



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**EMANUEL PINHEIRO FONTELLES**

**PERCOLAÇÃO E CRITICALIDADE AUTO-ORGANIZADA**

**FORTALEZA**

**2016**

EMANUEL PINHEIRO FONTELLES

PERCOLAÇÃO E CRITICALIDADE AUTO-ORGANIZADA

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior

Coorientador: Prof. Dr. André Auto Moreira

FORTALEZA  
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Física

- 
- F762p Fontelles, Emanuel Pinheiro  
Percolação e criticalidade auto-organizada / Emanuel Pinheiro Fontelles. – 2016.  
59 f. : il. algumas color.
- Monografia (Graduação em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Departamento de Física, Curso de Bacharelado em Física, Fortaleza, 2016.  
Orientação: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior.  
Coorientação: Prof. Dr. André Auto Moreira.  
Inclui bibliografia.
1. Física Estatística. 2. Percolação. 3. Geometria fractal. 4. Criticalidade auto-organizada.  
5. Algoritmos e modelos. I. Andrade Júnior, José Soares de. II. Moreira, André Auto. III. Título.

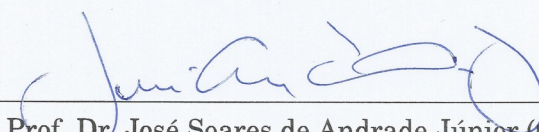
EMANUEL PINHEIRO FONTELLES

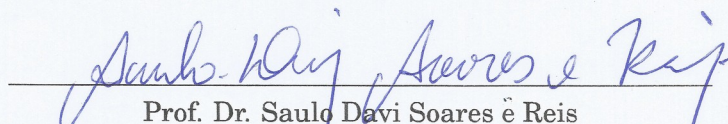
PERCOLAÇÃO E CRITICALIDADE AUTO-ORGANIZADA

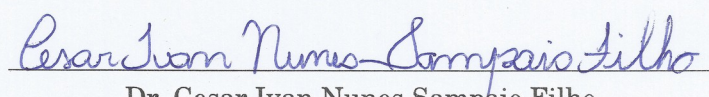
Monografia de Bacharelado apresentada à  
Coordenação da Graduação do Curso de Física,  
da Universidade Federal do Ceará, como  
requisito parcial para a obtenção do Título de  
Bacharel em Física.

Aprovada em 05/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
Dr. Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*Aos Meus Pais.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e a minha família, em especial ao meus pais *Manoel Joaquim Fontelles Filho* e *Lucyvânia Pinheiro Fontelles*, pelo esforço e dedicação, pelo empenho dedicado a minha pessoa ao longo da minha vida. Aqui expresso minha gratidão à eles, pelos caminhos trilhados comigo ao longo da minha vida. Agradeço a paciência, as histórias de vida, ao carinho, a atenção, por está comigo nos momentos mais difíceis e mesmo assim não desistir da minha luta.

Ao professor José Soares de Andrade Júnior, pela orientação e dedicação despendida ao longo da realização deste trabalho. A obstinação com que se dedica à ciência e à pesquisa é, certamente, um grande estímulo para mim.

Ao professor André Auto Moreira, pela sua co-orientação, pela sua paciência e dedicação dispendidas ao longo desse trabalho. Como professor ensinou me muito, contribuindo para minha formação acadêmica, e por isso eternamente grato.

Aos professores que contribuíram na minha formação acadêmica, em especial aos professores José Ramos Gonçalves, Andrey Chaves, Humberto Carmona, Raimundo Nogueira, Murilo Pereira e Ascânio Dias, tais professores trouxeram uma nova visão sobre o que é Física e mudaram meu pensamento sobre como ver o mundo.

Aos meus grandes amigos Raul Peixoto da Silva, Nathanaell Souza Bandeira e Michel Rodrigues Andrade que sempre disponibilizaram tempo para discussões, seja lá de quais assuntos fossem, que sempre estiveram comigo ao longo do curso de graduação e durante a realização desse trabalho, sempre dando força e encorajamento nos momentos mais cansativos.

Agradeço aos meus amigos que sempre estiveram comigo ao longo desses quatro anos, com quem sempre pude contar, Sofia Magalhães, Laura Barth, Ken Aikawa, Pablo Ramón, Fernando Almeida, Wendel Oliveira, Nicolás Carvalho, Pedro Henrique, Adaias Souza, Lucas Miranda, William Mesquita, Wagner Sena, Rafael Farias, Luan Misael, Airton dos Santos, Filipe Martins, José Bentivi e entre tantos outros que cultivaram uma longa amizade ao longo desses quatro anos.

Agradeço as pessoas que passaram por mim ao longo da minha vida, algumas deixaram impressas pegadas indestrutíveis em minha alma, outras ainda caminham comigo, compartilhando meu mundo com elas. Obrigado por cada gesto de amizade, por cada palavra dita na hora certa e por todos os instantes de sábio silêncio.

Aos funcionários do Departamento de Física, aos secretários do Departamento de Física, Jailson Neves e Dona Creuza. Aos demais funcionários, em especial a Ana Lúcia, que sempre se disponibilizava em ajudar.

Ao CNPQ - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro ao longo do período de Iniciação Científica.

## RESUMO

Nesse estudo, investigamos a Teoria de Percolação, observando alguns modelos de Percolação como a Percolação Auto-Organizada. Primeiro, propomos um panorama sobre Teoria da Percolação, como os modelos do Fogo na Floresta e o de Pilha de Areia, esses modelos criam uma perspectiva sobre o crescimento de estruturas ramificadas, e podemos analisar a fenomenologia envolvida no processo, como a forma do crescimento, dispersão da rede e o crescimento em geral. O nosso objetivo foi analisar mecanismos de crescimento para polímeros ramificados e agregados de percolação onde a auto-organização levasse o sistema à criticalidade. No caso dos polímeros, incorporamos uma regra dinâmica que regula o fluxo de monômeros (uma pequena molécula que pode ligar-se a outros monômeros formando moléculas maiores denominadas polímeros) disponíveis para a agregação e o sistema é conduzido espontaneamente para a probabilidade de ramificação crítica que separa os regimes de crescimento finito e infinito. No caso da percolação, o controle é imposto por uma regra de crescimento sobre o número de sítios ou ligações na fronteira de crescimento do agregado. O sistema em vez de crescer indefinidamente, ele é levado, novamente, de forma espontânea, ao seu estado estacionário que corresponde ao limiar de percolação da topologia da rede e do tipo do processo de percolação, percolação de sítios ou percolação de ligações. O fato de ambos os sistemas encontram-se e mantêm próximo do estado crítico sem a necessidade de um parâmetro de sintonia fina é discutida em termos do conceito de criticalidade auto-organizada. Buscamos ainda novos mecanismo que apresentam criticalidade para o sistema, como o raio de giração.

**Palavras-chave:** Percolação. Física Estatística. Percolação Auto-Organizada. Criticalidade Auto-Organizada.

## ABSTRACT

In this study, we investigated the Percolation Theory watching some models of Percolation such as Self-Organized Percolation. First, we propose an overview of Percolation Theory models like Forest fires and Sand pile, these models create a perspective on the growth of branched structures. We analyze the phenomenology involved in the process, such as growth and network scattering. Our objective was to analyze growth mechanisms for branched polymers and percolation thresholds where self-organization leads the system to criticality. In the case of polymers incorporate a dynamic rule that governs the monomer flow (a small molecule that may bind to other monomers forming larger molecules called polymer) available for aggregation and the system is driven spontaneously to the probability of critical branch that separates the finite and infinite growth regimes. In case the percolation, the control is enforced by a growth rule on the number of sites or linked to aggregate growth boundary. The system instead of growing indefinitely, he is taken again, spontaneously, to its steady state that corresponds to the network topology percolation threshold and the type of percolation process, sites percolation or bond percolation. The fact that both systems are and remain close to a critical state without the need for a fine-tuning parameter is discussed in terms of the concept of self-organized criticality. We seek new mechanism that still have criticality to the system, as the radius of gyration.

**Keywords:** Percolation. Statistical Physics. Self-Organized Percolation. Self-Organized Criticality.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Uma pedra imersa em um fluido. Análise de percolação de ligações. . . . .	15
Figura 2 – Percolação de ligações numa rede quadrada (linhas finas) para diferentes valores da probabilidade $p$ . . . . .	16
Figura 3 – Algoritmo do Fogo na Floresta. . . . .	18
Figura 4 – Conjunto de Mandelbrot. . . . .	22
Figura 5 – Aumento de escala sobre o Conjunto de Mandelbrot. . . . .	22
Figura 6 – Percolação de sítio e percolação de ligação em rede quadrada. . . . .	23
Figura 7 – Percolação de sítio em rede quadrada. . . . .	24
Figura 8 – Agregados em uma rede de percolação. . . . .	25
Figura 9 – Agregados por área em uma rede de percolação. . . . .	26
Figura 10 – O modelo da pilha de areia. . . . .	30
Figura 11 – Busca em largura. . . . .	34
Figura 12 – Agregado de percolação sujeito ao crescimento auto-organizado. . . . .	38
Figura 13 – Breadth-First Search . . . . .	49
Figura 14 – Algoritmo de Leath-Alexandrowicz. . . . .	50
Figura 15 – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas. . . . .	51
Figura 16 – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas. . . . .	51
Figura 17 – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas. . . . .	52
Figura 18 – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas. . . . .	53
Figura 19 – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas. . . . .	53
Figura 20 – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas. . . . .	54
Figura 21 – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas. . . . .	54
Figura 22 – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas. . . . .	55

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Comportamento do tempo de vida do fogo na floresta em função da probabilidade de ocupação. . . . .	19
Gráfico 2 – Análise do comportamento da probabilidade $p(t)$ como função de tempo. .	39
Gráfico 3 – Análise do comportamento da probabilidade $p(t)$ como função de tempo para diferentes probabilidades de ocupação iniciais. . . . .	40
Gráfico 4 – Análise do comportamento do número de sítios ativos, $N(t)$ , como função de tempo. . . . .	41
Gráfico 5 – Agregado de percolação sujeito ao crescimento auto-organizado por coexistência de processos dinâmicos. . . . .	42
Gráfico 6 – Análise do comportamento da probabilidade $p(t)$ como função de tempo para coexistência de processos dinâmicos. . . . .	43
Gráfico 7 – Análise do comportamento do número de sítios ativos, $N(t)$ , como função de tempo para coexistência de processos dinâmicos. . . . .	44
Gráfico 8 – Agregado de percolação sujeito ao crescimento auto-organizado por coexistência de processos dinâmicos, raio de giração. . . . .	45
Gráfico 9 – Análise do comportamento da probabilidade $p(t)$ como função de tempo para coexistência de processos dinâmicos, raio de giração. . . . .	46
Gráfico 10 – Análise do comportamento do número de sítios ativos, $N(t)$ , como função de tempo para coexistência de processos dinâmicos, raio de giração. . . . .	47

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	11
<b>1 A TEORIA DA PERCOLAÇÃO</b>	14
1.1 <b>Sistemas Complexos</b>	14
1.2 <b>Meios Aleatórios</b>	14
1.2.1 <b>Modelo de Percolação</b>	16
1.2.1.1 <b>O Modelo do Fogo na Floresta</b>	17
<b>2 CONCEITOS TEÓRICOS E DEFINIÇÕES</b>	20
2.1 <b>Geometria Fractal</b>	20
2.1.1 <b>A estrutura geométrica dos clusters de percolação</b>	20
2.1.1.1 <b>Conjunto de Mandelbrot</b>	20
2.2 <b>Percolação de Sítios</b>	23
2.3 <b>Parâmetros do Modelo de Percolação</b>	24
2.3.1 <b>Agregados em Percolação</b>	25
2.4 <b>Raio de Giração</b>	27
<b>3 PERCOLAÇÃO AUTO ORGANIZADA</b>	28
3.1 <b>Criticalidade Auto-Organizada</b>	28
3.2 <b>Modelos que apresentam Criticalidade Auto-Organizada</b>	29
3.3 <b>Percolação auto-organizada</b>	31
3.3.1 <b>Crescimento auto-organizado</b>	31
3.3.2 <b>O modelo de polimerização auto-organizada</b>	32
3.3.3 <b>Algoritmo de Leath-Alexandrowicz</b>	33
3.3.4 <b>Algoritmo de Percolação auto-organizada</b>	35
3.4 <b>Resultados</b>	37
<b>4 ALGORITMOS E MODELOS</b>	48
4.1 <b>Autômato celular</b>	48
4.2 <b>Algoritmo de Busca em Largura</b>	48
4.2.1 <b>Algoritmo de Leath-Alexandrowicz</b>	49
<b>CONCLUSÃO</b>	56
<b>REFERÊNCIAS</b>	58

## INTRODUÇÃO

Sistemas complexo, sistemas desordenados, ganharam um olhar especial há algum tempo, por diversos motivos, um deles é a capacidade de explicar fenômenos de transporte em meios irregulares, seja eles naturais ou artificiais, que se tornaram relevantes visto suas inúmeras aplicações tecnológicas e industriais. O desenvolvimento de técnicas de modelagem para descrição de fenômenos de transporte que ocorrem em meios irregulares representa hoje um verdadeiro desafio científico.

A Teoria da Percolação, proposta por Broadbent e Hammersley[1], em 1957, têm sido extensivamente estudados tanto na sua versão por ligações quanto na versão por sítios. Percolação é um modelo que trata do estudo da desordem binária dos seus elementos (sítio ou ligação) quando estes são alocados em uma rede seguindo uma probabilidade de ocupação previamente estabelecida.

Percolação é, certamente, um dos problemas mais estudados na Física Estatística. Sua conceito é simples, por se ser um modelo geométrico: na percolação de sítios, cada sítio em uma rede especificada é independentemente “ocupado”, com probabilidade  $p$ , ou não, com probabilidade  $(1 - p)$ . Os sítios ocupados formam aglomerados contínuos que têm algumas propriedades interessantes.

Em particular, o sistema exhibe uma transição de fase contínua a um valor finito de  $p$  que, em uma rede regular, é caracterizada pela formação de um aglomerado suficientemente grande para abranger todo o sistema, a partir de um lado para o outro no limite do sistema de tamanho infinito. Dizemos tal sistema “percola”[2].

Basicamente, este modelo apresenta uma transição de fase estrutural, quando a fração de ocupação  $p$  de seus elementos constituintes atinge um valor limite, denominado de probabilidade de ocupação crítica  $p_c$ . A partir desse valor crítico de ocupação, o sistema apresenta uma transição de fase estrutural passando de localmente conectado a globalmente conectado[3].

O modelo de percolação é bastante utilizado no estudo de fenômenos de transporte, crescimento de polímeros, extração de petróleo, grafos, comportamento de redes de internet. Nesse contexto, a teoria de percolação apresenta-se também como uma ferramenta adequada, tanto pela sua simplicidade conceitual quanto pela facilidade de sua implementação por meio de ferramentas computacionais.

Percolação Invasiva é uma das variantes do modelo de percolação ordinária. Introduzido por Wilkinson e Willemsen [4], em 1983, para estudar o comportamento de

dois fluidos imiscíveis em um meio poroso. O modelo de Percolação Invasiva é um modelo dinâmico onde o crescimento do agregado invadido ocorre por meio da seleção de caminhos que oferecem a menor resistência ao deslocamento da interface de separação entre os fluidos através do meio.

Há também modelos que são criticamente auto organizados, de forma que evoluem naturalmente para o estado crítico e exibem um comportamento invariante de escala. Nesse sentido a Percolação Invasiva é um modelo criticamente organizado como também a Percolação Auto-Organizada, objetivo central desse trabalho.

A Percolação Invasiva é um tipo de modelo criticamente auto organizado que evolui naturalmente para o estado crítico e exibe um comportamento invariante de escala. Um outro aspecto inerente ao modelo de percolação invasiva é a presença de avalanches durante o processo de invasão. Credita-se a ocorrência de tal fenômeno, a criticalidade em sistemas dinâmicos, isto é, avalanches ocorrem quando sistemas se encontram na fronteira entre estabilidade e instabilidade. Nesse modelo a interface de crescimento do agregado invadido, representa a interface de separação entre os dois fluidos que se movimenta no interior do meio poroso.

O modelo principal desse trabalho, trata-se da Percolação Auto-Organizada[5]. Tal modelo utiliza-se do conceito da criticalidade auto-organizada como um possível explicação para a tendência de sistemas complexos extensos tenderem a um regime crítico, estacionário em muitas das vezes. Buscamos observar esse tipo de criticalidade em redes de percolação quadrada tomando a percolação de sítios como modelo básico.

No capítulo 1, apresentamos alguns sistemas que podem ser descritos pela Teoria da Percolação de uma forma simples, observando o fenômeno de criticalidade destes sistemas. Um dos modelos a ser apresentado é Modelo do Fogo na Floresta, um modelo simples que exemplifica o fenômeno de criticalidade.

No capítulo 2, tratamos da Teoria de Percolação apresentando o modelo de percolação de sítios e alguns parâmetros do Modelo de Percolação; tais como dimensão fractal e raio de giração.

No capítulo 3, introduzimos os conceitos básicos sobre estruturas fractais, e métodos para determinação de suas respectivas dimensões. Introduzimos, ainda, os fundamentos teóricos da percolação, enfatizando o aspecto heterogêneo dos agregados de percolação. Demonstramos que o agregado percolante apresenta invariância de escala e que o comportamento de uma determinada grandeza associada a esta estrutura, como a massa ou uma propriedade de transporte, em função de seu tamanho, é regido por uma lei de potência.

No capítulo 4, tratamos de um outro modelo de percolação como processo

dinâmicos, o modelo de Percolação auto-organizada, tal modelo utiliza-se do conceito da criticalidade auto-organizada, como um possível explicação para a tendência de sistemas complexos extensos, tenderem a um regime crítico, estacionário em muitas das vezes. Aqui buscamos leis de recorrência que levem o sistema a tal regime crítico, analisando o crescimento de sítios e o tamanho da maior agregado percolante.

Por últimos dedicamos um capítulo à apresentar alguns modelos que descrevem sistemas de percolação, tal como o Algoritmo de Leath-Alexandrowicz, do qual usamos para simular redes de percolação que crescem de forma discreta com o tempo,  $t$ . Tratamos também sobre Autômatos Celular, que são bastantes usados nesse tipo de simulação, Percolação auto-organizada.

Por fim, apresentamos as considerações finais acerca do trabalho aqui desenvolvido. Sugestões e perspectivas são delineadas objetivando a realização de trabalhos futuros nessa mesma linha de pesquisa.

# 1 A TEORIA DA PERCOLAÇÃO

## 1.1 Sistemas Complexos

Sistemas Complexos é um ramo da ciência que estuda como partes de um sistema apresentam comportamentos coletivos, como esses sistemas interagem com o ambiente. Um sistema que pode ser analisado tomando seus componentes e observando as relações entre eles, de forma que o comportamento do sistema depende dos seus constituintes.

Muito dos processos interessantes na natureza estão intimamente conectados. Podemos descrever como ecossistemas atingem sua organização observando o comportamento de cada indivíduo pertencente ao sistema. Como colônias de insetos se comportam, como o cérebro formado por neurônios se organizam, como átomos se organizam de forma à formar moléculas, entre outros exemplos.

Na tentativa de entender os efeitos indiretos sobre esses sistemas, o estudo de sistemas complexos nos fornece ferramentas, algumas conceituais, que nos ajudam a compreender características sobre o sistema. Uma das ferramentas discutidas nesse trabalho é a Teoria da Percolação, um modelo geométrico, que fornece como partes de uma rede apresentam características sobre o sistema, variando alguns parâmetros sobre essa rede.

