



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

*Informação de Fisher e Entropia de Shannon de osciladores
harmônicos com massa dependente da posição*

João Pedro Gomes do Nascimento

Fortaleza-CE, Brazil
Janeiro de 2016

João Pedro Gomes do Nascimento

***Informação de Fisher e Entropia de Shannon de osciladores
harmônicos com massa dependente da posição***

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para grau de Bacharel em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza-CE, Brazil

Janeiro de 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

-
- N196i Nascimento, João Pedro Gomes do
Informação de Fisher e Entropia de Shannon de osciladores harmônicos com massa dependente
da posição / João Pedro Gomes do Nascimento. – 2016.
41 f. : il.
- Monografia (Graduação em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Departamento de Física, Curso de Bacharelado em Física, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.
Inclui bibliografia.
1. Osciladores harmônicos. 2. Transformação canônica de ponto. 3. Shannon, Entropia de.
4. Fisher, Informação de. 5. Heisenberg, Álgebra de. 6. Sistema com massa. 7. Método de
fatoração. I. Silva, Ilde Guedes da.

CDD 530.12

João Pedro Gomes do Nascimento

*Informação de Fisher e Entropia de Shannon de osciladores
harmônicos com massa dependente da posição*

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para grau de Bacharel em Física.

Aprovada em: 08 /01 /2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilda Guedes da Silva

Departamento de Física – UFC

Orientador

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho

Departamento de Física – UFC

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves

Departamento de Física - UFC

Aos meus pais, à minha irmã.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer aos meus pais Gilson Oliveira do Nascimento e Maria Zildene Gomes do Nascimento, e à minha irmã, Daiana Maria Gomes do Nascimento, por todo o amor, apoio e dedicação recebidos ao longo de minha jornada. A eles devo que tenho, tudo que sou. Agradeço aos meus familiares, em especial ao meu avô Nilo Bezerra do Nascimento, à minha tia Maria do Socorro Gomes de Matos e ao meu primo Francisco Jose Gomes de Matos por estarem presentes em todos os momentos. Agradeço à minha tia Ana Lucia Oliveira do Nascimento, que infelizmente nos deixou, mas que com certeza está feliz por mim onde quer que ela esteja.

Agradeço imensamente ao professor Ilde Guedes da Silva. Agradeço por toda a sua orientação desde o 3º semestre, por ter tornado possível a realização desta monografia e por ter me introduzido às atividades no Seara da Ciência, fato que muito contribui para minha formação não só como aluno, mas também como pessoa. Agradeço a todos os funcionários do Seara da Ciência, em especial aos professores Pedro J. C. Magalhães, José Evangelista Moreira, Aline Neris de Carvalho Maciel e César R. Fernandes, que estão sempre dispostos a ajudar no que for necessário. Agradeço aos amigos de longa data, dentre eles Olga Queiroz, Jorge Lucas, Ytalo Eloi, Tiago Campos, Claudio Caetano, Filipe de Castro, Wallady Barroso, George Ulysses, Ligia Matos, Maria Rocha, Senhor Hidel, Dona Beth e a todos os outros não citados aqui. Agradeço a todos os funcionários do Departamento de Física da UFC e ao CNPQ pelo apoio financeiro. Agradeço a todos do curso de Física da UFC, dentre eles Pablo Ramon, Sofia Magalhães, Emanuel Fontenelles, Michel Rodrigues, Raul Peixoto, Ken Aikawa, Wendel Oliveira e Nathanaell Sousa. Agradeço também à Vanderley Aguiar de Lima Júnior pelo apoio. Agradeço à professora Hilma por não ter desistido de mim no início de meus estudos. E acima de tudo, a Deus.

“Do irreal, conduze-me ao real! Das trevas, conduze-me à luz! Da morte, conduze-me à imortalidade!”

Brihad-aranyaka Upanishad

Resumo

Neste trabalho estudamos dos pontos de vista clássico e quântico dois osciladores harmônicos com massa dependente da posição (MDP), a saber: (i) $m^{(1)}(x) = m_0(x^2 + \lambda^2)$ e (ii) $m^{(2)}(x) = m_0[\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2$.

A correspondência entre as soluções clássicas do oscilador MDP e o oscilador de massa constante (MC) é obtida a partir do método da fatoração. A dinâmica dos sistemas é obtida a partir de suas trajetórias no espaço de fase.

Para obter a solução da equação de Schrödinger para os osciladores MDP (i) e (ii) nós utilizamos o método algébrico de operadores escada e uma transformação canônica de ponto (TCP). Destas soluções, nós calculamos a informação de Fisher e a entropia de Shannon para o estado fundamental.

Palavras-chave: Osciladores harmônicos com massa dependente da posição. Transformação canônica de ponto. Entropia de Shannon. Informação de Fisher.

Abstract

In this work we study from the classical and quantum point of view two position-dependent mass (PDM) oscillators, namely: (i) $m^{(1)}(x) = m_0(x^2 + \lambda^2)$ and (ii) $m^{(2)}(x) = m_0[\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2$.

The correspondence between the classical solutions of the PDM oscillator and the constant mass (CM) oscillator is obtained by means of the factorization method. The dynamics of systems is determined from their phase space trajectories.

To obtain the solution of the Schrödinger equation for PDM oscillators (i) and (ii) we employ the algebraic method of ladder operators and a point canonical transformation. From these solutions we calculated the Fisher information and Shannon entropy for the ground state.

Keywords: Position-dependent mass harmonic oscillators. Point canonical transformation. Shannon entropy. Fisher information.

Sumário

1	Introdução.....	11
2	Osciladores harmônicos clássicos com massa dependente da posição.....	16
2.1	O método de fatoração.....	16
2.2	Sistema com massa $m^{(1)}(x) = m_0(x^2 + \lambda^2)$.....	19
2.3	Sistema com massa $m^{(2)}(x) = m_0[\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2$.....	21
3	Osciladores harmônicos quânticos com massa dependente da posição: Funções de onda, Entropia de Shannon e Informação de Fisher.....	24
3.1	Álgebra de Heisenberg e o método TCP.....	24
3.2	Informação de Fisher.....	29
3.3	Entropia de Shannon.....	30
3.4	Sistema com massa $m^{(1)}(x) = m_0(x^2 + \lambda^2)$.....	30
3.5	Sistema com massa $m^{(2)}(x) = m_0[\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2$.....	35
4	Conclusões.....	38
	Referências.....	40

1 Introdução

Nos livros básicos de Física, o estudo do oscilador harmônico é feito considerando a massa (m) da partícula independente tanto do tempo quanto da posição. Entretanto, existem diversos sistemas que para serem adequadamente descritos, a massa deve depender do tempo ou da posição. Sistemas onde a massa depende do tempo, ou de forma mais geral, sistemas descritos por hamiltonianos dependentes do tempo aparecem em diversas áreas da Física, como por exemplo: Ótica Quântica, Física Molecular, Química Quântica, Teoria Quântica de Campos, e Física de Plasmas [1-5]. Sistemas onde a massa depende da posição são utilizados no estudo das propriedades eletrônicas de semicondutores [6], cristais homogêneos [7], pontos [8] e líquidos quânticos [9].

Do ponto de vista da mecânica quântica, ao estudarmos sistemas onde a massa depende da posição devemos ter cuidado ao escrever o operador energia cinética (T), haja visto que, agora, a massa e o operador momentum não comutam. De acordo com von Roos [10], para que o hamiltoniano que descreve o sistema seja hermitiano, o operador energia cinética deve ser escrito como

$$T = \frac{1}{4} (m^\alpha p m^\beta p m^\gamma + m^\gamma p m^\beta p m^\alpha), \quad (1.1)$$

onde $m = m(x)$, $p = -i\hbar d/dx$ e α, β e γ satisfazem a relação de vínculo

$$\alpha + \beta + \gamma = -1. \quad (1.2)$$

Este vínculo é necessário para que possamos reobter a expressão usual do operador cinético no caso limite de uma massa constante, garantindo que tal expressão tenha uma dimensão correta (dimensão de energia).

De maneira geral, o operador hamiltoniano para um sistema com massa dependente da posição é dado por

$$H = T(x) + V(x), \quad (1.3)$$

onde $T(x)$ é o operador energia cinética dado pela Eq. (1.1) e $V(x)$ é o termo de potencial. A equação de Schrödinger independente do tempo (ES) para estados estacionários é dada por

$$H\psi(x) = E\psi(x). \quad (1.4)$$

Considerando por simplicidade $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta = -1$, obtemos

$$T = \frac{1}{2}(pm^{-1}p). \quad (1.5)$$

Substituindo as Eqs. (1.5) e (1.3) na Eq.(1.4), e considerando o sistema de unidades no qual $\hbar^2 = 2$, obtemos a seguinte ES para o operador energia cinética generalizado

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{m'}{m} \frac{d\psi}{dx} + m(E - V(x))\psi = 0, \quad (1.6)$$

onde $m' = dm/dx$. Agora, considerando a transformação

$$\psi(x) = \sqrt{m(x)}\phi(x), \quad (1.7)$$

encontramos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left[\frac{m''}{2m} - \frac{3}{4} \frac{m'^2}{m^2} + m(E - V(x)) \right] \phi = 0, \quad (1.8)$$

que é a ES para uma partícula de massa unitária e potencial efetivo

$$V_{ef}(x) = \left[V(x) - \frac{m''}{2m} + \frac{3}{4} \frac{m'^2}{m^2} \right], \quad (1.9)$$

ou seja, o problema de uma partícula com massa dependente da posição em um potencial $V(x)$ pode ser transformado através da Eq. (1.7), no problema de uma partícula com massa unitária em um potencial efetivo, V_{ef} .

E do ponto de vista da mecânica clássica, que mudanças devem ocorrer ao escrevermos o hamiltoniano do sistema? Considere o caso do movimento de uma partícula

com massa unitária que desliza sob a ação da gravidade e sem atrito em um fio parabólico [11]. Escolhendo x como a coordenada generalizada e da equação da parábola $y = \frac{x^2}{2}$, temos que a lagrangiana é dada por $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - gy = \frac{1}{2}(1 + x^2)\dot{x}^2 - \frac{g}{2}x^2$. Como a energia cinética está na forma quadrática na velocidade (\dot{x}), o hamiltoniano ($H = T + V$), é dado por

$$H = \frac{p^2}{2(1 + x^2)} + \frac{g}{2}x^2. \quad (1.10)$$

Observe que na expressão da energia cinética aparece um termo de “massa”, $m(x) = (1 + x^2)$, e, nesse caso, o momento canônico é dado por $p = (1 + x^2)\dot{x}$. Devido ao vínculo $y = \frac{x^2}{2}$, o potencial torna-se parabólico. A Eq. (1.10) é interpretada como a hamiltoniana de uma partícula com massa dependente da posição movendo-se em um potencial harmônico. A Eq. (1.10) indica que não há problema em escrever a expressão para a energia cinética como $T = \frac{p^2}{2m(x)}$. Mas, dada uma distribuição arbitrária de massa ($m(x)$) como obter uma expressão para o potencial $V(x)$?

A resposta foi dada por Cruz y Cruz, Negro e Nieto [12] que utilizaram o método de fatoração do hamiltoniano do sistema em consideração para encontrar a seguinte relação entre o potencial e a massa

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(\int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0 \right)^2, \quad (1.11)$$

onde X_0 é uma constante de integração.

