

A APLICAÇÃO DE GAUSS DE SUPERFÍCIES COMPLETAS EM \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4

HUGO BEZERRA BORBA DE ARAUJO

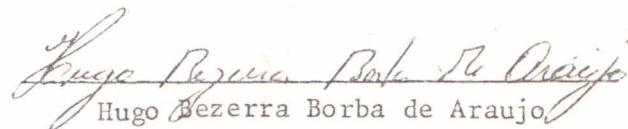
(23)

MONOGRAFIA SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO CURSO DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

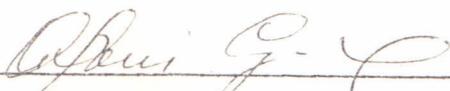
FORTALEZA - 1986

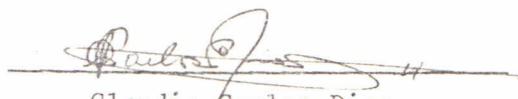
Esta Monografia foi submetida como parte dos requisitos necessários a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se a disposição dos interessados na Biblioteca Central da referida Universidade.

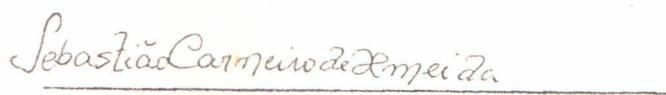
A citação de qualquer trecho desta Monografia é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.


Hugo Bezerra Borba de Araujo

MONOGRAFIA APROVADA EM 19/12/86


Antonio Gervasio Colares
Orientador da Monografia


Claudio Carlos Dias


Sebastião Carneiro de Almeida

Sebastião Carneiro de Almeida

Aos meus filhos

Pedro Ivo

Catarina

Bruno Augusto

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Antonio Gervasio Colares pela segura e eficiente orientação.
- Ao Prof. Sebastião Carneiro de Almeida por ter lido e apresentado sua
gestão à redação final desta Monografia.
- Aos meus pais pelo apoio que sempre me deram principalmente durante o
Curso.
- Ao Sr. José Alves Ferreira pelo excelente trabalho de datilografia.
- Ao D.M.E. da UFPB Campus II e à CAPES/PIC.

Fortaleza, Dezembro de 1986

I N D I C E

	página
INTRODUÇÃO	1
CAP. 1 - SUPERFÍCIES COMPLETAS EM \mathbb{R}^3 COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE	
§ 1. Superfícies em \mathbb{R}^3	4
§ 2. Superfícies Completas em \mathbb{R}^3 com Curvatura Média Constante ...	14
CAP. 2 - SUPERFÍCIES COMPLETAS EM \mathbb{R}^4 COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO	
§ 1. Superfícies em \mathbb{R}^n	17
§ 2. Superfícies em \mathbb{R}^4	29
§ 3. Superfícies Completas em \mathbb{R}^4 com Vetor Curvatura Média Paralelo	43
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48

INTRODUÇÃO

Nesta Monografia apresentamos a demonstração dos teoremas abaixo enunciados.

Teorema I : (Hoffman-Osserman - Schoen, 198 [2]). Seja S uma superfície completa, orientada de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 . Se a imagem de S pela aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério aberto (fechado) então S é um plano (plano ou um cilindro circular reto).

Teorema II: (Hoffman-Osserman-Schoen 198 [2]). Seja S uma superfície completa, orientada em \mathbb{R}^4 com vetor curvatura média paralelo e não nulo. Seja $G(2, \mathbb{R}^4)$ o Grassmanniano de 2-planos orientados em \mathbb{R}^4 representado pelo produto de esferas $S_1 \times S_2$. Então a imagem de S pela aplicação de Gauss tem a propriedade de que nenhuma de suas projeções sobre S_1 ou S_2 pode situar - se em um hemisfério aberto; se alguma de suas projeções situa-se em um hemisfério fechado, então S é um cilindro circular reto em algum \mathbb{R}^3 contido em \mathbb{R}^4 , ou um produto de círculos.

Na demonstração dos teorema I e II, utilizamos a equação $\Delta Y = -|dY|^2 Y$ que caracteriza as funções harmônicas na esfera, onde Y é uma função de uma superfície S na esfera e Δ é o operador de Laplace-Beltrami sobre S . Utilizamos também um teorema de Hoffmann (2.2.49) o qual afirma que "se S é uma superfície completa, orientada em \mathbb{R}^4 com vetor curvatura

média paralelo e não nulo e curvatura gaussiana $K = 0$ então S é um cilindro circular reto em algum $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, ou um produto de círculos. Também recorremos ao Teorema de Uniformização de Koebe e a alguns fatos sobre funções sub-harmônicas. Apesar disso tudo, o que realmente conclui a demonstração dos teoremas I e II, na hipótese da superfície ser o disco, é um resultado devido a (Fischer-Colbrier-Schoen) o qual garante que dada uma métrica completa no disco, de curvatura gaussiana K , se $a \geq 1$ e $p \geq 0$, então a única solução g da equação $\Delta g - aKg + pg = 0$ é $g \equiv 0$.

Para abordar alguns aspectos históricos referentes aos teoremas I e II acima, observamos, em primeiro lugar que um fato essencial com relação à aplicação de Gauss de superfícies mínimas completas no espaço \mathbb{R}^n é que se o conjunto dos planos tangentes a uma superfície mínima completa é suficientemente restrito, então S é um plano. O primeiro resultado neste sentido, provado por Osserman em 1959 no artigo intitulado "Prova da Conjectura de Nirenberg (Comm. Pure Appl. Math. 1q, (1959), 229-232), foi que se uma superfície mínima completa S em \mathbb{R}^3 não é um plano, então suas normais devem constituir um conjunto denso na esfera. Este resultado foi estendido por Chern no artigo "Superfícies Mínimas em \mathbb{R}^n ", (Diff. and Combinatory topology, Princeton University Press (1965)), para superfícies mínimas em \mathbb{R}^4 como produto de duas esferas. Em 1981, no artigo "A aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa não plana não pode omitir 7 pontos sobre a esfera (Ann. of Math. 113, (1981)), Frederico Xavier mostrou que as normais a uma superfície mínima completa S em \mathbb{R}^3 podem omitir não mais que seis pontos.

Considerando estes resultados para superfícies mínimas, o que se poderia dizer de análogo para superfícies completas de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 ? Mais geralmente: O que se poderia dizer a respeito de superfícies com vetor curvatura média paralelo em \mathbb{R}^4 ? Os teoremas I e II acima, de uma certa forma, respondem a estas perguntas.

Dividimos este trabalho em dois capítulos. No capítulo 1, damos os preliminares sobre superfícies em \mathbb{R}^3 e superfícies de Riemann sem muitas demonstrações uma vez que o assunto já foi exaustivamente apresentado em vários livros. Ainda no capítulo 1 demonstramos o teorema I.

No capítulo 2, apresentamos alguns fatos básicos sobre a geometria de superfícies em \mathbb{R}^4 e por tratar-se de um assunto não muito visto demonstramos quase tudo que é afirmado. Por último, encerramos o capítulo com a demonstração do teorema II, objetivo principal desta Monografia.

1 - SUPERFÍCIES COMPLETAS EM \mathbb{R}^3 COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

1.1 - Superfícies em \mathbb{R}^3

No que se segue, suporemos conhecidos alguns fatos relacionados com Variedades Riemannianas, Método do Referencial Móvel, Espaços de Recobrimento e Superfícies de Riemann. Entretanto, algumas definições serão dadas e alguns teoremas serão enunciados a fim de dar maior clareza aos resultados que pretendemos utilizar.

Sejam M^r e N^s duas variedades diferenciáveis de dimensão r e s respectivamente. Seja $F:M^r \rightarrow N^s$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que F é uma imersão se dF é injetiva. Prova-se que para toda variedade diferenciável M^n de dimensão n , existe uma imersão de M^n em \mathbb{R}^{2n-1} (Teorema de Whitney [1]). Consequentemente, as variedades diferenciáveis são todas Riemannianas, pois a partir da imersão F , podemos definir em $T_p(M)$ (espaço tangente a M em p) a métrica.

$$\langle v, w \rangle(p) = \langle dF_p(v), dF_p(w) \rangle_{(F(p))},$$

para v, w em $T_p(M)$.

Para nós, uma superfície S é uma Variedade Riemanniana de dimensão 2; S é dita orientável se existir uma 2-forma diferenciável diferente de zero em todos os seus pontos. Em particular, se a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, dizer que S é orientável implica na existência de um campo normal diferenciável em todos os seus pontos. Uma superfície S é dita completa se todas as suas geodésicas forem definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sejam S e S' duas superfícies. Uma aplicação $F:S \rightarrow S'$ é dita conforme se existe uma função $\lambda:S \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, tal que

$$|dF_p(v)| = \lambda(p)|v|, \quad \forall v \in T_p(S).$$

Se F é um homeomorfismo conforme, dizemos que S e S' são conformemente equivalentes. Assim, quando dizemos que S é conformemente plana, estamos afirmando que em cada ponto p de S , existe uma vizinhança U de $p \in S$ e um homeomorfismo conforme $F:U \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre um aberto $F(U) \subset \mathbb{R}^2$. Desse modo, $x = (x_1, x_2)$ são coordenadas em termos das quais a métrica de S se escreve

$$g_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} = g_{22} \quad \text{e} \quad g_{12} = 0.$$

Tais coordenadas são chamadas parâmetros isotérmicos. Em [8], encontramos uma demonstração do seguinte

1.1.1 - Teorema: Para cada ponto p de uma superfície S existe um sistema de coordenadas isotérmicas numa vizinhança de p .

Seja S uma superfície e $\{\ell_1, \ell_2\}$ um referencial (campos ortonormais) local em S com 1-formas duais w_1, w_2 respectivamente e 1-forma de conexão w_{12} . A função K dada por

$$1.1.2 \quad d w_{12} = -K w_1 \wedge w_2,$$

chama-se Curvatura Gaussiana de S .

Seja S uma superfície. Considere uma imersão $X:S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > 2$ e suponha S com a métrica induzida por X . Neste caso, X torna-se uma imersão isométrica. Localmente X é um mergulho isométrico. Portanto, localmente, $X(S)$ é uma sub-variedade de \mathbb{R}^n . Vamos definir então uma superfície em \mathbb{R}^n como sendo uma superfície imersa em \mathbb{R}^n com a métrica induzida pela imersão.

Seja S uma superfície em \mathbb{R}^n . Seja ℓ_s um referencial local em \mathbb{R}^n tal que ℓ_i é tangente a S em $p \in S$, definimos o campo de vetor curvatura média de S em p , H_p por

$$1.1.3 \quad H_p = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{\ell_i} \ell_i)^N$$

onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão de \mathbb{R}^n .

