

**HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS DO R^{2m}
INVARIANTES POR $SO(m) \times SO(m)$**

FRANCISCO JOSÉ DE ANDRADE

**Monografia submetida à Coordenação do Curso de
Pós-graduação em Matemática, para a obtenção do grau de mestre.**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

UFC/BU/BCM 04/05/1998



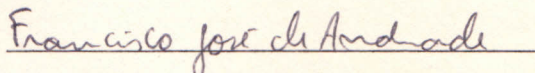
R802000 Hipersuperfícies mínimas do R^{2m}
C415111 invarian.
510 A567h

**FORTALEZA - CE
OUTUBRO DE 1994**

BCM

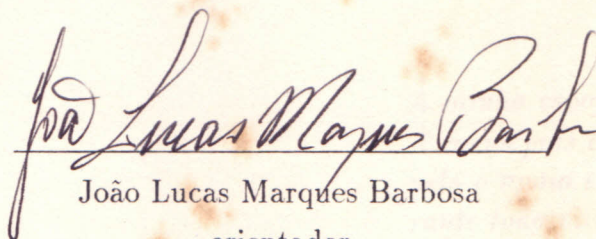
Esta monografia foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em matemática, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se a disposição dos interessados na biblioteca da referida universidade.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.



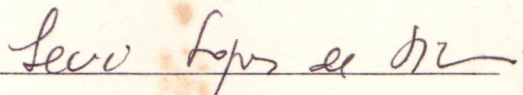
Francisco José de Andrade

MONOGRAFIA APROVADA EM 10 de outubro de 1.994

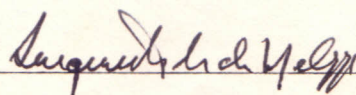


João Lucas Marques Barbosa

orientador



Levi Lopes de Lima



Luquésio Petrola de M. Jorge

AGRADECIMENTOS

*À minha esposa, pelo carinho.
À meus pais e aos meus irmãos,
pelo o apoio e compreensão du-
rante toda minha jornada.*

AGRADECIMENTOS

SUMÁRIO

Quero agradecer a imprescindível orientação dada pelo professor João Lucas Marques Barbosa, não somente nesta monografia, mas também durante todo o meu curso de mestrado. Sou grato a Raimundo Benedito, professor da UFPB - Campus V - Cajazeiras, pelos primeiros passos. Aos professores e funcionários do departamento de matemática da UFC, pela acolhida. Aos colegas de curso, pelo companheirismo. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro.

1 INTRODUÇÃO

SUMÁRIO

Este trabalho tem como base fundamental o estudo feito por Hilário Alencar III sobre hipersuperfícies mínimas do \mathbb{R}^{2m} , quando se trata de pontos críticos de $SC(m)$ e $SC(A, m)$. Nós recorremos com frequência a notação

DEDICATÓRIA	iii
AGRADECIMENTOS	iv
1 INTRODUÇÃO	1
2 PRELIMINARES	6
3 ESTUDO DO SISTEMA (9)	10
3.1 Caracterização dos pontos singulares	10
3.2 Comportamento do campo	16
3.3 Descrição das trajetórias	19
4 SOLUÇÕES NO \mathbb{R}^4 E NO \mathbb{R}^6	30
5 SOLUÇÕES NO \mathbb{R}^{2m} , COM $m \geq 4$	41
6 SOLUÇÕES QUE PASSAM PELA ORIGEM DO \mathbb{R}^{2m}	43
7 APÊNDICE	47
BIBLIOGRAFIA	51

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como base fundamental o estudo feito por *Hilário Alencar* [1], sobre hipersuperfícies mínimas do R^{2m} , invariantes pela ação canônica do grupo $SO(m) \times SO(m)$. Nós reescrevemos este estudo, enriquecendo-o com detalhes e generalizando, em alguns casos, resultados ali expostos.

Usamos os métodos da geometria equivariante [3] para descrever aquelas hipersuperfícies através do estudo de suas curvas "geratrizes" no espaço de órbitas $R^{2m} \setminus G$. O qual pode ser representado por:

$$\pi(R^{2m}) = \{(x, y) \in R^2; x \geq 0, y \geq 0\},$$

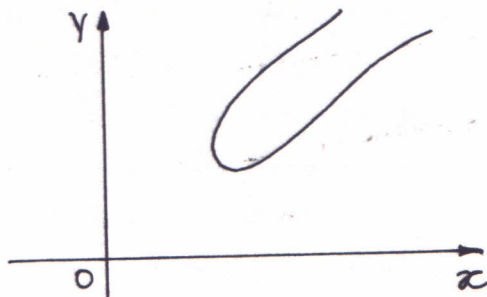
onde $\pi: R^m \times R^m \rightarrow R^2$ é definida por $\pi(X, Y) = (|X|, |Y|)$.

Existem curvas "geratrizes" de três tipos:

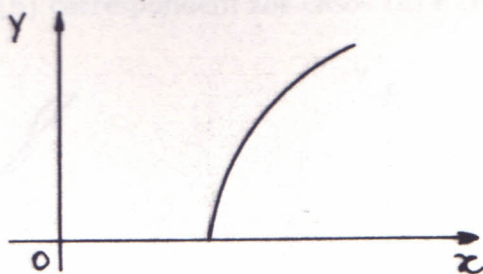
- (a) As que têm uma extremidade no eixo $x > 0$ ou $y > 0$;



- (b) As que não têm extremidades;



(c) As que têm extremidades na origem.



As curvas, do tipo (c), correspondem a hipersuperfícies mínimas que passam sobre a origem do R^{2m} e têm uma única singularidade neste ponto. Este caso pode ser completamente caracterizado pelo seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Seja M^{2m-1} , $m \geq 2$, uma hipersuperfície mínima do R^{2m} , invariante por $SO(m) \times SO(m)$ e que passa pela origem. Então M^{2m-1} é o cone quadrático mínimo*

$$C^{2m-1} = \{(X, Y) \in R^m \times R^m; |X|^2 = |Y|^2\}.$$

Nos casos (a) e (b) as hipersuperfícies são regulares. Sendo que no caso (a), M é topologicamente do tipo $R^m \times S^{m-1}$ e no caso (b), M é do tipo topológico de um cilindro sobre $S^{m-1} \times S^{m-1}$.

Para $m = 2, 3$ o teorema seguinte dá uma completa caracterização das hipersuperfícies relacionadas com os casos (a) e (b).

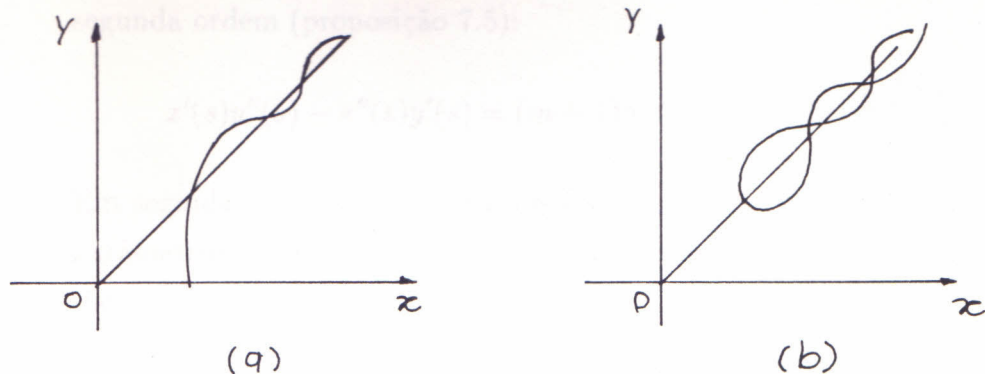
Teorema 1.2 *Seja M^{2m-1} , $m = 2, 3$, uma hipersuperfície completa e mínima do $R^{2m} \setminus \{0\}$ invariante por $SO(m) \times SO(m)$.*

(a) *Se M^{2m-1} é do tipo topológico $R^m \times S^{m-1}$ então M^{2m-1} é mergulhada;*

(b) *Se M^{2m-1} é do tipo topológico de um cilindro $S^{m-1} \times S^{m-1} \times R$ então M^{2m-1} se auto-intercepta infinitas vezes (isto é, o conjunto intersecção tem infinitas componentes conexas).*

Além disto, seja no caso (a) ou no caso (b) a hipersuperfície intercepta o cone quadrático mínimo fora de qualquer compacto e se aproxima arbitrariamente deste cone.

Apresentamos abaixo os esboços das curvas geratrizes do teorema acima. A figura (a) e (b) correspondem aos casos (a) e (b) respectivamente.



Para $m \geq 4$ e M^{2m-1} do tipo topológico $R^m \times S^{m-1}$, Hilário Alencar [2] demonstrou o seguinte resultado: As hipersuperfícies completas e mínimas do $R^{2m} \setminus \{0\}$, invariantes por $SO(m) \times SO(m)$ com tipo topológico $R^m \times S^{m-1}$ têm as seguintes propriedades:

- (i) As hipersuperfícies são mergulhadas;
- (ii) As hipersuperfícies folheiam R^{2m} menos o cone quadrático mínimo.

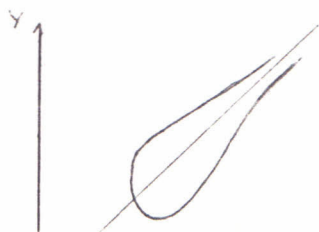
Em particular, as hipersuperfícies são estáveis.

Neste trabalho, consideramos as hipersuperfícies M^{2m-1} , $m \geq 4$, do tipo topológico $S^{m-1} \times S^{m-1} \times R$ e demonstramos o seguinte:

Teorema 1.3 *As hipersuperfícies completas e mínimas do $R^{2m} \setminus \{0\}$, invariantes por $SO(m) \times SO(m)$, com tipo topológico $S^{m-1} \times S^{m-1} \times R$ e que interceptam o cone quadrático mínimo têm as seguintes propriedades:*

- (a) *As hipersuperfícies são mergulhadas;*
- (b) *As hipersuperfícies interceptam o cone quadrático mínimo uma única vez e se aproxima arbitrariamente do mesmo.*

As curvas geratrizes associadas a este tipo de hipersuperfícies têm as propriedades esboçada na figura abaixo.



Nosso trabalho está organizado como se segue. Na seção 2 definimos a noção de curva "geratriz" associada a uma hipersuperfície do R^{2m} invariante por $SO(m) \times SO(m)$. Se mínima, esta curva satisfaz a seguinte equação diferencial de segunda ordem (proposição 7.5):

$$x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = (m-1)[(x'(s))^2 + (y'(s))^2] \left(\frac{x'(s)}{y(s)} - \frac{y'(s)}{x(s)} \right). \quad (1)$$

Em seguida, usando uma idéia de *Bombieri, De Giorgi e Giusti* [4], introduzimos parâmetros φ e θ (veja equação (4)), nesta equação, que são invariantes por homotetias

$$x(s) \rightarrow \lambda x(s),$$

$$y(s) \rightarrow \lambda y(s),$$

onde $\lambda > 0$. Isto transforma o estudo da equação (1) no estudo de um campo de vetores (equação (9)) no plano $\sigma\psi$.

Na seção 3 caracterizamos as singularidades deste campo de vetores, analisamos o seu comportamento ao longo de alguns segmentos de reta e fazemos a descrição de suas trajetórias. Distinguimos dois casos: $m = 2, 3$ e $m \geq 4$. O primeiro caso foi completamente resolvido pelo *Hilário* em [1]. O segundo foi estudado, inicialmente, por *E. Bombieri, E. de Giorgi e E. Giusti* em [4] e é complementado neste trabalho. Mostraremos que os pontos singulares no primeiro caso são: sela e foco e no segundo são: sela e nó.

Na seção 4 consideramos as hipersuperfícies mínimas do R^4 e R^6 . Iniciamos com um resultado que relaciona as trajetórias deste campo com as soluções de (1). Em seguida provaremos que as suas trajetórias que iniciam em ponto de sela e terminam em ponto de foco estão relacionadas com as soluções do tipo (a). Usando o fato que tais curvas satisfazem a equação diferencial (1) provamos que tem as propriedades expressas pela figura (a). Analogamente, as trajetórias que começam e terminam em ponto de foco estão relacionadas com as soluções do tipo (b). Neste caso, nós primeiro consideramos os pontos de intersecção das trajetórias do campo com as retas $\sigma + \psi = 2k\pi$ e $\psi - \sigma = (2j + 1)\pi$, k e j inteiro. Mostramos que tais pontos de intersecção correspondem a máximos e mínimos do ângulo do vetor posição da curva geratriz com respeito ao eixo dos x (proposição 4.3). Em seguida,

usando estas informações e através de uma rigorosa análise (lema 4.4), provamos que as soluções do tipo (b) se auto-interceptam.

Na seção 5 tomamos as hipersuperfícies do $R^{2m} \setminus \{0\}$, $m \geq 4$. Mostramos que as soluções $\bar{\alpha}_\lambda$ do sistema (1) relacionadas com $\bar{\alpha}$ (lema 3.8) têm as propriedades expressas pela figura (c) e daí demonstramos o teorema 1.3.

Na seção 6 tratamos o caso em que a hipersuperfície passa pela origem do R^{2m} . Neste caso, usamos série de potências para estudar (1) e provamos que a única solução que passa na origem é a semi-reta $x(s) = y(s) \geq o$.

