}$ é denominada *força*, m a *massa* e $\mathbf{a}$ a *aceleração*. A força é uma grandeza intermediadora de interação: Quando dois corpos interagem, eles o fazem por meio de forças que um exerce sobre o outro. De forma cotidiana, associa-se a força executada por um indivíduo sobre um corpo ao esforço daquele indivíduo em tentar modificar o estado de movimento daquele corpo. A massa, também denominada *massa inercial*, é a grandeza que informa o quão oposto é um corpo à mudança do seu estado de movimento. Cotidianamente, percebe-se que, quanto mais matéria um determinado corpo possui, mais difícil será mudar seu estado de movimento, e portanto, maior será sua massa inercial.

Como vimos, referenciais inerciais são, geralmente, aqueles não acelerados. É daí que vem o termo massa inercial, pois essa grandeza mede exatamente a oposição de um corpo à aceleração.

A terceira lei de Newton afirma que

Terceira lei de Newton

De todos os tipos de forças, existe uma classe especial, tal que, se um corpo exerce uma força $\mathbf{F}_1$ em um segundo corpo, então, este exercerá uma força $\mathbf{F}_2$ no primeiro, tal que

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \tag{1.2}$$

Este enunciado enfatiza que essa lei é um postulado, pois estamos afirmando a existência de um conjunto de forças muito particular, sem qualquer prova primária da sua existência. No fim das contas, estamos restringindo nossa análise mecânica a movimentos gerados por forças daquele tipo. Felizmente, na grande maioria das situações de interesse, as forças envolvidas respeitam a terceira lei de Newton.

A terceira lei de Newton apresenta duas forma, chamadas *forma fraca* e *forma forte*. A forma fraca é menos restritiva, e impõe apenas que essas forças sejam iguais em magnitude e estejam em direções opostas. A forma forte afirma que essas forças devem ter mesma magnitude e estar em direções opostas, mas *sobre a mesma linha de atuação*. Em particular, o modelo de Newton da força gravitacional respeita a terceira lei na forma forte.

2 Gravitação Newtoniana

Neste capítulo vamos expor de forma breve a história da gravitação. Nosso objetivo neste capítulo é mostrar a evolução do pensamento científico no processo da descrição do movimento dos corpos celestes, e por fim apresentar a teoria de Newton da gravitação.

2.1 Modelos de Gravitação Pré-Newtoniano

O modelo de Newton da gravitação não foi o primeiro. Muito antes do surgimento deste modelo, filósofos tentaram entender a natureza dos corpos celestes, e descrever seus movimentos, mas todos eles o fizeram por meio de suposições, muitas delas motivadas por crenças religiosas, que acarretavam alguma inconsistência em relação ao que se observava. Parte desses modelos nem podem ser chamados de modelos de gravitação, pois versavam mais a respeito de cosmologia de um ponto de vista mais geral. Vamos fazer uma breve revisão sobre cada um dos modelos mais importantes.

2.1.1 Modelo Aristotélico

Para Aristóteles, a Terra ocupava o centro de uma sobreposição de esferas concêntricas, onde os planetas, o Sol e a Lua situavam-se nessas camadas esféricas. Numa última camada estavam as estrelas distantes. O Universo era dividido em uma parte imperfeita e noutra perfeita.

A parte imperfeita era conhecida como *Terrena* ou *sublunar*, e era formada Pela Terra e por tudo que nela existe, onde tudo isso era composto por quatro elementos, a saber, terra, água, ar e fogo. O princípio que regia o movimento dos corpos era aquele segundo o qual os corpos buscam o seu lugar natural. Portanto, se uma pedra cai, quando você a arremessa para cima, é devido ao fato de que o lugar natural dela é o chão. E com esse mesmo princípio, Aristóteles buscava explicar todos os fenômenos terrenos.

A parte perfeita era conhecida como *Cosmos* ou *supralunar*, sendo todo o resto do Universo. O caráter perfeito do cosmos era conferido pela sua composição, pois para Aristóteles, essa parte era feita de um quinto elemento perfeito, chamado *quintessência*. O fato de os corpos celestes serem constituídos deste elemento é que os fazia moverem-se em círculos, que para Aristóteles era uma geometria perfeita.

Um dos pontos falhos do modelo aristotélico é que, se dois corpos de massa diferentes forem soltos simultaneamente de uma mesma altura, aquele mais composto (que possui mais terra) chegará ao chão primeiro, pois terá mais tendência de ir ao chão. No entanto, Galileu demonstrou experimentalmente que isso não ocorre.

2.1.2 Modelo Ptolomaico

Filosoficamente falando, o modelo de Ptolomeu não era muito distinto do Aristotélico. Ptolomeu estava mais preocupado com o mecanicismo do modelo, e por isso ele trocou as esferas concêntricas de Aristóteles por um mecanismo no qual a Terra continuava situada no centro do Universo, mas cada planeta era associado a um ponto em torno do qual ele girava (chamado *epiciclo*) à medida que o ponto girava em torno da Terra. O Sol apenas girava em torno da Terra, não precisando executar epiciclos. As estrelas distantes continuavam situadas numa espécie de pano de fundo do céu.

Esse modelo explicava muito bem a variação da velocidade angular dos planetas e o movimento retrógrado e direto, os quais não eram possíveis no modelo de Aristóteles.

2.1.3 Modelo Copernicano

O modelo de Copérnico é uma revolução em relação aos anteriores. Neste modelo a Terra deixa de ocupar o centro do Universo e passa a girar em torno do Sol, que passou a ocupar assim o centro do Universo. Neste modelo, todos os planetas moviam-se em círculos em torno do Sol. Com essa mudança, Copérnico conseguia explicar tudo que era explicado por Ptolomeu sem a necessidade de um mecanismo complicado como o dos epiciclos.

2.1.4 Modelo Kepleriano

O primeiro astrônomo a trabalhar com instrumentos de precisão considerável foi Tycho Brahe (1546–1601). Isto permitiu que ele obtivesse resultados importantíssimos acerca do movimento dos corpos celestes. Após a morte de Brahe, o seu assistente, Johannes Kepler (1571–1630), tornou-se o responsável pelo observatório da cidade de praga, e teve acesso a todas as informações observacionais de Tycho Brahe.