Estas definições de curvatura Gaussiana e curvatura média de uma superfície S , serão utilizadas no capítulo II adiante. No presente capítulo, vamos obter estas duas curvaturas, utilizando um operador chamado "Operador de Forma da Superfície". Por um momento iremos denotar as superfícies por M e deixaremos a letra S para indicar o operador de forma de M .

Seja p um ponto de uma superfície M orientável em \mathbb{R}^3 . Então para cada $v \in T_p(M)$, seja

$$1.1.4 \quad S_p(v) = -\nabla_v U$$

onde U é um campo vetorial normal e unitário numa vizinhança de p em M . S_p chama-se Operador de Forma de M em p (que se deriva de U). Observe que a existência de U é garantida pelo fato de M ser orientável. Prova-se que, [4], em cada ponto p de M , S_p é um operador linear simétrico.

Definiremos a aplicação de Gauss de $M \subset \mathbb{R}^3$ como sendo a aplicação que translada o vetor unitário normal a M em p para a origem de \mathbb{R}^3 .

Isto é, $G_{(p)} = U_p$.

1.1.5 - Lema: O operador de forma S_p de $M \subset \mathbb{R}^3$ é menos a derivada de sua aplicação normal de Gauss.

Prova: Seja $v \in T_p(M)$ e $\alpha: (-\xi, \xi) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então,

$$\begin{aligned} S_p(v) &= -\nabla_v U = -(U \circ \alpha)^*(t)_{/t=0} = \\ &= -dU\alpha^*(0) = -dU(v). \end{aligned}$$

Como isto ocorre $\forall v \in T_p(M)$ concluímos que

1.1.6 - $S_p = -dU$

1.1.7 - Proposição: Seja M uma superfície orientável em \mathbb{R}^3 . Dado um referencial $\{\ell_1, \ell_2\}$ em $p \in M$, seja $[S_p]$ a matriz de S_p com respeito a base $\{\ell_1, \ell_2\}$. Então as curvaturas Gaussianas e média de M em $p \in M$, satisfazem.

$$K = \det S_p \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2} \text{ traço } [S_p]$$

Prova: Seja $\{\ell_1, \ell_2\}$ um referencial em $p \in M$ com 1-formas duais w_1 e w_2 e vamos calcular a matriz de S_p com respeito a base $\{\ell_1, \ell_2\}$ com o unitário normal $U = \ell_3$. Assim,

$$S(\ell_1) = -\nabla_{\ell_1} \ell_3 = -w_{31}(\ell_2)\ell_1 - w_{32}(\ell_1)\ell_2$$

$$S(\ell_2) = -\nabla_{\ell_2} \ell_3 = -w_{31}(\ell_2)\ell_1 - w_{32}(\ell_2)\ell_2$$

Portanto, a matriz de S_p relativa a $\{\ell_1, \ell_2\}$ é dada por

1.1.8 $S_p = \begin{pmatrix} w_{13}(\ell_1) & w_{13}(\ell_2) \\ w_{23}(\ell_1) & w_{23}(\ell_2) \end{pmatrix}$

De (1.1.8), $\det[S_p] = w_{13}(\ell_1)w_{23}(\ell_2) - w_{13}(\ell_2)w_{23}(\ell_1) =$

$$= (w_{13} \wedge w_{23})(\ell_1, \ell_2) =$$

$$= -(w_{13} \wedge w_{32})(\ell_1, \ell_2) =$$

$$= -d w_{12}(\ell_1, \ell_2).$$

Portanto,

$$1.1.9 - \det S_p = - dw_{12}(\ell_1, \ell_2)$$

Seja $z = \xi + i\eta$ parâmetros isotérmicos em $p \in M$ de modo que

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} = \ell_1; \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \eta} = \ell_2$$

$$\text{e } \lambda d\xi = w_1, \quad \lambda d\eta = w_2$$

Podemos escrever

$$1.1.10 - w_{12} = ad\xi + bd\eta.$$

Tomando a derivada exterior, obtemos

$$1.1.11 - dw_{12} = \left(\frac{\partial b}{\partial \xi} - \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) d\xi \wedge d\eta$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial b}{\partial \xi} - \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) w_1 \wedge w_2$$

Sendo K definida por $dw_{12} = -K w_1 \wedge w_2$ temos que

$$1.1.12 - K = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial b}{\partial \xi} - \frac{\partial a}{\partial \eta} \right).$$

De (1.1.11),

$$\begin{aligned} dw_{12}(\ell_1, \ell_2) &= \left(\frac{\partial b}{\partial \xi} - \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) d\xi \wedge d\eta (\ell_1, \ell_2) = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial b}{\partial \xi} - \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) d\xi \wedge d\eta \left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial b}{\partial \xi} - \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

ou seja, de (1.1.12) temos

$$1.1.13 - dw_{12}(\ell_1, \ell_2) = -K$$

Portanto,

$$1.1.14 - \det [S_p] = dw_{12}(\ell_1, \ell_2) = -(-K) = K.$$

Com cálculos análogos, a partir de (1.6) obtemos $H_p = \frac{1}{2}$ traço $[S_p]$.

Dado um referencial orientado $\beta = \{\ell_1, \ell_2\}$ em $p \in M$, decorre do Lema 2 que o operador de forma de M em p , S_p é (menos) a derivada da aplicação de Gauss de M ($-dU$).

1.1.15 - Lema: Seja G_p a aplicação de Gauss de M em p , dada por $G_p = U_p$. Então

$$1.1.16 - |dU|^2 = 4H^2 - 2K.$$

Prova: Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz do operador de forma S_p com respeito a base $\beta = \{\ell_1, \ell_2\}$, da proposição 3, temos

$$1.1.17 - H = \frac{1}{2}(a + d) \quad e \quad K = ad - bc.$$

$$\text{Assim } 4H^2 = a^2 + 2ad + d^2 \quad e \quad 2K = 2ad - 2bc$$

logo,

$$1.1.18 \quad 4H^2 - 2K = a^2 + d^2 + 2bc$$

Como S_p é simétrico, $b = c$. Segue-se então que

$$4H^2 - 2K = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |dU|^2$$

o que prova o lema.

Voltamos agora para a superfície S . Uma aplicação entre superfícies $\tilde{\pi}: \tilde{S} \rightarrow S$ chama-se aplicação de recobrimento, quando cada ponto $p \in S$, pertence a um aberto U contido em S tal que $\tilde{\pi}^{-1}(p) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ é uma reunião de abertos V_{α} , dois a dois disjuntos, tais que $\pi|_{V_{\alpha}}$ é um homeomorfismo conforme sobre U . A superfície \tilde{S} chama-se recobrimento de S . Se \tilde{S} é simplesmente conexa dizemos que \tilde{S} é o recobrimento universal de S e usamos \tilde{S} para indicar isto. Dentre as propriedades de S que são verificadas pelo seu recobrimento universal, queremos destacar as seguintes:

(i) Seja $\tilde{\mu}$ a função μ levantada à \tilde{S} , isto é, $\tilde{\mu} = \mu \circ \pi$. Se μ é sub-harmônica, contínua e limitada superiormente, então $\tilde{\mu}$ também o é.

(ii) As aplicações de Gauss de S e de \tilde{S} possuem a mesma imagem.

Para uma demonstração de (i) e (ii) veja [8]. Pode-se mostrar, [8] que toda superfície possui um recobrimento universal único, no sentido de que dois deles são conformemente equivalentes.

1.1.19 - Definição: Uma superfície de Riemann S é um espaço de Hausdorff separável com uma família $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ de homeomorfismos $z_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

(i) $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura de abertos para S e cada $z_\alpha(U_\alpha)$ é aberto em \mathbb{C} .

(ii) $z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é holomorfa.

(iii) $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ é maximal com respeito a (i) e (ii).

Como a diferencial de $f = z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ tem determinante igual a $|f'| > 0$, temos que toda superfície de Riemann é orientável.

Seja S uma superfície de Riemann e g , \tilde{g} duas métricas em S . Dizemos que g e \tilde{g} são conformemente equivalentes se $g = \lambda \tilde{g}$, onde λ é uma função que nunca se anula. Temos então que uma superfície de Riemann é sempre uma variedade orientável de dimensão dois com uma família de métricas conformemente equivalentes.

1.1.20 - Proposição: Toda superfície orientável S é uma superfície de Riemann. Duas métricas em S definem uma mesma superfície de Riemann se e só se as métricas são conformemente equivalentes.

Prova: Seja $\{U_\alpha, w_\alpha\}$ uma família de parâmetros isotérmicos em S . Considere $w_\alpha = \frac{1}{w_\alpha} + iw_\alpha^2$ pertencendo a orientação de S e tome $Z_\alpha = \frac{1}{w_\alpha} + iw_\alpha^2$.

A família $\{U_\alpha, Z_\alpha\}$ torna S uma superfície de Riemann.

Suponha que g e \tilde{g} são métricas em S dando uma mesma estrutura de superfície de Riemann a S . Então,

$$g = \lambda |dZ|^2 \quad \text{e} \quad \tilde{g} = \tilde{\lambda} |dZ|^2$$

onde λ e $\tilde{\lambda}$ são funções que nunca se anulam. Logo,

$$\tilde{g} = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} g$$

e portanto as métricas são conformemente equivalentes. Se g e \tilde{g} são conformemente equivalentes, ambas determinam uma mesma família de parâmetros isotérmicos, logo uma mesma estrutura de superfície de Riemann em S , o que demonstra a proposição.

Mais adiante utilizaremos as superfícies de Riemann simplesmente conexas e faremos uso do seguinte teorema devido a Koebe cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

1.1.21 - Teorema de Uniformização de Koebe

Se S é uma superfície de Riemann simplesmente conexa;

então S é conformemente equivalente ao plano complexo \mathbb{C} , ao disco unitário $|Z| < 1$ ou a esfera de Riemann.

Seja $f: S \rightarrow S'$ diferenciável, onde as métricas em S e S' são dados, respectivamente por

$$ds^2 = \lambda^2 |dZ|^2 \quad \text{e} \quad d\sigma^2 = \mu^2 |dw|^2$$

em termos dos parâmetros isotérmicos z e $w = f(z)$ em S e S' respectivamente. Definimos o campo de tensão $\tau(f)$ de f por

$$1.1.22 - \tau(f) = \frac{4}{\lambda^2} \left[w_{zz} + 2(\log \mu) w_z w_{\bar{z}} \right].$$

Dizemos que f é harmônica se $\tau(f) = 0$.

É claro que o campo de tensão $\tau(f)$ de f pode ser visto de várias maneiras. Por exemplo, se S e S' são superfícies imersas, $\tau(f)$ pode ser caracterizado por

$$1.1.23 - \tau(f) = \text{projeção sobre } T_f(S') \text{ de } \Delta f$$

$p \in S$. Aqui, Δ denota o operador Laplaciano. Veja Lemaire, L. [3], (11.2).