## 1.2 Meios Aleatórios

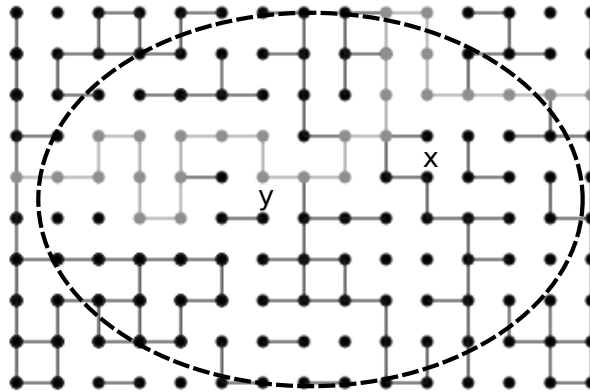
Broadbent e Hammersley[1], em 1957, estudaram como propriedades aleatórias de um “meio” influenciam como um fluido atravessa um meio poroso. Fluido e meio podem ter interpretações gerais: por exemplo, a difusão de solutos difundindo em solventes, elétrons migrando através de uma rede atômica, moléculas penetrando um sólido poroso, infecção de doenças em uma comunidade, etc. Se pensarmos em um meio poroso, uma pedra porosa, onde um fluido à atravessa, uma pergunta surge: Qual a probabilidade de que o centro da pedra esteja molhada?

Na busca de descrever esse tipo de processo Broadbent e Hammersley supuseram um modelo estocásticos, geométrico, que descrevesse tal situação, denominado *modelo de percolação*. De acordo com Geoffrey Grimmett[6], uma exemplificação para esse modelo em duas dimensões equivale a um plano  $\mathbb{Z}^2$  de uma rede quadrada, e definindo  $p$  como um número satisfazendo  $0 \leq p \leq 1$ . E examinando cada aresta de  $\mathbb{Z}^2$ , e declaramos esta aresta, borda, aberta com probabilidade  $p$  e uma aresta com fechada com probabilidade

$(1 - p)$ . As arestas de  $\mathbb{Z}^2$  representam as passagens interiores da pedra, e o parâmetro  $p$  é a proporção de passagens que são suficientes ampla para permitir a passagem de água ao longo deles.

Agora pensamos em um poro desse pedra como uma ligação que permite a passagem de água, Fig. 1. Nesse caso, uma pedra só pode ser umedecida se houver uma ligação de um vértice  $x$  à um vértice  $y$ , tomando apenas ligações abertas.

**Figura 1** – Uma pedra imersa em um fluido. Análise de percolação de ligações.



Fonte: [6]. Um plano  $\mathbb{Z}^2$  de uma rede quadrada, representando um pedra porosa. A pedra só sera umedecida se houver ligação entre os vértices  $x$  e  $y$ , nesse caso o vértice  $y$  ficará seco, pois não há ligação sobre o mesmo.

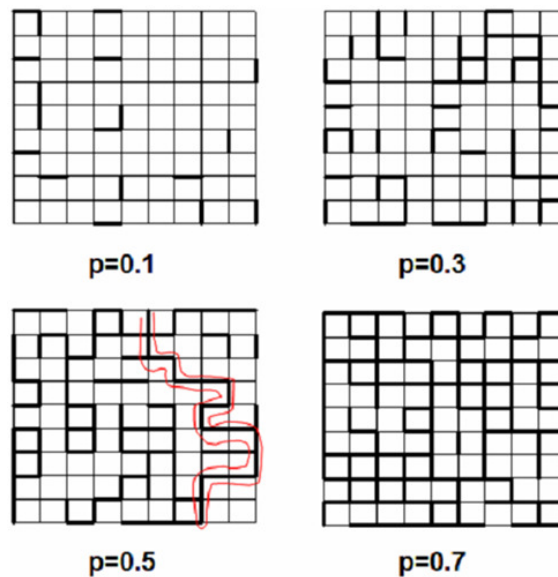
Ao analisarmos os vértices que estão conectados, estamos interessados como essa estrutura depende do valor  $p$ , a proporção de passagens. Quanto mais aumentamos o valor de  $p$ , maior a proporção de ligações que podem conduzir o fluido, de forma que a penetração está ligada a quantidade dessas ligações com arestas abertas.

Variando valores de  $p$ , Fig. 2, analisamos a formação desses agregados, ligações que conectam-se formando um agregado, observamos que quando  $p$  assume valores pequenos, as conexões das ligações abertas são poucas, e não há formação de agregados grandes. A Fig. 2 contém imagens para quatro diferentes valores de  $p$ . Quando  $p = 0,1$ , os agregados conectados das ligações abertas são isolados e bastante pequenos. Como  $p$  aumenta, os tamanhos dos aglomerados também tendem a aumentar, e existe um valor crítico de  $p$  no qual há a formação de um aglomerado que permeia a imagem inteira. Há a existência um valor crítico  $p_c$  para a densidade de ligações,  $p$ , de tal modo que todos os aglomerados abertos são finitas quando  $p < p_c$ , mas existe um aglomerado aberto infinito quando  $p > p_c$ .

A ocorrência de um “fenômeno crítico” é o principal motivo pelo qual a Teoria da Percolação é fortemente estudada. Nesse caso, um valor  $p_c$  onde há uma probabilidade de que o fluido atravesse todo o meio. Em diversos sistemas há ocorrência de fenômenos similares, podemos citar fenômenos de transição de fase em sistemas fluidos[8].



**Figura 2** – Percolação de ligações numa rede quadrada (linhas finas) para diferentes valores da probabilidade  $p$ .



Fonte: [7]. Segmentos de linha grossas são ocupados com probabilidade  $p$ . A curva vermelha marca o caminho mais curto de percolação em  $p = p_c = 0,5$ .

O modelo discutido acima é conhecido como “Modelo de Ligações”, pois a estrutura da rede está associada as arestas como ligações. Há a existência de outros modelos de percolação, Percolação de Sítios, Percolação Invasiva, Percolação Direta, Percolação Auto Organizada, entre outros modelos[3].

### 1.2.1 Modelo de Percolação

O modelo de percolação, tem uma gama de aplicações, pois é um modelo geométrico que pode ser facilmente adaptado para situações realísticas como uma exemplificação qualitativa de um determinado sistema. Para processos mais complicados, o modelo de percolação serve como suporte para o desenvolvimento de técnicas matemáticas e esclarecimento de problemas complexos.

Uma exemplificação de um sistema que pode ser descrito pelo modelo de percolação, foi descoberto por Thomas Andrews, em 1869, esse fenômeno conhecido como **opalescência crítica** demonstrava uma transição de fase, quando um fluido transitava de gasoso para líquido, a transparência do fluido tornava-se enevoadada. Nesse caso o modelo físico, tinha um parâmetro  $T$  chamado “temperatura”. Como mencionamos anteriormente, podemos suspeitar que existe um valor crítico  $T_c$  exibindo uma transição de fase. Por mais que esse fato não possa ser provado por si mesmo, deve ser possível provar, analisar o comportamento do processo para valores pequenos de  $T$ , mostrando que ele é qualitativamente diferente para grandes valores de  $T$ .

Para analisarmos sistemas que comportam-se de forma complexa, tentamos

buscar uma modelagem para na Teoria da Percolação. Uma exemplificação, não realística, mas mostra a importância do valor crítico, é o modelo de Fogo na Floresta.

#### 1.2.1.1 O Modelo do Fogo na Floresta

Para entender o fenômeno de criticalidade, tomemos o modelo conhecido como fogo na floresta [3]. Esse modelo é uma exemplificação simples que ajuda na compreensão da criticalidade relacionada ao modelo de percolação.

O modelo de fogo na floresta, não é tem o objetivo de ajudar a combater incêndios, mas nos dá um panorama para entendermos a ideia do limiar de percolação, ou seja, a probabilidade crítica que leva o sistema a uma transição de fase, nesse caso o incêndio da floresta.

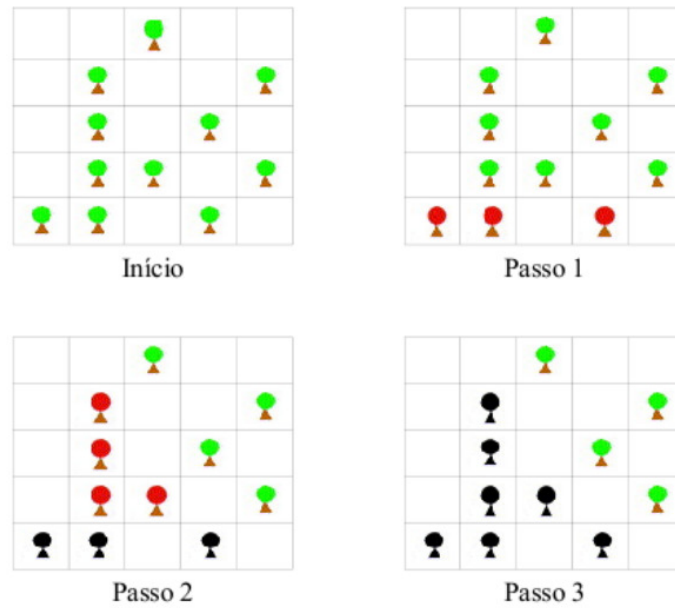
Para entendermos o modelo tomemos uma geometria quadrada de uma rede de percolação, descrito por percolação de sítios, onde cada sítio da rede quadrada representa uma possível ocupação de uma árvore ou não, podendo ser ocupada ou apenas ignorada como sítio vazio. Tomando um processo dinâmico, um processo denominado por propagação das “chamas”, buscamos determinar o tempo necessário para que o fogo se propague por toda a rede. Onde tomamos uma rede bidimensional de percolação, uma rede quadrada  $L \times L$ , representando a floresta e cada sítio da rede representa uma possível árvore, que pode ser queimada ou não.

Os sítios ocupados podem ser descritos em três estados: árvore vermelha (em chamas, infectada), árvore verde (saudável), ou árvore preta (imune ou queimada). Uma descrição do modelo pode ser vista na Fig. 3, onde apresentamos uma rede  $L \times L$  ocupada por árvores dispostas de forma aleatória.

A propagação do fogo sobre a rede, nesse caso o tempo para a extinção do fogoda na rede, está intimamente relacionado com a probabilidade de ocupação da rede  $p$ . Tomando um critério para ocupação, supondo que uma árvore incendiada transfere o fogo apenas para árvores vizinhas, que estejam imediatamente vizinhas, empregando assim a hipótese de interação entre primeiros vizinhos de *Von Neuman*, supondo que haverá um tempo de queima, um intervalo de tempo de queima da árvore.

Uma varredura completa na rede de percolação corresponde a um intervalo de tempo na simulação, onde varremos sítio a sítio de forma sequencial. E definimos o tempo de vida da floresta,  $t_v$ , como sendo o número número de varreduras sobre a rede até o fim do incêndio, ou até que o sistema percole, ou seja, o incêndio atinja um dos lados da rede.

Outra característica que pode ser imposta à propagação do fogo é a condição de contorno periódica, isto é, qualquer árvore em chamas que estiver sobre a borda esquerda da rede pode transferir suas chamas à árvore da borda direita e vice-versa.

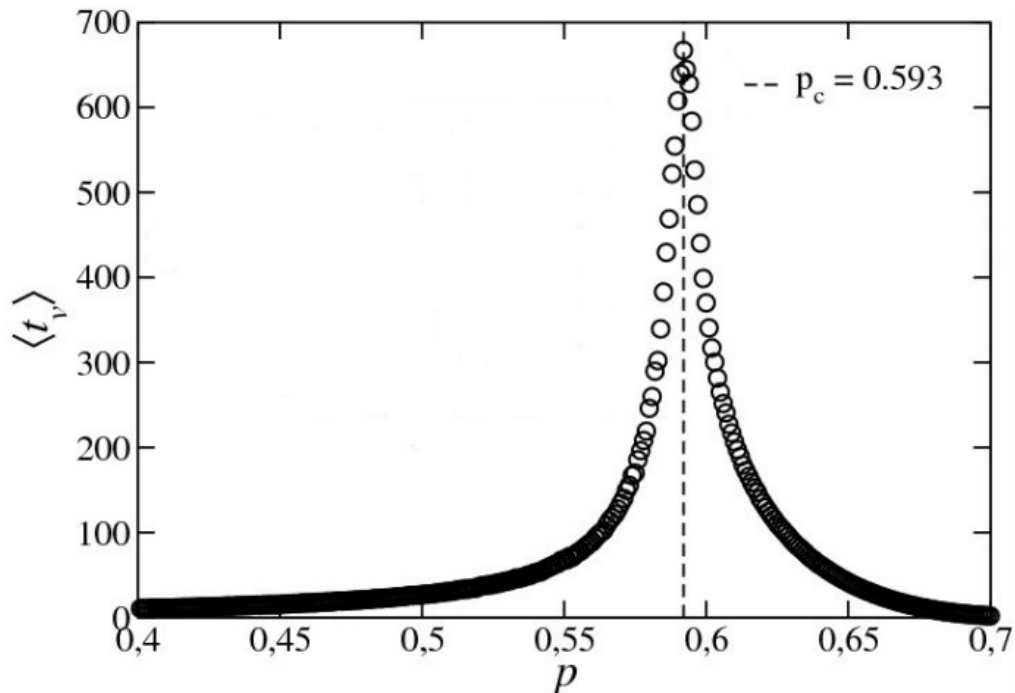
**Figura 3** – Algoritmo do Fogo na Floresta.

Fonte: [9]. Algoritmo do Fogo na Floresta para uma rede de tamanho  $L = 5$  com  $p = 0.44$ .

Como se ilustrado na Fig. 3, iniciamos a floresta com probabilidade de ocupação  $p$ , onde ocupamos os sítios com árvores verdes (saudável), que podem ser ocupadas, e sítios vazios, indicando a ausência de árvores, sítios brancos. Após iniciamos o incêndio com a umas das árvores pertencentes à linha inferior da floresta. Tomando uma rede  $L \times L = 1000$  e variando a probabilidade de ocupação, conseguimos determinar o tempo de vida do fogo, o valor do limiar de percolação  $p_c$ , tomando repetidas simulações sobre a determinada rede acima. E ao final do processo tomamos a média sobre todas as probabilidades críticas, onde ocorre percolação, e determinamos o tempo de vida da floresta. O tempo de vida médio,  $\langle t_v \rangle$ , do fogo na floresta, como função da probabilidade de ocupação  $p$ , é exibido na Fig. 1.

Observando a variação da probabilidade de ocupação,  $p$ , para valores pequenos de  $p$  o tempo de duração é curto, demonstrando a existência de poucos vizinhos à serem queimado, destruindo a possibilidade de propagação do fogo. Aumentando a probabilidade de ocupação, aumentamos a duração do tempo de vida do fogo, até que a probabilidade de ocupação atinja um valor crítico, cuja o tempo de vida seja máximo, esse valor é conhecido como limiar de percolação,  $p_c$ . Esse valor máximo ocorre em  $p \approx 0.593$ , próximo ao ponto crítico na percolação de sítios em uma rede quadrada. Para esse valor crítico de probabilidade,  $p \approx p_c$ , surge uma estrutura ramificada que conecta a borda superior à inferior da rede, assemelhando-se a um agregado de percolação infinito, fazendo com que o fogo espalhe-se por quase todas as regiões da floresta.

**Gráfico 1** – Comportamento do tempo de vida do fogo na floresta em função da probabilidade de ocupação.



Fonte: [9]. Comportamento do tempo de vida,  $t_v$ , do fogo na floresta em função da probabilidade de ocupação,  $p$ , de árvores em uma rede quadrada de tamanho  $L = 1000$ . A linha tracejada indica o ponto crítico de percolação de sítios,  $p_c = 0.593$  (Oliveira, 2008)

Aumentando o valor de  $p$ ,  $p > p_c$ , há um decréscimo do tempo de vida do fogo na floresta, isso é explicado pois todos os sítios tendem a estar preenchidos, tornando a rede em uma estrutura conectada, de forma que o fogo se propaga de forma rápida e eficiente, diminuindo o tempo de vida do fogo na floresta. Uma observação importante sobre o gráfico na Fig. 1 é sobre a simetria desse gráfico em  $p_c$ , esse comportamento é explicado por [8], que caracteriza uma transição de fase de segunda ordem para sistemas críticos.

## 2 CONCEITOS TEÓRICOS E DEFINIÇÕES

### 2.1 Geometria Fractal

#### 2.1.1 A estrutura geométrica dos clusters de percolação

Partindo da necessidade de descrever fenômenos naturais e objetos, Benoît B. Mandelbrot [10] reuniu esse conjunto de informações de forma coerente e criativa, em 1980, e nomeou alguns objetos que não possuíam dimensão inteira (1, 2, ...), mas possuíam dimensão fracionária, o que tornavam esses objetos difícil de serem descritos pela geometria Euclidiana.

Alguns objetos em sistemas complexos, como agregados de percolação, *clusters*, não podem ser descritos pela Geometria Euclidiana, originando uma geometria baseada em um conjunto de formas, fractais, que possibilitou estudar a morfologia de objetos fragmentados e irregulares.

No aprimoramentos dos estudos sobre esses tipos de sistema, muitas definições de fractais surgiram. Uma simples definição para *fractal* são objetos que apresentam auto-similaridade, apresentam uma geometria que repete-se de forma infinita em porções de geometrias menores, que assemelham-se ao próprio objeto. De forma geral, são objetos que sempre assemelham-se a si mesmo, quando mudamos a escala sobre o qual são observado.

Diferentes definições de fractais surgiram com o aprimoramento de sua teoria. Sem rigor matemático pode-se definir fractais como objetos que apresentam auto-similaridade, ou seja, um fractal é um objeto cuja geometria se repete infinitamente em porções menores, semelhantes ao próprio objeto. Em outras palavras, o objeto sempre parece o mesmo quando observado em diferentes escalas. Esses objetos fractais surgiram nas últimas décadas e são bastante utilizados em análises morfológicas de fenômenos naturais complexos presentes em diversas áreas do conhecimento.

##### 2.1.1.1 Conjunto de Mandelbrot

Há inúmeros exemplos de fractais, um dos exemplos mais importantes é o Conjunto de Mandelbrot, que é gerado a partir de interações de funções complexas. Definido primeiramente por Pierre Fatou[11], em 1905, matemático que trabalhou com dinâmica complexa, estudando processos recursivos da forma

$$z \rightarrow z^2 + c$$

Tomando um ponto  $z_0$  sobre o plano complexo, e aplicando a fórmula de recursão, podemos gerar inúmeros pontos sucessivos sobre o plano, criando uma órbita sob o plano complexo, essa órbita fornecia o comportamento de tais sistemas. No entanto, só em 1975, Benoit Mandelbrot, em seu livro *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*[12] tornou popular o conceito de fractais, e definindo um dos fractais mais importantes, o Conjunto de Mandelbrot.