Kepler, ao analisar o problema do movimento de Marte, percebeu que os dados coletados por Brahe não concordavam com uma órbita circular, mas com uma elíptica, onde o Sol deveria ocupar um dos focos.

Kepler estendeu o resultado acima a todos os planetas que giram em torno do Sol (que para ele ainda ocupava o centro do universo) e formulou as leis que hoje são conhecidas como *leis de Kepler*. A primeira delas diz que:

Primeira lei de Kepler
Os planetas descrevem orbitas elípticas com o Sol em um dos focos.

Já a segunda lei pode ser enunciada como

Segunda lei de Kepler
Uma linha imaginária que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

E por fim, a terceira lei é enunciada da seguinte maneira:

Terceira lei de Kepler

A razão entre o quadrado do período T de revolução e o cubo do semi-eixo maior R da orbita de qualquer planeta em torno do Sol é uma constante:

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{constante}. \tag{2.1}$$

2.2 Teoria da Gravitação Universal de Newton

Na seção 1.2 vimos como Newton sintetizou as ideias de Galileu acerca do movimento dos corpos em uma equação de movimento e fundamentação da Mecânica. Newton fez o mesmo com a gravitação, pois ele sintetizou os resultados do modelo de Kepler em uma equação. Porém Newton foi além, ao estender a validade daquela equação não só para os corpos celestes mas também aos corpos terrenos, promovendo assim uma *unificação* das leis físicas: por exemplo, a força que faz com que os objetos terrenos caiam em direção à Terra é a mesma que faz com que a Lua permaneça orbitando a Terra.

De um modo geral, ele enunciou a lei que descreve como quaisquer dois corpos no Universo atraem-se mutuamente

Lei da gravitação universal

A força de atração entre dois corpos de massas m_1 e m_2 é proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre eles:

$$\mathbf{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{2.2}$$

onde G é uma constante, chamada *constante universal da gravitação*, e tem valor $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.

Com isso, Newton havia descrito o mecanismo que gera o movimento atrativo dos corpos em termos do agente chamado força que ele havia definido com a sua segunda lei. Mas uma pergunta pertinente diz respeito à forma como essa interação ocorre. Para Newton, a interação é instantânea, de tal forma que, mesmo que dois corpos estejam muito distantes, a informação de que um está presente viaja a velocidade infinita para alcançar o outra no mesmo instante.

Sabendo disso, torna-se útil definir essa lei em termos de uma quantidade que ocupe todos os pontos do Universo, a saber, um campo. A força gravitacional de Newton é conservativa, pois ela não depende do tempo explicitamente (de forma filosófica, isso reflete a expectativa de Newton em relação a um Universo estático e imutável), e em particular, ela pode ser associada a um campo potencial, que Newton chamou de *potencial gravitacional* (vamos denotar por ϕ) e que se relaciona com a força da equação (2.2) por

$$\mathbf{F} = -m\nabla\phi. \tag{2.3}$$

A equação (2.2), quando escrita em termos do potencial gravitacional ϕ toma a forma

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \tag{2.4}$$

que é a chamada *equação de campo* da gravitação newtoniana. Essa equação nos fornece a influência gravitacional exercida sobre um corpo colocado em qualquer ponto do Universo por um corpo cuja densidade de matéria é dada por ρ.

3 Gravitação Einsteiniana

Neste capítulo falaremos sobre teoria da relatividade especial e sobre a gravitação Einsteiniana. Nosso objetivo será obter as equações de Einstein da gravitação. Para isso discutiremos os aspectos mais relevantes da teoria da relatividade especial. Em seguida vamos apresentar uma discussão acerca do princípio da relatividade geral, onde entrará em cena o princípio da equivalência, e por fim formularemos a teoria da gravitação Einsteiniana.

3.1 Teoria da Relatividade Especial

3.1.1 Conceitos Fundamentais

Como já vimos, o primeiro a estabelecer um princípio da relatividade foi Galileu (princípio da relatividade galileana). Com base neste princípio, Galileu obteve as transformações de coordenadas que relacionam as medidas de tempo e espaço, de um determinado evento, feitas por dois referenciais inerciais S e S' que afastam-se ou aproximam-se um do outro ao longo do eixo x–x', com velocidade relativa de módulo V (daqui para frente sempre consideraremos essa configuração, chamada *boost* padrão, na qual os eixos x e x' são colineares, bem como y e y', z e z').

A relação entre as coordenadas medidas pelo referencial S' e as coordenadas medidas no referencial S são dadas por

$$x' = x - Vt \tag{3.1}$$

$$y' = y \tag{3.2}$$

$$z' = z \tag{3.3}$$

$$t' = t. \tag{3.4}$$

Fica evidente, pelas relações acima, que para Galileu (e também para Newton) todos os referenciais inerciais devem concordar quanto ao instante de tempo no qual o evento ocorreu (ou quanto ao intervalo de tempo entre dois eventos); para eles, o tempo é absoluto, isto é, independe de qual referencial o mede.

Com o advento do eletromagnetismo de Maxwell, surgiu uma aparente incompatibilidade entre o princípio da relatividade e a constância da velocidade da luz no vácuo, dada por $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Se o princípio da relatividade for verdadeiro, então a luz deve se propagar com velocidade c em relação a qualquer referencial inercial.

A partir das transformações de Galileu, verifica-se que a velocidade da luz não é a mesma quando vista por dois referenciais inerciais. Nesse ponto, parecia que ou o princípio da relatividade não era válido, ou o eletromagnetismo de Maxwell estava errado.

Einstein propôs que ambos são válidos e, para sustentar seu argumento, reavaliou conceitos mais fundamentais: o de *tempo* e *espaço*. Assim ele fundamentou a Teoria da Relatividade Especial.

O primeiro postulado de Einstein afirma que

> Se as leis da física tomam uma forma em relação a um referencial inercial, tomarão a mesma forma em relação a qualquer referencial que se move com velocidade constante e em linha reta relativo ao primeiro.

