



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOÃO PAULO DA COSTA NOGUEIRA

# ANÁLISE QUALITATIVA DA INTEGRABILIDADE DE BILHARES

FORTALEZA

2014

**JOÃO PAULO DA COSTA NOGUEIRA**

**ANÁLISE QUALITATIVA DA  
INTEGRABILIDADE DE BILHARES**

Monografia de Bacharelado apresentada à  
Coordenação da Graduação do Curso de  
Física, da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito parcial para a obtenção do  
Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira  
da Costa Filho

**FORTALEZA**

**2014**

**JOÃO PAULO DA COSTA NOGUEIRA**

# **ANÁLISE QUALITATIVA DA INTEGRABILIDADE DE BILHARES**

Monografia de Bacharelado apresentada à  
Coordenação da Graduação do Curso de  
Física, da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito parcial para a obtenção do  
Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 18 de junho de 2014

## **BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Felipe de Freitas Munarin  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia  
Afro-Brasileira (UNILAB)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Física

---

N712a Nogueira, João Paulo da Costa.  
Análise Qualitativa da Integrabilidade de Bilhares / João Paulo da Costa Nogueira. – Fortaleza, 2014.  
44 f.:il.

Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2014.

Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Caos Determinista. 3. Mecânica Analítica. I. Título.

CDD 515.39

---

*Aos Meus Pais  
e  
familiares.*

# AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Francisco Edgar Alexandre Nogueira, por todo o apoio durante minha vida acadêmica e por toda a liberdade confiada a mim.

A minha mãe, Maria Lúcia da Costa Nogueira que, apesar de ter morrido muito jovem, influenciou muito o meu caráter.

Aos meus padrinhos, Dona Nelina e Seu Luís Carlos.

Ao meu orientador Raimundo Nogueira da Costa Filho pela paciência, incentivo e orientação.

Aos professores que examinaram o meu trabalho, nomeadamente Felipe de Freitas Munarin e Danila Fernandes Tavares.

Aos professores José Ramos, Afonso Oliveira, Ascânio Araújo, Josué Mendes Filho, Renan Landim, Andrey Chaves, Marcos Antônio, Geová Alencar, João Milton, Carlos Fiolhais (Universidade de Coimbra), Manoel Fiolhais (Universidade de Coimbra), Constança Providência (Universidade de Coimbra), Orlando Olavo (Universidade de Coimbra).

Aos meus amigos Gabriel Oliveira, Manoel Lourenço, Fábio Medeiros, Rilder Pires, Duarte José, William Mesquita, Luan Vieira, Gustavo Barbosa, Ícaro Rodrigues, Augusto Plácido, Yuri Cruz, Deric Albuquerque, Acácio Bizarria, Felipe 'estressado', Carlos Eduardo, Laura Barth, Ravenna Rodrigues, Vanderley Aguiar, Diego Félix, Joel Cerqueira Ponte, Mateus Andrade, Danilo Borges, Daniel Linhares, Mateus Falcão, Jonathan Sales, Rafael Farias, Pedro Henrique, Lucas Miranda, Bianca Gondim, Victor Nocrato, Rondinelly Oliveira, Heitor Credídio, Hygor Piaget, Saulo Davi, Erneron Oliveira, Felipe Castelo, Mateus Oliveira, Guido Damasceno, Uelque Oliveira, Nelson Nascimento, Herquimedes Glaudys, Ari Filho, Henrique Ramos, Marcelo Ramos, Benedita Silva, Tharles Amaro e sua mãe, Dona Piedade.

Aos amigos de Coimbra Raquel Siota, Vanessa Dayane, Luana Julia Teles, Karen Adorno, Bruna Sandri, Diana Santos, Déborah Kalynne, Alessandra Soler, Daniel Rocha, Ana Paula Godoy, Júlia Mayumi, Kamilla Brito, Israel Muller, Isaac Victor, Gabriel Brandão, Tiago Menezes.

A minha namorada Denise Vitoriano, seus pais José de Ribamar e Antônia Vitoriano.

Por último, a todos do grupo ao qual tive a honra de ser membro, Sindicatis.

# RESUMO

Um Bilhar consiste basicamente de uma partícula confinada em uma região do espaço. Trataremos apenas de Bilhares em duas dimensões na ausência de campos externos e desprezaremos qualquer tipo de forças dissipativas, de modo que as colisões da partícula com as fronteiras do Bilhar são elásticas. Além disso, as fronteiras são fixas, ou seja, respeitam uma equação do tipo  $g = g(r, \theta) = g_0$ , onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares planas e  $g_0$  é uma constante qualquer, sem dependência temporal.

O Bilhar é um modelo interessante por vários motivos. Primeiro, é um sistema muito simples (tem poucos graus de liberdade) e de fácil visualização. No entanto, possui uma dinâmica não-trivial com grande riqueza de comportamentos (podendo apresentar comportamento regular, caótico ou até mesmo misto, caso em que coexistem no espaço de fase de um único Bilhar regiões caóticas e regulares). Segundo, o tratamento numérico desses sistemas não requer integração numérica de equações diferenciais e, portanto, não consome muito tempo de execução. Além disso, os Bilhares permitem que realizemos investigações de caráter fundamental, por exemplo, podemos estudar como sistemas regulares reagem ao serem levemente perturbados.

**Palavras-chave:** Sistemas Dinâmicos Caos Determinista Mecânica Analítica

# ABSTRACT

A Billiard consists basically of a particle confined in a region of space. We will just dealing Billiards in two dimensions in the absence of extern fields and any type of dissipative forces so that particle collisions with Billiard boundaries are elastic. Furthermore, the boundaries are fixed, ie, they obey an equation of kind  $g = g(r, \theta) = g_0$ , where  $r$  and  $\theta$  are the polar coordinates in the plan and  $g_0$  is any constant, without time dependence. The Billiard is an interesting model for several reasons. First, it is a very simple (it have few degrees of freedom) and easy display system. However, it has a non-trivial dynamic with wealch behavior (may have regular, caotic behavior or even mixed, in which case in the phase space of a single Billiard coexist regular and caotic regions). Second, the numerical treatment of these systems does not require numerical integration of differential equations and, therefore, does not consume much runtime. In addition, the Billiards allows we make investigations of fundamental character, for example, we can study how regular systems react to being slightly disturbed.

**Keywords:** Dynamical Systems. Deterministic Chaos. Analytical Mechanics. . .



# LISTA DE FIGURAS

1	Bilhar Retangular . . . . .	p. 12
2	Bilhar de Sinai . . . . .	p. 13
3	Bilhar de Bunimovich . . . . .	p. 13
4	Um dos modos de vibração para um tambor retangular. A figura representa o relevo da membrana do tambor fotografado em um dado instante. Observe que o padrão é completamente regular. Fonte: [3]. . . . .	p. 14
5	Um dos modos de vibração para um tambor com a forma do Bilhar de Bunimovich. O relevo da membrana não apresenta regularidade alguma, exceto as simetrias. Fonte: [3]. . . . .	p. 14
6	Instante da Colisão da partícula com a fronteira do Bilhar . . . . .	p. 21
7	Bilhar Circular . . . . .	p. 22
8	Espaço de fase para o bilhar circular . . . . .	p. 23
9	Bilhar suavemente deformado com $\epsilon = 0.1$ e posição inicial $(-0.1, -0.5)$	p. 25
10	Bilhar suavemente deformado com $\epsilon = 0.2$ e posição inicial $(-0.1, -0.5)$	p. 25
11	Bilhar suavemente deformado com $\epsilon = 0.3$ e posição inicial $(-0.1, -0.5)$	p. 26
12	Bilhar suavemente deformado com $\epsilon = 0.4$ e posição inicial $(-0.1, -0.5)$	p. 26
13	Bilhar suavemente deformado com $\epsilon = 0.5$ e posição inicial $(-0.1, -0.5)$	p. 27
14	Bilhar Anular. . . . .	p. 27
15	Bilhar anular concêntrico posição inicial $(0.5, 0.5)$ . . . . .	p. 28
16	Bilhar anular com $d = 0.03$ e posição inicial $(0.5, 0.5)$ . . . . .	p. 28
17	Bilhar anular com $d = 0.07$ e posição inicial $(0.5, 0.5)$ . . . . .	p. 29
18	Bilhar anular com $d = 0.15$ e posição inicial $(0.5, 0.5)$ . . . . .	p. 29
19	Bilhar anular com $d = 0.225$ e posição inicial $(0.5, 0.5)$ . . . . .	p. 30

20	Bilhar anular com $d = 0.45$ e posição inicial $(0.5, 0.5)$ . . . . .	p. 30
21	Bilhar anular com $d = 0.58$ e posição inicial $(0.5, 0.5)$ . . . . .	p. 31
22	Bilhar Elíptico . . . . .	p. 31
23	Espaço de fase para o Bilhar elíptico com excentricidade 0.3 e posição inicial $(0.2, -0.48)$ . . . . .	p. 32
24	Bilhar elíptico com um círculo concêntrico de raio $r = 0.4$ e posição inicial $(0.2, -0.48)$ . . . . .	p. 33
25	Bilhar elíptico com uma elipse concêntrica de excentricidade $e = 0.3$ e posição inicial $(0.2, -0.48)$ . . . . .	p. 34
26	Bilhar elíptico com uma elipse concêntrica de excentricidade $e = 0.6$ e posição inicial $(0.2, -0.48)$ . . . . .	p. 35
27	Bilhar elíptico com uma elipse concêntrica de excentricidade $e = 0.9$ e posição inicial $(0.2, -0.48)$ . . . . .	p. 35
28	Bilhar Elíptico com um quadrado concêntrico de lado $l = 0.1$ e posição inicial $(0.2, -0.58)$ . . . . .	p. 36
29	Bilhar Elíptico com um quadrado concêntrico de lado $l = 0.4$ e posição inicial $(0.2, -0.58)$ . . . . .	p. 36
30	Bilhar Elíptico com um quadrado concêntrico de lado $l = 1.0$ e posição inicial $(0.2, -0.58)$ . . . . .	p. 37
31	Oscilador Harmônico. Fonte: [7] . . . . .	p. 41
32	Libração na projeção do espaço de fase no plano $(q_i, p_i)$ . . . . .	p. 43
33	Rotação na projeção do espaço de fase no plano $(q_i, p_i)$ . . . . .	p. 44

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	p. 12
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS</b>	p. 16
2.1	Dinâmica dos Sistemas Integráveis . . . . .	p. 17
2.2	Dinâmica dos Sistemas Quase-Integráveis . . . . .	p. 19
2.3	Sistemas Não-Integráveis . . . . .	p. 19
<b>3</b>	<b>BILHARES</b>	p. 20
3.1	Dinâmica de um Bilhar . . . . .	p. 20
3.2	Bilhar Circular . . . . .	p. 21
3.2.1	Bilhar Circular Suavemente Deformado . . . . .	p. 23
3.3	Bilhar Anular . . . . .	p. 25
3.3.1	Caso concêntrico . . . . .	p. 25
3.3.2	Caso não-concêntrico . . . . .	p. 26
3.4	Bilhar Elíptico . . . . .	p. 29
3.5	Bilhar Elíptico deformado . . . . .	p. 32
3.5.1	Bilhar Elíptico com círculo concêntrico . . . . .	p. 32
3.5.2	Bilhar Elíptico com elipse concêntrica . . . . .	p. 33
3.5.3	Bilhar Elíptico com quadrado concêntrico . . . . .	p. 34
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	p. 38
<b>5</b>	<b>APÊNDICE</b>	p. 40

5.1	Equações de Hamilton . . . . .	p. 40
5.2	Transformações Canônicas . . . . .	p. 42
5.3	Variáveis Ângulo-Ação . . . . .	p. 43
<b>REFERÊNCIAS</b>		p. 45

# 1 INTRODUÇÃO

Os Bilhares são regiões bidimensionais confinantes em que uma partícula de tamanho desprezível está em movimento com velocidade constante em módulo e pode eventualmente colidir com as fronteiras do sistema. Tais tipos de sistemas são usados para investigações em várias áreas de pesquisa, como Caos na mecânica clássica[1] e na mecânica quântica[2, 3].

O movimento em um Bilhar retangular, mostrado na Figura 1, não é caótico. Movimentos que começam com condições iniciais ligeiramente próximas continuam próximos um do outro com o passar do tempo. O movimento geral da bola terá sempre a mesma direção depois de 4 colisões com a fronteira do bilhar[2, 3].