2 PRELIMINARES

Definição. (ação de um grupo). Diz-se que um grupo G age em uma variedade diferenciável M quando existe uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ tal que:

(i) Para cada $g \in G$ a aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ dada por $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$, $p \in M$, é um difeomorfismo, e $\varphi_e = \text{identidade}$;

(ii) Se $g_1, g_2 \in G$, $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \varphi_{g_2}$.

Se G age em M , esta ação determina uma relação de equivalência \sim em M definida por: $p_1 \sim p_2$ se, e só se, $p_2 = \varphi_g(p_1)$, para algum $g \in G$.

Seja $SO(m)$ o grupo das matrizes ortogonais $m \times m$. Considere $G = SO(m) \times SO(m)$ agindo de maneira canônica sobre $R^m \times R^m$. Sabemos, da álgebra linear, que para todo $A \in SO(m)$, $|A(X)| = |X|$. Assim a órbita desta ação pelo ponto $(X, Y) \in R^m \times R^m$ é dada por $S^{m-1}(|X|) \times S^{m-1}(|Y|)$, onde $S^{m-1}(|X|)$ denota a esfera de R^m de raio $|X|$, ou seja, os elementos do espaço quociente R^{2m}/G são produtos de esferas. Podemos identificar R^{2m}/G com

$$\Gamma = \{(x, y) \in R^2; x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Esta identificação é feita usando a função

$$\pi : R^m \times R^m \rightarrow R^2,$$

definida por $\pi(X, Y) = (|X|, |Y|)$. Observe que $\pi \circ G = \pi$, ou seja, π é constante nas órbitas de G e portanto ela define uma aplicação

$$\tilde{\pi} : R^{2m}/G \rightarrow \Gamma$$

a qual é 1-1 e sobre.

Se M^{2m-1} é uma hipersuperfície de R^{2m} invariante por $SO(m) \times SO(m)$. Então $\pi(M^{2m-1})$ é uma curva η em Γ . Se M^{2m-1} é invariante por G e regular, a intersecção de η com o bordo de Γ é ortogonal (veja página 32).

Por analogia com as hipersuperfícies rotacionais do R^3 chamamos a curva η de curva geratriz da hipersuperfície M^{2m-1} .

Considerando-se η parametrizada pelo comprimento de arco temos, de acordo com a proposição 7.5, que a hipersuperfície M^{2m-1} invariante por G é mínima se, e só se, sua curva geratriz satisfaz a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = (m-1) \left(\frac{x'(s)}{y(s)} - \frac{y'(s)}{x(s)} \right). \quad (2)$$

Observa-se facilmente que: Se a curva $(x(s), y(s))$ é solução de (2) então a curva $(y(s), x(s))$, que é sua simétrica em relação a diagonal $x = y$, é também solução de (2); A curva $(x(s), y(s))$, com $x(s) = y(s)$, é solução de (2). Esta curva geratriz está associada a hipersuperfície mínima que tem singularidade na origem do R^{2m} , a qual será representada por:

$$C = \{(X, Y) \in R^m \times R^m; |X|^2 = |Y|^2\}.$$

Chamaremos C de cone quadrático mínimo.

Definamos, os parâmetros, φ e θ por:

$$\cos \varphi(s) = \frac{x(s)}{d(s)}, \quad \text{sen} \varphi(s) = \frac{y(s)}{d(s)}, \quad \cos \theta(s) = x'(s), \quad \text{sen} \theta(s) = y'(s), \quad (3)$$

onde $d(s) = \sqrt{[x(s)]^2 + [y(s)]^2}$.

Segue-se daí que:

$$\text{tg} \varphi(s) = \frac{\text{sen} \varphi(s)}{\cos \varphi(s)} = \frac{y(s)}{x(s)},$$

$$\text{tg} \theta(s) = \frac{\text{sen} \theta(s)}{\cos \theta(s)} = \frac{y'(s)}{x'(s)},$$

ou seja,

$$\varphi(s) = \text{arctg} \left(\frac{y(s)}{x(s)} \right), \quad \theta(s) = \text{arctg} \left(\frac{y'(s)}{x'(s)} \right). \quad (4)$$

Usando-se (3) e (4) tem-se

$$\varphi' = \frac{x^2 d(s)}{d^2(s)} \left(\frac{\text{sen} \theta \cos \varphi - \cos \theta \text{sen} \varphi}{x^2} \right) = \frac{\text{sen}(\theta - \varphi)}{d(s)}. \quad (5)$$

Como η satisfaz (2) obtém-se de (4) e (3) que

Assim, o segundo termo de (7) é igual a

$$\theta' = (m-1) \left(\frac{\cos \theta}{d(s) \operatorname{sen} \varphi} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{d(s) \cos \varphi} \right) = \frac{2(m-1) \cos(\theta + \varphi)}{d(s) \operatorname{sen} 2\varphi}. \quad (6)$$

Usando-se (5) e a expressão acima deduz-se que

$$-2(m-1)\varphi' \cos(\theta + \varphi) + \theta' \operatorname{sen}(2\varphi) \operatorname{sen}(\theta - \varphi) = 0. \quad (7)$$

Definamos parâmetros σ e ψ por

$$\begin{aligned} \theta - 3\varphi &= \sigma - \frac{\pi}{2}, \\ \theta + \varphi &= \psi + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Segue-se e daí que

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\psi - \sigma + \pi}{4}, \\ \theta &= \frac{3\psi + \sigma + \pi}{4}. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores no primeiro termo de (7) obtem-se:

$$\begin{aligned} -2(m-1)\varphi' \cos(\varphi + \theta) &= -2(m-1) \left(\frac{\psi' - \sigma'}{4} \right) \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(m-1)(\psi' - \sigma') \operatorname{sen} \psi. \end{aligned}$$

Além disto, como

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen} \psi &= \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(\theta + \varphi) \\ &= \cos(\theta - \varphi) \cos 2\varphi - \operatorname{sen}(\theta - \varphi) \operatorname{sen} 2\varphi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \sigma &= \operatorname{sen}\left(\theta - 3\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos((\theta - \varphi) - 2\varphi) \\ &= \cos(\theta - \varphi) \cos 2\varphi + \operatorname{sen}(\theta - \varphi) \operatorname{sen} 2\varphi \end{aligned}$$

tem-se que

$$\frac{\operatorname{sen} \sigma + \operatorname{sen} \psi}{2} = \operatorname{sen}(2\varphi) \operatorname{sen}(\theta - \varphi).$$

Assim, o segundo termo de (7) é igual a

$$\frac{1}{8}(3\psi' + \sigma')(\text{sen}\psi + \text{sen}\sigma)$$

Por (7) obtem-se

$$(m-1)(\psi' - \sigma')\text{sen}\psi + \frac{1}{4}(3\psi' + \sigma')(\text{sen}\psi + \text{sen}\sigma) = 0$$

$$(m-1)\psi'\text{sen}\psi - (m-1)\sigma'\text{sen}\psi + \frac{3}{4}\psi'(\text{sen}\psi + \text{sen}\sigma) + \frac{1}{4}\sigma'(\text{sen}\psi + \text{sen}\sigma) = 0$$

$$\psi'[(m-1)\text{sen}\psi + \frac{3}{4}\text{sen}\psi + \frac{3}{4}\text{sen}\sigma] + \sigma'[-(m-1)\text{sen}\psi + \frac{1}{4}\text{sen}\psi + \frac{1}{4}\text{sen}\sigma] = 0.$$

E daí o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds} &= -\frac{3}{2}\text{sen}\sigma - (2(m-1) + \frac{3}{2})\text{sen}\psi, \\ \frac{d\psi}{ds} &= \frac{1}{2}\text{sen}\sigma - (2(m-1) - \frac{1}{2})\text{sen}\psi. \end{aligned} \quad (9)$$

Como é usual vamos interpretar este sistema como um campo de vetores do qual desejamos conhecer suas órbitas.

3 ESTUDO DO SISTEMA (9)

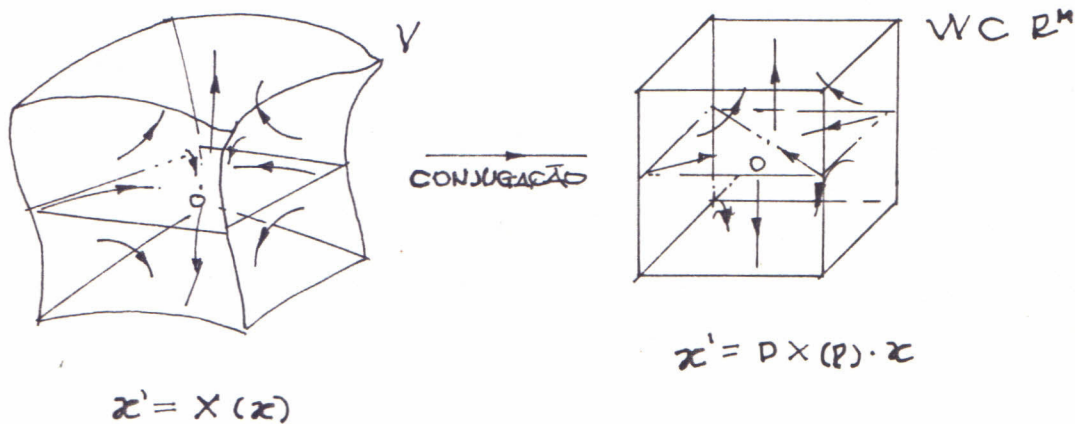
3.1 Caracterização dos pontos singulares

Definição: Um ponto singular de um campo vetorial X , de classe $C^r, r \geq 1$, chama-se hiperbólico se todos os autovalores de $DX(p)$ têm parte real diferente de zero.

Definição: Seja $\varphi_1 : D_1 \rightarrow R^n$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow R^n$ os fluxos gerados pelos campos $X_1 : U_1 \rightarrow R^n$ e $X_2 : U_2 \rightarrow R^n$, respectivamente. Diz-se que X_1 é topologicamente conjugado a X_2 quando existe um homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$.

Os pontos singulares de (9) são da forma $(\varphi, \psi) = (j\pi, k\pi)$, j e k inteiros. Verificaremos que estes pontos são hiperbólicos e daí utilizaremos o seguinte resultado para caracteriza-los.

Teorema de Hartman. Seja $X : U \rightarrow R^n$ um campo vetorial de classe C^1 e p um ponto singular hiperbólico. Existe uma vizinhança V de p em U e W de 0 em R^n tal que $X|_V$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_W$.



Pela periodicidade da função seno é suficiente considerarmos o caso $j, k \in \{-1, 0, 1\}$.

Reescrevendo o campo de vetores como

$$X(\sigma, \psi) = \left(-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\sigma - (2(m-1) + \frac{3}{2})\operatorname{sen}\psi, \frac{1}{2}\operatorname{sen}\sigma - (2(m-1) - \frac{1}{2})\operatorname{sen}\psi\right)$$

e denotando por $DX(p)$ a diferencial de X em p , tem-se que

$$DX(\sigma, \psi) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\cos\sigma & -(2(m-1) + \frac{3}{2})\cos\psi \\ \frac{1}{2}\cos\sigma & -(2(m-1) - \frac{1}{2})\cos\psi \end{bmatrix}.$$

Observamos que, para toda matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

com $\det \neq 0$ tem-se: $\det A(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \operatorname{traço}A\lambda + \det A$
e daí que

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}A \pm \sqrt{(\operatorname{tr}A)^2 - 4\det A}}{2}$$

Da observação acima e do fato de que $DX(0, 0) = -DX(\pi, \pi) = -DX(-\pi, \pi) = -DX(-\pi, -\pi) = -DX(\pi, -\pi) =$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -(2(m-1) + \frac{3}{2}) \\ \frac{1}{2} & -(2(m-1) - \frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

e $DX(\pi, 0) = DX(-\pi, 0) = -DX(0, \pi) = -DX(0, -\pi) =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -(2(m-1) + \frac{3}{2}) \\ -\frac{1}{2} & -(2(m-1) - \frac{1}{2}) \end{bmatrix},$$

tem-se o seguinte:

a) Os autovalores da matriz $DX(0, 0)$ são:

$$\lambda_1(0, 0) = \frac{1 - 2m + \sqrt{\Delta}}{2},$$
$$\lambda_2(0, 0) = \frac{1 - 2m - \sqrt{\Delta}}{2},$$

onde $\Delta = 4m^2 - 20m + 17$;

b) Os autovalores das matrizes $DX(\pi, \pi), DX(-\pi, \pi), DX(-\pi, -\pi)$ e $DX(\pi, -\pi)$ são:

$$\lambda_1(\pi, \pi) = \lambda_1(-\pi, \pi) = \lambda_1(-\pi, -\pi) = \lambda_1(\pi, -\pi) = \frac{2m - 1 + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$\lambda_2(\pi, \pi) = \lambda_2(-\pi, \pi) = \lambda_2(-\pi, -\pi) = \lambda_2(\pi, -\pi) = \frac{2m - 1 - \sqrt{\Delta}}{2};$$

c) Os autovalores das matrizes $DX(\pi, 0)$ e $DX(-\pi, 0)$ são:

$$\lambda_1(\pi, 0) = \lambda_1(-\pi, 0) = 2,$$

$$\lambda_2(\pi, 0) = \lambda_2(-\pi, 0) = 2 - 2m;$$

d) Os autovalores das matrizes $DX(0, \pi)$ e $DX(0, -\pi)$ são:

$$\lambda_1(0, \pi) = \lambda_1(0, -\pi) = 2m - 2,$$

$$\lambda_2(0, \pi) = \lambda_2(0, -\pi) = -2.$$

Considerando-se m como um parâmetro contínuo e não negativo, verificam-se que o polinômio

$$\Delta = 4m^2 - 20m + 17$$

tem raízes $\frac{5}{2} \pm \sqrt{2}$ e que

$$\Delta > 0, \text{ se } m > \frac{5}{2} + \sqrt{2} \text{ ou } m < \frac{5}{2} - \sqrt{2};$$

$$\Delta < 0, \text{ se } \frac{5}{2} - \sqrt{2} < m < \frac{5}{2} + \sqrt{2}.$$

Daqui em diante distinguiremos o caso $m \leq 3$ do caso $m \geq 4$, pois $\Delta < 0$ no primeiro caso e $\Delta > 0$ no segundo.