Esse postulado afirma a equivalência entre referenciais inerciais, mas dessa vez em relação à qualquer lei da física, e não só a mecânica.

O segundo postulado de Einstein afirma que

> A luz se propaga com velocidade c no vácuo em relação a todo referencial inercial.

Aplicando esses dois postulados às medições das coordenadas espaciais e temporal de um evento, realizadas por dois referenciais inerciais na configuração padrão, obtemos as chamadas *transformações de Lorentz*, que são as transformações de coordenadas compatíveis com o eletromagnetismo:

$$x' = \gamma(x - Vt) \tag{3.5}$$

$$y' = y \tag{3.6}$$

$$z' = z \tag{3.7}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \tag{3.8}$$

onde

$$\gamma = \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{3.9}$$

é chamado *fator de Lorentz*.

Nota-se, pelas relações acima, que o instante de tempo no qual um determinado referencial inercial vê um evento ocorrer não é igual a aquele que outro referencial inercial, que se move relativamente ao primeiro com V, observa. Ou seja, o tempo não é um parâmetro absoluto. Em particular, dois referenciais inerciais distintos podem discordar quanto ao intervalo de tempo que separa dois eventos, um deles afirmando que os eventos são simultâneos e o outro afirmando que não o são. A isso damos o nome de *relatividade da simultaneidade*.

Como consequência, também concluímos que objeto algum pode mover-se mais rápido do que a luz. com efeito, suponhamos que uma partícula se move com velocidade

v ao longo do eixo $-x$ de um determinado sistema de coordenadas inercial, o fator de Lorentz γ que relaciona o sistema citado ao sistema que acompanha o movimento da partícula é dado por (3.9); com isso, se $v > c$, $\frac{v}{c} > 1$, e assim $\gamma(v)$ seria complexo, o que acabaria com qualquer significado físico contido nas equações (3.5)–(3.8).

3.1.2 Formalismo

Nesta seção vamos estudar a Relatividade Especial de um ponto de vista formal, pois será o desenvolvimento desse formalismo que nos levará às equações de Einstein da gravitação. Em particular, consideraremos a velocidade da luz no vácuo, c, como sendo 1, para tornar as expressões com as quais lidaremos um pouco mais simples[1].

O espaço vetorial sobre o qual formulamos a Relatividade Especial é denominado *Espaço de Minkowski*. Esse espaço é semelhante a um espaço euclidiano, porém possui *quatro* dimensões (e portanto é também chamado *quadridimensional*), e com a diferença marcante de que a métrica não é *positiva definida*, podendo ser positiva, negativa ou até mesmo nula.

Definimos a métrica do espaço de Minkowski por

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta, \tag{3.10}$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico do espaço de Minkowski, e tem representação matricial dada por

$$(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

A equação (3.10) pode também ser escrita como

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{3.12}$$

Toda quantidade que, sob um *boost* padrão, se transformar segundo as transformações de Lorentz, “habitará” o espaço de Minkowski, e a chamaremos de *quadrivetor*.

Escrevamos as transformações de Lorentz numa notação mais prática

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta, \tag{3.13}$$

onde $\Lambda^\alpha{}_\beta$ são os coeficientes da transformação de Lorentz e são definidos pela condição

$$\eta_{\gamma\delta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma\, \Lambda^\beta{}_\delta\, \eta_{\alpha\beta}. \tag{3.14}$$

[1] Essa suposição se encaixa na definição do chamado *sistema de unidades naturais*. Para maiores informações, ver referência (WEINBERG, 1972)

Uma característica fundamental das transformações de Lorentz é que elas deixam invariante o intervalo de *tempo próprio*, definido por

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta, \tag{3.15}$$

que é o intervalo de tempo decorrido entre dois eventos medido por um referencial que vê esses eventos ocorrerem numa mesma localização. A demonstração é simples:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau'^2 &= -{\eta'}_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x'^\alpha\,\mathrm{d}x'^\beta && (3.16)\\
&= -{\eta'}_{\alpha\beta}\,\Lambda^\alpha{}_\gamma\,\Lambda^\beta{}_\delta\,\mathrm{d}x^\gamma\,\mathrm{d}x^\delta && (3.17)\\
&= -\eta_{\gamma\delta}\,\mathrm{d}x^\gamma\,\mathrm{d}x^\delta, && (3.18)\\
&= \mathrm{d}\tau^2, && (3.19)
\end{aligned}$$

Assim o intervalo de tempo próprio é de fato um invariante, o que significa que todos os referenciais inerciais obtém o mesmo valor para ele.

Ao analisarmos a segunda lei de Newton, percebe-se que ela não é compatível com a Relatividade Especial, pois permite que objetos sejam acelerados até uma velocidade arbitrária. Portanto, a Relatividade Especial precisa também reformular a segunda lei de Newton, e isso é feito considerando um *quadrivetor força* f^α, tal que

$$f^\alpha = m\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}, \tag{3.20}$$

Sendo um quadrivetor, a força obedece a lei de transformação

$$f'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\,f^\beta. \tag{3.21}$$

Passaremos a ver como a tentativa de generalização do princípio da Relatividade Especial apresentou a ótima surpresa de que os efeitos de campos gravitacionais podem ser extraídos de uma forma muito elegante, sem fazer tantas suposições como as de Newton acerca da forma funcional para força gravitacional.

3.2 Teoria da Relatividade Geral

3.2.1 Princípio da Relatividade Geral

Como já vimos, qualquer um de dois observadores inerciais, um no leito de uma estrada e outro dentro de um trem que se move em linha reta e uniformemente em relação ao primeiro, tem igual direito de afirmar que está em repouso e o outro é quem se move relativo a ele, pois não há experimento que não forneça os mesmos resultados para cada um deles. Esses referenciais são igualmente bons na descrição das leis gerais da natureza. Esse é o princípio da Relatividade Especial.