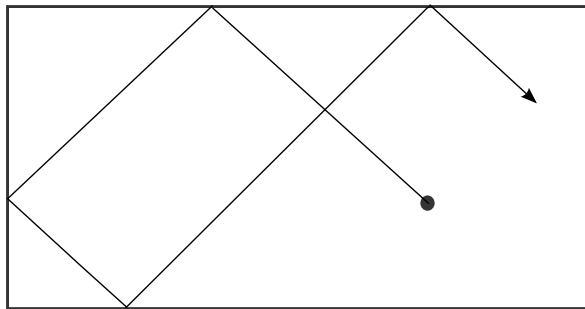


Figura 1: Bilhar Retangular

Uma pequena alteração nesse sistema, por exemplo, colocando um círculo interno fixo, como sugerido pelo matemático russo Yacob Sinai e mostrado na figura 2, terá como efeito desfocalizar as trajetórias (algo muito semelhante será feito nesse trabalho). Logo, movimentos com condições iniciais ligeiramente diferentes podem ter um movimento a longo prazo muito diferente do movimento nos instantes iniciais. Este tipo de Bilhar exhibe comportamento caótico[3]. Sistemas caóticos serão tratados nas seções 2.2 e 2.3.

Outro tipo de Bilhar que exhibe comportamento caótico é o Bilhar de Bunimovich, devido ao matemático russo Leonid Bunimovich, Figura 3. Esse Bilhar é construído adicionando duas partes semi-circulares ao Bilhar retangular, que servirão como desfo-

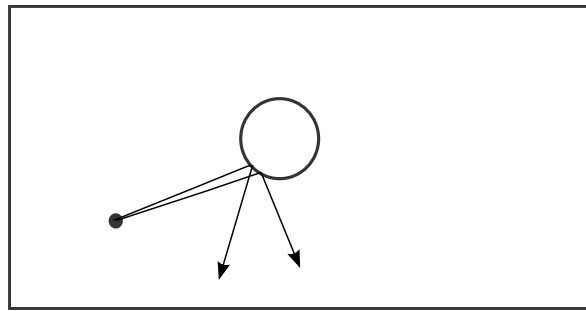


Figura 2: Bilhar de Sinai

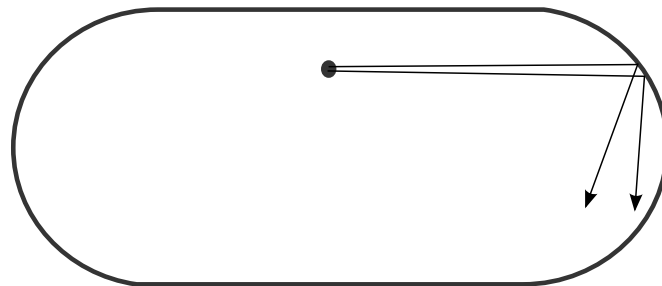


Figura 3: Bilhar de Bunimovich

calizadoras das trajetórias. Nesse sistema, também temos comportamento caótico[2, 3].

Dos exemplos acima, percebe-se que a desfocalização da trajetória tem um papel fundamental na ocorrência de caos na mecânica clássica[3].

No domínio da mecânica quântica, temos que as partículas evidenciam sua natureza ondulatória. No Bilhar quântico, a cada colisão da partícula com a fronteira, teremos uma onda associada à partícula que é refletida e interfere com as reflexões da onda devido a colisões anteriores e posteriores. Teremos então um padrão de interferência e um dos problemas quânticos iniciais correspondentes ao jogo do Bilhar clássico é saber quais ondas cabem nas formas das Figuras 1, 2, 3 ou de outros tipos de Bilhares. Podemos pensar nesse problema como se os Bilhares fossem tambores que vibram. Surge então naturalmente a seguinte pergunta: Podemos decompor o movimento de vibração do tambor em modos de vibração, com diferentes frequências? As Figuras 4 e 5 mostram um modo de vibração de tambor com a forma de um Bilhar retangular e de um Bilhar de Bunimovich[3], respectivamente.

Uma outra aplicação da teoria de Caos quântico é a tecnologia de nanoestruturas em semicondutores. Os Bilhares podem ser usados para modelar o que chamam de pontos quânticos, que são minúsculas regiões usadas para confinar elétrons e estão previstos como

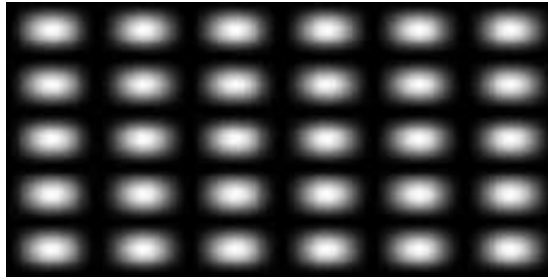


Figura 4: Um dos modos de vibração para um tambor retangular. A figura representa o relevo da membrana do tambor fotografado em um dado instante. Observe que o padrão é completamente regular. Fonte: [3].

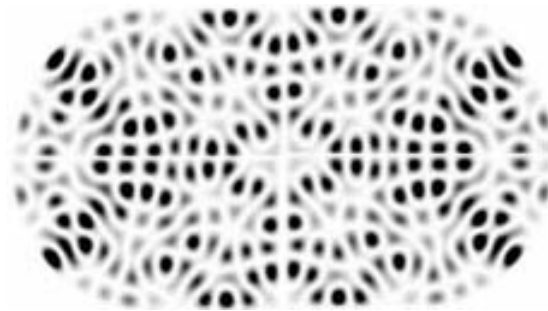


Figura 5: Um dos modos de vibração para um tambor com a forma do Bilhar de Bunimovich. O relevo da membrana não apresenta regularidade alguma, exceto as simetrias. Fonte: [3].

o ponto de partida para futuras gerações de dispositivos eletrônicos, como os transistores.

Nesse trabalho os Bilhares são usados com o objetivo de perceber como sistemas dinâmicos integráveis, que serão definidos na seção 2.1, evoluem para sistemas caóticos à medida em que aplicamos uma perturbação no sistema. Nesses sistemas não há nenhum tipo de dissipação de energia e nenhum campo externo aplicado, logo, temos que a energia total do movimento e o módulo da velocidade são constantes. A análise do movimento de uma partícula confinada dentro de um Bilhar será feita por meio do espaço de fase do sistema. Para construirmos esses espaços de fase, veremos como tratar sistemas integráveis por meio de uma transformação canônica que, devido ao fato de que sistemas integráveis possuem um número de constantes de movimento igual ao número de graus de liberdade, nos permitem reescrever a Hamiltoniana que representa o sistema em uma forma mais simples, em que as equações de Hamilton são extremamente fáceis de serem resolvidas. Feito isso, iremos aplicar uma pequena perturbação nesses sistemas e ver como evoluem à medida que o grau da perturbação aumenta. Para entendermos a evolução desses sistemas com a perturbação, iremos lançar mão dos Teorema KAM[4, 5, 6] e Teorema de Poincaré-Birkhoff[5]. O Teorema KAM nos diz o que acontece no espaço de fase quando o sistema sofre uma perturbação. Já o segundo, o Teorema de Poincaré-Birkhoff, nos diz como

acontece a mudança sofrida pelo sistema no espaço de fase.



## 2 SISTEMAS DINÂMICOS

Dentro da grande classe dos sistemas dinâmicos, existe uma de grande interesse que é a classe dos sistemas dinâmicos integráveis. Por sistemas integráveis, entendemos sistemas cujas equações de movimento são resolvidas por meio de quadraturas, ou seja, por meio de integrais de funções conhecidas. Para tais sistemas, é fundamental a existência de um número de constantes de movimentos maior ou igual ao número de graus de liberdade do sistema. Antes de tratarmos um sistema integrável com  $N$  graus de liberdade, exemplificaremos essa ideia com um sistema unidimensional conservativo, ou seja, em que a energia total é constante. Exemplos de sistemas desse tipo podem ser um oscilador harmônico, um corpo em queda livre nas proximidades da superfície terrestre, entre outros. Em tais sistemas, temos que a energia total é expressa por:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x), \quad (2.1)$$

a energia total é uma constante de movimento. Por esse fato, podemos reescrever a equação (2.1) em função de  $\dot{x}$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \quad (2.2)$$

e a equação acima é facilmente resolvida para o tempo  $t$ :

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\zeta))}} \quad (2.3)$$

Aplicando um procedimento algébrico de inversão, pode-se escrever  $x = x(t)$ , ou seja, a equação de movimento do sistema.

Na seção seguinte, iremos desenvolver a versão dessa ideia para sistemas com  $N$  graus de liberdade. Como no exemplo acima, o número de constantes de movimento é igual ou maior que o número de graus de liberdade do sistema e desempenha um papel fundamental

na caracterização dos sistemas integráveis.

## 2.1 Dinâmica dos Sistemas Integráveis

Um sistema com  $N$  graus de liberdade é dito integrável se possui no mínimo  $N$  constantes de movimento. Assim, tomemos um sistema  $S$  integrável com  $N$  graus de liberdade descrito pela Hamiltoniana (Ver Apêndice 5.1):

$$H = H(q_i, p_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.4)$$

onde

$$f_i = f_i(q_i, p_i) = c_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.5)$$

são as  $N$  constantes de movimento.

Nessas variáveis as equações de movimento (equações de Hamilton) ficam:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial p_i} \quad (2.6)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial q_i} \quad (2.7)$$

sujeita aos vínculos (2.5).

Acontece que não sabemos nada se as integrais para  $\vec{q}$  e  $\vec{p}$  provenientes das equações (2.6) e (2.7) são facilmente solúveis. Dependendo do nosso sistema, elas podem ser bastante complicadas ou bastante simples. Gostaríamos de não arriscar e então é natural perguntar se existe alguma transformação canônica  $T$  (Ver Apêndice 5.2) que torna a dinâmica do sistema trivial. De fato, devido as  $N$  constantes de movimento, podemos definir novas variáveis  $(\vec{Q}, \vec{P})$  de tal forma que as novas equações de Hamilton em termos dessas variáveis sejam facilmente resolvidas. A ideia que nos leva a crer que tal transformação existe é bastante simples[5]. Iremos apresentá-la aqui em sua forma mais simples.

Suponha que temos  $N$  constantes de movimentos dadas por (2.5). Definiremos novas variáveis  $(\vec{Q}, \vec{P})$  de tal forma que  $P_i = f_i(q_i, p_i)$ , ou seja, identificaremos nossos  $\vec{P}$ 's com nossas  $N$  constantes de movimento, daí a sua necessidade. Como os  $P_i$  são constantes, temos

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial h(Q_i, P_i)}{\partial Q_i} = 0, \quad (2.8)$$

logo,  $h$  (nova Hamiltoniana) não pode depender dos  $\vec{Q}$ 's, ou seja,  $h = h(\vec{P})$ . Já a outra

equação, temos

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial h(Q_i, P_i)}{\partial P_i} = \omega_i = cte, \quad (2.9)$$

Temos então dois novos conjuntos de equações nessas novas variáveis cuja integração é trivial:  $P_i = P_{i0}$  e  $Q_i = Q_{i0} + \omega_i t$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Fica claro então que existe uma transformação canônica que torna a dinâmica trivial.

Identificando então  $(\vec{Q}, \vec{P})$  com as variáveis de ângulo-ação  $(\vec{\phi}, \vec{J})$  (Ver Apêndice 5.3), temos que a nova Hamiltoniana fica:

$$h = h(\vec{J}) \quad (2.10)$$

da qual derivam-se equações de movimento diretamente integráveis:

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial h}{\partial \phi_i} = 0 \Rightarrow J_i = r_i = cte, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial h}{\partial J_i} = \omega_i = cte \Rightarrow \phi_i = \omega_i t + \phi_{i0}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

As equações (2.11) e (2.12) em duas dimensões ficam:

$$J_1 = r_1 \quad (2.13)$$

$$J_2 = r_2 \quad (2.14)$$

$$\phi_1 = \omega_1 t + \phi_{10} \quad (2.15)$$

$$\phi_2 = \omega_2 t + \phi_{20} \quad (2.16)$$

Essas quatro equações acima caracterizam um movimento sobre um toro, que também é chamado de toro invariante, pois uma trajetória que inicia sobre ele jamais escapa desse toro. Pode-se dizer que temos dois movimentos circulares uniformes independentes nas coordenadas  $\phi_1$  e  $\phi_2$  com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  de rotação, respectivamente, dadas por:

$$\omega_1 = \frac{\partial h(J_1, J_2)}{\partial J_1} \quad (2.17)$$

$$\omega_2 = \frac{\partial h(J_1, J_2)}{\partial J_2} \quad (2.18)$$

Os toros podem ser de dois tipos. Quando a razão entre as frequências acima é um número racional temos um toro racional e quando a razão entre as frequências é um número irracional temos um toro irracional. Se o toro é racional, a trajetória é periódica com período igual ao mínimo múltiplo comum à  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Se o toro é irracional, a trajetória

nunca se fecha e, portanto, o toro é completamente coberto após um intervalo de tempo infinito.