caso 1: $m = 2, 3$. Como $\Delta < 0$, tem-se que:

- a) $\lambda_1(0, 0)$ e $\lambda_2(0, 0)$ são complexos conjugados com parte real negativa;
- b) $\lambda_1(\pi, \pi)$, $\lambda_1(-\pi, \pi)$, $\lambda_1(-\pi, -\pi)$, $\lambda_1(\pi, -\pi)$, $\lambda_2(\pi, \pi)$, $\lambda_2(-\pi, \pi)$, $\lambda_2(-\pi, -\pi)$ e $\lambda_2(\pi, -\pi)$ são complexos conjugados com parte real positiva;
- c) $\lambda_1(\pi, 0)$, $\lambda_1(0, \pi)$, $\lambda_1(-\pi, 0)$, $\lambda_1(0, -\pi)$, $\lambda_2(\pi, 0)$, $\lambda_2(0, \pi)$, $\lambda_2(-\pi, 0)$ e $\lambda_2(0, -\pi)$ são reais e distintos de zero com $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Além disto, como toda solução de $x' = DX(p)x$ pode ser escrita na forma (observação 7.1):

i) $\varphi(t) = e^{\alpha t} \rho [\cos(\omega - \beta t)v_1 + \text{sen}(\omega - \beta t)v_2]$ se $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$, com $\beta \neq 0$. Onde $v = v_1 + iv_2$ é o vetor próprio associado a λ_1 ;

ii) $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$, se λ_1 e λ_2 são reais e distintos de zero com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Onde v_1 e v_2 são os vetores próprios associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente.

Teremos que:

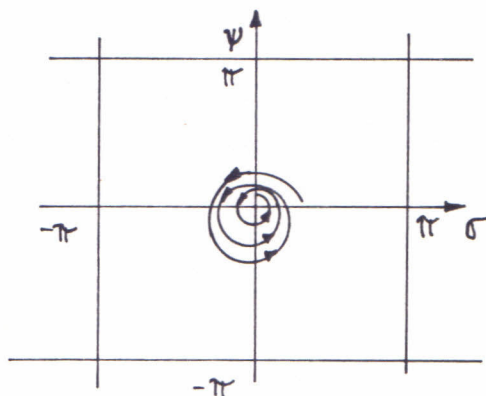
a) $(0, 0)$ é um ponto de foco estável do sistema $x' = DX(0, 0)x$;

b) $(0, 0)$ é um ponto de foco instável dos seguintes sistemas: $x' = DX(\pi, \pi)x$, $x' = DX(-\pi, \pi)x$, $x' = DX(-\pi, -\pi)x$ e $x' = DX(\pi, -\pi)x$;

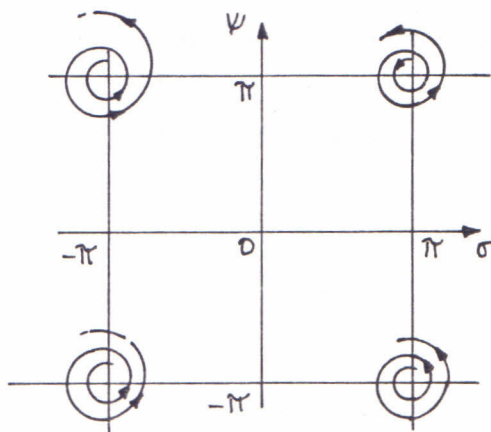
c) $(0, 0)$ é um ponto de sela dos seguintes sistemas: $x' = DX(\pi, 0)x$, $x' = DX(0, \pi)x$, $x' = DX(-\pi, 0)x$ e $x' = DX(0, -\pi)x$.

Decorre daí e do Teorema de Hartman que:

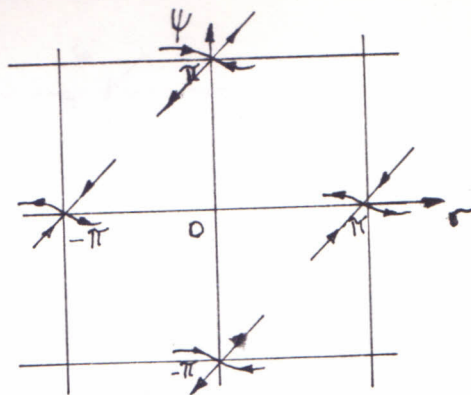
a) $(0, 0)$ é um ponto de foco estável de (9);



b) (π, π) , $(-\pi, \pi)$, $(-\pi, -\pi)$ e $(\pi, -\pi)$ são pontos de focos instáveis de (9);



c) $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(-\pi, 0)$ e $(0, -\pi)$ são pontos de sela do sistema (9).



Caso 2: $m \geq 4$. Como $\Delta > 0$, e $\sqrt{\Delta} < 2m - 1$ tem-se que λ_1 e λ_2 são números reais com:

- a) $\lambda_2(0, 0) < \lambda_1(0, 0) < 0$;
- b) $\lambda_1(k\pi, j\pi) > \lambda_2(k\pi, j\pi) > 0$, $k, j \in \{-1, 1\}$;
- c) $\lambda_1(\pi, 0) = \lambda_1(-\pi, 0) > 0 > \lambda_2(\pi, 0) = \lambda_2(-\pi, 0)$;
- d) $\lambda_1(0, \pi) = \lambda_1(0, -\pi) > 0 > \lambda_2(0, \pi) = \lambda_2(0, -\pi)$.

Neste caso como toda solução de $x' = DX(p)x$ pode ser escrita na forma (observação 7.1)

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

tem-se que:

- a) $(0, 0)$ é um ponto de nó estável do sistema $x' = DX(0, 0)x$;
- b) $(0, 0)$ é um ponto de nó instável dos seguintes sistemas: $x' = DX(\pi, \pi)x$, $x' = DX(-\pi, \pi)x$, $x' = DX(-\pi, -\pi)x$ e $x' = DX(\pi, -\pi)x$;
- c) $(0, 0)$ é ponto de sela dos sistemas: $x' = DX(\pi, 0)x$, $x' = DX(0, \pi)x$, $x' = DX(-\pi, 0)x$ e $x' = DX(0, -\pi)x$.

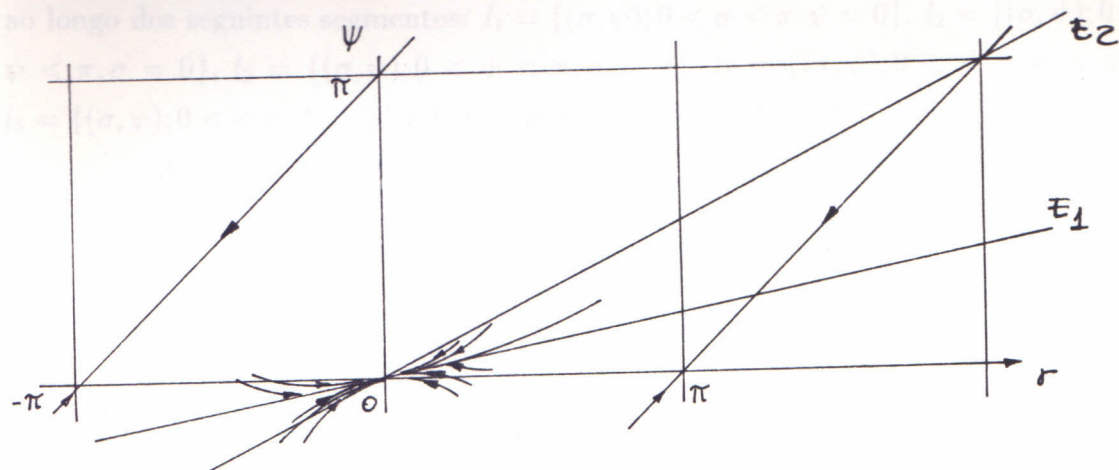
Dai e pelo Teorema de Hartman, tem-se:

a) $(0, 0)$ é um ponto de nó estável de (9); Além disto, se E_1 e E_2 são as retas geradas por v_1 e v_2 , respectivamente. Afirmamos que: Se $c_1 \neq 0$, a reta tangente à trajetória tende a reta E_1 , quando $t \rightarrow +\infty$. De fato, se $t \rightarrow +\infty$,

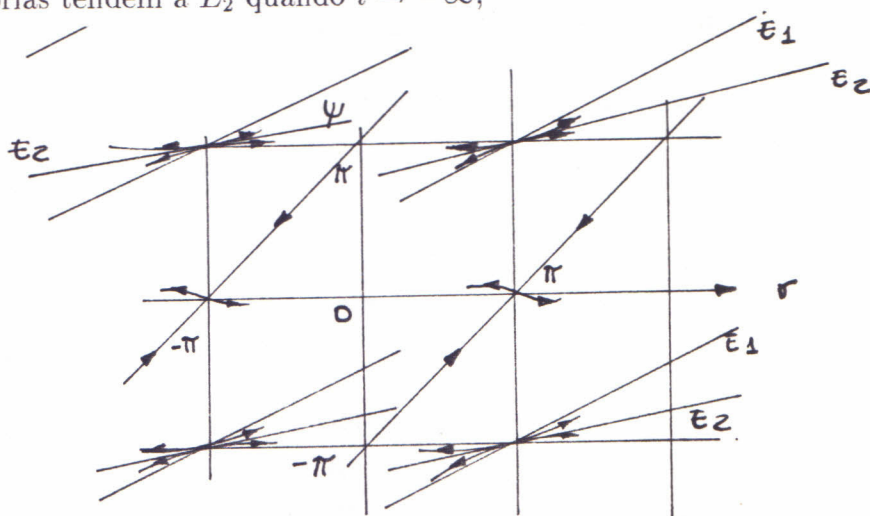
$$\frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{c_1} \rightarrow 0,$$

3.2 Comportamento do campo

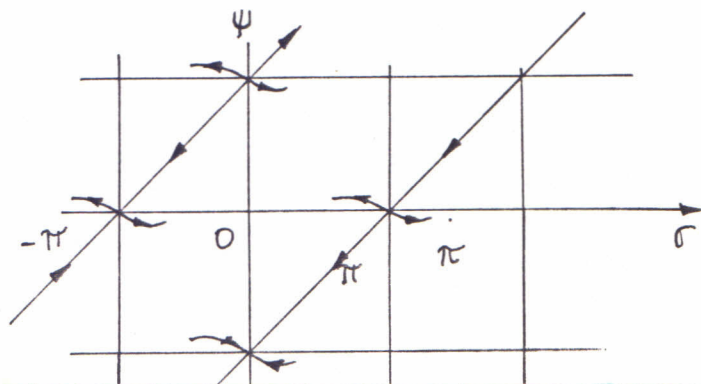
pois $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$. Se $c_1 = 0$ as soluções são as semiretas de E_2 .



b) (π, π) , $(-\pi, \pi)$, $(-\pi, -\pi)$ e $(\pi, -\pi)$ são pontos de nó instáveis de (9). De maneira análoga, ao caso (a), nós podemos mostrar que as retas tangentes às trajetórias tendem a E_2 quando $t \rightarrow -\infty$;



c) $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(-\pi, 0)$ e $(0, -\pi)$ são pontos de sela do sistema (9).



3.2 Comportamento do campo

Analisemos o comportamento do campo vetorial em $\sigma\psi$ determinado pelo sistema (9) ao longo dos seguintes segmentos: $l_1 = \{(\sigma, \psi); 0 < \sigma < \pi, \psi = 0\}$, $l_2 = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi < \pi, \sigma = 0\}$, $l_3 = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi < \pi, \sigma = \pi\}$, $l_4 = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi = \sigma < \pi\}$, $l_5 = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi = \frac{\sigma}{2} < \frac{\pi}{2}\}$ e $l_6 = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{2}\}$.

