



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

SOFIA MAGALHÃES CUNHA

VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ E RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL

FORTALEZA
FEVEREIRO, 2016

SOFIA MAGALHÃES CUNHA

VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ E RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL

Monografia submetida à Coordenação da Graduação do Curso de Física da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

FORTALEZA
FEVEREIRO, 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

-
- C98v Cunha, Sofia Magalhães
 Violação de simetria de Lorentz e relatividade muito especial / Sofia Magalhães Cunha. –
 2016.
 36 f. : il.
- Monografia (Graduação em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
 Departamento de Física, Curso de Bacharelado em Física, Fortaleza, 2016.
 Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
 Inclui bibliografia.
1. Lorentz, simetria de. 2. Teoria perturbativa. 3. Relatividade muito especial. I Almeida,
 Carlos Alberto Santos de. II. Título.

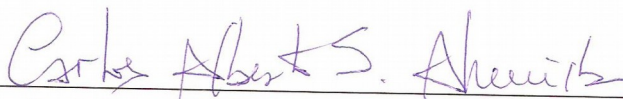
SOFIA MAGALHÃES CUNHA

VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ E RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de
Física, da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Bacharel em Física.

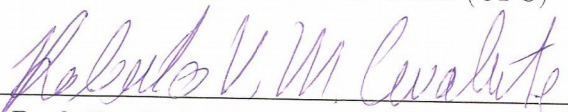
Aprovada em 04/02/2016.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
(Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus.
À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, pois até aqui me ajudou o Senhor e sou grata por suas bênçãos sobre minha vida.

Agradeço aos meus pais Joana Lúcia Magalhães Cunha e José Almir Rodrigues da Cunha e ao meu irmão Matheus Magalhães Cunha pelo apoio durante todo o curso e pelas inúmeras palavras de motivação.

À Laika, minha companheira de quatro patas que me acompanhou em inúmeras noites de trabalho.

Aos meus familiares que de alguma forma possibilitaram que eu avançasse em meus estudos.

Agradeço a meu grande amigo Johnathas Forte, pois sua influência foi decisiva para a escolha do curso de física.

Ao Prof. Dr. Josué Mendes Filho, sem seu apoio não teria conseguido minha bolsa de iniciação científica ainda no começo do curso.

Ao Prof. Dr. José Alves de Lima Junior, meu primeiro orientador e com quem aprendi lições importantes sobre como funcionam as pesquisas e o meio científico.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida por me acolher em seu grupo já no final da minha graduação e com muita disponibilidade e paciência me introduzir na área de física teórica.

Aos colegas do grupo de pesquisa: Victor Santos, por sua humildade e disponibilidade em indicar materiais de estudo, Debora Gomes, por sua imensa ajuda ao longo do semestre e Rafael Farias por sua ajuda quando entrei no grupo.

Agradeço também aos amigos de turma: Bianca Gondim, Pablo Ramon, Emanuel Fonteles, Michel Rodrigues, Raul Peixoto, Ken Aikawa, José Bentivi, Nicolas Carvalho, Pedro Henrique Lima, Lucas Miranda, Wendel Oliveira e Mateus Andrade.

Aos professores do departamento que de alguma forma participaram dessa conquista, seja pela contribuição na minha formação, quanto por conselhos.

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pela bolsa de iniciação científica.

“O temor ao Senhor é o princípio da sabedoria.”
(Provérbio de Salomão)

RESUMO

A simetria de Lorentz possui uma importância fundamental em diversas áreas da física, tendo um papel importante no cenário da Teoria Quântica de Campos e na Relatividade Geral e também para a Teoria de Cordas. Devido às limitações do cenário do Modelo Padrão, o qual não inclui gravidade, e não explica a energia e a massa escuras, novas teorias são propostas num cenário Além do Modelo Padrão. Neste contexto surge a Violação da Simetria de Lorentz. Proposta por Kostelecky e Samuel em 1989, essa teoria incorpora a violação de Lorentz ao Modelo Padrão, no que hoje é chamado de Modelo Padrão Estendido (MPE). Uma das formas de violação nesse modelo é realizada por um quadrivetor proveniente da quebra espontânea de uma simetria interna. Esta violação está associada, do ponto de vista da chamada transformação de partícula ("boost" na posição da partícula na presença de um campo de fundo sem alteração nos observadores), pelo comportamento escalar das componentes desse quadrivetor. Sob a transformação de observador, esse quadrivetor tem um comportamento covariante (transformação bem definida) de Lorentz, configurando um comportamento diverso entre os diferentes referenciais. Um cenário diferente onde aparece a Violação de Lorentz, mas agora ao nível da álgebra de grupo, é a chamada Relatividade Muito Especial (ou Very Special Relativity-VSR). Proposta por Cohen e Glashow em 2006, a VSR, concorda a altas energias com a Relatividade Especial convencional, porém apresenta uma discordância em baixas energias. O objetivo deste trabalho é realizar uma introdução a estes temas e discutir a investigação inicial de aplicações a sistemas gerais relativísticos.

Palavras-chaves: Violação da simetria de Lorentz, Modelo Padrão Estendido, Relatividade Muito Especial.

ABSTRACT

The Lorentz symmetry has a fundamental importance in many areas of physics, playing a major role in the setting of Quantum Field Theory and General Relativity and to the String Theory. Due to limitations of the standard model scenario, which does not include gravity, and does not explain the energy and dark mass, new theories are proposed in a setting beyond the standard model. In this context arises the violation of Lorentz Symmetry. Proposed by Kostelecky and Samuel in 1989, this theory incorporates the violation of Lorentz to the Standard Model, in what is now called the Extended Standard Model (ESM). One way to breach this model is performed by a four-vector from the spontaneous breaking of an internal symmetry. This violation is associated, from the point of view of call processing particle ("boost" the particle position in the presence of a background field without change in the observer), the behavior scaling the components of the four-vector. Under the observer transformation, this four-vector has a covariant behavior (well-defined transformation) of Lorentz, setting a different behavior between different frames of reference. A different scenario where it appears the violation of Lorentz, but now the level of the group algebra, is called Relativity Very Special (VSR). Proposal by Cohen and Glashow in 2006, VSR, agrees to high energies with Relativity conventional special, but presents a disagreement at low energies. The aim of this work is to make an introduction to these topics and discuss research Initial applications of the general relativistic systems.

Keywords: Violation of Lorentz symmetry, Extended Standard Model, Very Special Relativity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1: Rotação Passiva	16
Figura 2.2: Rotação Ativa.....	17
Figura 2.3: Dois sistemas de referência: S e S'.....	18

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Correção para os níveis de energia do hidrogênio.....	34
---	----

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO.....	11
CAPÍTULO 2: VIOLAÇÕES NA INVARIÂNCIA DE SIMETRIA DE LORENTZ.....	13
2.1 Simetria de Lorentz.....	14
<i>2.1.1 Rotação Passiva.....</i>	<i>16</i>
<i>2.1.2 Rotação Ativa.....</i>	<i>17</i>
<i>2.1.3 Definição de transformação de observador e de partícula.....</i>	<i>18</i>
2.2 Outro exemplo de violação de Lorentz: Acoplamento de um quadrivetor externo a um tensor eletromagnético.....	19
2.3 Violação de Lorentz no contexto da Teoria de Cordas.....	20
CAPÍTULO 3: TEORIA PERTURBATIVA INDEPENDENTE DO TEMPO.....	24
3.1 Degenerescência dupla.....	24
3.2 Degenerescência de ordem superior.....	26
CAPÍTULO 4: RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL.....	27
4.1 Definição.....	27
<i>4.1.1 Equação de Maxwell e VSR.....</i>	<i>29</i>
4.2 Aplicação da VSR ao átomo de hidrogênio.....	29
CAPÍTULO 5: CONCLUSÃO.....	35
REFERÊNCIAS.....	36

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Com o surgimento de teorias unificadas na física, como o Modelo Padrão, um cenário para novas teorias que propõem a violação de simetrias fundamentais, como a simetria de Lorentz, tem ganhado cada vez mais espaço no meio científico. Essa violação de Lorentz surge no Modelo Padrão¹ de forma natural com a inclusão de certos termos que são responsáveis por essa quebra.