Estes autores estudaram, tanto classicamente quanto quanticamente, três sistemas com massa dependente da posição, a saber [12]: (i) $m_1(x) = \frac{m_0}{1+(\lambda x)^2}$, (ii) $m_2(x) = \frac{m_0}{(1+\lambda x)^2}$, e (iii) $m_3(x) = \left(\frac{m_0}{(1-(\lambda x)^2)^2}\right)$. Pouco tempo depois, estes mesmos autores [13] apresentaram um estudo similar para os seguintes osciladores: (i) $m_1(x) = m_0 \left(\frac{1+\lambda+(ax)^2}{1+(ax)^2}\right)$, (ii) $m_2(x) = m_0 \tanh^2(\lambda x)$, e (iii) $m_3(x) = \left(\frac{m_0}{1-(\lambda x)^2}\right)$.

O Princípio da Incerteza de Heisenberg [16] impõe à mecânica quântica um caráter probabilístico. Como já mencionamos, na Mecânica Quântica a posição e momento não

comutam. Quantitativamente, esse princípio nos diz que $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, onde Δx e Δp são os desvios padrão da posição e do momento, respectivamente. Qualitativamente, o Princípio de Heisenberg estabelece um limite inferior ao produto das incertezas da posição e do momento, revelando um aspecto da natureza, em nível atômico, totalmente diverso daquele a que estamos habituados, ou seja, quanto mais sabemos acerca da posição da partícula, menos podemos dizer a respeito de seu momento, e vice-versa.

Em seus primórdios, a teoria da informação foi utilizada para resolver problemas de Engenharia de Telecomunicação. Posteriormente, seus conceitos foram difundidos em outras áreas como Física, Biologia [17-19], Química [20-22] e Economia [23-25]. Especificamente em mecânica quântica, tem sido utilizada na busca por novas relações de incerteza em termos das entropias de Shannon e informação de Fisher.

Mas, o que é “informação”? Em 1948, Claude E. Shannon estabeleceu esse conceito [26] e definiu-o como tudo aquilo que reduz a incerteza. Essa incerteza é definida para cada conjunto de elementos que se tenha, constituindo uma medida da variabilidade nesse conjunto, por exemplo, a variabilidade da idade dos alunos de uma sala. A entropia de Shannon para um conjunto de elementos discretos $X = \{x_i\}$, onde a cada elemento está associada uma densidade de probabilidade $\{\mathcal{P}(x_i)\}$, é dada por

$$S_X = - \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(x_i) \ln \mathcal{P}(x_i). \quad (1.12)$$

Observe que se temos certeza do resultado de um dado experimento, ou seja, se o conjunto X for constituído de um único elemento x_1 , então $\mathcal{P}(x_1) = 1$, $\mathcal{P}(x_i) = 0$ para $i \neq 1$ e a entropia de Shannon será nula. Dessa maneira, a entropia de Shannon está relacionada com o grau de incerteza e quantifica, portanto, a informação. Quanto menor for S_X , menor é o grau de incerteza e maior será a informação que se tem.

Yáñez, Van Assche e Dehesa [27] calcularam, em 1994, as entropias S_x e S_p para o estado fundamental e alguns estados excitados do oscilador harmônico isotrópico. Majerník e Opatrný obtiveram, em 1996 [28], S_x e S_p do oscilador harmônico e sua correspondente relação de incerteza entrópica. Trabalhos envolvendo sistemas com massa dependente da posição e teoria da informação podem ser encontrados nas Refs. [29, 30].

Outra ferramenta poderosa utilizada no mesmo âmbito que a entropia de Shannon é a informação de Fisher. Esta foi estabelecida em 1925 por R. A. Fisher [31] como uma maneira

de medir a quantidade de informação que um observável X carrega em relação a um dado parâmetro θ para o qual a densidade de probabilidade de X varia, ou seja, para o qual a densidade de probabilidade seja uma função explícita de X e θ , $\mathcal{P}(X, \theta)$.

A informação de Fisher é uma candidata à teoria unificadora da Física. Partindo do chamado princípio da mínima informação de Fisher, B. Roy Frieden interpretou a segunda lei da Termodinâmica, derivou a equação de Schrödinger [32, 33], a lei de Maxwell-Boltzmann [32] e as equações de Maxwell para a eletrodinâmica [34], entre outras.

Em 2010, P. Sánchez-Moreno et al. [35] derivaram a relação $F_x F_p \geq 4D^2$, onde F_x e F_p são as informações de Fisher para a posição e momento, respectivamente, como uma relação de incerteza para informação de Fisher válida para sistemas num espaço de configuração D-dimensional. Contudo, trabalhos posteriores [36] mostraram que esta desigualdade não é uma propriedade geral dos sistemas quânticos.

Em 2015, Aguiar e Guedes [36, 37] obtiveram expressões gerais para a entropia de Shannon e a informação de Fisher, bem como suas relações com outras quantidades, de sistemas quânticos cuja massa e frequência dependem do tempo.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar dos pontos de vista clássico e quântico, osciladores harmônicos com massa dependente da posição. Em particular, consideramos as seguintes distribuições de massa $m^{(1)}(x) = m_0(x^2 + \lambda^2)$ e $m^{(2)}(x) = m_0[\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2$. Esta dependência é importante não apenas do ponto de vista teórico, mas também do ponto de vista prático, pois pode ser utilizada na modelagem de heteroestruturas abruptas ou suaves [14]. Este trabalho encontra-se assim dividido. No Capítulo 2, mostramos o método de fatoração apresentado nas Refs.[12, 13], aplicando-o aos sistemas $m^{(1)}(x)$ e $m^{(2)}(x)$ e estudamos suas trajetórias no espaço de fase $(x(t), p(t))$. No Capítulo 3, utilizamos o método algébrico de operadores e a transformação canônica de ponto (TCP) para calcularmos as funções de onda exatas do sistema, a fim de obtermos numericamente a entropia de Shannon e a informação de Fisher. No Capítulo 4, apresentamos alguns comentários finais.

2 Osciladores harmônicos clássicos com massa dependente da posição

2.1 O método de fatoração

Vamos encontrar a correspondência entre os hamiltonianos clássicos do oscilador harmônico com massa constante (OMC) e com massa dependente da posição (OMDP). Inicialmente, desenvolveremos o método de fatoração para o OMC. Considere o seguinte hamiltoniano clássico para o OMC

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{X^2}{2}, \quad (2.1)$$

onde X e P ($= \dot{X}$) são, respectivamente, as variáveis canônicas de posição e momentum. Observe que ao escrevermos a Eq. (2.1), utilizamos um sistema de unidades no qual $m = \omega = 1$. Através das relações

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X \mp iP), \quad (2.2)$$

H pode ser fatorado nas formas

$$H = a^+a^- = a^-a^+, \quad (2.3)$$

onde $(a^-)^* = a^+$. As novas variáveis canônicas a^- e a^+ obedecem à álgebra de Heisenberg com os parênteses de Poisson [15], a saber:

$$i\{a^-, a^+\} = 1, \quad (2.4)$$

$$i\{H, a^\pm\} = \pm a^\pm. \quad (2.5)$$

Podemos obter as constantes de movimento definindo as variáveis

$$Q^\pm = a^\pm e^{\mp it} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X \mp iP)e^{\mp it}, \quad (2.6)$$

com isto $H = Q^+Q^-$. No presente caso, a energia cinética é uma função puramente quadrática da velocidade e a função energia potencial independe da velocidade. Sendo assim,

a hamiltoniana H é igual à energia mecânica total do sistema, $H = E$, que é conservada. Escrevendo $Q^\pm = \sqrt{E}e^{\pm i\phi}$, onde ϕ é uma fase a ser determinada pelas condições iniciais, e utilizando as Eqs. (2.6) e (2.2), obtemos as expressões usuais para X e P , a saber:

$$X(t) = \sqrt{2E} \cos(t + \phi), \quad (2.7)$$

e

$$P(t) = -\sqrt{2E} \sin(t + \phi). \quad (2.8)$$

Agora considere que de forma geral o hamiltoniano clássico para um OMDP seja dado por

$$H = \frac{p^2}{2m(x)} + V(x), \quad (2.9)$$

onde $m(x)$ é uma função arbitrária da posição e $V(x)$ é o potencial a ser determinado a partir da forma de $m(x)$. O método utilizado por Cruz y Cruz, Negro e Nieto [12, 13] supõe que o hamiltoniano dado pela Eq. (2.9) também possa ser fatorado da mesma forma que foi feito para o OMC. Assim, considerando que

$$A^\pm(x, p) = \mp i \frac{p}{\sqrt{2m(x)}} + W(x), \quad (2.10)$$

obtemos

$$H = A^+ A^- = A^- A^+ = \frac{p^2}{2m(x)} + W^2(x), \quad (2.11)$$

ou seja, $V(x) = W^2(x)$. O próximo passo é considerar que as variáveis A^+ e A^- também obedecem à álgebra de Heisenberg, isto é

$$i\{A^-, A^+\} = \frac{2W'(x)}{\sqrt{2m(x)}} = 1, \quad (2.12)$$

$$i\{H, A^\pm\} = \pm \frac{2W'(x)}{\sqrt{2m(x)}} A^\pm, \quad (2.13)$$

onde $W' = dW/dx$. Da Eq.(2.12) encontramos a seguinte relação

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0 \right), \quad (2.14)$$

onde X_0 é uma constante a ser determinada. Usualmente considera-se X_0 de forma que $V(0) = 0$. Como $V(x) = W^2(x)$, temos

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(\int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0 \right)^2, \quad (2.15)$$

e o hamiltoniano clássico para o OMDP passa a ser escrito como

$$H = \frac{p^2}{2m(x)} + \frac{1}{2} \left(\int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0 \right)^2. \quad (2.16)$$

Ao compararmos as Eqs. (2.9) e (2.16), vemos que

$$X(x) = \int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0, \quad (2.17)$$

e

$$P(x, p) = \frac{dx}{dt} = \frac{p}{\sqrt{m(x)}}. \quad (2.18)$$

Das Eqs. (2.17) e (2.18) podemos obter as trajetórias no espaço de fase $x(t)$ e $p(t)$ a partir das relações:

$$x(t) = X^{-1} [\sqrt{2E} \cos(t + \phi)], \quad (2.19)$$

$$p(t) = -\sqrt{2m(x(t))E} \sin(t + \phi), \quad (2.20)$$

onde X^{-1} é a função inversa de X obtida a partir da Eq. (2.19).

2.2 Sistema com massa $m^{(1)}(x) = m_0(x^2 + \lambda^2)$

Substituindo a expressão para $m^{(1)}(x)$ na Eq. (2.15) e considerando $m_0 = 1$ e $X_0 = \frac{-\lambda^2 \ln(2\lambda)}{2}$, obtemos a seguinte expressão para $H^{(1)}$ (ou $E^{(1)}$)

$$H^{(1)} = \frac{p^2}{2(x^2 + \lambda^2)} + \frac{1}{8} \left\{ x\sqrt{x^2 + \lambda^2} + \lambda^2 \ln \left[2 \left(x + \sqrt{x^2 + \lambda^2} \right) \right] - \lambda^2 \ln(2\lambda) \right\}^2. \quad (2.21)$$

Poderíamos obter as trajetórias no espaço de fase utilizando as equações de Hamilton, mas não é difícil perceber que as equações para \dot{p} e \dot{x} obtidas a partir da Eq. (2.21) são equações não lineares cujas soluções são não-triviais. Por exemplo, para a partícula com massa unitária que desliza sob a ação da gravidade e sem atrito em um fio parabólico (veja Eq. (1.10)) as equações de Hamilton são expressas por

$$\dot{x} = -\frac{p}{(1+x^2)}, \quad (2.22)$$

$$\dot{p} = -x \left[\frac{p^2}{(1+x^2)^2} - g \right]. \quad (2.23)$$

De outra forma, poderíamos tentar utilizar as Eqs. (2.19) e (2.20). Entretanto obter X^{-1} neste caso é também complicado em face da expressão de $m(x)$. Assim, vamos analisar as trajetórias no espaço de fase utilizando diretamente a Eq. (2.21).