Ao longo de l_1 , tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{ds} &= -\frac{3}{2}\text{sen}\sigma < 0, \\ \frac{d\psi}{ds} &= \frac{1}{2}\text{sen}\sigma > 0.\end{aligned}$$

De onde decorre que

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = -\frac{1}{3}.$$

Ao longo de l_2 , tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{ds} &= -(2(m-1) + \frac{3}{2})\text{sen}\psi < 0, \\ \frac{d\psi}{ds} &= -(2(m-1) - \frac{1}{2})\text{sen}\psi < 0.\end{aligned}$$

De onde decorre que

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{4(m-1) - 1}{4(m-1) + 3}.$$

Desta forma

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\sigma} &= \frac{3}{7}, \quad \text{se } m = 2; \\ \frac{d\psi}{d\sigma} &= \frac{7}{11}, \quad \text{se } m = 3; \\ \frac{1}{2} &< \frac{d\psi}{d\sigma} < 1, \quad \text{se } m \geq 4.\end{aligned}$$

Pois neste caso: $m - 1 \geq 3 \Leftrightarrow 4(m - 1) \geq 12 > 5 \Leftrightarrow 8(m - 1) \geq 4(m - 1) + 5 \Leftrightarrow 8(m - 1) - 2 > 4(m - 1) + 3$.

Ao longo de l_3 , tem-se

$$\frac{d\sigma}{ds} = -(2(m-1) + \frac{3}{2})\text{sen}\psi < 0,$$

$$\frac{d\psi}{ds} = -(2(m-1) - \frac{1}{2})\text{sen}\psi < 0.$$

De onde vem que

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{4(m-1) - 1}{4(m-1) + 3}.$$

De maneira análoga ao caso do l_2 , obtem-se que

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{3}{7}, \quad \text{se } m = 2;$$

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{7}{11}, \quad \text{se } m = 3;$$

$$\frac{1}{2} < \frac{d\psi}{d\sigma} < 1, \quad \text{se } m \geq 4.$$

Ao longo de l_4 , tem-se

$$\frac{d\sigma}{ds} = -(2(m-1) + 3)\text{sen}\psi < 0,$$

$$\frac{d\psi}{ds} = -(2(m-1) - 1)\text{sen}\psi < 0.$$

Dai decorre que

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{2(m-1) - 1}{2(m-1) + 3}.$$

Desta forma

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{1}{5}, \quad \text{se } m = 2;$$

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{3}{7}, \quad \text{se } m = 3;$$

$$\frac{1}{2} < \frac{d\psi}{d\sigma} < 1, \quad \text{se } m \geq 4.$$

Onde a última afirmação decorre das seguintes equivalências: $m - 1 \geq 3 \Leftrightarrow 2(m - 1) \geq 6 \Leftrightarrow -2(m - 1) \leq -6 < -5 \Leftrightarrow -4(m - 1) < -2(m - 1) - 5.$

Ao longo de l_5 , tem-se

$$\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{3}{2}\text{sen}2\psi - (2(m-1) + \frac{3}{2})\text{sen}\psi = -\text{sen}\psi[3\cos\psi + 2(m-1) + \frac{3}{2}] < 0,$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2}\text{sen}2\psi - (2(m-1) - \frac{1}{2})\text{sen}\psi = -\text{sen}\psi[-\cos\psi + 2(m-1) - \frac{1}{2}] < 0.$$

De onde vem que

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{2(m-1) - \frac{1}{2} - \cos\psi}{2(m-1) + \frac{3}{2} + \cos\psi} \geq \frac{2(m-1) - \frac{3}{2}}{2(m-1) + \frac{9}{2}} > 1,$$

para $m \geq 4$.

Ao longo de l_6 , tem-se que $\text{sen}\sigma = \text{sen}(\pi - 2\psi) = \text{sen}2\psi = 2\cos\psi\text{sen}\psi$.

De onde vem que

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds} &= -(3\cos\psi + 2(m-1) - \frac{3}{2})\text{sen}\psi < 0, \\ \frac{d\psi}{ds} &= (\cos\psi - (2(m-1) - \frac{1}{2}))\text{sen}\psi < 0, \end{aligned}$$

Proposição 3.1 $\frac{d\psi}{d\sigma} = 1$ se, e somente se, $\sigma + \psi = 2k\pi$ ou $\psi - \sigma = (2j+1)\pi$, k e j inteiros.

Demonstração.

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = 1$$

equivale a

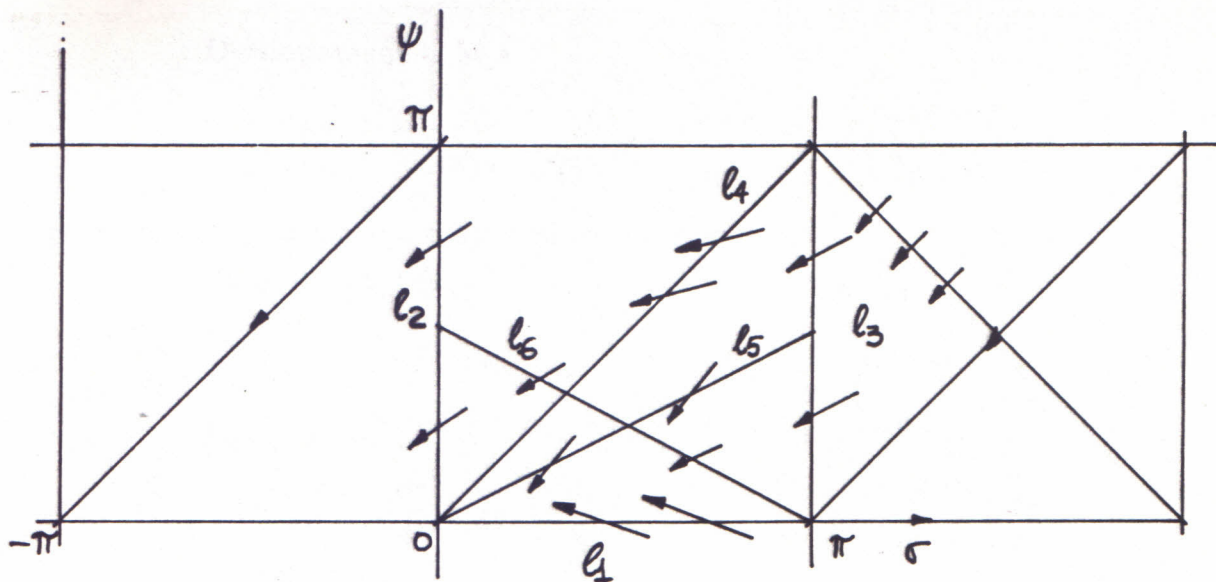
$$-\frac{3}{2}\text{sen}\sigma - (2(m-1) + \frac{3}{2})\text{sen}\psi = \frac{1}{2}\text{sen}\sigma - (2(m-1) - \frac{1}{2})\text{sen}\psi,$$

ou seja,

$$\text{sen}\sigma + \text{sen}\psi = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\sigma = \text{sen}(-\psi).$$

Onde sabemos, que a última igualdade ocorre se, e somente se, $\sigma + \psi = 2k\pi$ ou $\psi - \sigma = (2j+1)\pi$, k e j inteiros.

De acordo com o estudo acima, tem-se o seguinte esboço do comportamento do campo (9).



3.3 Descrição das trajetórias

Estudaremos agora as trajetórias do campo vetorial determinado pelo sistema (9). Começamos observando que toda solução do campo considerado está definida em toda reta real. Isto decorre do corolário 5, página 211 de [11], pois verificaremos abaixo que este campo tem a propriedade de que $|X(\sigma, \psi)| < c^{te}$, onde esta constante depende de m .

$$\begin{aligned}
 |X(\sigma, \psi)|^2 &= \frac{9}{4} \text{sen}^2 \sigma + 3\left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \text{sen} \sigma \text{sen} \psi + \left[2(m-1) - \frac{1}{2}\right]^2 \text{sen}^2 \psi \\
 &+ \frac{1}{4} \text{sen}^2 \sigma - \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \text{sen} \sigma \text{sen} \psi + \left[2(m-1) - \frac{1}{2}\right]^2 \text{sen}^2 \psi \\
 &= \frac{5}{2} \text{sen}^2 \sigma + (4(m-1) + 5) \text{sen} \sigma \text{sen} \psi + \\
 &\quad \left\{ \left[2(m-1) + \frac{3}{2}\right]^2 + \left[2(m-1) - \frac{1}{2}\right]^2 \right\} \text{sen}^2 \psi \\
 &\leq \frac{5}{2} + 4(m-1) + 5 + \left\{ \left[2(m-1) + \frac{3}{2}\right]^2 + \left[2(m-1) - \frac{1}{2}\right]^2 \right\} \\
 &= c^{te},
 \end{aligned}$$

para m fixo.

Nosso próximo passo é a demonstração da seguinte proposição.

Proposição 3.2 *O campo vetorial (9) não possui órbitas periódicas.*

Demonstração. Seja

$$V(\sigma, \psi) = \frac{1}{4(m-1)+3} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\psi}{2}\right),$$

onde $(\sigma, \psi) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$. Verificamos que:

i) $V(0, 0) = 0, V(\sigma, \psi) > 0$ para todo $(\sigma, \psi) \neq (0, 0)$;

ii)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{ds} &= \frac{1}{4(m-1)+3} 2\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{ds} + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \frac{1}{2} \frac{d\psi}{ds} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}\sigma}{4(m-1)+3} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\psi \frac{d\psi}{ds} \\ &= -\frac{3\operatorname{sen}^2\sigma}{4(4(m-1)+3)} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\psi + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\psi - \frac{1}{4} (4(m-1)-1) \operatorname{sen}^2\psi \\ &= -\left(\frac{3\operatorname{sen}^2\sigma}{4(4(m-1)+3)} + \frac{4(m-1)-1}{4} \operatorname{sen}^2\psi \right). \end{aligned}$$

Desta forma $\frac{dV}{ds} < 0$ quando $(\sigma, \psi) \neq (0, 0)$, isto é, V é uma função de Liapounov estrita para a singularidade $(0, 0)$. Portanto a função $s \mapsto V(\sigma(s), \psi(s))$ é estritamente decrescente e conseqüentemente não existe curva fechada em $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$. Pela periodicidade da função seno temos o resultado.

Existem ainda dois fatos que são óbvios, porém muitos úteis na construção do retrato de fase do campo em questão. São eles:

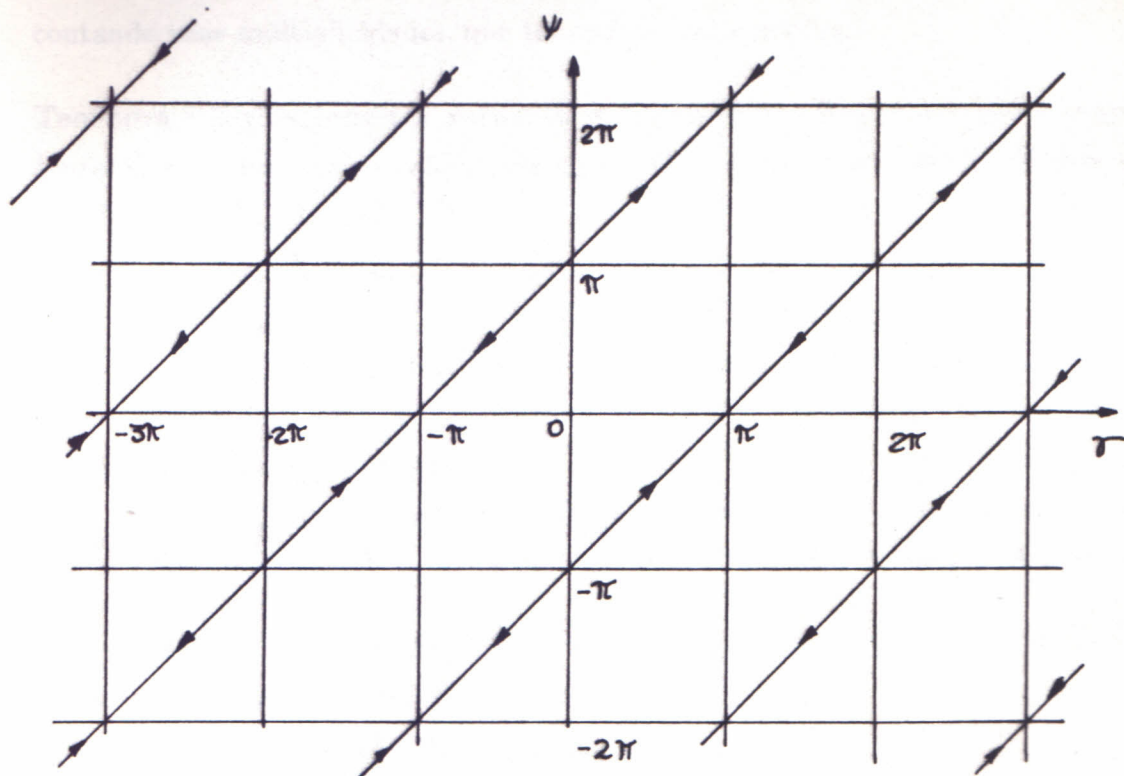
3.3.1. Se $(\sigma(s), \psi(s))$ é uma solução do campo considerado, então $(-\sigma(s), -\psi(s))$ também o é;

3.3.2. $X(\sigma + \pi, \psi + \pi) = -X(\sigma, \psi)$.

3.3.3. Observação: Decorre da proposição 3.1 que todo segmento da forma

$$\{(\sigma, \psi) p\pi < \psi = \sigma + (2q + 1)\pi < (p + 1)\pi\},$$

com p e q inteiros, é solução de (9).



Daqui em diante existe distinção entre as soluções do campo (9) quando considerado com $m = 2, 3$ ou $m \geq 4$. Desta forma, estudaremos estes dois casos distintamente.

