

PROBLEMA DE PLATEAU PARA SUPERFÍCIES  
MÍNIMAS COM UM FIM TIPO CATENÓIDE

ANTÔNIO CLÁUDIO VERAS DE ARAÚJO

Monografia submetida à coordenação do Curso de Pós-graduação  
em Matemática, para a obtenção do grau de mestre.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

FORTALEZA - CE  
DEZEMBRO DE 1996

UFC/BU/BCM

06/05/1997



R590380  
C341061  
T510

Problema de plateau para  
superfícies mín

A6E7p

Esta monografia foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se a disposição dos interessados na biblioteca da referida universidade.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida desde que seja feita de conformidade das normas da ética científica.



---

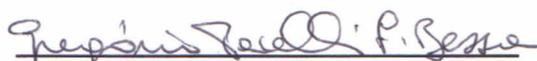
Antônio Cláudio Veras de Araújo

MONOGRAFIA APROVADA EM



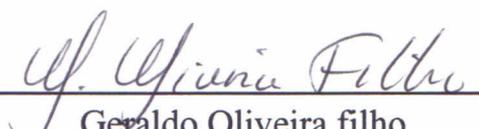
---

Luquésio Petrola de Melo Jorge  
Orientador



---

Gregório Pecelli Feitosa Bessa



---

Geraldo Oliveira filho

# INDICE

1. Introdução..... 1

2. Problema de Placa Para Seções  
Mínimas Com um Fim Tipo Catenóide..... 3

3. Referências..... 30

A minha mãe D. Lucy

# ÍNDICE

## 1. Introdução

### 1. Introdução.....1

### 2. Problema de Plateau Para Superfícies Mínimas Com Um Fim Tipo Catenóide.....3

### 3. Referências.....30

## 1. Introdução

O estudo de superfícies Mínimas, tem uma longa e rica história, datando dos primórdios do cálculo das variações e tomando impulso a partir dos experimentos do físico belga J. Plateau em 1847. Ele mostrou que pelas leis da tensão superficial, o filme de sabão formado pelo mergulho de um contorno fechado de arame em uma solução de sabão, representa uma superfície a qual é estável com relação a área. Isto é, sob a mínima deformação, o filme sempre torna-se maior. Este problema representou um grande desafio, pelo seu contraste entre a simplicidade de ser estabelecido e a dificuldade da solução: encontrar uma superfície  $G$  de menor área tendo como fronteira uma curva de Jordan dada. A solução matemática deste problema em dimensão dois, foi dada independentemente em 1930 e 1931 por T. Radó e J. Douglas para uma curva de Jordan retificável no espaço euclidiano. A superfície mínima que eles obtiveram era realizada por uma aplicação harmônica conforme definida no disco unitário. Em 1940, R. Courant resolveu este mesmo problema para superfícies mínimas de tipos topológicos diferentes. Em 1948 Morrey provou o teorema de Douglas e Radó em uma variedade riemanniana homoganeamente regular. Uma questão natural consiste em saber se toda curva de Jordan também limita um "anel infinito" de área mínima, isto é, uma superfície de menor área do tipo conforme do disco unitário menos um ponto a qual se estende para o infinito. Este é o Problema exterior de Plateau.

Em 1989 Friedrich Tomi e Rugang Ye em [2] mostraram que toda curva de Jordan retificável em  $\mathbb{R}^3$  limita uma imersão mínima de um anel, a qual se estende para o infinito e tem um fim plano, isto é, fora de alguma bola a superfície é o gráfico de uma função limitada, definida em algum domínio assintotando um plano no infinito. Neste trabalho resolveremos o problema correspondente para superfícies com fim tipo catenóide, o que significa que no infinito a superfície é o gráfico de uma função logarítima crescente, e portanto assemelha-se a forma de um meio catenóide, problema este originalmente resolvido por R. Langevin, H. Rosenberg (1989) e por F. Tomi (1992) o qual é demonstrado no seguinte teorema. O caso  $\lambda = 0$  no teorema corresponde ao fim plano e portanto é um caso especial do resultado em [11] (F. Tomi - R. Ye). Por reflexão para o outro lado do plano  $x_3 = 0$ , o caso de  $\lambda < 0$  pode ser reduzido para  $\lambda > 0$ .

**Teorema 1.1.** *Sejam  $C$  o catenóide do  $\mathbb{R}^3$ ,  $T$  o fecho da componente não simplesmente conexa do  $\mathbb{R}^3 \setminus C$  e  $\Gamma \subset T$  uma curva de Jordan retificável a qual gera  $\pi_1(T)$ , o grupo fundamental de  $T$ . Então, para todo  $\lambda \in [-1, 1]$  existe  $\mu > 0$  e uma imersão mínima conforme  $u : D_1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:*

- i)  $u$  estende-se continuamente para  $D_1 \setminus \{0\}$  e  $u$  aplica  $\partial D_1$  sobre  $\Gamma$  topologicamente;
- ii)  $\lim_{z \rightarrow 0} |u(z)| = +\infty$ ;
- iii) Para algum  $r > 0$ ,  $u|_{D_r \setminus \{0\}}$  é um mergulho e  $u(D_r \setminus \{0\})$  é o gráfico de uma função  $\Phi$ , a qual está definida em um domínio exterior do plano  $x_3 = 0$  e satisfaz:

$$|\Phi(x_1, x_2)| \leq \mu \text{ se } \lambda = 0 \tag{1.1}$$

$$\left| \Phi(x_1, x_2) - \lambda \cosh^{-1} \left( \frac{\rho}{|\lambda|} \right) \right| \leq \mu \text{ se } \lambda \neq 0, \text{ onde } \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Inicialmente obteremos uma superfície  $u$ , como limite de uma sequência de superfícies mínimas limitadas por  $\Gamma$  e certos círculos  $\Gamma_r$ , os quais não estão contidos em um plano fixo mas, em um catenóide conveniente. Em seguida estudaremos o comportamento assintótico desta superfície, a qual será a solução do problema.

## 2. Problema de Plateau para Superfícies Mínimas Com Um Fim Tipo Catenóide

Introduzimos as seguintes notações:  $C$  denota o catenóide do  $\mathbb{R}^3$ , isto é  $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \cosh x_3\}$ , e  $T$  o fecho da componente não simplesmente conexa de  $\mathbb{R}^3 \setminus C$ , por  $\cosh^{-1}$  entendemos o ramo positivo da inversa do  $\cosh$ , isto é  $\cosh^{-1}(\rho) = \ln(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1})$ . Denotaremos por  $\overset{0}{X}$  o interior do conjunto  $X$ . Colocando  $D_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ , estabeleceremos nosso resultado no seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** *Seja  $\Gamma$  uma curva de Jordan retificável contida em  $T$  a qual gera  $\pi_1(T)$ , o grupo fundamental de  $T$ . Então, para todo  $\lambda \in [-1, 1]$  existe  $\mu > 0$  e uma imersão mínima conforme  $u : \overset{0}{D}_1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:*

- i)  $u$  estende-se continuamente para  $D_1 \setminus \{0\}$  e  $u$  aplica  $\partial D_1$  sobre  $\Gamma$  topologicamente;
- ii)  $\lim_{z \rightarrow 0} |u(z)| = +\infty$ ;
- iii) Para algum  $r > 0$ ,  $u|_{D_r \setminus \{0\}}$  é um mergulho e  $u(D_r \setminus \{0\})$  é o gráfico de uma função  $\Phi$  a qual esta definida em um domínio exterior do plano  $(x_1, x_2)$  e satisfaz:

$$|\Phi(x_1, x_2)| \leq \mu \text{ se } \lambda = 0 \quad (2.1)$$

$$\left| \Phi(x_1, x_2) - \lambda \cosh^{-1} \left( \frac{\rho}{|\lambda|} \right) \right| \leq \mu \text{ se } \lambda \neq 0 \text{ onde } \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Seja  $A_r = D_r \setminus \overset{0}{D}_1$ . Precisamos provar o seguinte:

**Lema 2.2.** *Seja  $\Gamma' \subset T$  uma curva de Jordan retificável disjunta de  $\Gamma$ , e tal que  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  são homotópicas em  $T$ . Então, existe  $r > 1$  e uma imersão mínima conforme  $u : \overset{0}{A}_r \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $u$  estende-se continuamente para  $A_r$ ,  $u(A_r) \subset T$  e  $u|_{\partial D_1}$ ,  $u|_{\partial D_r}$  são aplicações injetivas sobre  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  respectivamente. Além disso,  $u$  tem área mínima entre todas as aplicações  $\tilde{u} : A_r \rightarrow T$  satisfazendo as mesmas condições de fronteira.*

**Prova** A fronteira  $\partial T = C$  é o catenóide e portanto  $T$  é uma região convexa pela média, segundo a definição de [10]. Como  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  geram  $\pi_1(T)$ , o teorema 5.2 de [10] garante a existência de uma superfície mínima conforme  $u : A_r \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $u(A_r) \subset T$ . Além disso,  $u|_{\partial D_1}$  e  $u|_{\partial D_r}$  são aplicados injetivamente sobre  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  respectivamente, e segue-se do resultado devido a R. Gulliver e F. Tomi [3], que  $u|_{A_r}^0$  é uma imersão sobre o interior da superfície.