Entretanto, até agora não afirmamos a equivalência de todos os referenciais (incluindo os não inerciais) no que diz respeito à descrição das leis gerais da natureza. No capítulo 1, começamos supondo a existência de um tipo de referencial em relação ao qual é valido o princípio da inércia, e aí afirmamos que, relativamente a esse tipo de referencial, as leis da física devem tomar a forma mais simples possível. Vimos também que todos os referenciais que mantiverem um estado de movimento retilíneo e uniforme em relação aos referenciais inerciais, também gozarão da propriedade de ver as leis da natureza numa forma simples (também serão inerciais). Somente para esses sistemas de referencia é válido o princípio da Relatividade Especial.

Neste ponto, torna-se tentador propor um princípio mais geral (o princípio da Relatividade Geral) que afirme a equivalência de todos os referenciais (não só os inerciais) no que diz respeito à formulação das leis gerais da natureza.

No exemplo do observador na estrada e do observador no trem, mostrado no capítulo 1, ficou claro que o observador do trem, por estar em movimento retilíneo uniforme, não encontra dificuldade em afirmar que está em repouso e é o observador da estrada que está a se mover, pois não sente qualquer efeito devido ao movimento do trem.

Mas se o trem sofrer uma freada, o observador dentro dele sofrerá um forte puxão para a frente. Ou seja, o movimento acelerado do vagão manifesta-se por meio do movimento do observador dentro dele.

Vê-se que um princípio da Relatividade Geral parece não se sustentar, pois o referencial acelerado do trem parece ter uma realidade física absoluta. Vejamos como resolver este problema.

É neste ponto que entra em cena o princípio da equivalência. É um fato da natureza que campos gravitacionais conferem a mesma aceleração a qualquer corpo. Com efeito, Imaginemos um objeto na presença de um campo gravitacional, a segunda lei de Newton afirma que

$$F = m_I \, a, \tag{3.22}$$

onde m_I é a massa inercial. Já a força gravitacional é dada por

$$F = m_G \, g, \tag{3.23}$$

onde m_G é a massa gravitacional. Conclui-se portanto que

$$a = \frac{m_G}{m_I} \, g. \tag{3.24}$$

Como todos os corpos tem a mesma aceleração na presença de um determinado campo gravitacional (caracterizado pela intensidade do campo gravitacional g), resulta que a razão $\frac{m_G}{m_I}$ deve ser a mesma para todos os corpos. Sendo uma escolha arbitrária, fazemos essa relação igual a 1.

De posse do princípio da equivalência, Imagine um observador dentro de uma caixa totalmente isolada. Essa caixa é acelerada para cima, de forma constante, por meio de uma corda presa na sua parte superior (o observador vê a corda presa, mas não vê quem a puxa). O observador dentro da caixa procura entender em que estado de movimento se encontra. Para isso, realiza diversos experimentos, como por exemplo, soltando corpos de massas diferentes da mesma altura, verificando que chegam à parte inferior da caixa ao mesmo tempo, como fariam se o observador estivesse na superfície da Terra. Após realizar todo tipo de análise ele conclui que está em uma caixa em repouso na presença de um campo gravitacional. Ou seja, devido à equivalência entre massa inercial e massa gravitacional, o observador no referencial acelerado pode afirmar que encontra-se num referencial em repouso, porém na presença de um campo gravitacional (uma força fictícia para a qual a equivalência entre as massas é observada).

Com isto temos um princípio da Relatividade Geral, pois as leis gerais da natureza agora podem ser aplicadas para estes referenciais não inerciais, desde que um campo gravitacional seja levado em consideração.

Isso tudo pode parecer confuso. Em resumo, verifica-se que devido à equivalência entre massa inercial e massa gravitacional, referenciais não-inerciais não são menos especiais do que os inerciais. Na verdade, todos os nossos esforços até aqui tem sido nos levar à conclusão de que as leis da física são válidas para todos os sistemas de referência, independentemente do seu estado de movimento.

O problema do observador na estrada e o observador no trem que freia pode agora ser resolvido. O observador dentro do trem pode afirmar que o trem encontra-se em repouso na presença de um campo gravitacional na direção do movimento do trem. Isso explica o fato de ele sentir-se empurrado para frente, e explica o fato de para ele, a estrada que antes se afastava dele de forma uniforme agora se afasta, mas de forma desacelerada.

O princípio da Relatividade Geral nos dá condições de deduzir propriedades do campo gravitacional (é aqui onde a Teoria da Relatividade passa a versar sobre gravitação, sendo isto possível, milagrosamente, pelo fato natural da equivalência das massas). Com efeito, conhecemos as leis da natureza na ausência de campos gravitacionais (elas são dadas pelas equações da Relatividade Especial), e sabemos que podemos também escrever essas leis em relação a um referencial acelerado, onde termos extras que venham a aparecer conterão informação acerca de um determinado campo gravitacional, pois um referencial não inercial equivalerá a um inercial na presença de um campo gravitacional.

Um exemplo que demonstra o poder do princípio da Relatividade Geral é o que envolve a luz. Imagine que você encontra-se dentro da caixa isolada, do exemplo que discutimos anteriormente, segurando na direção horizontal uma lanterna ligada. Se a caixa é posta a acelerar para cima de forma constante, em relação a você, a luz que sai da lanterna realiza uma trajetória curva (como a aceleração é constante, a trajetória é uma parábola côncava para baixo). Como, na sua descrição, seu estado é de repouso na presença de um campo gravitacional para baixo, você só pode concluir que a trajetória curvada da luz se deve ao campo gravitacional e, naturalmente, afirma que a luz é afetada por campos gravitacionais.

Note que apenas por análise do princípio geral, uma teoria da gravitação Einsteniana já prediz resultados como o da curvatura da luz, que a Teoria de Newton não prevê.