Caso 1: $m = 2, 3$.

Iniciaremos mostrando a existência de uma solução saindo de $(\pi, 0)$ e chegando em $(0, 0)$. Para isto necessitaremos do seguinte resultado de E.D.O. que foi retirado de [11], páginas 294 e 295.

Seja $X : U \rightarrow R^n$ ($U \subset R^n$, aberto) um campo de vetores. Um subconjunto $S \subset U$ é invariante por X , se $x \in S$ implica que $\varphi(t, x) \in S$ para todo $t \in R$, onde φ denota o fluxo de X .

Definição: $W_S^s = \{x \in U; \varphi(t, x) \rightarrow S, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$ e $W_S^u = \{x \in U; \varphi(t, x) \rightarrow S, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$.

Definição: Seja p um ponto singular hiperbólico de um campo vetorial

X . Chama-se índice de estabilidade $i(p)$ ao número de valores próprios de $DX(p)$, contando suas multiplicidades, que tem parte real negativa.

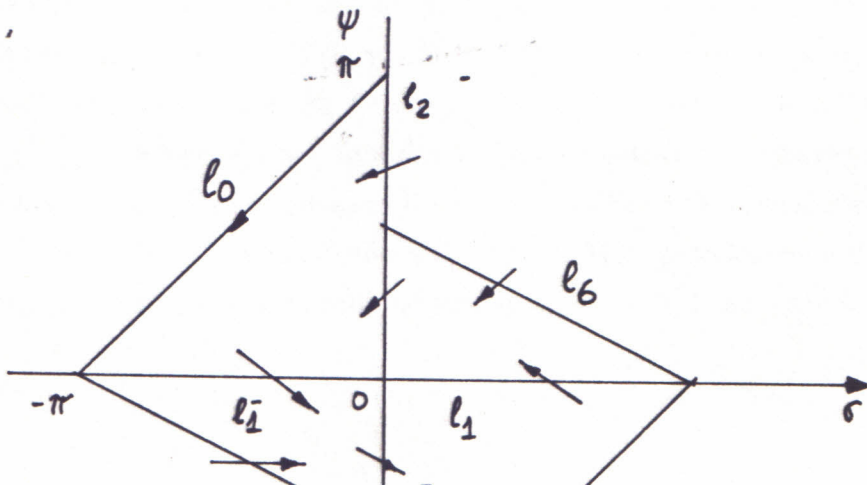
Teorema 3.3 (Variedades estáveis e instáveis). *Seja p um ponto singular hiperbólico de um campo vetorial de classe C^r , em um aberto do R^n . Existe uma vizinhança V de p tal que:*

- 1) $W_p^s(X|_V) = \{x \in V; \text{para todo } t \geq 0, \varphi(t, x) \in V\}$;
- 2) $W_p^u(X|_V) = \{x \in V; \text{para todo } t \leq 0, \varphi(t, x) \in V\}$;
- 3) $W_p^s(X|_V)$ é uma subvariedade de classe C^r e dimensão igual ao índice $i(p)$ de estabilidade de p . O espaço tangente de $W_p^s(X|_V)$ em p coincide com E^s , espaço estável de $A = DX(p)$;
- 4) $W_p^u(X|_V)$ é uma subvariedade de classe C^r e dimensão $n - i(p)$. O espaço tangente de $W_p^u(X|_V)$ em p coincide com E^u , espaço instável de $A = DX(p)$.

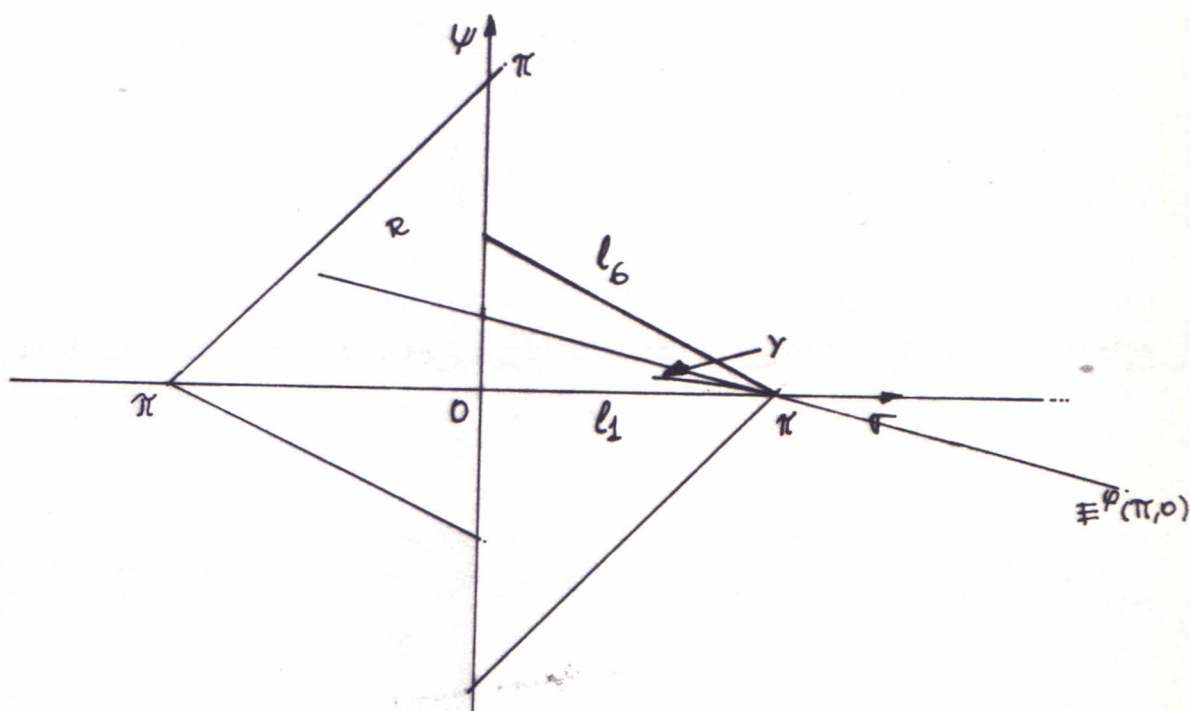
Lema 3.4 *Seja $m = 2, 3$. Existe uma curva integral $\gamma(s)$ no plano $\sigma\psi$ do sistema diferencial (9) com as seguintes propriedades:*

- (i) $\gamma(-\infty) = (\pi, 0)$, $\gamma(+\infty) = (0, 0)$;
- (ii) As retas $\sigma = 0$, $\psi = 0$, $\sigma = \psi$ e $\sigma = -\psi$ interceptam uma infinidade de vezes a curva γ .

Demonstração. Do estudo feito em 3.2 e do resultado 3.3.1 tem-se um esboço do comportamento do campo ao longo dos segmentos $l_0 = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi = \sigma + \pi < \pi\}$, l_1 , l_2 , l_6 e sobre os segmentos que são simétricos a estes em relação a origem: l_0^- , l_1^- , l_2^- e l_6^- .



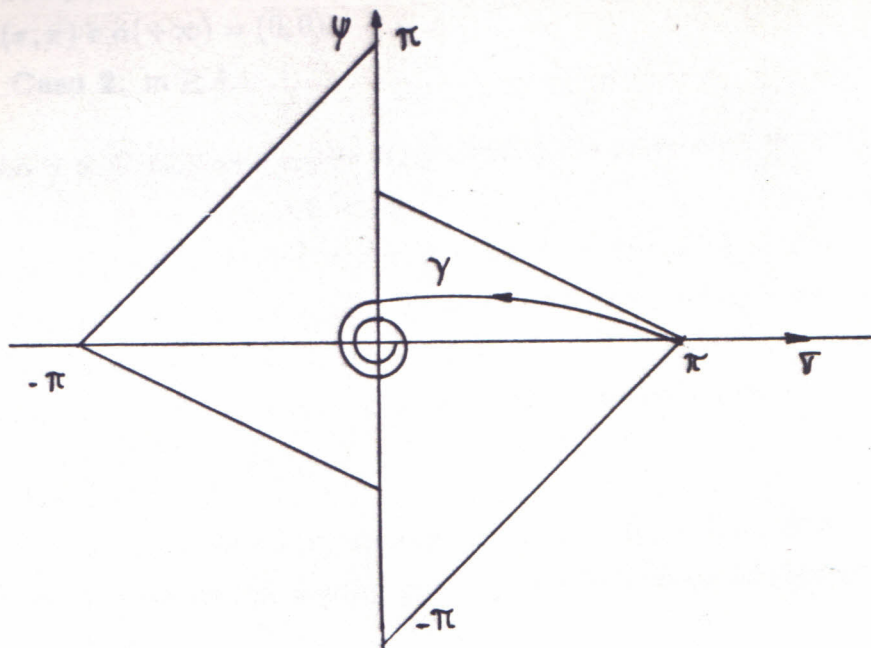
Agora, se $E^s(\pi, 0)$ e $E^u(\pi, 0)$ são os subespaços associados ao autovalores negativo e positivo, respectivamente, de $DX(\pi, 0)$, no ponto singular $(\pi, 0)$. Observando-se que o coeficiente angular de $E^u(\pi, 0)$ é igual a $-\frac{1}{4(m-1)+3}$, $i(\pi, 0) = 1$ e usando-se o teorema 3.3, tem-se uma solução, que indicaremos por γ com as seguintes propriedades: γ está contida em $W_{(\pi, 0)}^u$, $\gamma(-\infty) = (\pi, 0)$ e o segmento inicial de γ está entre l_1 e l_6 . Onde a última afirmação decorre da inclinação de $E^u(\pi, 0)$. Além disto, pelo comportamento do campo (veja figura anterior) γ permanece na região R limitada por l_6 , $\{(\sigma, \psi); \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi; \sigma = 0\}$, l_0, l_6^- , $\{(\sigma, \psi); -\pi \leq \psi \leq -\frac{\pi}{2}; \sigma = 0\}$ e l_0^- .



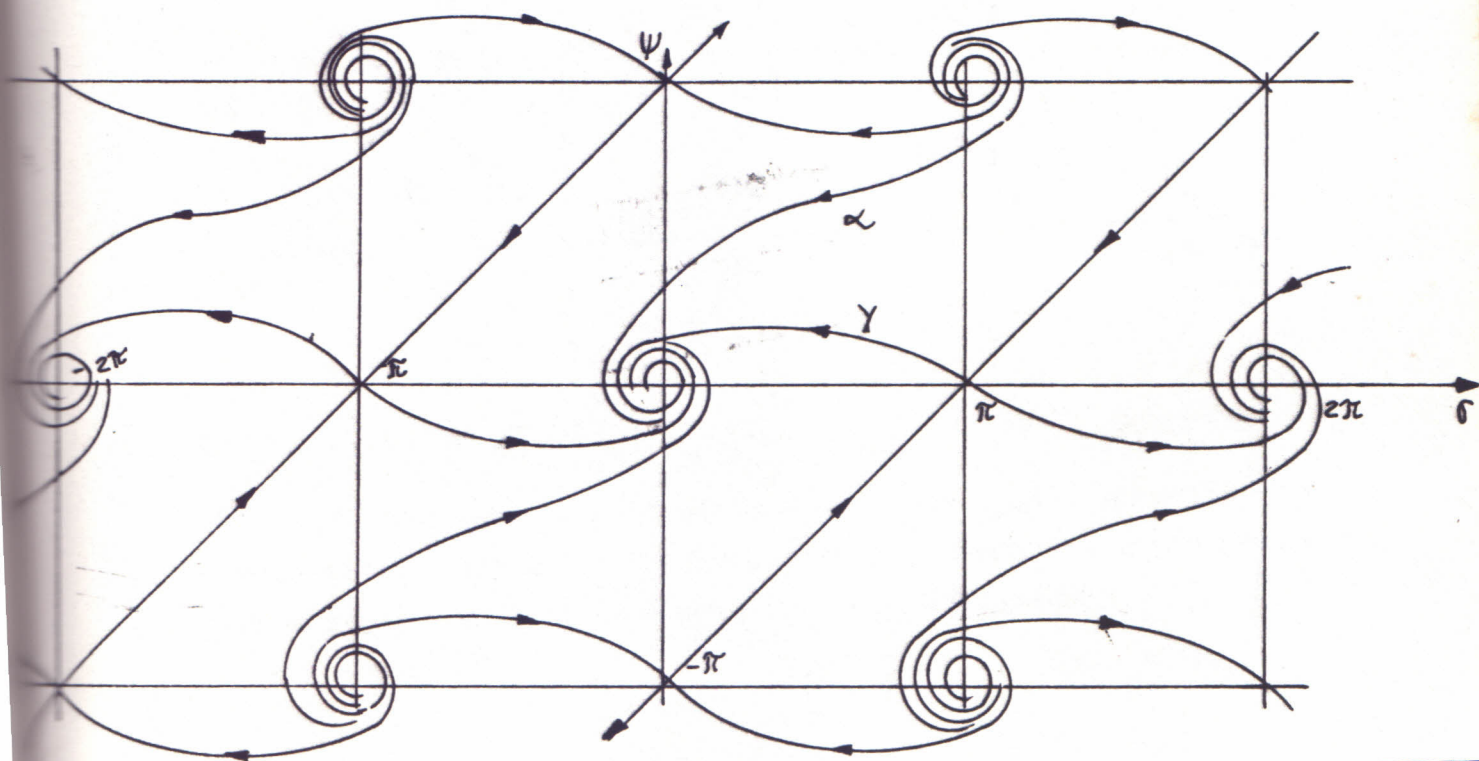
Nós desejamos provar que $\gamma(+\infty) = (0, 0)$. Já é do nosso conhecimento que não existe solução fechada em R (proposição 3.2). Por outro lado, como os coeficientes angulares de $E^u(0, \pi)$, $E^s(-\pi, 0)$, $E^u(0 - \pi)$ e $E^s(\pi, 0)$ são iguais a 1 e os coeficientes angulares de $E^s(0, \pi)$, $E^u(-\pi, 0)$, $E^s(0, -\pi)$ e $E^u(\pi, 0)$ são iguais a $-\frac{1}{4(m-1)+3}$, temos, pelo teorema das variedades estáveis e instáveis (teorema 3.3), que as únicas soluções contidas em R e nas variedades estáveis e instáveis dos pontos $(0, \pi)$, $(-\pi, 0)$, $(0, -\pi)$ e $(\pi, 0)$ são l_0, l_0^-, γ e γ^- . Mas, pelo teorema da separação de Jordan, [7], γ não pode se acumular em l_0, l_0^- ou γ^- . Logo usando o teorema de

Poincaré-Bendixon ([11], página 248) temos que $\gamma(+\infty) = (0, 0)$.