Uma quebra de Lorentz pode ser entendida como uma anisotropia que o sistema físico atinge em determinadas circunstâncias. Tais circunstâncias podem ser originadas pela presença de um campo de fundo (campo de origem desconhecida) e nesse caso a quebra é dita espontânea.

O surgimento de ideias que levam em conta a violação de Lorentz não significa que a Relatividade Especial formulada por Einstein e que revolucionou a Física do século XX esteja errada, mas indica que esta, em um regime de baixas energias, contém uma teoria que apresenta termos que violam Lorentz, sendo essa teoria chamada de Relatividade Muito Especial [2].

Kosteletsky e Samuel propuseram estender o conceito de violação de Lorentz ao Modelo Padrão em 1989 [1]. Nesse trabalho os autores propõem a inclusão da violação de Lorentz ao Modelo Padrão, originando o Modelo Padrão Estendido[1].

Uma das motivações para essa nova proposta é a variação da constante de estrutura fina [3], essa grandeza que mede a interação eletromagnética entre fótons e elétrons depende, inicialmente, das constantes de Planck e da carga do elétron que também é uma constante, ou seja, era esperado que essa grandeza não apresentasse alterações de valor. Uma outra motivação para o estudo dessas novas ideias é a presença de massa não-nula do neutrino [4].

Este trabalho consiste de mais quatro capítulos de desenvolvimento. O segundo capítulo discute as principais formas de se obter uma violação de Lorentz, inicialmente apresentando a definição de simetria e analisando um exemplo simples consistindo em um capacitor de placas paralelas planas. No terceiro capítulo é feita uma pequena revisão de Teoria Perturbativa no contexto da mecânica quântica, contendo a importância dessa teoria, definição dos tipos de perturbação (degenerada e não-degenerada) e uma explicação sobre teoria perturbativa degenerada de ordem dupla e de ordens superiores. No quarto capítulo é apresentado o conceito de Relatividade Muito Especial com uma pequena análise das alterações

¹ Modelo Padrão descreve de maneira unificada as forças elementares: eletromagnetismo, nuclear forte e nuclear fraca. Porém, não inclui a força gravitacional.

que essa ideia produz nas equações de Maxwell e uma cuidadosa análise na aplicação de Relatividade Muito Especial no átomo de hidrogênio, para isso sendo tratada como uma perturbação degenerada no hamiltoniano do átomo de hidrogênio e, portanto, correções de energia de primeira ordem podem ser obtidas e é exatamente isso que é feito nesse capítulo. Por fim, no último capítulo é feita a conclusão com discussão dos resultados encontrados e exposição das perspectivas de futuros projetos incluindo as ideias discutidas nesse trabalho.

CAPÍTULO 2: VIOLAÇÕES NA INVARIÂNCIA DE SIMETRIA DE LORENTZ.

O conceito de simetria é algo fortemente ligado ao princípio de conservação de certas grandezas como momento, carga e energia. Porém, a quebra de simetria tem surgido em um cenário de busca pela unificação das leis físicas. Nesse contexto de teorias que apresentam quebra de simetria tem surgido o Modelo Padrão Estendido [1] e a Teoria de Cordas [5].

O Modelo Padrão tem fornecido, até agora, uma poderosa ferramenta que explica como as partículas interagem e se comportam incluindo as forças fraca, forte e eletromagnética (forças não-gravitacionais), porém esse modelo não inclui interações gravitacionais, o que configura uma forte motivação pela busca de uma teoria “superior” que inclua a gravitação com as três forças fundamentais já citadas.

Uma dessas teorias é a Teoria de Cordas. Nesse modelo todas as partículas podem ser descritas por um objeto unidimensional (corda) juntamente com membranas de diversas dimensões chamadas Branas, essa teoria não obrigatoriamente apresenta violação de Lorentz, apenas é uma teoria que pode apresentar tais violações.

Surge também o Modelo Padrão Estendido, um modelo que inclui todos os termos que violam Lorentz.

Uma explicação para essa Violação de Lorentz foi inicialmente atribuída ao surgimento de um campo de fundo. Essa ideia surgiu do fato de que em transições de fase é espontâneo o surgimento de um campo de fundo cujo valor esperado é não-nulo quando o sistema físico atinge o estado de mínima energia.

A ideia da ocorrência da quebra espontânea de simetria no contexto da teoria das cordas e do Modelo Padrão Estendido foi lançada por Kostelecky e Samuel [1] em 1989, e, aos poucos, foi ganhando adesão na comunidade, como procedimento mais usual para se introduzir a quebra da simetria de Lorentz. No trabalho citado, os autores avaliam que ao Modelo Padrão da física de partículas devem ser incorporadas estas ideias.

Neste primeiro capítulo será feita a análise da Violação de Lorentz no contexto do Modelo Padrão Estendido. Porém inicialmente é necessária uma explicação do que se trata tal violação, para isso será exposto um exemplo de uma partícula na presença de um campo elétrico e seu comportamento quando se aplica uma rotação e um “boost” [6].

2.1 Simetria de Lorentz.

Uma das simetrias no espaço-tempo é a isotropia, ou seja, a ausência de um eixo com direção privilegiada. A teoria quântica de campos associa a simetria de Lorentz com a mecânica quântica. Nessa teoria toda partícula ou força é descrita por um campo que permeia o espaço-tempo e tem uma simetria de Lorentz apropriada. As partículas são tratadas como perturbações localizadas em um campo.

O Modelo Padrão descreve todas as partículas conhecidas e todas as forças não-gravitacionais (eletromagnética, forças fracas e fortes). A simetria de Lorentz determina como os campos na Teoria Quântica de Campos (TQC) devem se comportar e interagir. O Modelo Padrão não inclui as interações gravitacionais. A Relatividade Geral inclui essas interações, porém, ela não inclui a Mecânica Quântica.

Albert Einstein buscava uma teoria que unificasse eletromagnetismo com gravitação. Assim como ele obteve uma teoria que unificou gravitação com eletromagnetismo, atualmente muitos cientistas buscam uma unificação maior para todas as forças. O Modelo Padrão até agora tem sido um dos modelos mais eficientes no contexto de teorias unificadoras.

Já a teoria chamada *Loop Quantum Gravity* busca uma interpretação quântica para a relatividade. Essa teoria almeja a gravitação quântica, nesse contexto a simetria de Lorentz do espaço tempo pode ser quebrada [7].

Portanto violações na relatividade consistem, em algumas situações, em violação de Lorentz. Uma busca pela unificação de teorias tem se mostrado um trabalho que é necessário se levar em conta tais violações.

O valor esperado para os campos de fundo geralmente têm valor nulo, no entanto esses campos de fundo podem adquirir valor esperado diferente de zero. No primeiro caso que será analisado neste capítulo o campo elétrico influencia no campo de fundo da partícula, nesse caso o campo elétrico é um campo tensorial não-nulo e que é justamente, como será visto, o responsável por essa quebra de simetria do sistema físico.

Será feito a seguir um primeiro exemplo de como uma Violação de Lorentz pode ser observada.

Levando em conta os dois postulados de Einstein para a relatividade:

- As leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial;
- A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer referencial inercial.

Podemos escrever a equação de propagação da luz como sendo esférica. Essa propagação vista por dois referenciais inerciais s e s' afastando-se um do outro com velocidade v é dada por:

$$\begin{aligned}c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= 0 \\c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

Quando igualamos essas duas equações extraímos as seguintes relações:

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right)\tag{2.2}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$x = \gamma(x - vt)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\tag{2.3}$$

Essas são as chamadas transformações de Lorentz. Elas descrevem mudanças que ocorrem em coordenadas temporais e espaciais quando um objeto sofre uma transformação de translação (transformações chamadas “boost”).

Já para as rotações temos as seguintes relações:

$$t' = t\tag{2.4}$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi$$

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi$$

$$z' = z$$

Elas podem ser visualizadas na Figura 2.1.

