



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

WILLIAM MOURA MESQUITA

PERCOLAÇÃO EM REDES REGULARES E ALEATÓRIAS

FORTALEZA

2014

WILLIAM MOURA MESQUITA

**PERCOLAÇÃO EM REDES REGULARES
E ALEATÓRIAS**

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de
Física, da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. André Auto Moreira

FORTALEZA

2014

WILLIAM MOURA MESQUITA

PERCOLAÇÃO EM REDES REGULARES E ALEATÓRIAS

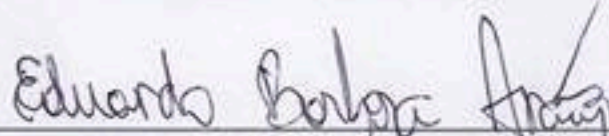
Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de
Física, da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 04/12/2014

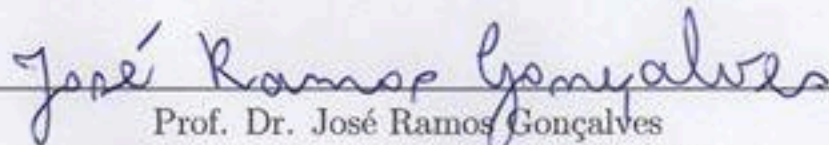
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. André Auto Moreira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Me. Eduardo Barbosa Araújo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
(IFCE)



Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

M546p Mesquita, William Moura
Percolação em redes regulares e aleatórias / William Moura Mesquita. – Fortaleza, 2014.
52 f. : il. algumas color. enc.; 30 cm.

Monografia (Graduação em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Departamento de Física, Curso de Bacharelado em Física, Fortaleza, 2014.
Orientação: Prof. Dr. André Auto Moreira.

1. Percolação (Física Estatística). 2. Redes complexas. 3. Criticalidade. I. Moreira, André
Auto. II. Título.

CDD 530.13

*Aos Meus Pais
e aos meus irmãos
pelo apoio total.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer:

Principalmente ao meu pai, mãe e irmãos que me deram total apoio e me deram condições de estudar o que gosto.

Ao professores Dr. André Auto Moreira e Dr. José Soares de Andrade Junior pela atenciosa orientação.

Ao Dr. Saulo Reis e ao Me. Eduardo Barbosa Araújo pela prestativa supervisão durante periodos da minha formação.

Ao Dr. Saulo Reis e ao Me. Rilder Pires pela ajuda na árdua tarefa de administrar o laboratório dos bolsistas.

Aos grandes professores que tive durante minha graduação: Prof. Dr. Andrey Chaves, Prof. José Afonso, Prof. Dr. José Ramos, Prof. Dr. José Soares, Prof. Dr. Wandemberg Paiva e Prof. Dr. Josué Mendes.

Aos colegas que me ajudaram na minha entrada na física computacional: Dr. Saulo Reis e Me. Rilder Pires.

Aos colegas de curso, em especial aos que compartilharam madrugadas estudando juntos: João Paulo Nogueira, Gabriel Oliveira, Joel Cerqueira, Gustavo Barbosa e Diego Félix.

Aos colegas e amigos que apoiaram em momentos difíceis e felizes dentre os quais cito: Laura Barth, Lucas Miranda, Daniel Miranda, Daniel Pais, Emanuelle Meneses e Gustavo Barbosa.

A todos grandes amigos, dentro e fora da universidade.

Aos funcionários do Departamento de Física da UFC.

Ao Reginaldo pelo café que possibilitou a conclusão do curso.

Ao Departamento de Física por ter criado e mantido a sala computacional dos bolsistas que já ajudou centenas de estudantes.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesse trabalho, desenvolveu-se um estudo sobre propriedades da teoria da percolação em redes regulares, obtendo-se expoentes críticos de forma analítica e demonstrando-se dois exemplos através de simulações para a conferência dos resultados.

Também foi analisada a percolação em um grafo aleatório onde foi introduzido o formalismo de funções geradoras desenvolvido por Newman e colaboradores. Foi realizado um exemplo de simulação para a conferência do formalismo.

Palavras-chave: Percolação, Redes Complexas, Criticalidade.

ABSTRACT

In this work, we developed a study on the theory of percolation properties in regular lattices, obtaining critical exponents analytically and demonstrating two examples through simulations for the confirmation of the results. We also analyzed percolation in random graph where was introduced the formalism of generating functions developed by Newman et al.

A simulation was performed as an example for the validity of the formalism

Keywords: Percolation. Complex Network. Criticality. . .

LISTA DE FIGURAS

- 1 Exemplo de uma rede. Os circulos são nós e as linhas ligações entre esses nós. p. 15
- 2 Exemplo de uma percolação de ligação e de uma percolação de sítio, ambas as redes consideradas são quadradas. p. 18
- 3 Rede de percolação de tamanho $L = 512$, na probabilidade crítica ($p_c = 0.59275$). As cores indicam o tamanho dos agregados, em ordem crescente: cinza, marrom, roxo, azul, laranja, preto, vermelho (agregado percolante). p. 20
- 4 Probabilidade de um sítio pertencer ao maior agregado p_s como função da probabilidade de ocupação p . Foi usado dois tamanhos de rede: $L = 256$ e $L = 4096$ e foram feitas pelo menos 10 000 interações para cada probabilidade. A linha vertical tracejada indica o valor de $p_c = 0.59275$. p. 27
- 5 Gráfico do tamanho do maior agregado como função do tamanho da rede. O ajuste linear foi feito somente para os últimos 4 pontos ($L = 512, 1024, 2048$ e 4096), onde fica evidenciado o efeito do tamanho finito. A linha sólida é o ajuste linear para a função $S_{max} = A + B \cdot \ln(L)$, com $A = 64.014$ e $B = 26.426$. com probabilidade de ocupação $p = 0.4$ p. 29
- 6 Gráfico do tamanho do maior agregado S_{max} como função da dimensão linear L da rede quadrada. A linha sólida é o ajuste linear da função $S_{max} = AL^{D_f}$, com $A = 0.46023$ e exponte $D_f = 1.89$. Com probabilidade de ocupação $p = 0.59275$ p. 30
- 7 Gráfico do tamanho do maior agregado S_{max} como função do tamanho da rede L . A linha sólida é o ajuste linear da função $S_{max} = A \cdot L^d$, com $A = 0.79796$ e exponte $d = 2$. Com probabilidade de ocupação $p = 0.8$. p. 31

8	Gráfico da distribuição dos tamanhos dos agregados para uma rede de tamanho $L = 4096$ e com $p = p_c$. Obtivemos que a distribuição em sua parte intermediária forma uma lei de potência com expoente -2.05 , foram feitas 10 000 realizações. N_s é a probabilidade de escolhermos aleatoriamente agregados de tamanho s na rede	p. 32
9	Representação da lei de consistência. A probabilidade de cada componente no lado esquerdo pode ser representada como a soma das probabilidades de ter só 1 vértice de ter 1 vértice ligado para outra componente de ter 1 vértice ligado para duas componentes e assim em diante. A forma fechada se encontra na equação 3.21.	p. 38
10	Gráfico do tamanho do maior agregado S_{max} dividido pelo tamanho da rede pela conectividade média. Foram feitas 1 000 realizações e a malha mede 100 000 000 nós	p. 44
11	Gráfico da distribuição de probabilidades de conectividades. Foram feitas 1 000 realizações e a malha mede 100 000 nós. No caso do gráfico $z = 20$.	p. 45
12	Percolação de sítio em rede quadrada	p. 48
13	Percolação de ligação em rede quadrada	p. 48
14	Percolação de sítio em rede triangular	p. 49
15	Percolação de ligação em rede triangular	p. 49
16	Percolação de sítio em rede hexagonal	p. 50
17	Percolação de ligação em rede hexagonal	p. 50

LISTA DE SÍMBOLOS

N	Número total de Sítios em uma rede
L	Número total de Sítios em um lado da rede
l	Distância entre dois sítios aleatórios numa rede
p	Probabilidade de ocupação
p_k	Probabilidade de um nó ter k vizinhos
p_c	Probabilidade crítica de ocupação
z	Conectividade média de cada nó
k	Número de ligações de um dado nó
$N_s(p)$	Quantidade média de agregados de tamanho s
$n_s(p)$	Distribuição do tamanho dos agregados
w_s	Probabilidade de um sítio ou ligação fazer parte de um agregado de tamanho s
$S(p)$	Tamanho médio dos agregados
$P(p)$	Fração de sítios pertencentes ao maior agregado
R_s	Raio de giração
ξ	Função correlação
d_f	Dimensão fractal do agregado percolante em $p = p_c$
d	Dimensão topológica
τ	Expoente de Fischer
β	Expoente crítico β
γ	Expoente crítico γ
σ	Expoente crítico σ
ν	Expoente crítico ν
S_{max}	Tamanho do maior agregado
$G_0(x)$	função geradora da distribuição do número de primeiro vizinhos de um nó aleatório
$G_1(x)$	função geradora da distribuição do número de outras ligações de um nó encontrado seguindo uma ligação

$H_0(x)$	função geradora da distribuição do tamanho de um agregado de um nó aleatório
$H_1(x)$	função geradora da distribuição do tamanho da componente de um cluster que pertence a um nó encontrado seguindo uma ligação
S	fração da rede pertencente ao agregado percolante
$G^{(m)}$	função geradora da distribuição do número de m -ésimos vizinhos de um nó aleatório
z_m	número médio dos m -ésimos vizinhos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 14
1.1	Visão geral	p. 14
1.2	Redes	p. 16
1.3	Redes Aleatórias	p. 16
1.4	Percolação	p. 17
1.5	Expoentes críticos	p. 21
2	PERCOLAÇÃO DE SÍTIO EM UMA REDE QUADRADA	p. 26
2.1	Estudo do comportamento do maior agregado variando a probabilidade des ocupação p	p. 26
2.2	Estudo do comportamento do maior agregado variando o tamanho da rede L	p. 28
2.2.1	Caso $p < p_c$	p. 28
2.2.2	Caso $p = p_c$	p. 28
2.2.3	Caso $p > p_c$	p. 31
2.3	Distribuição do tamanho dos agregados na situação $p = p_c$	p. 32
3	PERCOLAÇÃO NA REDE ERDOS-RÉNYI	p. 33
3.1	Introdução	p. 33
3.2	Funções geradoras	p. 33
3.2.1	Desenvolvimento	p. 33
3.2.2	Aplicação do formalismo	p. 38
3.3	Resultados	p. 43

4 CONCLUSÃO	p. 46
Apêndice A	p. 47
REFERÊNCIAS	p. 51

1 INTRODUÇÃO

1.1 Visão geral

Vivemos em um mundo conectado. Globalizado. A humanidade está sempre conectada através dos smartphones. Nunca a internet teve tanta importância. O que é a Internet senão uma rede de computadores conectados. Só isso já mostraria a importância do estudo de redes.

Porém, temos outros exemplos. Quando pegamos um ônibus, o conjunto de todas as linhas e pontos de ônibus forma uma rede. Simplesmente em estarmos vivos pertencemos a uma rede alimentar. Dentre outros exemplos, cito a rede de comunicações, rede de citações e a rede elétrica.[1]

De forma mais objetiva, as redes são grafos e redes complexas são grafos com características topológicas não triviais. Ou seja, os padrões de conexão não são puramente aleatórios nem puramente regulares. Segue um exemplo de uma rede (Figura 1).

Logo, surge a importância da robustez, ou seja, de quão difícil é desmontar a rede e torna-la inutilizável. Ou, analisando de outro modo. Quão fácil é fazer a rede ter uma conexão global a partir de um ponto desconectado [2].

Para esse estudo a teoria da percolação, que será detalhadamente explicada mais a frente, é de fundamental importância [2].