Assim, dizer que $f: S \rightarrow S'$ é harmônica significa dizer que Δf é normal a S' . Em particular, quando $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é harmônica se $\Delta f = 0$ e sub-harmônica se $\Delta f \geq 0$. Neste contexto temos o "princípio do máximo" [8], o qual afirma que se $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ é sub-harmônica e limitada superiormente e S é parabólica, então f é constante.

No capítulo 2 vamos utilizar fortemente o fato de que a aplicação de Gauss de uma superfície S imersa com vetor curvatura média paralelo é harmônica. Um teorema de Ruth, E.A. e Vilns, J. [8] relaciona o campo de tensão da aplicação de Gauss G de S com o vetor curvatura média de S , afirmando que

$$1.1.24 - \tau(G) = \nabla H .$$

Assim, H paralelo implica $\tau(G) = 0$. Logo G é harmônica. No caso particular em que S é uma superfície em \mathbb{R}^3 , H constante implica G harmônica. Ainda relacionado com o operador Laplaciano, temos um resultado devido a Schoen, R. e Fischer-Colbrier, D. cuja demonstração encontra-se em [8] e que usaremos no próximo parágrafo.

1.1.25 - Lema: Seja $ds^2 = \lambda |dz|^2$ uma métrica completa no disco M . Se $a \geq 1$ e P é uma função não negativa, então a única solução g da equação

$$\Delta g - a K g + P g = 0$$

é $g \equiv 0$, onde K denota a curvatura gaussiana do disco.

Nas demonstrações dos teoremas I e II utilizaremos fundamentalmente a equação

$$1.1.26 - \quad \Delta y = \frac{-1}{r^2} |dy|^2 y ,$$

que caracteriza as aplicações harmônicas de uma superfície S em \mathbb{R}^n na esfera de raio r em \mathbb{R}^n , a qual passamos a estabelecer.

Seja $y: S \rightarrow S^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^n$ harmônica. Logo Δy é normal a $S^{n-1}(r)$ ou equivalentemente

$$1.1.27 - \quad \Delta y = h y ,$$

para alguma função h sobre S . Seja $z = x + iy$ parâmetro conforme local sobre S . Como $\langle y, y \rangle = r^2$ (onde " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ " é o produto interno de \mathbb{R}^n) temos

$$\langle \partial y / \partial z, y \rangle \equiv 0 .$$

Logo,

$$1.1.28 - \quad \langle \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial \bar{z}}, y \rangle + \langle -\frac{\partial y}{\partial z}, -\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \rangle = 0 .$$

Mas com cálculos imediatos obtemos

$$1.1.29 - \quad \langle -\frac{\partial y}{\partial z}, -\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \rangle = \frac{1}{4} |dy|^2 .$$

Por outro lado, $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta y$. De modo que

$$1.1.30 - \quad \Delta y = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial \bar{z}}$$

De (1.1.28), temos que

$$1.1.31 - \quad \langle \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial \bar{z}}, y \rangle = -\langle \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \rangle .$$

Portanto, usando (1.1.30), (1.1.31) e (1.1.29), obtemos

$$1.1.32 - \quad \langle \Delta y, y \rangle = - |\text{dy}|^2.$$

De (1.1.27) temos

$$1.1.33 - \quad \langle \Delta y, y \rangle = h |y|^2 = h r^2.$$

Comparando (1.1.33) e (1.1.32), obtemos

$$hr^2 = - |\text{dy}|^2, \text{ isto é } h = - \frac{1}{r^2} |\text{dy}|^2$$

substituindo este valor de h em (1.1.27), obtemos

$$\Delta y = - \frac{1}{r^2} |\text{dy}|^2 y,$$

o que estabelece (1.1.26).

1.2 - Superfícies Completas em \mathbb{R}^3 com Curvatura Média Constante

Este parágrafo constitue o fechamento do Capítulo I. Nele usamos todo o material do parágrafo precedente para dar uma demonstração do seguinte teorema que passamos a enunciar.

1.2.1 - Teorema I: (Hoffman, Osserman, Schoen). Seja S uma superfície completa orientada de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 . Se a imagem de S sob a aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério aberto, então S é um plano. Se a imagem de S sob a aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério fechado, então S é um plano ou um cilindro circular reto.

Prova: Seja \hat{S} o recobrimento universal de S . Por (1.1.21), existem exatamente três possibilidades.

Caso 1: \hat{S} é conformemente equivalente a esfera. Esta possibilidade é claramente impossível, uma vez que a imagem de uma esfera conforme pela aplicação de Gauss é a esfera.

Caso 2: \hat{S} é conformemente equivalente ao plano. Neste caso tomamos a aplicação v do plano na esfera unitária, satisfazendo a equação (1.1.26) que nesse caso toma a forma

$$1.2.2 - \quad \Delta v = - |dv|^2 v$$

Vamos supor que a imagem de S por v situa-se no hemisfério inferior, logo, $-1 \leq v_3 \leq 0$. De (1.2.2) temos

$$1.2.3 - \quad \Delta v_3 = - |dv|^2 v_3 .$$

Segue-se que v_3 é subharmônica. Como v_3 é limitada superiormente, pelo princípio do máximo, v_3 é constante. Portanto a imagem de S situa-se sobre um círculo na esfera. Se v_3 é uma constante não nula, concluímos de (1.2.3) que $|dv|^2 = 0$. Logo v é constante. Portanto S é um plano. Se $v_3 = 0$, então, o vetor vertical ℓ_3 pertence a $T_p(S)$, $\forall p \in S$. Isto implica que por cada ponto de S passa uma reta paralela a ℓ_3 toda contida em S . Portanto S é um cilindro sobre uma curva plana e como S tem curvatura média constante, esta curva plana é um círculo ou uma reta implicando que S é um plano ou um cilindro circular reto.

Caso 3: \hat{S} é conformemente equivalente ao disco unitário. Novamente usamos a equação (1.2.2), agora junto com (1.1.16) e temos que v_3 satisfaça a equação

$$1.2.4 - \quad \Delta v_3 - 2Kv_3 + 4H^2 v_3 = 0 .$$

Vamos supor também que a imagem de S situa-se no hemisfério inferior, logo $-1 \leq v_3 \leq 0$ e por (1.2.3) v_3 é subharmônica e pelo princípio do máximo é constante. Se $v_3 = 0$ em qualquer ponto interior, $v_3 \equiv 0$. Mas como vimos no caso 2, isto significaria que S é um plano ou um cilindro circular reto forçando \hat{S} a ser o plano e não o disco. Portanto concluímos que v_3 é estritamente negativa. Mas por (1.1.25), não existe solução negativa de (1.2.4). Isto completa a prova do teorema.

2 - SUPERFÍCIES COMPLETAS EM \mathbb{R}^4 COM VETOR

CURVATURA MÉDIA PARALELO

2.1 - Superfícies em \mathbb{R}^n

Seja $G(2, \mathbb{R}^n)$ o Grassmanniano de dois planos orientados em \mathbb{R}^n .

Aqui, um 2-plano em \mathbb{R}^n é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n de dimensão 2. Inspirado na definição clássica da Aplicação Normal de Gauss, de uma superfície em \mathbb{R}^3 , a qual, toma valores na esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, obtemos a aplicação de Gauss Generalizada de uma superfície em \mathbb{R}^n tomando valores no Grassmanniano $G(2, \mathbb{R}^n)$. Ainda nesta monografia, teremos oportunidade de definir esta aplicação. No momento, estamos interessados em dar um modelo para $G(2, \mathbb{R}^n)$. Para este modelo foi tomado a quádrica Q_{n-2} no espaço projetivo \mathbb{CP}^{n-1} . Queremos observar primeiro que o Grassmanniano, $G(2, \mathbb{R}^n)$, tem uma orientação natural induzida de uma estrutura complexa definida do seguinte modo: Dado um 2-plano $\pi \subset \mathbb{R}^n$, seja $\{A, B\}$ uma base ortonormal ordenada de π : a ordem dependendo da orientação. O vetor complexo $W = A + iB$ associa, naturalmente, um ponto de \mathbb{C}^n ao plano π . Considere outra base $\{A', B'\}$ de π . Novamente, o vetor complexo $W' = A' + iB'$ associa um ponto de \mathbb{C}^n ao plano π . Vamos definir em \mathbb{C}^n a seguinte relação de equivalência: Dois pontos de \mathbb{C}^n , $W = X + iY$ e $W' = X' + iY'$ estarão relacionados se, e somente se os conjuntos $\{X, Y\}$ e $\{X', Y'\}$ geram o mesmo plano. Em resumo:

$$W \sim W' \iff \{X, Y\} \text{ e } \{X', Y'\}$$

geram o mesmo subespaço. Definimos agora \mathbb{CP}^{n-1} como sendo o conjunto quociente

$$\mathbb{C}P^{n-1} = \frac{\mathbb{C}^n}{\sim}$$

Assim, se $\{X, Y\}$ é uma base ortonormal de um 2-plano orientado π em \mathbb{R}^n , o vetor complexo $Z = X + iY$ associa o 2-plano π a um único ponto de $\mathbb{C}P^{n-1}$. A ortogonalidade do par X, Y implica que o ponto assim obtido satisfaz a equação

$$2.1.1 - \sum_{k=1}^n z_k^2 = 0$$

que define a quádrica $Q_{n-2} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$. Agora é fácil verificar que a aplicação

$$G(2, \mathbb{R}^n) \longrightarrow Q_{n-2}$$

$$\pi \longrightarrow Z$$

é uma bijeção, consequentemente podemos identificar Q_{n-2} em $G(2, \mathbb{R}^n)$ como queríamos. Observe que dado um ponto $Z \in Q_{n-2}$ e $z_k = a_k + ib_k$, os vetores reais $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, \dots, b_n)$ satisfazem

$$2.1.2 - |A| = |B| , \quad A \cdot B = 0 ,$$

onde " \cdot " denota o produto interno canônico de \mathbb{R}^n . Além disso, vemos que (2.1.1) e (2.1.2) são equivalentes no sentido de que representem o mesmo conjunto de vetores. Por outro lado, A e B não podem ser nulos pois são coordenadas homogêneas (z_1, z_2, \dots, z_n) de um ponto em $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Seja S_o uma superfície de Riemann e $X: S_o \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$|\lambda X_p(v)| = \lambda(p) ||v||$, para todo $v \in T_p(S_o)$, $|| \quad ||$ proveniente de uma métrica em S_o compatível com a estrutura conforme de S_o e $|\lambda|$ relativa a métrica induzida de \mathbb{R}^n . Definimos uma superfície S em \mathbb{R}^n como sendo o sistema (S_o, X) . Se $z = \xi + i\eta$ é um parâmetro local sobre S_o e se (x_1, x_2, \dots, x_n) são coordenadas em \mathbb{R}^n , a superfície S é definida localmente por

$$2.1.3 - \quad \mathbf{X}(z) = (x_1(z), x_2(z), \dots, x_n(z))$$

e a conformidade da aplicação X implica que

$$2.1.4 - \quad \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \right| \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} = 0$$

Daí, o plano tangente a S gerado por $\{\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta}\}$ corresponde ao ponto

$$2.1.5 - \quad \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} + i \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \right]$$

da quádrica Q_{n-2} .