Nesse ponto, é importante se fazer a definição de dois tipos de transformação:

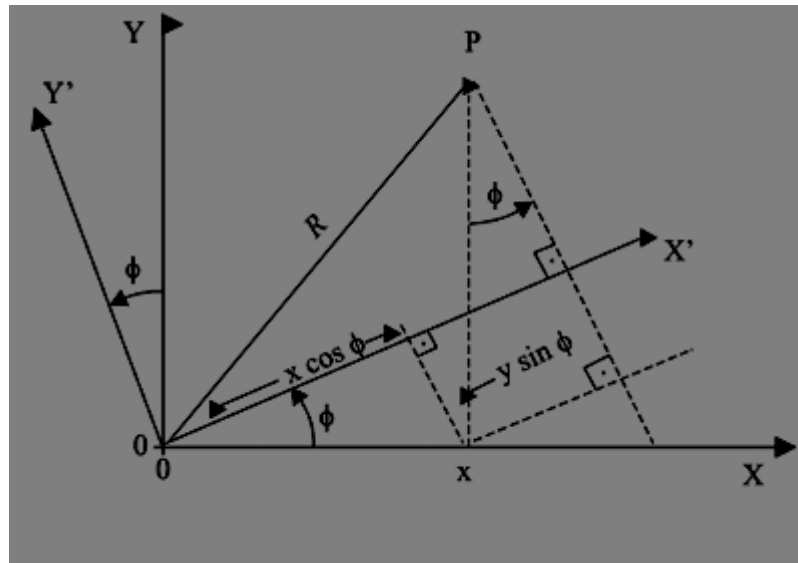
- Transformação passiva: Uma transformação que se caracteriza pela permanência de um objeto na sua posição fixa no espaço-tempo e é feita uma relação entre dois sistemas de referenciais inerciais.
- Transformação ativa: Uma transformação que consiste na alteração da posição do objeto no espaço-tempo, permanecendo fixo o seu sistema de referencial inercial.

Será feita a análise desses casos no contexto das rotações.

2.1.1 Rotação Passiva.

A rotação passiva pode ser mostrada na seguinte Figura 2.1:

Figura 2.1: Rotação passiva



Fonte: extraída de Lorentz symmetry violation. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 57-64, 2007.

Analisando a figura acima, pode-se escrever uma matriz de transformação do tipo $X'=PX$, onde P é matriz de rotação passiva:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Se essa transformação for infinitesimal, pode-se expandir os termos desses componentes e ser feito o uso apenas dos termos de primeira ordem:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta \phi \\ -\delta \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

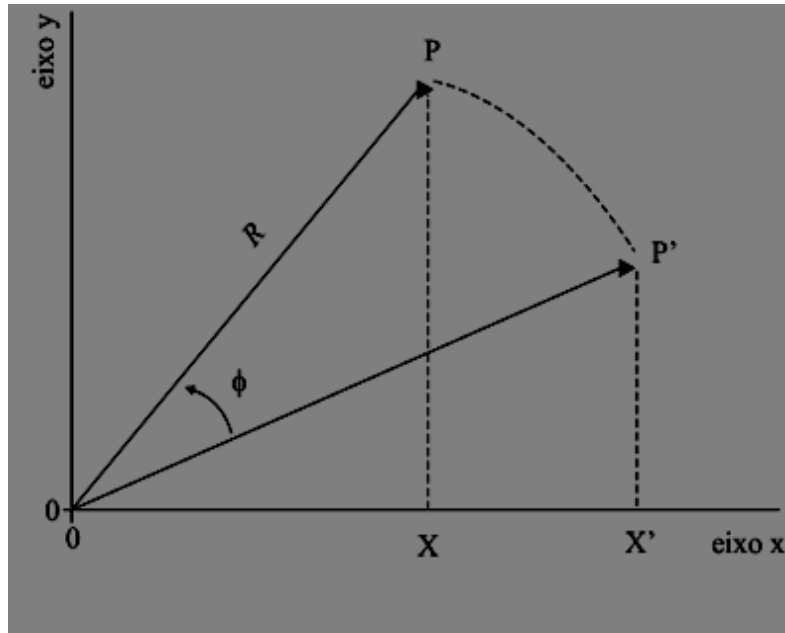
Chega-se, a partir da transformação acima, ao seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix} = \delta \phi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.1.2 Rotação Ativa

Esse tipo de rotação é mostrado da figura 1.3:

Figura 2.2: Rotação Ativa



Fonte: extraída de Lorentz symmetry violation. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 57-64, 2007.

A transformação matricial é dada por $X'=AX$, onde A é matriz de rotação ativa:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Como foi feito anteriormente, escreve-se os termos de primeira ordem para uma rotação infinitesimal. Pode-se escrever a transformação ativa da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix} = \delta \phi \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Quando se compara (2.7) com (2.9) conclui-se que os resultados são equivalentes. Por exemplo, se uma partícula sofre uma rotação passiva de um dado ângulo α ou ativa de um ângulo $-\alpha$ o resultado final será o mesmo, configurando uma simetria.

2.1.3 Definição de transformação de observador e de partícula.

Dois conceitos importantes surgem no cenário de simetria de Lorentz: transformações de partícula e transformações de observador.

Transformações de partícula nada mais são que as já definidas transformações ativas na presença de um campo de fundo. Já as transformações de observador são as transformações passivas na presença de um campo de fundo.

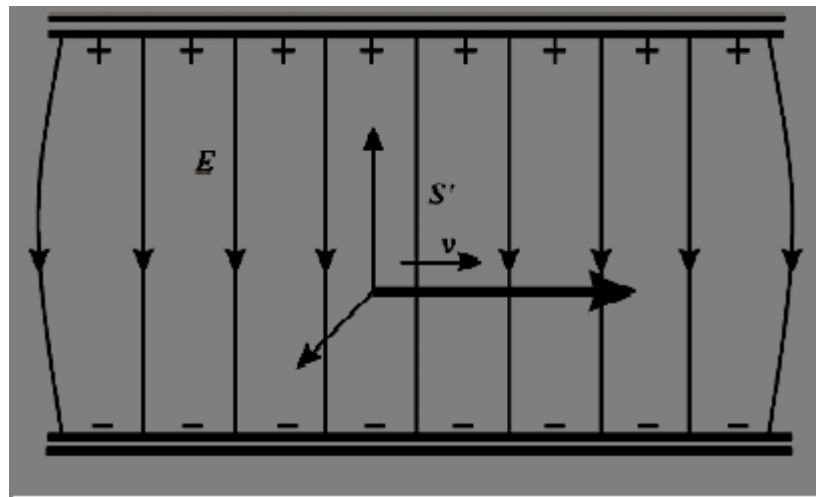
Deve-se mostrar que essas duas transformações, diferentemente da ativa/passiva, não fornecem resultados equivalentes. Essa quebra de simetria é originada pela presença desse campo de fundo.

Entende-se por campo de fundo qualquer campo (escalar ou tensorial) que tenha origem desconhecida.

Será tomado como exemplo uma partícula na região de um capacitor. Nesse caso o campo elétrico é o campo de fundo.

A figura 2.3 mostra dois referenciais inerciais em uma região de campo elétrico em um capacitor:

Figura 2.3: Dois sistemas de referência: S e S'.



Fonte: extraída de Lorentz symmetry violation. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 57-64, 2007.

O referencial S está em repouso em relação às placas do capacitor e S' está se distanciando de S a uma velocidade v perpendicular ao campo elétrico. Os campos elétrico e magnético sofrerão as seguintes transformações de um referencial ao outro [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{//} &= E; \\ \mathbf{B}'_{//} &= B; \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}); \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right)$$

Considerando o caso da Figura 2.3 como tendo campo magnético inicial nulo e componentes de campo apenas perpendiculares a \mathbf{v} temos então as seguintes alterações para os campos em uma transformação de observador:

$$\mathbf{E}' = \gamma \mathbf{E} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma \frac{-\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

Então em um referencial inercial que esteja se movendo a uma velocidade \mathbf{v} perpendicular ao campo a partícula sentirá, além do campo elétrico reduzido, um campo magnético. O surgimento desse novo campo eletromagnético é explicado pelas transformações tensoriais perante as transformações de observador. Esse comportamento já esperado é chamado de covariância de Lorentz, o que representa uma preservação da simetria de Lorentz.