Na Fig. 1 mostramos o gráfico de $V^{(1)}(x)$ para com $\lambda = 0$, $\lambda = 0,7$ e $\lambda = 1,0$ como indicado. Observamos que ao aumentarmos λ , $V^{(1)}(x)$ torna-se mais fechado.

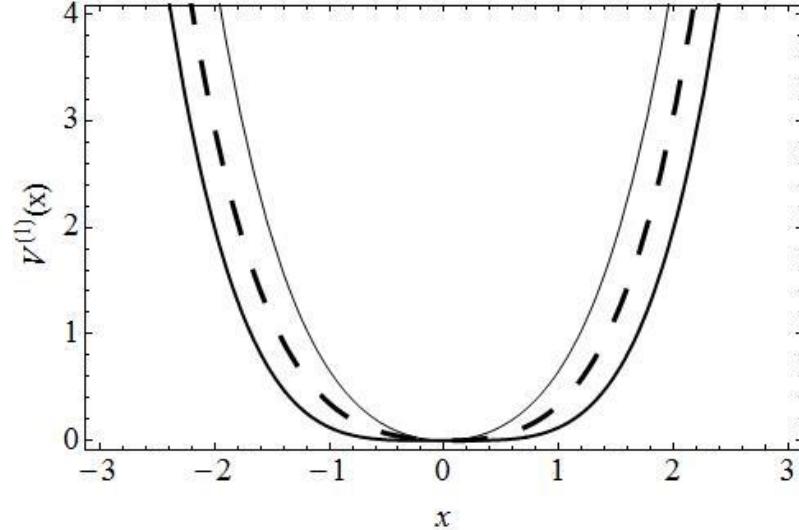


Fig. 1. Gráficos de $V^{(1)}(x)$ para $\lambda = 0$ (linha grossa), $\lambda = 0,7$ (linha pontilhada) e $\lambda = 1$ (linha fina).

Nas Figs. 2(a) - (d) mostramos o diagrama de fase para o OMC ($m(x) = 1$) e para o OMDP para alguns valores de E . Devido ao sistema de unidades utilizado ($m = \omega = 1$) as trajetórias de fase para o OMC são circunferências concêntricas, ao invés de elipses. Já para o OMDP com $\lambda = 0$, observamos que as trajetórias de fase são deformadas próximo à origem e tendem à zero, evidenciando o fato que neste limite a massa tende à zero, e, por conseguinte, o momentum canônico, $p = m(x)\dot{x}$.

O comportamento mostrado na Fig.2(b) é muito semelhante ao exibido pelo OMDP com $m_2(x) = \tanh^2(\lambda x)$ estudado por Cruz y Cruz, Negro e Nieto [12], onde as trajetórias no espaço de fase são obtidas da equação

$$H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\tan^2(\lambda x)} + \frac{1}{2\lambda^2} \ln^2(\cosh(\lambda x)). \quad (2.24)$$

As trajetórias no espaço da fase para $\lambda = 0,7$ e $\lambda = 1,0$ são mostradas nas Fig. 2(c) e 2(d), respectivamente. Nestes casos a massa não vai à zero para $x = 0$. As trajetórias mostradas na Fig. 2(c) ainda são deformadas, mas não tendem à zero quando $x \rightarrow 0$. Na Fig.2(d) as trajetórias não são tão deformadas. O momentum da partícula em todos os casos só se anula nos pontos de retorno.

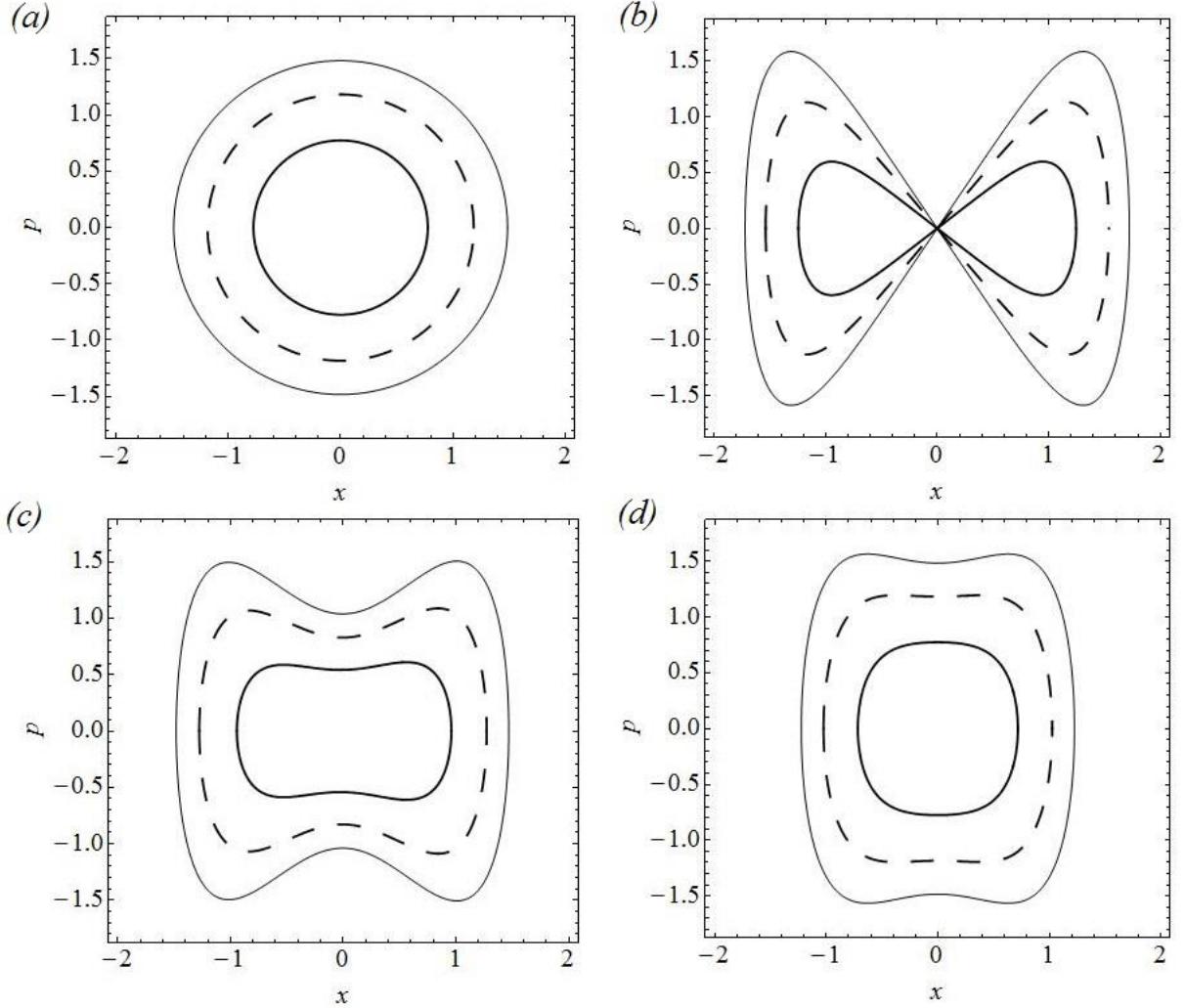


Fig. 2. Trajetórias no espaço de fase para $E = 0,3$ (linha grossa), $E = 0,7$ (linha pontilhada) e $E = 1,1$ (linha fina). (a) OMC. (b) OMDP com $\lambda = 0$. (c) OMDP com $\lambda = 0,7$. (d) OMDP com $\lambda = 1,0$.

2.3 Sistema com massa $m^{(2)}(x) = m_0[\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2$

Tomando $m_0 = 1$ e $X_0 = 0$, obtemos a seguinte expressão para a hamiltoniana desse sistema

$$\begin{aligned}
 H^{(2)} = & \frac{p^2}{2[\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2} + \frac{2}{\lambda^2} \cosh^2(\lambda x) [\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2 \\
 & \times \left[\frac{\lambda^3 x \cosh(\lambda x) + \operatorname{senh}(\lambda x)}{2 + \lambda^2 + \lambda^2 \cosh(2\lambda x)} \right]^2.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Na Fig. 3 mostramos o gráfico de $V^{(2)}(x)$ para o OMDP com $\lambda = 0,1$, $\lambda = 0,7$ e $\lambda = 1,0$ como indicado. Novamente, observamos que $V^{(2)}(x)$ torna-se mais fechada à medida que aumentamos λ .

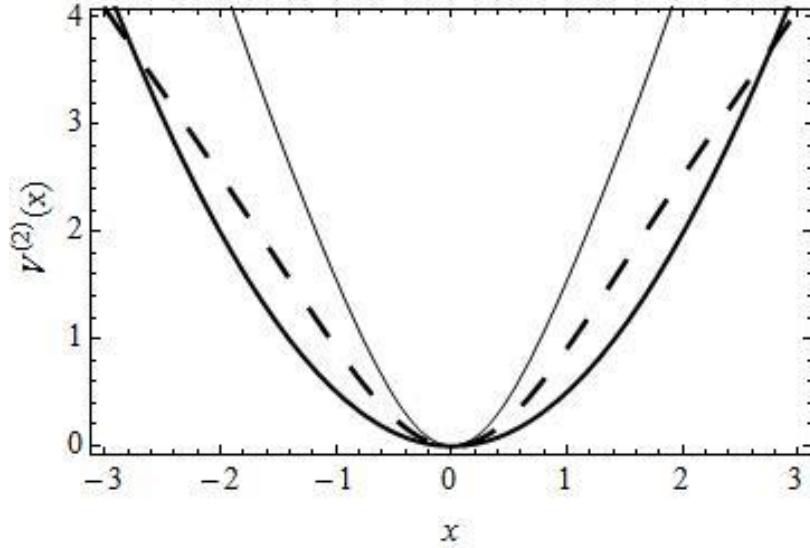


Fig. 3. Gráficos de $V^{(2)}(x)$ para $\lambda = 0,1$ (linha grossa), $\lambda = 0,7$ (linha pontilhada) e $\lambda = 1$ (linha fina).

Nas Figs. 4(a) - (c) mostramos o diagrama de fase para o OMDP, para alguns valores de E , obtidos diretamente da Eq. (2.25). Observe que no limite de $\lambda \rightarrow 0$ este sistema se reduz ao OMC e as trajetórias de fase serão, então, circunferências concêntricas. Independente da posição da partícula e de λ , a massa $m^{(2)}(x)$ sempre será diferente de zero, logo, o momentum da partícula será nulo somente nos pontos de retorno. Veja que o tipo de deformações verificadas no sistema de $m^{(1)}(x)$ não estão presentes neste caso.