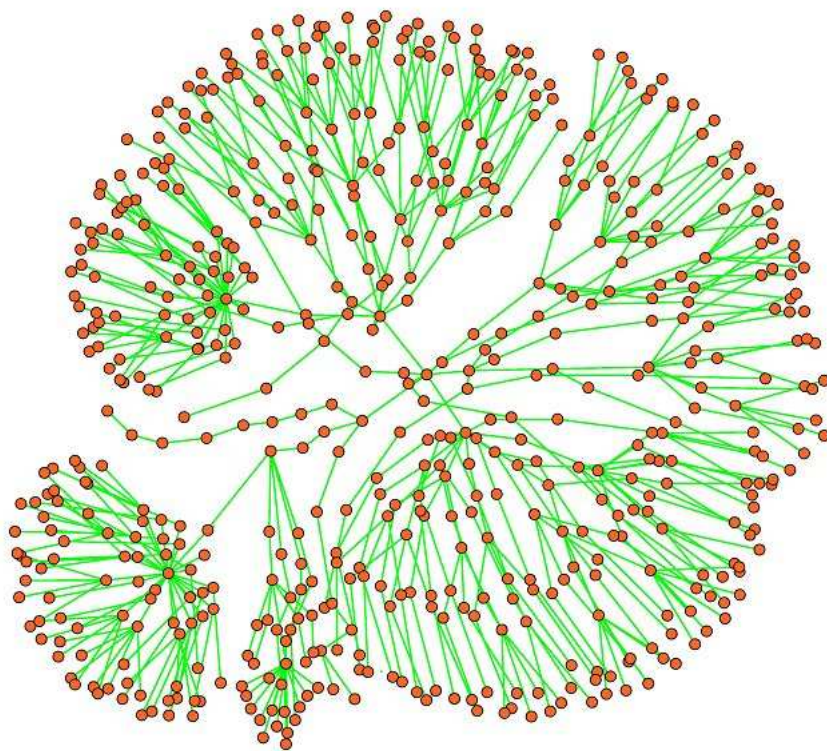


Figura 1: Exemplo de uma rede. Os círculos são nós e as linhas ligações entre esses nós.
Fonte: pil.phys.uniroma1.it

1.2 Redes

Uma definição simples e bem geral é que uma rede (grafo) é um conjunto de sítios(nós) conectados via ligações. Existem várias características que a nossa rede pode ou não ter, por exemplo[1]:

- Rede orientada: As ligações tem uma orientação. Um exemplo seria a rede de tráfego aéreo.
- Rede com peso: As ligações tem um número associado(peso). Um exemplo seria rede de transações econômicas (o peso seria o preço).
- Rede regular: É uma rede que cada sítio tem o mesmo número de vizinhos (sítios conectados).
- Rede Aleatória: É montada através de processos estocásticos e deve ser examinada do ponto de vista de um conjunto de amostras.
- Rede Real: É montada através da coleta de dados reais.

Algumas grandezas importantes no estudo de redes são a conectividade média z que nos diz o quão conectada a rede é, a probabilidade p_k que é a probabilidade de um certo nó ter k ligações e a quantidade l que é a distância média de 2 nós quaisquer escolhidos aleatoriamente.

1.3 Redes Aleatórias

Temos a rede de Erdos-Rényi que é uma rede aleatória cuja a distribuição da conectividade segue a distribuição de Poisson. Seria o exemplo mais simples de rede aleatória. Ela é formada colocando-se as ligações, uma por uma de forma uniformemente aleatória. Essa será a rede de estudo nesse trabalho.

Irei definir dois tipos de características que redes complexas podem ter, elas são bastante importantes para estudo das redes reais.

A **rede livre de escala** é uma rede que segue a seguinte distribuição para p_k [1].

$$p_k \sim k^{-\gamma} \quad (1.1)$$

Uma propriedade importante das redes livre de escala é a presença de hubs com uma conectividade altíssima. Elas costumam ser bem resistentes a remoção de nós aleatórios, porém ataques seletivos aos hubs podem derrubar esse tipo de rede com alguma facilidade[2].

Exemplos de redes livres de escala são vastos, redes de computadores, sociais e biológicas costumam tender a ser desse tipo[3]. Barabási et al criou um modelo com mecanismo de criação de redes livres de escala. É o modelo do rico fica mais rico. onde quem tem mais ligações tem mais probabilidade de receber mais uma[4] Esse modelo serve para descrever uma grande gama das redes livres de escala reais.

outra rede é a **Rede de pequeno mundo** que é uma rede aonde a distância l varia com a seguinte lei [5]:

$$l \propto \log N \quad (1.2)$$

Ou seja, são redes em que, em média, os nós estão perto um dos outros. Várias redes reais apresentam essa propriedade, como a rede de computadores e redes sociais. Existe uma outra definição feita por Strogatz et al.[6], porém não a usaremos nesse trabalho.

1.4 Percolação

A teoria da percolação se originou no estudo da fluidodinâmica em meios porosos, estudo esse introduzido por S. R. Broadbent e J. M. Hammersley[7]. Uma das utilidades da percolação é justamente o estudo da robustez de uma dada rede.[2].

Percolação pode ser definida como um modelo de desordem binária onde a aleatoriedade está na distribuição dos tipos de elementos numa rede[8]. Os dois possíveis estados dos elementos são: ocupado e desocupado. Define-se probabilidade de ocupação p como a probabilidade de um determinado elemento da rede ser ocupado[9]. O que também pode ser interpretada como a fração ocupada da rede (quando $N \rightarrow \infty$).

A rede aonde ocorre a percolação pode ser de diferentes tipos, quadrada, triangular, diamante dentre outras redes regulares[8]. A rede também pode ser em duas ou em mais dimensões. A percolação também pode ser diferenciada em percolação de sítio e percolação de ligação.[9] Na percolação de sítio, são os sítios que podem estar ocupados ou não, sendo que a ligação entre os sitios sempre existe. Já na percolação de ligação, os sítios estão todos ocupados e as ligações que podem existir (equivalente a ocupado) ou não existir (equivalente a desocupado) (Figura 2). Também existe a percolação de sítio e

ligação aonde os dois elementos podem estar ocupados ou desocupados [8].

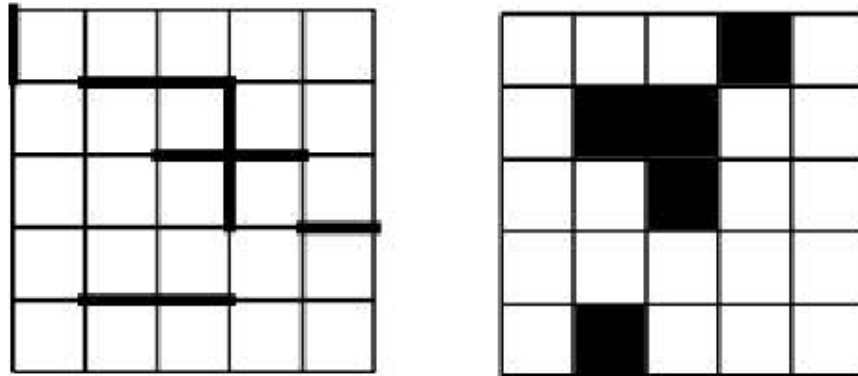


Figura 2: Exemplo de uma percolação de ligação e de uma percolação de sítio, ambas as redes consideradas são quadradas.

Fonte: mathworld.wolfram.com

Primeiros vizinhos de um sítio é a denominação dada aos sítios que tem um lado em comum com o dado sítio (no caso da rede em três dimensões, primeiros vizinhos teriam uma face em comum). Segundos vizinhos seriam os que tem um vértice em comum com o dado sítio (uma aresta, para três dimensões). Um agregado é usualmente definido como um conjunto de sítios ocupados, o qual cada sítio está conectado aos outros por uma cadeia ininterrupta de primeiros vizinhos[8].

Um agregado é dito como percolante se ele conecta dois lados opostos da rede.[10] Inicialmente, quando a probabilidade de ocupação é igual a zero, não existe nenhum agregado, portanto não há agregado percolante. Porém, ao se aumentar a probabilidade de ocupação, o tamanho do maior agregado vai aumentando e em determinado momento é gerado um agregado que conecta dois lados opostos da rede. Logo, há uma transição de uma fase não percolante para uma fase percolante, ou seja, há transição de fase.

Para redes suficientemente grandes, há uma determinada probabilidade crítica de ocupação p_c . [8] Antes dessa probabilidade de ocupação ($p < p_c$) o sistema não percola. No entanto, para valores $p > p_c$, existe um agregado percolante que abrange a rede [9]. Exatamente no ponto crítico não é certo o que acontece, podendo existir ou não agregado percolante.

A percolação é um modelo de transição de fase. No estudo das transições de fase é definido "parâmetro de ordem" como uma quantidade que para uma fase é nula e que tem um valor diferente de zero quando o sistema muda de fase.[10] A utilidade desse parâmetro é indicar quando ocorre a mudança de fase.[9]

Nesse estudo foi utilizada uma percolação de sítio em uma rede quadrada. A probabilidade crítica desse sistema não tem valor exato, sendo somente uma estimativa. Através de métodos computacionais temos, na literatura, um valor de $p_c = 0.59275$ [8] para esse sistema. No nosso estudo o tamanho da rede L , corresponde ao número de sítios em um lado da rede.

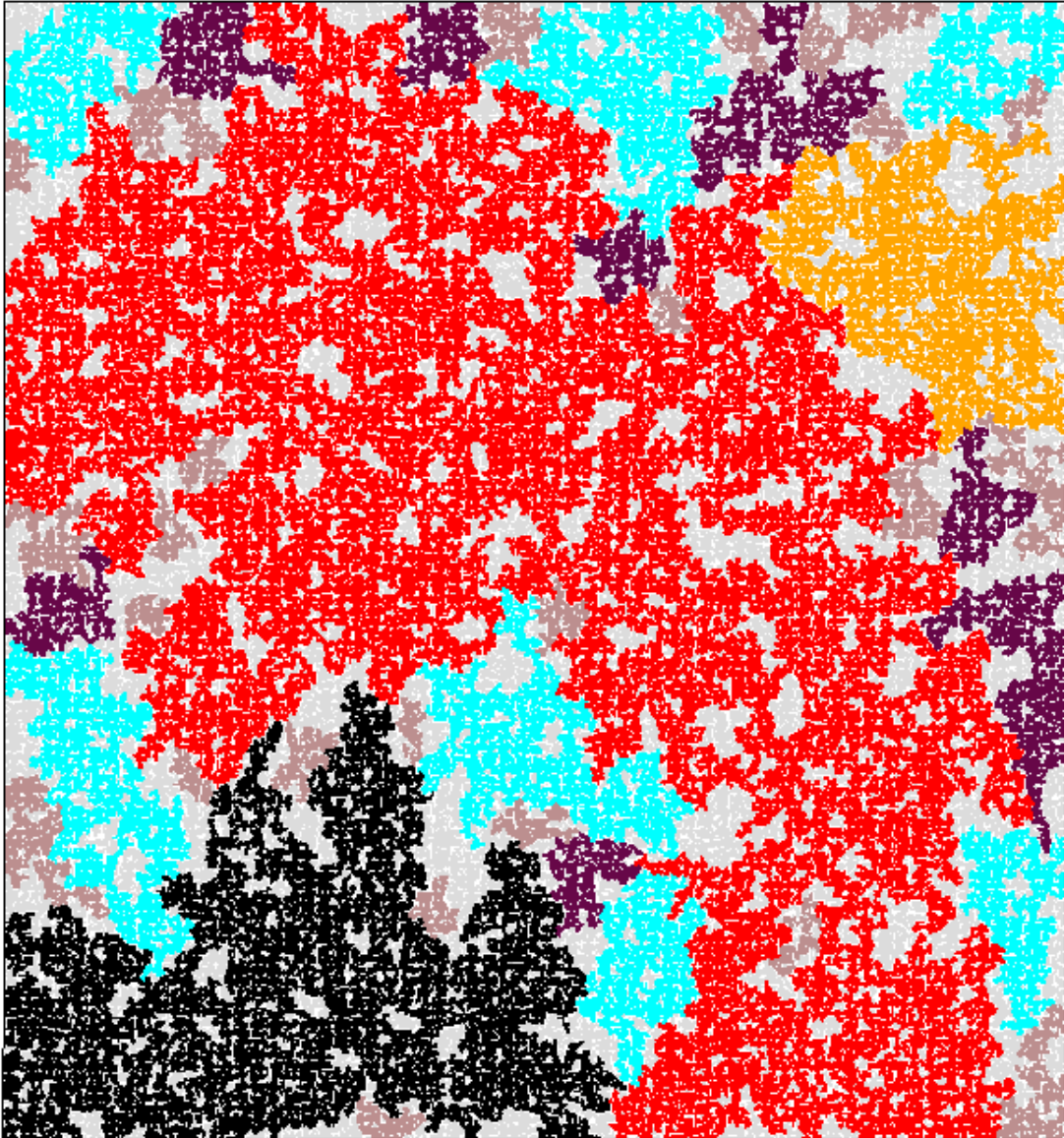


Figura 3: Rede de percolação de tamanho $L = 512$, na probabilidade crítica ($p_c = 0.59275$). As cores indicam o tamanho dos agregados, em ordem crescente: cinza, marrom, roxo, azul, laranja, preto, vermelho (agregado percolante).