Precisamos de algumas notações adicionais:

- $Z_R = \{x \in \mathbb{R}^3; \rho(x) \leq R\}$  onde  $\rho(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  (cilindro sólido);
- $C^+ = \{x \in C; x_3 > 0\}$  (meio catenóide) veja fig.2;
- $C_{\lambda,\mu} = \lambda C + (0, 0, \mu)$ , onde  $0 \leq \lambda \leq 1$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ ;
- $C_{\lambda,\mu}^+ = \lambda C^+ + (0, 0, \mu)$  onde  $0 \leq \lambda \leq 1$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  (catenóide com diâmetro mínimo  $2\lambda$  centrado em  $(0, 0, \mu)$ );
- $T_{\lambda,\mu} = \{x \in \mathbb{R}^3; \rho(x) > 1, |x_3 - \lambda \cosh^{-1}(\frac{\rho(x)}{\lambda})| \leq \mu\}$  (região do  $\mathbb{R}^3$  compreendida entre  $C_{\lambda,\mu}^+$  e  $C_{\lambda,-\mu}^+$  menos  $Z_1$ )

Agora escolhamos  $R_0 > 1$  tal que  $\Gamma \subset \left\{x \in Z_{R_0}^0; |x_3| < \frac{\mu}{2}\right\}$ , onde  $\mu = 2 \cosh^{-1}(R_0)$  e seja  $\Gamma_R = C_{\lambda,-\mu}^+ \cap \partial Z_R$ .

Podemos claramente encontrar um número  $R_1 \geq R_0$  tal que  $\Gamma_R \subset T$  para  $R \geq R_1$ . Denotaremos por  $u_R : A_{r(R)} \rightarrow T$  a superfície mínima tendo  $\Gamma$  e  $\Gamma_R$  como fronteira, cuja existência é garantida pelo Lema anterior.

**Lema 2.3.**  $u_R(A_{r(R)}) \subset T_{\lambda,\mu}$ .

**Prova.** Considere a família de meio catenóides  $C_{\lambda,v}$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , os quais folheiam  $\mathbb{R}^3 \setminus Z_1$ . Claramente  $u_R(A_{r(R)}) \cap C_{\lambda,v}^+ = \emptyset$  se  $v$  é suficientemente negativo. Agora aumentando o valor de  $v$ ,  $C_{\lambda,v}$  deverá contactar  $u_R(A_{r(R)})$  pela primeira vez, digamos em  $v = v_0$ . Uma vez que  $\Gamma_R \subset C_{\lambda,-\mu}$  temos que  $v_0 \leq -\mu$  e como pela escolha de  $\mu$ ,  $\Gamma \subset \left\{x \in Z_{R_0}; |x_3| < \frac{\mu}{2}\right\}$  e  $C_{\lambda,-\mu}^+ \cap \left\{x \in Z_{R_0}; |x_3| < \frac{\mu}{2}\right\} = \emptyset$  então  $\Gamma \cap C_{\lambda,v_0} = \emptyset$ . Portanto, se  $v_0 < -\mu$  então a superfície  $u_R$  estará em um dos lados de  $C_{\lambda,v_0}^+$  e ira contactar  $C_{\lambda,v_0}^+$  em um ponto interior, contradizendo o princípio do

máximo. Segue-se que  $v_0 = -\mu$  e portanto a imagem de  $u_R$  esta acima de  $C_{\lambda, -\mu}^+$ . Por um argumento similar mostra-se que  $u(A_{r(R)})$  esta abaixo de  $C_{\lambda, \mu}^+$ .

Consideraremos um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$ , o qual é folheado por uma família suave  $S_\mu$  de superfícies mínimas mergulhadas, e seja  $N$  um campo vetorial unitário  $C^\infty$  em  $U$  tal que,  $N(p)$  é normal a  $S_\mu$  se  $p \in S_\mu$ . Seja  $V$  uma subregião de  $U$  e escolhamos alguma superfície  $S_\mu$  da família dada assumindo que a trajetória de  $N$  partindo de qualquer ponto da subregião  $V$  alcança  $S_\mu$  após um tempo finito. Então definimos a aplicação  $\pi_\mu : V \rightarrow S_\mu$  a qual, assinala a cada ponto  $p \in V$  o primeiro ponto de interseção da trajetória partindo de  $p$  com  $S_\mu$ . Desde que  $N$  é um campo normal, então o  $\text{Div } N = 0$  e segue-se pelo Teorema de Stoks que  $\pi_\mu$  é área decrescente. Agora aplicaremos estas considerações para a família  $C_{\lambda, v}^+$   $v \in \mathbb{R}$  no conjunto aberto  $U = \mathbb{R}^3 \setminus Z_1$ .

Desde que

$$C_{\lambda, \mu}^+ = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \frac{x_3 - \mu}{\lambda} = \cosh^{-1} \left( \sqrt{\left(\frac{x_1^2}{\lambda}\right) + \left(\frac{x_2^2}{\lambda}\right)} \right) \right\},$$

em coordenadas cilindricas temos  $x_1 = \rho \cos \theta$ ,  $x_2 = \rho \sin \theta$ ,  $x_3 = z$  e  $f$  definida por  $f(\rho, \theta, \delta) = \lambda \cosh^{-1} \left( \frac{\rho}{\lambda} \right) + \mu - \delta$ . Então  $C_{\lambda, \mu}^+$  é a imagem inversa do valor regular 0 pela função  $f$ . Assim

$$\nabla f = \left( \frac{\lambda^2}{\sqrt{\rho^2 - \lambda^2}}, 0, -1 \right)$$

e

$$|\nabla f| = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - \lambda^2}}.$$

donde

$$\begin{aligned} N &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \\ &= \left( \frac{\lambda}{\rho}, 0, -\frac{\sqrt{\rho^2 - \lambda^2}}{\rho} \right), \end{aligned}$$

isto é

$$N(\rho, \theta, z) = \left( \frac{\lambda}{\rho}, 0, -\frac{1}{\rho} \cdot \sqrt{\rho^2 - \lambda^2} \right).$$

**Lema 2.4.** A trajetória de  $N$  partindo de um ponto em  $T_{\lambda,\mu}$  alcança  $C_{\lambda,-\mu}^+$  após o tempo  $1 + 2\sqrt{2\mu}$ , onde a projeção

$$\pi_{-\mu} : T_{\lambda,\mu} \rightarrow C_{\lambda,-\mu}^+$$

é bem definida e suave. Além disso, a estimativa

$$\rho(\pi_{-\mu}(p)) \leq \rho(p) + \rho_0 \quad (2.2)$$

vale para todo  $p \in T_{\lambda,\mu}$ , onde  $\rho_0$  somente depende de  $\mu$ .

**Prova.** Em coordenadas cilíndricas a trajetória satisfaz :

$$\rho' = \frac{\lambda}{\rho}, \quad \theta' = 0 \quad \text{e} \quad z' = -\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^2}$$

Por integração direta, obtemos  $\rho(t) = \sqrt{\rho(0)^2 + 2\lambda t}$ , em particular,  $\rho$  é crescente e  $\rho(t) \geq 1$  para qualquer ponto inicial  $p \in T_{\lambda,\mu} \subset \mathbb{R}^3 \setminus Z_1$ .

Se porém  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ , então  $\frac{\lambda}{\rho} \leq \frac{1}{2}$  e

$$\begin{aligned} z(t) - z(0) &= -\int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\rho(s)}\right)^2} ds \\ &\leq -\int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} ds \\ &\leq -\int_0^t \sqrt{\frac{3}{4}} ds \\ &\leq -t \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\leq -2\mu. \end{aligned} \quad (2.3)$$

para  $t \geq \frac{4\mu}{\sqrt{3}}$ , pois  $\frac{t\sqrt{3}}{2} \geq 2\mu$ , onde  $-\frac{t\sqrt{3}}{2} \leq -2\mu$ .

Por outro lado, se  $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$  então,

$$\rho(t) > \sqrt{\rho(0)^2 + t},$$

onde

$$\rho(1) > \sqrt{\rho(0)^2 + 1} \geq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \rho(1) > \sqrt{2},$$

portanto

$$z(t) - z(0) < -2\mu \tag{2.4}$$

desde que

$$\begin{aligned} z(t) - z(0) &= - \int_0^1 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^2} ds - \int_1^t \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^2} ds \\ &\leq - \int_1^t \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^2} ds \\ &\leq - \int_1^t \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} ds \\ &\leq - \int_1^t \sqrt{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^2}} ds \\ &\leq - \int_1^t \sqrt{1 - \frac{1}{2}} ds \\ &\leq - \int_1^t \sqrt{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq - \left( \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) \\ &\leq -2\mu, \end{aligned}$$

desde que  $t \geq 1 + 2\sqrt{2}\mu$ .

Combinando (2.3) e (2.4), vemos que a trajetória partindo de  $p$  após um tempo de  $1 + 2\sqrt{2}\mu$  alcança uma posição abaixo de  $C_{\lambda, -\mu}^+$  e portanto alcança  $C_{\lambda, -\mu}^+$  antes que este tempo. Finalmente segue-se que

$$\begin{aligned} \rho(\pi_{-\mu}(p)) &= \sqrt{\rho(p)^2 + 2\lambda t_0} \\ &\leq \sqrt{\rho(p)^2 + 2\lambda(1 + 2\sqrt{2}\mu)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\rho(p)^2 + 2(1 + 2\sqrt{2}\mu)} \\
&\leq \sqrt{(\rho(p) + 3\sqrt{\mu} + \sqrt{2})^2} \\
&\leq \rho(p) + 3\sqrt{\mu} + \sqrt{2},
\end{aligned}$$

o que prova o lema.