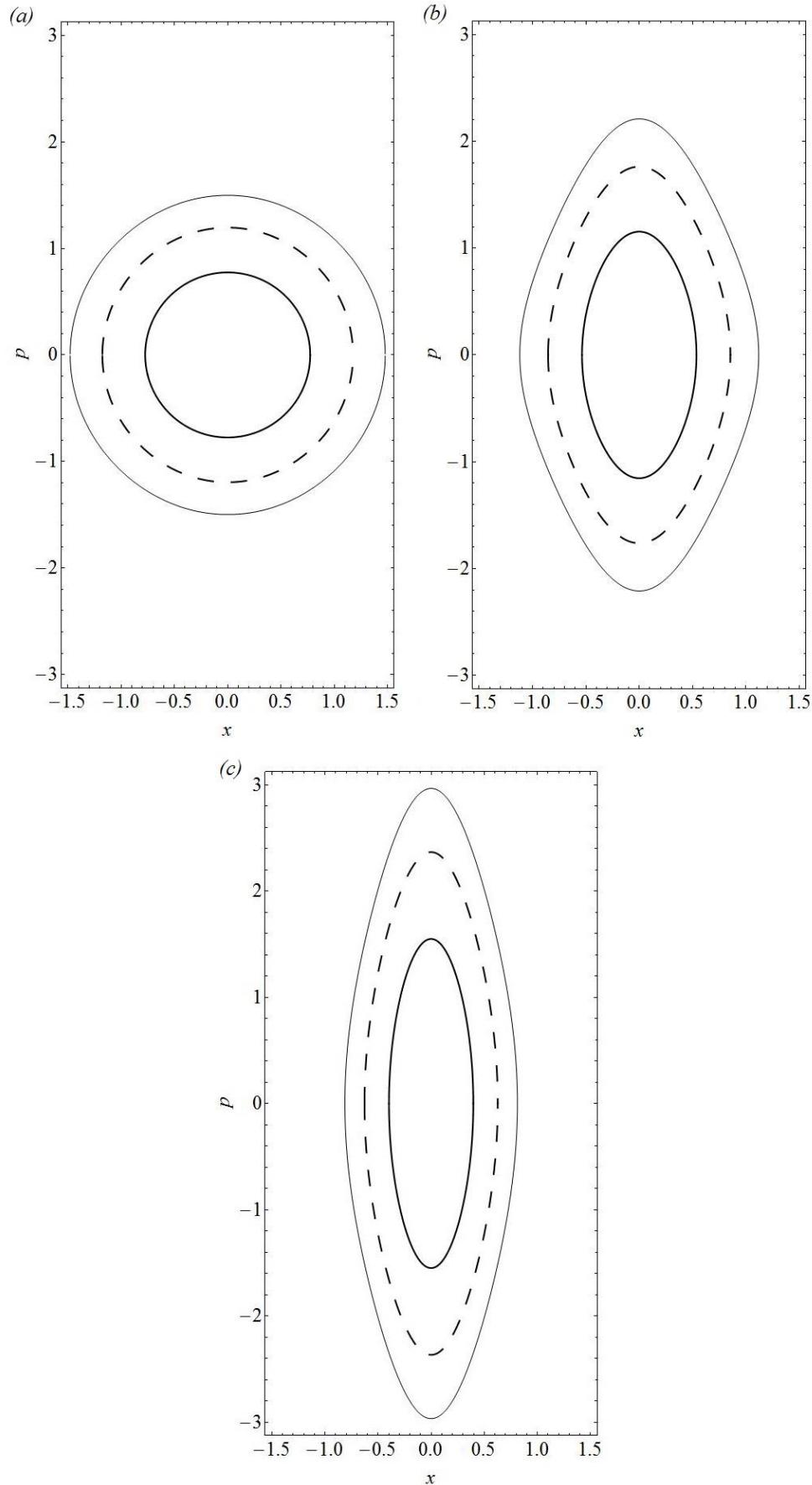


Fig. 4. Trajetórias no espaço de fase para $E = 0,3$ (linha grossa), $E = 0,7$ (linha pontilhada) e $E = 1,1$ (linha fina). (a) OMDP com $\lambda = 0,1$. (b) OMDP com $\lambda = 0,7$. (c) OMDP com $\lambda = 1,0$.

3 Osciladores harmônicos quânticos com massa dependente da posição: Funções de onda, Entropia de Shannon e Informação de Fisher

3.1 Álgebra de Heisenberg e o método TCP

Primeiramente analisemos o problema do OMC quântico. O espectro e autoestados desta hamiltoniana podem ser obtidos de duas maneiras [38], a saber:

- (a) Método algébrico, que consiste em fatorar o hamiltoniano em termos de dois operadores, b^- e b^+ , definidos como

$$b^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \frac{d}{dy} + y \right). \quad (3.1)$$

Neste caso o hamiltoniano é dado por

$$h = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} y^2 = b^+ b^- + \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

Pode-se mostrar facilmente que estes operadores satisfazem as seguintes propriedades:

- (a.1) b^- e b^+ são conjugados hermitianos (auto-adjuntos)

$$(b^\pm)^\dagger = b^\mp. \quad (3.3)$$

- (a.2) b^- e b^+ obedecem à álgebra de Heisenberg

$$[b^-, b^+] = 1, \quad (3.4a)$$

$$[h, b^\pm] = \pm b^\pm. \quad (3.4b)$$

Como consequências dessas propriedades, e considerando ϕ_0 como o estado fundamental do sistema descrito por h (veja Eq. (3.2)), temos

$$b^- \phi_0(y) = 0, \quad (3.5)$$

$$b^- \phi_n(y) = \sqrt{n} \phi_{n-1}(y), \quad (3.6)$$

$$b^+ \phi_n(y) = \sqrt{n+1} \phi_{n+1}(y), \quad (3.7)$$

$$\phi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^n \phi_0(y), \quad (3.8)$$

$$E_n = n + \frac{1}{2}. \quad (3.9)$$

Resolvendo a Eq. (3.5), obtemos o estado fundamental e, aplicando sucessivamente o operador b^+ sobre $\phi_0(y)$, chegamos aos demais autoestados (Eq. (3.8)).

(b) Método analítico, que consiste em resolver diretamente equação diferencial associada a ES. Levando-se em consideração a normalização de estados ligados, as autofunções normalizadas ($\phi_n(y)$) são identificadas em termos dos polinômios de Hermite

$$\phi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} e^{-y^2/2} H_n(y). \quad (3.10)$$

Voltemos agora para o problema da resolução da ES de um OMDP. Tomando $\alpha = \gamma = a$ e $\beta = 2b$, podemos reescrever o operador energia cinética como

$$T = \frac{1}{2} m^a(x) p m^{2b}(x) p m^a(x), \quad (3.11)$$

com a nova relação de vínculo $a + b = -1/2$. Seja H_a a hamiltoniana quântica de um sistema qualquer dado por

$$H_a = -\frac{1}{2} m^a(x) \frac{d}{dx} m^{2b}(x) \frac{d}{dx} m^a(x) + V_a(x), \quad (3.12)$$

podemos novamente fatorá-la na forma

$$H_a = A_a^+ A_a^- + \frac{1}{2}, \quad (3.13)$$

utilizando agora os seguintes operadores auto-adjuntos

$$A_a^- = \frac{1}{\sqrt{2}} m^b(x) \frac{d}{dx} m^a(x) + W_a(x), \quad (3.14a)$$

$$A_a^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} m^a(x) \frac{d}{dx} m^b(x) + W_a(x), \quad (3.14b)$$

sendo a função $W_a(x)$ denominada de superpotencial. As Eqs. (3.14) podem ainda ser reescritas na forma

$$A_a^- = \frac{1}{\sqrt{2m(x)}} \left[\frac{d}{dx} + a[\ln m(x)]' \right] + W_a(x), \quad (3.15a)$$

$$A_a^+ = -\frac{1}{\sqrt{2m(x)}} \left[\frac{d}{dx} + b[\ln m(x)]' \right] + W_a(x). \quad (3.15b)$$

De que forma $V_a(x)$ está relacionado com $W_a(x)$? Seja $f(x)$ uma função arbitrária, utilizando a Eq. (3.12) obtemos

$$\begin{aligned} H_a f &= \left[-\frac{1}{2} m^a \frac{d}{dx} m^{2b} \frac{d}{dx} m^a + V_a(x) \right] f(x) \\ &= -\frac{1}{2} \{m^{-1} f'' - m^{-2} m' f' + a[m^{-2} m'' - (a+2)(m')^2 m^{-3}]f\} + \\ &\quad + V_a f. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por outro lado, utilizando a Eq. (3.13) obtemos

$$\begin{aligned} H_a f &= \left[A_a^+ A_a^- + \frac{1}{2} \right] f(x) \\ &= -\frac{1}{2} m^{-1} f'' + \frac{1}{2} m^{-2} m' f' + f \left\{ \frac{1}{2} a^2 m^{-3} (m')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4a+1}{2} \right) m^{-\frac{3}{2}} m' W_a \right\} + \\ &\quad + f \left\{ -\frac{1}{2} a m^{-2} m'' - \frac{1}{\sqrt{2}} W_a' m^{-\frac{1}{2}} + W_a^2 + a m^{-3} (m')^2 + \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Comparando as Eqs. (3.16) e (3.17), obtemos a seguinte expressão para $V_a(x)$ em termos de $W_a(x)$

$$V_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2m(x)}} \left[\frac{(4a+1)}{2} W_a(x)[\ln m(x)]' - W_a'(x) \right] + W_a^2(x) + \frac{1}{2}. \quad (3.18)$$

Não é difícil mostrar que a relação de comutação entre A_a^- e A_a^+ é dada por

$$[A_a^-, A_a^+] = \sqrt{\frac{2}{m(x)}} W_a'(x) + \left(\frac{4a+1}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m(x)}} [\ln m(x)]' \right\}. \quad (3.19)$$

Impondo que $[A_a^-, A_a^+] = 1$, obtemos que $W_a(x)$ é expresso por

$$W_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0 - \left(\frac{4a+1}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{m(x)}} [\ln m(x)]' \right\}. \quad (3.20)$$

Substituindo a Eq. (3.20) na Eq. (3.18) chegamos à seguinte expressão para $V_a(x)$

$$\begin{aligned} V_a(x) &= \frac{1}{2} \left(\int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4a+1}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m(x)}} [\ln m(x)]' \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4a+1}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{m(x)}} [\ln m(x)]' \right]^2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde ' significa derivada com respeito a x .

Observe que para que haja concordância entre as expressões clássica e quântica de $V_a(x)$, devemos escolher $a = -1/4$. Dessa forma, a hamiltoniana quântica do sistema é dada por

$$\begin{aligned} H_{-1/4}(x, p) &= A_{-1/4}^+ A_{-1/4}^- + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{m(x)}} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{m(x)}} + \frac{1}{2} \left(\int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0 \right)^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Analogamente à questão do OMC quântico, as propriedades de $A_{-1/4}^+$ e $A_{-1/4}^-$ garantem que

$$A_{-1/4}^- \psi_0(x) = 0, \quad (3.23)$$

$$A_{-1/4}^- \psi_n(x) = \sqrt{n} \psi_{n-1}(x), \quad (3.24)$$

$$A_{-1/4}^+ \psi_n(x) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(x), \quad (3.25)$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (A_{-1/4}^+)^n \psi_0(x), \quad (3.26)$$

com a equação de autovalores e autofunções de $H_{-1/4}(x, p)$ sendo expressa por

$$H_{-1/4}(x, p) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \quad (3.27)$$

onde $E_n = n + 1/2$.