Porém quando aplicamos um “boost” na partícula, o campo de fundo não sofre alteração, já que o campo é uniforme ao logo do capacitor. Nesse caso, do ponto de vista da transformação de partícula, o campo apresentará um comportamento escalar. A quebra de simetria de covariância de Lorentz consiste exatamente nesse comportamento escalar do campo de fundo do ponto de vista da transformação de partícula.

2.2 Outro exemplo de violação de Lorentz: Acoplamento de um quadrivetor externo a um tensor eletromagnético.

Outro exemplo de quebra de simetria de Lorentz também pode ser obtido pelo acoplamento de um quadrivetor externo de fundo ao tensor eletromagnético dual em (3+1) dimensões [9]. Nesse caso, o quadrivetor apresenta um comportamento de não-preservação da invariância de Lorentz.

Para visualização desse resultado, o termo de L_{ext} (termo externo) é acoplado a lagrangeana de densidade eletromagnética:

$$L_p = L_{\text{em}} + L_{\text{ext}} \quad (2.12)$$

onde o termo L_{ext} é dado por:

$$L_{\text{ext}} = -1/2(p_{\alpha} \cdot A_{\beta} \cdot F^{\alpha\beta}) \quad (2.13)$$

onde $F^{\alpha\beta}$ é o tensor eletromagnético dual, p_α é um quadrivetor externo não especificado e A_β é o quadripotencial eletromagnético. Quando a transformação de calibre ($\Delta A_\alpha = \partial_\alpha \chi$) é aplicada ao termo de L_{ext} , obtemos a seguinte variação dentro da transformação de calibre:

$$\Delta L_{\text{ext}} = 1/4[\chi F^{\alpha\beta}(\partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha)] \quad (2.14)$$

A invariância de calibre requer que a variação acima seja nula para qualquer χ . Uma forma de obter isso é estabelecendo que p_α seja uma constante. A ideia de um quadrivetor constante indica que \mathbf{p} aponta para uma direção privilegiada, assim os termos não-nulos espaciais e temporais desse quadrivetor violam respectivamente a invariância rotacional e do tipo 'boost'.

Para aplicar o termo de quadrivetor externo às equações de campo eletromagnético de Maxwell é feita a substituição do termo J^ν por $J^\nu + p_\mu F^{\mu\nu}/4\pi$. Dessa forma as equações de campo ficam:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho - \mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \\ -\partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} &= 4\pi\mathbf{J} - p_0 \mathbf{B} + \mathbf{p} \times \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se fizermos $\mathbf{p}=0$ obtem-se as equações clássicas de Maxwell o que indica que a adição do termo externo L_{ext} é um invariante de calibre. Porém quando escrevemos o tensor momento-energia para essa teoria obtemos:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/4 + p^\nu F^{\mu\alpha} A_\alpha/2 \quad (2.16)$$

Na presença de fontes de campos, tem-se a seguinte modificação:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 4\pi J_\alpha F^{\alpha\nu} \quad (2.17)$$

A adição do termo externo L_{ext} às equações de campo origina o último termo na equação (2.15), o que origina um tensor momento-energia não-simétrico:

$$\Theta^{\mu\nu} \neq \Theta^{\nu\mu} \quad (2.18)$$

Esse resultado indica uma variação de Lorentz.

Portanto, um campo eletromagnético acoplado a um quadrivetor externo e constante p_α , irá violar a invariância de Lorentz, porém manterá a invariância de calibre.

2.3 Violação de Lorentz no contexto da Teoria de Cordas.

Outra abordagem na qual a invariância de Lorentz é violada é no contexto da teoria de cordas.

Kostelecky e Samuel propuseram que a quebra espontânea de simetria ocorre na teoria de cordas e na teoria de campos com gravitação em 1989 [5]. Desde então, vários mecanismos de quebra de simetria vêm surgindo em teoria de cordas e em outras abordagens para gravitação quântica.

No caso da teoria de cordas, a invariância de Lorentz pode ser quebrada pela geração de tensores de Lorentz de massa quadrática negativa. Para analisar esse resultado, usa-se a teoria de campos de cordas covariante. Na teoria de campo de partícula uma simetria é espontaneamente quebrada quando as simetrias da Langrangeana não são respeitadas pelo estado fundamental da teoria. Esta situação surge se uma leve perturbação no vácuo é instável. No vácuo, todos os valores de campo esperado são nulos. Em um verdadeiro vácuo, alguns campos adquirem valores esperados não-nulos e então qualquer simetria no Lagrangeano que não deixa esses valores invariantes são simetrias espontaneamente quebradas [5].

Na teoria de campo no contexto de cordas a mesma ideia se aplica. Porém, nessa abordagem os campos que sofrem uma quebra espontânea de simetria são aqueles que não se transformam trivialmente dentro do grupo de Lorentz. Estes são campos tensoriais, os denotamos por $T^M(x)$ onde M indica os índices de vetores de Lorentz. ($M=\mu\nu\dots\rho$). Se qualquer termo quadrático de T adquirir coeficiente negativo no potencial, alguns componentes de T obtêm valor esperado não-nulo e o grupo de Lorentz sofre uma quebra espontânea de simetria, essa quebra surge naturalmente nessa abordagem [5].

No artigo supracitado de Kostelecky e Samuel, foi considerado o campo taquiônico ϕ como tendo valor esperado de vácuo negativo e não-nulo para que surja a quebra espontânea de simetria. O potencial nesse campo é dado por:

$$V(\phi) = -\phi^2/2 + \check{g} \phi^3/6 + 8 \check{g} A^\mu A_\mu \phi/27 + \dots \quad (2.19)$$

O sinal de menos na equação acima indica um vácuo perturbativo. O termo \check{g} é devido ao campo taquiônico. A massa M_a de A^μ é dado por:

$$M_a = 16 \check{g} \langle \phi \rangle / 27 \quad (2.20)$$

Para o caso $\langle \phi \rangle$ negativo, essa expressão é negativa e a quebra espontânea de simetria do grupo de Lorentz é quebrada.

Para definir $\langle \phi \rangle$, é necessário conhecer os coeficientes v_n quando expandimos o potencial em uma série de potência representada pelo somatório:

$$V(\phi) = \sum v_n \phi^n \quad (2.21)$$

Se $\check{g} > 0$ e $\langle \phi \rangle$ for finito, então valores negativos para $\langle \phi \rangle$ são mais esperados do que valores positivos, devido ao termo cúbico em (2.19). Então uma quebra espontânea de simetria é favorecida por esse termo.

A razão pela qual campos tensoriais podem adquirir acoplamentos quadráticos negativos no potencial é a presença de um acoplamento escalar-tensor-tensor:

$$V(\phi) = 1/2 \sum_{i,j} n_{i,j}^2 S^i S^j + \dots + 1/2 \sum_{ijk} g_{ijk} S T^i T^j T^k + (\text{TTT termos}) \quad (2.22)$$

onde S é um campo escalar e T um campo tensorial.

A possibilidade de adquirir um valor negativo é um efeito da teoria de cordas, o que não acontece em uma teoria de partículas renormalizável. As teorias de campos vetoriais e escalares em quatro dimensões são teorias de calibre e a invariância de calibre é necessária para remover alguns graus de liberdade não-físicos. Os termos tri lineares no Lagrangeano possuem a forma $A^{i\mu} \partial_\mu \Phi^i \Phi^k$ e eles não contribuem para o potencial estático devido à derivada. Embora essas teorias de gauge possuam também acoplamento escalar-escalar-vetor-vetor, tais termos conduzem apenas coeficientes quadráticos positivos para os campos vetoriais, não podendo, portanto, apresentarem uma quebra espontânea de simetria.

As restrições de renormalização e invariância de calibre desconsideram a quebra espontânea de simetria do grupo de Lorentz na teoria de campo, porém isso não acontece na teoria de campo no contexto das cordas, mesmo esta sendo invariante de calibre e bem-comportada em pequenas distâncias. A quebra de simetria de Lorentz pode surgir do acoplamento fixo tensor-tensor-escalar que é permitido porque cordas são objetos extensos contendo um número infinito de modos de partícula.