Mandelbrot, em seu livro, tomou a definição de fractais e descreveu fenômenos matemáticos que apresentavam comportamento caótico, tais fenômenos partiam de algumas função recursivas ou algoritmos recursivos que descreviam alguma curva ou um conjunto de pontos. Um dos exemplos que exemplificam o conceito de geometria fractal é o Conjunto de Mandelbrot, de forma matemática, o conjunto de Mandelbrot pode ser caracterizado como uma geometria fractal, tomando um conjunto  $C$  de pontos sobre o plano complexo e tomando sobre eles uma lei de recursão, criando uma sucessão de pontos sobre esse plano complexo. De forma mais geral, definimos

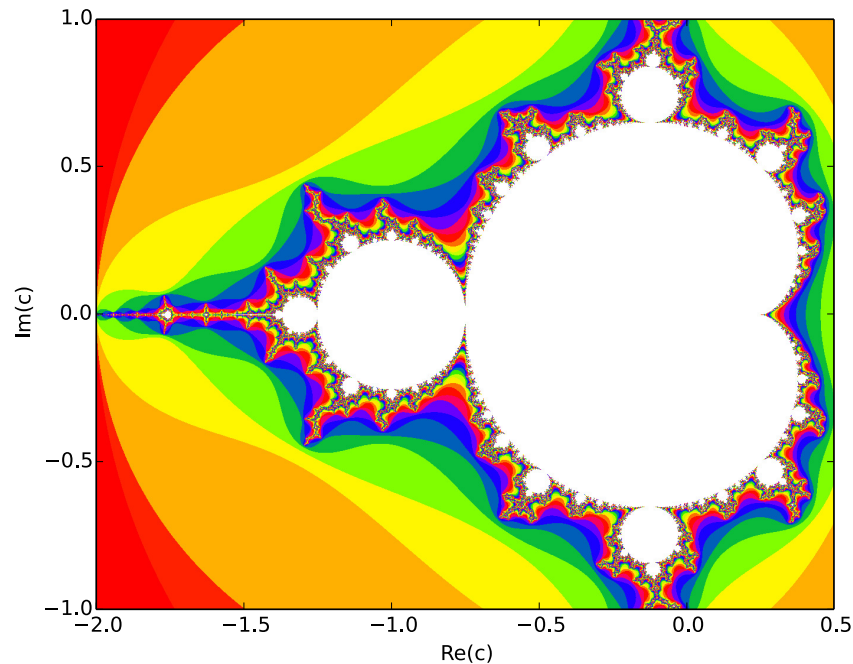
$$\begin{aligned}z_0 &= 0 \\z_{n+1} &= z_n^2 + c\end{aligned}$$

Cada ponto  $c$  do plano complexo se expande em sequência da seguinte forma:

$$\begin{aligned}c &= x + iy \\Z_0 &= 0 \\Z_1 &= Z_0^2 + c \\&= x + iy \\Z_2 &= Z_1^2 + c \\&= (x + iy)^2 + x + iy \\&= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy \\&= x^2 - y^2 + x + i(2xy + y) \\Z_3 &= Z_2^2 + c \\&\vdots = \vdots\end{aligned}$$

O conjunto de Mandelbrot, em sua representação gráfica, pode ser dividido em um conjunto infinito de figuras pretas, sendo a maior delas um cardióide localizado ao centro do plano complexo. Existe uma infinidade (contável) de quase-círculos (o maior deles é a única figura que, de fato, é um círculo exato e localiza-se à esquerda do cardióide) que tangenciam o cardióide e variam de tamanho com raio tendendo assintoticamente a zero.

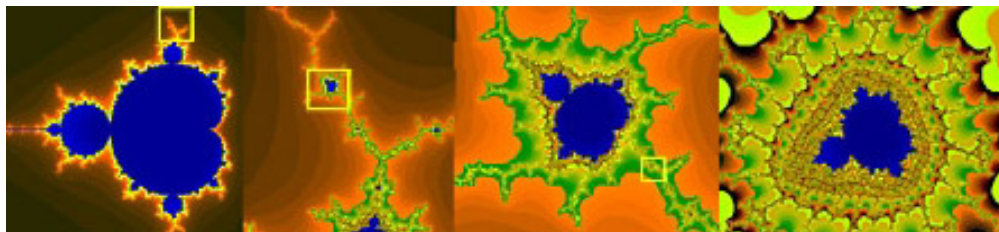
**Figura 4** – Conjunto de Mandelbrot.



Fonte: Elaborado pelo autor. Representação do Conjunto de Mandelbrot. Cada um desses círculos tem seu próprio conjunto infinito (contável) de pequenos círculos cujos raios também tendem assintoticamente a zero. Esse processo se repete infinitamente, gerando uma figura fractal conhecida como Conjunto de Mandelbrot.

O conjunto de Mandelbrot exibe detalhes mais complexos quanto mais ampliamos a imagem, geralmente chamado de "*zoom in*". A Fig. 5, exibe uma sucessão de ampliações do conjunto de Mandelbrot, para um valor  $c$ , exibindo as diferentes estruturas geométricas presentes, que assemelham-se das não ampliadas. Esse é um exemplo de geometria fractal, onde mesmo tomando uma ampliação sobre a figura, a imagem ampliada apresenta geometria semelhante.

**Figura 5** – Aumento de escala sobre o Conjunto de Mandelbrot.



Fonte: [13]. Ampliação sobre o Conjunto de Mandelbrot, o mesmo apresenta características de auto-similaridade.

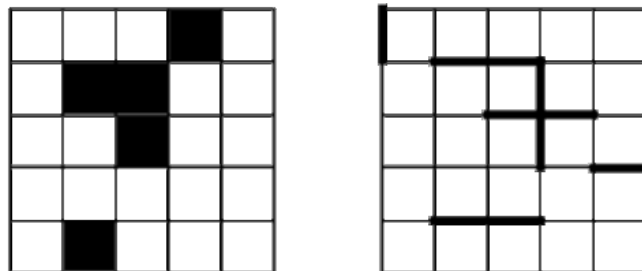
## 2.2 Percolação de Sítios

O termo percolação faz referência a um modelo de desordem binária onde a aleatoriedade está na distribuição dos elementos do sistema, por exemplo, condutores ou isolantes, isto é, o conceito da percolação está relacionado com questões que aparecem quando se considera a conectividade geométrica em objetos da natureza. Essa teoria foi introduzida pela primeira vez nos trabalhos de Broadbent e Hammersley [1], em 1957, com o intuito de estudar o escoamento de fluidos através de um meio desordenado. A principal característica deste modelo é a presença de um ponto crítico  $p_c$ , quando se varia o valor da probabilidade de ocupação da rede. Esse ponto crítico corresponde ao limiar de percolação abaixo do qual há perda global de conectividade da rede e somente haverá conectividade local. Em  $p_c$  ocorre uma transição de fase de segunda ordem na probabilidade de um sítio pertencer ao agregado infinito [3]. O valor de  $p_c$  varia de acordo com a geometria e conectividade da rede e só pode ser determinado exatamente para alguns tipos de rede. Porém, seu valor aproximado pode ser determinado por meio de simulações computacionais.

Como mencionado anteriormente, a Teoria da Percolação pode ser definida como um modelo de desordem binária onde a aleatoriedade está na distribuição dos tipos de elementos numa rede. Os dois possíveis estados dos elementos são: ocupado e desocupado. Define-se probabilidade de ocupação  $p$  como a probabilidade de um determinado elemento da rede ser ocupado (ou não).

Existem várias maneiras de implementar o modelo de percolação. Entre estas maneiras, as mais utilizadas são a percolação de sítios ou ligações, sendo os elementos de conexão da rede sítios ou ligações, respectivamente. Na percolação por ligação, uma rede é composta por  $N$  pontos que podem ou não estar unidos por um segmento de reta, que denominaremos de ligação. A probabilidade de que tal ligação exista é  $p$ . Já na percolação por sítios, a aleatoriedade está no fato de existir ou não cada sítio, e caso um sítio tenha um vizinho a ligação entre eles é estabelecida imediatamente.

**Figura 6** – Percolação de sítio e percolação de ligação em rede quadrada.

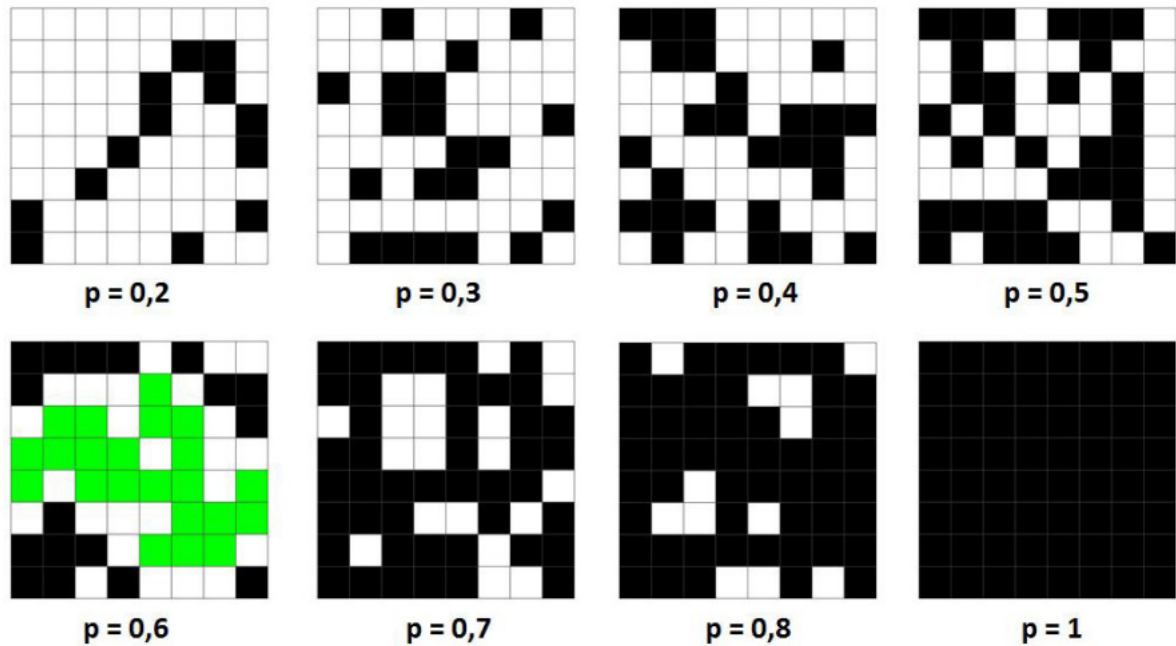


Fonte [14]. Exemplo de uma percolação de sítio e uma percolação de ligação, ambas em redes quadradas.



São várias as redes onde ocorrem percolação, rede quadrada, triangular, *honeycomb*, diamante, entre outras, podendo haver duas ou mais dimensões e sendo diferenciada por percolação de sítio e percolação de ligação. Centraremos na percolação de sítios, onde os sítios de uma rede quadrada regular podem ser ocupados ou não, quando sítios estão ocupados as ligações podem existir de forma a criar um aglomerado que une toda a rede.

**Figura 7** – Percolação de sítio em rede quadrada.



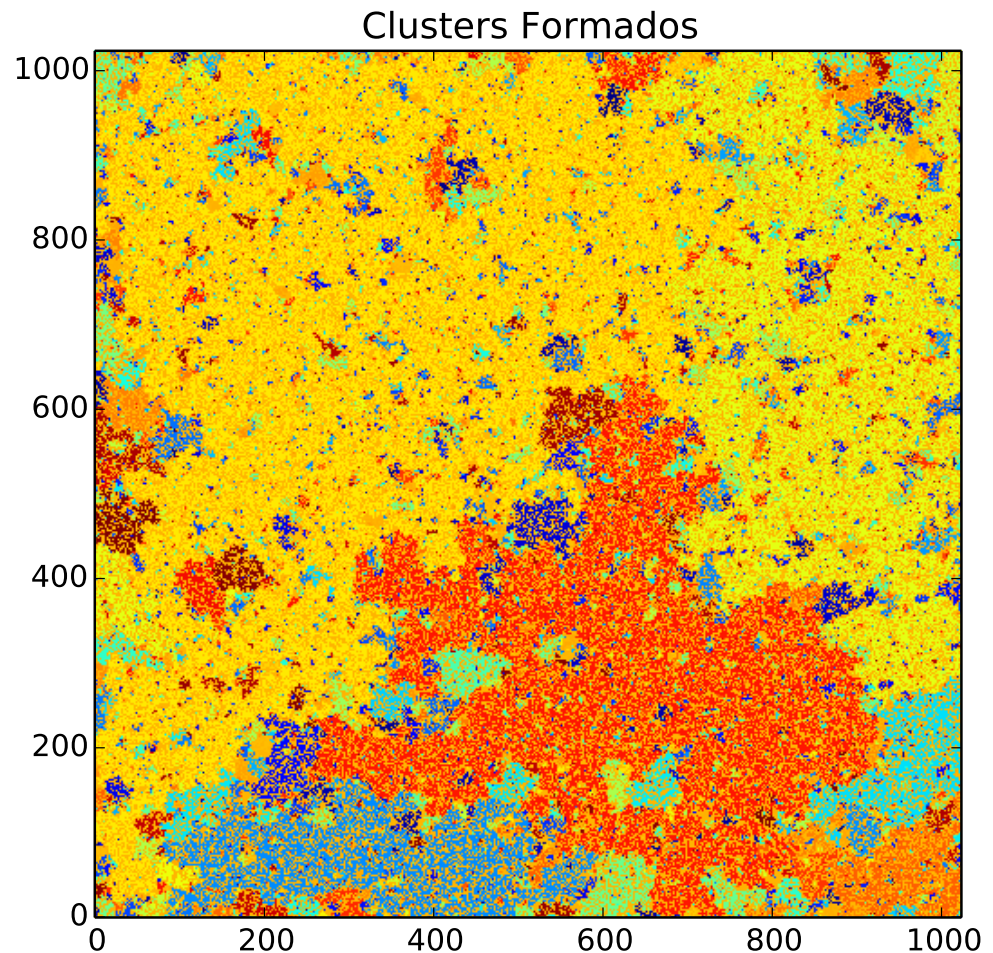
Fonte [15]. Possíveis disposições de uma seção  $8 \times 8$  de  $\mathbb{Z}^2$  para diversos valores de  $p$ . Aqui o primeiro aglomerado percolante é sinalizado com uma terceira cor para os sítios preenchidos.

### 2.3 Parâmetros do Modelo de Percolação

Tomaremos algumas definições sobre o modelo de percolação que torna o modelo estatístico. Um dos parâmetros mais importante é o *parâmetro de ordem*, se pensarmos no modelo de percolação como um modelo de transição de fase, esse parâmetro indica a ocorrência da transição de fase do sistema.

Um dos parâmetros mais importante é o agregado percolante, como ele cresce variando a probabilidade de ocupação  $p$ . Dizemos que um agregado é percolante quando ele conecta dois lados opostos da rede. Quando tomamos inicialmente a probabilidade de ocupação  $p < p_c$ , o sistema tende a ser ocupado formando agregados, no entanto, os mesmos não conseguem percolar no sistema. A partir do momento que aumentamos essa probabilidade de ocupação,  $p = p_c$ , o sistema tende a criar agregados que cruzam todo o sistema alcançando as bordas da rede, percolando sobre o sistema, ocorrendo sobre o sistema uma transição de fase.

**Figura 8** – Agregados em uma rede de percolação.



Fonte: Elaborado pelo autor. Rede de percolação de tamanho  $L = 1024$ , com probabilidade de ocupação  $p = p_c = 0.59275$ . As cores indicam os agregados formados, e a barra lateral indica a quantidade de agregados formados na simulação.

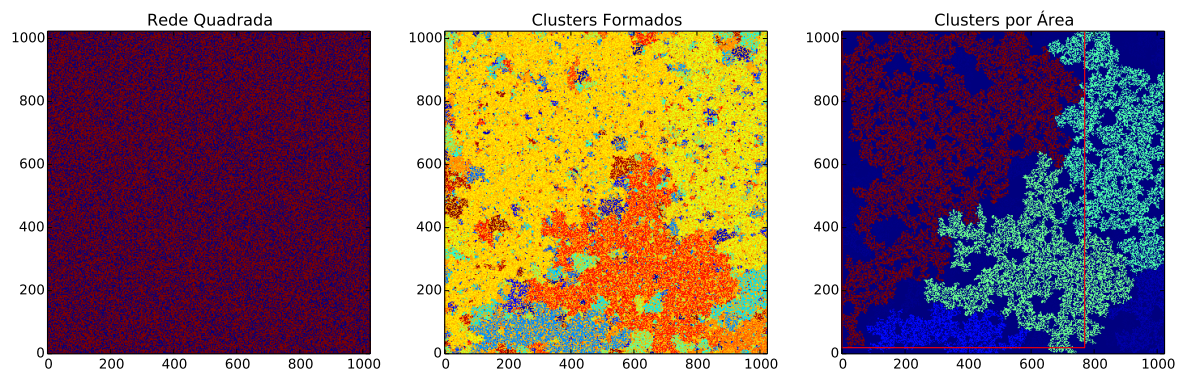
Outro parâmetro importante sobre o modelo de percolação é a *dimensão fractal*, ela surge como uma alternativa de medição da dimensão do sistema, já que pode assumir valores fracionários, obtendo assim o grau de complexidade de uma forma (agregado). De forma simples podemos definir dimensão fractal como o parâmetro que mede o quão denso o conjunto (agregado) ocupa o espaço métrico em que ele reside.

### 2.3.1 Agregados em Percolação

Como mencionado anteriormente, o modelo de percolação é amplamente utilizado pela exibição do fenômeno de criticalidade. Quando o sistema está prestes a atingir a criticalidade, o agregado (*cluster*) percolante apresenta a propriedade de auto-similaridade estatística, exibindo características de um fractal. Nesse caso um aglomerado de per-

colação pode ser denominado por fractal estatístico, pois podemos tomar estatísticas estruturais sobre o aglomerado. Aos fenômenos críticos estão associadas leis de escala e a essas, expoentes críticos. Dessa maneira, algumas propriedades estruturais do aglomerado infinito se comportam segundo uma lei de potência. Uma dessas propriedades no estudo da percolação é o *número de elementos, tamanho ou massa* pertencente ao maior agregado  $M(L, p)$ .

**Figura 9** – Agregados por área em uma rede de percolação.



Fonte: Elaborado pelo autor. Rede de percolação de tamanho  $L = 1024$ , com probabilidade de ocupação  $p = p_c = 0.59275$ [3]. As cores indicam os agregados formados, a terceira figura ilustra o maior agregado formado em uma rede de percolação, a partir desse agregado podemos calcular dimensão fractal do sistema, observando possíveis transições de fase sobre o sistema.