A TCP consiste em considerarmos as seguintes substituições na Eq. (3.27)

$$X = X(x) = \int^x \sqrt{m(y)} dy, \quad (3.28)$$

$$\psi_n(x) = \sqrt[4]{m(x)} \xi_n[X(x)], \quad (3.29)$$

reduzindo-a à expressão

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \xi_n(X)}{dX^2} + \frac{1}{2} (X + X_0)^2 \xi_n(X) = E_n \xi_n(X), \quad (3.30)$$

ou seja, à equação de autovalores do oscilador harmônico com massa constante deslocado de $-X_0$, cujas soluções são bastante conhecidas. Logo, as autofunções de $H_{-1/4}(x, p)$ serão dadas por

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} \sqrt[4]{m(x)} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0 \right)^2 \right] \\ &\times H_n \left[\int^x \sqrt{m(y)} dy + X_0 \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Estas soluções satisfazem automaticamente a seguinte condição de normalização

$$\begin{aligned}
\int |\psi_n(x)|^2 dx &= \int \sqrt{m(x)} |\xi_n(X)|^2 \frac{dx}{dX} dX \\
&= \int \sqrt{m(x)} |\xi_n(X)|^2 \frac{1}{\sqrt{m(x)}} dX = \int |\xi_n(X)|^2 dX = 1.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

3.2 Informação de Fisher

A informação de Fisher de um observável unidimensional θ ($\in \mathbb{R}$) com uma densidade de probabilidade $\mathcal{P}(\theta)$ é dada por [39]

$$F_\theta = \int \mathcal{P}(\theta) \left[\frac{d \ln \mathcal{P}(\theta)}{d\theta} \right]^2 d\theta \geq 0. \tag{3.33}$$

Assim, a informação de Fisher da posição de um sistema quântico, cuja densidade de probabilidade no espaço das posições é $\mathcal{P}(x)=|\psi_n(x, t)|^2$, será

$$F_x = \int |\psi_n(x, t)|^2 \left[\frac{d \ln |\psi_n(x, t)|^2}{dx} \right]^2 dx = \int \psi_n(x, t) \psi_n^*(x, t) \left[\frac{d \ln [\psi_n(x, t) \psi_n^*(x, t)]}{dx} \right]^2 dx,$$

ou seja,

$$F_x = 4 \int \psi_n^{*\prime}(x, t) \psi_n'(x, t) dx + \int \left[\frac{\psi_n'(x, t)}{\psi_n(x, t)} - \frac{\psi_n^{*\prime}(x, t)}{\psi_n^*(x, t)} \right]^2 |\psi_n(x, t)|^2 dx. \tag{3.34}$$

Da mesma maneira, a informação de Fisher para o momento será dada por

$$F_p = 4 \int \phi_n^{*\prime}(p, t) \phi_n'(p, t) dp + \int \left[\frac{\phi_n'(p, t)}{\phi_n(p, t)} - \frac{\phi_n^{*\prime}(p, t)}{\phi_n^*(p, t)} \right]^2 |\phi_n(p, t)|^2 dp, \tag{3.35}$$

onde $\phi(p, t)$ é a transformada de Fourier de $\psi(p, t)$, ou seja

$$\phi(p, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int e^{-ipx/\hbar} \psi(x, t) dx. \tag{3.36}$$

A informação de Fisher e os desvios padrão de posição e momento de osciladores harmônicos estão relacionadas pela chamada inequação de Cramer-Rao [40, 41], dada por

$$F_x \geq \frac{1}{(\Delta x)^2} , \quad F_p \geq \frac{1}{(\Delta p)^2} . \quad (3.37)$$

3.3 Entropia de Shannon

A entropia de Shannon de um observável unidimensional θ com uma densidade de probabilidade $\mathcal{P}(\theta)$ é dada pela Ref. [42]

$$S_\theta = - \int \mathcal{P}(\theta) \ln \mathcal{P}(\theta) d\theta . \quad (3.38)$$

Assim, as entropias de Shannon no espaço da posição e do momento são, respectivamente

$$S_x = - \int |\psi_n(x, t)|^2 \ln |\psi_n(x, t)|^2 dx , \quad (3.39)$$

$$S_p = - \int |\phi_n(p, t)|^2 \ln |\phi_n(p, t)|^2 dp . \quad (3.40)$$

A partir de S_x e S_p a seguinte relação de incerteza entrópica [43, 44] pode ser estabelecida

$$S = S_x + S_p \geq (1 + \ln \pi) , \quad (3.41)$$

que é válida para problemas unidimensionais.

3.4 Sistema com massa $\mathbf{m}^{(1)}(x) = \mathbf{m}_0(x^2 + \lambda^2)$

De acordo com a Eq. (3.31), os estados estacionários para esse específico sistema são

$$\psi_n^{(1)}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}} \frac{2^n}{n!}} \sqrt[4]{m_0(x^2 + \lambda^2)} \exp(-iE_n t)$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left[-\frac{1}{8} \left\{ x \sqrt{x^2 + \lambda^2} + \lambda^2 \ln \left[2 \left(x + \sqrt{x^2 + \lambda^2} \right) \right] - \lambda^2 \ln(2\lambda) \right\}^2 \right] \\ & \times H_n \left[\frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + \lambda^2} + \lambda^2 \ln \left[2 \left(x + \sqrt{x^2 + \lambda^2} \right) \right] - \lambda^2 \ln(2\lambda) \right) \right]. \quad (3.42) \end{aligned}$$

Como o princípio de incerteza é mínimo para o estado fundamental, vamos considerar apenas a função de onda para $n = 0$ a fim de obtermos as informações de Fisher e entropias de Shannon. Neste caso

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}(x, t) &= \sqrt[4]{\frac{m_0(x^2 + \lambda^2)}{\pi}} \exp(-iE_0 t) \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{8} \left\{ x \sqrt{x^2 + \lambda^2} + \lambda^2 \ln \left[2 \left(x + \sqrt{x^2 + \lambda^2} \right) \right] - \lambda^2 \ln(2\lambda) \right\}^2 \right]. \quad (3.43) \end{aligned}$$

As Figs. 5(a)-(b) mostram as densidades de probabilidade no espaço da posição $\mathcal{P}_0^{(1)}(x) = |\psi_0^{(1)}(x)|^2$ e do momento $\mathcal{P}_0^{(1)}(p) = |\phi_0^{(1)}(p)|^2$ para $\lambda = 0, \lambda = 0,2$ e $\lambda = 0,4$, enquanto as Figs. 6(a)-(b) mostram as mesmas quantidades, $\mathcal{P}_0^{(1)}(x) = |\psi_0^{(1)}(x)|^2$ e $\mathcal{P}_0^{(1)}(p) = |\phi_0^{(1)}(p)|^2$, para $\lambda = 0,6, \lambda = 0,8$ e $\lambda = 1$.

Nas Figs. 7(a)-(b) mostramos a variação das incertezas na posição ($\Delta x_0^{(1)}$) e no momentum ($\Delta p_0^{(1)}$) em função do parâmetro λ . Ao aumentarmos λ , observamos que $\Delta x_0^{(1)}$ diminui. Podemos entender este resultado a partir da variação de $\mathcal{P}_0^{(1)}(x)$ mostrada nas Figs. 5(a) e 6(a). Observamos que a largura de $\mathcal{P}_0^{(1)}(x)$ diminui, o que torna a partícula mais localizada à medida em que λ aumenta, diminuindo a incerteza na posição. Nesse cenário devíamos esperar que a incerteza para o momento, $\Delta p_0^{(1)}$, aumentasse. Entretanto, observamos da Fig. 7(b) que à medida em que λ aumenta, $\Delta p_0^{(1)}$ diminui no intervalo $0 \leq \lambda \leq 0,6$, ao invés de aumentar como esperado. Para $\lambda > 0,6$, $\Delta p_0^{(1)}$ sempre aumenta.

Nas Figs. 8(a)-(b) mostramos o comportamento de $F_x^{(1)}$ e $F_p^{(1)}$, respectivamente, com relação ao parâmetro λ . Observamos que $F_x^{(1)}$ diminui no intervalo $0 \leq \lambda \leq 0,6$ e aumenta a partir de $\lambda = 0,6$, enquanto que $F_p^{(1)}$ só diminui com o aumento de λ . Infelizmente, o significado deste resultado não pode ser obtido uma vez que não há uma relação bem definida entre as informações de Fisher e os desvios padrão (veja as Figs. 7(a)-(b)) deste sistema,

contudo, vemos nas Figs. 9(a)-(b) que a inequação de Cramer-Rao, Eq. (3.37), continua sendo respeitada.

Obtemos nas Figs. 10(a)-(c) o comportamento de $S_x^{(1)}$ e $S_p^{(1)}$, respectivamente, com relação ao parâmetro λ . Observamos que, no intervalo de $0 \leq \lambda \leq 0,4$, $S_x^{(1)}$ aumenta ao passo que $S_p^{(1)}$ diminui com o aumento de λ . Já para o intervalo $0,5 \leq \lambda \leq 1$, à medida que λ aumenta, constatamos que $S_x^{(1)}$ diminui enquanto que $S_p^{(1)}$ aumenta. Para entendermos esses resultados, consideremos, mais uma vez, o comportamento de $\mathcal{P}_0^{(1)}(x)$ com relação ao parâmetro λ mostrado nas Figs. 5(a) e 6(a). Observamos que, no intervalo $0 \leq \lambda \leq 1,0$, a dispersão nos valores de posição da partícula torna-se menos deformada na origem e sua largura mais estreita. Como $\mathcal{P}_0^{(1)}(x)$ torna-se mais localizado com o aumento de λ , é razoável supor que os comportamentos de $S_x^{(1)}$ e $S_p^{(1)}$ observados no intervalo $0 \leq \lambda \leq 0,5$, sejam por causa da deformação que ocorre em $\mathcal{P}_0^{(1)}(x)$ para pontos próximos da origem. Para $\lambda > 0,5$, os comportamentos de $S_x^{(1)}$ e $S_p^{(1)}$ correspondem àqueles esperados quando ocorre uma diminuição na dispersão da posição, ou seja, a incerteza com relação à posição ($S_x^{(1)}$) da partícula diminui enquanto a incerteza com relação ao seu momento ($S_p^{(1)}$) aumenta.

Observamos que, no intervalo de $0 \leq \lambda \leq 0,6$, os detalhes das deformações de $\mathcal{P}_0^{(1)}(x)$ não são percebidos pela incerteza $\Delta x_0^{(1)}$ (veja a Fig. 7(a)). Isso ocorre porque o desvio padrão $\Delta x_0^{(1)}$ depende do comportamento do integrando $x^2 \mathcal{P}_0^{(1)}(x)$, já que o valor esperado da posição é nulo ($\langle x \rangle = 0$). Vemos que $x^2 \mathcal{P}_0^{(1)}$ é sempre nulo na origem, o que torna $\Delta x_0^{(1)}$ incapaz de detectar o efeito que as deformações têm sobre as densidades de probabilidade $\mathcal{P}_0^{(1)}(x)$.

Mas, ao contrário de $\Delta x_0^{(1)}$, a incerteza $\Delta p_0^{(1)}$ percebe as deformações. Da mesma maneira que $\Delta x_0^{(1)}$, o desvio padrão $\Delta p_0^{(1)}$ depende do integrando $p^2 \mathcal{P}_0^{(1)}(p)$. A diferença está no fato que as deformações de $\mathcal{P}_0^{(1)}(p)$ não se encontram em $p = 0$, mas sim nas regiões $-3,5 \leq p \leq -1,5$ e $1,5 \leq p \leq 3,5$ (veja as Figs. 5(b) e 6(b)). Assim, como nas entropias de Shannon, atribuímos o comportamento não usual de $\Delta p_0^{(1)}$, no intervalo $0 \leq \lambda \leq 0,6$, a essas deformações. A partir de $\lambda > 0,6$ as deformações em $\mathcal{P}_0^{(1)}(p)$ desaparecem e o comportamento de $\Delta p_0^{(1)}$ passa a concordar com o que é esperado quando $\Delta x_0^{(1)}$ diminui.