Estamos prontos agora, para estabelecermos uma estimativa local para a área. Definimos

$$a(\rho) = \text{área}(C_{\lambda,0}^+ \cap Z_\rho), \quad \rho > 1$$

Aumentando a constante  $R_1$  escolhida após o Lema (2.2), podemos assumir que

$$\pi_{-\mu}(\Gamma) \subset Z_{R_1}. \quad (2.5)$$

Com a notação

$$\sum(u, \rho) = (\pi_{-\mu} \circ u)^{-1}(Z_\rho)$$

onde  $u$  é qualquer aplicação sobre  $T_{\lambda,\mu}$ , então temos o seguinte:

**Lema 2.5.** Com a notação acima valem:

- i)  $\text{área}(u_R) \leq a_1 + a(R) - a(R_1)$  para  $R \geq R_1$  (onde  $a_1 = \text{área}(u_{R_1})$ );
- ii)  $\text{área}(u_R |_{\sum(u_R, \rho_2) \setminus \sum(u_R, \rho_1)}) \geq a(\rho_2) - a(\rho_1)$  para  $R_1 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq R$ ;
- iii)  $\text{área}(u_R |_{\sum(u_R, \rho)}) \leq a(\rho) - a(R_1) + a_1$  para  $R_1 \leq \rho \leq R$ .

**Prova.** (i) Podemos unir a superfície  $u_{R_1}$  e  $C_{\lambda,-\mu}^+ \cap (Z_R \setminus Z_{R_1})$  ao longo de sua fronteira comum  $\Gamma_{R_1}$ , obtendo uma superfície  $v_R$  em  $T$  tendo  $\Gamma$  e  $\Gamma_R$  como fronteira. Pela minimalidade de  $u_R$  Lema(2.2) temos que  $\text{área}(u_R) \leq \text{área}(v_R) = a_1 + a(R) - a(R_1)$ .

(ii) A aplicação  $\pi_{-\mu} \circ u_R$  é um homeomorfismo de  $\partial D_{r(R)}$  sobre  $\Gamma_R$ , desde que  $\Gamma_R \subset C_{\lambda,-\mu}^+$  e concluímos também usando (2.5) que o grau topológico de  $\pi_{-\mu} \circ u_R$  com respeito a qualquer ponto  $p \in C_{\lambda,-\mu}^+ \cap (Z_R \setminus Z_{R_1})$  é  $\pm 1$ . Portanto  $\pi_{-\mu} \circ u_R$  cobre  $Z_R \setminus Z_{R_1}$  e pela propriedade área decrescente de  $\pi_{-\mu}$ , segue-se que a

$\text{área}(u_R |_{\Sigma(u_R, \rho_2) \setminus \Sigma(u_R, \rho_1)}) \geq a(\rho_2) - a(\rho_1)$  quaisquer que sejam  $R_1 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq R$ .

(iii) Fazendo  $\rho_1 = \rho$  e  $\rho_2 = R$  em (ii),

$$\text{área}(u_R |_{\Sigma(u_R, R) \setminus \Sigma(u_R, \rho)}) \geq a(R) - a(\rho)$$

Onde

$$-\text{área}(u_R |_{\Sigma(u_R, R) \setminus \Sigma(u_R, \rho)}) \leq -a(R) + a(\rho)$$

de (i)

$$F = \left\langle \begin{array}{l} \text{área}(u_R) \leq a_1 + a(R) - a(R_1) \end{array} \right\rangle$$

somando temos

$$\begin{aligned} \text{área}(u_R |_{\Sigma(u_R, \rho)}) &= \text{área}(u_R) - \text{área}(u_R |_{\Sigma(u_R, R) \setminus \Sigma(u_R, \rho)}) \\ &\leq a_1 + a(\rho) - a(R_1), \end{aligned}$$

o que prova (iii). Onde as superfícies são localmente uniformemente limitadas.

Introduziremos os conjuntos abaixo, onde  $P$  é a projeção ortogonal sobre o plano  $x_3 = 0$ :

$\Omega(u_R, \rho) = (P \circ u_R)^{-1}(Z_\rho)$ ,  $A(u_R, \rho)$  = a componente conexa de  $\Omega(u_R, \rho)$  contendo  $\partial D_1 = S^1$ .

Segue-se de (2.2) que,  $\Omega(u_R, \rho) \subset \Sigma(u_R, \rho + \rho_0)$  e portanto obtemos do Lema(2.5) (iii) a estimativa

$$\begin{aligned} \text{área}(u_R, \Omega(u_R, \rho)) &\leq \text{área}(u_R |_{\Sigma(u_R, \rho + \rho_0)}) \\ &\leq a(\rho + \rho_0) + a_1 - a(R_1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

para  $R_1 \leq \rho \leq R$

Temos que  $C_{\lambda, 0}^+ = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = \lambda \cosh^{-1} \left( \sqrt{\frac{x_1^2}{\lambda^2} + \frac{x_2^2}{\lambda^2}} \right) \right\}$ , assim parametrizando  $C_{\lambda, 0}^+$  por  $\Phi(\rho, \theta) = \left( \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \lambda \cosh^{-1} \left( \frac{\rho}{\lambda} \right) \right)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}(\rho, \theta) &= \left( \cos \theta, \sin \theta, \lambda \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho^2}{\lambda^2} - 1}} \frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \left( \cos \theta, \sin \theta, \frac{\lambda}{\sqrt{\rho^2 - \lambda^2}} \right) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

onde

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\rangle = 1 + \frac{\lambda^2}{\rho^2 - \lambda^2}$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\rangle = -\rho \cos \theta \sin \theta + \rho \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle = \rho^2$$

assim

$$\begin{aligned} \sqrt{EG - F} &= \sqrt{EG} \\ &= \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2 - \lambda^2} \cdot \rho^2} \\ &= \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - \lambda^2}} \end{aligned}$$

onde

$$a(\rho) = \int_0^{2\pi} \int_{\lambda}^{\rho} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - \lambda^2}} dr d\theta$$

Fazendo  $r = \lambda \cosh u$ , então  $u = \cosh^{-1}\left(\frac{r}{\lambda}\right)$  e  $dr = \lambda \sinh u du$ , assim

$$\begin{aligned} a(\rho) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\cosh^{-1} 1}^{\cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)} \frac{\lambda^2 (\cosh^2 u) \lambda \sinh u}{\lambda \sqrt{\cosh^2 u - 1}} du \\ &= 2\pi \int_0^{\cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)} \frac{\lambda^2 (\cosh^2 u) \lambda \sinh u}{\lambda \sqrt{\cosh^2 u - 1}} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^{\cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)} \frac{\lambda^2 \cosh^2 u \sinh u}{\sinh u} du \\
&= 2\pi \int_0^{\cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)} \lambda^2 \cosh^2 u du \\
&= 2\pi \lambda^2 \int_0^{\cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)} \frac{\cosh 2u + 1}{2} du \\
&= \pi \lambda^2 \left( \frac{\sinh 2u}{2} + u \right) \Big|_0^{\cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)} \\
&= \left( \pi \lambda^2 \left( \sqrt{\cosh^2 u - 1} \cosh u + u \right) \right) \Big|_0^{\cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)} \\
&= \pi \left( \lambda^2 \sqrt{\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 - 1} \frac{\rho}{\lambda} + \lambda^2 \cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right) \\
&= \pi \left( \lambda^2 \frac{\sqrt{\rho^2 - \lambda^2}}{\lambda} \frac{\rho}{\lambda} + \lambda^2 \cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right) \\
&= \pi \left( \rho \sqrt{\rho^2 - \lambda^2} + \lambda^2 \cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right)
\end{aligned}$$

onde

$$a(\rho) = \pi \left( \rho \sqrt{\rho^2 - \lambda^2} + \lambda^2 \ln \frac{1}{\lambda} \left( \rho + \sqrt{\rho^2 - \lambda^2} \right) \right).$$

Uma vez que  $R_1 \leq \rho \leq R$ , segue-se que

$$\begin{aligned}
a(\rho + \rho_0) + a_1 - a(R_1) &\leq a(R + \rho_0) + a_1 - a(R_1) \\
&\leq \rho^2 (a(R + \rho_0) + a_1 - a(R_1))
\end{aligned}$$

desde que  $\rho \geq R_1 > 1$ , em particular há uma constante  $c_0$  tal que

$$\text{área}(u_R |_{\Omega(u_R, \rho)}) \leq c_0 \rho^2. \quad (2.7)$$

Agora introduziremos a energia de Dirichlet

$$E(u) = \frac{1}{2} \iint |\nabla u|^2$$

e lembramos que para aplicações conforme como  $u_R$ , a energia de Dirichlet e a

área coincidem, basta ver que

$$\begin{aligned}
 E(u) &= \frac{1}{2} \iint |\nabla u|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \iint u_x^2 + u_y^2 dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \iint E + G \\
 &= \iint \sqrt{EG} \\
 &= \iint \sqrt{EG - F^2} \\
 &= A(u)
 \end{aligned}$$

onde  $E = G$  e  $F = 0$ .