## 2.2 Dinâmica dos Sistemas Quase-Integráveis

Sistemas conservativos quase-integráveis são obtidos pela aplicação de uma perturbação fraca que preserva a conservação da energia de um sistema integrável. Anteriormente, estudamos o comportamento de sistemas integráveis. Agora, veremos como esses sistemas reagem ao serem levemente perturbados.

Segundo o teorema KAM[4, 5, 6], na presença de uma perturbação fraca, os toros irracionais não se quebram, mas apenas se deformam levemente, enquanto que os toros racionais são gradativamente destruídos e se espalham de uma maneira extremamente irregular entre os toros preservados de tal forma que o volume ocupado por eles tende a zero. Mas, com o aumento da intensidade da perturbação os toros irracionais também começam a ser destruídos um a um até o último.

A maneira como os toros são destruídos é descrita pelo teorema de Poincaré-Birkhoff [5]: Na presença de uma perturbação fraca, os toros racionais ressonam e se quebram. Em seu lugar, surgem uma sequência de pontos de equilíbrio estável (chamados de pontos elípticos) e instável (chamados de pontos hiperbólicos). Ao redor dos pontos elípticos aparecem pequenas estruturas regulares composta por toros racionais e irracionais, auto-similares ao sistema original. As órbitas próximas aos pontos hiperbólicos ficam altamente instáveis, ou caóticas, dando origem a uma sequência de pontos distribuídos de maneira aleatória no espaço de fase.

## 2.3 Sistemas Não-Integráveis

Quando a perturbação aplicada no sistema se torna forte o suficiente, todos os toros racionais e irracionais são quebrados e o espaço de fase é coberto por pontos distribuídos aleatoriamente e dizemos que o espaço de fase está coberto pelo mar de caos. Um sistema com tal espaço de fase é dito não-integrável ou caótico. Sistemas caóticos apresentam a propriedade de que dados dois movimentos com condições iniciais próximas, com o passar do tempo, esses dois movimentos podem estar muito distantes um do outro.

## 3 BILHARES

### 3.1 Dinâmica de um Bilhar

Os Bilhares que serão estudados nesse trabalho são integráveis porque possuem sempre no mínimo duas constantes de movimento. São elas: Energia total do movimento e módulo da velocidade da partícula. Entre dois impactos com as paredes do Bilhar, a partícula move-se em linha reta com velocidade constante, pois não há campos de forças atuando sobre o Bilhar. Assim, as informações relevantes sobre as trajetórias da partícula encontram-se nos pontos de colisão com a fronteira e a órbita fica completamente especificada pela sequência de posições e direções logo após os impactos. Dessa forma, analisaremos o movimento a partir da equação  $g(r, \theta) = g_0$ , já que cada ponto nessa equação representa uma colisão e pode ser caracterizado pela coordenada  $S = S(\theta)$  e  $p = \cos(\alpha)$ , onde  $\theta$  é o ângulo polar,  $S$  é o comprimento da fronteira do Bilhar medida a partir do semi-eixo x positivo até o ponto da colisão dividido pelo comprimento total do Bilhar e  $\alpha$  é o ângulo de reflexão[1]. Conseqüentemente, a dinâmica de um Bilhar fica reduzida ao estudo da sequência de pontos  $(S_i, p_i)$  e seu espaço de fase será o espaço formado pelas coordenadas  $S$  e  $p$ . Nesse espaço, uma órbita periódica aparecerá como uma linha pontilhada (linha onde todos os pontos estão igualmente espaçados), identificando toros racionais. por outro lado, uma órbita quase-periódica surgirá como uma linha contínua (toros irracionais). Além disso, uma órbita caótica aparecerá como uma série de pontos espalhados de maneira aleatória sobre o espaço de fase (mar de caos).

Para obter a sequência de pontos  $(S_i, p_i)$  a partir de uma condição inicial  $(S_0, p_0)$ , é necessário conhecer a equação que caracteriza o contorno do Bilhar

$$g(r, \theta) = g_0 \quad \text{ou} \quad f(x, y) = f_0 \quad (3.1)$$

e a equação que nos diz qual o valor da tangente ao Bilhar no ponto de colisão

$$\tan \beta = G(r, \theta) \quad \text{ou} \quad \tan \beta = F(x, y). \quad (3.2)$$

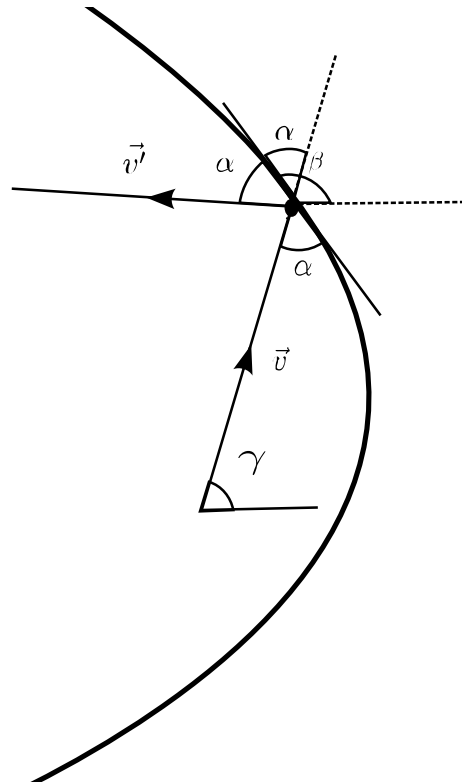


Figura 6: Instante da Colisão da partícula com a fronteira do Bilhar

No instante em que acontece a colisão, como mostrado na Figura 6, temos que a velocidade da partícula sofre uma rotação de  $2\alpha$ , em que  $\alpha$ , ângulo entre a velocidade da partícula e a reta tangente ao ponto de colisão, é o ângulo de reflexão. Para obtermos o ângulo de reflexão, primeiro calculamos ângulo  $\gamma$  que a velocidade da partícula faz com um eixo paralelo ao eixo x e subtraímos do ângulo tangente ao ponto de colisão  $\beta$ .

Cada um dos resultados mostrados nas próximas seções deste capítulo foram obtidos pela simulação de 20 experimentos realizados com o auxílio da linguagem de programação Fortran. Cada experimento corresponde a um movimento da partícula dentro do Bilhar com uma condição inicial diferente e evolui no tempo por  $10^6$  iterações.

## 3.2 Bilhar Circular

O Bilhar circular está mostrado na Figura 7. Assumindo que o centro do Bilhar esteja localizado na origem, temos que ele é definido pela seguinte equação

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3.3)$$

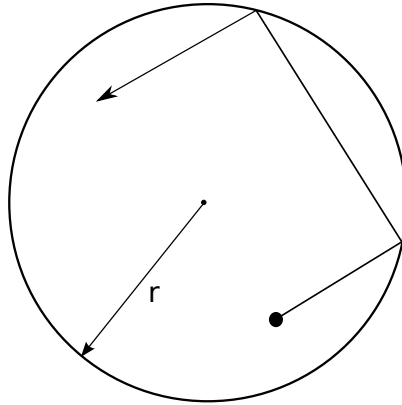


Figura 7: Bilhar Circular

onde  $r$  é o raio. A tangente em um ponto  $(x, y)$  da borda do Bilhar é obtida da equação (3.3) derivando implicitamente em relação a  $x$ :

$$2xdx + 2ydy = 0 \rightarrow ydy = -xdx \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (3.4)$$

Ou seja,

$$\tan \beta = -\frac{x}{y} \quad (3.5)$$

No espaço de fase na Figura 8 percebemos linhas pontilhadas, caracterizando o Bilhar circular como um sistema integrável. Todos os movimentos possíveis nesse Bilhar são regulares. O espaço de fase foi gerado para uma posição inicial  $(x, y) = (-0.1, -0.5)$  e 20 direções diferentes para as velocidades iniciais.

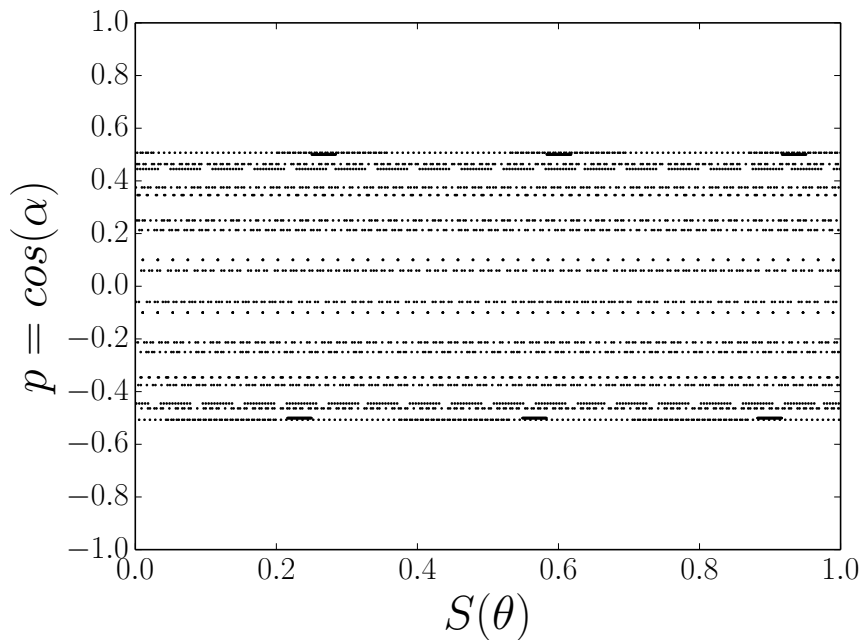


Figura 8: Espaço de fase para o bilhar circular

### 3.2.1 Bilhar Circular Suavemente Deformado

Deformaremos o Bilhar suavemente, definindo o Bilhar circular suavemente deformado. As equações que caracterizam esses Bilhares são:

$$r - \epsilon \cos \theta = 1 \quad (3.6)$$

ou

$$\frac{x^2 + y^2 - \epsilon x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 \quad (3.7)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro que varia de 0 a 0.5 e nos fornece o grau de deformação do Bilhar.

Para calcularmos a tangente em um ponto da borda desse Bilhar, devemos notar que

$$x = f(\theta) \cos(\theta)$$

e

$$y = f(\theta) \sin(\theta),$$

onde  $f(\theta) = r = 1 + \epsilon \cos(\theta)$ . A derivada de  $y$  em relação a  $x$  é, usando a regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta)\cos(\theta) + f'(\theta)\sen(\theta)}{-f(\theta)\sen(\theta) + f'(\theta)\cos(\theta)} \quad (3.8)$$

Aplicando a equação (3.8) para  $f(\theta) = r = 1 + \epsilon\cos(\theta)$ , temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\theta) + \epsilon\cos^2(\theta) - \epsilon\sen^2(\theta)}{-\sen(\theta) - \epsilon\sen(\theta)\cos(\theta) - \epsilon\sen(\theta)\cos(\theta)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sen(\theta)[\epsilon\sen(\theta) - \cotg(\theta) - \epsilon\cotg(\theta)\cos(\theta)]}{-\sen(\theta)[1 + 2\epsilon\cos(\theta)]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\epsilon\sen(\theta) - (1 + \epsilon\cos(\theta))\cotg(\theta)}{1 + 2\epsilon\cos(\theta)}$$

substituindo  $1 + \epsilon\cos(\theta) = r$  no numerador e  $1 + 2\epsilon\cos(\theta) = \epsilon\cos(\theta) + r$  no denominador

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\epsilon\sen(\theta) - r\cotg(\theta)}{\epsilon\cos(\theta) + r} \quad (3.9)$$

sabendo que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e

$$\sen(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

temos que a equação (3.9) fica

$$\tan \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{\epsilon y^2 - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2 + \epsilon x)} \quad (3.10)$$

Nas Figuras 9, 10, 11, 12 e 13 encontramos o espaço de fase gerado para  $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  e  $0.5$ , posição inicial  $(x, y) = (-0.1, -0.5)$  e para 20 direções diferentes para as velocidades iniciais, respectivamente.