Fonte: Próprio autor

1.5 Expoentes críticos

Classe de universalidade é um conjunto de fenômenos que possuem característica macroscópicas semelhantes. Apesar de provavelmente serem diferentes microscopicamente. Expoentes críticos são certos expoentes que aparecerão em quantidades importantes e definirão a classe de universalidade da percolação. Ou seja, as características que definem os tipos de problemas cujo os observáveis macroscópicos se comportam da mesma forma.[8] Irei analisar do ponto de vista de uma percolação de sítio, porém basta trocar sítio por ligação que o desenvolvimento seria similar. O mais interessante é que para todos os tipos de rede e de percolação (sítio ou ligação) os expoentes são os mesmos[10], o que importa é somente que é uma percolação bidimensional.[10]

Começaremos definindo $n_s(p)$ que é a quantidade média de agregados de tamanho s (N_s) dividida pelo número de sítios N .

$$n_s = \frac{N_s}{N} \quad (1.3)$$

Sendo que o agregado percolante(somente existente para $p > p_c$) é excluído da contagem. n_s é chamada de distribuição das probabilidades de tamanhos dos agregados.

Temos, a seguinte hipótese de escala[8]:

$$n_s \sim s^{-\tau} \exp(-cs) \quad (1.4)$$

Para $p = p_c$:

$$n_s \sim s^{-\tau} \quad (1.5)$$

o que implica na seguinte lei para o cálculo de c [11]:

$$c \sim |p - p_c|^{\frac{1}{\sigma}} \quad (1.6)$$

Chama-se τ de exponte de Fischer.

Dada a definição de n_s temos que, para $p < p_c$:

$$\sum_s s n_s = p \quad (1.7)$$

que é a probabilidade de ocupação já mencionada. o que significa que o número total de

sítios ocupados pode ser calculado por:

$$N = N \sum_s sn_s \quad (1.8)$$

O número total de sítios pertencentes a um agregado de tamanho s é Nsn_s , logo, a probabilidade de um sítio ou ligação pertencer a um agregado de tamanho s (w_s) é:

$$w_s = \frac{sn_s}{\sum_s sn_s} \quad (1.9)$$

logo, o tamanho médio dos agregados é

$$S(p) = \sum_s sw_s = \frac{\sum_s s^2 n_s}{\sum_s sn_s} \quad (1.10)$$

Dividindo-se a quantidade de sítios no agregado percolante pela quantidade total de sítios N , temos a probabilidade de um sítio pertencer ao agregado percolante $P(p)$. Com essa definição, temos $P(p) = 0$ se $p < p_c$ e $P(1) = 1$. Com isso, fica evidente que:

$$p = P + \sum_s n_s s \quad (1.11)$$

pois o número de sítios ocupados é igual a sítios no agregado percolante mais os que não estão nele.

Temos $p_c = \sum_s sn_s(p_c)$ pois nesse ponto $P(p_c) = 0$ [8] com isso é possível chegar em [11]:

$$P = \sum_s [n_s(p_c) - n_s(p)]s \quad (1.12)$$

usando a equação 1.4 e 1.5 temos:

$$P \sim \sum_s s^{1-\tau} [1 - \exp(-cs)] \quad (1.13)$$

e para $p \rightarrow p_c$ podemos aproximar para uma integral, resolvendo-a temos [11]:

$$P \sim c^{\tau-2} \int_0^\infty z^{2-\tau} \exp(-z) dz \quad (z = cs) \quad (1.14)$$

Da onde tiramos que:

$$P \sim c^{\tau-2} \quad (1.15)$$

Usando a equação 1.6, chegamos a (para $p \rightarrow p_c$):

$$P \sim (p - p_c)^{\left(\frac{\tau-2}{\sigma}\right)} = (p - p_c)^\beta \quad (1.16)$$

Logo, β é o expoente associado ao modo como P vai a zero no ponto crítico. E temos:

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma} \quad (1.17)$$

Aplicando um método semelhante temos[11] em $p = p_c$:

$$\begin{aligned} S &= \sum_s \frac{s^2 n_s}{p_c} \\ &\sim \int_0^\infty s^2 n_s ds \\ &\sim \int_0^\infty s^{2-\tau} \exp(-cs) ds \\ &\sim c^{\tau-3} \int_0^\infty s^{2-\tau} \exp(-z) (z = cs) \\ S &\sim |P - p_c|^{\left(\frac{\tau-3}{\sigma}\right)} = |p - p_c|^{-\gamma} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Temos, logo, outro expoente crítico que descreve como o tamanho médio dos agregados finitos decresce.

$$\gamma = \frac{3 - \tau}{\sigma} \quad (1.19)$$

Definiremos agora um raio de giração de um agregado de tamanho s como sendo:

$$R_s^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \mathbf{r}_i^2 \quad (1.20)$$

aonde coloquei meu centro no centro de massa do agregado.

Temos que:

$$\sum_i \frac{\mathbf{r}_i}{s} = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{1}{s^2} \sum_{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = 0 \quad (1.22)$$

$$\sum_i 1 = s \quad (1.23)$$

Logo:

$$2R_s^2 = \sum_i \frac{\mathbf{R}_i^2}{s} + \sum_j \frac{\mathbf{R}_j^2}{s} \quad (1.24)$$

$$2R_s^2 = \sum_{ij} \frac{\mathbf{R}_i^2}{s^2} + \sum_{ij} \frac{\mathbf{R}_j^2}{s^2} - 2 \sum_{ij} \frac{\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j}{s^2} \quad (1.25)$$

$$2R_s^2 = \sum_{ij} \frac{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^2}{s^2} \quad (1.26)$$

Que seria uma outra forma de se calcular o Raio de giração, utilizando-se a distância média entre 2 sítios pertencentes a um agregado com s elementos. Mas precisamente, obtivemos que $2R_s$ é a distância quadrática média dos sítios do agregado de tamanho s .

Definiremos a função de correlação ($g(r)$) como a probabilidade de um sítio a uma distância r de um outro dado sítio pertença ao mesmo agregado. Com isso temos que $\sum_r g(r)$ é o número médio de sítios que um dado sítio está conectado. Ou seja, o tamanho do agregado em que ele está inserido.

Logo:

$$pS = \sum_s s^2 n_s = p \sum_r g(r) \quad (1.27)$$

Sendo somente válido para $p < p_c$. Ficando válido para $p > p_c$ somente se não for considerado o agregado percolante no somatório de $g(r)$.

Definiremos agora a distância de correlação ξ . Dado um certo agregado:

$$\xi^2 = \frac{\sum_r r^2 g(r)}{\sum_r g(r)} \quad (1.28)$$

Aonde r^2 é a distância quadrática média.

Usando-se 1.27 e o fato de que em um agregado de tamanho s a distância quadrática média é $2R_s^2$ temos:

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s} \quad (1.29)$$

Logo ξ é proporcional ao raio de giração dos maiores agregados e, como a distância de correlação é proporcional aos maiores agregados do sistema, ela divergirá para $p \rightarrow p_c$, assim sendo:

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu} \quad (1.30)$$

O último expoente a ser citado é a dimensão fractal[12]. O agregado percolante

d	2
β	0.139
γ	2.389
ν	1.333
σ	0.396
τ	2.055
D_f	1.896

Tabela 1: Tabela dos valores de expoentes críticos na percolação bidimensional.[11]

também é o maior agregado[9] e temos a seguinte relação para o seu crescimento.[8]

$$S_{max} = \begin{cases} \ln L & p < p_c \\ L^{D_f} & p = p_c \\ L^d & p > p_c \end{cases} \quad (1.31)$$

Aonde $D_f = 1.89$ é a dimensão fractal e temos que, no ponto crítico, o maior agregado é um fractal pois seu crescimento é uma lei de potência com expoente diferente da dimensão topológica $d = 2$ [8][12].

Segue uma tabela com os expoentes críticos da percolação e seus valores (Tabela 1)

2 PERCOLAÇÃO DE SÍTIO EM UMA REDE QUADRADA

2.1 Estudo do comportamento do maior agregado variando a probabilidade de ocupação p

A probabilidade de um sítio da rede pertencer ao maior agregado p_s é definida como: o tamanho do maior agregado, S_{max} , dividido pelo tamanho da rede $N = L \cdot L[1]$, essa probabilidade é o parâmetro de ordem do modelo.

Foi usado o maior agregado, pois para $p < p_c$ é um bom correspondente ao agregado percolante. Na Figura 4 foi usado dois tamanhos de rede, $L = 256$ e $L = 4096$, visando evidenciar a tendência do comportamento do maior agregado para quando $L \rightarrow \infty$ e foram feitos pelo menos 10 000 interações.

Como é visto na análise do gráfico da Figura 4, $p_s \rightarrow 0$ até o ponto crítico. Onde ocorre uma transição de fase e um pouco depois seu crescimento passa a ser linear. Para $L \rightarrow \infty$ (limite termodinâmico) estima-se que de $p = 0$ até $p = p_c$ temos $p_s = 0[1]$ e para pouco depois de p_c , $p_s \rightarrow p$.

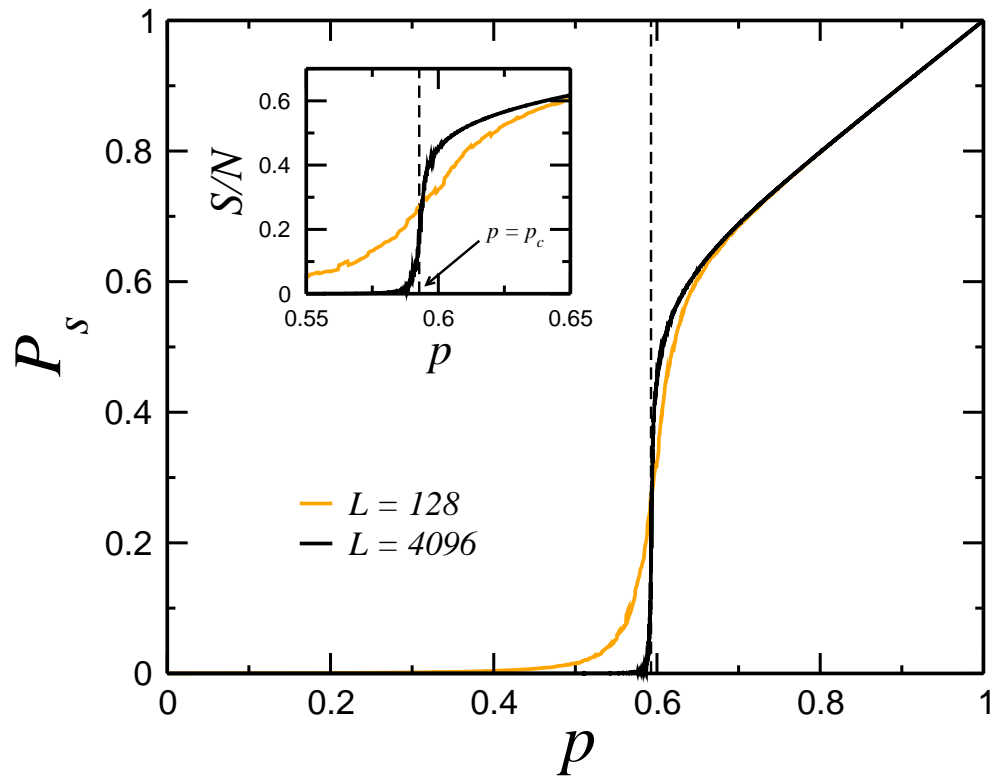


Figura 4: Probabilidade de um sítio pertencer ao maior agregado p_s como função da probabilidade de ocupação p . Foi usado dois tamanhos de rede: $L = 256$ e $L = 4096$ e foram feitas pelo menos 10 000 interações para cada probabilidade. A linha vertical tracejada indica o valor de $p_c = 0.59275$.