Precisamos do seguinte Lema devido a Courant-Lebesgue.

**Lema 2.6.** *Em um domínio  $B$  do plano, considere a classe de aplicações  $u \in C^\infty$ , para as quais a integral de Dirichlet é uniformemente limitada por uma constante  $M$*

$$E(u) \leq M.$$

Centrado em um ponto fixo arbitrário  $O$ , traçamos um círculo de raio  $r$ . Denotaremos por  $C_r$  o arco ou conjunto de arcos deste círculo contidos em  $B$ , e por  $s$  o comprimento do arco  $C_r$ . Então para toda constante positiva  $\delta < 1$  existe  $\rho$ , dependendo de  $u$ , com  $\delta \leq \rho \leq \sqrt{\delta}$ , tal que

$$\int_{C_\rho} u_s^2 ds \leq \frac{\varepsilon(\delta)}{\rho} \quad (2.8)$$

com

$$\varepsilon(\delta) = \frac{4M}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)}$$

e  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon(\delta) = 0$ . Além disso, o quadrado do comprimento  $L_\rho$  da imagem  $C'_\rho$  de  $C_\rho$  em  $\mathbb{R}^3$  satisfaz

$$L_\rho^2 \leq 2\pi\varepsilon(\delta)$$

isto é a oscilação de  $u$  em  $C_\rho$  é no máximo  $\sqrt{2\pi\varepsilon(\delta)}$ .

**Prova.** Se  $u$ , tem primeira derivada contínua, então

$$\int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} dr \int_{C_r} u_s^2 ds \leq E(u) \leq 2M$$

e portanto escrevendo

$$\int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} dr \int_{C_r} u_s^2 ds = \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{dr}{r} p(r),$$

onde  $p(r) = r \int_{C_r} u_s^2 ds$ , pelo teorema do valor médio do cálculo integral, existe  $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}]$  tal que

$$\begin{aligned} 2M &\geq \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{dr}{r} p(r) \\ &= \frac{1}{\rho} p(\rho) (\sqrt{\delta} - \delta) \\ &= p(\rho) \frac{1}{\rho} \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} dr \\ &\geq p(\rho) \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{dr}{r} \\ &= p(\rho) (\ln \sqrt{\delta} - \ln \delta) \\ &= p(\rho) \ln \frac{\sqrt{\delta}}{\delta} \\ &= \frac{1}{2} p(\rho) \ln \left( \frac{1}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\rho \int_{C_\rho} u_s^2 ds \leq \frac{2M}{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{\delta} \right)} = \frac{4M}{\ln \frac{1}{\delta}}$$

e

$$\int_{C_\rho} u_s^2 ds \leq \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho}.$$

Desde que  $L_\rho = \int_{C_\rho} \sqrt{u_s^2} ds$ , pela desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned} L_\rho^2 &= \left[ \int_{C_\rho} \sqrt{u_s^2} ds \right]^2 \\ &\leq \int_{C_\rho} u_s^2 ds \int_{C_\rho} ds \\ &\leq \frac{\varepsilon(\delta)}{\rho} 2\pi\rho \\ &= 2\pi\varepsilon(\delta). \end{aligned}$$

Para abreviar definimos  $\partial^* A(u_R, \rho) = \partial A(u_R, \rho) \setminus \partial D_1$ .

**Lema 2.7.** Há uma constante positiva  $c$  tal que:

- i)  $\text{dist}(\partial^* A(u_R, \rho), \partial^* A(u_R, 2\rho)) \geq c$  para  $R_1 \leq \rho \leq \frac{1}{2}R$ ;
- ii)  $\text{dist}(\partial D_1, \partial^* A(u_R, \rho)) \geq c \ln \rho$  para  $2R_1 \leq \rho \leq R$ ;
- iii)  $E(u_R | A_r) \leq c_0 \exp 2\left(\frac{r}{c}\right)$

**Prova.** Considere  $z_0 \in \partial^* A(u_R, \rho)$  tal que,

$$\text{dist}(z_0, \partial^* A(u_R, 2\rho)) = r_0 = \text{dist}(\partial^* A(u_R, 2\rho), \partial^* A(u_R, \rho)).$$

Sejam  $D_r(z_0) = \{z; |z - z_0| \leq r\}$ ,  $D_r^*(z_0) = D_r(z_0) \cap (A(u_R, 2\rho) \setminus \Omega(u_R, \rho))$  e  $\partial^* D_r(z_0) = \partial D_r(z_0) \cap (A(u_R, 2\rho) \setminus \Omega(u_R, \rho))$ .

Se  $r_0 < 1$  então, pelo Lema de Courant-Lebesgue, existe  $r_1 \in (r_0, \sqrt{r_0})$  tal que o quadrado do comprimento da imagem de  $\partial^* D_{r_1}(z_0)$  por  $u_R$ , é menor ou igual a  $\frac{4\pi E(u_R |_{D_{\sqrt{r_0}}(z_0)})}{\log \frac{1}{r_0}}$ , isto é a oscilação de  $u_R$  em  $\partial^* D_{r_1}(z_0)$  não excede

$$\sqrt{\frac{4\pi E(u_R |_{D_{\sqrt{r_0}}(z_0)})}{\log \frac{1}{r_0}}}, \text{ onde}$$

$$\left( \int_{\partial^* D_{r_1}(z_0)} \left| \frac{\partial u_R}{\partial \theta} \right| d\theta \right)^2 \leq 4\pi \frac{E(u_R |_{D_{\sqrt{r_0}}(z_0)})}{\log \frac{1}{r_0}}$$

desde que  $r_1 > r_0$ , podemos encontrar um arco  $\gamma$  em  $\partial^* D_{r_1}(z_0)$  ligando  $\partial^* A(u_R, 2\rho)$  e uma componente de  $\partial\Omega(u_R, \rho)$ , onde

$$\int_{\partial^* D_{r_1}(z_0)} \left| \frac{\partial u_R}{\partial \theta} \right| d\theta \geq \int_{\gamma} \left| \frac{\partial u_R}{\partial \theta} \right| d\theta \geq \rho$$

onde

$$\rho^2 \leq \frac{4\pi E(u_R|_{D_{\sqrt{r_0}}z_0})}{\log \frac{1}{r_0}}.$$

Por outro lado,

$$D_{\sqrt{r_0}}^*(z_0) \subset A(u_R, 2\rho) \setminus \Omega(u_R, \rho) \subset \Omega(u_R, 2\rho)$$

onde

$$E(u_R, D_{\sqrt{r_0}}^*(z_0)) \leq E(u_R, \Omega(u_R, 2\rho))$$

e por (2.7)

$$\text{área}(u_R|_{\Omega(u_R, \rho)}) \leq c_0 \rho^2, \text{ para } R_1 \leq \rho \leq R$$

$$\rho^2 \leq \frac{4\pi c_0 (2\rho)^2}{\log \frac{1}{r_0}} = \frac{4\pi c_0 4\rho^2}{\log \frac{1}{r_0}}.$$

onde

$$\log \frac{1}{r_0} \leq 16\pi c_0$$

portanto

$$r_0 \geq \exp(-16\pi c_0) \text{ para } R_1 \leq \rho \leq \frac{1}{2}R.$$

Se porém  $r_0 \geq 1$ , de qualquer forma  $r_0 \geq \exp(-16\pi c_0)$ , desde que  $\exp(-16\pi c_0) < 1$ .

Assim faça  $c = \exp(-16\pi c_0)$  o que prova (i).

Por um argumento similar ao anterior, mostra-se que

$$\text{dist}(\partial D_1, \partial^* A(u_R, R_1)) \geq \exp(-4\pi c_0) \geq \exp(-16\pi c_0) = c,$$

isto é

$$\text{Supondo que } S^1 \text{ é } \text{dist}(\partial D_1, \partial^* A(u_R, R_1)) \geq c.$$

Para provar (ii), seja  $l \in \mathbb{N}$  tal que se  $2R_1 \leq \rho \leq R$ , então  $R_1 < \frac{\rho}{2^l} = s < 2R_1$ , onde  $R_1 \leq \frac{\rho}{2^l} \leq \frac{1}{2}R$ . Sem perda da generalidade, podemos supor que  $l \geq 2$ , assim por (i) para  $k = 0, \dots, l-1$ , temos

$$\text{dist}(\partial^* A(u_R, 2^k s), \partial^* A(u_R, 2^{k+1} s)) \geq c,$$

daí

$$\begin{aligned} \text{dist}(\partial D_1, \partial^* A(u_R, \rho)) &\geq \text{dist}(\partial D_1, \partial^* A(u_R, R_1)) + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{l-1} \text{dist}(\partial^* A(u_R, 2^k s), \partial^* A(u_R, 2^{k+1} s)) \\ &\geq c + lc \\ &= (l+1)c. \end{aligned}$$

por outro lado, como  $R_1 \leq \frac{\rho}{2^l} \leq 2R_1$ , então  $\rho \leq 2^{l+1}R_1$ , daí

$$\begin{aligned} \ln \rho &\leq (l+1) \ln 2 + \ln R_1 \\ &\leq (l+2) \ln 2 - \ln 2 + \ln R_1 \\ &\leq (l+1) - \ln 2 + \ln R_1, \end{aligned}$$

desde que por hipótese  $l \geq 2$ , então  $(l+2) \ln 2 \leq l+1$ . Também sem perda da generalidade, podemos supor que  $R_1 \leq 2$ , daí  $\ln R_1 \leq \ln 2$ , portanto  $\ln \rho \leq l+1$ , e segue-se que  $\text{dist}(\partial D_1, \partial^* A(u_R, \rho)) \geq c \ln \rho$ .