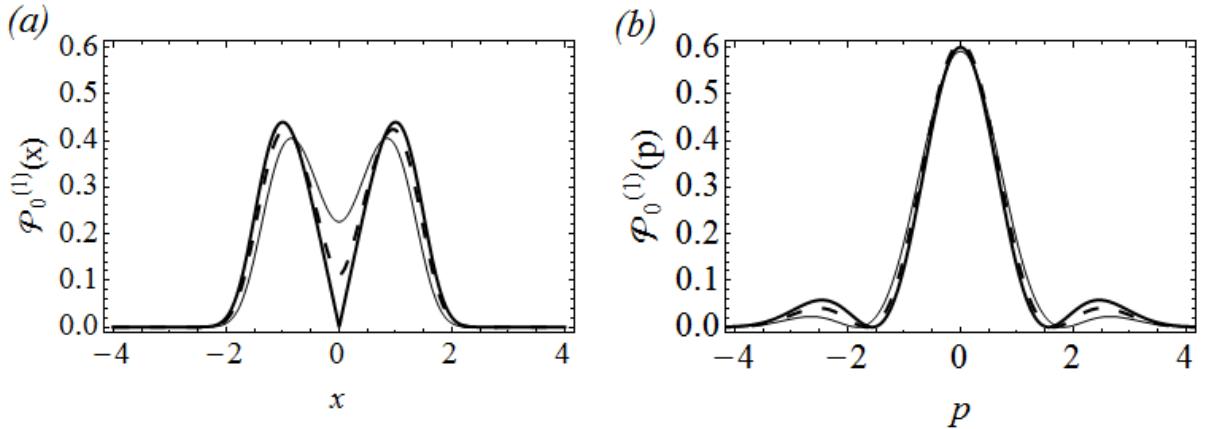


Fig. 5. Densidades de probabilidade no espaço da posição $\mathcal{P}_0^{(1)}(x) = |\psi_0^{(1)}(x)|^2$ e do momento $\mathcal{P}_0^{(1)}(p) = |\phi_0^{(1)}(p)|^2$ para $\lambda = 0$ (linha grossa), $\lambda = 0,2$ (linha pontilhada) e $\lambda = 0,4$ (linha fina). Nos cálculos consideramos $m_0 = 1$.

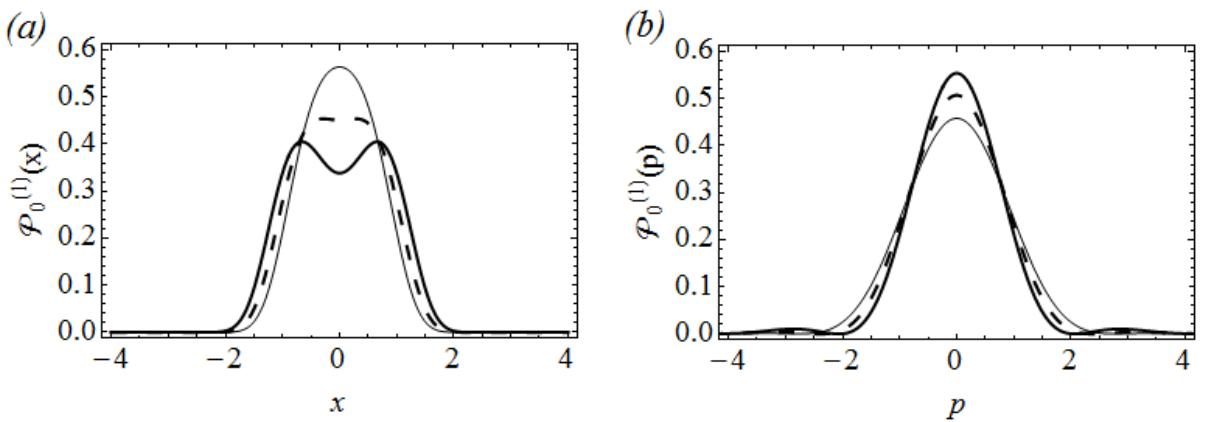


Fig. 6. Densidades de probabilidade no espaço da posição $\mathcal{P}_0^{(1)}(x) = |\psi_0^{(1)}(x)|^2$ e do momento $\mathcal{P}_0^{(1)}(p) = |\phi_0^{(1)}(p)|^2$ para $\lambda = 0,6$ (linha grossa), $\lambda = 0,8$ (linha pontilhada) e $\lambda = 1$ (linha fina). Nos cálculos consideramos $m_0 = 1$.

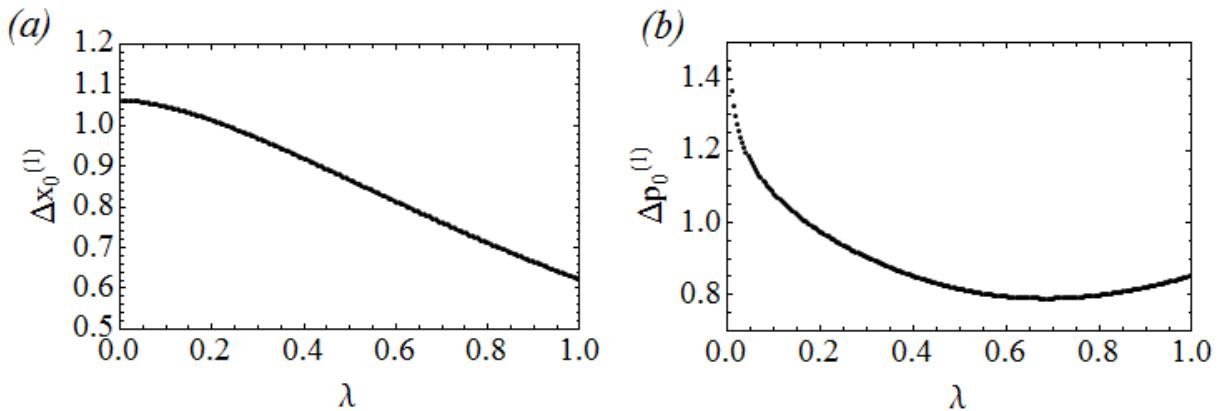


Fig. 7. Dependência dos desvios-padrão (a) $\Delta x_0^{(1)}$, (b) $\Delta p_0^{(1)}$ e com relação ao parâmetro λ ($m_0 = 1$).

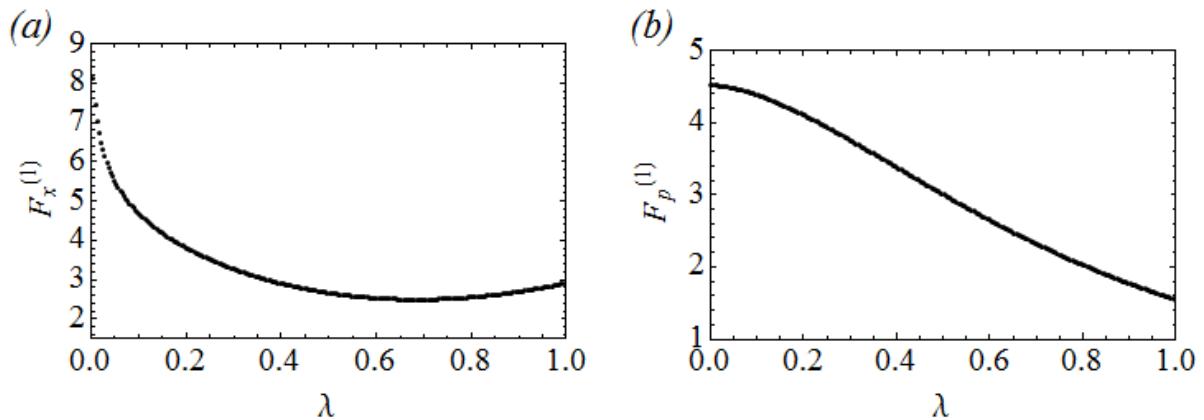


Fig. 8. Dependência das informações de Fisher (a) $F_x^{(1)}$ e (b) $F_p^{(1)}$ com relação ao parâmetro λ ($m_0 = 1$).

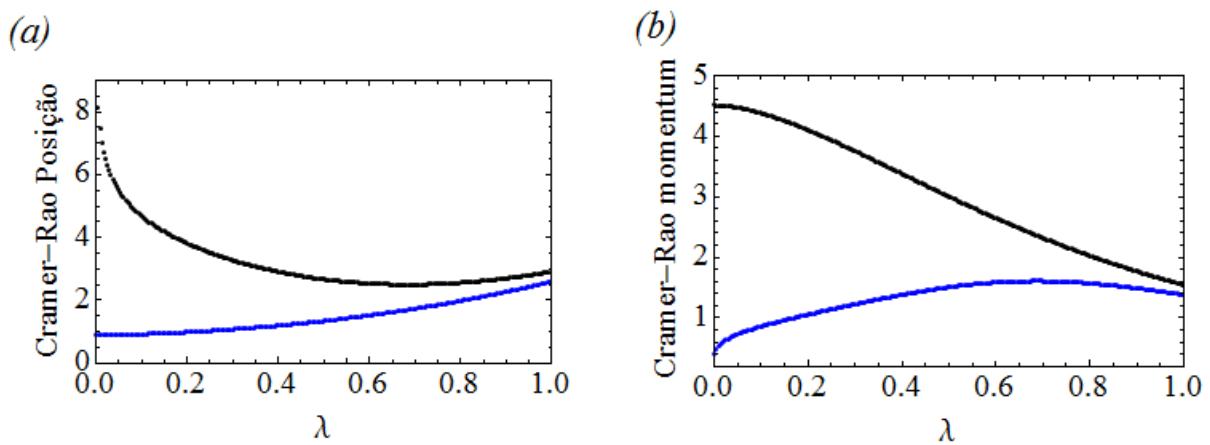


Fig. 9. Dependência da inequação de Cramér-Rao (C. R.) com relação ao parâmetro λ ($m_0 = 1$). (a) $F_x^{(1)}$ (linha preta) e $1/(\Delta x_0^{(1)})^2$ (linha azul); (b) $F_p^{(1)}$ (linha preta) e $1/(\Delta p_0^{(1)})^2$ (linha azul).

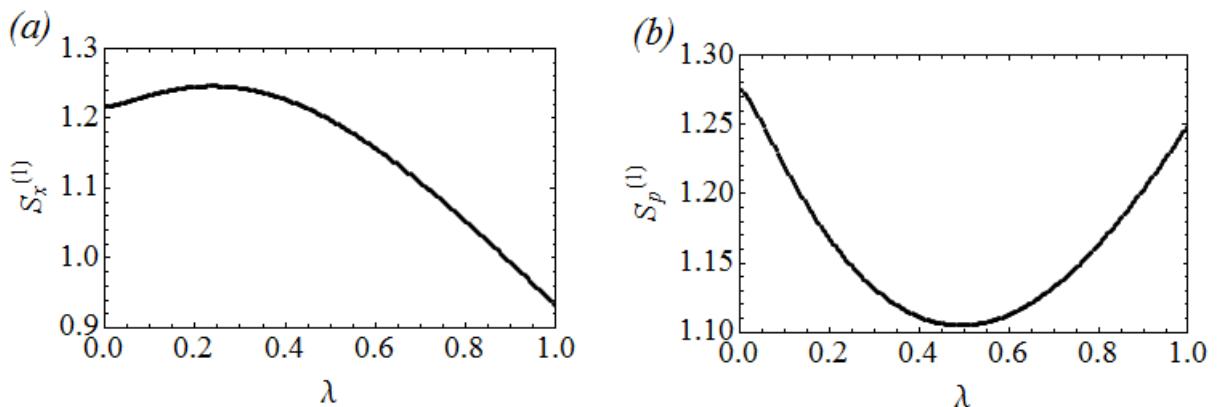


Fig. 10. Dependência das entropias de Shannon (a) $S_x^{(1)}$ e (b) $S_p^{(1)}$ com relação ao parâmetro λ ($m_0 = 1$).