2.2 Estudo do comportamento do maior agregado variando o tamanho da rede L

O estudo foi realizado fixando-se três probabilidades de ocupação diferentes: $p < p_c$, $p = p_c$ e $p > p_c$. Foram feitas pelo menos 10^6 realizações para cada tamanho de rede.

Foi constatado um comportamento diferente para cada caso:

$$S_{max} = \begin{cases} \ln L & p < p_c \\ L^{D_f} & p = p_c \\ L^d & p > p_c \end{cases} \quad (2.1)$$

O que está de acordo com o resultado teórico.

2.2.1 Caso $p < p_c$

A análise do gráfico da figura 5 mostra que para $p < p_c$, temos $S_{max} \sim \ln L$. Como o ajuste linear só foi feito para os 4 últimos pontos, ficou claro na análise do gráfico que os primeiros pontos estão desalinhados. Mostrando, dessa forma, a distorção causada pelo efeito do tamanho finito. Isso acontece porque a teoria da percolação considera redes no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$).

2.2.2 Caso $p = p_c$

Fractal é definido como um objeto geométrico que tem autossimilaridade, ou seja, ele pode ser dividido em partes, cada uma delas semelhante ao objeto original. Um objeto pode ser identificado como fractal por apresentar uma certa invariância de escala.

O tipo de fractal encontrado no estudo da percolação é o estatístico, esse tipo de fractal somente é fractal sob a ótica de uma média [1]. Logo, não será percebida a característica de autossimilaridade com somente uma realização, deverá ser feita uma média sobre várias realizações.

Sua dimensão fractal poderá ser determinada analisando como suas quantidades medidas variam com o tamanho do sistema estudado. Se formar uma lei de potência com expoente diferente da dimensão topológica, teremos que o objeto é um fractal e que sua dimensão fractal é o expoente da lei de potência.

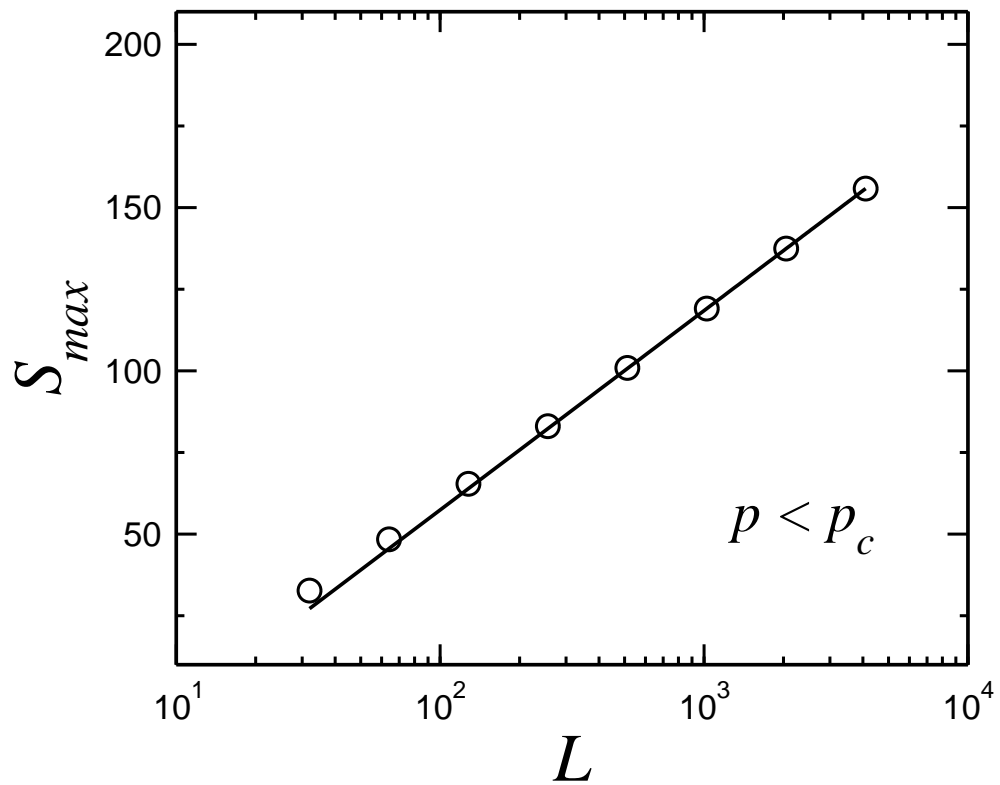


Figura 5: Gráfico do tamanho do maior agregado como função do tamanho da rede. O ajuste linear foi feito somente para os últimos 4 pontos ($L = 512, 1024, 2048$ e 4096), onde fica evidenciado o efeito do tamanho finito. A linha sólida é o ajuste linear para a função $S_{max} = A + B \cdot \ln(L)$, com $A = 64.014$ e $B = 26.426$. com probabilidade de ocupação $p = 0.4$.

Fonte: Próprio autor

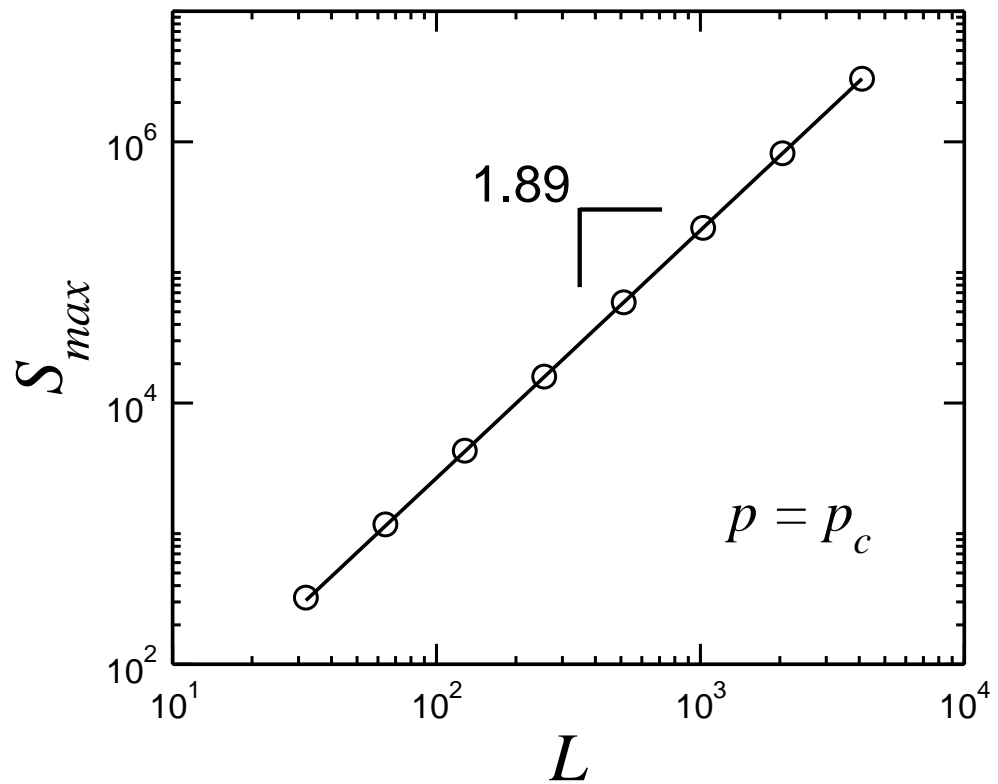


Figura 6: Gráfico do tamanho do maior agregado S_{max} como função da dimensão linear L da rede quadrada. A linha sólida é o ajuste linear da função $S_{max} = AL^{D_f}$, com $A = 0.46023$ e expoente $D_f = 1.89$. Com probabilidade de ocupação $p = 0.59275$.

Fonte: Próprio autor

A análise do gráfico da figura 6 mostra que $S_{max} \sim L^{D_f}$. Sendo o maior agregado um fractal pois $D_f \neq d$, onde d é a sua dimensão topológica, logo D_f é a sua dimensão fractal. Esse expoente é universal[10], é o mesmo para os dois tipos de percolação: de ligação e de sitio e é constante para qualquer geometria de rede[9].

2.2.3 Caso $p > p_c$

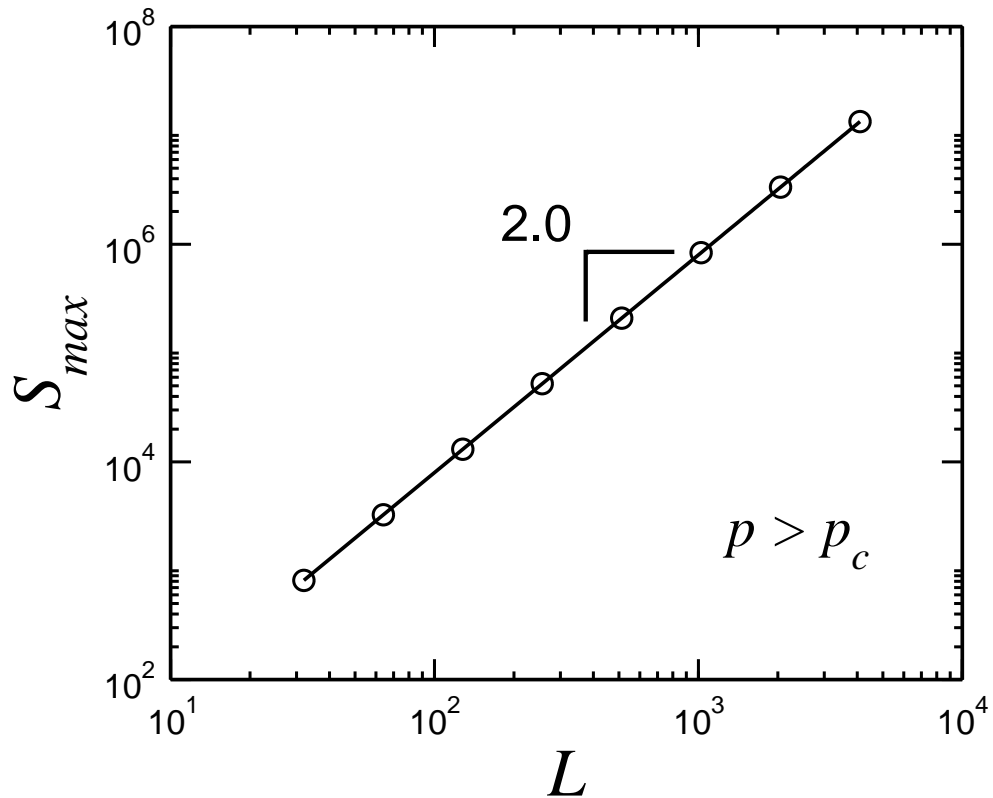


Figura 7: Gráfico do tamanho do maior agregado S_{max} como função do tamanho da rede L . A linha sólida é o ajuste linear da função $S_{max} = A \cdot L^d$, com $A = 0.79796$ e expoente $d = 2$. Com probabilidade de ocupação $p = 0.8$.