Buscando analisar como o agregado varia dependendo da probabilidade de ocupação  $p$  da rede. Para isso, tomemos  $p < p_c$ , nesse caso o sistema ainda não deve apresentar agregados percolantes, de forma que o agregado cresce de forma logarítmica com  $L$ , o tamanho da rede. Quando a probabilidade de ocupação alcança o valor crítico,  $p = p_c$ , o tamanho do agregado tende a crescer na forma  $M(L, p) = L^D$ , onde  $D$  é a dimensão fractal da rede que está relacionada a dimensão topologia da própria rede, sendo  $D = 1.89$  e  $D = 2.53$  para  $d = 2$  e  $d = 3$ , onde  $d$  é a dimensão topológica da rede. Quando a probabilidade de ocupação  $p > p_c$ , o agregado  $M(L, p)$  tende a ocupar quase que uniformemente toda a rede, de forma que seu crescimento é proporcional ao número de elementos da rede  $L^d$ . Essas dependências de  $M(L, p)$  pode ser expressa matematicamente por:

$$M(L, p) \propto \begin{cases} \ln L, & \text{se } p < p_c \\ L^D, & \text{se } p = p_c \\ L^d, & \text{se } p > p_c \end{cases} \quad (2.1)$$

## 2.4 Raio de Giração

Há diversas formas de obtermos os expoentes críticos para analisarmos o crescimento do agregado, um dos mais comuns é o método do *raio de giração*, que fornece uma forma de medir o espalhamento do aglomerado em relação ao seu centro de massa. Podemos definir o raio de giração  $R$  do maior agregado como a distância quadrática média ao centro de massa do sistema.

$$\begin{aligned} R_s^2 &= \langle |\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}|^2 \rangle \\ R^2 &= \frac{1}{s} \sum_s |\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}|^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $s$  é a massa do maior agregado,  $r_{cm}$  é a posição do centro de massa e  $r_i$  é a posição do  $i$ -ésimo sítio ocupado, calculada a partir de  $r_{cm}$ .

$$r_{cm} = \frac{\sum_s \vec{r}_i}{s} \quad (2.3)$$

Tomando diversas amostras sobre o sistema, podemos tomar uma média estatística, relacionando a massa do agregado percolante com o raio de giração, tomando o limite termodinâmico,  $p = p_c$

$$\langle M(\infty, p_c) \rangle = \langle s \rangle \propto \langle R \rangle^D \quad (2.4)$$

Retornaremos a mencionar o raio de giração quando estivermos tratando percolação auto-organizada, onde criaremos uma lei de crescimento para o agregado que depende de como o raio de giração se comporta, fazendo com que o sistema se contrabalanceie de forma a obtermos um fenômeno de auto-criticalidade, que discutiremos mais a frente.

### 3 PERCOLAÇÃO AUTO ORGANIZADA

#### 3.1 Criticalidade Auto-Organizada

O conceito de criticalidade auto-organizada foi proposto por Bak[16] *et al* em 1988, como uma explicação para o comportamento do modelo de autômato celular que eles desenvolveram. Neste modelo existia uma grade quadrada de caixas e em cada passo de tempo, uma partícula é lançada em umas das caixas selecionada aleatoriamente. Quando uma caixa acumula quatro partículas, estas são redistribuídas para as quatro caixas vizinhas. A redistribuição pode conduzir a novas instabilidades (deslizamentos dos grãos), com “avalanches” de partículas perdidas a partir da borda da grade. Devido a esse comportamento, que chamaremos de “avalanche”, este foi chamado de modelo “sandpile”, pilha de areia. A distribuição, não cumulativa, de quantidade de ocorrências de avalanches pelo tamanho das mesmas, apresenta uma distribuição lei de potência

$$N \propto A^{-\alpha} \quad (3.1)$$

Em que  $N$  é o número de avalanches com área  $A$  e  $\alpha$  é uma constante com valor aproximado,  $\alpha \approx 1$ .

Um outro modelo que exhibe criticalidade é o modelo de incêndio florestal, mencionado anteriormente no Capítulo 1, proposto por Drossel e Schwabl[17], em 1992. Na versão mais simples deste modelo, tomamos uma rede quadrada, e em cada passo de tempo uma árvore é plantada em um local escolhido aleatoriamente (se o local está desocupado) e uma centelha é lançada no sítio que não foi ocupado, ou seja, um sítio que contém uma árvore. Se a centelha cair sobre uma árvore, essa árvore e todas as árvores adjacentes serão “queimadas” em um modelo de “incêndio florestal”. A distribuição de frequência-área das árvores queimadas satisfaz a Eq. 3.1, com  $\alpha = 1,0$  e  $\alpha = 1,2$ . A área  $A$  é definida como sendo o número de árvores que são queimados em um incêndio. O modelo de incêndios florestais está intimamente relacionado com o modelo de percolação de sítios, que é conhecido por apresentar um comportamento crítico [3]. Se as árvores são plantadas em uma rede que não há incêndio, comportamentos de percolação de sítios pode ser encontrado. O ponto crítico é alcançado quando um aglomerado de árvores se estende ao longo da rede.

A definição rigorosa do comportamento crítico auto-organizado é apenas elusivo. Uma definição comumente empregada é que um sistema está em um estado de criticalidade auto-organizado, se uma medida do sistema flutua próximo a um estado de estabilidade.

Na criticalidade auto-organizada, a “entrada” para um sistema complexo é constante, enquanto que o “saída” é uma série de eventos ou avalanches que seguem uma distribuição de lei de potência. Por exemplo, no caso de o modelo da pilha de areia, a entrada é a adição constante de grãos de areia, e a saída é avalanches de areia.

Aplicações da criticalidade auto-organizada também têm sido propostas nas ciências biológicas e sociais. Alguns exemplos que podemos mencionar:

- **Biodiversidade.** A diversidade de espécies se desenvolve em escalas de tempo longas e é dizimado em extinções em escalas de tempo curtos. Há algumas indicações de que a distribuição de frequência de eventos de extinção é uma lei de potência.
- **Epidemias.** Uma população desenvolvida que possui baixa imunidade a doenças ao longo da escala de tempo. A doença se espalha como uma epidemia em uma escala de tempo muito curto. Novamente, temos a evidência de que a distribuição de tamanho-frequência das epidemias é uma lei de potência.
- **Guerras.** Instabilidades entre países desenvolvem-se em escalas de tempo relativamente longas que terminam em guerras que geralmente duram períodos relativamente pequenos de tempo. Lewis Richardson[18], em 1941, mediu a intensidade de guerras em termos do número de mortes em batalhas e mostrou que a distribuição de frequência de intensidade de guerras é bem aproximada por uma distribuição de lei de potência.

Muito desses modelos apresentados apresentam o fenômeno de críticos. Há ainda sistemas que são auto-críticos, estes buscam à auto-organização do sistema levando-o a um regime estacionário. Um exemplo que ilustra esse comportamento é o *jogo da vida*. Discutiremos adiante com mais detalhes o conceito de criticalidade auto-organizada e algumas das aplicações às ciências físicas, químicas, biológicas e sociais.

### 3.2 Modelos que apresentam Criticalidade Auto-Organizada

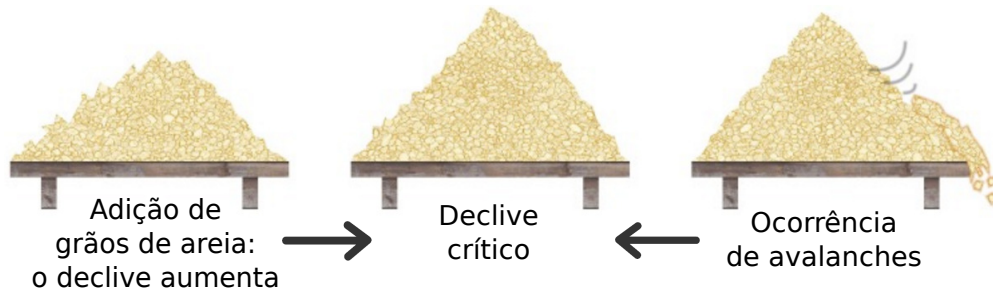
Naturalmente pensamos que para atingirmos pontos críticos, seria necessário intervirmos externamente sobre o sistema. No entanto, às vezes, o sistema tende a atingir essa criticalidade de forma espontânea, são denominados de fenômenos auto-organizados.

Um exemplo em que observamos uma auto-organização é modelo da pilha de areia[19]. Consideremos um fluxo constante de areia, Fig 10, que esteja sendo despejado em um plano qualquer. Analisemos as fases envolvidas no fenômeno. Primeiramente ao despejarmos areia, criamos uma pequena pilha de areia, de forma que quando aumentando-se o tamanho da pilha inicia-se alguns deslizamentos quando o tamanho e a inclinação



da pilha começa a aumentar. Esses deslizamentos são conhecidos como avalanches, são pequenos deslizamentos que ocorrem entre os grãos de areia nas vizinhanças do grão, de forma que os deslizamentos independem da forma do grão, mas sim das interações de um grão de areia com seus vizinhos.

**Figura 10** – O modelo da pilha de areia.



Fonte: [20]. O modelo de pilha de areia (*sandpile*), é o clássico experimento, onde podemos observar o fenômeno de criticalidade auto-organizada (Bak et al.[16], 1988). Considere uma pilha de areia em uma pequena mesa, adicionando grãos a pilha, observamos que os grãos causam deslizamentos, avalanches, que derrubam a areia de pontos mais altos, mantendo a inclinação da pilha constante. A longo prazo, a inclinação da pilha de areia evolui para um estado crítico onde um único grão que é adicionada a pilha pode aumentar a pilha, mas há a probabilidade de iniciar uma enorme avalanche sobre o sistema.

Continuando o processo de depositamento dos grãos, a pilha de areia tende a atingir proporções maiores que a base, ocorrendo maiores deslizamentos que envolvem o sistema como um todo, de forma que o sistema tende a se organizar, alcançando um estado estacionário. Agora a pilha de areia passa a ter uma inclinação constante, essa inclinação é denominado ângulo de estabilidade, em média, a quantidade de grãos que entram no sistema é comparável a quantidade que deixa o sistema.

Quando o sistema alcançou esse estado estacionário, dizemos que o sistema encontra-se no estado crítico, o qual não podemos inferir quando as avalanches ocorrerão. Ou seja, quando ocorrerem deslizamentos podem ser geradas avalanches sobre o sistema, ou apenas o crescimento da pilha sem deslizamentos. Nesse caso, o sistema tende a se organizar, controlando-se de forma à alcançar um regime máximo.

Neste estado estacionário, o sistema encontra-se também no que chamamos de estado crítico, que é caracterizado pela imprecisão, não sendo possível prever qual o tamanho e o instante em que as avalanches irão ocorrer. Isto significa que quando deslizamentos locais acontecem, podem ou não ser geradas avalanches de grandes tamanhos envolvendo todo o sistema. O sistema atingiu então, a criticalidade auto-organizada[19].

### 3.3 Percolação auto-organizada

Na percolação clássica, a configuração independe do tempo. Isto é, a probabilidade de ocuparmos um sítio de uma rede quadrada de percolação ou uma ligação é independente do tempo. Muito dos sistemas desordenados mudam sua configuração com o tempo, sendo insuficiente tomarmos o modelo de percolação clássica para representá-los. Para citarmos um exemplo tomemos um condutor polimérico iônico acima da temperatura de transição, a condutividade elétrica é dominada pelo movimento microscópico do meio. Outro exemplo é o problema do confinamento da molécula de oxigênio na hemoglobina e mioglobina. Sabe-se que a entrada para o pacote *hemótico* é bloqueada em vários lados da cadeia e o oxigênio não poderia ser capturado se os lados da cadeia fossem fixados na posição de equilíbrio. Devido à natureza dinâmica da proteína, a porta flutua entre as posições aberta e fechada. Alguns modelos de percolação dinâmicos foram propostos e aplicados à problemas específicos como o modelo difusivo *hopping* para o transporte dependendo da frequência[21].

Como objetivo principal iremos tratar do modelo de percolação onde buscamos a criticalidade do sistema, ou seja, redes de percolação que tendem a apresentar o fenômeno de criticalidade tomando o processo de crescimento dinâmico. Uma maneira de gerar dinamicamente um agregado de percolação infinito é dado pelo algoritmo de Leath-Alexandrowicz[22], no qual há um processo dinâmico de ocupação dos sítios em um rede de percolação, todos os sítios são ocupados e populados com probabilidade  $p$  fixa durante o processo de crescimento da rede. De forma que, para encontrarmos a probabilidade crítica de ocupação,  $p_c$ , precisamos de um método que calculemos a probabilidade para cada simulação realizada, em contrapartida, o agregado gerado pelo algoritmo de Leath-Alexandrowicz é mais próximo do agregado gerado pela percolação estática, de forma a conservar a probabilidade de ocupação limiar  $p = p_c$  no ponto crítico da rede.

Tomaremos o modelo para polímeros ramificados, aplicando regras de crescimento que conduzem o sistema à criticalidade onde o ponto crítico é encontrado dinamicamente, nesse caso específico de crescimento, a probabilidade de ocupação da rede  $p$  tende a encontrar o seu mínimo, flutuando em torno de  $p_c$  que é o estado estacionário de crescimento da rede, e por assimilação do polímero.

#### 3.3.1 Crescimento auto-organizado

Pode-se dizer que a teoria de percolação tem origem intimamente conectada aos primeiros estudos em polimerização desenvolvidos por P. J. Flory e Stockmayer [23], para descrever como pequenas moléculas ramificadas reagem e formam grandes moléculas,



polímeros. Este processo de polimerização pode conduzir à formação de um gel, isto é, grandes redes de moléculas conectadas por ligações químicas que se estendem por todo o sistema, um conceito chave para a teoria de percolação.

Na literatura matemática, O modelo de percolação foi introduzido por Benoit Broadbent e John Hammersley[1], em 1957. Nesse trabalho eles introduziram o conceito de espalhamento de um fluido dentro de um meio poroso, esse processo foi denominado percolação, vindo do latim *per colare*, que significa “fluir através”.

Historicamente, o conceito de percolação surge do estudo do fenômeno de transporte de um fluido através de um meio poroso. Por exemplo, o petróleo através de uma rocha, ou a água em um filtro de areia. O modelo de percolação concentra-se em descrever o meio poroso, que será visto como uma rede de canais aleatórios, por onde escoar um fluido determinístico. Modelos de percolação encontram aplicação em várias situações físicas de interesse tais como o problema da mecânica estatística de sistemas ferromagnéticos diluídos, no problema do transporte de corrente elétrica através de uma rede composta por um grande número de resistores, em problemas de prospecção de petróleo e até mesmo na propagação de epidemias e de incêndios em bosques, como vimos anteriormente.

### 3.3.2 O modelo de polimerização auto-organizada

O paradigma de criticalidade auto-organizada (*Self-Organized Criticality*) procura fornecer uma explicação para a tendência de sistemas grandes e complexos se auto conduzirem à um estado crítico. Um sistema crítico auto-organizado naturalmente deverá apresentar correlações espaciais e temporais com todos os tamanhos e durações de eventos. Além disto, como características comuns a sistemas críticos auto-organizados, temos a presença de mecanismos limiares e opostos que impedem a acomodação do sistema em qualquer espécie de estado de equilíbrio[16][24].

No âmbito dos polímeros, surge uma pergunta importante: *como podemos garantir que o polímero nunca pare de crescer e que nunca comece a crescer de uma forma exponencial, ou seja, como manter o polímero crescendo indefinidamente sobre uma condição de ramificação limitada?* Se notarmos que a condição necessária para que o polímero continue crescendo é a existência de pelo menos uma ponta ativa a cada passo de tempo encontramos resposta para nossa pergunta.

Para que o polímero cresça de forma ilimitada, precisaríamos que houvesse sempre um sítio ativo, nesse caso, um sítio poderia ser denominado como um possível estado de uma rede de percolação, que pode ser preenchido ou não, dando continuidade ao crescimento do agregado, de forma que o crescimento do polímero fosse contínuo a cada

passo de tempo  $t$ .

Um mecanismo que mostra-se bastante seguro seria manter o número de pontas ativas flutuando próximo a um parâmetro da rede, de forma que o sistema mantenha o número de pontas ativas próxima a esse parâmetro conduzindo o sistema a um crescimento contínuo. Para que a condição de crescimento contínuo seja alcançada podemos inserir uma regra de controle na qual a probabilidade de ramificação tenha liberdade de flutuar para compensar o aumento ou redução de pontas ativas, comparadas com o parâmetro limiar,  $N_T$ .

Esse mecanismo cria uma relação de recorrência, que terá como efeito o aumento da probabilidade de ramificação  $b$ , se o número de pontas ativas,  $N(t)$ , for inferior ao parâmetro limiar,  $N_T$  e conseqüentemente a diminuição de  $b$  quando  $N(t)$  torna-se maior que  $N_T$ [5]. Um possível mecanismo de controle é dada pela seguinte relação de recorrência,

$$b(t+1) = b(t) + k[N_T - N(t)] \quad (3.2)$$

onde  $k$  é um coeficiente cinético. De forma que,  $0 \leq b \leq 1$ , exigindo que tomemos  $b(t+1) = 1$  se a Eq. 3.2 produzir uma probabilidade de ocupação do sítio ativo do polímero maior que um. E impomos que  $b(t+1) = 0$  se a Eq. 3.2 produzir um valor negativo, de forma que não representa um valor físico para o nosso sistema. Ao tomarmos esse mecanismo restaurador surge uma força estocástica restauradora sobre o sistema, de tal forma que a probabilidade de ramificação  $b$  é regulada para garantir a continuidade do processo a uma taxa mínima[5].

### 3.3.3 Algoritmo de Leath-Alexandrowicz

O algoritmo de Leath[22] é conhecido por ser particularmente útil para estudarmos estruturas e propriedades físicas de agregados simples de percolação. Esses agregados (*clusters*) são gerados da mesma forma que exemplificamos no modelo de Fogo na Floresta, Fig. 3. Primeiramente, iniciamos com uma única árvore, cujas sementes são lançadas a sítios vizinhos numa rede de percolação quadrada. Com alguma probabilidade de ocupação  $p$  as árvores crescem nos sítios vizinhos mais próximos. As árvores que cercam o ponto inicial, aonde foram lançadas as sementes, formam uma camada partindo desse ponto inicial. As árvores dessa camada espalham suas sementes aos seus vizinhos mais próximos (primeiros vizinhos) e continuam o processo de expansão do agregado. O processo continua até que não haja sítios na rede disponíveis para o crescimento.

Geramos  $n_d$  agregados e calculamos o número de pontos  $n(l, r)$  que são separados da origem por uma distância geométrica  $r$  e que pertence a uma certa camada  $l$ .

Definimos

$$P'(l,r) = \frac{n(l,r)}{n_{total}} = \frac{nN_n}{\sum_n nN_n} \quad (3.3)$$

onde  $n_{total}$  é a quantidade total de pontos, sítios, no agregado  $n_d$ . De forma mais geral  $N_n$  é o número de agregados de tamanho  $n$  na amostragem. De forma que podemos definir o tamanho médio dos agregados

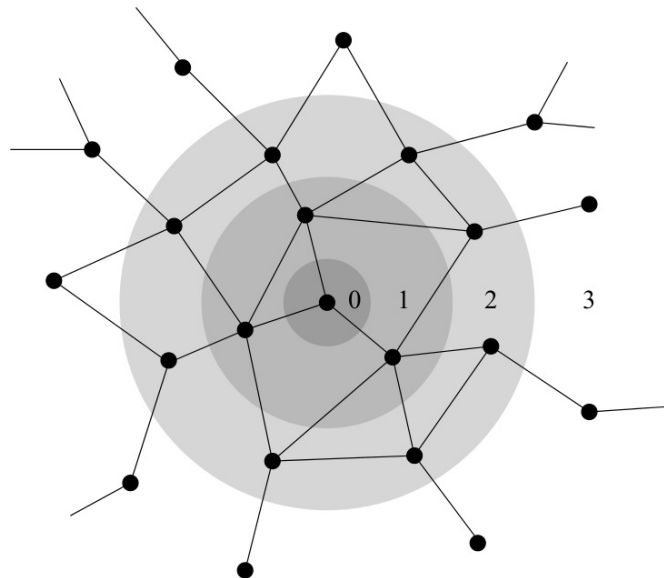
$$\langle n \rangle = \frac{\sum_n n^2 N_n}{\sum_n n N_n} = S(c) \quad (3.4)$$

onde  $S(c)$  é o tamanho médio dos agregados.