De acordo com o Teorema KAM, quando  $\epsilon \neq 0$  mas ainda  $\epsilon \ll 1$ , temos que o sistema preserva sua integrabilidade, como podemos ver nos espaços de fase mostrados nas Figuras 9, 10. Para  $\epsilon = 0.3$ , o sistema se torna praticamente não-integrável, com alguns poucos toros deformados. Para  $\epsilon = 0.4, 0.5$  o Bilhar circular suavemente deformado perde sua característica integrável e o seu espaço de fase está densamente coberto pelo mar de caos.

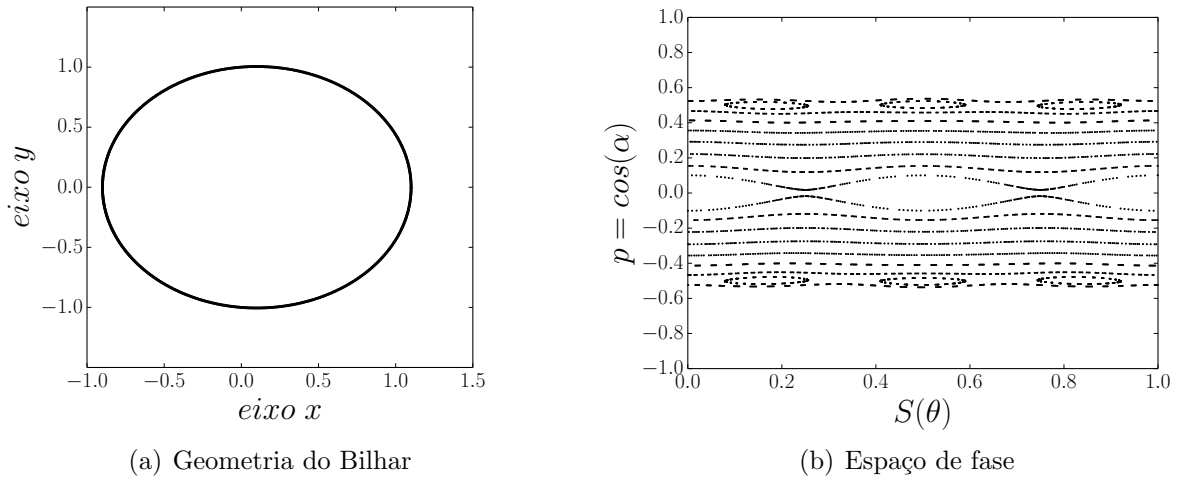


Figura 9: Bilhar suavemente deformado com  $\epsilon = 0.1$  e posição inicial  $(-0.1, -0.5)$

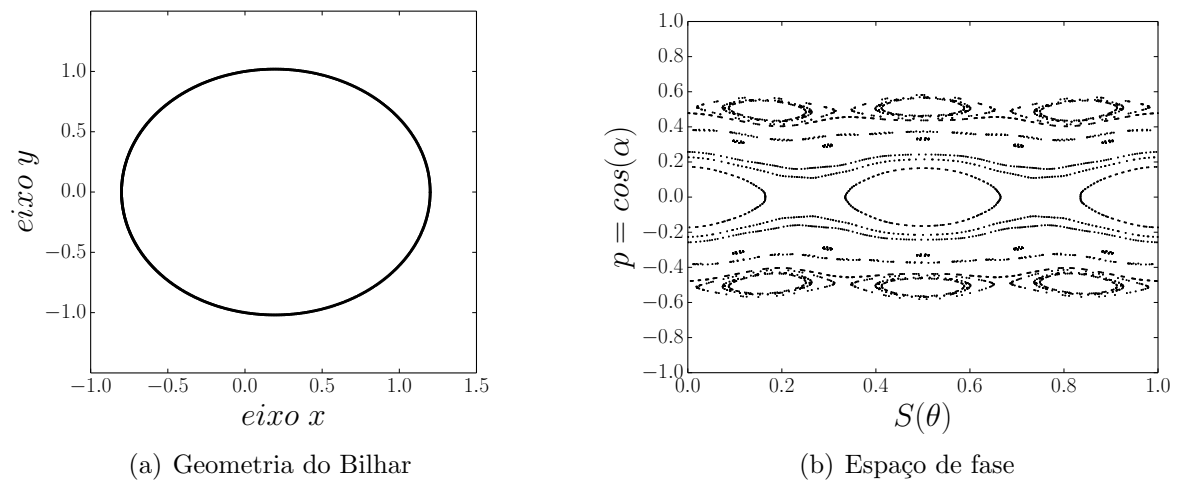


Figura 10: Bilhar suavemente deformado com  $\epsilon = 0.2$  e posição inicial  $(-0.1, -0.5)$

### 3.3 Bilhar Anular

O Bilhar anular pode ser considerado como uma deformação no Bilhar circular por meio de uma introdução de uma fronteira interna. Está mostrado na Figura 14. O comprimento  $d$  é a distância entre os centros dos círculos de raio  $b$  e raio  $a$ . Nesse sistema, o círculo interno apenas irá desfocalizar as trajetórias.

#### 3.3.1 Caso concêntrico

Da Figura 14, se fizermos  $d = 0$ , teremos o caso em que o centro dos círculos irão coincidir. Esse é o Bilhar anular concêntrico. O espaço de fase desse Bilhar gerado para

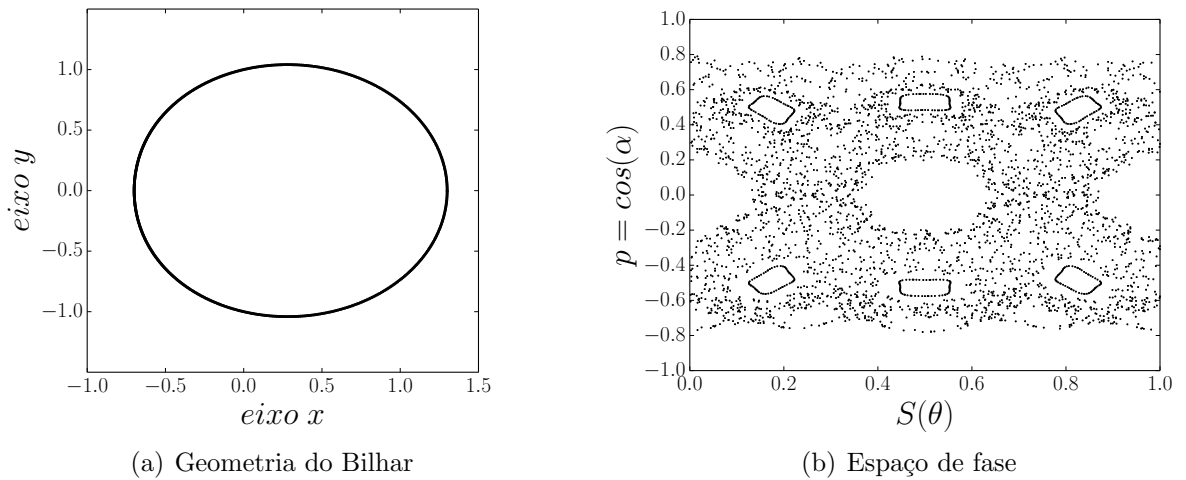


Figura 11: Bilhar suavemente deformado com  $\epsilon = 0.3$  e posição inicial  $(-0.1, -0.5)$

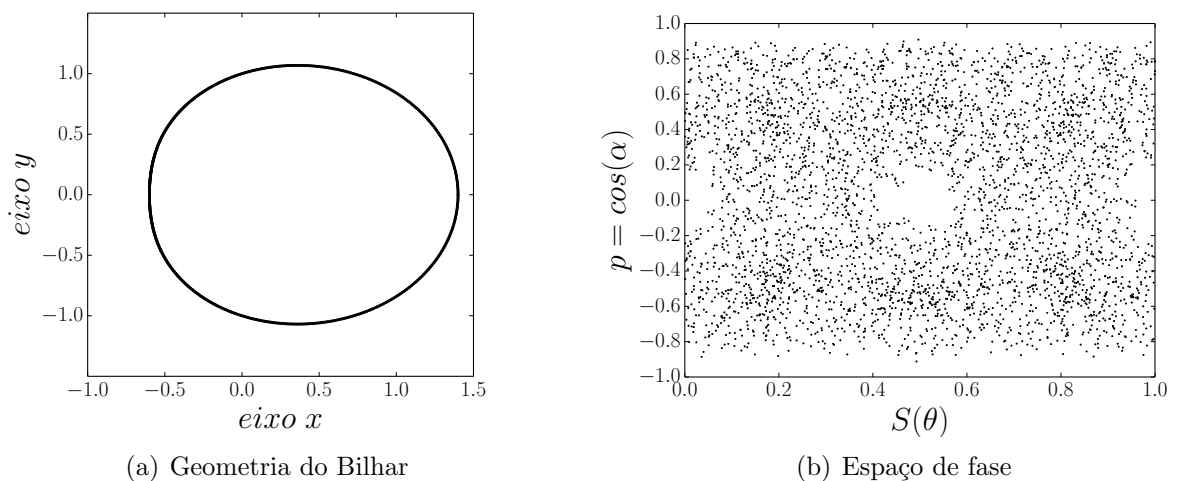


Figura 12: Bilhar suavemente deformado com  $\epsilon = 0.4$  e posição inicial  $(-0.1, -0.5)$

uma posição inicial  $(x, y) = (0.5, 0.5)$  e para 20 direções diferentes para as velocidades iniciais está mostrado na Figura 15.

O espaço de fase desse sistema apresenta toros racionais e irracionais. O Bilhar circular resiste bem à perturbação. Podemos considerar o Bilhar anular concêntrico uma leve perturbação no Bilhar circular, pois aqui, os toros destruídos ocupam uma área irrelevante no espaço de fase.

### 3.3.2 Caso não-concêntrico

Agora coloquemos uma outra perturbação no nosso sistema e analisemos o que acontece no espaço de fase e como o comportamento do nosso sistema pode evoluir de um com-

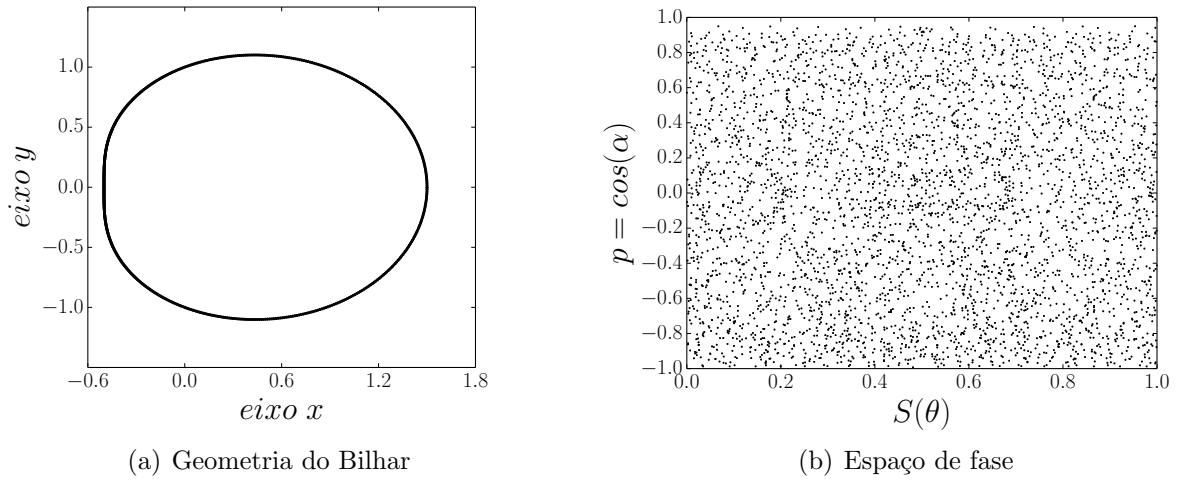


Figura 13: Bilhar suavemente deformado com  $\epsilon = 0.5$  e posição inicial  $(-0.1, -0.5)$