3.5 Sistema com massa $m^{(2)}(x) = m_0[\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2$

Para este sistema, os estados estacionários são

$$\begin{aligned}\psi_n^{(2)}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} \sqrt[4]{m_0 [\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2} \exp(-iE_n t) \\ &\times \exp\left[-\frac{2}{\lambda^2} \cosh^2(\lambda x) [\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2 \left[\frac{\lambda^3 x \cosh(\lambda x) + \sinh(\lambda x)}{2 + \lambda^2 + \lambda^2 \cosh(2\lambda x)}\right]^2\right] \\ &\times H_n\left[\frac{2}{\lambda} \cosh(\lambda x) [\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2] \left[\frac{\lambda^3 x \cosh(\lambda x) + \sinh(\lambda x)}{2 + \lambda^2 + \lambda^2 \cosh(2\lambda x)}\right]\right].\end{aligned}\quad (3.44)$$

Desta maneira, a função de onda para $n = 0$ será

$$\begin{aligned}\psi_0^{(2)}(x, t) &= \sqrt[4]{\frac{m_0}{\pi} [\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2} \exp(-iE_0 t) \\ &\times \exp\left[-\frac{2}{\lambda^2} \cosh^2(\lambda x) [\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2 \left[\frac{\lambda^3 x \cosh(\lambda x) + \sinh(\lambda x)}{2 + \lambda^2 + \lambda^2 \cosh(2\lambda x)}\right]^2\right].\end{aligned}\quad (3.45)$$

As Figs. 11(a)-(b) mostram as funções de onda $\psi_0^{(2)}(x)$ e densidades de probabilidade no espaço da posição $\mathcal{P}_0^{(2)} = |\psi_0^{(2)}(x)|^2$ para $\lambda = 0,1, \lambda = 0,7$ e $\lambda = 1$.

Nas Figs. 12(a)-(b) mostramos o comportamento de $F_x^{(2)}$ e $F_p^{(2)}$, respectivamente, com relação ao parâmetro λ . Observamos que $F_x^{(2)}$ cresce, enquanto $F_p^{(2)}$ decresce com o aumento de λ . O significado deste resultado pode ser mais bem entendido quando olhamos mais atentamente para $\Delta x_0^{(2)}$ e $\Delta p_0^{(2)}$, nas Figs. 13(a)-(b), respectivamente. Assim procedendo, constatamos que esse oscilador satisfaz a igualdade na inequação de Cramer-Rao, Eq. (3.37): $F_x = 1/(\Delta x)^2$, $F_p = 1/(\Delta p)^2$ e $\Delta x \Delta p = (F_x F_p)^{-1/2}$. De acordo com as Figs. 13(a)-(b), $\Delta x_0^{(2)}$ decresce enquanto $\Delta p_0^{(2)}$ cresce com o aumento de λ , ou seja, à medida que λ aumenta, a precisão em prever a localização da partícula aumenta ao passo que a precisão em prever o seu momento diminui.

Como podemos ver nas Figs. 13(a)-(b), $\Delta x_0^{(2)} = \Delta p_0^{(2)} = 0,707$ e $\Delta x_0^{(2)} \Delta p_0^{(2)} = 0,5$ para $\lambda = 0$, o que é o esperado de um OMC quântico. Com o aumento de λ , $\Delta x_0^{(2)} < 0,707$, $\Delta p_0^{(2)} > 0,707$ e $\Delta x_0^{(2)} \Delta p_0^{(2)} > 0,5$.

Obtemos na Fig. 14(a)-(c) o comportamento de $S_x^{(2)}$, $S_p^{(2)}$ e $S^{(2)}$, respectivamente, com relação ao parâmetro λ . Observamos que $S_x^{(2)}$ diminui ao passo que $S_p^{(2)}$ aumenta com o aumento de λ , mostrando mais uma vez que a incerteza com relação à posição da partícula diminui enquanto a incerteza com relação ao seu momento aumenta, ou seja, a informação com relação à posição aumenta ao passo que a informação com relação ao seu momento diminui. Também mostramos que a entropia conjunta $S^{(2)}$ cresce e decresce com o aumento de λ , no intervalo de 0 a 1, sempre respeitando o princípio de incerteza entrópico (3.41).

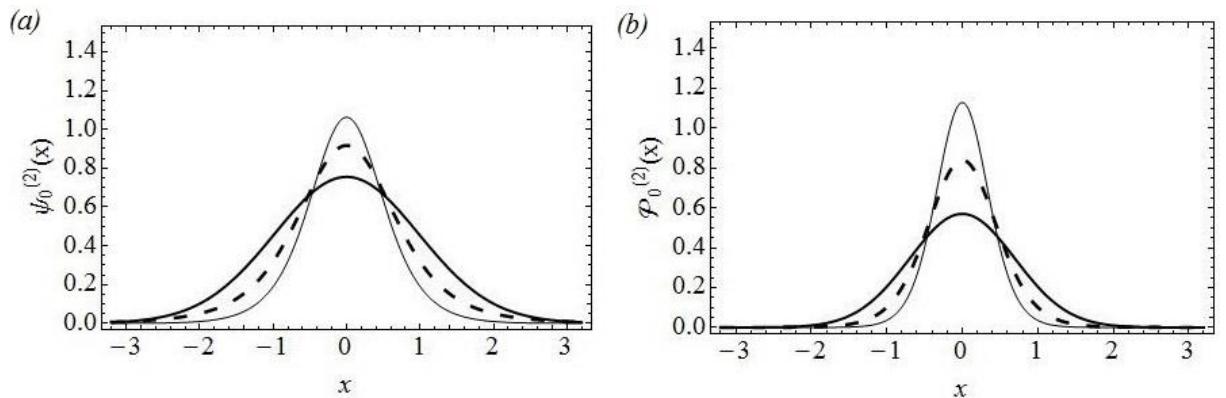


Fig. 11. Funções de onda $\psi_0^{(2)}(x)$ e densidades de probabilidade $P_0^{(2)} = |\psi_0^{(2)}(x)|^2$ para $\lambda = 0,1$ (linha grossa), $\lambda = 0,7$ (linha pontilhada) e $\lambda = 1$ (linha fina). Nos cálculos consideramos $m_0 = 1$.

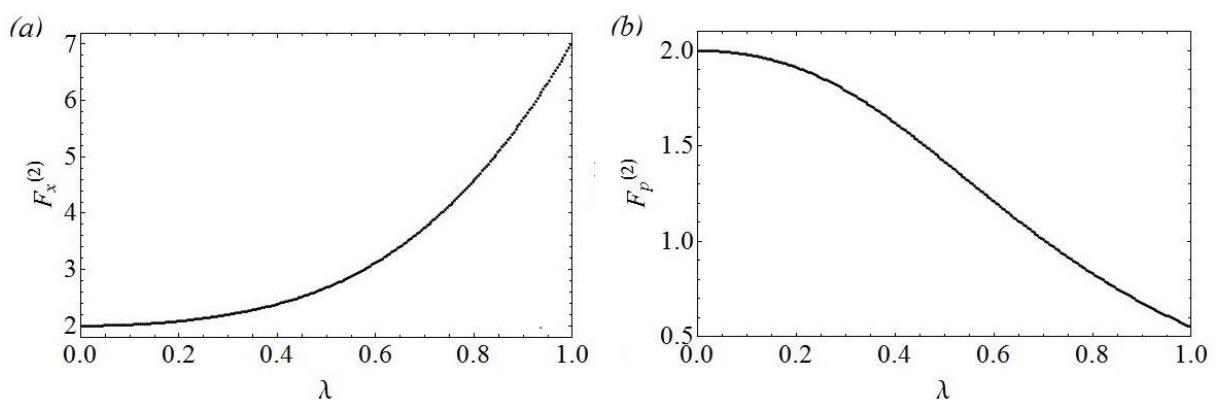


Fig. 12. Dependência das informações de Fisher (a) $F_x^{(2)}$ e (b) $F_p^{(2)}$ com relação ao parâmetro λ ($m_0 = 1$).

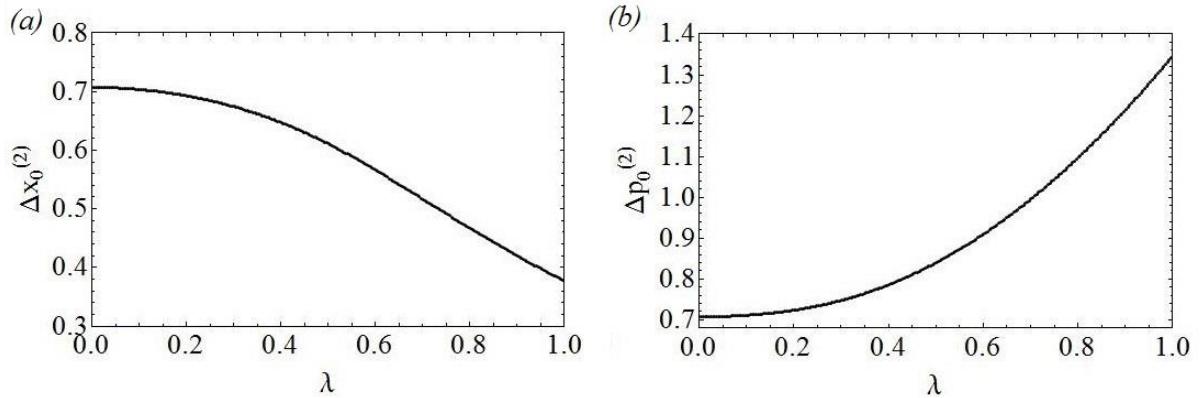


Fig. 13. Dependência dos desvios-padrão (a) $\Delta x_0^{(2)}$, (b) $\Delta p_0^{(2)}$ e com relação ao parâmetro λ ($m_0 = 1$).