Desde que o Algoritmo de Leath-Alexandrowicz corresponde a um processo de selecionar um ponto aleatório sobre uma rede de percolação, decidindo aleatoriamente se cada sítio é ocupado ou vago. O sítio na origem sempre será considerado ocupado e iniciamos o processo de crescimento descrito acima. Por último conta-se o número de sítios pertencentes ao agregado, o número de sítios na fronteira e o raio de giração do agregado.

O Algoritmo de Leath-Alexandrowicz é um caso específico do Algoritmo de Busca em Largura (*Breadth-First Search - BFS*), ver Fig. 13, os mesmo serão discutidos em mais detalhes no Cap. 4 aonde tratamos sobre algoritmos usados em processos dinâmicos como a Percolação auto-organizada.

**Figura 11** – Busca em largura.



Fonte: [25]. A procura em largura começa em um determinado vértice, que por definição tem distância 0 entre si, e cresce para fora em camadas ou ondas. Os vértices na primeira onda, que são os vizinhos imediatos do vértice inicial, tem distância 1. Os vizinhos desses vizinhos têm distância 2, e assim por diante.

### 3.3.4 Algoritmo de Percolação auto-organizada

De forma similar ao Algoritmo de Leath-Alexandrowicz, o nosso modelo permite obter o valor do parâmetro crítico de percolação de uma única vez, para uma determinada rede. O modelo apresentado consiste em ocupar vários sítios em uma rede quadrada  $L \times L$ . Cada semente comporta-se independentemente e do mesmo modo que o sítio central do Algoritmo de Leath-Alexandrowicz, mencionado anteriormente. No tempo inicial ( $t = 0$ ), os sítios vizinhos mais próximos disponíveis (não alocados) dessas sementes são identificados e considerados ocupados se os números de aleatórios uniformes  $0 \leq r \leq 1$  associados a cada um deles são menores que do que uma dada probabilidade  $p$ . Os sítios ocupados no tempo  $t$  na rede são chamados de *sítios ativos*,  $N(t)$ , do processo de crescimento.

Diferentemente do Algoritmo de Leath-Alexandrowicz[22], onde fixamos a probabilidade  $p$  de ocupação para os sítios durante todo o processo de crescimento, tomaremos o mecanismo proposto por Alencar *et al.*[5], em 1997, de forma que a probabilidade de ocupação como uma variável dinâmica, dependente do tempo, de forma que seu valor se ajusta a cada etapa do crescimento, mecanismo anteriormente descrito na Seção 3.3.2, onde buscamos que o sistema atinja um crescimento máximo de forma que a probabilidade cresça à uma taxa mínima. Aqui é permitido que a probabilidade varie a fim de compensar o aumento ou redução do número de sítios/ligações ativos,  $N(t)$ , na fronteira do crescimento.

A ideia básica é fazer o agregado crescer indefinidamente e também que o número de sítios ativos nunca cresça exponencialmente com o tempo. Um dos critérios que garante que o agregado cresça continuamente é a existência de pelo menos um sítio ativo a cada passo de tempo. No entanto, as interações com os sítios podem eliminar esse único sítio ativo no próximo passo de tempo. Para solucionarmos isso devemos não manter apenas um sítio ativo, mais um certo número de sítios ativos,  $N_t$ , na fronteira de crescimento.

Como mencionado anteriormente, tomamos o mecanismo restaurador para a probabilidade de ocupação  $p$ , descrito por Alencar *et al.*[5], e mencionado anteriormente para o caso de polímeros ramificados, Eq. 3.2, investigaremos esse mecanismo de crescimento para o agregado de percolação, onde a auto-organização leva o sistema à criticidade, além de apresentarmos dois outros mecanismos que podem controlar o sistema da mesma forma. Ao controlar o número de locais ou ligações na parte da frente de crescimento do agregado, o sistema é acionado de forma espontânea para um estado estacionário que corresponde ao limiar de percolação do processo de topologia e estrutura de percolação

utilizado.

Tomando a relação de recorrência, uma equação que envolve os número de sítios ativos,  $N(t)$ , que tende a organizar-se de forma que o crescimento do agregado de percolação cresça indefinidamente, e que os números de sítios ativos nunca cresça exponencialmente com o tempo. Esperamos obter um estado crítico sobre o sistema, de forma que o agregado de percolação continue crescendo a um valor mínimo de  $p(t)$ . A relação de recorrência

$$p(t+1) = p(t) + k[N_T - N(t)] \quad (3.5)$$

onde  $k$  é um coeficiente cinético,  $N(t)$  é o número de sítios ativos no tempo  $t$ , e  $N_T$  é o limiar de sítios previamente ocupados de forma a garantir que o crescimento da rede não pare, mesmo que a probabilidade de ocupação seja nula. A probabilidade de crescimento é limitada ao intervalo  $[0, 1]$ , de forma que impomos as condições de contorno  $p(t+1) = 0$  e  $p(t+1) = 1$ . Nossos resultados e uma posterior discussão podem ser encontrados na Seção 3.4, onde analisamos o comportamento da probabilidade de ocupação como um processo dinâmico, como também o comportamento dos sítios ativos,  $N(t)$  da rede de percolação.

No entanto, há demais mecanismos que podem ter o efeito semelhante sobre o processo de crescimento de um agregado de percolação. Podemos, por exemplo, tomar que o mecanismo limiar,  $N_T$  funcione como um parâmetro dinâmico, variando com o tempo por alguma lei de potência, de forma a obtermos  $N_T(t) = at^\alpha$ [5], essa hipótese funciona como o mecanismo anterior, mas agora  $N_T$  é uma variável dinâmica criando uma coexistência entre duas variáveis,  $N(t)$  e  $N_T$ . Assim semelhante a Eq. 3.5, poderíamos utilizar a seguinte relação de recorrência

$$p(t+1) = p(t) + k[at^\alpha - N(t)] \quad (3.6)$$

onde  $a > 0$  e  $\alpha > 0$  são constantes arbitrárias. Essa relação de recorrência exemplifica o fato de que pode haver mais de um processo dinâmico atuando sobre o sistema, nesse caso  $N_T(t)$ , coexistindo com outro processo dinâmico  $N(t)$ . Para determinados valores das constantes  $a$  e  $\alpha$ , onde  $0 \leq \alpha \leq 1$ , observamos as mesmas características do processo de crescimento descrito pela Eq. 3.5, o agregado cresce sob o mecanismo da Eq. 3.6, apresentando o comportamento auto-organizado em torno do estado crítico, correspondente a probabilidade crítica de ocupação de uma rede quadrada,  $p_c$ . A probabilidade  $p(t)$  encontra o estado estacionário em torno do ponto fixo  $\langle p \rangle \approx 0.59$  o que é aproximadamente o valor crítico para a probabilidade de ocupação de uma rede quadrada[3]. Demais discussões sobre esse mecanismos, juntamente com o descrito anteriormente podem ser encontrados na Seção 3.4.

Ainda no intuito de investigarmos o efeito de diversos mecanismos que podem atuar sobre o sistema de forma a conduzir o sistema para seu estado crítico auto-organizado, propomos um mecanismo de recorrência baseado em como o agregado cresce, tomando um parâmetro mencionado na Seção 2.4, o raio de giração, que fornece uma forma de medir o espalhamento do aglomerado em relação ao seu centro de massa. Podemos definir o raio de giração  $R$  do maior agregado como a distância quadrática média ao centro de massa do sistema, tomando a Eq. 2.2.

$$R^2 = \frac{1}{s} \sum_s |\vec{r}_i - r_{cm}|^2$$

Nosso mecanismo consiste em tomar o raio de giração como um parâmetro dinâmico do sistema,  $R^2(t)$ , guiando à uma regra de recorrência similar às mencionadas anteriormente, observando o processo de coexistência entre os processos dinâmicos. De forma que, a relação de recorrência imposta é da forma

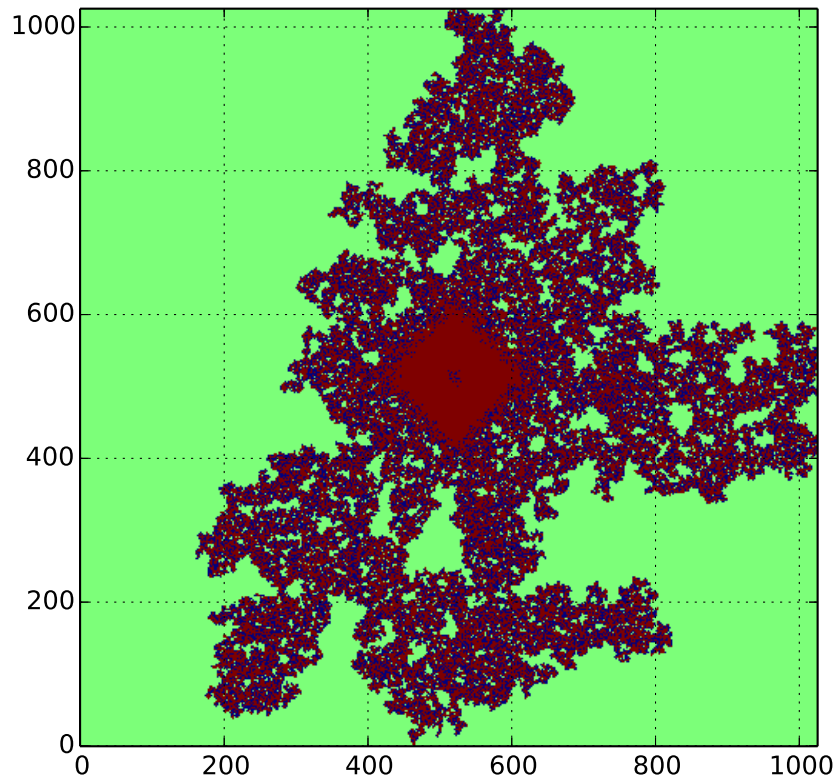
$$p(t+1) = p(t) + k[aR(t)^\alpha - N(t)] \quad (3.7)$$

### 3.4 Resultados

Nesse trabalho mencionamos as características mais gerais da Teoria de Percolação como um todo, onde dedicamos-nos a fenômenos que apresentam estados críticos, como o Fogo na Floresta e o modelo de Pilha de Areia. Resumindo, nesse trabalho observamos mecanismos propostos por Alencar *et al.*[5] para analisar o crescimento de um agregado de percolação e propomos nosso próprio mecanismo baseado no Raio de Giração a cada intervalo de tempo. Analisamos como se comporta o processo de Percolação Auto-Organizada, levando o sistema a um estado crítico, tomando o processo de ocupação dado pelo Algoritmo de Leath-Alexandrowicz. Mostrou-se que uma regra de controle global, que regula a taxa de crescimento do agregado leva o sistema a criticalidade, que nesse caso pode ser entendida como a capacidade do agregado crescer a uma probabilidade mínima.

Para o mecanismo apresentado pela Eq. 3.5, uma realização típica de um agregado de percolação crescido com o mecanismo apresentado por Alencar *et al.*[5], é mostrada na Fig. 12. Particularmente, tomamos uma rede quadrada  $L \times L = 1024$ , com parâmetros iniciais  $N(0) = 1$ ,  $p_0 = 0.6$ , nesse caso o coeficiente cinético é  $k = 10^{-4}$  e o limiar para o número de elementos ativos é  $N_T = 200$ . Para descrevermos a Fig. 12, observamos que a densidade do agregado segue a variação da probabilidade de ocupação,  $p$ . Inicialmente percebemos que o objeto é compacto e com a variação da probabilidade  $p$ , o sistema tende a apresentar estruturas ramificadas, assemelhando-se a um agregado de percolação estático.

**Figura 12** – Agregado de percolação sujeito ao crescimento auto-organizado.



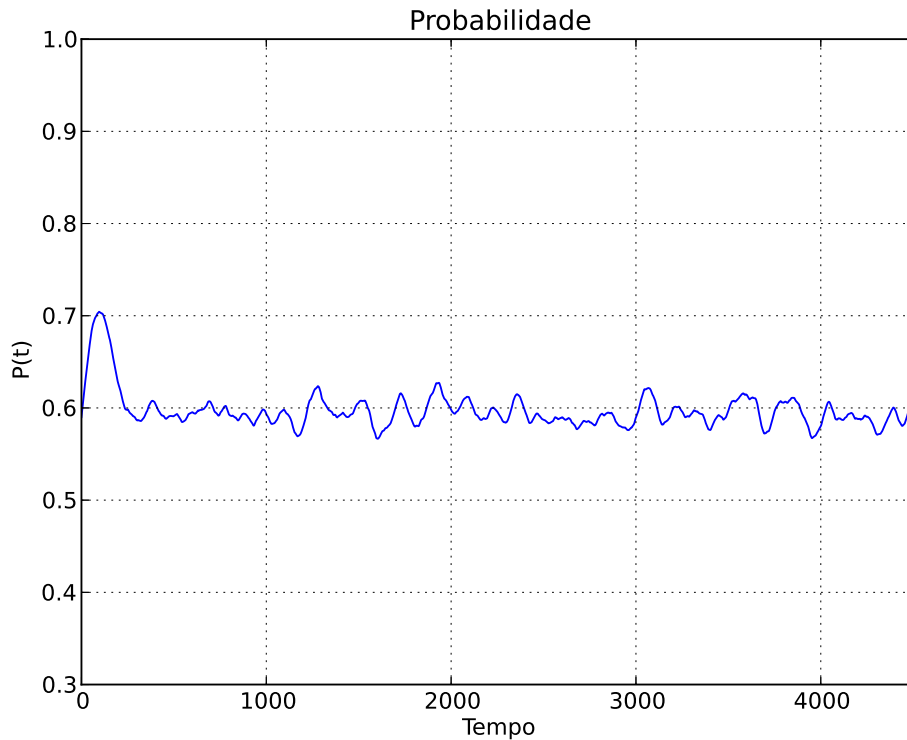
Fonte: Elaborado pelo autor. Realização típica de um crescimento de um agregado sob o regime de percolação e impulsionado pela regra controladora dada pela Eq. 3.5. Nesta simulação particular, uma semente foi alocada no centro de uma rede quadrada  $1024 \times 1024$ . A probabilidade de crescimento inicial foi  $p_0 = 0.59$ , o coeficiente cinético é  $k = 10^{-4}$  e o limiar para o número de elementos ativos é  $N_T = 200$ .

A evolução temporal da probabilidade  $p$  é mostrado nas Fig 2 e Fig.3 abaixo para três valores diferentes de probabilidade inicial,  $p_0$ . Depois de um período transiente e independente de  $p_0$ , os sistemas atingem um estado estacionário, caracterizado por um valor médio da probabilidade de crescimento,  $\langle p \rangle \approx 0.59$ , que tende a probabilidade crítica de percolação para um rede quadrada.

Para confirmar a hipótese de auto-organização em um estado crítico, simulações extensivas foram realizadas com diferentes coeficientes cinéticos  $k$ , diferentes valores limiares  $N_T$ , em todos os casos, observamos o mesmo comportamento auto-organizado com o sistema que sendo automaticamente levado a probabilidade crítica de percolação para sítios quadrados.

Observou-se que variando a probabilidade inicial, que após um período transiente de tempo, tendem a aproximar-se da probabilidade limiar da rede escolhida, nesse

**Gráfico 2** – Análise do comportamento da probabilidade  $p(t)$  como função de tempo.



Fonte: Elaborado pelo autor. O gráfico da probabilidade de ocupação de crescimento  $p$  como uma função do tempo para percolação de sítio no caso de uma rede quadrada  $2048 \times 2048$ . A regra de controle utilizada é a Eq. 3.5, com probabilidade de crescimento inicial  $p_0 = 0.59$ , o coeficiente cinético  $k = 10^{-5}$  e o limiar para o número de elementos ativos é  $N_T = 200$ . Depois de um curto período transiente de tempo, independente das condições iniciais  $p_0$ ,  $p(t)$  alcança um estado estacionário, onde a média de  $p$ ,  $\langle p \rangle$ , aproxima-se de  $\langle p \rangle \approx 0.59$  e oscila em torno dela até o final da simulação.

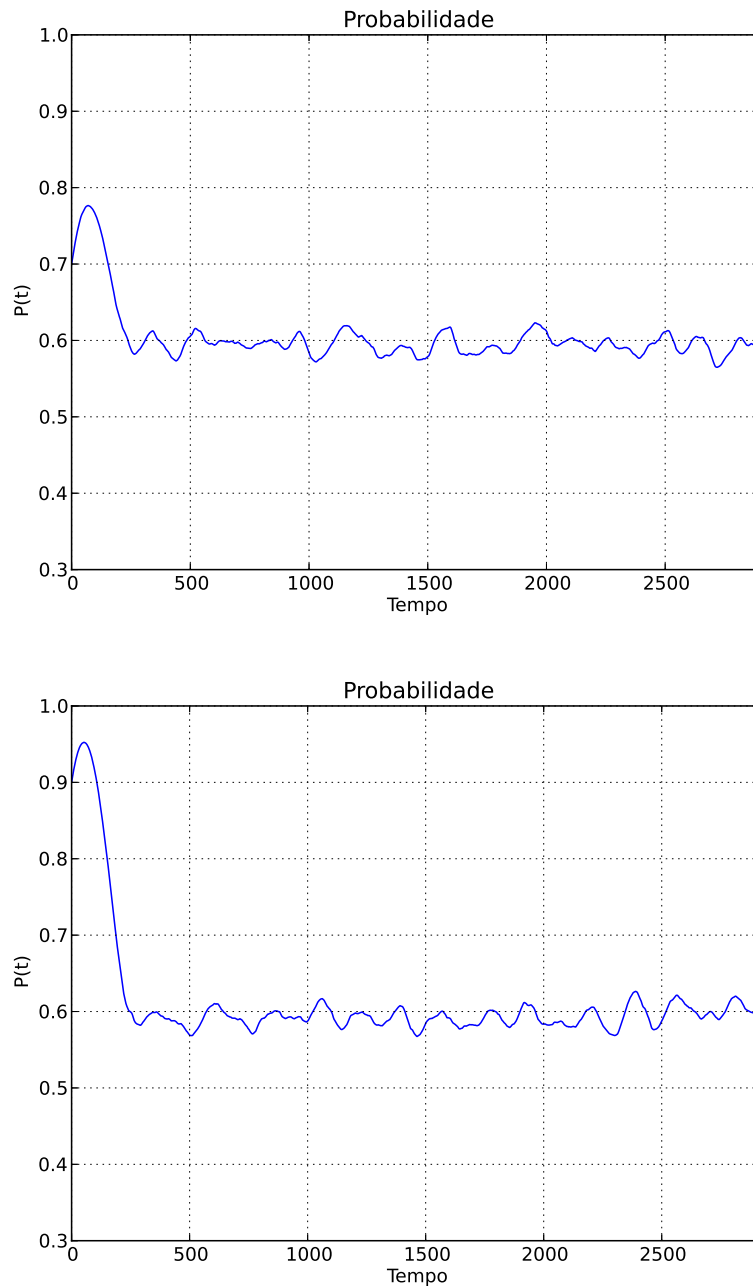
caso, a probabilidade limiar para uma rede quadrada,

$p_c = 0.592746010$ [3], em média. Isso ocorre devido ao mecanismo de controle de probabilidade, Eq. 3.5, a probabilidade tende a se auto organizar, buscando a auto-criticalidade.