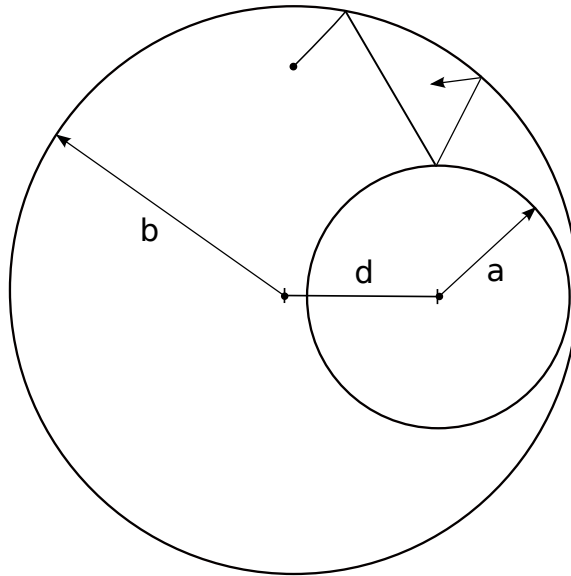


Figura 14: Bilhar Anular.

portamento quase-integrável para um comportamento não-integrável. Nossa perturbação consiste em deslocar o centro do círculo interno de raio  $a$  de uma distância  $d$  ao longo do eixo  $x$ , imaginando que o Bilhar esteja no centro de um sistema cartesiano. Os espaços de fase gerados para uma posição inicial  $(x, y) = (0.5, 0.5)$  e 20 direções diferentes para as velocidades iniciais para os valores de  $d = 0.03, 0.07, 0.15, 0.225, 0.45$  e  $0.58$  estão, respectivamente, nas Figuras 16, 17, 18, 19, 20 e 21.

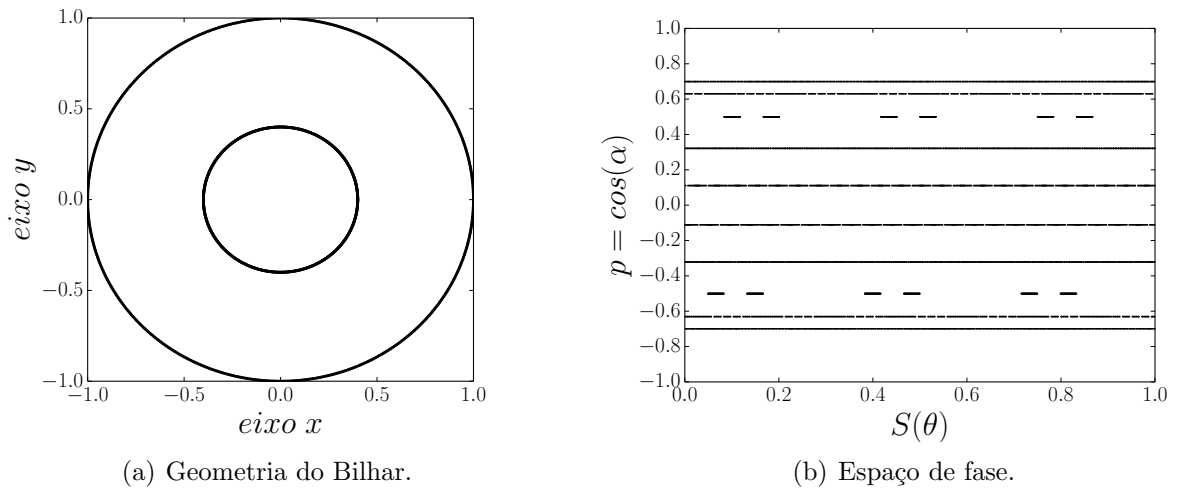


Figura 15: Bilhar anular concêntrico posição inicial  $(0.5, 0.5)$ .

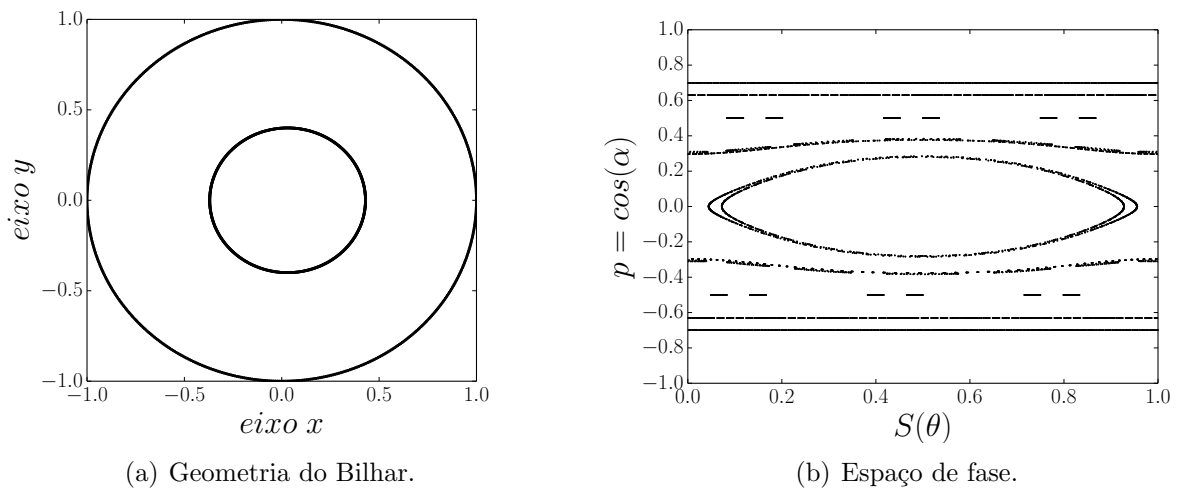


Figura 16: Bilhar anular com  $d = 0.03$  e posição inicial  $(0.5, 0.5)$ .

Para uma pequena perturbação de  $d = 0.03$ , o Bilhar anular ainda resiste em ser um sistema integrável mas já para  $d = 0.07$ , o espaço de fase já mostra alguns poucos toros sendo que em sua maioria, está coberto pelo mar de caos, como podemos ver já na Figura 17. Nas Figuras 18, 19, 20 e 21 podemos ver que o sistema se torna praticamente não-integrável, com alguns poucos toros que ainda resistem à deformação que representam movimentos regulares para suas respectivas condições iniciais.

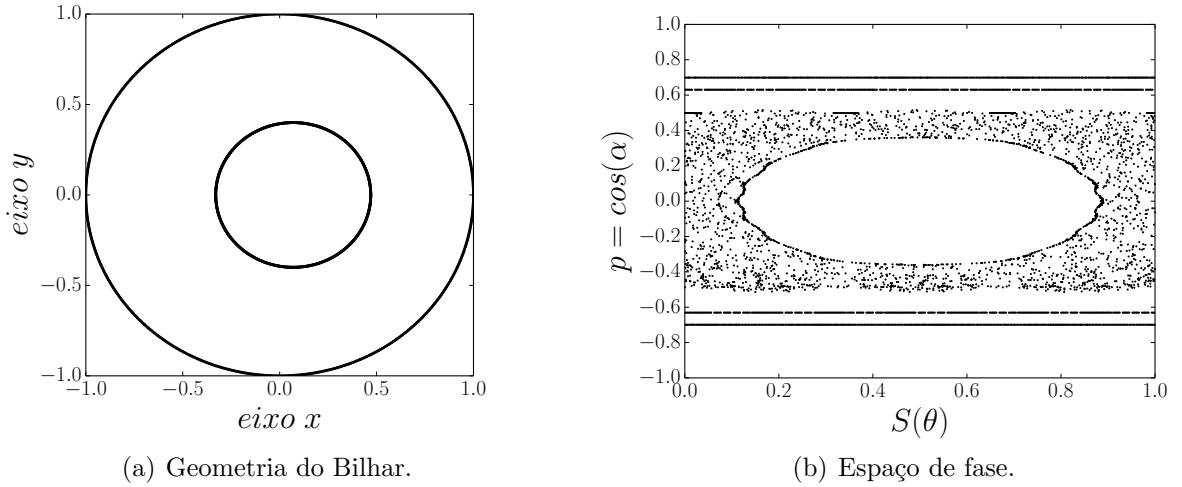


Figura 17: Bilhar anular com  $d = 0.07$  e posição inicial  $(0.5, 0.5)$ .

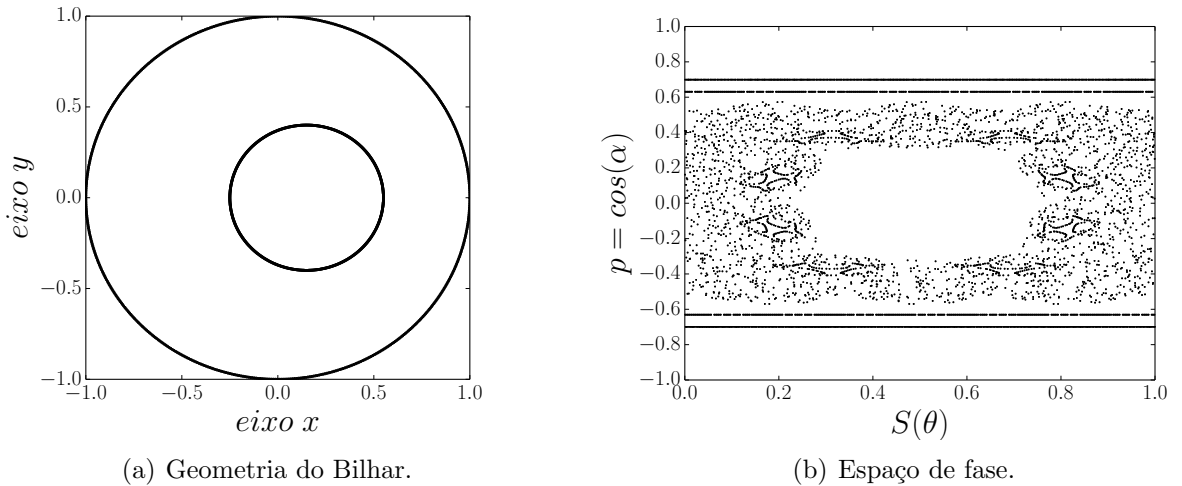


Figura 18: Bilhar anular com  $d = 0.15$  e posição inicial  $(0.5, 0.5)$ .

### 3.4 Bilhar Elíptico

O Bilhar elíptico está mostrado na Figura 22. Assumindo que o centro do Bilhar esteja na origem de um sistema cartesiano, com eixo maior igual  $a$  e eixo menor  $b$ , as equações que o definem são:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.11)$$

ou

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 = b^2 \quad (3.12)$$

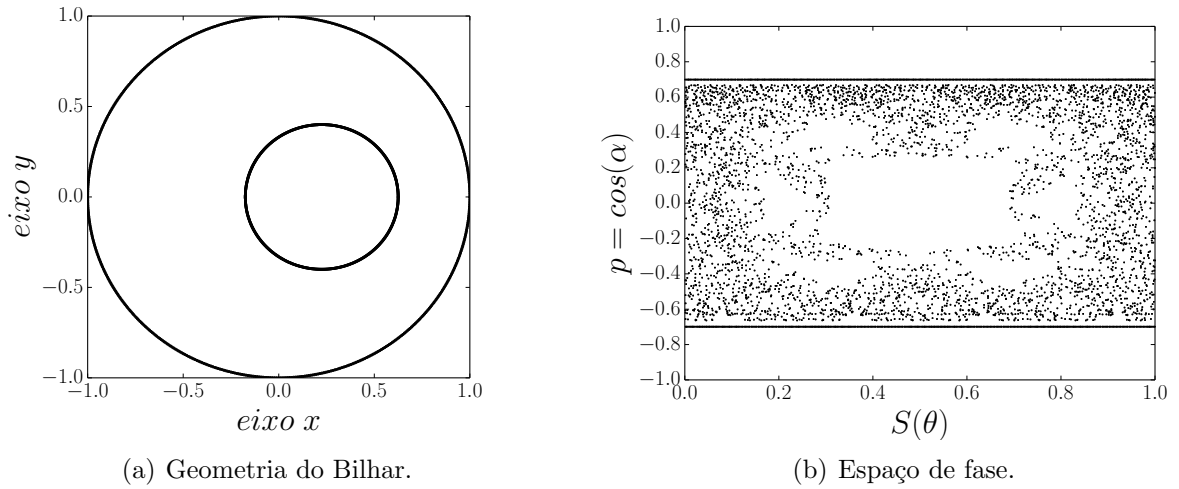


Figura 19: Bilhar anular com  $d = 0.225$  e posição inicial  $(0.5, 0.5)$ .