Dado  $r$  escolha  $\rho$  tal que

$$r = \text{dist}(S^1, \partial^* A(u_R, \rho)) \geq c \ln \rho,$$

onde

$$\ln \rho \leq \frac{r}{c} \text{ e } \rho \leq \exp \frac{r}{c}, \text{ como } A_r \subset \Omega(u_R, \rho),$$

segue-se por (2.7) que

$$\begin{aligned} E(u_R | A_r) &\leq \text{área}(u_R | \Omega(u_R, \rho)) \\ &\leq c_0 \rho^2 \\ &\leq c_0 \left( \exp \frac{r}{c} \right)^2 \\ &= c_0 \exp 2 \left( \frac{r}{c} \right). \end{aligned}$$

Seja  $v(r, \theta)$  uma superfície harmônica definida no círculo unitário  $S^1$  tal que  $r < 1$ . Supondo que  $S^1$  é aplicado sobre uma curva retificável  $\Psi$ , isto implica que as componentes de  $v(1, \theta)$  são funções de variação limitada. Então vale o seguinte:

**Lema 2.8.**  $L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial v(r \exp(i\theta))}{\partial \theta} d\theta$  é monotonicamente crescente no intervalo  $0 \leq r \leq 1$  e

$$L = L(1) = \lim_{r \rightarrow 1} L(r). \quad (2.11)$$

**Prova.** É suficiente provar que  $L(r_1) \geq L(r_0)$ ,  $r_0 \leq r_1 \leq 1$ , desde que o limite quando  $r \rightarrow 1$  é uma consequência imediata da semicontinuidade do comprimento para a curva  $v(r, \theta)$  em  $r$ . Daremos a prova para  $r = 1$ . Para  $r < 1$  o mesmo argumento vale.

$v(r, \theta)$ , pode ser expresso em termos dos valores de fronteira, isto é

$$v(\theta) = v(1, \theta)$$

pela integral

$$v(r_0, \theta) = \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) v(\alpha) d\alpha,$$

onde  $K(r_0, \alpha - \theta)$  é o núcleo de Poisson

$$K(r_0, \alpha - \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r_0^2}{1 - 2r_0 \cos(\alpha - \theta) + r_0^2}$$

[1], pag. 135.

Considere

$$v_\theta = \int_0^{2\pi} K_\theta v(\alpha) d\alpha = - \int_0^{2\pi} K_\alpha v(\alpha) d\alpha$$

desde que  $K_\theta = -K_\alpha$ .

Considerando a integração no sentido de Stieltjes, desde que  $v(\alpha)$  é de variação limitada. e integrando por partes a ultima expressão,

$$- \int_0^{2\pi} K_\alpha v(\alpha) d\alpha = -v(\alpha) K(r_0, \alpha - \theta) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) dv(\alpha),$$

onde

$$v_\theta = \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) dv(\alpha)$$

desde que  $K(r_0, \alpha - \theta) > 0$ ,

$$|v_\theta| = \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) |dv(\alpha)| \quad (2.9)$$

desde que  $K$  é harmônica em  $(r, \alpha)$ , o teorema do valor médio para funções harmônicas implica que

$$\begin{aligned} K(0, -\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r_0, \theta - \alpha) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) d\alpha \end{aligned}$$

uma vez que  $K(r_0, \alpha - \theta) = K(r_0, \theta - \alpha)$ . Por outro lado,

$$K(0, -\alpha) = \frac{1}{2\pi},$$

então

$$\int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) d\alpha = 1 \quad (2.10)$$

substituindo (2.9) em  $L(r_0) = \int_0^{2\pi} |v_\theta| d\theta$  para o comprimento  $L(r_0)$  e usando a relação (2.10)

$$\begin{aligned} L(r_0) &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) |dv(\alpha)| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |dv(\alpha)| \\ &= L(1). \end{aligned}$$

**Proposição 2.9.** Para qualquer sequência  $R_k \rightarrow \infty$ , há uma subsequência de  $u_{R_k}$ , denotada por  $v_k$ , e uma aplicação conforme harmônica  $u \in C^0(A, \mathbb{R}^3) \cap C^\infty\left(A, \mathbb{R}^3\right)$ , onde  $A = \mathbb{C} \setminus \overset{0}{D}_1$ , com as seguintes propriedades:

- i)  $v_k$  converge para  $u$  em  $C^0(A_r)$ , para todo  $r > 1$  e em  $C^\infty(D_r \setminus D_s)$  para todo  $r > s > 1$ ;
- ii)  $u : \partial A \rightarrow \Gamma$  é injetiva;
- iii)  $u(A) \subset T_{\lambda, \mu}$ ;
- iv)  $u$  tem área mínima no seguinte sentido: para qualquer  $r > 1$  e qualquer aplicação  $v \in C^0 \cap H_2^1(A_r, T)$ , tal que  $v|_{\partial D_1}$  parametriza  $\Gamma$  monotonicamente e  $v|_{\partial D_r} = u|_{\partial D_r}$ , segue-se que  $\text{área}(u|_{A_r}) \leq \text{área}(v)$ ;
- v)  $\text{dist}(\partial D_1, \partial^* A(u, \rho)) \geq c \ln \rho$ ;
- vi)  $E\left(u|_{\Omega(u, \rho)}\right) \leq a(\rho + \rho_0) - a(R_1) + a_1$ .

**Prova.** Em vista do Lema(2.7) (iii), a integral de Dirichlet é uniformemente limitada em  $A_r$ ,  $r > R_1$ , onde pelo teo de Arzelá, precisamos apenas mostrar a equicontinuidade de  $u_{R_k}|_{S^1}$ .

Se  $u_{R_k}|_{S^1}$  não são equicontínuos, então, por um argumento envolvendo o Lema de Courat-Lebesgue e pelo Lema(2.7), tem-se  $R_k > 1$ ,  $r_k \rightarrow 0$  e um ponto  $z \in S^1$  tal que

$$\int_{\partial D_{r_k}(z) \cap A} \left| \frac{\partial u_{R_k}}{\partial \theta} \right| d\theta \rightarrow 0 \text{ e } \text{comp}(\Gamma_k^*) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty, \quad (2.11)$$

onde  $\Gamma_k^* = \Gamma \setminus u_{R_k}(S^1 \cap D_{r_k}(z))$ .

Ora desde que pelo Lema(2.7)  $E(u|_{A_r}) \leq c_0 \exp 2\left(\frac{r}{c}\right)$ , escolha  $r > 1$ , e  $r_k < 1$ , onde  $E(u_{R_k}|_{A_r})$  é uniformemente limitada, portanto podemos usar o Lema de Courante-Lebesgue para obtermos  $0 < \delta_k < 1$  e  $\delta_k < r_k < \sqrt{\delta_k}$ , onde

$$\int_{\partial D_{r_k}(z) \cap A} \left| \frac{\partial u_{R_k}}{\partial \theta} \right| d\theta \leq \sqrt{\frac{2\pi 4 \left( C_0 \exp 2\left(\frac{r}{c}\right) \right)}{\ln \frac{1}{\delta_k}}} \rightarrow 0, \text{ quando } \delta_k \rightarrow 0.$$

e o  $comp(\Gamma_k^*) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  nega a hipótese de equicontinuidade de  $u_{R_k}|_{S^1}$ .

Agora escolhamos  $z_k^1, z_k^2, \dots, z_k^m, \rho_k^j > \frac{1}{4}, j = 1, \dots, m$  tal que para cada  $k$  o disco  $D_{\rho_k^j}(z_k^j)$   $j = 1, \dots, m$  e  $D_{r_k}(z)$  cobrem  $S^1$ , mas seus interiores são dois a dois disjuntos, onde  $m$  é um número natural fixo. Aplicando cada  $D_{\rho_k^j}(z_k^j) \cap A$  conformemente sobre o disco unitário e desde que pelo Lema (2.10)

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| \frac{\partial v}{\partial \theta} (r \exp i\theta) \right| d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| \frac{\partial v}{\partial \theta} (\exp i\theta) \right| d\theta$$

para funções harmônicas  $v$  no disco unitário, então encontramos arcos regulares simples  $\gamma_{k,\varepsilon}^j \subset D_{\rho_k^j}(z_k^j) \cap A$  tal que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_{k,\varepsilon}^j = S^1 \cap D_{\rho_k^j}(z_k^j)$  no sentido de Frechet isto é, de tal maneira que se  $P_\varepsilon$  e  $Q_\varepsilon$  são pontos em  $\gamma_{k,\varepsilon}^j$  tais que, no limite tendem para  $P$  e  $Q$  respectivamente em  $S^1 \cap D_{\rho_k^j}(z_k^j)$ , então os arcos completos  $P_\varepsilon Q_\varepsilon$  de  $\gamma_{k,\varepsilon}^j$ , tendem para o arco  $PQ$  de  $S^1 \cap D_{\rho_k^j}(z_k^j)$ , e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m comp(u_{R_k}|_{\gamma_{k,\varepsilon}^j}) = comp \Gamma_k^* \quad (2.12)$$

desde que

$$u_{R_k} \left( \bigcup_j \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_{k,\varepsilon}^j \right) = \Gamma_k^* = \Gamma \setminus u_{R_k}(S^1 \cap D_{r_k}(z))$$