A aplicação de Gauss de S é a aplicação $G: S \rightarrow Q_{n-2}$, definida localmente por

$$2.1.6 - \quad G(p) = \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}(p) + i \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta}(p) \right] .$$

Usando as derivadas complexas

$$2.1.7 - \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} - i \frac{\partial f}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + i \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) ,$$

podemos escrever a aplicação de Gauss na forma

$$2.1.8 - \quad G(z) = 2 \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{z}} \right] .$$

Por razões históricas, trabalhamos com a conjugada complexa desta aplicação:

$$2.1.9 - \quad G(z) = 2 \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} - i \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \right] ,$$

cuja imagem também situa-se em Q_{n-2} .

Em termos dos parâmetros isotérmicos $z = \xi + i\eta$ e da imersão X decorre de (1.4) que a métrica induzida por X se escrever

$$ds^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right|^2 |dz|^2$$

Ou seja:

$$2.1.10 - \quad ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$$

com

$$\lambda^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right|^2 = 2 \left| \frac{\partial X}{\partial z} \right|^2 .$$

Se $\bar{\nabla}$ é a derivada covariante de \mathbb{R}^n e $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$, a métrica induzida, em termos dos parâmetros isotérmicos $z = \xi + i\eta$ em S_0 temos por definição, que

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nabla} & \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right) & \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} \right) \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right) & \bar{\nabla} & \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} \right) \end{pmatrix} .$$

conforme (1.1.3).

Do fato de X ser conforme, temos que

$$(i) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0$$

Derivando os dois membros de (i) em relação a ξ e dividindo ambos por 2, obtemos

$$(i.1) \quad \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) = 0 .$$

Derivando (ii) com relação a η , obtemos

$$(ii.1) \quad \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} \right) = 0 .$$

Adicionando (i.1) e (ii.1) obtemos

$$(i.2) \quad \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} \right) \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi} = 0$$

Com cálculos idênticos, chegamos a

$$(ii.2) \quad \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} \right) \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0$$

Escrevendo

$$H = \frac{1}{2\lambda^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \nabla_{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \nabla_{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} \end{pmatrix}^N$$

e usando (i.2), (ii.2) obtemos

$$H = \frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} \right)$$

Portanto,

$$2.1.11 - \quad 2H = \Delta X = \left(\frac{4}{\lambda^2} \right) X_{zz} .$$

Uma aplicação de S_o em Q_{n-2} pode ser representada localmente por ϕ ,

onde

$$\phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) : S_o \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$$

é tal que $\phi(S_o) \subset Q_{n-2}$; portanto,

$$2.1.12 - \quad \sum_{k=1}^n \varphi_k(z)^2 = 0 .$$

Logo,

$$2.1.13 - \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \psi \phi ,$$

para alguma função $\psi : S_o \rightarrow \mathbb{C}$. Como a superfície é regular, ψ nunca se anula. De (2.1.11) e (2.1.13), obtemos

$$\frac{\lambda^2}{2} H = X_{zz} = (\psi \phi)_{\bar{z}} = \psi \phi_{\bar{z}} + \psi_{\bar{z}} \phi .$$

De modo que, usando (2.1.10), chegamos a

$$2.1.14 - \quad |\phi|^2 \bar{\psi} H = \phi_{\bar{z}} + (\log \psi)_{\bar{z}} \phi , \text{ onde } \psi \neq 0 .$$

Desejamos decompor (2.1.14) em suas componentes normal e tangente a superfície. Para isso, necessitamos do

2.1.15 - Lema: Seja W um vetor em \mathbb{C}^n da forma $W = A + iB$, onde A e B satisfazem (1.2). Seja π o plano gerado por A e B . Para qualquer vetor C em \mathbb{R}^n , seja C^π a projeção de C sobre π . Para qualquer par de vetores C, D , em \mathbb{R}^n , seja $Y = C + iD$. Defina

$$Y^\pi = C^\pi + iD^\pi. \text{ Então}$$

$$Y^\pi = \frac{\langle Y, W \rangle}{|W|^2} W + \frac{\langle Y, \bar{W} \rangle}{|W|^2} \bar{W}$$

onde \langle , \rangle é o produto hermitiano.

Prova: Sabemos que se o plano π tem como base ortogonal os vetores A e B , a projeção ortogonal de um vetor U de \mathbb{R}^n sobre π , onde $\pi \subset \mathbb{R}^n$, é dada por

$$U = \frac{U \cdot A}{|A|^2} A + \frac{U \cdot B}{|B|^2} B$$

Se a partir de A e B construirmos o vetor $W = A + iB$, temos de (1.2) que

$$|W|^2 = |A|^2 + |B|^2 = 2|A|^2 = 2|B|^2.$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} Y^\pi &= \frac{\langle C + iD, A + iB \rangle}{|W|^2} (A + iB) + \frac{\langle C + iD, A - iB \rangle}{|W|^2} (A - iB) = \\ &= \frac{\langle C, A \rangle}{|A|^2} A + \frac{\langle C, B \rangle}{|B|^2} B + i \left(\frac{\langle D, A \rangle}{|A|^2} + \frac{\langle D, B \rangle}{|B|^2} \right) B = \\ &= C^\pi + iD^\pi. \end{aligned}$$

Agora, vamos aplicar o Lema 1.1 com $W = \phi$, π o plano tangente a nossa superfície e $Y = \phi_{\bar{Z}}$.

Escrevendo (2.1.12) na forma $\phi \cdot \phi = 0$, obtemos

$$0 = (\phi \cdot \phi)_{\bar{Z}} = 2 \phi \cdot \phi_{\bar{Z}} = 2 \langle \phi_{\bar{Z}}, \bar{\phi} \rangle.$$

Logo, por (2.1.15), temos que

$$(\phi_{\bar{z}})^\pi = \frac{\phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\phi}}{|\phi|^2} \phi .$$

Ou seja

$$2.1.16 - (\phi_{\bar{z}})^\pi = \eta \phi , \quad \text{com}$$

$$2.1.17 - \eta = \frac{\phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\phi}}{|\phi|^2} .$$

Se denotarmos por V , a componente ortogonal a π , temos

$$V = \phi_{\bar{z}} - (\phi_{\bar{z}})^\pi = \phi_{\bar{z}} - \eta \phi .$$

Uma vez que H é ortogonal ao plano tangente π , obtemos duas equações em função das componentes tangente e normal, de (2.1.14), que serão usadas no parágrafo 2.

$$2.1.18 - |\phi|^2 \bar{\psi} H = V$$

$$2.1.19 - (\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta$$

Estabeleceremos em seguida uma fórmula para a curvatura Gaussiana K de S que também usaremos mais adiante. Tomemos um referencial local $\{\ell_1, \ell_2\}$ com 1-formas duais θ_1, θ_2 respectivamente e 1-forma de conexão w_{12} . Em termos dos parâmetros isotérmicos $z = \xi + i\eta$ e da métrica $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$, temos

$$\theta_1 = \lambda d\xi \quad \text{e} \quad \theta_2 = \lambda d\eta$$

$$\text{tome } \theta = \theta_1 + i\theta_2 = \lambda dz .$$

Assim,

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\theta = d\lambda \wedge dz = -\lambda_{\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \\ \text{e} \\ d\bar{\theta} = \bar{d}\lambda \wedge d\bar{z} = \lambda_z dz \wedge d\bar{z} \end{array} \right.$$

Por outro lado, usando as equações estruturais de S, temos

$$\begin{aligned} d\theta &= d\theta_1 + id\theta_2 = w_{12} \wedge \theta_2 + i(w_{21} \wedge \theta_1) = w_{12} \wedge \theta_2 - iw_{12} \wedge \theta_1 \\ &= w_{12} \wedge (\theta_2 - i\theta_1) = iw_{12} \wedge (\theta_1 + i\theta_2) = \\ &= i\lambda w_{12} \wedge dz . \end{aligned}$$

Com cálculos análogos, mostramos que

$$d\bar{\theta} = -i\lambda w_{12} \wedge d\bar{z}$$

Por outro lado, podemos escrever

$$w_{12} = A dz + B d\bar{z} .$$

Assim,

$$(ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\theta = i\lambda (Adz + Bd\bar{z}) \wedge dz = -i\lambda B \wedge d\bar{z} \\ d\bar{\theta} = -i\lambda (Adz + Bd\bar{z}) \wedge d\bar{z} = -i\lambda A \wedge dz \end{array} \right.$$

Comparando (i) e (ii), obtemos

$$B = \frac{\lambda\bar{z}}{i\lambda} \quad \text{e} \quad A = \frac{-\lambda z}{i\lambda}$$

Concluímos que

$$\begin{aligned} w_{12} &= \frac{-\lambda z}{i\lambda} dz + \frac{\lambda\bar{z}}{i\lambda} d\bar{z} = \\ &= \frac{-1}{i\lambda} (\lambda_z dz - \lambda_{\bar{z}} d_{\bar{z}}) . \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$w_{12} = \frac{-1}{i} [(\log \lambda)_z dz - (\log \lambda)_{\bar{z}} d_{\bar{z}}] .$$

Tomando a derivada exterior, obtemos

$$\begin{aligned} d(w_{12}) &= \frac{-1}{i} [(\log \lambda)_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} + (\log \lambda)_{\bar{z}z} dz \wedge d\bar{z}] = \\ &= \frac{-2}{i} (\log \lambda)_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \frac{-2}{i} (\log \lambda)_{z\bar{z}} \frac{1}{\lambda} \theta_1 + i\theta_2 \wedge \frac{1}{\lambda} (\theta_1 - i\theta_2) = \\ &= \frac{-2}{i\lambda} (\log \lambda)_{z\bar{z}} [-2i(\theta_1 \wedge \theta_2)] = \\ &= \frac{2}{\lambda^2} (\log \lambda^2)_{z\bar{z}} \theta_1 \wedge \theta_2 \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo K definido por

$$dw_{12} = -K \theta_1 \wedge \theta_2$$

obtemos

$$2.1.20 - \quad K = \frac{-2}{\lambda^2} (\log \lambda^2)_{z\bar{z}}$$

No próximo parágrafo nos limitaremos a superfícies em \mathbb{R}^4 e utilizaremos a curvatura normal K_N que passamos a definir.