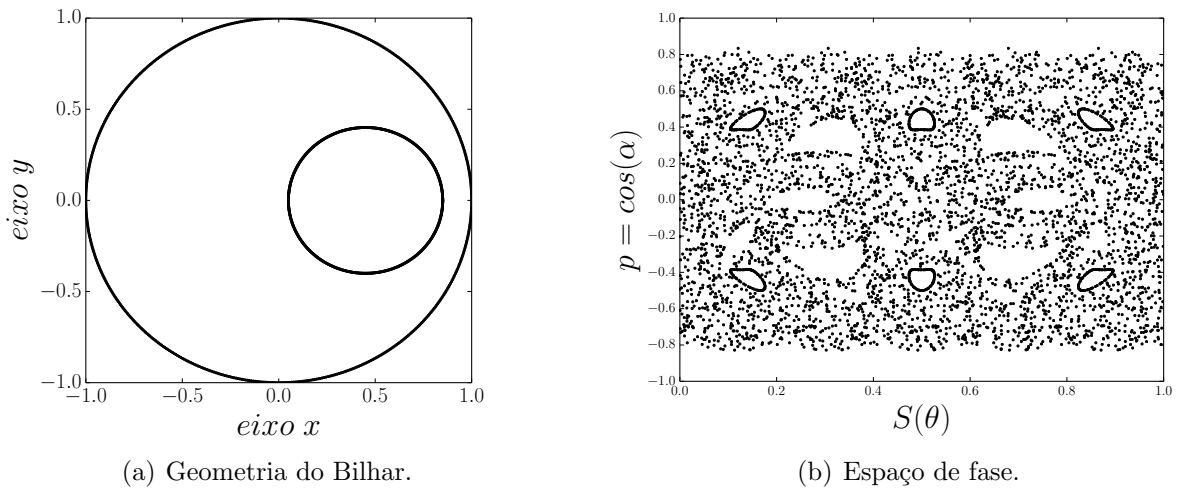


Figura 20: Bilhar anular com  $d = 0.45$  e posição inicial  $(0.5, 0.5)$ .

onde  $e$  é a excentricidade da elipse, dada por:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (3.13)$$

A tangente em um ponto  $(x, y)$  da borda desse Bilhar é dado por:

$$\frac{2xdx}{a^2} + \frac{2ydy}{b^2} = 0$$

$$\frac{xdx}{a^2} = -\frac{ydy}{b^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

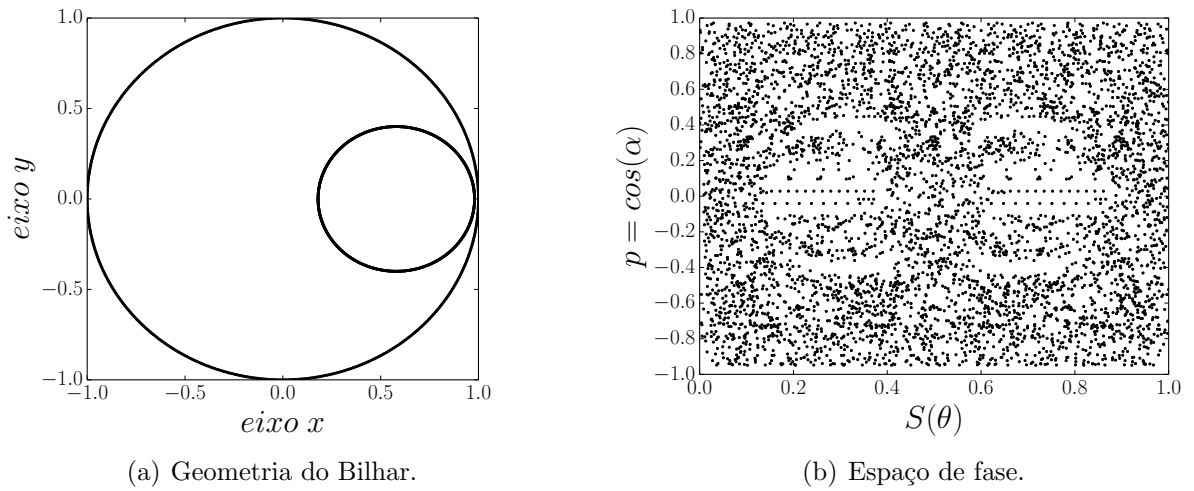


Figura 21: Bilhar anular com  $d = 0.58$  e posição inicial  $(0.5, 0.5)$ .

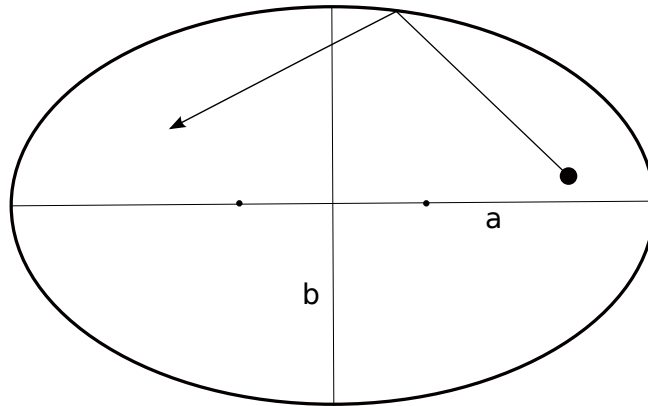


Figura 22: Bilhar Elíptico

$$\tan \beta = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (3.14)$$

ou em termos de excentricidade:

$$\tan \beta = (e^2 - 1) \frac{x}{y} \quad (3.15)$$

Na Figura 23 temos o espaço de fase do Bilhar elíptico com excentricidade igual a 0.3 para uma posição inicial  $(x, y) = (0.2, -0.48)$  e para 20 direções diferentes para as velocidades iniciais. O Bilhar elíptico é um sistema integrável, como evidencia a presença de toros racionais e irracionais no seu espaço de fase



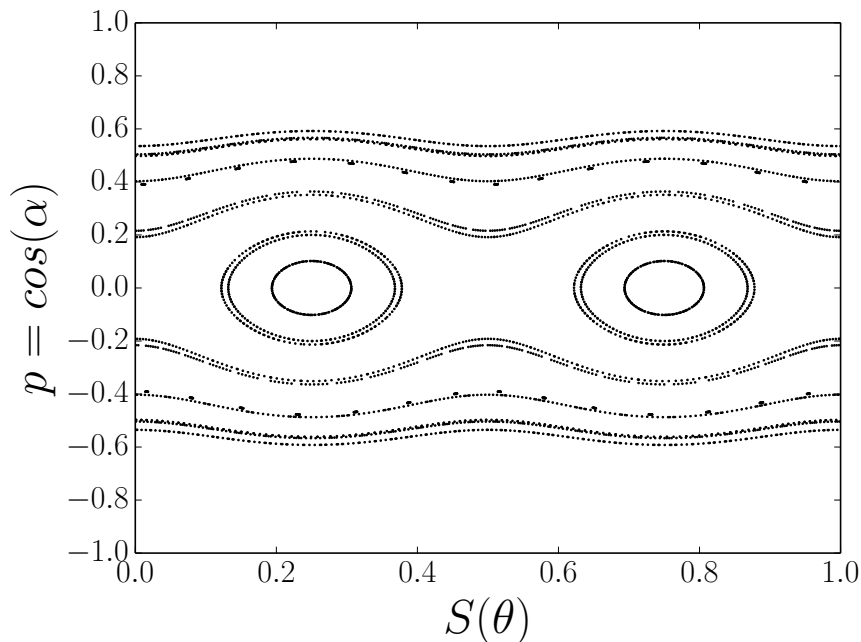


Figura 23: Espaço de fase para o Bilhar elíptico com excentricidade 0.3 e posição inicial  $(0.2, -0.48)$

### 3.5 Bilhar Elíptico deformado

Iremos considerar três tipos de perturbação em um Bilhar do tipo elíptico. Essas perturbações irão introduzir uma fronteira interna. A primeira delas será a introdução de um círculo interno. Na segunda deformação, consideremos uma elipse e na terceira, iremos pôr um quadrado. Essas fronteiras internas serão colocadas de forma a ficarem concêntricas à elipse. Para a segunda e terceira perturbações citadas acima, iremos também gerar uma outra perturbação, que será aumentar a excentricidade da elipse interna e os lados do quadrado concêntrico.

#### 3.5.1 Bilhar Elíptico com círculo concêntrico

O espaço de fase mostrado na Figura 24 para o Bilhar elíptico com um círculo concêntrico mostra alguns toros suavemente deformados e algumas regiões em que há toros destruídos. O sistema é praticamente não-integrável.

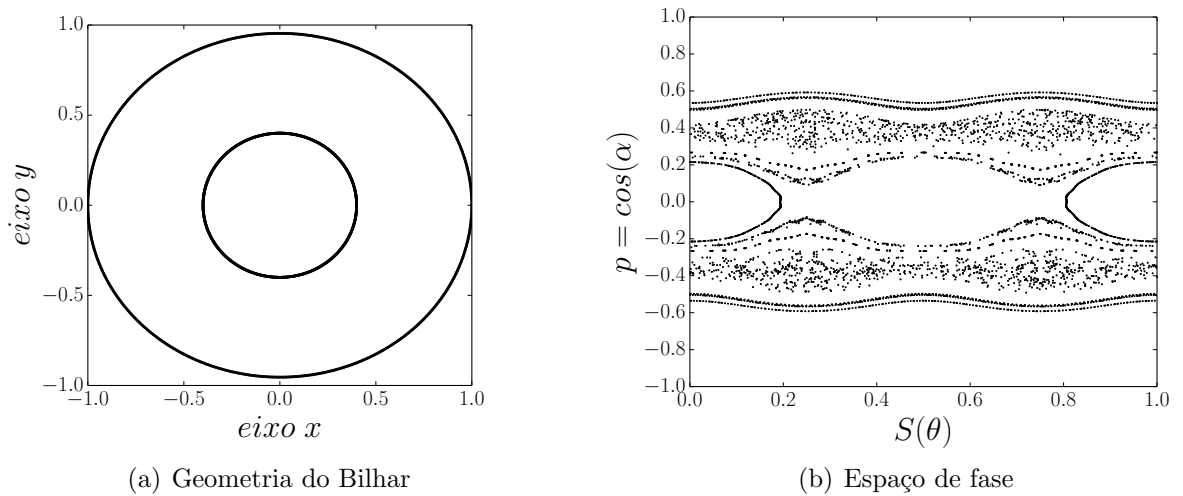


Figura 24: Bilhar elíptico com um círculo concêntrico de raio  $r = 0.4$  e posição inicial  $(0.2, -0.48)$ .

### 3.5.2 Bilhar Elíptico com elipse concêntrica

Os espaços de fase para o Bilhar elíptico com uma elipse interna estão mostrados nas Figuras 25, 26 e 27 para uma posição inicial  $(x, y) = (0.2, -0.48)$  e para 20 direções diferentes para as velocidades iniciais. Na primeira, temos o espaço de fase com uma elipse interna de excentricidade  $e = 0.3$ , que é a mesma excentricidade da elipse externa. O espaço de fase aqui é praticamente idêntico ao mostrado na Figura 24. Curioso é que ao aumentarmos a excentricidade da elipse concêntrica para  $e = 0.6$ , como está mostrado na Figura 26 obtemos um espaço de fase de um sistema quase-integrável, com alguns toros apenas deformados. Para  $e = 0.9$ , mostrado na Figura 27 percebemos que os toros destruídos devido a perturbação se tornam expressivos e que ainda temos alguns toros deformados, caracterizando o comportamento de um sistema integrável para algumas condições iniciais (Como podemos ver nas bordas superior e inferior e nas linhas contínuas na região central direita da Figura 27) e não-integrável para outras (Região cheia de pontos espalhados aleatoriamente).