A prova de (ii) segue-se do fato de ser $(0, 0)$ um ponto de foco de (9).



Usando-se o lema acima, 3.3.1, 3.3.2, a observação 3.3.3 e o teorema de Poincaré-Bendixon, tem-se a seguinte descrição do retrato de fase do sistema diferencial (9), para $m = 2, 3$.



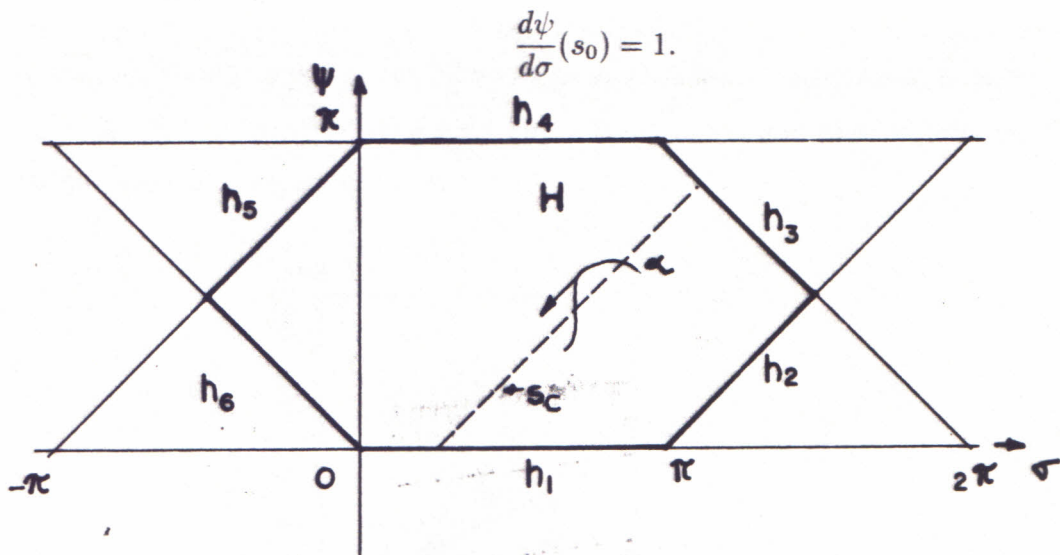
Em particular existe uma trajetória α no plano $\sigma\psi$ do campo (9) tal que $\alpha(-\infty) = (\pi, \pi)$ e $\alpha(+\infty) = (0, 0)$.

Caso 2: $m \geq 4$.

Proposição 3.5 *Considere a região H , limitada pelos segmentos: $h_1 = \{(\sigma, \psi); 0 < \sigma < \pi, \psi = 0\}$, $h_2 = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi = \sigma - \pi < \frac{\pi}{2}\}$, $h_3 = \{(\sigma, \psi); \frac{\pi}{2} < \psi = -\sigma + 2\pi < \pi\}$, $h_4 = \{(\sigma, \psi); 0 < \sigma < \pi, \psi = \pi\}$, $h_5 = \{(\sigma, \psi); \frac{\pi}{2} < \psi = \sigma + \pi < \pi\}$ e $h_6 = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi = -\sigma < \frac{\pi}{2}\}$. Se μ é uma curva integral do sistema (9), considerado com $m \geq 4$, e $S_c = \{(\sigma, \psi) \in H; \psi = \sigma - c\}$, $-\pi < c < \pi$. Então a intersecção de μ com S_c , para cada c , é vazia ou um único ponto.*

Demonstração.

Suponhamos que a intersecção de μ com S_c , c fixo, seja não vazia e constituída de dois pontos: $p_1 = \mu(s_1)$ e $p_2 = \mu(s_2)$. Sabemos, pelo teorema do valor médio, que existe um s_0 , $s_1 < s_0 < s_2$, tal que



Pela proposição 3.1 isto só é possível se $\psi(s_0) - \sigma(s_0) = (2j + 1)\pi$, ou $\psi(s_0) + \sigma(s_0) = 2k\pi$ onde j são números inteiros. O que contradiz o comportamento do campo ou a unicidade de soluções e provando a proposição.

Demonstraremos agora um resultado obtido por *E. Bombieri, E. De Giorgi e Giusti* ([4], lema 3) sobre a existência de uma solução do sistema diferencial (9) com certas propriedades.

Lema 3.6 *Seja $m \geq 4$. Existe uma curva integral $\delta(s) = (\sigma(s), \psi(s))$, no plano $\sigma\psi$, do sistema diferencial (9) com as seguintes propriedades:*

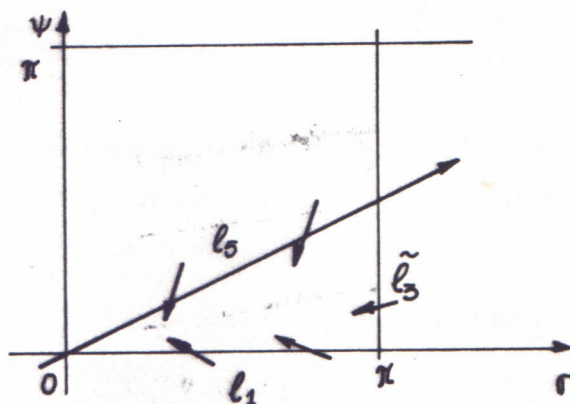
- (i) $\delta(-\infty) = (\pi, 0)$, $\delta(+\infty) = (0, 0)$;
- (ii) $0 < \psi(s) < \sigma(s) < \pi$, $-\infty < s < +\infty$;
- (iii) As retas $\psi = \sigma - c$, $0 < c < \pi$, interceptam δ uma única vez para cada valor de c .

Demonstração: Nós primeiro verificaremos a existência de uma curva integral δ satisfazendo (i) e (ii) do lema.

Se T denota o triângulo

$$T = \{(\sigma, \psi); 0 \leq \psi \leq \frac{\sigma}{2} \leq \frac{\pi}{2}\},$$

com lados l_1 , l_5 e \tilde{l}_3 , tem-se, pelo estudo feito em 3.2, que os vetores tangentes, sobre um ponto regular da fronteira de T , estão direcionados para o interior de T . Segue-se que: Se $\gamma(s) = (\sigma(s), \psi(s))$ é uma curva integral tal que para algum s_0 , $\gamma(s_0) \in T$ então $\gamma(s) \in T$ para todo $s \geq s_0$.



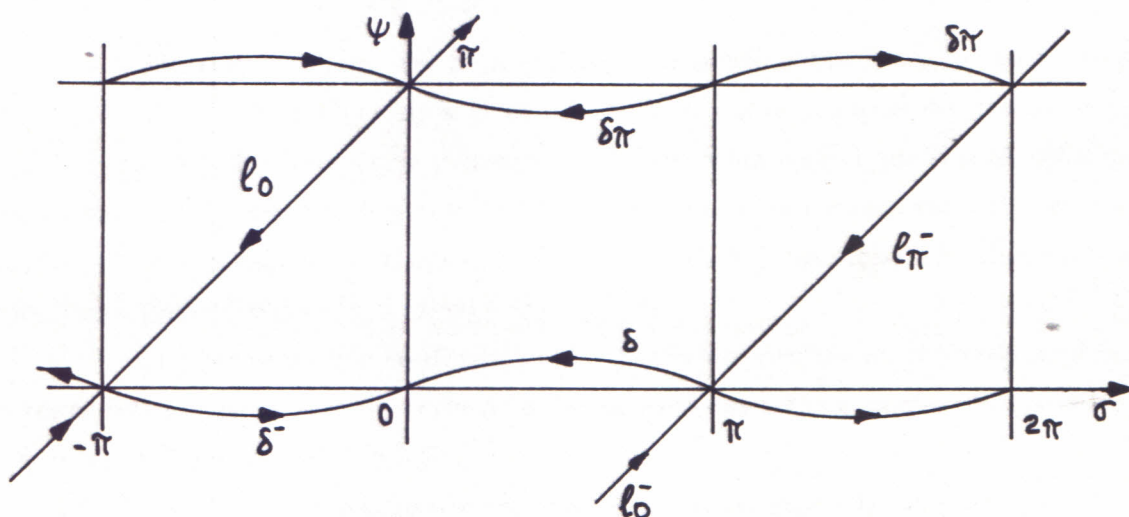
O ponto $(\pi, 0)$ é um ponto de sela, donde existe duas curvas integrais começando e duas curvas integrais terminando neste ponto. As curvas integrais começando em $(\pi, 0)$ são (veja 3.3.3):

$$\sigma = \psi + \pi, \quad (0 < \psi < \pi),$$

$$\sigma = \psi + \pi, \quad (-\pi < \psi < 0).$$

Como as outras duas curvas saindo de $(\pi, 0)$ têm coeficiente angular $-\frac{1}{4(m-1)+3}$ uma das curvas sai dentro do triângulo T. Dai pela observação anterior a curva δ está contida em T e assim verificamos (i) e (ii). O item (iii) segue da proposição 3.5.

Pelo lema anterior, por 3.3.1, 3.3.2 e pela observação 3.3.3 tem-se o seguinte resultado parcial



Estudaremos agora, a existência de soluções saindo do ponto (π, π) e chegando no ponto $(0, 0)$. Demonstraremos a existência de dois grupos distintos de tais soluções: as que cruzam a diagonal $0 < \sigma = \psi < \pi$ e as que não cruzam.

Lema 3.7 *Seja $m \geq 4$. Existe uma curva integral β do campo determinado por (9) com as seguintes propriedades:*

- (i) $\beta(-\infty) = (\pi, \pi)$, $\beta(+\infty) = (0, 0)$;
- (ii) $0 < \psi(s) < \sigma(s) < 2\pi$.

Demonstração. (i) Considere a região L, limitada pelos segmentos $\{(\sigma, \psi); 0 < \psi < \frac{\pi}{2}, \sigma = \pi\}$, $\{(\sigma, \psi); 0 < \psi = \frac{\sigma}{2} < \frac{\pi}{2}\}$ e a curva δ . Seja (σ_0, ψ_0) um

ponto interior desta região e β a solução do sistema que passa por este ponto, com $\beta(s_0) = (\sigma_0, \psi_0)$. Sabemos, pela demonstração do lema 3.6, que $\beta(s) \in L$ para todo $s > s_0$, de onde segue que $\beta(+\infty) = (0, 0)$. Pelo comportamento do campo esboçado na figura no final da seção 3.2 $\beta(-\infty) = (\pi, \pi)$.

(ii) Segue-se do comportamento do campo.