Conclui-se que a Lagrangeana para descrever a teoria de cordas abertas possui um acoplamento escalar-tensor-tensor que é responsável por originar a quebra de simetria de Lorentz.

Algumas observações sobre a Violação da Invariância de Lorentz precisam ser feitas. Primeiramente deve-se saber que positividade da energia, conservação de energia-momento, equação de Schrödinger e equação de Dirac como sendo, respectivamente não-relativística e relativística, continuam sendo válidas. Em segundo lugar deve ser observado que na quebra espontânea de simetria as teorias fundamentais continuam sendo invariantes dentro das transformações de observador. A presença de valores não-nulos para tensores no vácuo afeta apenas a invariância das propriedades dentro das transformações de partícula, como rotações

ou “boosts” de uma partícula localizada ou campo que deixam os valores de fundo inalterados, como foi visto no primeiro caso analisado nesse capítulo onde o campo elétrico tinha um comportamento escalar e constante do ponto de vista das transformações da carga localizada na região de um capacitor.

Em 1998, Colladay e Kostelecky estenderam a violação de Lorentz ao Modelo Padrão [1]. Nesse artigo, foram incluídos ao Modelo Padrão todas as possíveis violações de Lorentz, e conseqüentemente violações de CPT, surgindo então o Modelo Padrão Estendido. Nesse caso existe um conjunto de campos tensoriais causando um termo adicional nas equações do Modelo Padrão Estendido. Essa orientação coincide com a direção desses campos tensoriais. Devido ao acoplamento destes campos de fundo às equações, as interações entre as partículas e seus movimentos adquirem uma dependência direcional, como partículas carregadas se movimentando em um campo eletromagnético.

Nesse modelo as propriedades das partículas e suas interações podem depender da direção que elas estão se movendo (violação de rotação) e de quão rápido elas vão (violação de posição). É proposto que uma quebra espontânea de simetria de Lorentz pode ser obtida por meio de um vácuo instável não-nulo e todos os possíveis operadores da violação de Lorentz ao modelo padrão, originando então o Modelo Padrão Estendido.

CAPÍTULO 3: TEORIA PERTURBATIVA INDEPENDENTE DO TEMPO.

Esse capítulo se restringe ao estudo da teoria perturbativa degenerada no âmbito da mecânica quântica.

A Teoria Perturbativa consiste em aproximações que são feitas a fim de se analisar sistemas físicos complexos a partir de sistemas simples, isso pode ser feito por meio da separação de hamiltonianos que envolvem termos perturbativos dos hamiltonianos não-perturbados. As soluções obtidas podem ser não-exatas, mas geralmente conduzem a resultados satisfatórios para se analisar um sistema complicado de se estudar quando se tem apenas a equação de Schrödinger correspondente.

No caso do hidrogênio, soluções exatas são possíveis de se obter a partir da equação de Schrödinger, até mesmo analiticamente. Por esse motivo esse átomo é a principal escolha para se analisar os efeitos que as perturbações originam nos níveis de energia de um átomo, como por exemplo os provocados pelos campos magnético e elétrico externos, os conhecidos Efeito Zeeman e Efeito Stark, respectivamente.

Nesse capítulo é tratada apenas a teoria perturbativa independente do tempo do tipo degenerada, a qual acontece a estados quânticos distintos que compartilham da mesma energia. Porém, existe ainda as perturbações não-degeneradas, as quais consistem em sistemas físicos que para cada auto estado (função de onda que descreve um estado quântico) possuem energias diferentes, ou seja, estados diferentes não compartilham a mesma energia, exatamente o contrário da perturbação independente do tempo degenerada [10].

Inicialmente será feita uma revisão sobre degenerescência dupla, como ela afeta os níveis de energia e como se obter tais correções. Em seguida esses conceitos serão estendidos para a explicação da degenerescência de ordem superior.

3.1 Degenerescência dupla.

Suponha que temos as seguintes condições para dois estados quânticos, onde H^0 , ψ_a^0 , E^0 , ψ_b^0 referem-se aos estados não perturbados:

$$H^0\psi_a^0 = E^0\psi_a^0, \quad H^0\psi_b^0 = E^0\psi_b^0, \quad \langle\psi_a^0|\psi_b^0\rangle = 0 \quad (3.1)$$

As condições acima são as relações conhecidas da mecânica quântica: as duas primeiras são as equações de Schrödinger para os estados com auto funções ψ_a^0 e ψ_b^0 e a última é a relação de ortogonalidade das funções de onda normalizadas de estados distintos.

A função de onda ψ^0 pode ser escrita como uma combinação linear entre as duas funções ψ_a^0 e ψ_b^0 :

$$\psi^0 = \alpha\psi_a^0 + \beta\psi_b^0 \quad (3.2)$$

Para se chegar às correções de energia para uma degenerescência dupla, é necessário resolver a equação de Schrödinger:

$$H\psi = E\psi \quad (3.3)$$

onde $H = H^0 + \lambda H'$, com $\lambda H'$ sendo a perturbação no hamiltoniano.

Temos para a energia e a função de onda as relações:

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \lambda^3 E^3 + \dots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda \psi^1 + \lambda^2 \psi^2 + \lambda^3 \psi^3 + \dots \quad (3.4)$$

Substituindo (3.3) em (3.2) e usando $H = H^0 + \lambda H'$ chega-se ao resultado:

$$H^0 \psi^0 + \lambda(H' \psi^0 + H^0 \psi^1) + \dots = E^0 \psi^0 + \lambda(E^1 \psi^0 + E^0 \psi^1) + \dots \quad (3.5)$$

Mas pela primeira relação de (3.1) o primeiro termo do membro da esquerda e da direita se cancelam e para correções de primeira ordem é obtido:

$$H^0 \psi^1 + H' \psi^0 = E^0 \psi^1 + E^1 \psi^0 \quad (3.6)$$

Fazendo o produto interno de (3.5) com $\langle \psi_a^0 |$ obtém-se:

$$\alpha \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle + \beta \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = \alpha E^1 \quad (3.7)$$

Fazendo $W_{aa} = \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle$, $W_{ab} = \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle$, obtém-se uma relação mais compacta:

$$\alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1 \quad (3.8)$$

Agora, o produto interno entre (3.5) e $\langle \psi_b^0 |$ fornece:

$$\alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1 \quad (3.9)$$

É importante observar que os W são os elementos da matriz H' em função dos estados não-perturbados ψ_a^0 e ψ_b^0 . O produto entre (3.9) e W_{ab} e obtendo βW_{ab} de (3.8) fornece:

$$\alpha [W_{ab} W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0 \quad (3.10)$$

Para $\alpha \neq 0$, chega-se a equação quadrática que fornece as correções de primeira ordem para a energia:

$$(E^1)^2 - E^1(W_{aa} - W_{bb}) + (W_{aa} W_{bb} - W_{ab} W_{ba}) = 0 \quad (3.11)$$

Resolvendo a equação acima, chega-se às energias corrigidas de primeira ordem:

$$E^1 \pm = \frac{1}{2} \{ W_{aa} + W_{bb} \pm [(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2]^{1/2} \} \quad (3.12)$$

3.2 Degenerescência de ordem superior.

O tratamento feito para degenerescência de ordem dupla pode ser estendido para ordens superiores. Para isso é necessário tratar as equações anteriores na forma matricial, nessa situação, o problema se resume a resolver uma equação de autovalores e auto vetores onde as correções para a energia são os autovalores da matriz W . Para o caso de uma degenerescência dupla, as equações (3.8) e (3.9) na forma matricial ficam:

$$\begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

e os elementos da matriz W são obtidos pela relação $W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$.

A equação característica é dada por (3.11) e fornece as correções de primeira ordem para a energia.

Esse tratamento, como já foi dito, pode ser estendido para uma degenerescência de ordem n . Nesse caso, a matriz W é $n \times n$ e é necessário diagonalizá-la para se obter as correções de primeira ordem para a energia. Esse tratamento será feito no próximo capítulo para o caso de um átomo de hidrogênio com uma perturbação.

CAPÍTULO 4: RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL.