Fonte: Próprio autorFonte: Próprio autor

No caso $p > p_c$ temos uma situação simples com o tamanho do maior agregado variando na forma: $S_{max} \sim L^d$, aonde d é a dimensão topológica, isso é visto na análise do gráfico da figura 7.

2.3 Distribuição do tamanho dos agregados na situação $p = p_c$

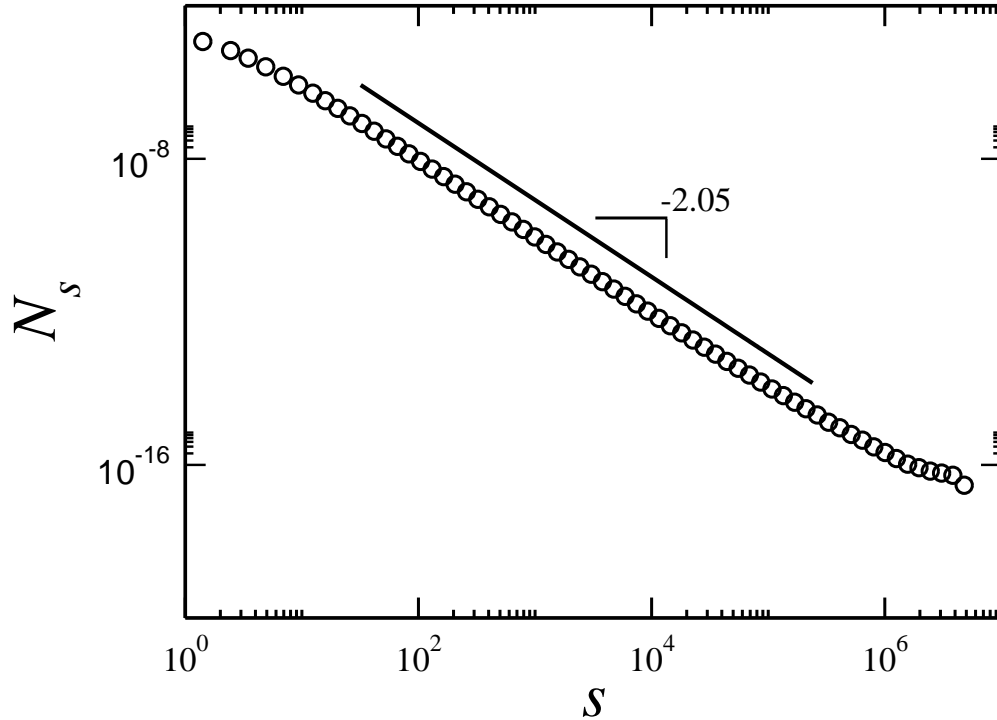


Figura 8: Gráfico da distribuição dos tamanhos dos agregados para uma rede de tamanho $L = 4096$ e com $p = p_c$. Obtivemos que a distribuição em sua parte intermediária forma uma lei de potência com expoente -2.05 , foram feitas 10 000 realizações. N_s é a probabilidade de escolhermos aleatoriamente agregados de tamanho s na rede

Fonte: Próprio autor

Pela análise do gráfico 7 temos que a distribuição segue uma lei de potência com expoente -2.05 . Como já discutido, para $p = p_c$ a distribuição dos tamanhos segue a seguinte lei de potência: $n_s \sim s^\tau$ [8]. Onde τ é o expoente de Fischer cujo valor teórico é: $\simeq 2.055$.

3 PERCOLAÇÃO NA REDE ERDOS-RÉNYI

3.1 Introdução

A Rede de Erdos-Rényi é uma rede aleatória[13] na qual inicialmente temos N nós e nenhuma ligação e adicionamos ligações de forma aleatória e cada ligação adicionada é independente das demais. Para o número médio de ligações dos nós da rede, chamamos de conectividade média z

A importância da Rede de Erdos-Rényi atualmente é o seu uso para teste de modelos e algoritmos antes de serem usados em redes complexas de fato.[2] Já a percolação em redes aleatórias é muito comumente usada para se entender a robustez da rede [2], isto é, quantas ligações se deve retirar para que a rede deixe de ser globalmente conectada.

Fazendo $N \rightarrow \infty$ temos com $z = 0$ uma situação em que todos os nós estão desconectados e ao aumentar o valor de z temos cada vez mais ligações feitas e a criação de agregados cada vez maiores. Até que temos a criação de um agregado de tamanho comensurável. Defini-se tamanho comensurável quando o tamanho do maior cluster dividido pelo número de nós não tende a zero [1].

3.2 Funções geradoras

3.2.1 Desenvolvimento

Um formalismo muito interessante foi desenvolvido por M. Newman et al [14] para o estudo de grafos aleatórios com qualquer distribuição de conectividade, incluindo as redes livre de escala e a de Erdos-Rényi. Segue o seu desenvolvimento.

Seja, p_k a probabilidade de um nó ter k vizinhos conectados. Ou seja, a distribuição de probabilidade das conectividades.

Definimos a função:

$$G_0(x) = \sum_k^{\infty} p_k x^k \quad (3.1)$$

Que chamaremos de função geradora $G_0(x)$. Nota-se que $G_0(1) = 1$, ou seja. G_0 é normalizada. Essa série também é absolutamente convergente para a região $x \leq 1$ que é o único domínio em que se a utilizará

A primeira utilidade da função $G_0(x)$ é a sua propriedade da derivação. Segue:

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G_0}{dx^k} \right|_{x=0} \quad (3.2)$$

Ou seja, podemos encontrar qualquer p_k através da função geradora. Ela contém nela toda a informação necessária. A função G_0 "gera" a distribuição de probabilidades p_k

Temos também a propriedade dos momentos sendo z a conectividade média, temos que o primeiro momento estatístico z é dado por:

$$z = \langle k \rangle = \sum_k k p_k = G'_0(1). \quad (3.3)$$

Logo, com a função geradora também calculamos a média da distribuição de probabilidade que ela gera. Momentos mais altos podem ser calculados a partir das demais ordens de derivada. De forma geral, temos [14]:

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n p_k = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right]_{x=1} \quad (3.4)$$

A última propriedade a ser citada é a propriedade das potências. Se uma propriedade k de um objeto é gerado por uma dada função geradora, então a distribuição do total k somado para m amostras independentes será gerada pela m -ésima potência da função geradora.

Digamos que escolhemos m vértices de forma aleatória de uma rede aleatória grande. Então a distribuição da soma da distribuição de conectividade desses vértices seria gerada por $[G_0(x)]^m$

Irei deduzir isso para o caso com apenas 2 vértices.

$$\begin{aligned}
[G_0(x)]^2 &= [\sum_k p_k x^k]^2 \\
&= [\sum_k p_k x^k][\sum_j p_j x^j] \\
&= \sum_{k,j} p_k p_j x^{k+j} \\
&= (p_0 p_0)x^0 + (p_1 p_0 + p_0 p_1)x^1 \\
&\quad + (p_0 p_2 + p_1 p_1 + p_2 p_0)x^2 \\
&\quad + (p_0 p_3 + p_1 p_2 + p_2 p_1 + p_3 p_0)x^3 + \dots
\end{aligned}$$

A probabilidade da soma ser zero é obviamente $p_0 p_0$ a probabilidade da soma ser 1 é a probabilidade do primeiro nó ser zero e do segundo ser 1 mais a probabilidade do segundo ser zero e o primeiro de ser 1 e assim sucessivamente. Foi isso que encontramos nessa função.

Agora, suponha que escolhemos uma ligação e a seguimos até encontramos um nó. A probabilidade dele ter k ligações é $k p_k$ pois nós com mais ligações terão mais chances de serem encontrados dessa forma. Normalizando, temos a seguinte distribuição:

$$\frac{k p_k}{\sum_k k p_k}$$

Logo, temos a seguinte função geradora:

$$\frac{\sum_k p_k x^k}{\sum_k k p_k} = x \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} \quad (3.5)$$

Agora, imagine que pegamos um nó e seguimos cada uma de suas k ligações, cada nó chegado obdecerá a lei de distribuição descrita pela equação 3.5 menos uma potência de x para retirarmos da contagem o nó de origem. O motivo de fazermos isso é que queremos analisar o número de segundos vizinhos (soma da conectividade dos vizinhos menos 1)

Por exemplo, a probabilidade dele ter zero vizinhos é:

$$P_0 = G_1(0) = p_1$$

Ou seja, a probabilidade dele ter nenhum vizinho é a probabilidade do nó ter somente uma ligação (que seria a de origem). Logo, retiramos ele da contagem com essa diminuição da potência de x .

Assim, definimos

$$G_1(x) = \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} \quad (3.6)$$

E, usando a equação 3.3 temos:

$$G_1(x) = \frac{G'_0(x)}{z} \quad (3.7)$$

$[G_1(x)]^k$ é a função geradora distribuição da conectividade de um nó que foi encontrado seguindo uma ligação e desprezando-se essa ligação da contagem de vizinhos desse nó.

Agora, queremos saber o número de segundos vizinhos, ou seja. Basta somarmos o número de vizinhos de cada primeiro vizinho (retirando-se o nó de origem) assim, usaremos a propriedade da potência. Podemos usar isso pois para $N \rightarrow \infty$ não há loops abaixo do ponto crítico. Caso tivesse, haveria o risco de estarmos contando o mesmo segundo vizinho duas vezes.

Logo, para um sítio com k ligações, temos que somar k ramos de segundos vizinhos e assim temos a seguinte função geradora da distribuição do número de segundos vizinhos de um sítio aleatório:

$$\sum_k p_k [G_1(x)]^k = G_0(G_1(x)) \quad (3.8)$$

similarmente para os terceiros vizinhos teríamos $G_0(G_1(G_1(x)))$ [14]

Usando agora a propriedade do cálculo do momento, temos que a média para o número de segundo vizinhos, usando (3.7) e (3.3) resulta em:

$$\begin{aligned} z_2 &= \left[\frac{d}{dx} G_0(G_1(x)) \right]_{x=1} = G'_0(1) G'_1(1) \\ z_2 &= G'_0(1) \frac{G''_0(1)}{z} = G'_0(1) \frac{G''_0(1)}{G'_0(1)} \\ z_2 &= G''_0(1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para o caso da rede de Erdos-Rényi temos uma distribuição binomial com probabilidade uniforme $p = z/N$ logo:

$$G_0 = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} x^k \quad (3.10)$$

$$= (1-p+px)^N \quad (3.11)$$

Para o limite $N \rightarrow \infty$ temos que:

$$G_0 = (1-p+px)^N = e^{z(x-1)} \quad (3.12)$$

Para achar esse limite, basta fazer, para $N \rightarrow \infty$ [14]:

$$(1 + a/N)^N = e^{n \ln(1+a/N)} \quad (3.13)$$

$$\log(1 + a/N) = a/N + o(a/N) \quad (3.14)$$

$$N \log(1 + a/N) = a + o(a/N) \quad (3.15)$$

$$(1 + a/N)^N = e^a \quad (3.16)$$

De posse da função geradora podemos calcular outros fatos interessantes, como o primeiro momento, usando 3.3

$$G'_0(1) = z \quad (3.17)$$

E usando a propriedade da derivação, temos:

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G_0}{dk^k} \right|_{x=0} = \frac{z^k e^{-z}}{k!} \quad (3.18)$$

que, como esperado, é a distribuição de Poisson.

Além disso tivemos:

$$G_1(x) = \frac{G'_0(x)}{z} = G_0(x) \quad (3.19)$$

Chega a hora de definirmos mais uma função geradora, $H_1(x)$ é a função geradora da distribuição das probabilidade de tamanhos dos agregados que alcançamos ao seguir um dos dois finais de uma ligação aleatória. O agregado percolante está definido como excluído da contagem.