Seja S uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 e ℓ_1, ℓ_2 um referencial orientado local em S com 1-formas duais w_1, w_2 . Dado um referencial ℓ_3, ℓ_4 orientado normal a S sejam w_3, w_4 as 1-formas duais com 1-forma de conexão $w_{34} = (\bar{\nabla}_r \ell_3) \cdot \ell_4$. Definimos a curvatura normal K_N de S por:

$$2.1.21 - \quad K_N = -dw_{34}(\ell_1, \ell_2).$$

Seja $f: (M, ds^2) \rightarrow (N, d\sigma^2)$ uma aplicação diferenciável entre as superfícies M e N, onde

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2 \quad \text{e} \quad d\sigma^2 = \mu^2 |dz|^2.$$

A densidade de energia de f, $\ell(f)$ e seu campo de tensão, são dados conforme (1.1.22) por

$$2.1.22 - \quad \ell(f) = \frac{1}{2} |df|^2$$

$$\text{e} \quad \tau(f) = \frac{4}{\lambda^2} (w_{z\bar{z}} + 2(\log \mu)_w w_z w_{\bar{z}}).$$

Observe que em coordenadas locais $z = \xi + i\eta$ de M e $w = u + iv$ de N, com $f(z) = w(z)$, df é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

e as métricas ds^2 e $d\sigma^2$ por λ e μ . Assim,

$$|df|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2} (|u_\xi|^2 + |u_\eta|^2 + |v_\xi|^2 + |v_\eta|^2).$$

Por outro lado,

$$w_2 = u_\xi - i u_\eta \quad \text{e} \quad \overline{w_z} = v + i v_\eta.$$

Logo,

$$|df|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2} (|w_z|^2 + |\overline{w_z}|^2)$$

Ou seja, podemos decompor $\ell(f)$ do seguinte modo:

$$\ell(f) = \ell'(f) + \ell''(f)$$

onde $\ell'(f) = \frac{\mu^2}{\lambda^2} |w_z|^2$ e $\ell''(f) = \frac{\mu^2}{\lambda^2} |\overline{w_z}|^2$

Em particular, dado um domínio plano $D \subset M$, façamos $N = S^2(r)$. Assim,

$$\lambda = 1 \quad \text{e} \quad \mu = \frac{2}{r} \cdot \frac{1}{1+|w|^2} \quad \text{e obtemos}$$

$$\ell'(f) = \frac{4}{r^2} \cdot \frac{|f_z|^2}{(1+|f|^2)^2} = \frac{4}{r^2} \cdot \frac{f_z}{(1+|f|^2)} \cdot \frac{\overline{f}_z}{(1+|f|^2)}.$$

Se definirmos a função \hat{F} por $\hat{F} = \frac{f_z}{1+|f|^2}$, teremos $\ell'(f) = \frac{4}{r^2} |\hat{F}|^2$.

De modo análogo, $\ell''(f) = \frac{4}{r^2} \cdot \frac{|\overline{f}_z|}{(1+|f|^2)^2}$ e agora definimos a função F ,

colocando

$$F = \frac{\overline{f}_z}{1+|f|^2} \quad \text{e obtemos} \quad \ell''(f) = \frac{4}{r^2} |F|^2.$$

Definimos assim, as funções

2.1.23 - $F = \frac{\overline{f}_z}{1+|f|^2}$ e $\hat{F} = \frac{f_z}{1+|f|^2}$

Substituindo os valores $\lambda = 1$ e $\mu = \frac{2}{r} \cdot \frac{1}{1+|f|^2}$ em (2.1.22) o campo

de tensão $\tau(f)$ de f neste caso se escreve

$$\begin{aligned}\tau(\bar{z}) &= 4 \left[w_{z\bar{z}} + \frac{2}{\mu} \mu_w w_z w_{\bar{z}} \right] = \\ &= 4 \left[w_{z\bar{z}} + 2 \frac{\frac{r(1+|f|^2)^2}{2}}{r(1+|f|^2)^2} w_z w_{\bar{z}} \right] = \\ &= 4 \left[w_{z\bar{z}} - 2 \frac{\overline{f} w_z w_{\bar{z}}}{1+|f|^2} \right].\end{aligned}$$

Como $f(z) = w(z)$, tem-se equivalentemente

$$\tau(f) = 4(f_{z\bar{z}} - 2 \frac{\overline{f} f_z f_{\bar{z}}}{1+|f|^2})$$

No próximo parágrafo vamos utilizar as funções L, S, T que passamos a definir como segue:

$$2.1.24 - L = L(f) = f_{z\bar{z}} - 2 \frac{\overline{f} f_z f_{\bar{z}}}{1+|f|^2}$$

Onde $f_{\bar{z}} \neq 0$, introduzimos as funções

$$2.1.25 - S = S(f) = \frac{L(f)}{f_{\bar{z}}} \quad \text{e}$$

$$2.1.26 - T = T(f) = \frac{\partial S}{\partial \bar{z}}$$

Observe que quando $\mu = \frac{2}{r(1+|f|^2)}$ temos

$$\begin{aligned}\ell(f) &= \frac{1}{2} |df|^2 = \frac{2}{r} \frac{1}{1+|f|^2} - \frac{1}{\lambda^2} (|f_z|^2 + |f_{\bar{z}}|^2) \\ &= \frac{2}{r\lambda^2} (|F|^2 + |\hat{F}|^2).\end{aligned}$$

Em particular, se $r = 1$ e $f = f_k$, temos

$$2.1.27 \quad \lambda^2 \ell(f_k) = 2(|F_k|^2 + |\hat{F}_k|^2) :$$

Mostraremos em seguida que $|F|$ e $|\hat{F}|$ são invariantes por rotação da esfera.

2.1.28 - Lema: Seja $W = R|w|$ transformação linear fracionária correspondendo a uma rotação da esfera de Riemann

$$W = \frac{aw + b}{\bar{a} - \bar{b}w}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Então as quantidades $|F|$ e $|\hat{F}|$ permanecem invariantes quando trocamos a função $w = f(z)$ pela função $W = R|f(z)|$.

Prova: Derivando W relativamente a \bar{z} , obtemos

2.1.29 -

$$\frac{W_{\bar{z}}}{z} = \frac{\frac{w_{\bar{z}}}{z}}{(\bar{a} - \bar{b}w)^2}$$

Por outro lado, com cálculos imediatos vemos que

$$\frac{W_{\bar{z}}}{z} = \frac{\frac{w_{\bar{z}}}{z}}{1 + |w|^2} = \frac{|\bar{a} - \bar{b}w|^2}{(\bar{a} - \bar{b})^2}.$$

Como

$$\left| \frac{|\bar{a} - \bar{b}w|}{(\bar{a} - \bar{b}w)^2} \right| = 1, \quad \text{concluímos que}$$

$$F(R|f(z)|) = |F(f)|$$

Isto demonstra o lema.

Corolário: Seja S uma superfície de Riemann e seja $g: S \rightarrow S^2(s)$ uma aplicação diferenciável de S na esfera. Represente g , localmente, em termos dos parâmetros isotérmicos $z = \xi + i\eta$ por $w = f(z)$, onde f toma valores no plano extendido. Então as funções associadas, $|F|$ e $|\hat{F}|$, definidas em (2.1.23), são diferenciáveis, inclusive nos pontos onde $f = \infty$.

Prova: Claramente, $|F|$ e $|\hat{F}|$ são diferenciáveis nos pontos $f \neq \infty$. Na vizinhança do ponto onde $f = \infty$, faça uma rotação do ponto onde $f = \infty$, faça uma rotação da esfera $R|f|$ preliminarmente, colocando ∞ num ponto finito e use a invariância assegurada pelo Lema.

2.2 - Superfícies em \mathbb{R}^4

No nosso estudo das superfícies em \mathbb{R}^4 vamos identificar o Grassmanniano de 2-planos em \mathbb{R}^4 , $G(2, \mathbb{R}^4)$, com a quádrica $Q_2 \subset \mathbb{C}P^3$, onde Q_2 é definida, como anteriormente, pela equação

$$(i) \quad \sum_{k=1}^4 z_k^2 = 0 .$$

Dado $P = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ em Q_2 , $z_k = a_k + ib_k$, $k = 1, \dots, 4$, do § - 1, obtemos $A = (a_1, \dots, a_4)$; $B = (b_1, \dots, b_4)$ em \mathbb{R}^4 tais que

$$(ii) \quad |A| = |B| \neq 0 \quad \text{e} \quad A \cdot B = 0$$

Já vimos em (§-1) que (i) e (ii) são equivalentes no sentido de que representam o mesmo conjunto, isto é, vetores $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $B = (b_1, b_2, \dots, b_4)$ satisfazendo (ii) podem ser associados ao ponto $P = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ em Q_2 , $z_k = a_k + ib_k$ e claramente, $\sum_{k=1}^4 z_k^2 = 0$.

Novamente vamos usar a notação $P = [Z]$, para denotar o ponto em $\mathbb{C}P^3$ correspondente ao ponto $Z = (z_1, \dots, z_4)$ em $\mathbb{C}^4 - \{0\}$.

Outro fato básico concernente a $Q_2 \subset \mathbb{C}P^3$ é o seguinte. A aplicação ψ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dada por

$$2.2.1 - \quad \psi(w_1, w_2) = (1+w_1w_2, i(1-w_1w_2, w_1-w_2, -i(w_1+w_2))) ,$$

a qual é holomorfa e injetiva, tem a propriedade de que $\sum_{k=1}^4 \psi_k^2 = 0$. Logo,

ψ toma valores na quádrica Q_2 . Sobre $\psi(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$, ψ^{-1} é dada por

$$2.2.2.2 \quad (z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow (w_1, w_2) = \left(\frac{z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2}, \frac{-z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2} \right).$$

A aplicação ψ se estende holomorficamente de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ sobre Q_2 . Considere \mathbb{CP}^3 com a métrica de Fubini-Study, de curvatura holomorfa constante igual a 2:

$$ds^2 = 2 \frac{\sum_{j < k} |z_j dz_k - z_k dz_j|^2}{\left[\sum_{j=1}^4 |z_j|^2 \right]^2}$$

De $\psi : (w_1, w_2) \rightarrow (1+w_1 w_2, i(1-w_1 w_2), w_1 - w_2, -i(w_1 + w_2))$ podemos escrever ds^2 em termos de w_1 e w_2 .

Temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 |z_j|^2 &= (1+w_1 w_2)(1-\bar{w}_1 \bar{w}_2) + (i-iw_1 w_2)(-i+i\bar{w}_1 \bar{w}_2) + \\ &\quad + (w_1 - w_2)(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + (-iw_1 - iw_2)(i\bar{w}_2 + i\bar{w}_1) = \\ &= 2 + 2|w_1||w_2| + 2|w_1|^2 + 2|w_2|^2 = \\ &= 2(1+|w_1|^2) + (1+|w_2|^2). \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \sum_{j < k} |z_j dz_k - z_k dz_j|^2 &= |z_1 dz_2 - z_2 dz_1|^2 + |z_2 dz_3 - z_3 dz_2|^2 + \\ &\quad + |z_3 dz_4 - z_4 dz_3|^2 = \\ &= 4 \left[1+|w_2|^2 \right]^2 |dw_1|^2 + (1+|w_2|^2)^2 |dw_2|^2 \end{aligned}$$

Assim, a métrica restrita a $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ se escreve

$$ds^2 = \frac{2|dw_1|^2}{(1+|w_1|^2)^2} + \frac{2|dw_2|^2}{(1+|w_2|^2)^2},$$

onde w_1, w_2 são vistos como coordenadas homogêneas em $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Concluímos que sob o ponto de vista métrico, Q_2 pode ser visto como o produto de duas esferas de curvatura constante igual a 2, $S^2(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Seja S uma superfície orientada, imersa em \mathbb{R}^4 , cuja aplicação de Gauss é dada

$$G:S \longrightarrow Q_2$$

Escrevemos Q_2 como produto de esferas

$$Q_2 = S_1 \times S_2 ,$$

onde cada S_k é uma esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Denote por π_k a projeção de Q_2 sobre S_k , $k=1,2$. Usamos w_k para parametrizar S_k , onde w_k é dada por (2.2.2). Então, \bar{G} pode ser descrita, em termos do parâmetro conforme local z sobre S , por um par de funções $w_1 = f_1(z)$, $w_2 = f_2(z)$. Podemos então escrever

$$2.2.3 - \quad \bar{G}(z) = [\Phi(z)]$$

onde, por (2.2.1),

$$2.2.4 - \quad \Phi(z) = \begin{vmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{vmatrix} .$$

Introduzimos novamente as funções

$$2.2.5 - \quad F_i = \frac{(f_i)_z}{1+|f_i|^2} \quad \text{e} \quad \hat{F}_i = \frac{(f_i)_z}{1+|f_i|^2} .$$

Onde $(f_i)_z \neq 0$, definimos, como antes,

$$2.2.6 - \quad T_i = [(f_i)_{z\bar{z}} / (f_i)_z - 2\bar{f}_i \hat{F}_i]_{\bar{z}} , \quad i = 1,2 .$$

2.2.7 - Lema: Seja S uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 dada localmente pela imersão conforme $X: D \rightarrow \mathbb{R}^4$. Seja Φ a aplicação de Gauss de S dada no sentido de (2.1.8) e (2.1.13). Considere as funções η e V dadas por (2.1.17) a partir de Φ . Então, para todo $z \in D$, $V(z) = \ell^{i\alpha(z)} R(z)$, onde $R(z)$ é um vetor real.

Prova: Seja $\rho = |\psi|$. Escreva $\psi = \rho \ell^{-i\alpha}$, onde α é unicamente definida módulo 2π e $\rho \neq 0$. De (2.1.18), temos

$$V = |\phi|^2 \bar{\psi}_H = |\phi|^2 \rho \ell^{i\alpha_H}$$

ou seja,

$$V = \ell^{i\alpha} |\phi|^2 |\psi|_H .$$

Sendo $|\phi|^2 |\psi|_H$ um vetor real, o lema está demonstrado.

2.2.8 - Lema: Seja S uma superfície orientada imersa em \mathbb{R}^4 cuja aplicação de Gauss é dada localmente por (2.2.4) via um par de funções $f_1(z)$, $f_2(z)$, onde z é um parâmetro conforme local sobre S . Então

$$|F_1| \equiv |F_2| .$$

Prova: Vamos aplicar o lema 2.2.8 acima. Primeiro vamos expressar a função

$$2.2.9 - \quad \eta = \frac{\phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\phi}}{|\phi|^2} \quad \text{e} \quad V = \phi_{\bar{z}} - \eta \phi$$

em termos das funções f_1 e f_2 . De (2.2.4) temos

$$2.2.10 - \quad \phi_{\bar{z}} = (f_1)_{\bar{z}}(f_2, if_2, 1, -i) + (f_2)_{\bar{z}}(f_1, -if_1, -1, -i).$$

Por outro lado,

$$2.2.11 - \quad |\phi|^2 = 2(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2) .$$

Temos também que

$$\frac{\phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\phi}}{|\phi|^2} = 2\{(f_1)_{\bar{z}} \bar{f}_1 |1+f_2|^2 + (f_2)_{\bar{z}} |1+f_1|^2\}$$

Usando (2.2.11), obtemos

$$\frac{\phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\phi}}{|\phi|^2} = \frac{(f_1)_{\bar{z}} \bar{f}_1}{1+|f_2|^2} + \frac{(f_2)_{\bar{z}} \bar{f}_2}{1+|f_1|^2}, \text{ ou seja,}$$

$$2.2.12 - \quad \eta = \bar{f}_1 F_1 + \bar{f}_2 F_2.$$

Defina agora, a função $A(z)$ por

$$2.2.13 - \quad A = (f_2 - \bar{f}_1, -i(f_2 + f_1), 1 + f_1 \bar{f}_2, -i(1 - \bar{f}_1 f_2)).$$

Substituindo (2.2.4), (2.2.10) e (2.2.12) em (2.2.9) obtemos

$$2.2.14 - \quad V = F_1 A - F_2 \bar{A}.$$

De (2.2.13), é imediato que $|A|^2 \equiv 0$. Além disso temos

$$2.2.15 - \quad |A|^2 = 2(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2) = |\phi|^2.$$

Logo, A nunca se anula. Coloquemos $V = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ e $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$.

Observe que

$$\begin{aligned} V_j \bar{V}_k &= (F_1 A_j - F_2 \bar{A}_j)(\bar{F}_1 \bar{A}_k - \bar{F}_2 A_k) = \\ &= F_1^2 A_j \bar{A}_k + F_2^2 \bar{A}_j A_k - 2 \operatorname{Re}(F_1 \bar{F}_2 A_j A_k) = \\ &= \frac{|F_1|^2 A_j \bar{A}_k}{2} + \frac{|F_1|^2 \bar{A}_j A_k}{2} + \frac{|F_1|^2 A_j \bar{A}_k}{2} - \frac{|F_1|^2 \bar{A}_j A_k}{2} + \frac{|F_2|^2 A_j \bar{A}_k}{2} \\ &\quad - \frac{|F_2|^2 A_j \bar{A}_k}{2} + \frac{|F_2|^2 \bar{A}_j A_k}{2} + \frac{|F_2|^2 A_j \bar{A}_k}{2} - 2 \operatorname{Re}(F_1 \bar{F}_2 A_j A_k). \end{aligned}$$

Portanto,

$$2.2.16 - V_j \bar{V}_k = (|F_1|^2 + |F_2|^2) \operatorname{Re}(A_j \bar{A}_k) - 2 \operatorname{Re}(F_1 \bar{F}_2 A_j A_k) + i(|F_1|^2 - |F_2|^2) \operatorname{Im}(A_j \bar{A}_k)$$

Segue-se de (2.2.15), (2.2.16) e do fato de que $A^2 = \sum_{j=1}^4 A_j^2 = 0$, que

$$2.2.17 - |V| = 2(|F_1|^2 + |F_2|^2)(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2).$$

De (2.2.17) concluímos que $V(z) = 0$ se, e somente se $F_1(z) = D_2(z) = 0$, ou, equivalentemente, $f_1(z) = f_2(z) = 0$. Em particular, sempre que $V(z) = 0$, (2.2.8) é satisfeita. A condição (2.2.7), especificando que V é igual a uma função a valores reais multiplicada por uma função complexa não nula sempre que $V(z) \neq 0$, é equivalente a exigir que a matriz hermitiana 4×4

$$V^t \bar{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \bar{V}_2 & \cdots & V_1 \bar{V}_n \\ V_2 \bar{V}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n \bar{V}_1 & \cdots & V_n \bar{V}_n \end{bmatrix}$$

seja uma matriz real. As componentes $V_j \bar{V}_k$, são dadas em (2.2.16) e segue-se de (2.2.16) que $V^t \bar{V}$ é uma matriz real se, e somente se

$$2.2.18 - (|F_1|^2 - |F_2|^2) \operatorname{Im}(A_j \bar{A}_k) = 0, \quad j, k = 1, \dots, 4.$$

Claramente, (2.2.8) implica (2.2.18). Mostremos agora que (2.2.18) implica (2.2.8).

Suponha que (2.2.8) falha em z_o , onde $V(z_o) \neq 0$. Logo, em z_o , (2.2.18) é válida. Assim, devemos ter

$$2.2.19 - \operatorname{Im}(A_j(z_o) \cdot \bar{A}_k(z_o)) = 0 \quad 1 \leq j < k \leq 4,$$

pois $V^T V$ é simétrica. Vamos usar (2.2.16) para mostrar que (2.2.19) não é possível. De (2.2.13) temos que

$$2.2.20 - \quad \operatorname{Im}(A_1 \bar{A}_2) = |f_2|^2 - |f_1|^2$$

e

$$\operatorname{Im}(A_3 \bar{A}_n) = 1 - |f_1|^2 |f_2|^2 .$$

Portanto, (2.2.19) implica que

$$2.2.21 - \quad |f_1(z_o)| = |f_2(z_o)| = 1 .$$

De fato, de (2.2.19) temos

$$\begin{cases} |f_2|^2 - |f_1|^2 = 0 \\ 1 - |f_1|^2 |f_2|^2 = 0 , \end{cases}$$

do que concluímos que $|f_1| = |f_2| = 1$.

Por outro lado, usando (2.2.21) junto com (2.2.13) podemos escrever as outras 4 equações de (2.2.19) na forma

$$2.2.22 - \quad \begin{cases} \operatorname{Im}(A_1 \bar{A}_3) = 2 \operatorname{Im}(f_1 + f_2) = 0 \\ \operatorname{Im}(A_1 \bar{A}_n) = 2 \operatorname{Re}(f_2 - f_1) = 0 \\ \operatorname{Im}(A_2 \bar{A}_3) = -2 \operatorname{Re}(f_1 + f_2) = 0 \\ \operatorname{Im}(A_2 \bar{A}_n) = 2 \operatorname{Im}(f_2 - f_1) = 0 \end{cases}$$

em z_o . Mas (2.2.22) implica $f_1 + f_2 = f_2 - f_1 = 0$. Isto contradiz (2.2.21).

Donde concluímos que (2.2.18) implica (2.2.8). Portanto, (2.2.9) e (2.2.18) são equivalentes sempre que $V(z) \neq 0$. Isto conclui a prova do Lema.