3.3 Equações de Einstein da Gravitação

3.3.1 Forças Gravitacionais

Suponhamos que uma partícula move-se numa região onde existem apenas campos gravitacionais, tudo isso em relação a um referencial de coordenadas x^μ. Pelo princípio da equivalência, existe um sistema de coordenadas ξ^α no qual localmente (agora nossos campos não são necessariamente uniformes, podendo ser radiais, como é o caso de campos gravitacionais reais), nenhum campo gravitacional é observado. Esse sistema é exatamente aquele que, localmente, anula o efeito do campo gravitacional, e passaremos a chamá-lo de *referencial localmente inercial.* Nesse sistema a segunda lei de newton é dada por

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = 0, \tag{3.25}$$

onde

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\xi^\alpha\,\mathrm{d}\xi^\beta \tag{3.26}$$

é o tempo próprio.

Agora, por meio de uma transformação de coordenadas, veremos como o segundo sistema escreveria a sua equação de movimento para essa partícula.

Na transformação $\xi^\alpha \longrightarrow x^\mu$, as coordenadas ξ^α são funções das coordenadas x^μ, portanto a equação (3.25) pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{3.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) = 0 \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{3.29}$$

Multiplicando por $\partial x^\lambda/\partial\xi^\alpha$ e usando a relação

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} = \delta^\lambda{}_\mu, \tag{3.30}$$

obtemos a equação de movimento para o referencial x^μ:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = 0, \tag{3.31}$$

onde ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ são os coeficientes da chamada *conexão afim*, definidos por

$$ {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \tag{3.32}$$

Esse é o resultado mais importante até aqui, pois expressa em linguagem matemática os resultados que havíamos extraído do princípio da Relatividade Geral.

Só podemos associar a segunda parcela do lado esquerda da equação (3.31) aos campos gravitacionais presentes, pois eles são a única diferença entre os referenciais considerados.

Se a situação proposta tiver sido muito abstrata, imagine que o referencial das coordenadas x^μ é um sistema de coordenadas cartesiano em repouso na superfície da Terra, e que o referencial das coordenadas ξ^α é um sistema de coordenadas também cartesiano caindo em direção ao centro da Terra com aceleração de módulo g. Localmente, o sistema que cai não sente qualquer efeito de gravidade, entretanto o sistema fixado na Terra visualiza a partícula sob a influência do campo gravitacional da Terra.

Uma outra interpretação desse resultado surge quando percebe-se que a igualdade (3.31) é a equação de uma geodésica sobre uma superfície curva. Desse ponto de vista, pode-se interpretar que o efeito gravidade é a própria curvatura do espaço-tempo, de tal forma que um observador no referencial x^μ pode afirmar que não existe campo gravitacional (para ele a partícula está **completamente** livre), mas a geometria do espaço-tempo é curva (diferentemente da geometria do espaço-tempo para o observador ξ^α, que é plana).

Na maior parte do que segue, usaremos essa interpretação. Com base nisso, podemos apresentar, de forma esquemática, a nossa estratégia daqui para frente:

(i) Sendo o nosso objetivo conhecer os efeitos da gravidade no movimento dos corpos, iniciamos pela equação (3.31). Precisamos, portanto, conhecer o termo extra naquela equação. Como veremos mais adiante, aquele termo poderá ser escrito em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que é a função das coordenadas que informa como é a geometria do espaço-tempo, agora curvada (por isso estamos mudando a letra de $\eta_{\alpha\beta}$ para $g_{\mu\nu}$, pois a primeira entendemos como a métrica constante dos espaço-tempo planos, já a segunda não será constante e descreverá espaço-tempo curvadas).

(ii) Encontraremos uma equação que, dada a informação acerca da distribuição de matéria e energia, fornecerá as funções $g_{\mu\nu}$ ponto a ponto.

(iii) Conhecendo $g_{\mu\nu}$, conheceremos ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ e por meio da equação (3.31) conheceremos o movimento da nossa partícula (sistema de partículas).

Neste trabalho, como já explicitado, apenas obteremos as equações de Einstein. Trabalhos que a resolvem e a usam na determinação do movimento do sistema considerado, podem ser encontrados na bibliografia.

3.3.2 Relação Entre a Conexão Afim e o Tensor Métrico

O intervalo de tempo próprio pode ser expresso em relação ao sistema x^μ, basta fazermos a transformação de coordenadas de ξ^α para x^μ na equação (3.26)

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu \tag{3.33}$$

$$= -\eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu. \tag{3.34}$$

Mas, sabendo que $\mathrm{d}\tau^2$ deve ter a forma

$$\mathrm{d}\tau^2 = -g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu, \tag{3.35}$$

concluímos que

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\,\eta_{\alpha\beta}. \tag{3.36}$$

De posse da equação (3.36), encontraremos a relação entre $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$. Derivando parcialmente (3.36) com respeito a x^λ, obtemos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\,\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\,\eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}\,\eta_{\alpha\beta}. \tag{3.37}$$

Multiplicando a equação (3.32) por $\partial\xi^\beta/\partial x^\lambda$, temos

$$\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\lambda}\,\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\lambda}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\,\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} \tag{3.38}$$

$$= \delta^\beta{}_\alpha\,\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}, \tag{3.39}$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\lambda\partial x^\mu} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho}\,\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}. \tag{3.40}$$

Com (3.40) e (3.37), vemos que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho}\,\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\,\eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\rho}\,\eta_{\alpha\beta}. \tag{3.41}$$

Reconhecendo a definição do tensor métrico em (3.41), podemos escrevê-la como

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}\,g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}\,g_{\mu\rho}. \tag{3.42}$$

Intercambiando os índices em (3.42), as seguintes expressões são também verdadeiras:

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\,g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\,g_{\rho\lambda} \tag{3.43}$$

e

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\, g_{\rho\lambda} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\, g_{\rho\mu}. \tag{3.44}$$

Assim, se somarmos (3.42) a (3.43), e da soma subtrairmos (3.44), ficaremos com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\, g_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\, g_{\mu\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\, g_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\, g_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\, g_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\, g_{\rho\mu}, \tag{3.45}$$

donde vemos que, devido à simetria da conexão afim, o quarto e o quinto termos no lado direito da equação cancelam-se e, devido à simetria do tensor métrico, o segundo e o último termos também se cancelam, resultando na expressão

$$2\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\, g_{\rho\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}. \tag{3.46}$$

Nesse momento, faremos uso da expressão que define a inversa do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, a saber

$$g^{\nu\sigma}\, g_{\rho\nu} = \delta^{\sigma}{}_{\rho}. \tag{3.47}$$

Multiplicando (3.46) por $g^{\nu\sigma}$, e fazendo uso de (3.47), obtemos finalmente

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\nu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right), \tag{3.48}$$

que é a relação entre a conexão afim e o tensor métrica. Conhecidos os valores de $g_{\mu\nu}$, por meio de (3.48), obtemos os valores de $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$.