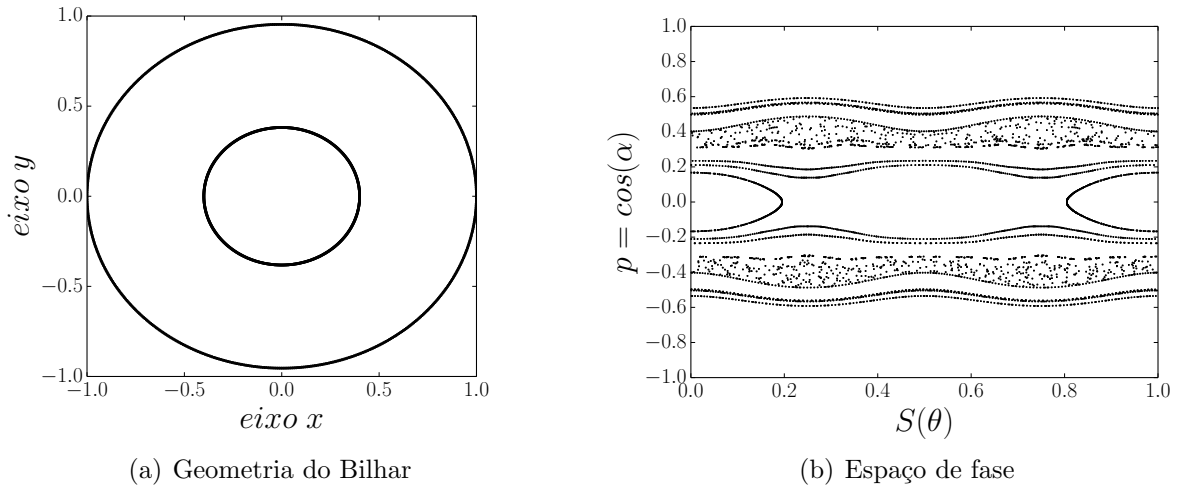


Figura 25: Bilhar elíptico com uma elipse concêntrica de excentricidade  $e = 0.3$  e posição inicial  $(0.2, -0.48)$ .

### 3.5.3 Bilhar Elíptico com quadrado concêntrico

Nas Figuras 28, 29 e 30 temos a geometria e o espaço de fase gerado para três comprimentos de lado do quadrado concêntrico, são eles:  $l = 0.1$ ,  $0.4$  e  $1.0$ , com posição inicial  $(x, y) = (0.2, -0.58)$  e 20 direções diferentes para as velocidades iniciais diferentes. Para  $l = 0.1$ , o espaço de fase mostrado na Figura 28 se assemelha ao espaço de fase de um Bilhar elíptico, o que se é de esperar, pois a deformação é pequena nesse caso. No espaço de fase mostrado na Figura 29, para  $l = 0.4$ , temos um sistema quase-integrável, com a presença de alguns toros deformados e destruídos. Na Figura 30 temos o espaço de fase para  $l = 1.0$ . Podemos perceber na figura que além dos toros deformados, temos também toros destruídos perto dos toros deformados.

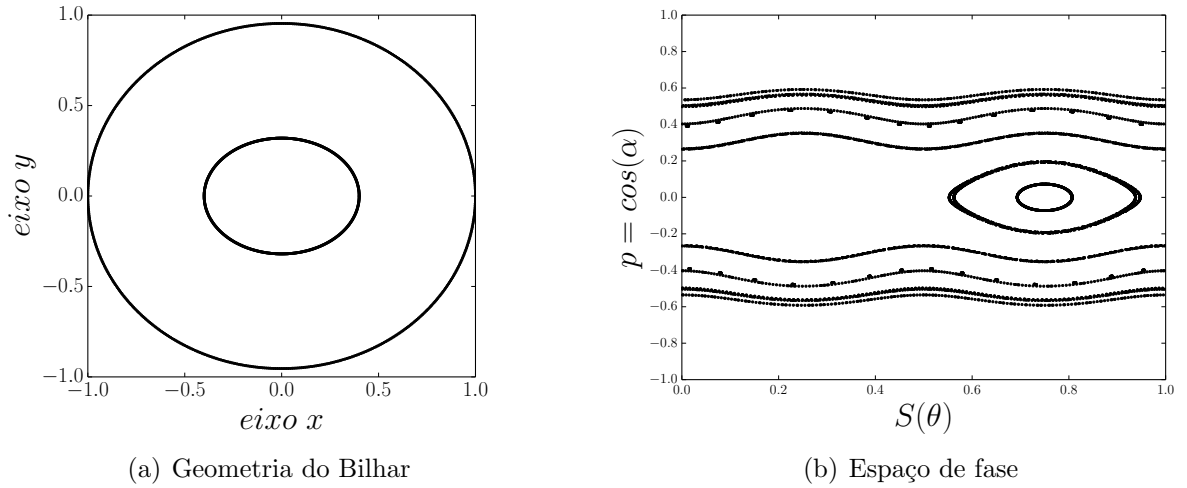


Figura 26: Bilhar elíptico com uma elipse concêntrica de excentricidade  $e = 0.6$  e posição inicial  $(0.2, -0.48)$ .

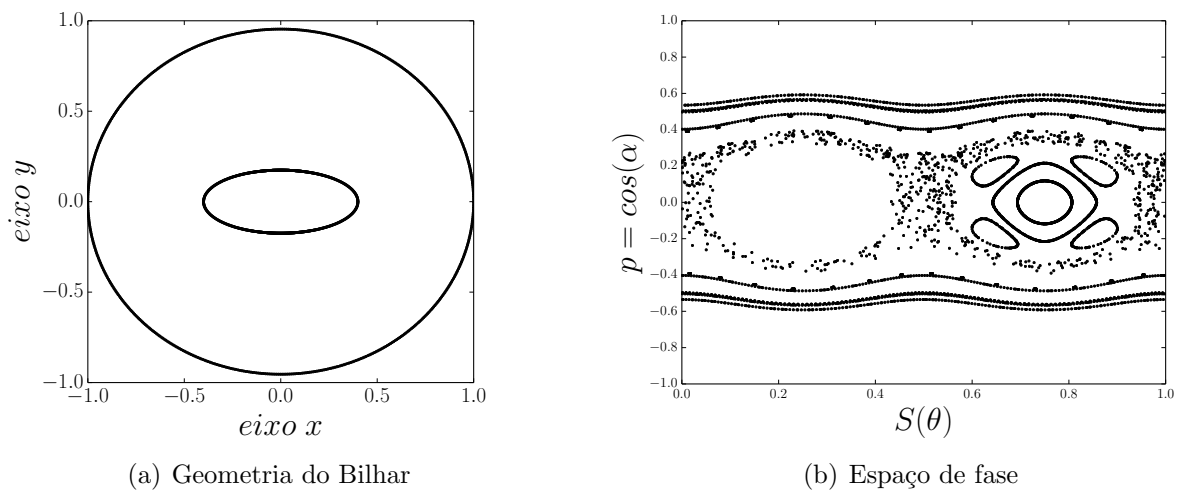
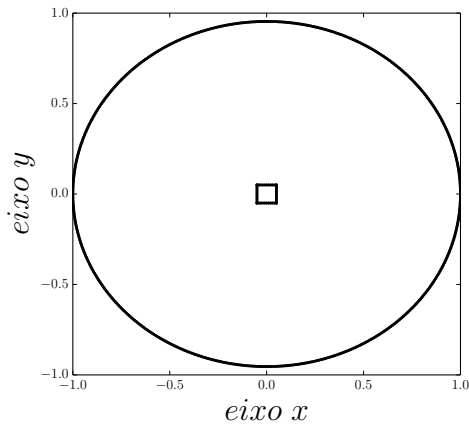
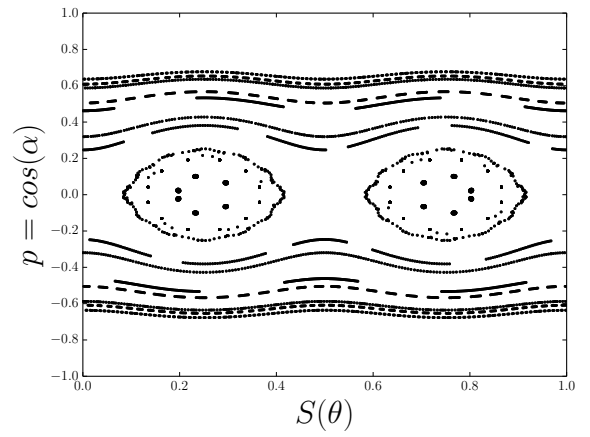


Figura 27: Bilhar elíptico com uma elipse concêntrica de excentricidade  $e = 0.9$  e posição inicial  $(0.2, -0.48)$ .

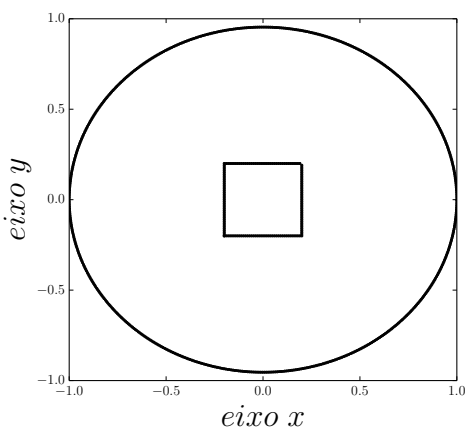


(a) Geometria do Bilhar

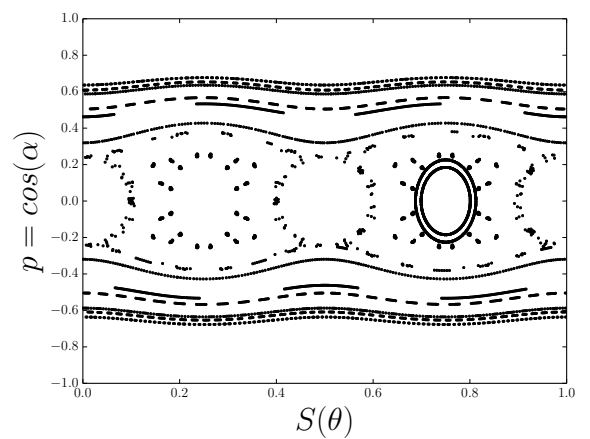


(b) Espaço de fase

Figura 28: Bilhar Elíptico com um quadrado concêntrico de lado  $l = 0.1$  e posição inicial  $(0.2, -0.58)$ .

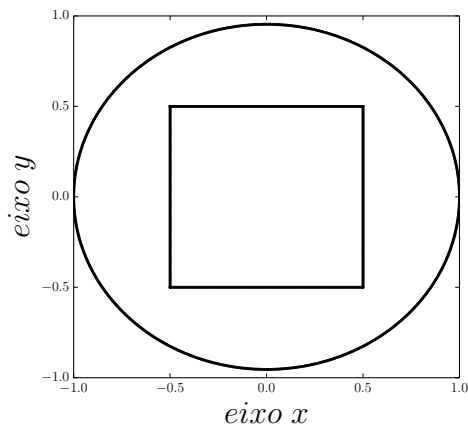


(a) Geometria do Bilhar.

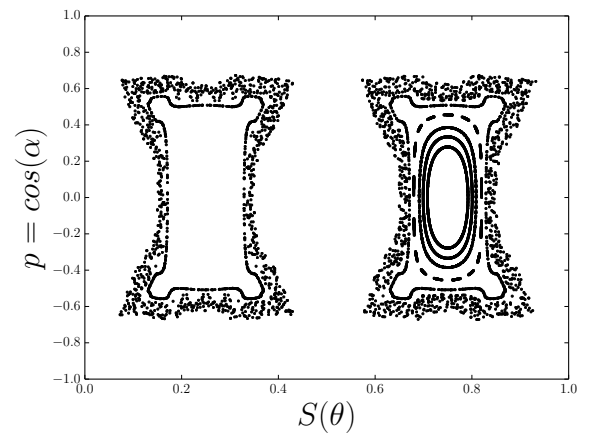


(b) Espaço de fase

Figura 29: Bilhar Elíptico com um quadrado concêntrico de lado  $l = 0.4$  e posição inicial  $(0.2, -0.58)$ .