Observe que se compararmos (2.1.18) e (2.2.17), concluímos que

$$2.2.23 - \quad H = 0 \iff V = 0 \iff F_1 = F_2 = 0 .$$

Já vimos que se S é dada localmente por $X(z)$, com z um parâmetro conforme local, a métrica sobre S é da forma

$$2.2.24 - \quad ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$$

com

$$2.2.25 - \quad \lambda^2 = 2 \left| \frac{\partial X}{\partial z} \right|^2$$

e também

$$2.2.26 - \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \psi \phi ,$$

para alguma função complexa ψ . De (2.2.12) e (2.2.25) temos que

$$\lambda^2 = 2 |\psi \phi| = 2 |\psi|^2 |\phi|^2$$

Ou seja,

$$2.2.27 - \quad \lambda^2 = 4 |\psi|^2 (1 + |f_1|^2) (1 + |f_2|^2) .$$

Seja J_k o jacobiano da aplicação de (S, ds^2) em S_k , na notação do §-1, $k = 1, 2$. Então na notação (2.2.5) temos

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{2}{\lambda^2} \left[\left| (f_k)_z \right|^2 + \left| (f_k)_{\bar{z}} \right|^2 \right] = \\ &= \frac{2}{\lambda^2 (1 + |f_k|^2)^2} (|\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2) (1 + |f_k|^2) . \end{aligned}$$

Portanto,

$$2.2.28 - \quad J_k = \frac{2}{\lambda^2} (|\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2) .$$

2.2.29 - Teorema: Seja S uma superfície em \mathbb{R}^4 . A curvatura Gaussiana K e a curvatura normal K_n de S , são dadas pelas fórmulas

$$(a) \quad K = J_1 + J_2$$

$$(b) \quad K_n = J_1 - J_2$$

Prova: Provaremos primeiro (2.2.29-a). Vamos usar a expressão de K dada em (2.1.20), em termos dos parâmetros isotérmicos.

Comparando (2.1.20), vemos que (2.2.29-a) é equivalente a

$$2.2.30 - \quad (\log \lambda^2)_{z\bar{z}} = \sum_{k=1}^2 (|\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2)$$

Para provar (2.2.30), primeiro notamos que usando a definição de \hat{F} , com cálculos diretos obtemos

$$[\log(1+|f|^2)]_{\bar{z}} = \bar{f} f + f \bar{F}$$

Portanto,

$$2.2.31 - \quad [\log(1+|f|^2)]_{z\bar{z}} = (\bar{f} F)_z + (f \bar{F})_z.$$

Por outro lado, por (2.1.19),

$$-\eta = (\log \psi)_{\bar{z}}$$

Temos também que

$$(\bar{f} \hat{F})_{\bar{z}} - (\bar{f} F)_z = |\hat{F}|^2 - |F|^2$$

Dai

$$2.2.32 - \quad (\bar{f} \hat{F})_{\bar{z}} - (\bar{f} F)_z + |\hat{F}|^2 - |F|^2.$$

Tomando o conjugado de (2.2.32) e substituindo em (2.2.31), obtemos

$$2.2.33 - \quad [\log(1+|f|^2)]_{z\bar{z}} = 2 \operatorname{Re}\{(\bar{f} F)_z\} + |\hat{F}|^2 - |F|^2.$$

Por (2.1.19) e (2.2.12) temos

$$2.2.34 - \quad (\log |\psi|)_{z\bar{z}} = -2 \operatorname{Re}[(\bar{f}_1 F_1)_z + (\bar{f}_2 F_2)_z].$$

Agora escreveremos (2.2.33) com $f = f_1$ e $f = f_2$, adicionamos estas duas expressões e então adicionamos (2.2.34) para obter

$$[\log(1+f_1^2)(1+|f_2|^2)|\psi|^2]_{z\bar{z}} = \sum_k (|\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2).$$

Portanto, $[\log \lambda^2]_{z\bar{z}} = \sum_k (|\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2)$, provando (2.2.30).

Utilizaremos a definição de K_n , dada em (2.1.21), para provar (2.2.29-b).

Seja $\{\ell_1, \ell_2\}$ um referencial dado por (2.2.24), podemos escrever w_{12} em termos dos parâmetros isotérmicos ξ, η sobre S como

$$w_{12} = ad\xi + bd\eta.$$

Seguindo os passos (1.1.10), (1.1.11) e (1.1.12), obtemos $K = -dw_{12}(\ell_1, \ell_2)$.

Em termos da aplicação ϕ dada em (2.2.4), se colocarmos

$$2.2.35 - \quad \tilde{\ell}_1 = \frac{\operatorname{Re} \phi}{|\phi|}, \quad \tilde{\ell}_2 = \frac{\operatorname{Im} \phi}{|\phi|},$$

com relação aos parâmetros isotérmicos $w = u + iv$, sobre S temos que $\tilde{w}_1 = \phi du$ e $\tilde{w}_2 = |\phi| dv$. Tomemos $\theta = \tilde{w}_1 + i\tilde{w}_2 = |\phi| dw$. Assim, $\bar{\theta} = |\phi| d\bar{w}$.

Temos então

$$\textcircled{I} \quad \begin{cases} d\theta = d|\phi| \wedge dw = -|\phi| \frac{1}{w} dw \wedge d\bar{w} \\ d\bar{\theta} = d|\phi| \wedge d\bar{w} = |\phi|_{\bar{w}} dw \wedge d\bar{w} \end{cases}$$

Por outro lado, usando as equações estruturais de S, obtemos

$$d\theta = d\tilde{w}_1 + id\tilde{w}_2 = \tilde{w}_{12} \wedge \tilde{w}_2 + i(\tilde{w}_{21} \wedge \tilde{w}_1) =$$

$$= -i \tilde{w}_{22} \wedge (\tilde{w}_1 + i \tilde{w}_2)$$

$$\text{Ou seja } \theta = -i|\phi| \tilde{w}_{12} \wedge dw.$$

$$\text{Com cálculos análogos, encontramos } d\bar{\theta} = i|\phi| \tilde{w}_{12} \wedge d\bar{w}.$$

Ainda podemos escrever $\tilde{w}_{12} = Adw + Bd\bar{w}$,

logo,

$$\textcircled{II} \quad \begin{cases} d\theta = -i|\phi|(Adw + Bd\bar{w}) \wedge dw = i|\phi|Bdw \wedge d\bar{w} \\ e \\ d\bar{\theta} = i|\phi|(Adw + Bd\bar{w}) \wedge d\bar{w} = i|\phi|Adw \wedge d\bar{w} \end{cases}$$

Comparando \textcircled{I} e \textcircled{II}, obtemos

$$A = \frac{|\phi|w}{i|\phi|} \quad \text{e} \quad B = \frac{-|\phi|\bar{w}}{i|\phi|}$$

Donde concluimos que

$$\tilde{w}_{12} = \frac{|\phi|w}{i|\phi|} dw - \frac{|\phi|\bar{w}}{i|\phi|} d\bar{w}$$

Ou ainda

$$2.2.36 - \quad \tilde{w}_{12} = \frac{1}{i} \left[(\log |\phi|)_w dw - (\log |\phi|)_{\bar{w}} d\bar{w} \right].$$

Tomando a derivada exterior, obtemos

$$d\hat{w}_{12} = \frac{2}{|\phi|^2} (\log |\phi|^2)_{ww} \tilde{w}_1 \wedge w_2.$$

Portanto,

$$2.2.37 - \quad K = \frac{-2}{|\phi|^2} (\log |\phi|^2)_{ww}.$$

Agora, se tomarmos ϕ^{\perp} definida como ϕ em (2.2.4), mas com f_2 trocado por $\frac{-1}{\bar{f}_2}$, então os vetores

$$2.2.38 - \quad \ell_3 = \frac{\operatorname{Re} \phi^{\perp}}{|\phi^{\perp}|} \quad \text{e} \quad \ell_4 = \frac{\operatorname{Im} \phi^{\perp}}{|\phi^{\perp}|}$$

constituem um referencial orientado normal a S, com 1-formas duais dadas por

$$2.2.39 - \quad w_3 = |\phi^{\perp}| du \quad \text{e} \quad w_4 = |\phi^{\perp}| dv,$$

Novamente, definiremos

$$\theta = w_3 + iw_4, \text{ logo } \bar{\theta} = w_3 - iw_4$$

Assim,

$$\theta = |\phi|^{\perp} (du + idv) = |\phi|^{\perp} dw$$

e

$$\bar{\theta} = |\phi|^{\perp} (du - idv) = |\phi|^{\perp} d\bar{w}.$$

Calculando $d\theta$ e $d\bar{\theta}$, obtemos

$$2.2.40 - \quad d\theta = d|\phi|^{\perp} \wedge dw = - |\phi|^{\perp} \frac{1}{w} dw \wedge d\bar{w}$$

e

$$d\bar{\theta} = d|\phi|^{\perp} \wedge d\bar{w} = |\phi|^{\perp} \frac{1}{w} dw \wedge d\bar{w}.$$

Por outro lado, usando as equações estruturais de S, obtemos

$$2.2.41 - \quad d\theta = -i|\phi|^{\perp} w_{34} \wedge dw$$

e

$$d\bar{\theta} = i|\phi|^{\perp} w_{34} \wedge d\bar{w}.$$

Escrevendo

$$2.2.42 - \quad w_{34} = Adw + Bd\bar{w}$$

e substituindo este valor em (2.2.41), obtemos

$$2.2.43 - \quad d\theta = i|\phi|^{\perp} Bd\bar{w} \wedge dw$$

e

$$d\bar{\theta} = i|\phi|^{\perp} Adw \wedge d\bar{w}.$$

Comparando (2.2.40) e (2.2.43) segue-se que

$$B = \frac{-|\phi|^{\perp} \frac{1}{w}}{i|\phi|^{\perp}} \quad \text{e} \quad A = \frac{|\phi|^{\perp} \frac{1}{w}}{i|\phi|^{\perp}}$$

Colocando estes valores em (2.2.42) obtemos

$$w_{34} = \frac{1}{i} \left[(\log |\phi^\perp|)_w dw - (\log |\phi^\perp|)_{\bar{w}} d\bar{w} \right]$$

Tomando a derivada exterior, obtemos

$$dw_{34} = \frac{2}{|\phi^\perp|^2} (\log |\phi^\perp|^2)_{w\bar{w}} w_3 \wedge w_4$$

e de (2.1.21), segue-se que

$$K_N = \frac{-2}{|\phi^\perp|^2} (\log |\phi^\perp|^2)_{w\bar{w}} .$$

Vimos assim que K_N é obtido exatamente do mesmo modo de K . Apenas com o vetor ϕ^\perp no lugar de ϕ . Como a aplicação $f_2 \rightarrow \frac{-1}{\bar{f}_2}$ é uma isometria

que inverte a orientação na esfera S_2 , com jacobiano -1 em toda parte, segue-se da fórmula (2.2.29-a) que $K_N = J_1 - J_2$.