Lema 3.8 *Seja $m \geq 4$. Existe uma curva integral $\bar{\alpha}$, do campo determinado pelo sistema (9), com as seguintes propriedades:*

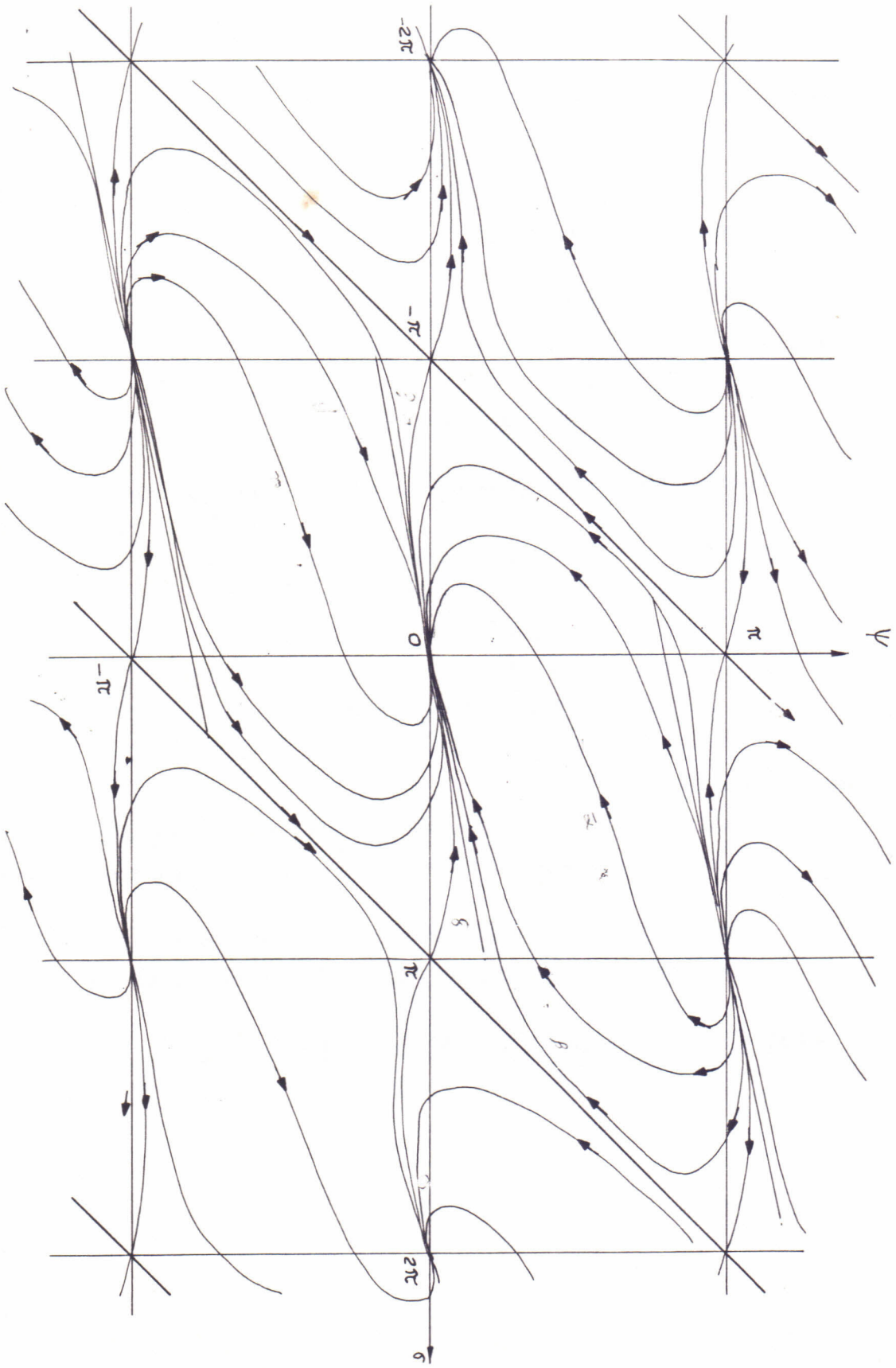
(i) $\bar{\alpha}(-\infty) = (\pi, \pi)$, $\bar{\alpha}(+\infty) = (0, 0)$;

(ii) $\bar{\alpha}$ intercepta uma única vez as retas $\sigma = \psi$, $\sigma = -\psi$ e $\psi = -\sigma + 2\pi$, $(0 < \psi < \pi)$.

Demonstração. (i) Seja (σ_0, ψ_0) um ponto sobre o segmento de reta $0 < \sigma = \psi < \pi$. Consideremos $\bar{\alpha}$ como sendo a curva integral do campo com $\bar{\alpha}(s_0) = (\sigma_0, \psi_0)$. Sabemos (veja primeiro parágrafo desta seção) que $\bar{\alpha}$ está definida para todo $s \in \mathbb{R}$. Pelo estudo feito em 3.2 sabemos que esta curva corta a reta $\sigma = \psi$ da direita para a esquerda. Usando os fatos acima e a proposição 3.5, chegamos a conclusão que $\bar{\alpha}(-\infty) = (\pi, \pi)$ e $\bar{\alpha}(+\infty) = (0, 0)$.

(ii) Segue-se por contradição. Se $\bar{\alpha}$ não interceptar ou interceptar duas vezes as retas consideradas cortaria pelo menos uma das retas $\psi = \sigma - c$, duas vezes, o que contradiz a proposição 3.5.

Tem-se assim o seguinte retrato de fase do campo (9), para $m \geq 4$.



4 SOLUÇÕES NO \mathbb{R}^4 E NO \mathbb{R}^6

Iniciaremos esta seção provando um lema que transpõe o comportamento das trajetórias (σ, ψ) de (9) sobre o comportamento das curvas soluções (x, y) de (2).

Lema 4.1 *Se $(x(s), y(s))$ é uma solução de (2) e se $(\sigma(s), \psi(s))$ é uma trajetória de (9) no plano $\sigma\psi$, onde σ, ψ são determinadas pela equação (8) Então tem-se as seguintes propriedades:*

- (i) $\sigma = \pi, \psi = 0 \Rightarrow x > 0, y = 0, x' = 0, y' = 1$;
- (ii) $\sigma = \psi \Rightarrow x = y; \sigma = -\psi \Rightarrow \varphi = \theta$;
- (iii) $\sigma = \psi = 0 \Rightarrow x = y > 0, x' = y' > 0$;
- (iv) $\sigma = 0, 0 < \psi < \pi \Rightarrow y > x$;
- (v) $\sigma = 0, -\pi < \psi < 0 \Rightarrow y < x$;
- (vi) $0 < \psi < \sigma < \pi \Rightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{4} \Rightarrow y < x$.

Demonstração. (i) Fazendo-se $\sigma = \pi$ e $\psi = 0$ em (8) obtem-se

$$\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Dai e por (3) têm-se

$$x > 0, \quad y = 0, \quad x' = 0, \quad y' = 1.$$

(ii) Se $\sigma = \psi$ em (8) então

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

De onde vem, por (3), que $x = y$;

Agora, se $\sigma = -\psi$ em (8), verificamos que

$$\varphi = \frac{2\psi + \pi}{4} = \frac{3\psi - \psi + \pi}{4} = \frac{3\psi + \sigma + \pi}{4} = \theta.$$

(iii) Fazendo-se $\sigma = \psi = 0$ em (8), tem-se

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dai e por (3) obtem-se

$$x = y > 0 \quad \text{e} \quad x' = y' > 0.$$

(iv) Se $\sigma = 0$ em (8) obtem-se:

$$\varphi = \frac{\psi}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Como $0 < \psi < \pi$, obtem-se:

$$tg\varphi = tg\left(\frac{\psi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + tg\left(\frac{\psi}{4}\right)}{1 - tg\left(\frac{\psi}{4}\right)} = 1 + \frac{2tg\left(\frac{\psi}{4}\right)}{1 - tg\left(\frac{\psi}{4}\right)} = 1 + 2\epsilon,$$

onde

$$\epsilon = \frac{tg\left(\frac{\psi}{4}\right)}{1 - tg\left(\frac{\psi}{4}\right)}.$$

Usando (4) concluímos que

$$\frac{y}{x} = 1 + 2\epsilon,$$

ou seja, $x < y$.

(v) A prova é análoga à demonstração do item (iv), observando-se que $\epsilon < 0$, se $-\pi < \psi < 0$.

(vi) Como $\pi > \sigma$ e $\psi > 0$ tem-se que

$$\varphi = \frac{\psi - \sigma + \pi}{4} > 0.$$

Usando-se (8) obtem-se que

$$0 < \sigma - \psi = -4\varphi + \pi < \pi,$$

ou seja,

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Usando-se a desigualdade anterior e (4) concluímos que

$$0 < \frac{y}{x} < 1.$$

O que demonstra o lema.

Dada uma curva integral β de (9) representaremos por β_π a curva integral do campo de vetores que é a translação de β por (π, π) .

Seja $l_0 = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi = \sigma + \pi < \pi\}$ e $l_\pi^- = \{(\sigma, \psi); 0 < \psi = \sigma - \pi < \pi\}$.

Tem-se por (8) que

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{em } l_0$$

e

$$\varphi = 0, \quad \text{em } l_\pi^-.$$

De onde vem, por (3), que

$$x = 0, \quad \text{em } l_0$$

e

$$y = 0, \quad \text{em } l_\pi^-.$$

Reciprocamente, se $x = 0$ (respectivamente $y = 0$), tem-se, usando (3), que $\varphi = (2k - 1)\pi$ (respectivamente $\varphi = k\pi$), k inteiro. Fazendo-se $k = 0$ e usando-se (8) obtem-se que $\psi = \sigma + \pi$ (respectivamente $\psi = \sigma - \pi$). Assim as curvas integrais l_π^- e l_0 , no plano $\sigma\psi$, correspondem aos semi-eixos $0x$ e $0y$, no plano xy , respectivamente. Além disto $\gamma^-(-\infty) = (-\pi, 0)$ implica que $x = 0, y > 0$.

Através das trajetórias γ (lema 3.4) e α descreveremos o comportamento das curvas soluções de (9), quando $m = 2, 3$.

A trajetória $\gamma(s)$ corresponde a uma família $\{\gamma_\lambda(s)\}$, $\lambda > 0, -\infty < s < +\infty$, de curvas homotéticas parametrizadas pelo comprimento de arco, no plano xy , que são soluções de (2). Como pelo lema 3.4 $\gamma(-\infty) = (\pi, 0)$, tem-se pelo lema 4.1 que cada curva da família $\{\gamma_\lambda\}$ tem ponto inicial $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$, e é perpendicular ao eixo $y = 0$ neste ponto. Portanto pela proposição 1 em [8] a curva γ_λ é completamente determinada pela condição inicial em qualquer ponto da região $\{(x, y); x > 0, y \geq 0\}$. Além disto a curva é analítica.

A trajetória $\alpha(s)$ corresponde a uma família $\{\alpha_\lambda(s)\}$, $\lambda > 0$, $-\infty < s < +\infty$, de curvas homotéticas parametrizadas pelo comprimento de arco no plano xy e soluções de (2). Pelo comportamento do campo do sistema diferencial (9) observamos que a curva α não intercepta $l_0 \cup l_\pi^-$. Assim α_λ não intercepta a fronteira do $\pi(R^{2m})$.

Por outro lado, as trajetórias γ_π^- e γ_π são translações de γ^- e γ respectivamente. Portanto para descrever o comportamento das curvas soluções de (2), com $m = 2, 3$, será suficiente a descrição do comportamento das curvas γ_λ e α_λ .

Começamos analisando o comportamento da curva γ_λ através do seguinte lema.

Lema 4.2 *A curva $\gamma_\lambda(s)$ tem as seguintes propriedades:*

- (i) γ_λ é mergulhada;
- (ii) γ_λ intercepta a diagonal $x = y$ uma infinidade de vezes e é assintótica a esta diagonal.

Demonstração. (i) A curva $\gamma_\lambda(s) = (x(s), y(s))$ fica inteiramente determinada pelas condições iniciais

$$x(-\infty) = x_0 \neq 0, \quad y(-\infty) = 0, \quad x'(-\infty) = 0 \quad \text{e} \quad y'(-\infty) = 1.$$

Pelo corolário 7.2

$$I(s) = [x(s)]^{m-1} y'(s)$$

é não-decrescente. Dai e por (3), tem-se que

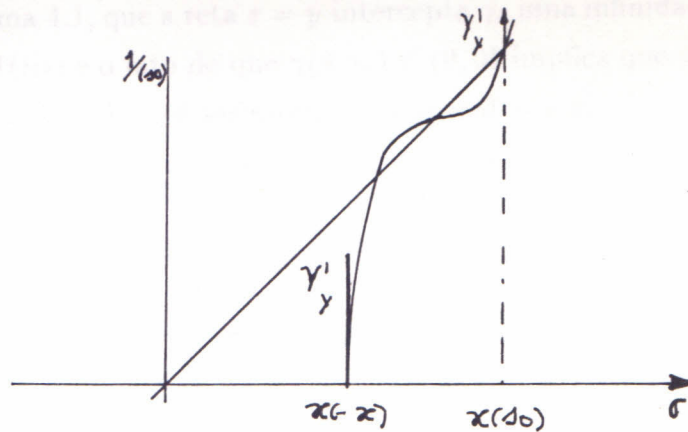
$$[x(s)]^{m-1} \geq [x(s)]^{m-1} \operatorname{sen} \theta(s) = [x(s)]^{m-1} y'(s) = I(s) \geq I(-\infty) = x_0^{m-1},$$

isto é,

$$x(s) \geq x_0.$$

Similarmente, $x(s) \geq x(s_0)$ se $s > s_0$, $x(s_0) = x_0$, $y(s_0) = y_0$, $x'(s_0) = 0$ e $y'(s_0) = 1$.

(ii) Como a reta $\sigma = \tau$ intercepta uma infinidade de vezes γ (Lema 3.4) tem-se, pelo Lema 1.1, que a reta $\sigma = \tau$ intercepta γ uma infinidade de vezes. Além disto o Lema 1.1 implica que γ não se auto-intercepta quando $s \rightarrow \infty$.