Como dito, no limite termodinâmico não há loops abaixo do ponto crítico[14] e como segue na figura 9 a função geradora $H_1(x)$ será o somatório da probabilidade do nó chegado ter nenhuma outra ligação mais a probabilidade dele ter 1 outra ligação aonde o nó chegado por essa ligação também obedecerá $H_1(x)$ mais a probabilidade dele ter 2 outras ligações e nesse caso a soma dos tamanhos dos seus 2 vizinhos será, pela propriedade da potência, $[H_1(x)]^2$ e assim sucessivamente, resultando em: [14]

$$H_1(x) = xq_0 + xq_1[H_1(x)] + xq_2[H_1(x)]^2 + \dots \quad (3.20)$$

Onde o fator x aparece para indicar que já temos pelo menos 1 nó no nosso agregado e q_k é a probabilidade do sítio que chegamos ter k outras ligações. Logo, q_k nada mais é do que os coeficientes de x^k da função geradora $G_1(x)$ e assim temos a seguinte lei de consistência[14][15]:

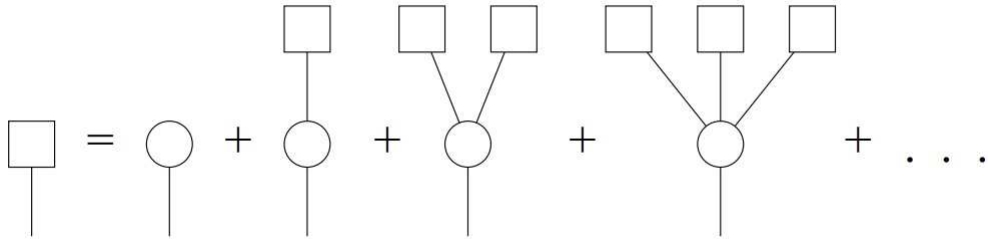


Figura 9: Representação da lei de consistência. A probabilidade de cada componente no lado esquerdo pode ser representada como a soma das probabilidades de ter só 1 vértice de ter 1 vértice ligado para outra componente de ter 1 vértice ligado para duas componentes e assim em diante. A forma fechada se encontra na equação 3.21.

Fonte: Newman et al.[14]

$$H_1(x) = xG_1(H_1(x)) \quad (3.21)$$

Já $H_0(x)$ é a distribuição das probabilidades dos tamanhos do agregado que pertence um nó escolhido aleatoriamente. Ela bedece a uma lei de consistência análoga[14]:

$$H_0(x) = xG_0(H_1(x)) \quad (3.22)$$

Na teoria, seria possível resolver a equação 3.21 e substituir o valor de $H_1(x)$ na equação 3.22 e teríamos como calcular a distribuição de tamanho dos agregados. Porém, a equação 3.21 é frequentemente transcendental sendo necessário métodos computacionais para se ter uma solução tão aproximada como queira.[14]

3.2.2 Aplicação do formalismo

Temos que o tamanho médio dos agregados é dado por:

$$\langle s \rangle = H'_0(1) = 1 + G'_0(1)H'_1(1) \quad (3.23)$$

Usando a equação 3.21 temos:

$$\begin{aligned}
H_1'(x) &= 1 + G_1'(1)H_1'(1) \\
H_1'(x) &= \frac{1}{1 - G_1'(1)}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Logo,

$$\langle s \rangle = H_0'(1) = 1 + \frac{G_0'(1)}{1 - G_1'(1)} \tag{3.25}$$

Que, usando 3.7, 3.3 e 3.9 resulta em:

$$\langle s \rangle = H_0'(1) = 1 + \frac{z_1^2}{z_1 - z_2} \tag{3.26}$$

Aonde z_1 é o número de primeiros vizinhos e z_2 é o número de segundos vizinhos.

Quando essa expressão diverge é quando estamos no ponto crítico e um agregado gigante aparece. Analizando essas expressões isso acontece quando:

$$G_1'(1) = 1 \tag{3.27}$$

Note que a equação também diverge para quando $z_1 = z_2$ O que intuitivamente faz sentido.

Usando (3.1) e (3.7) temos:

$$G_1'(1) = 1 \tag{3.28}$$

$$\frac{G_0''(1)}{G_0'(1)} = 1 \tag{3.29}$$

$$\frac{\sum_k k(k-1)p_k}{\sum_k kp_k} = 1 \tag{3.30}$$

$$\sum_k k(k-2)p_k = 0 \tag{3.31}$$

Esse resultado já havia sido derivado por outros meios por Molloy e Reed [16].

Para o nosso caso de estudo (Rede de Erdos-Rényi), temos:

$$G_1'(1) = 1$$

$$G_0'(1) = 1$$

$$z = 1 \tag{3.32}$$

Ou seja, quando a conectividade média for igual a 1, teremos o ponto crítico.

Para valores de $z > z_c$ (onde z_c é a conectividade média crítica) o formalismo continua

válido. Pois a função $H_0(x)$ ignora o agregado percolante. Porém, $H_0(1) \neq 1$ pois não estamos contando mais o agregado percolante, e com isso temos:

$$1 - S = H_0(1) \quad (3.33)$$

$$1 - S = 1 \cdot G_0(u) \quad (3.34)$$

Aonde teremos $u = H_1(1)$ deduzido por sua lei de consistência 3.21:

$$ou = G_1(u) \quad (3.35)$$

Para o caso geral então, teremos $\langle s \rangle$ dado por:

$$\langle s \rangle = \frac{H'_0(1)}{H_0(1)} \quad (3.36)$$

O termo $H_0(1)$ aparece pois teremos que normalizar a distribuição de probabilidades. Logo, desenvolvendo, usando 3.22 3.24:

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \frac{H'_0(1)}{H_0(1)} \\ &= \frac{1}{H_0(1)} [G_0(H_1(1)) + G'_0(H_1(1))H'_1(1)] \\ &= \frac{1}{H_0(1)} \left[G_0(u) + \frac{G'_0(u) \circ G_1(u)}{1 - G'_1(u)} \right] \\ &= \frac{1}{G_0(u)} \left[G_0(u) + \frac{[G'_0(u)]u}{[1 - G'_1(u)]} \right] \\ &= 1 + \frac{zu^2}{(1 - S)[1 - G'_1(u)]} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Que, para o caso de $S=0$ e $u=1$ recai na equação 3.26

Para nosso caso de estudo $G_0(x) = G_1(x) = e^{z(x-1)}$ como já calculado e teremos $u = 1 - S$ como solução de $u = G_1(u) = G_0(u)$ e logo:

$$\begin{aligned} 1 - S &= e^{z(1-S-1)} \\ S &= 1 - e^{-zS} \end{aligned} \quad (3.38)$$

E com isso, temos:

$$\begin{aligned}
\langle s \rangle &= 1 + \frac{zu^2}{(1-S)[1-G'_1(u)]} \\
&= 1 + \frac{z(1-S)}{1-ze^{-zS}} \\
&= 1 + \frac{z(1-S)}{1+z(S-1)} \\
&= \frac{1-z+zS+z-zS}{1-z+zS} \\
&= \frac{1}{1-z+zS}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Que é um resultado conhecido [17].

Por fim faremos uma estimativa da distância média entre dois sítios aleatórios.

A função geradora dos primeiros vizinhos é $G_0(x)$ a dos segundos vizinhos é $G_0(G_1(x))$ a dos terceiros vizinhos $G_0(G_1(G_1(x)))$ e assim vai, logo podemos definir a função $G^{(m)}$ que representa a função geradora para os m -ésimos vizinhos.[14]

$$G^{(m)}(x) = \begin{cases} G_0(x) & \text{for } m = 1 \\ G^{(m-1)}(G_1(x)) & \text{for } m \geq 2 \end{cases} \tag{3.40}$$

Da onde se tira que o número médio de m -ésimos vizinhos z_m é:

$$z_m = \left. \frac{dG^{(m)}}{dx} \right|_{x=1} = G'_1(1)G^{(m-1)'}(1) = G'_1(1)z_{m-1} \tag{3.41}$$

Como $z_1 = z = G'_0(1)$ temos:

$$z_2 = G'_1(1)z_1 \rightarrow G'_1(1) = \frac{z_2}{z_1} \tag{3.42}$$

e também temos:

$$z_m = [G'_1(1)]^{m-1}G'_0(1) = \left[\frac{z_2}{z_1} \right]^{m-1} z_1 \tag{3.43}$$

A distância é medida em números de sítios que precisamos passar para chegar no desejado. Podemos, de forma aproximada. Dizer que quando a soma do total número de vizinhos até o l -ésimo vizinho(distância l) for igual ao número de nós da rede. Pode-se ajudar na intuição desse fato ao notar que o número de vizinhos cresce exponencialmente e que: $z_l \gg z_{l-1}$. Logo o sítio desejado deve estar na última distância possível.

Assim temos:

$$1 + \sum_{m=1}^l z_m = N. \tag{3.44}$$

usando a equação 3.43 temos:

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{m=1}^l \left[\frac{z_2}{z_1} \right]^{m-1} z_1 &= N \\
z_1 + \left[\frac{z_2}{z_1} \right] z_1 + \left[\frac{z_2}{z_1} \right]^2 z_1 + \dots + \left[\frac{z_2}{z_1} \right]^{l-1} z_1 &= N - 1 \\
(z_2 - z_1) \left\{ z_1 + \left[\frac{z_2}{z_1} \right] z_1 + \left[\frac{z_2}{z_1} \right]^2 z_1 + \dots + \left[\frac{z_2}{z_1} \right]^{l-1} z_1 \right\} &= (N - 1)(z_2 - z_1) \\
\frac{z_2^l}{z_1^{l-2}} - z_1^2 &= (N - 1)(z_2 - z_1) \\
l \log(z_2/z_1) &= \log[(N - 1)(z_2 - z_1) + z_1^2] + \log z_1^2 \\
l &= \frac{\log[(N - 1)(z_2 - z_1) + z_1^2] + \log z_1^2}{\log(z_2/z_1)}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

no caso mais comum temos $N \gg z_1$ e $z_2 \gg z_1$ temos:

Logo:

$$\begin{aligned}
l &= \frac{\log[(N z_2 + z_1^2)/z_1^2]}{\log(z_2/z_1)} \\
&= \frac{\log\left[\frac{N z_2}{z_1 z_1}\right]}{\log(z_2/z_1)} \\
&= \frac{\log(N/z_1)}{\log(z_2/z_1)} + 1
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Duas aproximações foram feitas, uma é a aproximação da equação 3.44. Outra é que supomos que dê um vértice aleatório, poderemos encontrar qualquer outro. Isso já não é válido para $z < z_c$ mas se torna levemente válido para $z > z_c$ trocando-se N por NS aonde S é a fração do gráfico pertencente ao agregado percolante. Logo:

$$l = \frac{\log(NS/z_1)}{\log(z_2/z_1)} + 1 \tag{3.47}$$

Apesar das aproximações há algumas propriedades que se podem ser notadas.

Primeiro, mostra que a distância média entre dois vértices para uma rede aleatória com qualquer distribuição de conectividade vara com o logaritmo, ou seja: $l = A + B \log N$ Uma característica conhecida de casos particulares de redes aleatórias.

Segundo, mostra que uma propriedade global como a distância média, pode ser calculado através de característica locais como o número de primeiros e segundos vizinhos. Fornecendo uma boa ferramenta de cálculo da distância média, que para várias redes fornecerá uma ótima aproximação.

Por fim, mostra que somente o número de primeiros e segundos vizinhos é importante para o cálculo da distância média, logo dois gráficos diferentes mas com o mesmo z_1 e z_2 terão o mesmo l .

Para o nosso caso de estudo, temos:

$$z_2 = \left. \frac{dG_0(G_1(x))}{dx} \right|_{x=1} = G'_0(1)G'_0(1) = z^2 \quad (3.48)$$

também temos $z_1 = z$ Logo, para quando $S = 1$:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\log(N/z)}{\log(z^2/z)} + 1 \\ &= \frac{\log(N) - \log(z)}{\log(z)} + 1 \\ &= \frac{\log N}{\log z} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Resultado que é já obtido por outros métodos [17]. E temos que a rede de Erdos-Rényi é de pequeno mundo, segundo a definição usada.

3.3 Resultados

Foi realizada uma simulação computacional e, como se vê na Figura 10, há uma transição de fase na conectividade $z = 1$, o resultado foi precisamente o calculado teoricamente.