2.2.44 - Lema: Para uma superfície qualquer em \mathbb{R}^4 , as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $K_N = 0$

b) $J_1 = J_2$

c) $K = 2J_1$

d) $|\hat{F}_1| = |\hat{F}_2|$

Prova: As equivalências entre (a), (b) e (c), seguem-se de (2.2.29-a) e 2.2.29-b). A equivalência entre (b) e (d) resulta combinando (2.2.28) com a condição (2.2.8) que $|F_1| \equiv |F_2|$ sobre qualquer superfície. Especificamente, temos

$$K_N = J_1 - J_2 = \frac{2}{\lambda^2} \left[|\hat{F}_1|^2 - |F_1|^2 - |\hat{F}_2|^2 + |F_2|^2 \right] .$$

Portanto,

$$2.2.45 - K_N = \frac{2}{\lambda^2} (|\hat{F}_1|^2 - |\hat{F}_2|^2) .$$

2.2.46 - Lema: Seja $f(z)$ uma função complexa \mathbb{C}^3 . Então, onde $f_{\bar{z}} \neq 0$,

$$(\log |F|)_{z\bar{z}} = \operatorname{Re} |T| + |\hat{F}|^2 - |F|^2 .$$

Prova: Podemos reescrever a definição (2.2.6) como

$$2.2.47 - T = (\log f_{\bar{z}})_{z\bar{z}} - 2(\bar{f} \hat{F})_{\bar{z}} .$$

Então, usando sucessivamente (2.2.33) e (2.2.34) e a definição (2.2.5) de F , obtemos

$$\operatorname{Re} T = (\log F)_{z\bar{z}} - |\hat{F}|^2 + |F|^2$$

provando o Lema.

2.2.48 - Lema: Seja S uma superfície em \mathbb{R}^4 e sejam f_1, f_2 a representação local da aplicação de Gauss de S . Defina T_1 e T_2 por (2.6), onde $(f_i)_{\bar{z}} \neq 0$, $i=1,2$. Então a curvatura normal de S é dada por

$$K_N = \frac{2}{\lambda^2} \operatorname{Re}(T_2 - T_1)$$

Prova: Basta observar que

$$\frac{\lambda^2}{2} K_N = |\hat{F}_1|^2 - |\hat{F}_2|^2$$

e por (2.46)

$$\frac{\lambda^2}{2} K_N = |F_1|^2 - |F_2|^2 + (\log |F_1|)_{z\bar{z}} + (\log |F_2|)_{z\bar{z}} + \operatorname{Re}(T_2 - T_1) .$$

Ou seja

$$\frac{\lambda^2}{2} K_N = \operatorname{Re}(T_2 - T_1)$$

provando o lema.

Corolário: Uma superfície S em \mathbb{R}^4 com curvatura média não nula tem $K_N = 0$ se, e somente se,

$$\text{Re}(T_1) = \text{Re}(T_2)$$

Observe que por um teorema de Ruh - Vilns , [6], uma superfície S tem vetor curvatura média paralelo se, e somente se a aplicação de Gauss de S é harmônica. Assim, para uma superfície S em \mathbb{R}^4 , onde o Grassmanniano é o produto de esferas, a aplicação de Gauss de S é harmônica se, e somente se, cada fator f_k é uma aplicação harmônica na esfera S_k , $k=1, 2$. Em particular, segue-se que $T_1 = T_2 = 0$, e nesse caso, decorre de (2.2.48) que $K_N = 0$.

No próximo parágrafo, utilizaremos um teorema de Hoffmann cuja demonstração pode ser encontrada com bastante detalhes na Monografia de Mestrado de José Edmilson Rodrigues Paiva, pg. 58 (Que Deus o tenha).

2.2.49 - Teorema: (Hoffmann [5]). Seja S uma superfície em \mathbb{R}^4 com vetor curvatura média paralelo e curvatura Gaussiana $K = 0$. Então S está contida em um produto de círculos $S^1(r) \times S^1(p)$ onde $0 < r < \infty$ e $0 < p \leq \infty$.

2.3 - Superfícies Completas em \mathbb{R}^4 com Vetor Curvatura Média Paralelo

Neste parágrafo vamos caracterizar as superfícies completas em \mathbb{R}^4 com vetor curvatura média paralelo as quais constituem o objetivo principal desta Monografia. À luz da demonstração original encontrada em [2] e recorrendo aos pré-requisitos estabelecidos nos parágrafos precedentes, estamos prontos para dar uma demonstração não mais correta nem mais rigorosa, apenas mais detalhada do teorema II, o qual passamos a enunciar.

2.3.1 - Teorema II: (Hoffman, Osserman, Schoen). Seja S uma superfície orientada completa em \mathbb{R}^4 com vetor curvatura média paralelo e não nulo. Represente o Grassmanniano de dois-planos orientados em \mathbb{R}^4 pelo produto de esferas $S_1 \times S_2$. Então a imagem de S sob a aplicação de Gauss generalizada tem a propriedade de que nenhuma de suas projeções sobre S_1 em S_2 pode situar-se em um hemisfério aberto. Se uma das duas projeções, ou ambas situam-se em um hemisfério fechado, então S é um cilindro circular reto em algum $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, ou um produto de círculos.

Prova: Represente o grassmanniano de 2-planos orientados em \mathbb{R}^4 , $G(2, \mathbb{R}^4)$, pelo produto de esferas $S_1 \times S_2$, onde cada S_k , $k=1, 2$, é uma esfera de raio $1/\sqrt{2}$. A aplicação de Gauss de S pode ser fatorada em um par de aplicações g_1, g_2 , onde cada g_k é a projeção de G sobre a esfera S_k , $k=1, 2$. Seja f_k , $k=1, 2$, a aplicação dada pela composição de g_k com a projeção estereográfica. Como S tem vetor curvatura média paralelo, temos que G é harmônica. Consequentemente cada g_k é harmônica e por (1.1.26), capítulo I, temos

$$2.3.2 - \quad \Delta v_k = -2 |dv_k|^2 v_k ,$$

onde v_k representa o vetor posição na esfera S_k considerada como uma esfera de raio $1/\sqrt{2}$ em \mathbb{R}^3 . Denotando a densidade de energia de G por $\ell(G)$, temos de (2.1.22) que

$$2.3.3 - \quad \ell(G) = \ell_1 + \ell_2 ,$$

onde ℓ_k denota a densidade de energia de g_k . Em termos de f_k , temos de

(2.1.27) que

$$2.3.4 - \lambda^2 \ell_k = 2 \left[|F_k|^2 + |\hat{F}_k|^2 \right]$$

onde a métrica de S é dada por $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ em termos de parâmetros isotérmicos z sobre S . Se J_k denota o jacobiano da aplicação g_k , então de (2.2.28) temos

$$2.3.5 - \lambda^2 J_k = 2(|\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2).$$

As curvaturas K e K_N como vimos em (2.2.29-2) e (2.2.29-b) satisfazem

$$2.3.6 - K = J_1 + J_2 \quad \text{e} \quad K_N = J_1 - J_2.$$

Na notação (2.2.5), temos de (2.2.8) que

$$2.3.7 - |F_1| \equiv |F_2|.$$

Como g_k é harmônica de (2.2.48) temos $K_N = 0$. Logo de (2.3.6) obtemos

$$2.3.8 - J_1 = J_2$$

Usando (2.3.5) e (2.3.8) obtemos

$$2.3.9 - |\hat{F}_1| = |\hat{F}_2|$$

Substituindo (2.3.7) e (2.3.9) em (2.3.4), obtemos

$$2.3.10 - \ell_1 = \ell_2$$

Comparando (2.3.10) com (2.3.3) temos

$$2.3.11 - \ell(G) = 2\ell_k, \quad k = 1, 2.$$

Assim, $\ell(G) = 2\ell_k = 2(\frac{1}{2} |dv_k|^2) = |dv_k|^2$. De modo que (2.3.2) toma a forma

$$2.3.12 - \Delta v_k + 2\ell(G)v_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

Vamos supor que v_1 situa-se em um hemisfério fechado. Então para algum vetor fixo $c \in \mathbb{R}^4$, a função

$$2.3.13 - \quad \mu = \langle c, v_1 \rangle, \text{ satisfaaz}$$

$$2.3.14 - \quad \mu \leq 0.$$

Mas por (2.3.12), temos

$$2.3.15 - \quad \Delta\mu + 2\ell(g)\mu = 0.$$

Segue-se de (2.3.14) e (2.3.15) que μ é subharmônica e limitada superiormente.

Seja \hat{S} o recobrimento universal de S e seja $\hat{\mu}$ a função μ levantada a \hat{S} então $\hat{\mu}$ é contínua, subharmônica e limitada superiormente. Pelo teorema de Koebe existem exatamente três casos a considerar.

Caso 1: \hat{S} é conformemente equivalente a esfera. Então $\hat{\mu}$ atinge um máximo, portanto é constante.

Caso 2: \hat{S} é conformemente equivalente ao plano. Como $\hat{\mu}$ é subharmônica e limitada superiormente, pelo princípio do máximo, concluímos que $\hat{\mu}$ é constante.

Caso 3: \hat{S} é conformemente equivalente ao disco. Nesse caso escrevemos

$$2\ell(g) = |dv|^2 = 4H^2 - 2K \quad \text{e temos:}$$

$$\Delta\hat{\mu} + 4H^2\hat{\mu} - 2K\hat{\mu} = 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Fisher-Colbrier-Schoen (Cap. I, pg. 9), $\hat{\mu} \equiv 0$.

Vimos então que em qualquer caso $\hat{\mu}$ é constante implicando que μ é constante. Assim, v_1 situa-se sobre um círculo. Logo, $J_1=0$ implicando

por (2.3.8) que $J_2 = 0$ e por (2.3.6) concluímos que $K = 0$. Estamos então com as hipóteses para aplicar (2.2.49), o teorema de Hoffmann, concluindo a prova, pois o mesmo garante que S é um cilindro em algum $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ou um produto de círculos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Do Carmo, M.P. - Geometria Riemanniana, Rio, IMPA, 1979.
- [2] Hoffman, D.A., Osserman, R., Scheon, R. - On the Gauss Map of Compl. Surf. of Constant Mean Curvature in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 , Comm. Math. Helv. 57(1982) 519-531.
- [3] Lemaire, L., Eells, J. - A report on Harmonic Maps, Bull. London Math. Soc. 10 (1978) 2 - 68.
- [4] O'neill, B. - Elementary Diff. Geometry, Academic Press Inc. 1966.
- [5] Rodrigues, J.E.P. - Superfície com Vetor Curvatura Média Paralelo em Variedades de curvatura constante, Fortaleza, UFC, 1980 (Monografia de Mestrado).
- [6] Ruh, E.A., Vilms, J. - The Tension Field of the Gauss Map, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 569 - 573.
- [7] Schoen, R., Fischer-Coltrier, D. - The Strucutre of Compl. Stable Minimal Surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature, Comm. Pure Applied Math. 33 (1980), 159-211.
- [8] Springer, G. - Introduction to Riemann surfaces. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1957.