3.3.3 A Aproximação Newtoniana

Segundo Albert Einstein (EINSTEIN, 1916), “o destino mais belo que uma teoria física pode ter é quando ela abre caminho para o estabelecimento de um teoria mais ampla, na qual continua a viver como um caso particular”. Essas palavras são motivação suficiente para que esperemos que a teoria que estamos a construir contenha a teoria newtoniana como caso particular. Vejamos ao que isso nos leva.

Considere uma partícula que move-se numa região permeada por campos gravitacionais estacionários e de intensidade baixa o suficiente para que possamos considerar a sua velocidade irrelevante. Nesse caso, a equação (3.31) pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\lambda}{}_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0. \tag{3.49}$$

A partir da equação (3.48), escrevemos $\Gamma^{\lambda}{}_{00}$ como

$$\Gamma^{\lambda}{}_{00} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\sigma}}\right). \tag{3.50}$$

Se lembrarmos que

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.51}$$

veremos que as duas primeiras parcelas em (3.50) são nulas, pois o tensor métrico, no caso estacionário, não possui dependência temporal explícita, portanto

$$\Gamma^{\lambda}{}_{00} = -\frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}\, \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\sigma}}. \tag{3.52}$$

Agora, como nosso campo gravitacional é fraco, esperamos que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ seja praticamente $\eta_{\alpha\beta}$. Diremos que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.53}$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Este termo representa uma *perturbação* da métrica de Minkowski. Com (3.53) em (3.52), temos

$$\Gamma^{\lambda}{}_{00} = -\frac{1}{2}\left(\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\eta_{00} + h_{00}\right), \tag{3.54}$$

que resulta em

$$\Gamma^{\lambda}{}_{00} = -\frac{1}{2}\, \eta^{\lambda\sigma}\, \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\sigma}}, \tag{3.55}$$

pois $\eta_{\alpha\beta}$ é constante, e desprezamos termos de ordem maior do que 1 em $h_{\alpha\beta}$. Com

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{1}{2}\, \eta^{\lambda\sigma}\, \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0. \tag{3.56}$$

Apenas a parte espacial nos interessa, e assim

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{i}}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{1}{2}\, \eta^{i\sigma}\, \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0. \tag{3.57}$$

Devido ao $\eta^{i\sigma}$, isso é equivalente a

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{i}}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{i}} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2, \tag{3.58}$$

mas como

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.59}$$

temos

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{i}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{i}}, \tag{3.60}$$

de onde resulta

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\, \nabla h_{00}. \tag{3.61}$$

Comparando esta equação com (2.3), vemos que

$$h_{00} = -2\phi + c, \tag{3.62}$$

onde c é uma constante. Para calcular c, basta lembrarmos que o potencial ϕ associado a um objeto de massa m esfericamente distribuída é dado por

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \tag{3.63}$$

Com efeito, em regiões muito distantes da distribuição de matéria, esperamos que os efeitos gravitacionais sejam desprezíveis, de tal forma que h_{00} seja nulo, portanto, levando em conta isso e a equação (3.63) na equação (3.62), concluímos que c deve ser nulo, assim

$$h_{00} = -2\phi, \tag{3.64}$$

e finalmente

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \tag{3.65}$$

Como vimos, a equação (3.31) nos conta que toda a informação gravitacional está contida no tensor métrico $g_{\mu\nu}$, pois se o conhecermos, obteremos a conexão afim ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$, e com isso computaremos o termo extra que é devido à presença de campo gravitacional. Por sua vez, a equação (3.65) nos mostra que o potencial newtoniano apenas contém informação acerca da componente g_{00}. Torna-se, portanto, evidente quanta informação acerca dos campos gravitacionais a teoria Einsteiniana carrega que a de Newton deixa de lado. Desde o início esperávamos que isso fosse verdade, pois a teoria de Einstein surge de um princípio que aparenta ter validade geral, o que nos permite pensar que tudo que resultar desta teoria terá validade geral, ou pelo menos valerá onde o princípio valer. Por outro lado, a gravitação newtoniana está embasada na equação (2.2), a qual surge de forma empírica, e portanto, a informação contida nela é aquela que a natureza apresenta naquela escala, a qual pode até ser a informação total, mas nada nos garante isso.

3.3.4 Tensor de Curvatura, Tensor de Ricci e Escarlar de Curvatura

Nesta seção daremos o último passo em direção à derivação das equações de Einstein. De agora em diante, faremos uso de operações tensoriais, tais como derivação covariante e divergência tensorial. Um capítulo inteiramente destinado a tensores e operações tensoriais pode ser encontrado nas referências (WEINBERG, 1972) e (D'INVERNO, 1992).

Na derivação das equações de Einstein, veremos que se fará necessário o conhecimento de um tensor obtido a partir do tensor métrico e de suas derivadas de primeira e segunda ordem. Apenas um tensor pode ser obtido dessa forma (WEINBERG, 1972). Trata-se do *tensor de curvatura* [2], definido por

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial {\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial {\Gamma^{\lambda}}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + {\Gamma^{\eta}}_{\mu\nu}{\Gamma^{\lambda}}_{\kappa\eta} - {\Gamma^{\eta}}_{\mu\kappa}{\Gamma^{\lambda}}_{\nu\eta}. \tag{3.66}$$

A importância deste tensor reside na sua interpretação geométrica. Um teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em (D'INVERNO, 1992), assegura que uma condição necessária e suficiente para que um tensor métrico seja do tipo minkowskiano é que o tensor de curvatura se anule. Portanto, devido à interpretação geométrica que demos à

[2] Também conhecido por *tensor de Riemann* ou *tensor de Riemann-Christoffel*.

equação (3.31), o tensor de curvatura nos informará se em uma determinada região existe campo gravitacional [3].