Esse resultado demonstra que, dada uma rede de Erdos-Rényi completamente conectada, ao se depreciar a rede retirando-se ligações. A rede irá perder a conectividade global exatamente no ponto $z = 1$

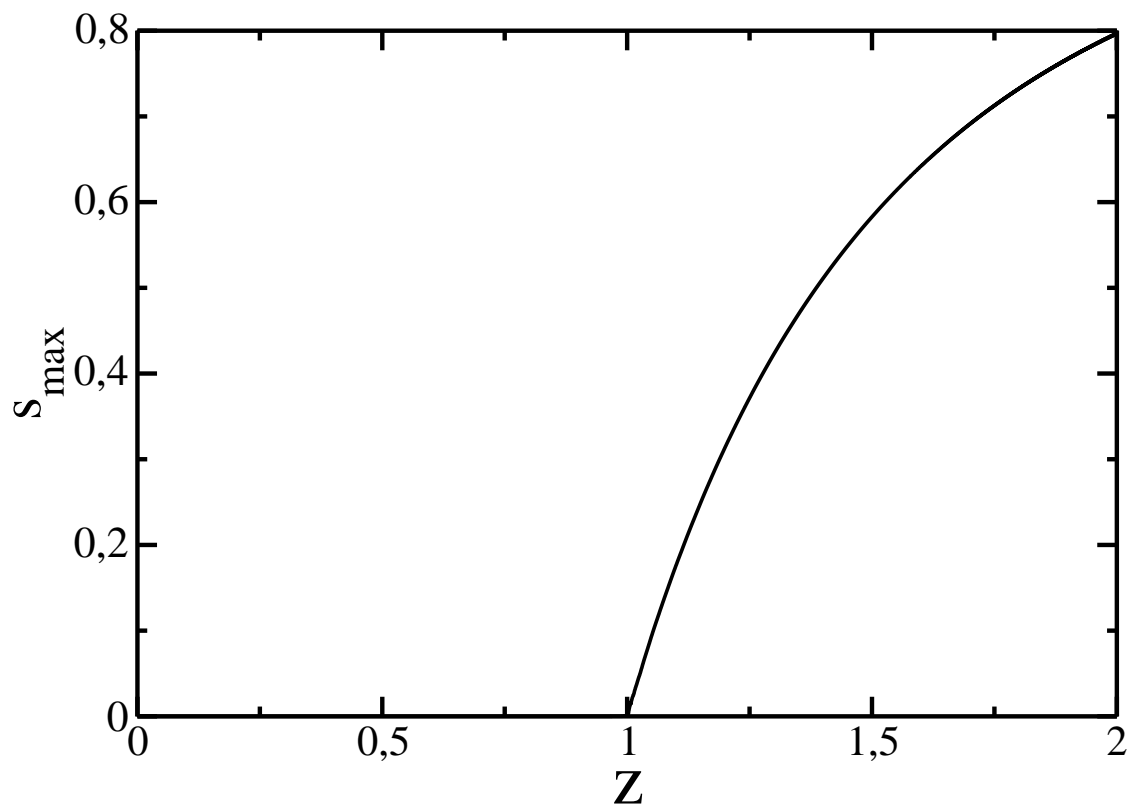


Figura 10: Gráfico do tamanho do maior agregado S_{max} dividido pelo tamanho da rede pela conectividade média. Foram feitas 1 000 realizações e a malha mede 100 000 000 nós
Fonte: Próprio autor

Foi analisada a distribuição de conectividade k , conforme se ver na figura 11. A linha contínua é a distribuição de Poisson calculada analiticamente enquanto os círculos são os resultados computacionais, logo, houve conformidade com os resultados calculados analiticamente.

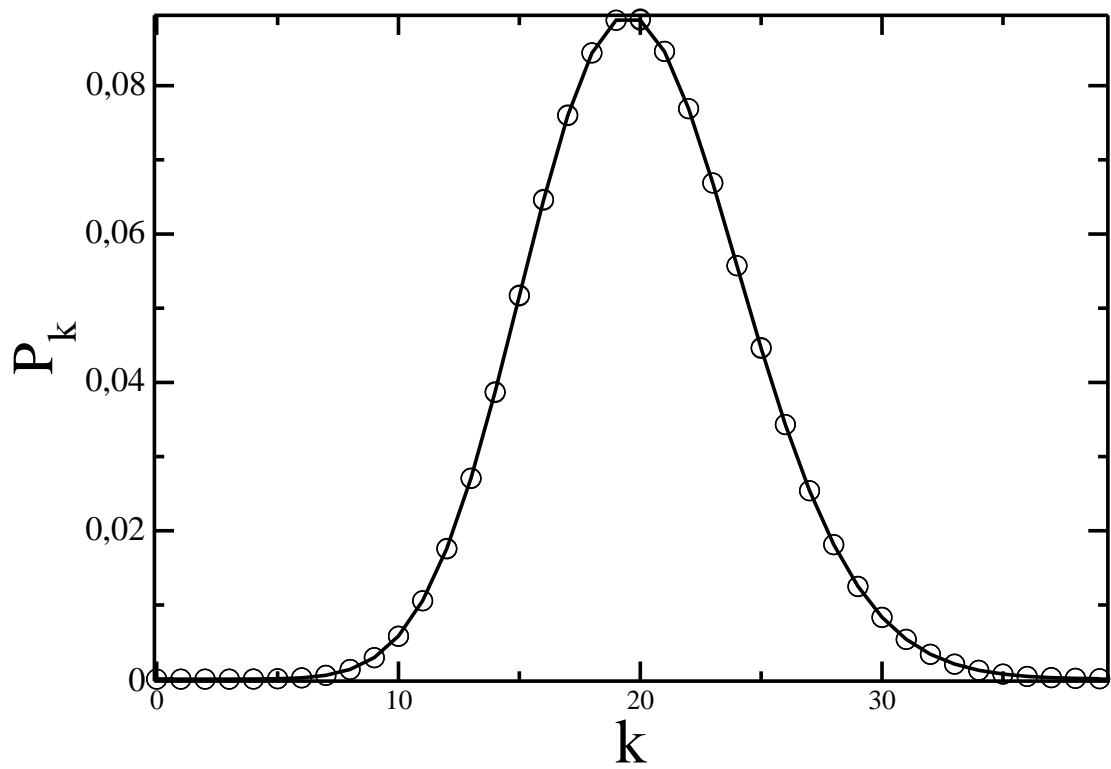


Figura 11: Gráfico da distribuição de probabilidades de conectividades. Foram feitas 1 000 realizações e a malha mede 100 000 nós. No caso do gráfico $z = 20$.

Fonte: Próprio autor

4 CONCLUSÃO

Foi constatado que o resultado teórico está correto através das simulações computacionais desenvolvidas. Pois constatamos os mesmos expoentes críticos com uma margem de erro bastante razoável. Mostrando, inclusive a qualidade do algoritmo utilizado. Foi possível demonstrar o valor da dimensão fractal e do expoente de Fischer, assim como o ponto de percolação.

Foi exposto também o formalismo das funções geradoras e várias de suas aplicações. Além de ter sido feito uma pequena simulação computacional para demonstrar um dos resultados teóricos.

Também foi realizada uma extensão do trabalho publicado por Ziff-Newman[18]. Pois ele não analisou redes triangulares e hexagonais no seu artigo.

APÊNDICE A

Segue vários gráficos de percolações em redes regulares, todos seguem a mesma ordem:

O gráfico do canto superior esquerdo é a probabilidade do agregado percolar verticalmente(a parte de cima conectar com a de baixo).

O gráfico do canto superior direito é a probabilidade do agregado percolar quer seja verticalmente ou horizontalmente(A parte a esquerda conectar com a da direita).

O gráfico do canto inferior esquerdo é a probabilidade percolar tanto verticalmente quanto horizontalmente.

Por fim, o gráfico do canto inferior direito é a probabilidade dele percolar somente na horizontal ou somente na vertical.

Foi realizado percolação de sítio e percolação de ligação em redes triangulares, hexagonais e quadradas os resultados batem com os feitos por Newman et al.[18] para a rede quadrada. Foi feita uma extensão do trabalho do Ziff-Newman, pois nele não é feito a análise da rede triangular e hexagonal.

Os pontos de percolação batem com os encontrados na literatura.