O mecanismo restaurador dado pela Eq. 3.5 regula a probabilidade  $p(t)$  de tal modo que a continuidade do processo de crescimento é mantido a uma taxa mínima. Como esperado, os resultados de nossas simulações indicam que o valor de limiar  $N_T$  simplesmente ajustam-se em torno do valor médio do qual o número de sítios ativos  $N$  flutuam no tempo após o sistema atingir o regime estacionário. Evidentemente,  $N_T$  não pode ser muito pequeno, caso contrário, flutuações no processo poderiam, eventualmente, matar os sítios ativos restantes. Por outro lado, os grandes valores de  $N_T$  exigiriam um período transiente excessivamente longo e grandes tamanhos de rede para o sistema atingir o regime estacionário.



**Grafico 3** – Análise do comportamento da probabilidade  $p(t)$  como função de tempo para diferentes probabilidades de ocupação iniciais.

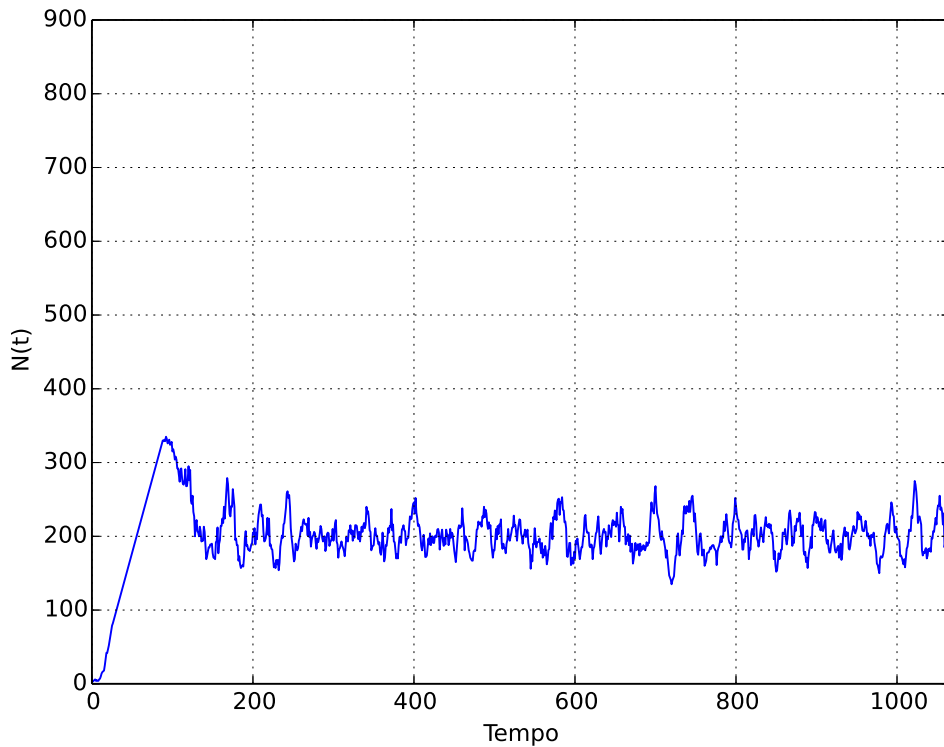


Fonte: Elaborado pelo autor. Crescimento do agregado com probabilidade de crescimento inicial  $p_0 = 0.7$ , e outra probabilidade de crescimento inicial  $p_0 = 0.9$ , o coeficiente cinético  $k = 10^{-5}$  e o limiar para o número de elementos ativos é  $N_T = 200$ . Os mesmos gráficos apresentam características oscilatórias em torno do ponto crítico de uma rede de percolação quadrada.

Analisemos agora os outros dois mecanismos propostos nesse trabalho dados pelas Eq. 3.6 e Eq. 3.7. Para o mecanismo definido pela Eq. 3.6 onde há a coexistência de dois processos dinâmicos  $N_T(t) = at^\alpha$  e  $N(t)$ , expresso por

$$p(t+1) = p(t) + k[at^\alpha - N(t)]$$

**Grafico 4** – Análise do comportamento do número de sítios ativos,  $N(t)$ , como função de tempo.

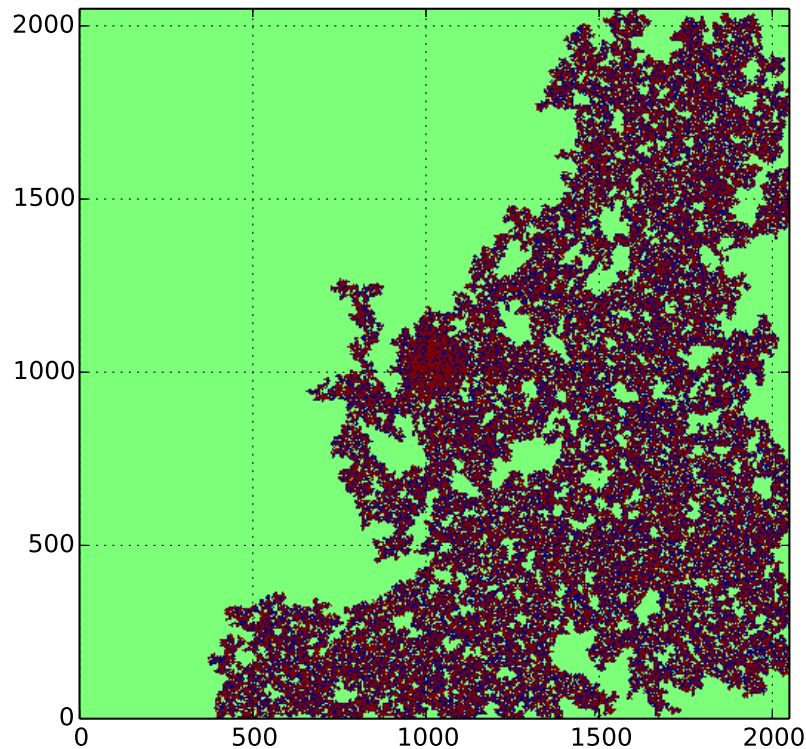


Fonte: Elaborado pelo autor. Dependência do tempo do número de sites ativos  $N(t)$ , calculado tomando a probabilidade de crescimento inicial  $p_0 = 0.59$ , o coeficiente cinético  $k = 10^{-5}$  e o limiar para o número de elementos ativos é  $N_T = 200$ .

Para o mecanismo apresentado pela Eq. 3.6, realizamos um crescimento típico de um agregado de percolação mostrado na mostrada na Fig. 5. Nessa amostragem, tomamos uma rede quadrada  $L \times L = 2048$ , com parâmetros iniciais  $N(0) = 1$ ,  $p_0 = 0.8$ , nesse caso o coeficiente cinético é  $k = 10^{-5}$  e o limiar para o número de elementos ativos é  $N_T = 200$ . O comportamento da Fig. 5 apresenta as mesmas características de crescimento da Fig. 12. Aqui variamos o coeficiente cinético  $k$ , que altera a compactação do agregado, apresentando maiores estruturas ramificadas, assemelhando-se a um agregado de percolação estático, mesmo que o processo dependa de duas variáveis dinâmicas.

A probabilidade expressa como função do tempo, apresenta as mesmas características para o mecanismo descrito pela Eq. 3.5, no entanto, como estamos tratando de dois processos dinâmicos atuando diretamente sobre a nossa relação de recorrência, Eq. 3.6, nossa regra pode alterar a situação de controle do crescimento. A mudança no controle de crescimento foi observada para o número de sítios ativos,  $N(t)$ , como há a coexistência de dois processos dinâmicos, deve haver algum parâmetro que regule o crescimento de forma que o sistema ainda apresente a característica de auto-organização, e isso pode ser

**Grafico 5** – Agregado de percolação sujeito ao crescimento auto-organizado por coexistência de processos dinâmicos.

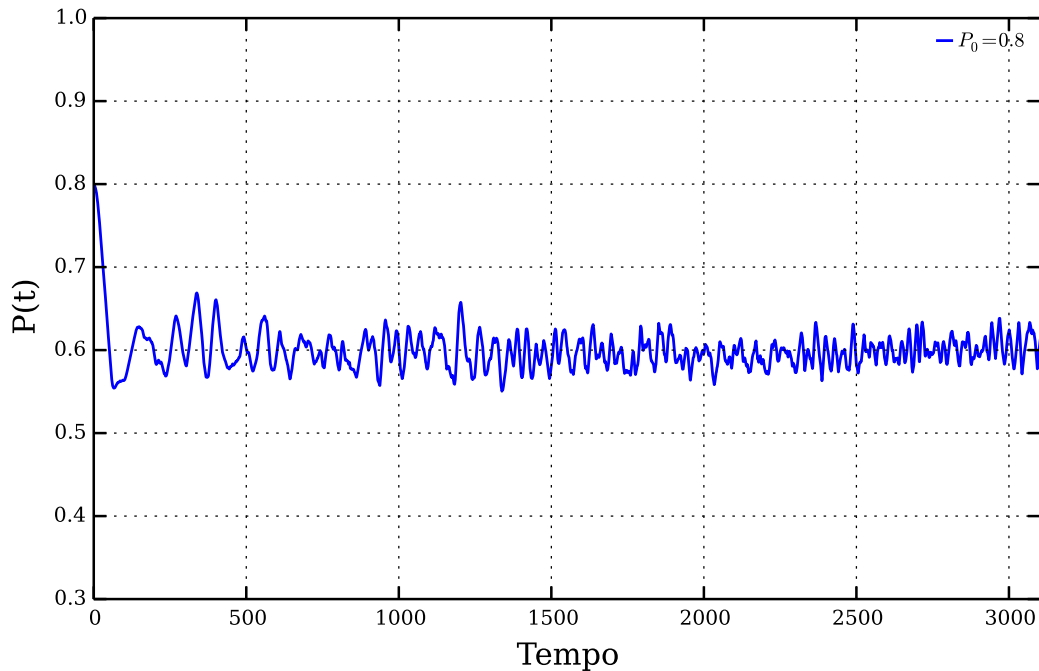


Fonte: Elaborado pelo autor. Realização típica de um crescimento de um agregado sob o regime de percolação e impulsionado pela regra controladora dada pela Eq. 3.6. Nesta simulação particular, uma semente foi alocada no centro de uma rede quadrada  $2048 \times 2048$ . A probabilidade de crescimento inicial foi  $p_0 = 0.8$ , o coeficiente cinético é  $k = 10^{-5}$ .

visto na Fig. 7.

Como mencionado anteriormente, a existência de dois processos dinâmicos atuando sobre essa rede de percolação deve alterar algum dos parâmetros dinâmicos envolvidos no processo, a variável envolvida nessa “conservação” é o número de sítios de ativos,  $N(t)$ . Neste caso, a função  $N(t)$  segue bem de perto a evolução temporal do limiar variável  $N_T(t)$ , assim o número de sítios ativos tende a crescer de forma controlada afim de compensar o crescimento da probabilidade, e o crescimento do agregado alcança um estado crítico auto-organizado.

**Grafico 6** – Análise do comportamento da probabilidade  $p(t)$  como função de tempo para coexistência de processos dinâmicos.



Fonte: Elaborado pelo autor. O gráfico da probabilidade de ocupação de crescimento  $p$  como uma função do tempo para percolação de sítio no caso de uma rede quadrada  $2048 \times 2048$ . A regra de controle utilizada é a Eq. 3.6, com probabilidade de crescimento inicial  $p_0 = 0.8$ , o coeficiente cinético  $k = 10^{-5}$ . Depois de um curto período transitente de tempo, independente das condições iniciais  $p_0$ ,  $p(t)$  alcança um estado estacionário, onde a média de  $p$ ,  $\langle p \rangle$ , aproxima-se de  $\langle p \rangle \approx 0.59$  e oscila em torno dela até o final da simulação.

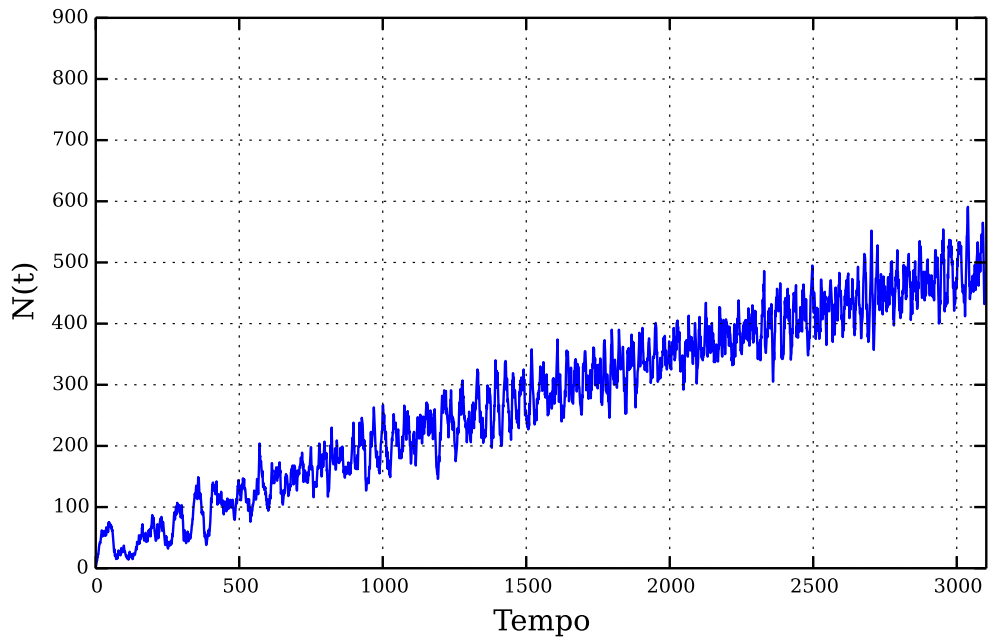
Em última análise, tomemos o mecanismo descrito pela Eq. 3.7, nesse relação de recorrência o nosso valor limiar,  $N_T(t) = aR(t)^\alpha$ , é um processo dinâmico, aqui o raio de giração é um parâmetro que descreve como o agregado cresce, fornecendo uma forma de medir o espalhamento do aglomerado em relação ao seu centro de massa.

$$p(t+1) = p(t) + k[aR(t)^\alpha - N(t)]$$

Novamente a coexistência desses processos altera o crescimento do agregado, no entanto, necessitamos de um parâmetro de sintonia fina,  $0 \leq a \leq 1$ , esse parâmetro permite regular o crescimento de giração juntamente com o expoente  $\alpha$ , para que tenha a dimensão aproximada do número de sítios,  $N(t)$ . Um agregado característico para esse processo de crescimento é mostrado na Fig. 8.

A probabilidade de ocupação  $p$ , apresenta novamente a característica de coexistência entre processos dinâmicos, os resultados indicam que, para valores limitados de  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , o agregado cresce sobre o mecanismo de controle expresso pela Eq. 3.7,

**Grafico 7** – Análise do comportamento do número de sítios ativos,  $N(t)$ , como função de tempo para coexistência de processos dinâmicos.

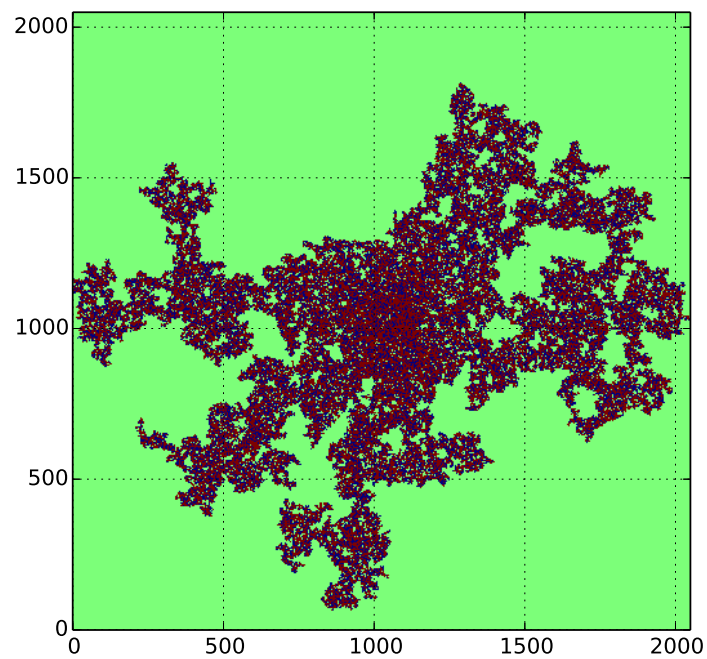


Fonte: Elaborado pelo autor. Dependência do tempo do número de sites ativos  $N(t)$ , calculado tomando a probabilidade de crescimento inicial  $p_0 = 0.8$ , o coeficiente cinético  $k = 10^{-5}$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $\alpha = 0.8$ .

comportando-se forma auto-organizada em torno do ponto crítico da rede de percolação quadrada,  $p_c$ . A probabilidade,  $p(t)$  tende a ajustar-se de forma a encontrar o estado estacionário em torno do ponto crítico da rede,  $p_c$ , em média a probabilidade de ocupação tende a  $\langle p \rangle \approx 0.59$ .

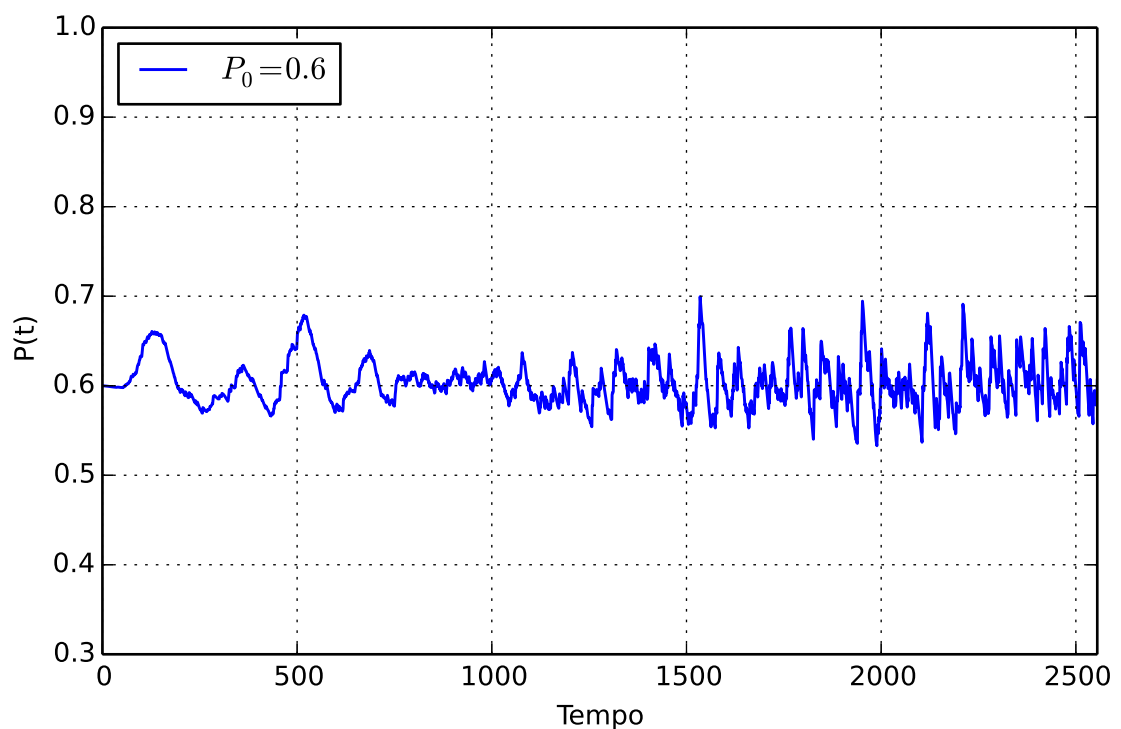
Os resultados obtidos para o número de sítios ativos,  $N(t)$ , Fig. 10 mostram o crescimento de sítios como função do tempo tende a seguir um caráter linear, flutuando em torno do nosso limiar variável,  $N_T(t)$ . Nesse modelos tivemos um cuidado especial com a sintonia dos parâmetros  $\alpha$  e  $\alpha$ , os nossos resultados indicam uma flutuação crescente em torno de  $N_T(t)$ , pois nesse caso o parâmetro considerado cresce diretamente com o aumento do agregado, o raio de giração. Se o raio de giração crescer mais rápido que o número de sítios há uma flutuação maior em torno de  $N_T(t)$ , nesse caso o número de sítios tende a aumentar mais rápido de forma a suprir o aumento indefinido da probabilidade, e o processo continua até que alcancemos o ponto onde a rede percola.