Outros tensores com semelhante interpretação geométrica e de grande utilidade para o nosso desenvolvimento são o *tensor de Ricci*, definido por

$$R_{\mu\kappa} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa} \tag{3.67}$$

e o *escalar de curvatura*, obtido por meio do tensor de Ricci da seguinte forma

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \tag{3.68}$$

O tensor de curvatura pode ser escrito numa forma completamente covariante

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa}. \tag{3.69}$$

Essa forma satisfará as seguintes propriedades, como demonstra (WEINBERG, 1972)

(A) Simetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \tag{3.70}$$

(B) Antissimetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu} \tag{3.71}$$

(C) Ciclicidade:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \tag{3.72}$$

Pela definição (3.67) e pela propriedade (A), verifica-se a simetria do tensor de Ricci

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}. \tag{3.73}$$

A partir da propriedade (B), verifica-se que o tensor de Ricci é o único tensor de segunda ordem que pode ser formado a partir de contrações do tensor de Riemann e que o escalar de curvatura é o único escalar que pode ser formado a partir do tensor de Ricci por contrações (WEINBERG, 1972).

As derivadas covariantes do tensor de curvatura, indicadas pelo ponto e vírgula, satisfazem a chamada *identidade de Bianchi* (WEINBERG, 1972), dada por

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \tag{3.74}$$

Contraindo os índices λ com ν e levando em conta que a derivada covariante é construída de tal forma que o tensor métrico seja uma constante em relação a ela, temos

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R^{\nu}{}_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \tag{3.75}$$

[3] Lembre-se que interpretamos o efeito gravidade como uma distorção do tensor métrico minkowskiano, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, portanto, se não há distorção em $\eta_{\alpha\beta}$, não há gravidade

Contraindo agora os índices μ e κ, obtemos

$$R_{;\eta} - R^{\mu}{}_{\eta;\mu} - R^{\nu}{}_{\eta;\nu} = 0 \tag{3.76}$$

$$\left(R^{\mu}{}_{\eta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\eta}R\right)_{;\mu} = 0, \tag{3.77}$$

ou, como a derivada covariante do tensor métrico é nula

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\eta}R\right)_{;\mu} = 0. \tag{3.78}$$

3.3.5 Derivação das Equações de Einstein

Consideremos um sistema de referência que visualiza um campo gravitacional de intensidade arbitrária. Em qualquer ponto X o princípio da equivalência assegura que podemos encontrar um sistema de referência localmente inercial, para o qual valem as seguintes relações

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} \tag{3.79}$$

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right)_{x=X} = 0. \tag{3.80}$$

Se expandirmos $g_{\alpha\beta}$ numa série de Taylor em torno do ponto X, as equações acima nos asseguram que para pontos x muito próximos do ponto X, $g_{\alpha\beta}$ só diferirá de $\eta_{\alpha\beta}$ por termos quadráticos em $(x - X)$. Portanto, nesse sistema de referência vê-se o campo gravitacional muito fraco próximo de X, e por isso esperamos conseguir obter as equações que o descrevem. Quando descobrirmos essas equações, poderemos por meio de uma transformação de coordenadas conhecer o campo visto pelo sistema de referência que vê o campo com uma intensidade arbitrária (WEINBERG, 1972).

Essas equações não podem ser obtidas diretamente, por isso resta-nos a possibilidade de trabalharmos com a aproximação newtoniana, a qual constitui uma boa solução para campos fracos, estáticos e gerados por matéria não relativística, e então tentarmos alguma solução mais geral, ainda para campos fracos.

Vimos que na aproximação newtoniana

$$g_{00} \backsimeq -(1 + 2\phi),$$

onde ϕ é o potencial newtoniano determinado pela *equação de Poisson*

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho.$$

Sabe-se que a componente T_{00} do *tensor momentum-energia*[4]. para matéria não relativística é tal que

$$T_{00} \backsimeq \rho.$$

[4] O tensor momentum-energia é um quadritensor que carrega em si informação da massa, energia e momentum de um determinado sistema físico. Tal tensor respeita uma equação da continuidade dada em forma tensorial por $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$.

Das três equações acima, obtemos

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00} \,. \tag{3.81}$$

Essa equação nos leva a pensar que se o tensor momentum-energia fosse o mais geral possível (de qualquer tipo de distribuição de matéria/energia), nossa equação tomaria a forma

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}, \tag{3.82}$$

onde $G_{\alpha\beta}$ deve ser uma combinação linear do tensor métrico com suas derivadas de primeira e segunda ordem. Então, uma transformação de coordenadas assegurada pelo princípio da equivalência nos leva às equações que descrevem o campo gravitacional arbitrário, a saber

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{3.83}$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o chamado *tensor de Einstein* que é reduzido a $G_{\alpha\beta}$ no limite de campos fracos.

Assumiremos que as seguintes propriedades devem ser satisfeitas por $G_{\mu\nu}$:

(A) Por definição, $G_{\mu\nu}$ deve ser um tensor.

(B) $G_{\mu\nu}$ contém apenas termos que são lineares na segunda derivada ou quadráticos na primeira derivada do tensor métrico.

(C) Como $T_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, $G_{\mu\nu}$ também deverá ser.

(D) Como $T_{\mu\nu}$ respeita uma equação de continuidade, $G_{\mu\nu}$ também deverá respeitar:

$$G^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0. \tag{3.84}$$

(E) Para campos fracos, estacionários e que sejam produzidos por matéria não relativística, esperamos que a componente G_{00} do tensor de Einstein seja tal que

$$G_{00} \backsimeq \nabla^2 g_{00}. \tag{3.85}$$

Fazendo uso dessas propriedades, determinaremos $G_{\mu\nu}$.