Por outro lado, seja  $\{w_k^1, \dots, w_k^{m+1}\} = (S^1 \setminus \cup_j D_{\rho_k^j}^0(z_k^j) \setminus D_{r_k}^0(z))$  pelo Lema de Courant-Lebesgue e Lema(2.7), esse garantindo a limitação uniforme das integrais de Dirichlet, há  $\varepsilon_{j,k}^l > 0$  com

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_{j,k}^l = 0 \text{ e } \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\partial D_{\varepsilon_{j,k}^l}(w_k^j) \cap A} \left| \frac{\partial u_{R_k}}{\partial \theta} \right| d\theta \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

usando arcos  $\partial D_{r_k}(z) \cap A, \gamma_{k,\varepsilon}^j$  e  $\partial D_{\varepsilon_{j,k}^l}(w_k^j) \cap A$ , arredondando os cantos facilmente constroem-se curvas de Jordan regulares fechadas  $\gamma_k \subset \overset{0}{A_{r(R_k)}}$  as quais encontram-se a uma pequena distância de  $S^1$  e cortam  $A_{r(R_k)}$  em duas regiões anelares. Além

disso, o  $\text{comp}(u_{R_k} |_{\gamma_k})$  converge para zero quando  $k \rightarrow \infty$  por (2.11) e (2.12). Assim, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_0$  nos dá

$$\int_{\gamma_k} \left| \frac{\partial u_{R_k}}{\partial \theta} \right| d\theta < 2\varepsilon \quad (2.14)$$

Agora escolhamos um ponto  $c_k \in \mathbb{R}^3$  tal que,

$$|u_{R_k}(z) - c_k| < \varepsilon \text{ para todo } z \in \gamma_k \quad (2.15)$$

então definimos

$$u_{R_k}^1(r \exp i\theta) = \begin{cases} (1-r)c_k + ru_{R_k}(\exp i\theta), & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ u_{R_k}(r \exp i\theta), & \text{se } 1 \leq r \leq R_k \end{cases}$$

daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{R_k}^1(r \exp i\theta)}{\partial r} &= u_{R_k}(\exp i\theta) - c_k \\ \frac{\partial u_{R_k}^1(r \exp i\theta)}{\partial \theta} &= r \frac{\partial u_{R_k}(\exp i\theta)}{\partial \theta} (\exp i\theta) i, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \text{área}(u_{R_k}^1 |_{D_1}) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |u_{R_k}(\exp i\theta) - c_k| \left| r \frac{\partial u_{R_k}(\exp i\theta)}{\partial \theta} (\exp i\theta) i \right| dr d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |u_{R_k}(\exp i\theta) - c_k| r \left| \frac{\partial u_{R_k}(\exp i\theta)}{\partial \theta} \right| dr d\theta \\ &= \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 \int_0^{2\pi} |u_{R_k}(\exp i\theta) - c_k| \left| \frac{\partial u_{R_k}(\exp i\theta)}{\partial \theta} \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_{R_k}(\exp i\theta)}{\partial \theta} \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon 2\varepsilon \\ &= \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Isto é

$$\text{área}(u_{R_k}^1 |_{D_1}) \leq \varepsilon^2$$

Seja  $a$  a área da superfície mínima tipo disco limitada por  $\Gamma$ , desde que

$$a \leq \text{área}(u_{R_k}^1 |_{D_1}) \leq \varepsilon^2$$

então

$$\text{área}(u_{R_k}^1) \leq \text{área}(u_{R_k}) + \varepsilon^2$$

como  $\varepsilon$  é arbitrário, desde que  $k$  seja suficientemente grande, isto é um absurdo.

(ii) Segue-se pelo Lema(2.2);

(iii) Segue-se pelo Lema(2.3);

(iv) Sejam  $v_k$  uma subsequência de  $u_{R_k}$  a qual converge para  $u$  e  $k$  grande tal que  $v(A_r) \subset Z_{R_k}$ , conectando, a superfície  $v(A_r)$  com  $v_k |_{A_r(R_k) \setminus A_r}$ , usando uma superfície tipo faixa, cuja área  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , uma vez que  $u(\partial D_r) = v(\partial D_r)$ , obtemos assim uma superfície  $v_k$  tal que

$$\begin{aligned} \text{área}(v_k) &\leq \text{área}(v_k) \\ &= \text{área}(v) + \text{área}(v_k |_{A_r(R_k) \setminus A_r}) + \varepsilon_k \end{aligned}$$

onde

$$\text{área}(v_k) - \text{área}(v_k |_{A_r(R_k) \setminus A_r}) \leq \text{área}(v) + \varepsilon_k$$

assim

$$\text{área}(v_k |_{A_r}) \leq \text{área}(v) + \varepsilon_k$$

passando ao limite quando  $k \rightarrow \infty$  temos

$$\text{área}(u |_{A_r}) \leq \text{área}(v).$$

(v) Isto é uma consequência imediata do Lema(2.7) (ii);

(vi) Isto é uma consequência imediata de (2.6) e da convergência de  $u_k$  para  $u$ .

**Lema 2.10.** *Valem as seguintes afirmações:*

- i)  $A(u, \rho)$  é limitado para cada  $\rho$ ;
- ii)  $|P \circ u(z)| \rightarrow +\infty$  ( $z \rightarrow \infty$ ).

**Prova.** No que se segue,  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = u$ ,  $v_k = u_{R_k}$  e  $r_k = r(R_k)$ . Mostraremos inicialmente que  $A(u, \rho) \neq \emptyset$ , pois do contrário,  $E(u)$  seria finita, pela ítem (vi) da Proposição (2.9). Então consideraremos a aplicação  $u^*(z) = u\left(\frac{1}{z}\right)$  definida no disco unitário furado  $D_1 \setminus \{0\}$ . Pelo lema de Courant-Lebesgue, encontramos um círculo  $C_r = \partial D_r$  em volta da origem com  $\text{comp}(u^*|_{C_r})$  arbitrariamente pequeno, o que é um absurdo.

Agora assumamos que  $A(u, \rho)$  é ilimitado para algum  $\rho$  e seja  $\rho' > \rho$  um valor regular de  $P \circ u$ . Claramente  $A(u, \rho')$  é também ilimitado. Onde o Princípio do Máximo e o Teorema da Função Implícita implicam que cada componente de  $\partial A(u, \rho') \setminus S^1$  é uma curva analítica, real e mergulhada seguindo para o infinito em ambas as direções.

Novamente considere a função  $u^*$  como definida acima. Usando o Lema de Courant-Lebesgue e Proposição(2.9) (vi), encontramos círculos arbitrariamente pequenos  $C_r$  em volta da origem tais que a variação total de  $u^*$  em  $C_r \cap A(u^*, \rho')$  também torna-se arbitrariamente pequena. Note que  $\partial A(u^*, \rho')$  é a imagem de  $\partial A(u, \rho')$  sobre a inversão  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ , onde as componentes de  $\partial A(u^*, \rho') \setminus S^1$  caminham para a origem. Logo escolhendo,  $r$  suficientemente pequeno, podemos ficar certos que  $C_r$  encontra  $\partial A(u^*, \rho') \setminus S^1$ . Então toda componente de  $C_r \cap A(u^*, \rho')$  encontra  $\partial A(u^*, \rho') \setminus S^1$ . Segue-se que a imagem de  $C_r \cap A(u^*, \rho')$  por  $|P \circ u^*|$  difere arbitrariamente pouco de  $\rho'$ . Portanto  $|P \circ u^*| > \rho$  na fronteira interna de  $A(u^*, \rho) \setminus D_r$  para  $r$  conveniente. Isto implica que  $A(u^*, \rho) \subset A(u^*, \rho') \setminus D_r$  e consequentemente  $A(u, \rho)$  é limitado.

A afirmação em (ii) é equivalente a limitação dos conjuntos  $\Omega(u, \rho)$  para qualquer  $\rho$  fixo. Afirmamos que qualquer componente de  $\Omega(u, \rho)$  é limitada. Do contrário por (i) e Proposição(2.9) (vi), ele teria que tocar  $\partial^* A(u, \sigma)$  para todo  $\sigma$  suficientemente grande, em particular para  $\sigma > \rho$  um absurdo. Agora assumamos que  $\Omega(u, \rho)$  é ilimitado. Desde que  $\Omega(u, \rho) \subset \Omega(u, 2\rho)$  e as componentes de  $\Omega(u, 2\rho)$  são também limitadas, segue-se que há uma sequência de diferentes componentes  $\Omega_{2\rho, k}$  de  $\Omega(u, 2\rho)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega_{2\rho, k} \neq \emptyset$  tal que cada  $\Omega_{2\rho, k}$  contém alguma componente de  $\Omega(u, \rho)$ , em particular  $\Omega_{2\rho, k}$  contém algum ponto  $w$  com  $|P \circ u(w)| \leq \rho$ . Disto concluímos que  $\text{área}(u|_{\Omega_{2\rho, k}}) \geq \pi\rho^2$  para todo  $k$ . Isto contradiz a finitude da área  $(u|_{\Omega(u, 2\rho)})$  pela Proposição(2.9) (vi).