4.1 Definição.

Cohen e Glashow propuseram uma teoria da relatividade que preserva as usuais relações de dispersão energia-momento, embora não seja invariante dentro do grupo de Lorentz completo [2]. O grupo de Lorentz é um subgrupo do grupo $SO(1,3)$, que inclui, além das rotações do grupo $SO(3)$, os “boosts”, reflexão espacial e temporal. Cohen e Glashow concluíram que um subgrupo próprio do grupo de Lorentz pode levar às leis de conservação e os bem estudados efeitos da Relatividade Especial. Existem dois subgrupos que atendem a esses requisitos: $SIM(2)$ e $HOM(2)$ o qual é composto por geradores de “boost” K_z e os geradores de $T_1 = K_x + J_y$ e $T_2 = K_y + J_x$, os quais formam o grupo isomórfico ao grupo de translações no plano [1].

O grupo $SIM(2)$ é o $HOM(2)$ adicionado ao gerador J_z . A Teoria da Relatividade baseada nestes dois grupos é nomeada de VSR^2 . Essa é outra teoria que inclui a violação de Lorentz.

Embora construído com os mesmos geradores de Lorentz, o grupo $SIM(2)$ é um grupo com 4 parâmetros geradores, enquanto que o grupo de Lorentz tem 6 parâmetros geradores. Esta redução surge dos geradores T_1 e T_2 possuírem tanto geradores de “boost” quanto de rotação³.

Os geradores de $SIM(2)$ preservam não apenas a velocidade da luz, mas também o quadrivetor nulo $n_\mu = (1,0,0,1)$.

O principal resultado da VSR é a ausência de tensores invariantes dentro dos grupos $HOM(2)$ e $SIM(2)$.

Cohen e Glashow sugerem incluir um operador não-local para construir uma teoria de campo invariante em $SIM(2)$ [2]. Esse possível operador não-local invariante em $SIM(2)$ pode ser dado por $N_\mu = \frac{n_\mu}{n\partial}$.

² VSR refere-se ao termo em inglês para Relatividade Muito Especial o qual fica Very Special Relativity. Por questões de conveniência, ao longo desse texto será usado o termo em inglês abreviado para se referir a Relatividade Muito Especial.

³ T_1 e T_2 possuem geradores \mathbf{J} , responsáveis por gerar as rotações, e \mathbf{K} o qual é o grupo gerador de “boost”.

A VSR consiste na Relatividade Especial em um contexto onde a maioria das invariâncias de Lorentz permanece total ou parcialmente intactas. A Relatividade Especial admite o grupo de Poincaré como o grupo simétrico da natureza.

Foi visto no segundo capítulo desse trabalho as principais formas de quebra de simetria de Lorentz. Foi visto, por exemplo, que essa quebra pode ser obtida pela presença de um campo de fundo que resulta em alterações nas transformações no espaço-tempo do tipo “boost” e também foi visto que essa violação pode surgir a partir da adição de termo à Lagrangeana responsável por um valor esperado diferente de zero.

A invariância dentro do grupo $HOM(2)$ assegura que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores, segundo o famoso experimento de Michelson-Morley.

Se a simetria de carga-paridade fosse exata, implicaria na Relatividade Especial. Os efeitos da violação de carga-paridade são muito pequenos, por isso os desvios da SR pela VSR não são muito significativos, porém quando a violação de carga-paridade é significativa, o efeito da VSR torna-se mais significativo.

A VSR tem consequências radicais para a física dos neutrinos. Neutrinos agora são conhecidos por terem massa, um resultado que contraria o Modelo Padrão. O cientista Kajita em 1998 identificou que os neutrinos passam continuamente por um processo de “metamorfose”, oscilando entre suas três possíveis versões: elétron, tau, múon [4].

Muitos mecanismos têm sido desenvolvidos para solucionar a ausência de massa no neutrino. Dirac propôs que o número de léptons é conservado com os neutrinos adquirindo massa via acoplamento de Yukawa, conhecido como mecanismo de Dirac⁴. Outro mecanismo é o mecanismo de Majorana, onde o número de léptons é violado⁵.

Já na VSR o neutrino pode adquirir massa de forma natural. Porém, vale observar que a massa não-nula para o neutrino ainda não é garantida pela VSR, mas a presença dessa massa já pode indicar uma violação de Lorentz.

O Modelo Padrão precisa ser estendido para a fim de incorporar a massa dos neutrinos e matéria escura. O Modelo Padrão é o limite a baixas energias de uma teoria mais abrangente que pode incluir, na melhor das hipóteses, a gravitação.

⁴ Esse mecanismo consiste no surgimento de um campo escalar $\phi \neq 0$ onde ϕ é o valor esperado de fundo. No Modelo Padrão esse campo escalar diferente de zero é responsável pela massa dos férmions, sendo $\phi \neq 0$ uma origem para a quebra espontânea de simetria.

⁵ Majorana propôs que o neutrino é sua própria antipartícula. A massa resultaria de operadores de seis dimensões resultantes de interações não especificadas.

Uma forma de se obter uma extensão ao Modelo Padrão a baixas energias é adicionar um campo de fundo que alteraria a simetria de Lorentz. Geralmente tais propostas originam uma modificação na dispersão da luz.

Uma alternativa mais conservadora manteria os resultados essenciais da Relatividade Especial, como a conservação da velocidade da luz, mas originaria mudanças na simetria de rotações, por exemplo. Isso pode ser alcançado pela escolha de subgrupos de Lorentz que preservam a velocidade da luz invariante. Tais subgrupos que originam a VSR.

A VSR é baseada na hipótese que o grupo de simetria do espaço-tempo é menor que o grupo de Poincaré.

A seguir será visto, de forma sucinta, uma aplicação da VSR ao eletromagnetismo por meio de uma correção à Equação de Maxwell.

4.1.1 Equação de Maxwell e VSR.

Podemos aplicar a VSR às equações de Maxwell [11], chegamos então a equação modificada:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2n\partial} n^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1)$$

onde m é a massa escalar na VSR, $n\partial$ o termo não-local da VSR e n^μ é o vetor nulo $(1,0,0,1)$.

Na Relatividade Especial $m^2=0$ e obtemos a identidade de Bianchi⁶. Porém com o termo adicionado devido à VSR obtemos:

$$F_{\mu\nu} = D_{[\mu} A_{\nu]} \quad (4.2)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{m^2}{2n\partial} n_\mu \quad (4.3)$$

De acordo com as definições (4.2) e (4.3), as equações de Maxwell podem ser escritas como:

$$D^\mu = F_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

Esse resultado está de acordo com [12]

4.2 Aplicação da VSR ao átomo de hidrogênio.

Temos que a equação de Dirac para uma partícula livre de spin $\frac{-1}{2}$ e massa m é:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (4.5)$$

⁶ $\partial_{[a} F_{bc]} = 0$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac e considerou-se $\hbar = c = 1$.

Quando aplicamos o operador diferencial não-local $N_\mu = \frac{n_\mu}{n \cdot \partial}$. Com direção privilegiada nula $n^\mu = (1,0,0,1)$ e a constante λ que mede a intensidade dos efeitos da VSR, os quais devem ser muito pequenos, obtemos a equação [1]:

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{\lambda}{2} N_\mu) - m] \psi(x) = 0 \quad (4.6)$$

Levando em conta que $N \cdot N = 0$ e $N \cdot \partial = 1$, o spinor de Dirac⁷ satisfaz a equação de Klein-Gordon⁸ com uma massa modificada:

$$[\partial_\mu \partial^\mu + M^2] = 0 \quad (4.7)$$

onde $M^2 = m^2 + \lambda$.

Agora considere uma partícula de Dirac na presença de um campo eletromagnético externo. A ação para um campo interagindo com uma partícula de Dirac e o termo VSR é [13], [14]:

$$S = \int d^4x \{ \psi^*(x) [i\gamma^\mu (D_\mu + \frac{\lambda}{2} \frac{n_\mu}{n \cdot D}) - m] \psi(x) \} \quad (4.8)$$

onde:

$$D_\mu = \partial_\mu \psi(x) + ieA_\mu \psi(x) - ie \frac{\lambda}{2} n_\mu \left(\frac{1}{n \cdot \partial^2} n \cdot A \right) \psi(x) \quad (4.9)$$

As transformações realizadas são [13], [14]:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) + \frac{\lambda}{2} (N_\mu \Lambda)(x) \\ D_\mu \psi &\rightarrow (e^{-ie\Lambda(x)}) D_\mu \psi \\ \psi(x) &\rightarrow e^{-ie\Lambda(x)} \psi(x) \end{aligned} \quad (4.10)$$

com $\Lambda(x)$ sendo uma função arbitrária de x .