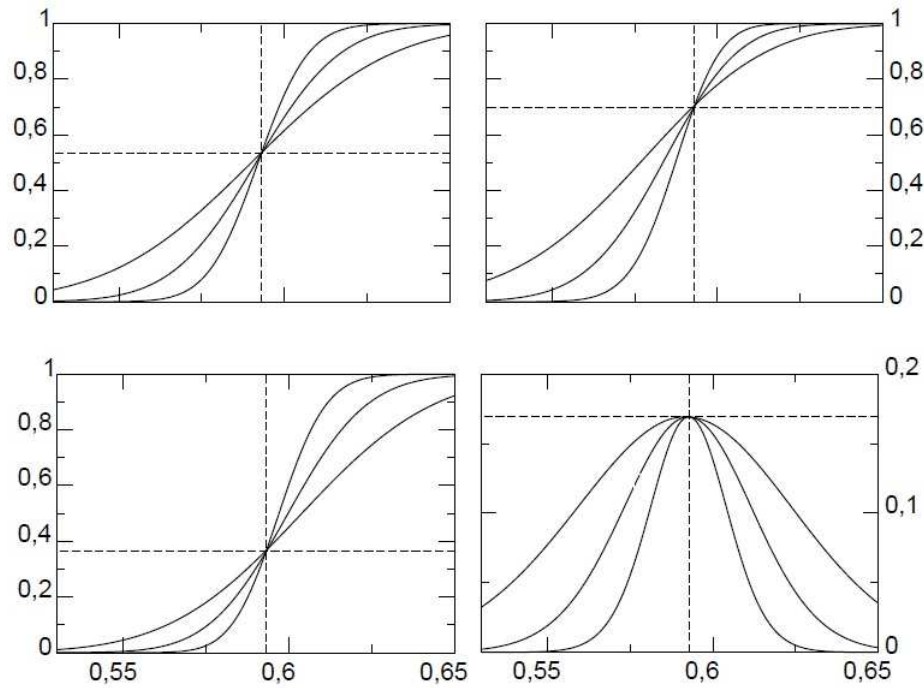


Figura 12: Percolação de sítio em rede quadrada
 Fonte: Próprio autor

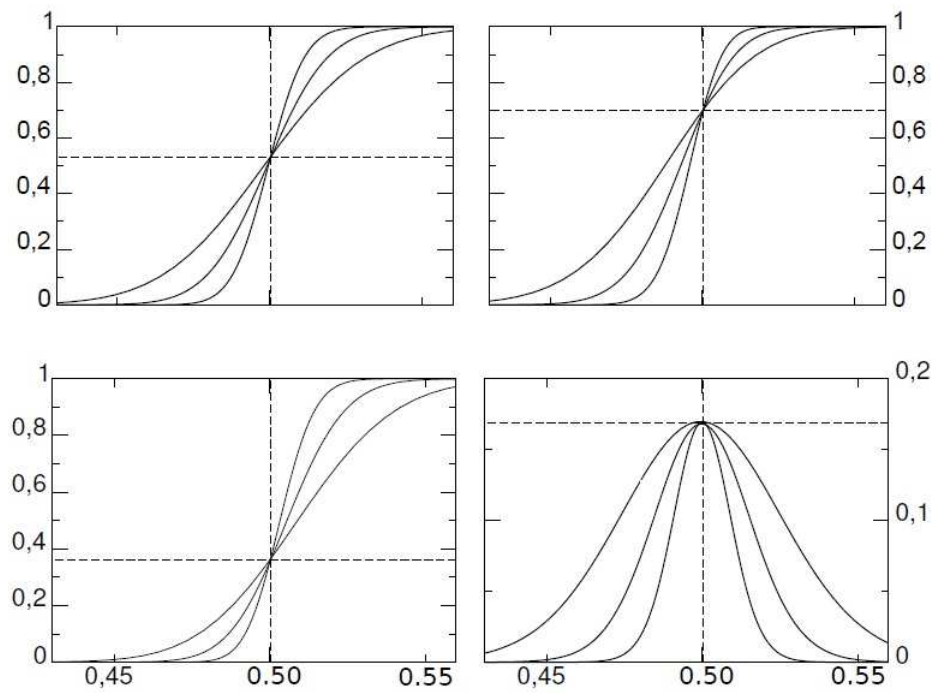


Figura 13: Percolação de ligação em rede quadrada
 Fonte: Próprio autor

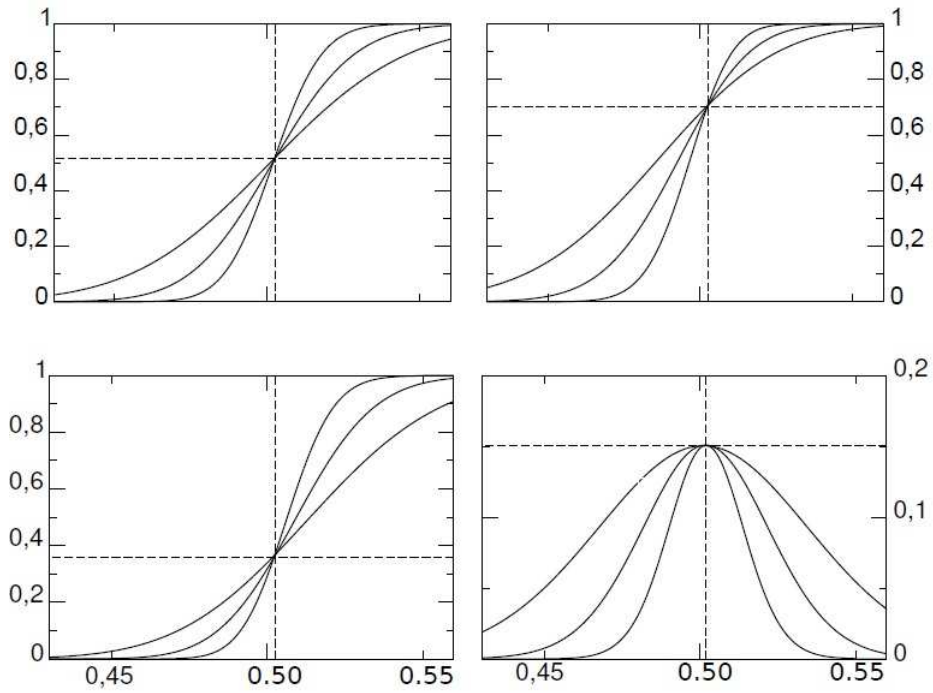


Figura 14: Percolação de sítio em rede triangular
Fonte: Próprio autor

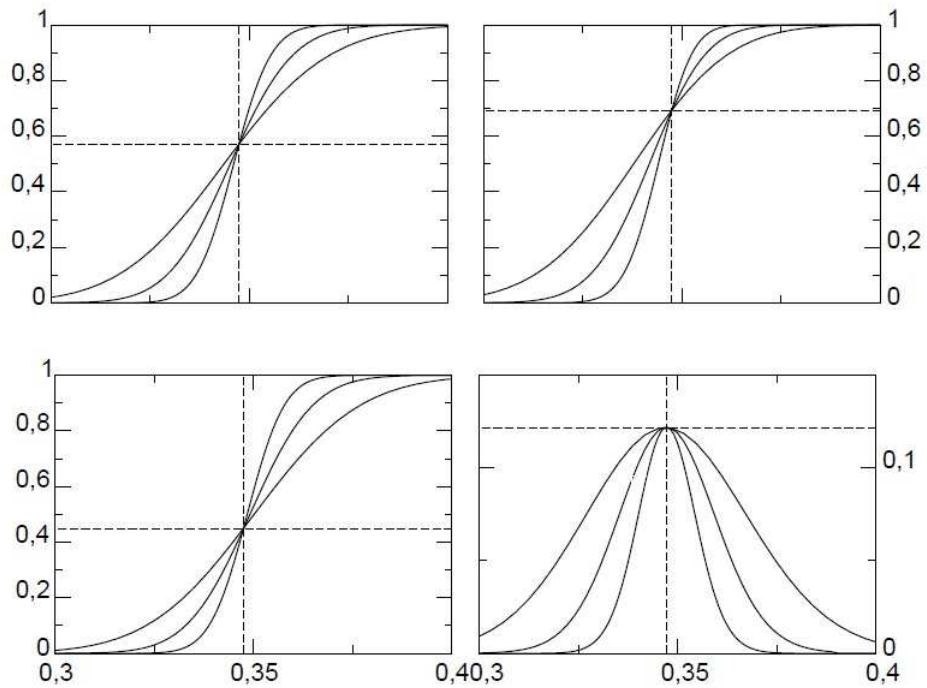


Figura 15: Percolação de ligação em rede triangular
Fonte: Próprio autor

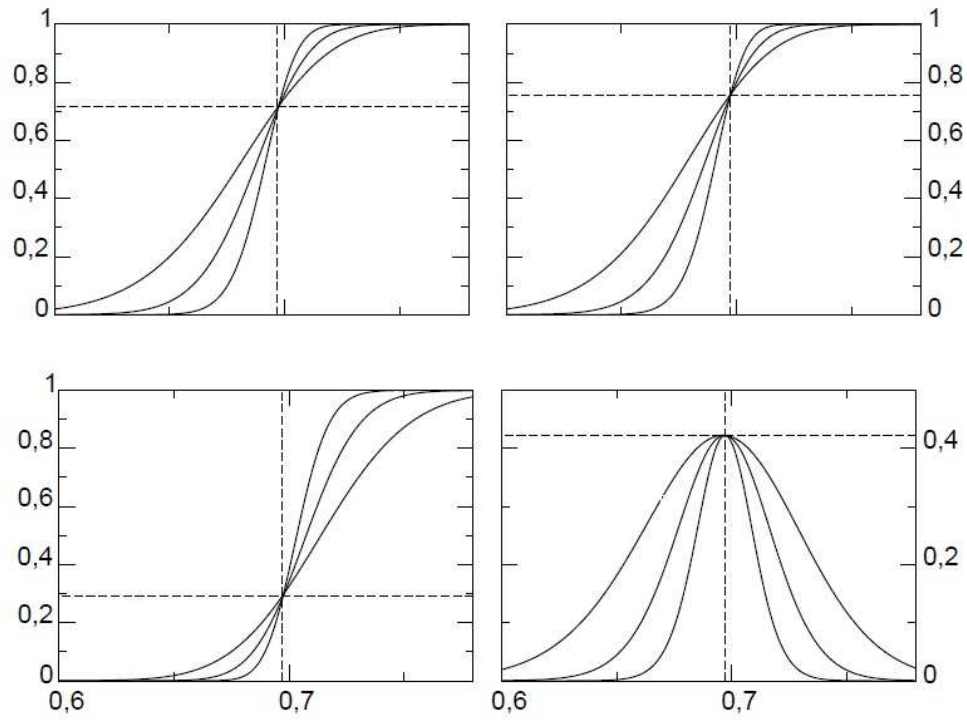


Figura 16: Percolação de sítio em rede hexagonal
Fonte: Próprio autor

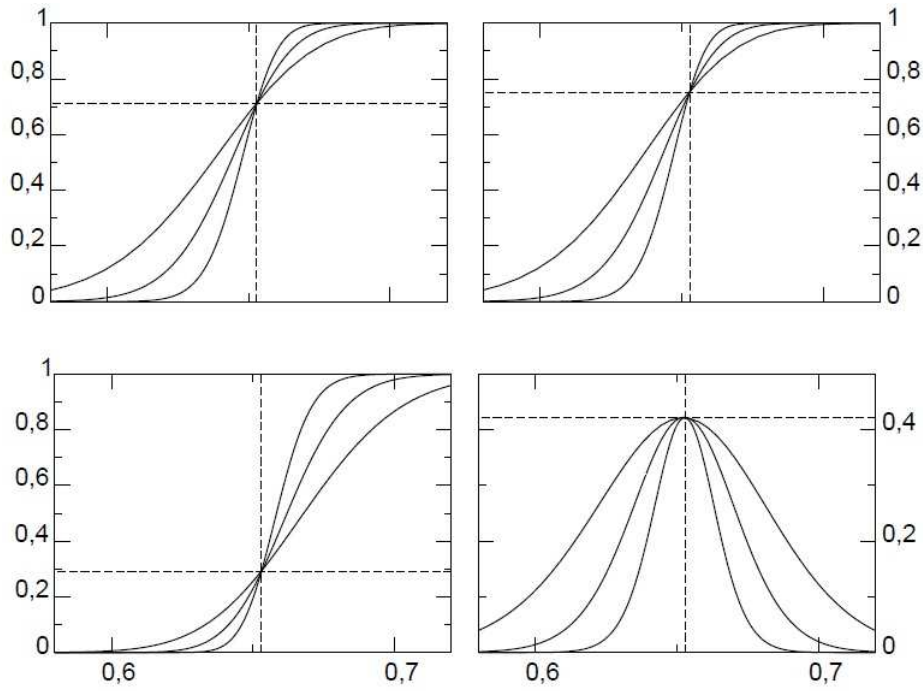


Figura 17: Percolação de ligação em rede hexagonal
Fonte: Próprio autor

REFERÊNCIAS

- [1] Dorogovtsev, Sergei N., and Jose FF Mendes. *Evolution of networks: From biological nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, (2013).
- [2] Callaway, Duncan S. Newman, M. E. J. and Strogatz, Steven H. and Watts, Duncan J. *Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs*, Phys. Rev. Lett. E 85, 5468 (2000).
- [3] Caldarelli, Guido. *Scale-free networks: complex webs in nature and technology*. OUP Catalogue (2007).
- [4] Barabási, Albert-László and Albert, Réka. *Emergence of Scaling in Random Networks*, Science, E 286, 5439 (1999)
- [5] Newman, Mark EJ, and Duncan J. Watts. *Renormalization group analysis of the small-world network model*, Physics Letters A 263.4 (1999).
- [6] Watts, Duncan J., and Steven H. Strogatz. *Collective dynamics of 'small-world' networks*. nature 393.6684 (1998).
- [7] Broadbent, S. R., Hammersley J. M.. *Percolation processes i. crystals and mazes*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (1957)
- [8] Stauffer, D., Aharony, A. *Introduction to Percolation Theory*, 2nd Edition, Taylor and Francis (1992)
- [9] Sahini, M, Sahimi, M. *Applications of percolation theory*, 1st Edition, CRC Press (1994)
- [10] Araújo, A. D.. *Fenômenos de Transporte em agregados de percolação*, (tese de doutorado, Universidade Federal do Ceará) (2002)
- [11] Pontes, J. C.. *Estudo do Algoritmo de Ziff e Newman Para Percolação*, (Monografia de Graduação) (2013)
- [12] Mandelbrot, Benoit. *A Geometria Fractal de*. Freeman Natureza, San Francisco (1982)
- [13] Erdős, Paul, and Rényi, Alfred. *On the strength of connectedness of a random graph*, Acta Mathematica Hungarica 12.1 (1961)
- [14] Newman, M. E. J., Strogatz, S. H., Watts, D. J.. *Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications*, Phys. Rev. E 64, 026118 (2001)
- [15] Barrat, Alain, Barthelemy, Marc e Vespignani, Alessandro . *Dynamical processes on complex networks. Vol. 1*, Cambridge: Cambridge University Press, (2008)

- [16] Molloy, Michael, and Reed, Bruce . *A critical point for random graphs with a given degree sequence*, Random structures algorithms 6.23 (1995)
- [17] Bollobás, Béla. *Random graphs* Springer New York, (1998)
- [18] Newman, EJ, Mark, and Ziff,Robert M. . *Fast Monte Carlo algorithm for site or bond percolation*, Physical Review E 64.1 (2001).