**Lema 2.11.** *Seja  $M$  uma superfície sem fronteira,  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão,  $p_0 \in M$ ,  $r > 0$  e  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  tal que a normal unitária  $n$  de  $v$  satisfaz  $|n(p) - n(p_0)| < \varepsilon$  para todo  $p \in M$  e tal que o disco geodésico (com a métrica induzida)  $B_r(p) \subset M$*

é compacto. Então,  $v(M)$  contém o gráfico cartesiano de uma função  $f$  definida no disco euclidiano  $D_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(v(p_0))$  no plano tangente a  $v(p_0)$ . Além disso,  $|f(x)| \leq 2\varepsilon |x - v(p_0)|$  para  $x \in D_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(v(p_0))$ .

**Prova.** Desde que  $|n(p) - n(p_0)| < \varepsilon < \frac{1}{2}$  qualquer que seja  $p \in M$ , segue-se que o ângulo  $\theta$  formado por  $n(p)$  e  $n(p_0)$  é menor que  $\frac{\pi}{6}$ . Assim um dos ângulos formados pelos planos tangentes a  $v(M)$  em  $v(p)$  e  $v(p_0)$  respectivamente é também  $\theta$ . Desde que  $\theta < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$ , facilmente verifica-se que o ângulo  $\alpha$  formado pelo segmento  $\overline{v(p)v(p_0)}$  e o plano tangente a  $v(M)$  em  $v(p_0)$  é tal que  $\alpha < \theta < \frac{\pi}{4}$ , daí se  $p \in M$  é tal que  $v(p) \in \partial D_r(v(p_0))$ , onde  $\text{dist}(v(p), v(p_0)) = r$ , a projeção ortogonal  $P_\perp$  sobre o plano tangente a  $v(M)$  em  $v(p_0)$  é tal que

$$|P_\perp(v(p))| = r \cos \alpha \geq \frac{r}{\sqrt{2}},$$

desde que  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ . Onde  $v(M)$  contém o gráfico de uma função  $f$  definida no disco euclidiano  $D_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(v(p_0))$ .

Sejam  $x \in D_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(v(p_0))$ ,  $p \in M$  tal que  $P_\perp(v(p)) = x$  e  $\alpha$  o ângulo formado pelos segmentos  $xv(p_0)$  e  $\overline{v(p)v(p_0)}$  temos que

$$|f(x)| = (\tan \alpha) |x - v(p_0)|,$$

desde que  $|n(p) - n(p_0)| < \varepsilon < \frac{1}{2}$  e  $\alpha < \theta < \frac{\pi}{6}$ , então  $\tan \alpha \leq 2\varepsilon$  e

$$|f(x)| \leq 2\varepsilon |x - v(p_0)|.$$

**Lema 2.12.** Temos que:

1. Para qualquer  $r > 1$  a curvatura gaussiana  $\int_{A \setminus A_r} K dw$  de  $u$  em  $A \setminus A_r$  é finita;

2. Para algum  $r^* > 1$ ,  $u$  não tem pontos de bifurcação em  $A \setminus A_r$ .

**Prova.** Considere  $R > r > 1$  com a propriedade que  $u$  não tem pontos de bifurcação nos círculos  $C_R, C_r$ . Sejam  $z_1, z_2, \dots, z_N$  todos os pontos de bifurcação de  $u$  em  $A_R \setminus A_r$ , com ordens  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . Pela fórmula de Gauss-Bonnet para superfícies bifurcadas [7], temos

Prova. O lema anterior é diretamente aplicado a  $D_r$ .

Se  $u$  é finita em  $\infty$ ,  $D_r$  para algum  $r^* > 1$ .

Se  $u$  não é holomorfa, então pelo teorema de Poincaré-Lefschetz, existe uma imersão  $v_k$  de  $D_r$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $v_k \rightarrow u$  localmente e que  $v_k$  é uma imersão em  $A_{r_k} \setminus A_r$  e tem o círculo plano  $\Gamma_{r_k}$  como fronteira exterior, onde obtemos

$$2\pi \sum_{i=1}^N m_i - \iint_{A_R \setminus A_r} K dw = \int_{C_r} K_g ds + \int_{C_R} K_g ds.$$

onde  $k_g, ds$  denotam a curvatura geodésica e o elemento comprimento de arco dos círculos fronteira (na métrica induzida por  $u$ ) e as integrais de fronteira são tomadas com orientações convenientes. Lembramos que como no Lema(2.10),  $v_k \rightarrow u$  localmente e que  $v_k$  é uma imersão em  $A_{r_k} \setminus A_r$  e tem o círculo plano  $\Gamma_{r_k}$  como fronteira exterior, onde obtemos

$$\begin{aligned} \int_{C_r} K_g ds + \int_{C_R} K_g ds &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{C_r} K_g^k ds + \int_{C_R} K_g^k ds \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A_R \setminus A_r} (-K^k) dw^k \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \iint_{A_{r_k} \setminus A_r} (-K^k) dw^k \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{C_r} K_g^k ds^k + 2\pi \right) \\ &= \int_{C_r} K_g ds - 2\pi. \end{aligned}$$

Onde o índice  $k$  denota que a quantidade geométrica é determinada por  $v_k$ , e  $K^k$  denota a curvatura gaussiana de  $v_k$ , onde deduzimos que

$$2\pi \sum_{i=1}^N m_i - \iint_{A_R \setminus A_r} K dw \leq \int_{C_r} K_g ds + 2\pi$$

Tomando o limite quando  $R \rightarrow \infty$ , segue-se a afirmação do lema.

**Lema 2.13.** Com a escolha conveniente da orientação, a normal unitária  $n$  de  $u$  converge para  $e = (0, 0, 1)$  quando  $z \rightarrow +\infty$ .

**Prova.** O lema anterior é diretamente aplicado e diz que, a curvatura gaussiana total de  $u$  é finita em  $A \setminus D_r$  para algum  $r^* > 1$ . É bem conhecido que  $n$  é uma aplicação holomorfa de  $S^2$ , e a curvatura gaussiana total é sua aplicação de área. Segue-se do teorema de Picard que  $n$  tem somente uma singularidade removível em  $z = \infty$ . Onde  $N \cong \lim_{z \rightarrow \infty} n(z)$  existe. Agora assumamos que  $N \neq e = (0, 0, 1)$ . Sejam  $\varepsilon$  e  $\rho$  números positivos,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Podemos escolher  $r > 1$  tal que  $u|_{A \setminus D_r}$  é uma imersão e

$$|n(z) - N| < \varepsilon \text{ qualquer que seja } z \in A \setminus D_r.$$

Pelo Lema(2.10) (ii) podemos escolher um ponto  $w \in A \setminus D_r$  tal que

$$|P(p)| \geq 2\rho, p = u(w)$$

tal que,  $A \setminus D_r$  contém um disco geodésico compacto  $D_\rho(w)$  e segue-se então do Lema(2.11), que  $u(A \setminus D_r)$  contém o gráfico cartesiano de uma função  $f$  definida no disco  $D_{\frac{\rho}{\sqrt{2}}}(p)$  no plano tangente a  $u$  em  $p$  e que  $|f(x)| \leq 2\varepsilon|x - p|$  para todo  $x \in D_{\frac{\rho}{\sqrt{2}}}(p)$ . Desde que  $\sqrt{1 - N_3^2}$  é o seno do ângulo formado pela normal  $N$  e  $e = (0, 0, 1)$ , então  $\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{1 - N_3^2}$  é o comprimento da projeção do segmento de comprimento  $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$  (isto é de um raio do disco  $D_{\frac{\rho}{\sqrt{2}}}(p)$  cuja normal é  $N$ ) sobre o eixo vertical, como por hipótese  $N \neq e = (0, 0, 1)$ , segue-se que  $\sqrt{1 - N_3^2} \neq 1$ , e como  $|N - n(p)| < \varepsilon$ , então podemos claramente escolher um ponto  $q \in D_{\frac{\rho}{\sqrt{2}}}(p)$  tal que

$$q_3 - p_3 \geq \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{1 - N_3^2}$$