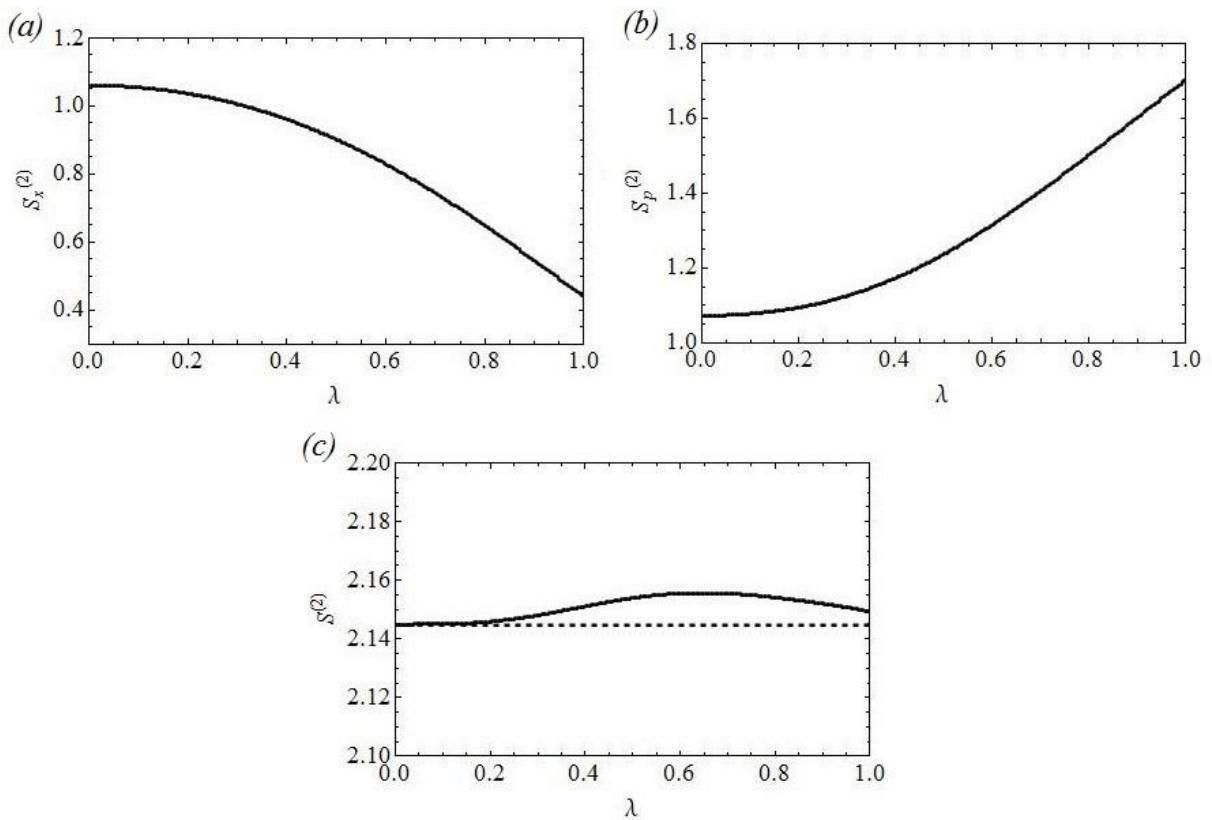


Fig. 14. Dependência das entropias de Shannon (a) $S_x^{(2)}$, (b) $S_p^{(2)}$ e (c) $S^{(2)}$ com relação ao parâmetro λ ($m_0 = 1$). A linha pontilhada corresponde a $1 + \ln \pi$.

4 Conclusões

Neste trabalho estudamos dos pontos de vista clássico e quântico dois osciladores harmônicos com massa dependente da posição. Em particular, consideramos sistemas com distribuições de massa $m^{(1)}(x) = m_0(x^2 + \lambda^2)$ e $m^{(2)}(x) = m_0[\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \lambda^2]^2$.

Na parte clássica, Capítulo 2, mostramos o procedimento de fatoração do hamiltoniano que deve ser seguido quando estudamos sistemas com massa dependente da posição. Este procedimento desenvolvido por Cruz y Cruz, Negro e Nieto [12, 13] consiste em decompor o hamiltoniano em termos de duas variáveis a^+ e a^- que satisfazem à álgebra de Heisenberg. Admitindo que a decomposição possa ser feita tanto no OMDP quanto no OMC, vemos que a correspondência entre os sistemas é dada pelas transformações canônicas expressas pelas Eqs. (2.17) e (2.18).

Obtivemos as trajetórias no espaço de fase do sistema com $m^{(1)}(x)$ a partir da Eq. (2.21) para $\lambda = 0, 0,7$ e $1,0$. Observamos que para $\lambda = 0$ as trajetórias de fase são deformadas próximo à origem devido ao fato que $m^{(1)}(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$. Para $\lambda \neq 0$, a deformação diminui e praticamente desaparece para $\lambda = 1,0$. Mostramos assim que para sistemas nos quais as soluções das equações de Hamilton fiquem muito complicadas ou não possamos obtê-las a partir das Eqs. (2.19) e (2.20), a análise das trajetórias no espaço de fase fornece uma boa descrição da dinâmica do sistema em consideração.

As trajetórias do sistema com $m^{(2)}(x)$ foram obtidas da Eq. (2.25) para $\lambda = 0,1, 0,7$ e $1,0$. Observamos que o tipo de deformação presente no oscilador $m^{(1)}(x)$ não aparece nesse caso. No limite $\lambda \rightarrow 0$, o sistema se reduz a um OMC e as trajetórias no espaço de fase se tornam circunferências concêntricas.

Na parte quântica, Capítulo 3, desenvolvemos a teoria de álgebra de operadores juntamente ao método da TCP para obtermos a função de onda exata de um OMDP. Utilizando a função de onda, determinamos numericamente as informações de Fisher, as entropias de Shannon e os desvios padrão para o estado fundamental.

Para o oscilador com $m^{(1)}(x)$, observamos que $F_x^{(1)}$ diminui no intervalo $0 \leq \lambda \leq 0,6$ e aumenta a partir de $\lambda = 0,6$, enquanto que $F_p^{(1)}$ só diminui com o aumento de λ . Infelizmente, o significado deste resultado não pode ser obtido uma vez que não há uma relação bem definida entre as informações de Fisher e os desvios padrão deste sistema.

Observamos que ao aumentarmos λ , $\Delta x_0^{(1)}$ diminui. Entretanto o comportamento de $\Delta p_0^{(1)}$, $S_x^{(1)}$ e $S_p^{(1)}$ é um pouco mais complexo. Se $\Delta x_0^{(1)}$ sempre diminui, $\Delta p_0^{(1)}$ deveria sempre aumentar e $S_x^{(1)}$ diminuir. Atribuímos o comportamento não usual de $\Delta p_0^{(1)}$, $S_x^{(1)}$ e $S_p^{(1)}$ no intervalo $0 \leq \lambda \leq 0,6$, às deformações que surgem nas densidades de probabilidade $\mathcal{P}_0^{(1)}(x)$ e $\mathcal{P}_0^{(1)}(p)$ em função da forma de $m^{(1)}(x)$ considerada. Para $\lambda > 0,6$, quando as deformações tornam-se menores e desaparecem, os comportamentos de $\Delta p_0^{(1)}$, $S_x^{(1)}$ e $S_p^{(1)}$ correspondem àqueles esperados quando $\Delta x_0^{(1)}$ diminui.

Já para o oscilador com $m^{(2)}(x)$, verificamos que as informações de Fisher e os desvios padrão encontram-se relacionadas pela igualdade na inequação de Cramer-Rao (Eq. 3.37). Observamos que $F_x^{(2)}$ aumenta enquanto $F_p^{(2)}$ diminui com o aumento de λ . Isto se deve ao fato de $V^{(2)}(x)$ se tornar cada vez mais fechado, diminuindo a dispersão nos valores de posição da partícula ($\mathcal{P}_0^{(2)}(x)$ se torna cada vez mais localizada, veja a Fig. 11(b)). Consequentemente, à medida que λ aumenta, a precisão em prever a localização da partícula aumenta ao passo que a precisão em prever o seu momento diminui.

Constatamos que, para este último sistema, $S_x^{(2)}$ diminui enquanto $S_p^{(2)}$ aumenta com o aumento de λ . Este resultado também é consequência do comportamento de $V^{(2)}(x)$. As Figs. 12(a)-(b) e 14(a)-(b), nos mostram que a entropia diminui (aumenta) quando a informação aumenta (diminui).

Referências

- [1] Berger B. K., *Phys. Rev. D* **12**, 368 (1975).
- [2] Lewis H. R. and Symon K. R., *Physics of Fluids* **27**, 192 (1984).
- [3] Holstein B. R., *Am. J. Phys.* **57**, 714 (1989).
- [4] Lemos N. A. and Natividade C. P., *Nuovo Cimento B* **99**, 211 (1989).
- [5] Lo C. F., *Phys. Rev. A* **45**, 5262 (1992).
- [6] Bastard G., *Wave mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures* (Les Editions de Physique, Les Ulis, 1988).
- [7] Smith D. L. and Mailhiot C., *Rev. of Mod. Phys.* **62**, 173 (1990).
- [8] Serra L. I. and Lipparini E., *Europhys. Lett.* **40**, 667 (1997).
- [9] Saavedra F. A., Boronat J., Polls A. and Fabrocini S., *Phys. Rev. B* **50**, 4282 (1994).
- [10] von Roos O., *Phys. Rev. B* **27**, 7547 (1983).
- [11] Hand L. N. and Finch J. D., *Analytical Mechanics* (Cambridge, New York, 1st Edition, 1988).
- [12] Cruz y Cruz S., Negro J. and Nieto L. M., *Phys. Lett. A* **369**, 400 (2007).
- [13] Cruz y Cruz S., Negro J. and Nieto L. M., *J. of Phys. C: Conference Series* **128**, 012053 (2008).
- [14] Koç R., Koca M. and Sahinoglu G., *Eur. Phys. J. B* **48**, 583 (2005).
- [15] Kuru S. and Negro J., *Ann. der Physik* **323**, 413 (2008).
- [16] Heisenberg W., *Z. Phys.* **43**, 172 (1927).
- [17] Frank S.A., *J. of Evol. Bio.* **22**, 231 (2009).
- [18] Frank S.A., *J. of Evol. Bio.* **25**, 2377 (2012).
- [19] Frank S.A., *J. of Evol. Bio.* **26**, 1151 (2013).
- [20] Nalewajski R. F., *Inter. J. of Quantum Chem.* **180**, 2230 (2008).
- [21] Nalewajski R. F., *Inter. J. of Quantum Chem.* **109**, 425 (2009).
- [22] Nalewajski R. F., *J. of Math. Chem.* **49**, 2308 (2011).
- [23] Stiglitz J. E., *The American Economist* **47**, 6 (2003).
- [24] Stiglitz J. E., *The American Economist* **48**, 17 (2004).
- [25] Frieden B. R., Hawkins R. J., *Physica A* **389**, 287 (2010).
- [26] Shannon C., Weaver W., *A Mathematical Theory of Communication* (Urbana, 1949).
- [27] Yáñez R. J., Van Assche W. e Dehesa J. S., *Phys. Rev. A* **50**, 3065 (1994).

- [28] Majerník V., Opatrný T., *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 2187 (1996).
- [29] Navarro G. Y., Sun G. H., Dytrych T., Launey K. D., Dong S. H., Draayer J. P., *Ann. Phys.* **348**, 153 (2014).
- [30] Macedo D. X., Guedes I., *Physica A* **434**, 211 (2015).
- [31] Fisher R. A., *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **22**, 700 (1925).
- [32] Frieden B. R., *Phys. Rev. A* **41**, 4265 (1990).
- [33] Frieden B. R., *Am. J. Phys.* **57**, 1004 (1989).
- [34] Frieden B. R., *Phys. A* **180**, 359 (1992).
- [35] Sánchez-Moreno P., Plastino A. R., Dehesa J. S., *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 065301 (2011).
- [36] Aguiar V., Guedes I., *Phys. Scr.* **90**, 045207 (2015).
- [37] Aguiar V., Guedes I., *Phys. A* **423**, 72 (2015).
- [38] Griffiths D. J., *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, New Jersey, 2nd Edition, 2005).
- [39] Martín A. L., Angulo J. C., Antolín J., *Physica A* **392**, 5552 (2013).
- [40] Romera E., Dehesa J. S., *Phys. Rev. A* **50**, 256 (1994).
- [41] Dembo A., Cover T. M., Thomas J. A., *IEEE Trans. Inform. Theory* **37**, 1501 (1991).
- [42] Dong S., Guo-Hua Sun, Shin-Hai Dong, Draayer J. P., *Phys. Lett. A* **378**, 124 (2014).
- [43] Bialynicki-Birula I., Mycielski J., *Comm. Math. Phys.* **44**, 129 (1975).
- [44] Beckner W., *Ann. of Math.* **102**, 159 (1975).

Este Trabalho de Conclusão de Curso deu origem aos seguintes trabalhos científicos:

1. Nascimento J. P. G., Guedes I., *Osciladores clássicos com massa dependente da posição*, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **36**, 4308 (2014);
2. Nascimento J. P. G., Guedes I., *Osciladores quânticos com massa dependente da posição* (submetido à publicação) (2015).