A equação de Dirac que corresponde a S é dada por:

$$[i\gamma^\mu (D_\mu + \frac{\lambda}{2} \frac{n_\mu}{n \cdot D}) - m] \psi(x) = 0 \quad (4.11)$$

Essa será a equação que será usada para analisar os efeitos da VSR no átomo de hidrogênio.

⁷ Spinor de Dirac: Em teoria quântica de campos, tem-se que o spinor de Dirac está localizado na solução de onda plana para a equação de Dirac $|\psi\rangle = \omega_p \cdot e^{-ip \cdot t}$ onde ω_p é o spinor de Dirac relacionado à onda plana com vetor de onda \mathbf{p} .

$$\omega = \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \phi \end{bmatrix}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli.

⁸ Equação de Klein-Gordon: $[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] = 0$.

É necessário, primeiramente, obter o hamiltoniano não-relativístico e encontrar suas correções no regime de baixas energias provocadas pela presença do termo da VSR. Para isso, precisa-se escrever ψ em termos de pequenos χ e grandes ϕ :

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

e assumindo as matrizes γ de Dirac, é possível mostrar que (4.11) leva a duas equações acopladas para χ e ϕ :

$$[E - eA_0 - v_0 - m] \phi - [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \mathbf{v})] \chi \quad (4.13)$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \mathbf{v})] \phi - [E - eA_0 - v_0 - m] \chi \quad (4.14)$$

onde

$$v_0 \equiv \frac{\lambda}{2} \left[e \left(\frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) \right) + \frac{1}{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})} \right] \quad (4.15)$$

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\lambda}{2} \left[e \left(\frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) \right) + \frac{1}{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})} \right] \mathbf{n} \quad (4.16)$$

com $\mathbf{n} = (0,0,1)$ para representar os operadores diferenciais da VSR não-locais. Os termos não-locais podem ser representados pela seguinte identidade:

$$\frac{1}{\mathbf{n} \cdot \partial} = \int_0^\infty da e^{-a\mathbf{n} \cdot \partial} \quad (4.17)$$

A relação acima possibilita passar de uma equação local para uma não-local. O limite não-relativístico para o Hamiltoniano é obtido a fim de que os efeitos relativísticos (como o spin) sejam mantidos quando o comportamento no limite de baixas energias é analisado. A energia E , nesse regime, é dado por $E = m + H$, com H sendo o hamiltoniano no limite não-relativístico. No caso analisado aqui, $m \gg p_z$ e $m \gg eA_0$ e então, finalmente, uma aproximação local para os operadores diferenciais da VSR é obtida:

$$v_0 \simeq \frac{\lambda e}{2m^2} (A_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\lambda}{2m} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{v} \simeq \left[\frac{\lambda e}{2m^2} (A_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\lambda}{2m} \right] \mathbf{n} \quad (4.19)$$

A partir de (4.13) e (4.14) obtém-se, no regime de baixas energias:

$$[(H - eA_0 - v_0)] \phi = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi}) \phi \quad (4.20)$$

onde $\boldsymbol{\Pi} \equiv \mathbf{p} - e\mathbf{A} - \mathbf{v}$ é o momento canônico.

Com essas aproximações, de acordo com [12], chega-se ao hamiltoniano da partícula no contexto não-relativístico:

$$H = \left\{ \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eA_0 \right] + \frac{1}{2m} \mathbf{v} + v_0 - \frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{m} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - \frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \right\} \quad (4.21)$$

Em (4.21) o termo entre parênteses é o hamiltoniano de Pauli corrigido pelos termos da VSR.

Os operadores (4.18) e (4.19) representam as componentes de um quadrivetor constante apenas no caso de uma partícula livre, porém, na presença de um campo eletromagnético externo, eles tornam-se um campo de fundo fixo dependente da posição da partícula. Por esse comportamento, VSR modifica os níveis de energia do átomo de hidrogênio.

Assumindo que os efeitos da VSR sejam pequenos e o interesse reside em níveis de baixa energia locais da equação de Dirac, a interação com a VSR é tratada como uma perturbação e a simetria esférica do átomo de hidrogênio dentro de um potencial Coulombiano é mantida.

Neste regime, o campo Coulombiano sem perturbação é $A^\mu = (\phi, \mathbf{0})$ com

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{-e}{r} \quad (4.22)$$

Temos então que o hamiltoniano nesse regime é:

$$H = H_0 + H_{\text{vsr}} + \mathcal{O}(v^2) \quad (4.23)$$

onde

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{-e^2}{r} \quad (4.24)$$

$$H_{\text{vsr}} = -\frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - \frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) v_0 \quad (4.25)$$

onde, de acordo com (4.18) e (4.19) e levando em consideração que $\mathbf{n} = (0,0,1)$ e $A^\mu = (\phi, \mathbf{0})$, temos:

$$v_0 = \frac{\lambda}{2m} \left(1 - \frac{e^2}{mr}\right) \quad ; \quad \mathbf{v} = v_0 \quad (4.26)$$

Para analisar as correções dos níveis de energia, H_{vsr} é tratado como uma perturbação no contexto da mecânica quântica.

Pode-se escrever a equação de auto estado para H_0 :

$$H_0 \psi_{n,l,s,m_l,m_s} = E_n \psi_{n,l,s,m_l,m_s} \quad (4.27)$$

Com $E_n = \frac{-e^2}{2n^2 a_0}$ e sendo que $a_0 = 1/m_e^2$ é o raio de Borh. Temos também que

$$\psi_{n,l,s,m_l,m_s} = \psi_{n,l,s,m_l}(r, \theta, \varphi) \chi_{s,m_s} \quad (4.28)$$

Um elétron do átomo de hidrogênio tem sua função de onda dada por:

$$\psi_{n,l,s,m_l}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.29)$$

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{n a_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/n a_0} \left(\frac{2r}{n a_0}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n a_0}\right) \quad (4.30)$$

Com $L_p^q(x)$ sendo os polinômios de Laguerre e $Y_l^m(\theta, \varphi)$ são os harmônicos esféricos [8]

Os bi-spinores $\chi_{s m_s}$ são representados por:

$$\chi_{s = 1/2, m_s = +1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\chi_{s = 1/2, m_s = -1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Como E_n depende apenas do número quântico n , os estados de energia não-perturbados são degenerados⁹.

Levando em conta a existência de spin, a degenerescência dos níveis de energia é $2n^2$.

Será analisado aqui apenas as correções para o nível $n=2$. Essa escolha não tem nenhum motivo em especial. O principal objetivo é calcular os autovalores da matriz 8×8 de ΔE_{vsr} , esses autovalores representam a correção devido a H_{vsr} nos subespaços $2s$ e $2p$.

O cálculo explícito para essa correção é:

$$\begin{aligned} (\Delta E_{vsr})_{aa'} = & \frac{\lambda}{m} \int d^3r [\psi_{2,a}^\dagger(r, \theta, \varphi) \left\{ \frac{ie^2}{2m^2} \frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{i}{m} \left(1 - \frac{e^2}{m r}\right) \left(\cos\theta \frac{1}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{1}{\partial\theta} \right) + \right. \\ & \left. \frac{e^2}{2m^2} \left(\frac{\cos\varphi \sin\theta}{r^2} \sigma_y - \frac{\cos\theta \sin\varphi}{r^2} \sigma_x \right) + \left(1 - \frac{e^2}{m r}\right) \psi_{2,a'}(r, \theta, \varphi) \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde r, θ, φ são as coordenadas esféricas e a são os índices dos números quânticos (l, m_l, m_s) que são degenerados.

Depois de uma série de cálculos [15], encontra-se que apenas o primeiro e o segundo termo representam elementos não-nulos da matriz ΔE_{vsr} . Estes termos representam as correções $-\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}}{m}$ e v_o , respectivamente.