As propriedades (A) e (B) requerem que

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2\, g_{\mu\nu} R, \tag{3.86}$$

pois como vimos, o tensor de curvatura é o único que pode ser obtido a partir do tensor métrica e de suas derivadas de primeira e segunda ordem. C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Note que desta forma $G_{\mu\nu}$ satisfaz (C). Escrevendo a equação anterior na forma

$$G^{\mu}{}_{\nu} = C_1 R^{\mu}{}_{\nu} + C_2\, \delta^{\mu}{}_{\nu} R, \tag{3.87}$$

e derivando covariantemente em x^μ, obtemos

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = C_1 R^\mu{}_{\nu;\mu} + C_2\, \delta^\mu{}_\nu R_{;\mu}. \tag{3.88}$$

Vimos na seção anterior que

$$R^\mu{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R_{;\mu}. \tag{3.89}$$

Com isso em (3.88), temos

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{;\nu}. \tag{3.90}$$

A propriedade (D) impõe que ou

$$\left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) = 0, \tag{3.91}$$

ou

$$R_{;\nu} = 0, \tag{3.92}$$

e escolhemos o primeiro caso, pois o segunda nos restringiria a um caso particular de tensor energia-momento (WEINBERG, 1972). Portanto

$$C_2 = -\frac{C_1}{2} \tag{3.93}$$

portanto (3.90) pode ser posta na forma

$$G_{\mu\nu} = C\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right). \tag{3.94}$$

Por fim, faremos uso da propriedade (E) para obter o valor da constante C. Para um sistema não relativístico, $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$, por isso devemos considerar $|G_{ij}| \ll |G_{00}|$, então de (3.94), concluímos que

$$\begin{aligned} G_{ij} &= C\left(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R\right) \\ &\Rightarrow C\left(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R\right) \simeq 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2}g_{ij}R. \tag{3.95}$$

Usando agora o fato de que na aproximação newtoniana o campo deve ser fraco, ou seja, $g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta}$, então

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \\ &\simeq \eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \\ &\simeq R_{kk} - R_{00} \\ &\simeq \frac{1}{2}\eta_{kk}R - R_{00} \\ &\simeq \frac{3}{2}R - R_{00}, \end{aligned}$$

logo

$$R \backsimeq 2R_{00}. \tag{3.96}$$

De (3.94), temos

$$G_{00} = C\left(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R\right) \tag{3.97}$$

$$\backsimeq 2CR_{00}. \tag{3.98}$$

Para obtermos o valor de R_{00} na aproximação de campo fraco, devemos fazer uso de uma das formas na qual podemos escrever o tensor de curvatura (WEINBERG, 1972)

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right]. \tag{3.99}$$

Até aqui temos usado as duas condições do limite newtoniano, a saber o fato de que os campos devem ser fracos e que apenas a componente T_{00} não é desprezível. Agora finalizamos fazendo uso da terceira condição que impõe que os campos sejam estáticos, e com isso vemos que

$$R_{0000} \backsimeq 0 \tag{3.100}$$

$$R_{i0j0} \backsimeq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{3.101}$$

Da definição do tensor de Ricci, vê-se que

$$R_{00} \backsimeq R_{k0k0} - R_{0000}, \tag{3.102}$$

logo

$$R_{00} \backsimeq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{3.103}$$

ou

$$R_{00} \backsimeq \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}. \tag{3.104}$$

Com (3.104) em (3.98), temos

$$G_{00} \backsimeq C_1 \nabla^2 g_{00}, \tag{3.105}$$

por isso concluímos que $C = 1$.

Finalmente, obtemos as *equações de campo de Einstein*[5]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{3.106}$$

(3.106) constituem-se em dez[6] equações diferenciais parciais não-lineares em $g_{\mu\nu}$. A leitura dessa equação pode ser feita como segue: Dada um determinado tensor de momentum-energia, representativo de um determinado sistema físico, (3.106) informa-nos os valores assumidos por $g_{\mu\nu}$, ou seja, como o espaço-tempo tem sua estrutura geométrica modificada pela presença daquele sistema.

[5] Não discutiremos a inclusão da *constante cosmológica*. Considerações acerca desta podem ser encontradas em qualquer livro-texto de Relatividade Geral.

[6] você poderia pensar que trata-se de vinte equações, mas devemos lembrar que a simetria dos tensores envolvidos reduz este conjunto a dez equações.

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi construir uma teoria que versa sobre gravitação, partindo de princípios fundamentais. Na introdução, estabelecemos o princípio da relatividade na forma galileana e as leis de newton do movimento. Em seguida, Após um breve resumo dos modelos de gravitação, vimos de que forma Newton estabeleceu o seu modelo. Finalmente, partindo da generalização do princípio da relatividade, como estabelecido pela teoria da relatividade especial, e fazendo uso do princípio da equivalência, obtivemos as equações de Einstein da Gravitação.

A teoria de Einstein é, sem dúvida, uma das maiores conquistas da mente humana (D'INVERNO, 1992). Desde o primeiro experimento que a comprovou, esta teoria tem mostrado perfeita concordância com a natureza. Dela surgem naturalmente três grandes linhas de pesquisa atual, a saber, buracos negros, radiação gravitacional e cosmologia.

As perspectivas que surgem deste trabalho giram em torno das três áreas acima citadas. Temos grandíssimo interesse em entender como a teoria de Einstein prevê a existência de buracos negros e ondas gravitacionais, e por fim, ver como esta teoria explica o nosso universo de uma forma geral.

Referências

D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. ISBN 9780198596868. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 36.

EINSTEIN, A. *Teoria da Relatividade Especial e Geral*. [S.l.]: Contraponto, 1916. ISBN 9788585910273. Citado na página 28.

TAYLOR, J. R. *Mecânica Clássica*. [S.l.]: BOOKMAN COMPANHIA ED, 2013. ISBN 9788582600870. Citado na página 11.

WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1984. ISBN 9780226870328. Citado na página 9.

WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. [S.l.]: Wiley, 1972. ISBN 9780471925675. Citado 7 vezes nas páginas 9, 21, 30, 31, 32, 34 e 35.