Denote por  $y$  o ponto no gráfico de  $f$  estendido sobre  $q$  e obtemos do Lema(2.11) que

$$\begin{aligned} y_3 - p_3 &\geq q_3 - p_3 - |y - p| \\ &\geq \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - N_3^2} - |y - p| \\ &\geq \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - N_3^2} - 2\varepsilon \frac{\rho}{\sqrt{2}} \\ &\geq \frac{\rho}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1 - N_3^2} - 2\varepsilon \right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

desde que pelo Lema(2.11)

$$\begin{aligned} |y - q| &\leq 2\varepsilon |q - p| \\ &\leq 2\varepsilon \frac{\rho}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado,  $y$  e  $p$  pertencem ao conjunto  $T_{\lambda, \mu}$  e escrevendo  $s = |P(p)|$ ,  $t = |P(y)|$ , temos que

$$\begin{aligned} |y_3 - p_3| - \left| \lambda \cosh^{-1} \frac{t}{\lambda} - \lambda \cosh^{-1} \frac{s}{\lambda} \right| &\leq \left| y_3 - p_3 - \left( \lambda \cosh^{-1} \frac{t}{\lambda} - \lambda \cosh^{-1} \frac{s}{\lambda} \right) \right| \\ &\leq \left| y_3 - \lambda \cosh^{-1} \frac{t}{\lambda} + \lambda \cosh^{-1} \frac{s}{\lambda} - p_3 \right| \\ &\leq \left| y_3 - \lambda \cosh^{-1} \frac{t}{\lambda} \right| + \left| p_3 - \lambda \cosh^{-1} \frac{s}{\lambda} \right| \\ &\leq \mu + \mu \\ &\leq 2\mu \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} |y_3 - p_3| &\leq \left| \lambda \cosh^{-1} \frac{t}{\lambda} - \lambda \cosh^{-1} \frac{s}{\lambda} \right| + 2\mu \\ &\leq \lambda \left| \cosh^{-1} \frac{t}{\lambda} - \cosh^{-1} \frac{s}{\lambda} \right| + 2\mu \\ &\leq \lambda \left| \ln \frac{\frac{t}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 - 1}}{\frac{s}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{s}{\lambda}\right)^2 - 1}} \right| + 2\mu \\ &\leq \lambda \left| \ln \frac{\frac{t}{\lambda} + \frac{\sqrt{t^2 - \lambda^2}}{\lambda}}{\frac{s}{\lambda} + \frac{\sqrt{s^2 - \lambda^2}}{\lambda}} \right| + 2\mu \\ &\leq \lambda \left| \ln \frac{t + \sqrt{t^2 - \lambda^2}}{s + \sqrt{s^2 - \lambda^2}} \right| + 2\mu \\ &\leq \lambda \ln \frac{2 \max(s, t)}{\min(s, t)} + 2\mu \end{aligned}$$

desde que

$$|s - t| \leq |p - y| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}} + 2\varepsilon \frac{\rho}{\sqrt{2}} = (1 + 2\varepsilon) \frac{\rho}{\sqrt{2}} = \frac{(1 + 2\varepsilon) \sqrt{2}}{2} \rho \leq \sqrt{2} \rho$$

obtemos levando em conta que  $s \geq 2\rho$  que

$$\begin{aligned} y_3 - p_3 &\leq \lambda \ln \frac{\max(s, t)}{\min(s, t)} + \lambda \ln 2 + 2\mu \\ &\leq \lambda \ln \frac{2\rho + \sqrt{2}\rho}{2\rho - \sqrt{2}\rho} + \lambda \ln 2 + 2\mu \\ &\leq \lambda \ln \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} + \lambda \ln 2 + 2\mu \end{aligned}$$

o que é incompatível com (2.16) se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno e  $\rho$  suficientemente grande, segue-se que  $N = \pm 1$ .

### .Prova do teorema

(i) É estabelecido pelo ítem (ii) da proposição.

(ii) Segue-se do item (ii) do Lema(2.10)

(iii) Concluímos do ítem (ii) do Lema(2.10) e Lema(2.13) que há um  $\rho > 1$  tal que  $P \circ u|_{A \setminus \Omega(u, \rho)}$  é um difeomorfismo local com jacobiano de sinal fixo, devido a conexidade de  $A \setminus \Omega(u, \rho)$ . Ainda pela Proposição(2.9) (ii),  $P \circ u$  é própria, assim seu grau topológico é bem definido e portanto  $d = \deg(P \circ u|_{A \setminus \Omega(u, \rho)}, x)$  é uma constante positiva para  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D_\rho$ . Segue-se que

$$\text{área} \left( (u|_{\Omega(u, R)}) \setminus \Omega(u, \rho) \right) \geq d\pi (R^2 - \rho^2) \quad (2.17)$$

para todo  $R > \rho$ .

Da Proposição(2.9) (vi), temos que

$$E(u|_{\Omega(u, \rho)}) \leq a(\rho + \rho_0) - a(R_1) + a_1.$$

onde

$$\begin{aligned} \text{área} \left( (u|_{\Omega(u, R)}) \setminus \Omega(u, \rho) \right) &\leq a(R + \rho_0) - a(R_1) \\ &\quad + a_1 - (a(\rho + \rho_0) - a(R_1) + a_1) \\ &= a(R + \rho_0) - a(\rho + \rho_0) \end{aligned}$$

Por outro lado

$$a(R + \rho_0) = a(\rho)$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left( \begin{array}{c} (R + \rho_0) \sqrt{(R + \rho_0)^2 - \lambda^2} \\ + \lambda^2 \ln \frac{1}{\lambda} \left( (R + \rho_0) + \sqrt{(R + \rho_0)^2 - \lambda^2} \right) \end{array} \right) \\
&\leq \pi \left( (R + \rho_0)^2 + \lambda^2 \ln \frac{1}{\lambda} \left( (R + \rho_0) + \sqrt{(R + \rho_0)^2 - \lambda^2} \right) \right) \\
&\leq \pi \left( (R + \rho_0)^2 \right) + \pi \lambda^2 \ln \frac{1}{\lambda} \left( (R + \rho_0) + \sqrt{(R + \rho_0)^2 - \lambda^2} \right) \\
&\leq \pi R^2 + 2\pi R\rho_0 + \pi\rho_0^2 + \pi\lambda^2 \ln \frac{1}{\lambda} \left( (R + \rho_0) + \sqrt{(R + \rho_0)^2 - \lambda^2} \right) \\
&\leq \pi R_{\varepsilon'}^2 + \varepsilon' R_{\varepsilon'}^2 \\
&\leq (\pi + \varepsilon') R_{\varepsilon'}^2
\end{aligned}$$

para  $\varepsilon'$  arbitrariamente pequeno e  $R_{\varepsilon'}$  suficientemente grande, e

$$\begin{aligned}
a(\rho + \rho_0) &\geq a(\rho) = \pi \left( \rho \sqrt{\rho^2 - \lambda^2} + \lambda^2 \ln \frac{1}{\lambda} \left( \rho + \sqrt{\rho^2 - \lambda^2} \right) \right) \\
&\geq \pi \rho^2 + \pi \lambda^2 \ln \frac{1}{\lambda} \left( \rho + \sqrt{\rho^2 - \lambda^2} \right) \\
&\geq \pi \rho_{\varepsilon''}^2 + \varepsilon'' \rho_{\varepsilon''}^2 \\
&\geq (\pi + \varepsilon'') \rho_{\varepsilon''}^2
\end{aligned}$$

para  $\varepsilon''$  arbitrariamente pequeno e  $\rho_{\varepsilon''}$  convenientemente grande. Tome  $\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'')$ ,  $R = R_\varepsilon$  e  $\rho = \rho_\varepsilon$  então

$$a(R + \rho) \leq (\pi + \varepsilon) R^2$$

e

$$-a(\rho + \rho_0) \leq -(\pi + \varepsilon) \rho^2$$

somando membro a membro, temos

$$a(R + \rho) - a(\rho + \rho_0) \leq (\pi + \varepsilon) (R^2 - \rho^2)$$

dai deduzimos que  $d = 1$ , em vista do Lema(2.13), isto prova que  $u|_{A \setminus \Omega(u, \rho)}$  é o gráfico de uma função  $\varphi$  definida em  $\mathbb{R}^2 \setminus D_\rho$ . A estimativa (2.1), segue-se do fato que  $u(A) \subset T_{\lambda, \mu}$ . Devido a Osserman [8]  $u$  não tem pontos de bifurcações verdadeiros em  $A$  desde que  $u$  é localmente área minimizante Proposição(2.9) (iv)

### 3. Bibliografia

- [1] COURANT, R. *Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces*. New York: Interscience (1950).
- [2] FOLLAND, Gerald B. *Introduction to partial Differential Equations*. Princeton University Press, New Jersey-(1976).
- [3] GULLIVER, R. D., TOMI, Friedrich. *On false branch points of incompressible surfaces*. Manuscripta Math. **63**,293-302 (1989).
- [4] KRUST, R. *Remarques sur le problém exterieur de plateau*. Duke Math. J. **59**,161-173 (1989).
- [5] LANGEVIN, R., ROSEMBERG, H.. *A máximum principle at infinity for minimal surfaces and aplications*. Duke Math. J. **57**,819-828 (1988).
- [6] NEHRING, Th. *Dasfreie Randwertproblem fur Minimalflächen im Außenraum*. Diploma Tesis, Heidelberg (1990).
- [7] NITSCHKE, J., *Vorlesungenuber minimalflächen*. Berlin Heidelberg New York: Springer 1975.
- [8] OSSERMANN, R. *A proof of the regularity, everywhere of the classical solution to plateau's problem*. Ann. of Math. **91**,550-569 (1970).
- [9] SIMON, L. *Lectures on geometric measure theory*. Proceedings of the Center for Mathematical Analysis, Australian National University, Camberra (1983).
- [10] TOMI, Friedrich, TROMBA, Antony J. *Existence theorems for minimal surfaces of non-zero genus spanning a contour*. Men. Amer. Math. Soc. (383) 71, 1-83 (1988).
- [11] TOMI, Friedrich, YE, Rugang. *The exterior Plateau Problem*. Math. Z. **205**, 233-245 (1990).