Para elementos fora da diagonal é obtido:

$$+ \frac{i\lambda e^2}{48m^3 a_0^2} \quad (4.34)$$

E os elementos da diagonal são:

$$\frac{\lambda}{2m} \left(1 - \frac{e^2}{4m a_0}\right) \quad (4.35)$$

Em seguida, diagonaliza-se a matriz ΔE_{vsr} resolvendo a equação secular. Isso fornece as correções de primeira ordem para a energia e os auto estados de ordem zero. Esses resultados estão na Tabela 1 extraída de [15]:

⁹ Estados não-degenerados: aqueles estados que não compartilham as mesmas auto funções.

Tabela 1 - Correção para os níveis de energia do átomo de hidrogênio.

Table 1
First-order corrected energies and their respective zero-order eigenfunctions.

Eigenstates		Corrections
$\Psi_{n=2,l=1,m_l=\pm 1,m_s=\pm \frac{1}{2}}$	\longleftrightarrow	$\frac{\lambda}{2m_e} \left(1 - \frac{e^2}{4a_0 m_e}\right)$
$\bar{\Psi}_{+,-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{n=2,l=1,m_l=0,m_s=\pm \frac{1}{2}} + i\Psi_{n=2,l=0,m_l=0,m_s=\pm \frac{1}{2}})$	\longleftrightarrow	$\frac{\lambda}{2m_e} \left(1 - \frac{e^2}{4a_0 m_e}\right) - \frac{\lambda e^2}{48c_0^2 m_e^3}$
$\Psi_{+,-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{n=2,l=1,m_l=0,m_s=\pm \frac{1}{2}} - i\Psi_{n=2,l=0,m_l=0,m_s=\pm \frac{1}{2}})$	\longleftrightarrow	$\frac{\lambda}{2m_e} \left(1 - \frac{e^2}{4a_0 m_e}\right) + \frac{\lambda e^2}{48c_0^2 m_e^3}$

Fonte: extraída de Dirac equation in very special relativity for hydrogen atom. **Physics Letters B**, v. 738, p. 341-345, 2014 [12]

Conclui-se, portanto, que Hvsr transforma a ócupla degenerescência em uma degenerescência quadrupla do estado $\psi_{2,1,m_l = \pm 1, m_s = \pm 1/2}$ e uma dupla degenerescência dos dois últimos estados de onda indicados na Tabela1. Isso evidencia que a degenerescência dos níveis 2s e 2p é parcialmente removida pela presença de Hvsr, porém a degenerescência do spin é inalterada, já que foram feitas aproximações não-relativísticas.

De acordo com os resultados acima, o nível 2p, $m_l = 1$ é alterado por uma quantidade igual a $\frac{\lambda}{2m} \left(1 - \frac{e^2}{4m a_0}\right)$ que é numericamente igual a $\approx \lambda 9,78 \cdot 10^{-7} (\text{eV})^{-1}$, para esse resultado foi admitido que $a_0 \approx 0,0529$ nm e levando em conta que experimentos de espectroscopia conseguem fornecer medidas de mudanças de 1 parte em 10^{10} no espectro, a correção de energia em (4.33) só será indetectável se, de acordo com [referência ca], se o parâmetro de VSR estiver dentro do limite: $\lambda \cdot 9,78 \cdot 10^{-7} (\text{eV})^{-1} < 10^{-10} \text{ eV}$ o que leva ao limite superior de $|\lambda| < 1,02 \cdot 10^{-4} (\text{eV})^2$.

Esse mesmo resultado para λ foi encontrado por Cohen e Glashow baseado em medidas da massa do neutrino [2], [14]. Isso mostra que a física da matéria condensada pode ser um bom cenário para se analisar os efeitos da VSR.

CAPÍTULO 5: CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Por meio deste trabalho, foi visto que a busca por uma teoria unificadora na física pode levar em conta as violações de simetria de Lorentz, que quando aplicadas ao Modelo Padrão originam o Modelo Padrão Estendido, onde o neutrino de forma natural adquire massa, e quando aplicadas à Relatividade Especial originam a chamada Relatividade Muito Especial, a qual não contraria a primeira, mas indica que a Relatividade Especial proposta por Einstein pode ser uma parte dessa teoria mais unificada.

Na primeira parte desse trabalho, foram apresentadas algumas formas de violação de Lorentz. Inicialmente através de um campo de fundo o qual do ponto de vista de transformações do tipo “boost” aplicadas a uma partícula adquiriram comportamento escalar, diferente do tipo de comportamento que esse mesmo campo adquire do ponto de vista de transformações de observador e isso implica em uma quebra espontânea de simetria, ou seja, uma anisotropia no espaço.

Na segunda parte foi vista a importância dos métodos perturbativos no contexto da mecânica quântica. Essa parte foi um preparo para a terceira parte deste trabalho, que apresentou a Relatividade Muito Especial, a qual foi tratada como uma perturbação no hamiltoniano que descreve o átomo de hidrogênio. Por meio da teoria perturbativa, foi possível obter as correções dos níveis de energia do hidrogênio. Concluiu-se que essa perturbação reduz parcialmente a degenerescência óctupla do nível $2s$ e $2p$ em uma degenerescência quádrupla e duas degenerescências duplas, ou seja, a Relatividade Muito Especial reduz parcialmente a degenerescência dos níveis quânticos, porém a degenerescência de spin foi mantida. Essas modificações são exatamente a exemplificação da quebra de simetria de Lorentz que existe na Relatividade Muito Especial.

Também foi possível obter uma medida para o parâmetro de intensidade de perturbação da Relatividade Muito Especial no átomo de hidrogênio e o valor encontrado foi o mesmo obtido por [14].

Como perspectiva, pretende-se dar continuidade aos estudos de Relatividade Muito Especial em outros sistemas físicos. O principal objetivo é analisar os efeitos da VSR no espectro de energia do oscilador de Dirac.

REFERÊNCIAS

- [1] COLLADAY, Don; KOSTELECKÝ, V. Alan. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- [2] COHEN, Andrew G.; GLASHOW, Sheldon L. Very special relativity. **arXiv preprint hep-ph/0601236**, 2006.
- [3] COWIE, Lennox L.; SONGAILA, Antoinette. Astrophysics: The inconstant constant?. **Nature**, v. 428, n. 6979, p. 132-133, 2004.
- [4] FUKUDA, Y. et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 8, p. 1562, 1998.
- [5] KOSTELECKÝ, V. Alan; SAMUEL, Stuart. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Physical Review D**, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- [6] BELICH, H. et al. Lorentz symmetry violation. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 57-64, 2007.
- [7] KOSTELECKY, Alan. The Search for Relativity Violations. **Scientific American**, p. 93-101, 2004.
- [8] FEYNMAN, Richard Phillips; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Matthew. **The Feynman Lectures on Physics: Definitive Edition**. Pearson Addison-Wesley.
- [9] CARROLL, Sean M.; FIELD, George B.; JACKIW, Roman. Limits on a Lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics. **Physical Review D**, v. 41, n. 4, p. 1231, 1990.
- [10] GRIFFITHS, David J. **Mecânica Quântica**. 2ed. São Paulo: Pearson Hall, 2011. p. 182-195.
- [11] ALFARO, Jorge; RIVELLES, Victor O. Very special relativity and Lorentz violating theories. **Physics Letters B**, v. 734, p. 239-244, 2014.
- [12] CHEON, Sangmo; LEE, Choonkyu; LEE, Seung Jae. SIM (2)-invariant modifications of electrodynamic theory. **Physics Letters B**, v. 679, n. 1, p. 73-76, 2009.
- [13] ALFARO, Jorge; RIVELLES, Victor O. Non-Abelian fields in very special relativity. **Physical Review D**, v. 88, n. 8, p. 085023, 2013.
- [14] DUNN, Alan; MEHEN, Thomas. Implications of $SU(2)_L \times U(1)$ Symmetry for SIM (2) Invariant Neutrino Masses. **arXiv preprint hep-ph/0610202**, 2006.
- [15] MALUF, R. V. et al. Dirac equation in very special relativity for hydrogen atom. **Physics Letters B**, v. 738, p. 341-345, 2014.