**Grafico 8** – Agregado de percolação sujeito ao crescimento auto-organizado por coexistência de processos dinâmicos, raio de giração.



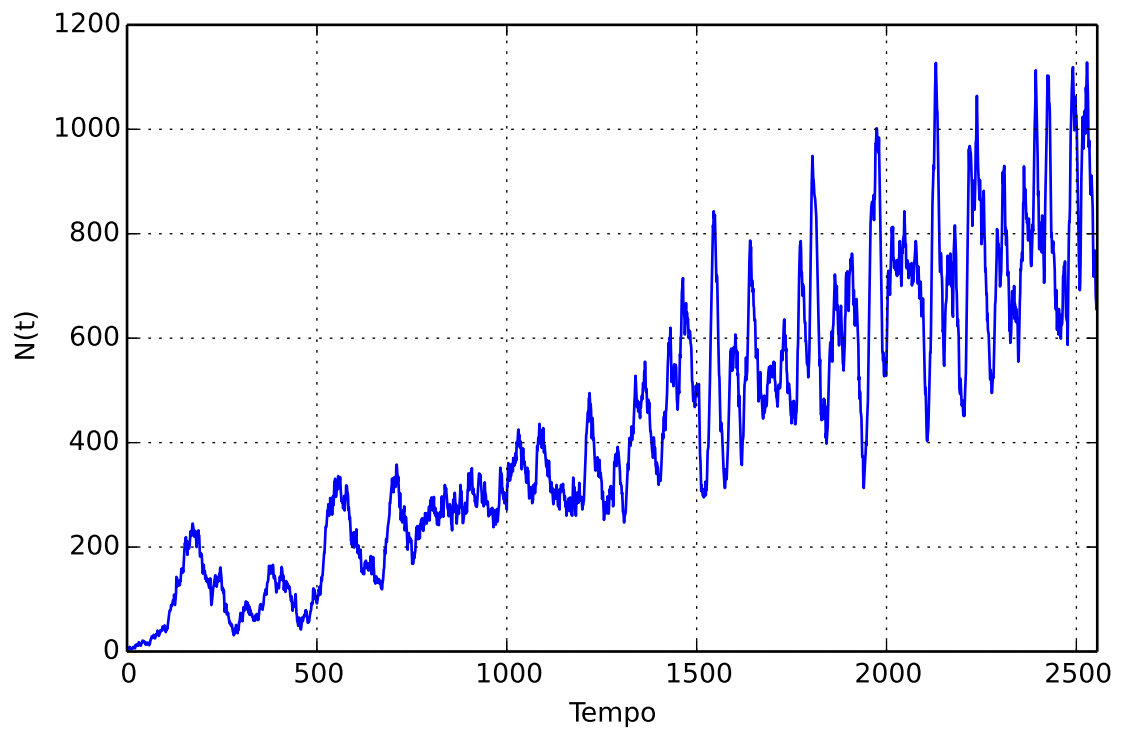
Fonte: Elaborado pelo autor. Realização típica de um crescimento de um agregado sob o regime de percolação e impulsionado pela regra controladora dada pela Eq. 3.7. Nesta simulação particular, uma semente foi alocada no centro de uma rede quadrada  $2048 \times 2048$ . A probabilidade de crescimento inicial foi  $p_0 = 0.6$ , o coeficiente cinético é  $k = 10^{-5}$  os coeficientes  $\alpha = 0.35$  e  $\alpha = 1$

**Gráfico 9** – Análise do comportamento da probabilidade  $p(t)$  como função de tempo para coexistência de processos dinâmicos, raio de giração.



Fonte: Elaborado pelo autor. O gráfico da probabilidade de ocupação de crescimento  $p$  como uma função do tempo para percolação de sítio no caso de uma rede quadrada  $2048 \times 2048$ . A regra de controle utilizada é a Eq. 3.7, com probabilidade de crescimento inicial  $p_0 = 0.8$ , o coeficiente cinético  $k = 10^{-5}$ . Depois de um curto período transitório de tempo, independente das condições iniciais  $p_0$ ,  $p(t)$  alcança um estado estacionário, onde a média de  $p$ ,  $\langle p \rangle$ , aproxima-se de  $\langle p \rangle \approx 0.59$  e oscila em torno dela até o final da simulação.

**Grafico 10** – Análise do comportamento do número de sítios ativos,  $N(t)$ , como função de tempo para coexistência de processos dinâmicos, raio de giração.



Fonte: Elaborado pelo autor. Dependência do tempo do número de sites ativos  $N(t)$ , calculado tomando a probabilidade de crescimento inicial  $p_0 = 0.6$ , o coeficiente cinético  $k = 10^{-5}$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $\alpha = 0.8$ .



## 4 ALGORITMOS E MODELOS

### 4.1 Autômato celular

Inicialmente proposto por John Von Neumann[26], os autômatos celulares são sistemas dinâmicos de dimensão espacial e temporal discretos. Eles são compostos por um reticulado ou grade  $n$ -dimensional, onde são dispostas células com comportamento idêntico, delineado por um conjunto de regras de transição universais.

As regras de evolução são locais, isto é, cada unidade só influencia diretamente algumas poucas vizinhanças. A definição formal de um autômato celular se baseia em uma 4-tupla  $(L, S, N, F)$ , onde:

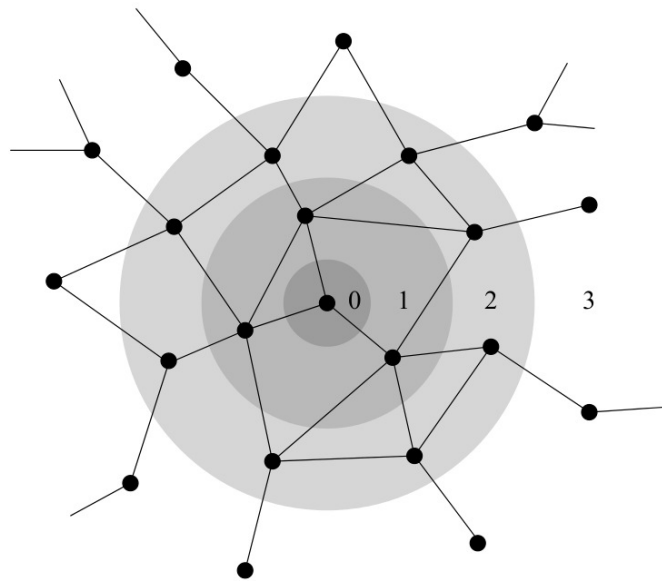
- $L$  é um reticulado regular, cada unidade é denominada célula;
- $S$  é um conjunto finito de estados;
- $N$  é um conjunto finito de índices vizinhos, tal que para todo  $r$  em  $N$  e todo  $c$  em  $L$ :  $r + c$  está em  $L$ ;
- $F$  é um conjunto de funções de transição que pode ser aplicado sobre as células, de forma a definir seu próximo estado a partir do seu estado atual e vizinhança.

De uma forma geral, um autômato celular é um sistema dinâmico formado por muitas unidades interagindo umas com as outras. Grosseiramente falando, um autômato pode ser visto na forma de uma matriz de sítios onde existe uma regra de interação muito simples que influencia apenas os vizinhos mais próximos à região dos fenômenos.

### 4.2 Algoritmo de Busca em Largura

Na teoria dos grafos, Busca em Largura (ou busca em amplitude, também conhecido em inglês por Breadth-First Search - BFS) é um algoritmo de busca utilizado para realizar uma busca ou travessia num grafo de estrutura de dados do tipo árvore[25]. Intuitivamente, começamos pelo vértice raiz e explora todos os vértices vizinhos. Então, para cada um desses vértices mais próximos, exploramos os seus vértices vizinhos inexplorados e assim por diante, até que ele encontre o alvo da busca.

O algoritmo de Busca em Largura, ou muitas vezes chamado por algoritmo de queima (*burning algorithm*), encontra a menor distância a partir de um dado vértice de partida  $s$  para todos os outros vértices do mesmo componente de  $s$ . O princípio básico por trás do algoritmo é ilustrado na Fig. 13. Inicialmente, sabemos apenas a distância que  $s$

**Figura 13** – Breadth-First Search

Fonte: [25]. A procura em largura começa em um determinado vértice, que por definição tem distância 0 entre si, e cresce para fora em camadas ou ondas. Os vértices na primeira onda, que são os vizinhos imediatos do vértice inicial, tem distância 1. Os vizinhos desses vizinhos têm distância 2, e assim por diante.

tem distância 0 de si mesmo a as distâncias para todos os outros vértices são desconhecidas. A partir daí, iniciamos a procura por todos os vizinhos de  $s$ , os quais por definição tem distância 1 de  $s$ . Então encontramos todos os vizinhos desse vértice. Excluindo os que nós já havíamos visitados, esses vértices devem ter distância 2. E os seus vizinhos, excluindo aqueles que já foram visitados que possuem distância 3, e continuamos o processo. Em cada iteração, nós crescemos o conjunto de vértices visitados por um passo de interação. Esta é a ideia básica do algoritmo de Busca em Largura (*Breadth-First Search*).

#### 4.2.1 Algoritmo de Leath-Alexandrowicz

Introduziremos o algoritmo de Leath-Alexandrowicz para o problema de percolação de sítios em uma rede quadrada, onde cada sítio é ocupado (ou não) com uma probabilidade  $p$  ou  $(1 - p)$ . Essa probabilidade é independente da ocupação de outros sítios. O algoritmo é montado de tal forma a manter a decidir aleatoriamente se cada sítio é ocupado ou disponível. O sítio na origem sempre será considerado ocupado.

Em especial, o Algoritmo de Leath-Alexandrowicz[22] é um caso especial do Algoritmo de Busca em Largura, onde iniciamos a rede colocando uma semente em um sítio central, e a cada interação,  $t$ , checamos os seus 4 vizinhos mais próximos (primeiros vizinhos), observando qual o vizinho foi ocupado. Cada vizinho ocupado cria uma nova geração de sítios que poderão ou não serem ocupados.

O pseudo-código abaixo apresenta uma maneira simples do algoritmo, inicia-

mos a rede colocando uma semente e após checamos o seus vizinhos. Os vizinhos ocupados são colocados numa lista  $Lista[i]$ , que basicamente empilha a ordem de quais vizinhos foram ocupados primeiramente, que serão semente da próxima geração.

Inicia o crescimento da rede baseada em **Lista**;

```

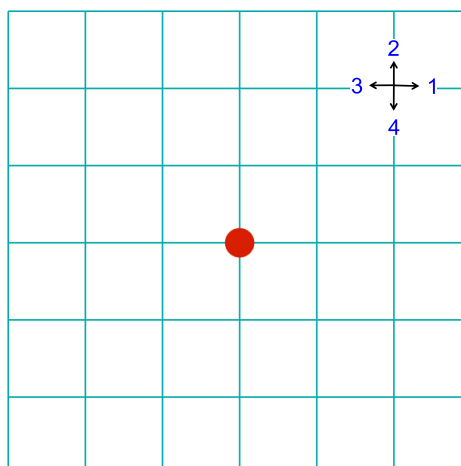
while Lista not end do
  for vizinhos = 1 até 4 do
    if vizinho = vazio then
      if probabilidade sorteada  $\leq$  probabilidade inicial then
        vizinho = visitado;
        Lista[i] = vizinho
      end
    else
      vizinho = não ocupado
    end
  end
  Lista[i+1]
end

```

**Algorithm 1:** Algoritmo Breadth first.

De forma a esclarecer o algoritmo, podemos pensar em uma rede quadrada de percolação e tomarmos sobre ela o modelo de percolação de sítios. Tomando uma rede quadrada, iniciamos a ocupação da rede de um ponto central, denominado por semente, e iniciamos o processo

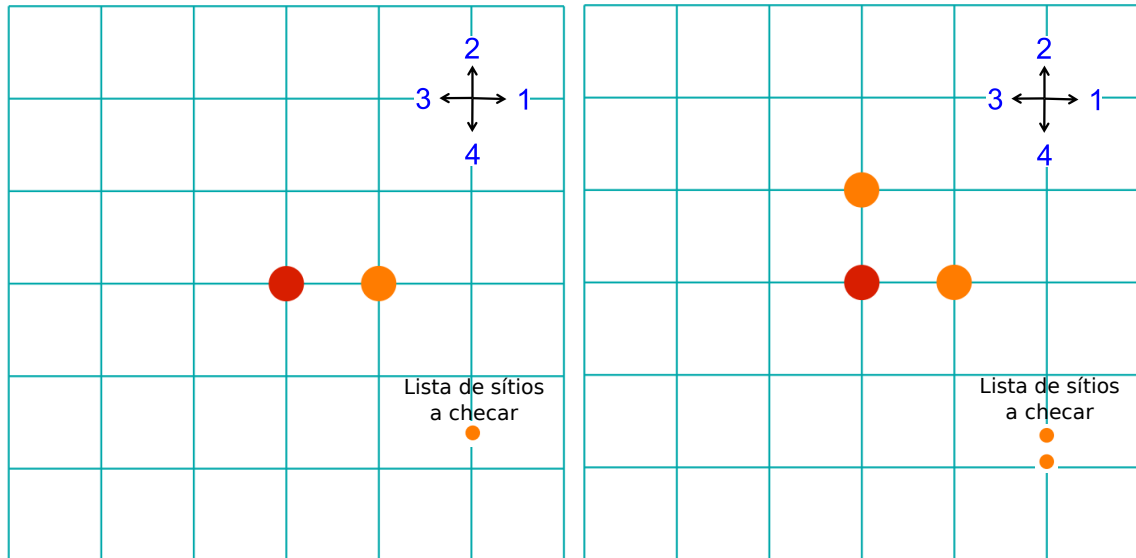
**Figura 14** – Algoritmo de Leath-Alexandrowicz.



Fonte: [27]. Inicialmente tomamos uma semente colocando-a no centro da rede, definindo esse sítio como ocupado. Após iniciamos a checagem dos vizinhos na ordem acima, 1 para direita, 2 para cima, 3 para esquerda e 4 para baixo.

Observe que iniciamos pela direita, sorteamos uma probabilidade de ocupação  $p$  para o sítio, se  $p < p_0$  o sítio continua vazio, mas não irá ser ocupado. Se  $p > p_0$  o sítio pode ser ocupado, e esse sítio é colocado em uma lista para ser checado quando terminar a ocupação de seus vizinhos.

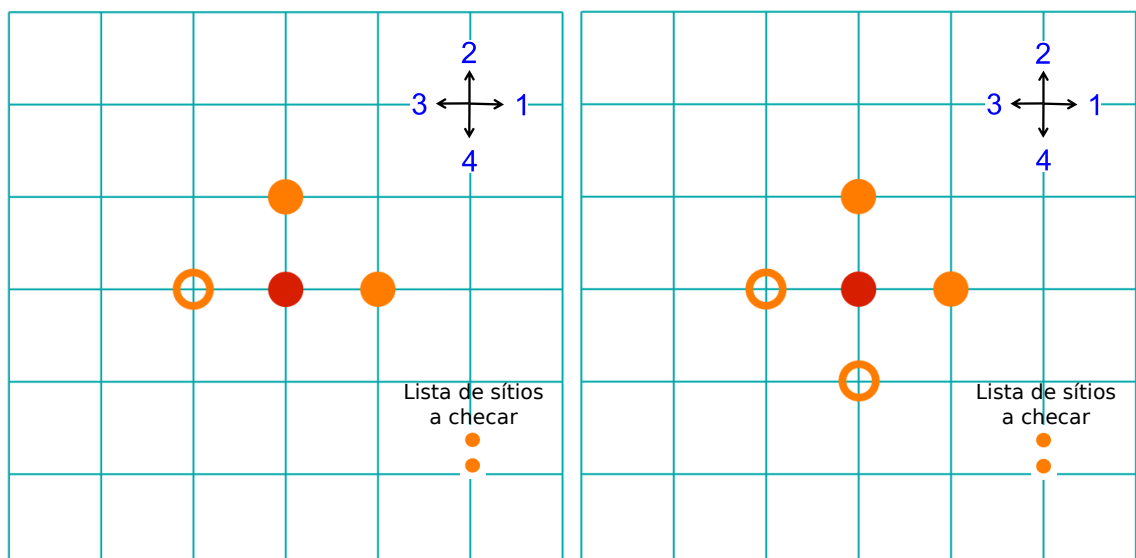
**Figura 15** – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas.



Fonte: [27]. Ocupamos um sítio com probabilidade  $p$ , aqui criamos a primeira camada, *camada laranja*, aqui criamos a *Lista* com os sítios preenchidos para uma próxima geração, esses sítios não são checados até que uma camada seja totalmente preenchida.

Aqui ocupou-se os dois primeiro vizinhos, e os mesmos foram armazenados na lista, aguardando os outros dois vizinhos. E continuando o processo

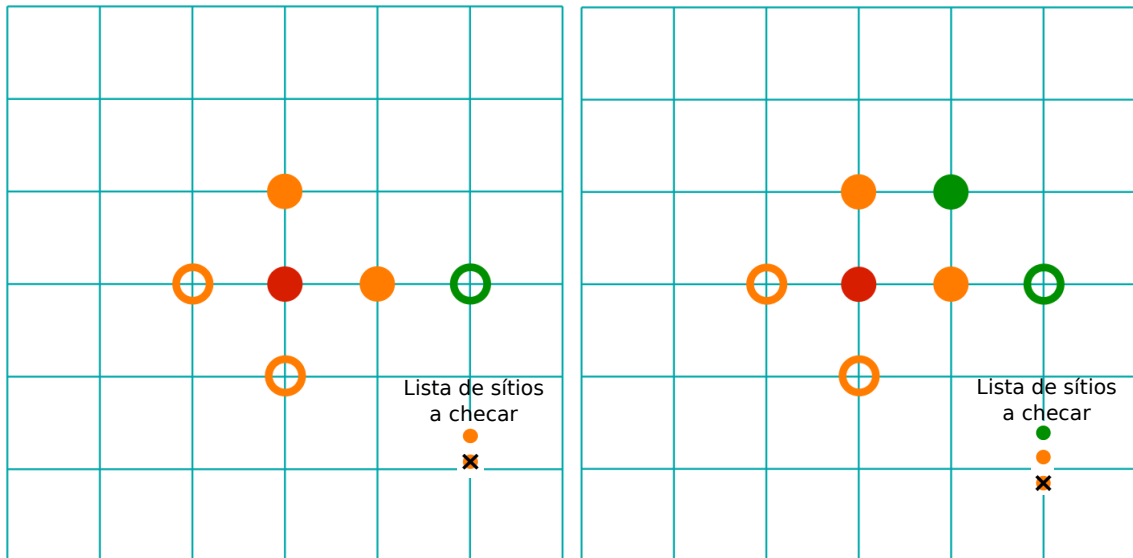
**Figura 16** – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas.