(a) Geometria do Bilhar



(b) Espaço de fase

Figura 30: Bilhar Elíptico com um quadrado concêntrico de lado  $l = 1.0$  e posição inicial  $(0.2, -0.58)$ .

## 4 CONCLUSÃO

Nesse trabalho partimos de dois tipos de Bilhares, são eles: circular e elíptico. Esses dois sistemas são integráveis, pois possuem o módulo da velocidade e a energia mecânica como constante de movimento. Logo, podemos perceber nos espaços de fases desses dois sistemas, mostrados respectivamente, nas Figuras 8 e 23, a presença de toros racionais e irracionais, indicando que os tais sistemas são de fato integráveis.

Para o Bilhar circular, foram aplicadas duas perturbações. A primeira consistiu em uma deformação no raio da forma  $r = 1 + \epsilon \cos\theta$  e a segunda consistiu de uma adição de um contorno circular interno concêntrico e não-concêntrico. No primeiro caso, a medida que aumentamos o valor do parâmetro  $\epsilon$ , o sistema vai perdendo sua integrabilidade, como mostrado nos espaços de fase das Figuras 11, 12 e 13, ou seja, os toros se destroem na forma prevista pelo teorema KAM. No segundo caso, à medida que deslocamos horizontalmente o centro do contorno circular interno, a maioria dos toros se quebram, sendo que ainda permanecem algumas regiões de movimentos regulares para algumas condições iniciais. Os espaços de fase para esse caso estão mostrados nas Figuras 17, 18, 19, 20 e 21.

Para o Bilhar elíptico, foram aplicadas três perturbações. A primeira consistiu na inclusão de um contorno circular interno concêntrico. A segunda perturbação consistiu na inclusão de um contorno elíptico interno concêntrico e a terceira perturbação consistiu na inclusão de um contorno quadrado concêntrico. No primeiro caso, temos algumas regiões de movimentos regulares e algumas de movimentos caóticos, como mostrado na Figura 24. No segundo, ao aumentarmos o valor da excentricidade da elipse interna, o sistema resiste bastante em manter sua integrabilidade, apresentando no espaço de fase, Figuras 24, 25, 26 e 27, regiões de movimentos integráveis e de movimentos quase-integráveis. No último caso, ao aumentarmos o lado do quadrado interno, observamos uma forte resistência em manter os movimentos regulares do sistema frente a perturbação causada. Os espaços de fase para esse caso estão mostrados nas Figuras 28, 29 e 30.

Os Bilhares acabaram por se mostrar sistemas extremamente simples em que se pode

facilmente ilustrar os conceitos de perturbação em sistemas integráveis. Observamos nos espaços de fase do Biliar circular e elíptico frente a uma perturbação como os toros, que são regiões onde movimentos associados a sistemas integráveis acontecem no espaço de fase, são deformados e destruídos, originando assim, uma evolução dos sistemas citados do estado integrável para um estado quase-integrável ou caótico.



## 5 APÊNDICE

### 5.1 Equações de Hamilton

Qualquer sistema n-dimensional pode ser descrito por uma função denominada Função Hamiltoniana

$$H = H(\vec{q}, \vec{p}) \quad (5.1)$$

onde  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  e  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  são, respectivamente, as n coordenadas e os n momentos que descrevem o sistema em cada instante de tempo.

As equações de movimento são obtidas da Hamiltoniana por meio das relações:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

As equações (5.2) e (5.3) são ditas as equações de Hamilton para o sistema descrito pela Hamiltoniana (5.1).

Para a grande maioria dos sistemas físicos, a energia cinética é uma função que depende somente do quadrado da velocidade e a energia potencial independe da velocidade. Nesse caso, a Hamiltoniana pode ser expressa como a soma da energia cinética com a energia potencial, ou seja,

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = T + V \quad (5.4)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial. Para exemplificarmos o que foi dito acima, iremos escrever a Hamiltoniana para um sistema simples, o oscilador harmônico. Tal sistema, mostrado na Figura 31, possui uma energia cinética dada por

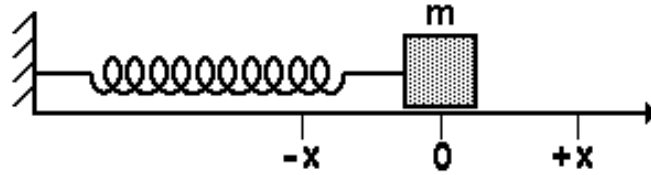


Figura 31: Oscilador Harmônico. Fonte: [7]

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2 \quad (5.5)$$

e uma energia potencial devido a sua interação com a mola dada por:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.6)$$

onde  $p$  é o momento linear da partícula e  $k$  é a constante de mola. Aqui, como o sistema é unidimensional,  $\vec{q}$  e  $\vec{p}$  ambos possuem apenas uma componente que serão identificadas, respectivamente, com  $x$  (posição da partícula) e com  $p = mv$  (momento linear da partícula). Podemos ver em (5.5) que a energia cinética é função somente do quadrado das velocidades e em (5.6) que a energia potencial independe da velocidade, podemos assim facilmente montar a Hamiltoniana, que é:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \quad (5.7)$$

e as equações de Hamilton são:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.8)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \quad (5.9)$$

As equações (5.8) e (5.9) acima formam um sistema de equações que pode ser facilmente resolvido. Primeiro, derivemos em relação ao tempo a equação (5.8), assim

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} \quad (5.10)$$

agora, substituindo  $\dot{p}$  em (5.10) por (5.9), temos

$$\ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0 \quad (5.11)$$

que é a equação de movimento do oscilador harmônico, cuja solução geral é a seguinte:

$$q(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (5.12)$$

onde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência de oscilação do sistema.

## 5.2 Transformações Canônicas

Muitas vezes, ao resolvermos nossos problemas, desejamos realizar uma transformação no sistema em estudo para buscar algum tipo de informação que pensamos se tornará mais evidente depois que o sistema for transformado. No espaço de fase uma transformação de variáveis interessante são as que preservam a forma das equações de Hamilton. Precisamente, dadas as variáveis canônicas  $(\vec{q}, \vec{p})$ , a Hamiltoniana  $H(\vec{q}, \vec{p})$  e as equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.13)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.14)$$

Uma transformação

$$Q_i = Q_i(\vec{q}, \vec{p}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.15)$$

$$P_i = P_i(\vec{q}, \vec{p}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.16)$$

é canônica quando se pode construir uma nova Hamiltoniana  $h = h(\vec{Q}, \vec{P})$  tal que as equações de movimento para as novas variáveis tenham a forma Hamiltoniana:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial h}{\partial P_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.17)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial h}{\partial Q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.18)$$

### 5.3 Variáveis Ângulo-Ação

As variáveis de ângulo-ação são obtidas através de uma transformação canônica das variáveis canônicas de Hamilton,  $(\vec{q}, \vec{p})$ . Elas são usadas para facilitar o cálculo de frequências associadas ao movimento de vários sistemas. Sistemas para o qual usamos a técnica das variáveis de ângulo-ação são conhecidos por sistemas multiperíódicos. Estes, são sistemas em que a projeção do movimento sobre cada plano do espaço de fase é caracterizado por uma libração, em que as variáveis  $(q_i, p_i)$  oscilam entre dois limites definidos, caracterizando uma curva fechada na projeção do espaço de fase. Ou uma rotação, em que  $p_i$  é uma função periódica de  $q_i$ , embora  $q_i$  não seja função periódica do tempo. A libração e a rotação estão ilustradas, respectivamente, nas Figuras 32 e 33.

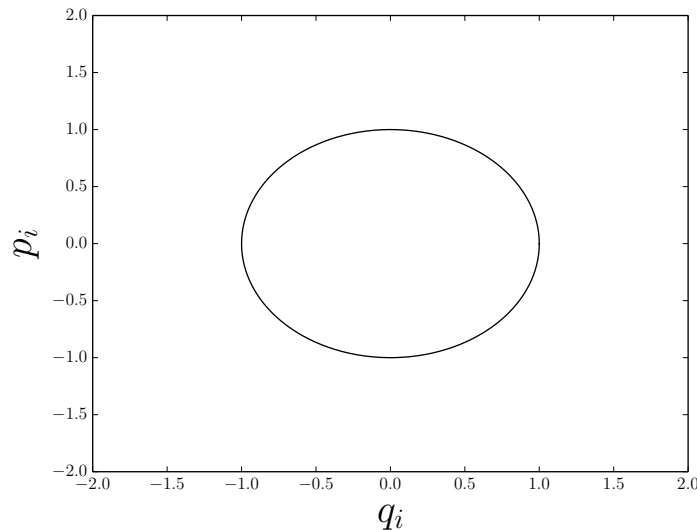


Figura 32: Libração na projeção do espaço de fase no plano  $(q_i, p_i)$

As variáveis de ação para um sistema multiperíódico com  $n$  graus de liberdade são definidas por

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \quad (5.19)$$

onde as integrais estendem-se por um período de libração ou de rotação, conforme o caso. A equação (5.19) multiplicada por  $2\pi$  nada mais é do que a área sob a curva no espaço de fase, ou seja,  $J_i$  é uma constante. Por esse fato, podemos identificar os  $J_i$ 's com os  $P_i$ 's. Logo, como  $\dot{J}_i = -\frac{\partial h}{\partial Q_i} = 0$ , temos que a nova hamiltoniana  $h$  depende apenas das variáveis de ângulo-ação. A segunda equação de Hamilton define a derivada em relação ao tempo da variável ângulo:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial h}{\partial J_i} = \omega_i \quad (5.20)$$

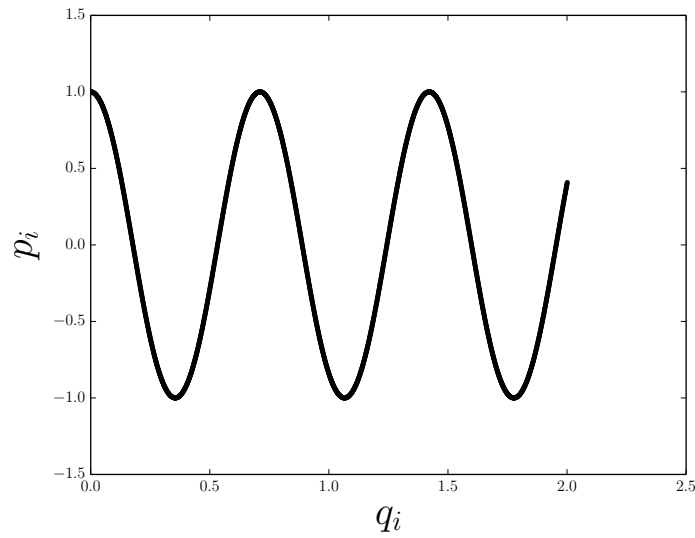


Figura 33: Rotação na projeção do espaço de fase no plano  $(q_i, p_i)$

onde os  $\omega_i$  são constantes, pois só dependem das constantes  $J_i$ . Por isso, podemos encontrar a solução para a equação (5.20) acima, que é:

$$\phi_i(t) = \omega_i t + \phi_i^0 \quad (5.21)$$

As equação (5.19) e (5.20) definem, respectivamente, as variáveis ação e ângulo para um sistema multiperíodico.

Para mais detalhes sobre o conteúdo do apêndice, indico as referências [4] [5] [6].

# REFERÊNCIAS

- [1] M V Berry, *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billiard'*, Eur. J. Phys. 2 (1981) 91-102
- [2] M V Berry, *Quantum physics on the edge of chaos*, New Scientist, 44-47
- [3] Grupo de Caos Quântico - Alfredo Miguel Ozorio de Almeida, Raúl Oscar Vallejos, *Caos e mecânica quântica*, Revista do CBPF, 42-44.
- [4] Nivaldo Lemos, *Mecânica Analítica*, Livraria da Física, São Paulo - 2004 - 1<sup>a</sup> edição
- [5] Marcus A.M. de Aguiar, *Tópicos de Mecânica Clássica*, Livraria da Física, São Paulo - 2011
- [6] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, third edition.
- [7] <http://dc251.4shared.com/doc/M8rqXndp/preview.html>