Fonte: [27]. De modo contínuo preenchemos a primeira camada (cor laranja), os sítios totalmente preenchidos são ditos ocupados, enquanto os sítios semi-abertos são ditos não ocupados. Os sítios ocupados continuam a próxima geração.

A primeira camada foi concluída, sendo que dois sítios foram ocupados. A lista que contém os sítios tomará o primeiro como o novo sítio central de ocupação, a nova semente para a nova camada.

**Figura 17** – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas.

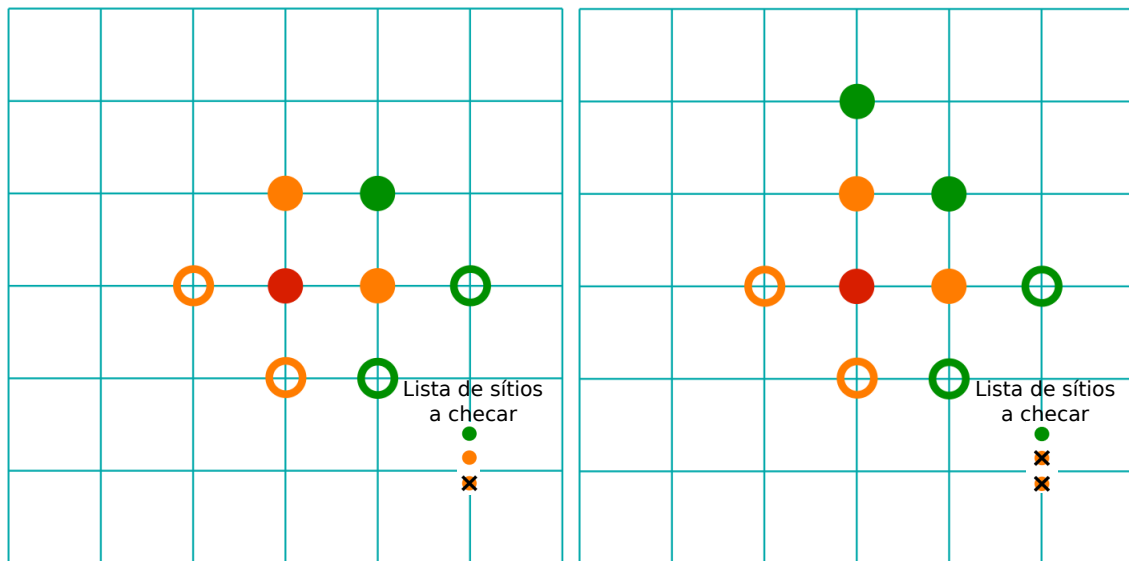


Fonte: [27]. Ocupamos um sítio com probabilidade  $p$ , aqui criamos a primeira camada, *camada laranja*, aqui criamos a *Lista* com os sítios preenchidos para uma próxima geração, esses sítios não são checados até que uma camada seja totalmente preenchida.

O primeiro sítio da lista, tornou-se a nova semente, e novamente tomamos o processo de ocupação, 1-direita, 2-cima, 3-esquerda, 4-baixo, essa é a nova camada, *camada verde*. Novamente, os sítios ocupados serão as novas sementes para o crescimento da rede, sendo armazenados na lista.

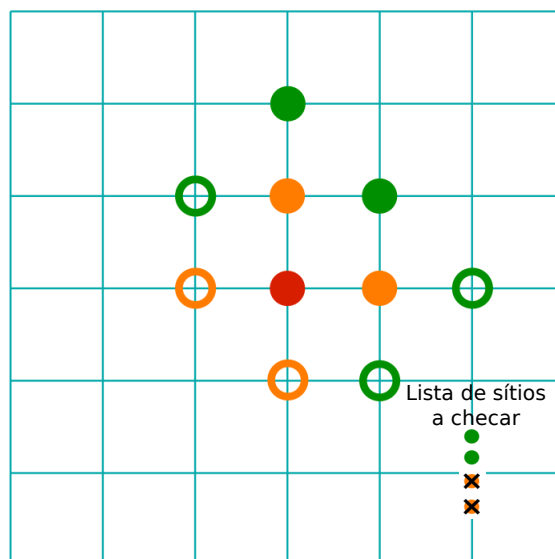
Terminada a geração do primeiro elemento da lista, checamos o segundo elemento da lista, e a partir do segundo elemento criamos seus descendentes que ainda fazem parte da segunda camada, *camada verde*. Terminada a *camada verde*, adicionamos os novos sítios ocupados na lista, e terminamos a segunda geração. Os sítios ocupados nessa geração constituirão a terceira camada, Fig. 19.

**Figura 18** – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas.



Fonte: [27]. De modo contínuo preenchemos a segunda camada (cor verde), os sítios totalmente preenchidos são ditos ocupados, enquanto os sítios semi-abertos são ditos não ocupados. Os sítios ocupados continuam a próxima geração

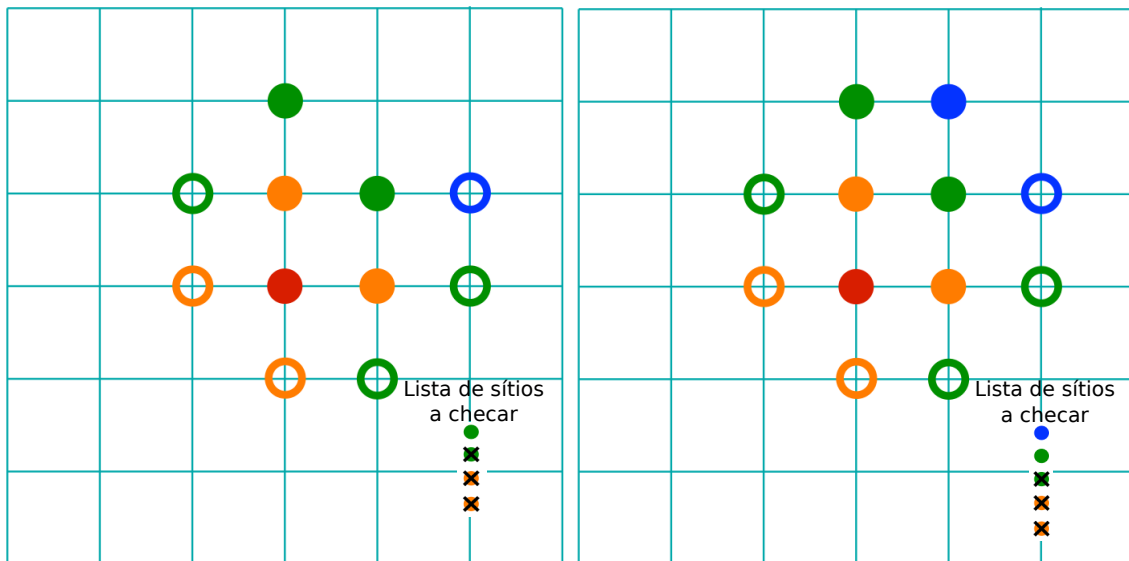
**Figura 19** – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas.



Fonte: [27]. A semente aqui é o sítio laranja acima do vermelho, daí iniciamos a ocupação dos vizinhos na ordem acima, 1 para direita, 2 para cima, 3 para esquerda e 4 para baixo.

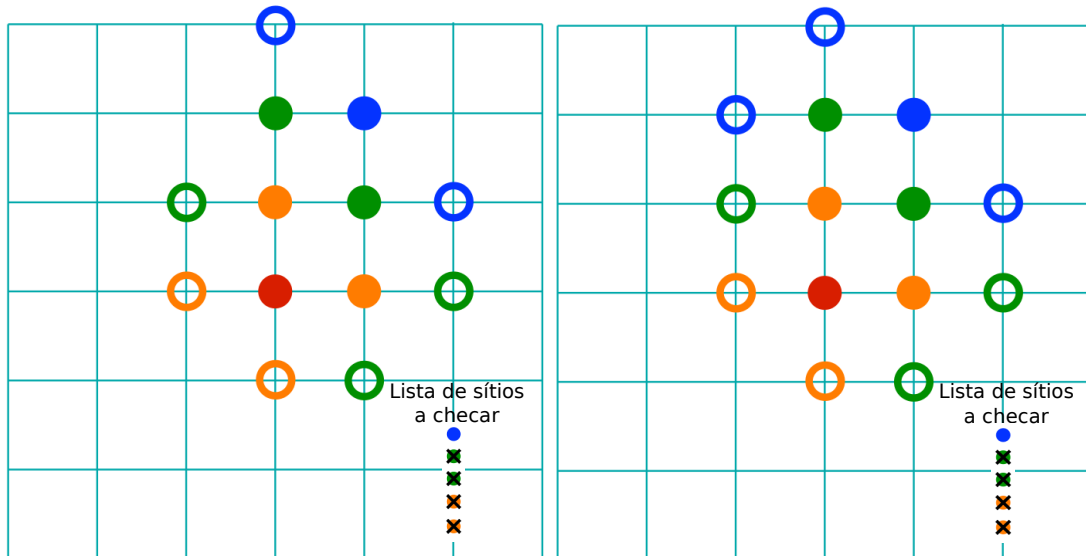
Continuamos o processo, subindo a lista, tomamos o segundo sítio verde ocupado, iniciamos o processo de ocupação, continuando a preencher a camada azul. Por último checamos o último elemento da lista, que nesse caso é o único sítio ocupado azul. A partir dele iniciamos o processo de crescimento, acima mencionado.

**Figura 20** – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas.



Fonte: [27]. Aqui o sítio verde é a semente, observe que os sítios já ocupados não podem ser alterados, sendo que o sítio verde só pode checar os sítios não ocupados.

**Figura 21** – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas.

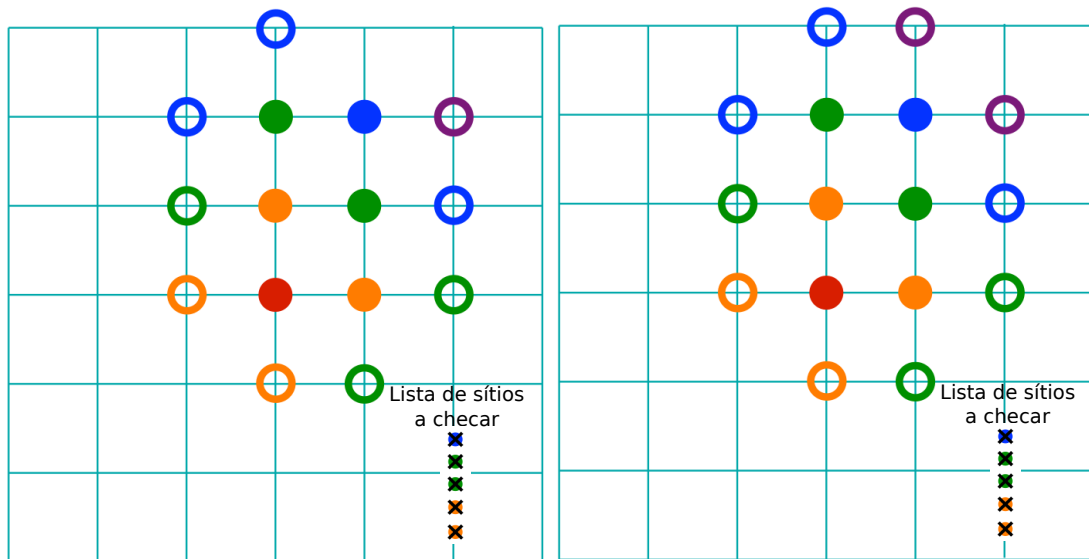


Fonte: [27]. O último sítio da camada verde foi checado, preenchendo assim a camada azul, restando assim um único sítio ocupado na camada azul.

Tomamos agora uma nova camada, camada azul, onde a geração pai é a camada verde com os respectivos sítios ocupados. Checamos a lista, e tomamos o primeiro não-checado e começamos a nova ocupação na camada azul.

Assim a última camada, camada roxa, não possui nenhum *sítio ativo*, sendo assim encerrado o crescimento da rede. Esse algoritmo torna possível o crescimento da rede, de forma que, a rede cresce adicionando sítios um a um, em cada tempo  $t$ , tomando uma semente para iniciar o processo.

**Figura 22** – Preenchimento da rede quadrada. Criação de camadas.



Fonte: [27]. Tomando o sítio ocupado azul, iniciamos o processo de crescimento, sendo que nenhum dos sítios disponíveis tornou-se ocupado, encerrando assim o crescimento da rede.

Nos modelos de percolação auto-organizados discutidos anteriormente, tomamos uma modificação do Algoritmo de Leath-Alexandrowicz, acoplado ao modelo de percolação clássica e aplicando mecanismos que levem o sistema a exibir fenômenos auto-organizados.



## CONCLUSÃO

A Teoria da Percolação, têm sido extensivamente estudados tanto na sua versão por ligações quanto na versão por sítios. Percolação é um modelo que trata do estudo da desordem binária dos seus elementos (sítio ou ligação) quando estes são alocados em uma rede seguindo uma probabilidade de ocupação previamente estabelecida. Nesse trabalho discutimos modelos de percolação de maneira geral, exemplificando aqueles que demonstrassem fenômenos críticos, como no caso do modelo de Fogo na Floresta.

Como modelo de percolação, observamos seu conceito e analisamos as propriedades dos sítios que formam agregados, pois esses sítios que formam agregados contínuos possuem certas propriedades ligadas diretamente a geometria fractal do sistema. Em particular, o sistema exhibe uma transição de fase contínua a um valor finito de  $p$  que, em uma rede regular, é caracterizada pela formação de um aglomerado suficientemente grande para abranger todo o sistema, a partir de um lado para o outro no limite do sistema de tamanho infinito.

Posteriormente, analisamos mecanismos que aplicados a uma rede de percolação produzem auto-organização do sistema, fenômeno esse conhecido como Criticalidade Auto-Organizada. Estudamos tal fenômeno tomando uma modificação do Algoritmo de Leath-Alexandrowicz, e aplicando nossa regra de recorrência conseguimos observar características de Percolação Auto-Organizada, analisando como a probabilidade de ocupação se comportava, quando tratamos a percolação como modelo dinâmico.

Os mecanismos de recorrência aplicados no modelo de percolação de sítios, exibem características auto-organizadas para o sistema, a probabilidade de ocupação tende a se organizar baseada na quantidade de sítios que são ocupados a cada intervalo de tempo, esse processo foi estudado para três mecanismos distintos e os mesmos apresentando a mesma característica auto-organizada.

Resumindo, neste trabalho foi proposto um mecanismo de crescimento para agregados de percolação, o processo de Percolação Auto-Organizada, onde os fenômenos de auto-organização e criticidade são ingredientes da mesma dinâmica. Demonstrou-se que um estado Crítico Auto-Organizado, o sistema pode ser levado de forma espontânea para um regime onde a taxa de crescimento seja constante, o agregado sempre cresça, a uma taxa mínima regulada pelo nosso mecanismo de crescimento. Estes mecanismos podem ser flexíveis, de forma a descrever outros tipos de sistemas, físicos e não-físicos, por exemplo, do ponto de vista de sistemas biológicos, podemos simular redes capilares de sangue, que são

estruturas ligadas e ramificadas, analisando o transporte de fluido nesse meio. Há ainda diversas aplicações onde o modelo de Percolação Auto-Organizada pode ser empregada, o mecanismo aqui empregado regula tacitamente a dinâmica do processo de crescimento do agregado, no entanto podemos aplicar em diversos fenômenos onde podemos observar o crescimento de forma ramificada, que possam ser descritas por geometrias fractais.

## REFERÊNCIAS

- [1] BROADBENT, S. R.; HAMMERSLEY, J. M. Percolation processes. In: CAMBRIDGE UNIV PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1957. v. 53, n. 03, p. 629–641.
- [2] NEWMAN, M. E.; ZIFF, R. M. Fast monte carlo algorithm for site or bond percolation. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 1, p. 016706, 2001.
- [3] STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to percolation theory*. [S.l.]: CRC press, 1994.
- [4] WILKINSON, D.; WILLEMSSEN, J. F. Invasion percolation: a new form of percolation theory. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 16, n. 14, p. 3365, 1983.
- [5] ALENCAR, A. et al. Self-organized percolation. *Physical Review E*, APS, v. 56, n. 3, p. R2379, 1997.
- [6] GRIMMETT, G. *What is Percolation?* [S.l.]: Springer, 1999.
- [7] SUKI, B.; BATES, J. H.; FREY, U. Complexity and emergent phenomena. *Comprehensive Physiology*, Wiley Online Library, 2011.
- [8] STANLEY, H. E. Introduction to phase transitions and critical phenomena. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, by H Eugene Stanley, pp. 336. Foreword by H Eugene Stanley. Oxford University Press, Jul 1987. ISBN-10: 0195053168. ISBN-13: 9780195053166, v. 1, 1987.
- [9] SILVA, J. R. P. d. Invasões múltiplas em meios porosos desordenados. 2013.
- [10] MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. [S.l.]: Macmillan, 1983.
- [11] CELLIER, R.; DOMINGUEZ, F.; ASENSI, M. Les polynômes quadratiques.
- [12] MANDELBROT, B. Les objets fractals. Flammarion, 1984.
- [13] CAMPOS, A. M. de. *Zooming in the Mandelbrot set - Quasi-self-similarity*. 2006. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mandelzoom.jpg>>.
- [14] STOVER, E. W. W. C. *Site Percolation*. 2006. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/SitePercolation.html>>.
- [15] NETO, S. G. de A. Estimativa de expoentes críticos em percolação. 2010.
- [16] BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality. *Physical review A*, APS, v. 38, n. 1, p. 364, 1988.
- [17] DROSSEL, B.; SCHWABL, F. Self-organized criticality in a forest-fire model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 191, n. 1, p. 47–50, 1992.

- [18] RICHARDSON, L. F. Frequency of occurrence of wars and other fatal quarrels. *Nature*, v. 148, p. 598, 1941.
- [19] CARNEIRO, M.; CHARRET, I. A criticalidade auto-organizada na pilha de areia. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 27, p. 571 – 576, 12 2005. ISSN 1806-1117.
- [20] HESSE, J.; GROSS, T. Self-organized criticality as a fundamental property of neural systems. *Criticality as a signature of healthy neural systems: multi-scale experimental and computational studies*, Frontiers Media SA, 2015.
- [21] DRUGER, S. D.; RATNER, M. A.; NITZAN, A. Generalized hopping model for frequency-dependent transport in a dynamically disordered medium, with applications to polymer solid electrolytes. *Physical Review B*, APS, v. 31, n. 6, p. 3939, 1985.
- [22] LEATH, P. Cluster size and boundary distribution near percolation threshold. *Physical Review B*, APS, v. 14, n. 11, p. 5046, 1976.
- [23] FLORY, P. J. Molecular size distribution in three dimensional polymers. i. gelation1. *Journal of the American Chemical Society*, ACS Publications, v. 63, n. 11, p. 3083–3090, 1941.
- [24] ALENCAR, A. M. Crescimento e transporte em estruturas ramificadas. 1999.
- [25] NEWMAN, M. *Networks: an introduction*. [S.l.]: Oxford University Press, 2010.
- [26] NEUMANN, J. v.; BURKS, A. W. Theory of self-reproducing automata. University of Illinois Press, 1966.
- [27] LEATH, P. Single-cluster growth “leath-alexandrowicz method”. Rutgers University, 2015.