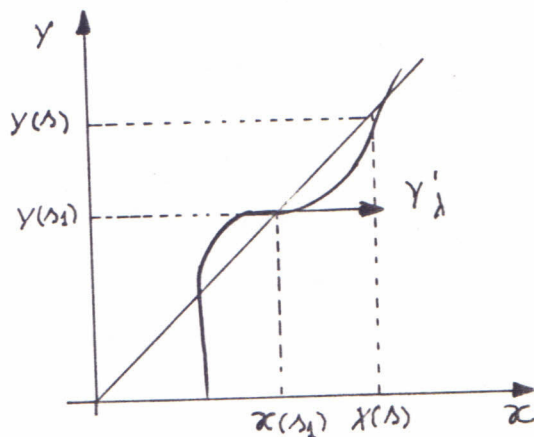
Além disto, se $x(s_1) = x_1 \neq 0$, $y(s_1) = y_1 \neq 0$, $x'(s_1) = 1$ e $y'(s_1) = 0$ tem-se, pelo corolário 7.2, que

$$J(s) = [y(s)]^{m-1} x'(s)$$

é não-decrescente. De onde segue-se, por (3), que

$$[y(s)]^{m-1} \geq [y(s)]^{m-1} \cos \theta(s) = J(s) \geq J(s_1) = [y(s_1)]^{m-1}.$$

Assim $y(s) \geq y(s_0)$, quando $s > s_0$. Portanto γ_λ não se auto-intercepta, isto é, γ_λ é mergulhada.



(ii) Como a reta $\sigma = \psi$ intercepta uma infinidade de vezes γ (lema 3.4) tem-se, pelo Lema 4.1, que a reta $x = y$ intercepta γ_λ uma infinidade de vezes. Além disto o lema 4.1(iii) e o fato de que $\gamma(+\infty) \neq (0, 0)$ implica que $x = y$, $x' = y' > 0$, quando $s \rightarrow +\infty$, isto é, γ_λ é assintótica a diagonal $x = y$.

Para caracterizarmos o comportamento da curva α_λ necessitamos da proposição seguinte.

Proposição 4.3 *Seja φ o ângulo, no plano xy , do vetor posição da curva α_λ com o eixo dos x (veja equação 3) então os valores máximos e mínimos locais de φ são atingidos quando $\sigma + \psi = 2k\pi$ ou $\psi - \sigma = (2j + 1)\pi$, k e j inteiros. Além disto*

$$\varphi = \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2},$$

quando $k = 0$.

Demonstração. Utilizando (8) tem-se que

$$\varphi = \frac{\psi - \sigma}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Portanto $\varphi' = 0$ equivale a $\psi'(s) = \sigma'(s)$. Como

$$\begin{aligned}\sigma' &= -\frac{3}{2}\text{sen}\sigma - (2(m-1) + \frac{3}{2})\text{sen}\psi, \\ \psi' &= \frac{1}{2}\text{sen}\sigma - (2(m-1) - \frac{1}{2})\text{sen}\psi,\end{aligned}$$

tem-se:

$$2\text{sen}\sigma + \text{sen}\psi(2(m-1) - 2(m-1) - \frac{1}{2}) = 0,$$

ou seja,

$$\text{sen}\sigma = \text{sen}(-\psi).$$

Logo $\sigma + \psi = 2k\pi$ ou $\psi - \sigma = (2j + 1)\pi$, onde j e k são inteiros.

Além disto, sendo

$$\varphi = \frac{\psi - \sigma}{4} + \frac{\pi}{4}$$

tem-se, para $k = 0$, que

$$\varphi = \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Demonstraremos agora algumas propriedades da curva α_λ . Como vimos anteriormente, tal curva não intercepta o bordo do espaço de órbitas.

Lema 4.4 *A curva α_λ tem as seguintes propriedades:*

- (i) α_λ intercepta a diagonal $x = y$ uma infinidade de vezes e é assintótica a esta quando s tende a $+\infty$ ou a $-\infty$;
- (ii) α_λ se auto-intercepta.

Demonstração. (i) Como a curva α intercepta a diagonal $\sigma = \psi$ infinitas vezes, tem-se, usando o lema 4.1, que α_λ intercepta a diagonal $x = y$ uma infinidade de vezes.

Usando-se (8) e o fato que $\alpha(-\infty) = (\pi, \pi)$ obtem-se:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{5\pi}{4},$$

quando $s \rightarrow -\infty$. Segue-se então, por (3) e (4), que

$$x(s) = y(s) \quad \text{e} \quad x'(s) = y'(s) < 0,$$

quando $s \rightarrow -\infty$.

Similarmente, $\alpha(+\infty) = (0, 0)$ implica que

$$x(s) = y(s) \quad \text{e} \quad x'(s) = y'(s) > 0,$$

quando $s \rightarrow +\infty$. O que demonstra (i).

(ii) Seja

$$\{\sigma(s_{2m-1}^-), \psi(s_{2m-1}^-)\}_{m \geq 1} \quad \text{e} \quad \{\sigma(s_{2m-1}^+), \psi(s_{2m-1}^+)\}_{m \geq 1}$$

seqüências de pontos da curva α tais que:

$$\frac{\pi}{2} < \psi(s_1^-) < \psi(s_3^-) < \dots < \pi, \quad \sigma(s_{2m-1}^-) + \psi(s_{2m-1}^-) = 2\pi,$$

$$\frac{3\pi}{2} > \psi(s_1^+) > \psi(s_3^+) > \dots > \pi, \quad \sigma(s_{2m-1}^+) + \psi(s_{2m-1}^+) = 2\pi,$$

respectivamente. Seja

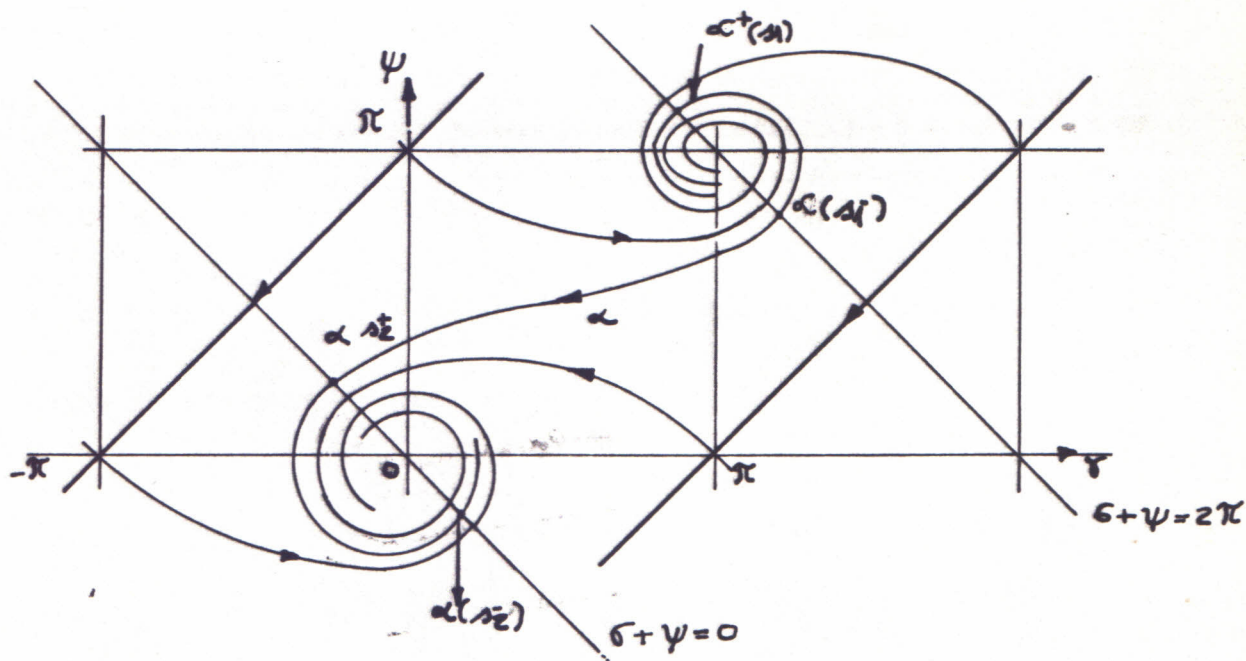
$$\{\sigma(s_{2m}^-), \psi(s_{2m}^-)\}_{m \geq 1} \text{ e } \{\sigma(s_{2m}^+), \psi(s_{2m}^+)\}_{m \geq 1}$$

seqüências de pontos da curva α tais que:

$$-\frac{\pi}{2} < \psi(s_2^-) < \psi(s_4^-) < \dots < 0, \quad \sigma(s_{2m}^-) + \psi(s_{2m}^-) = 0,$$

$$\frac{\pi}{2} > \psi(s_2^+) > \psi(s_4^+) > \dots > 0, \quad \sigma(s_{2m}^+) + \psi(s_{2m}^+) = 0,$$

respectivamente.



Transladando-se de $(-\pi, -\pi)$ os pontos $\alpha(s_{2m-1}^-)$ e $\alpha(s_{2m-1}^+)$ obtem-se:

$$\psi(s_1^-) - \pi < \psi(s_2^-) < \psi(s_3^-) - \pi < \dots < \psi(s_{2m-1}^-) - \pi < \psi(s_{2m}^-) < \dots, \quad (10)$$

$$\psi(s_2^+) > \psi(s_1^+) - \pi > \psi(s_4^+) > \dots > \psi(s_{2m}^+) > \psi(s_{2m-1}^+) - \pi > \dots$$

Como

$$\varphi = \frac{\psi - \sigma}{4} + \frac{\pi}{4},$$

tem-se que o valor de φ é invariante por translação de (π, π) dos pontos (σ, ψ) . Além disto, sendo

$$-\sigma(s_{2m}^+) = \psi(s_{2m}^+)$$

e

$$-\sigma(s_{2m-1}^-) = \psi(s_{2m-1}^-) - 2\pi$$

tem-se que

$$\varphi(s_{2m-1}^-) = \frac{\psi(s_{2m-1}^-) - \sigma(s_{2m-1}^-)}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\psi(s_{2m-1}^-) - \pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

e

$$\varphi(s_{2m}^+) = \frac{\psi(s_{2m}^+)}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

De onde decorre, por (10), que

$$\varphi(s_{2m-1}^-) < \frac{1}{2}\psi(s_{2m}^-) + \frac{\pi}{4} = \varphi(s_{2m}^-), \quad (11)$$

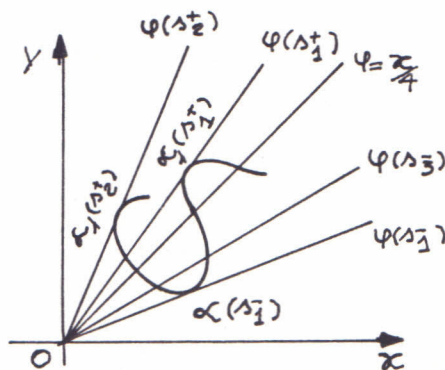
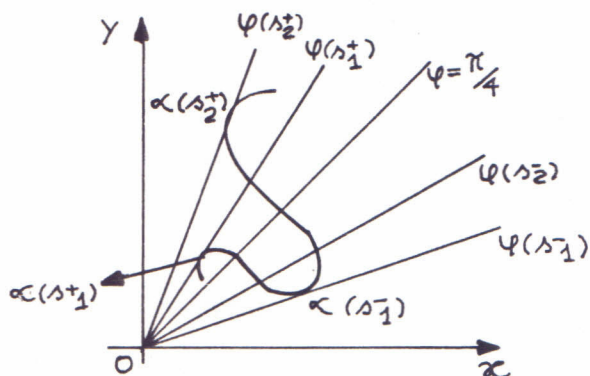
$$\varphi(s_{2m}^+) > \frac{1}{2}\psi(s_{2m-1}^+) - \frac{\pi}{4} = \varphi(s_{2m-1}^+),$$

ou seja,

$$\varphi(s_1^-) < \varphi(s_2^-) < \dots < \varphi(s_{2m-1}^-) < \varphi(s_{2m}^-) < \dots,$$

$$\varphi(s_2^+) > \varphi(s_1^+) > \dots > \varphi(s_{2m}^+) > \varphi(s_{2m-1}^+) \dots$$

Vamos mostrar, usando (11) que α_λ se auto-intercepta. De fato, consideremos o segmento da curva α_λ , $\alpha_\lambda(s_1^-)\alpha_\lambda(s_2^+)$, que liga os pontos $\alpha_\lambda(s_1^-)$ e $\alpha_\lambda(s_2^+)$, e os segmentos de reta $0\alpha_\lambda(s_2^+)$ e $0\alpha_\lambda(s_1^-)$ que ligam a origem aos pontos $\alpha_\lambda(s_2^+)$ e $\alpha_\lambda(s_1^-)$, respectivamente. Então $\alpha_\lambda(s_1^+)$ pertence ou não ao cone determinado por estes segmentos.



No primeiro caso, usando (11) obtém-se:

$$\varphi(s_1^-) < \varphi(s_{2m-1}^-) \quad \text{e} \quad \varphi(s_{2m-1}^+) < \varphi(s_2^+),$$

onde $m \geq 2$. Usando-se (i), já demonstrado acima, obtém-se o resultado desejado.

No segundo caso, tem-se que

$$\varphi(s_1^-) < \varphi(s_{2m}^-), \quad m \geq 1,$$

$$\varphi(s_{2m}^+) < \varphi(s_1^+), \quad m \geq 2.$$

Dai e por (i), já demonstrado acima, obtém-se que α_λ se auto-intercepta. Isto conclui o lema.

Apresentamos agora o resultado obtido por *Hilário Alencar* em [1] que caracteriza, por completo, as hipersuperfícies em questão, no caso $m = 2, 3$.

Teorema 4.5 *Seja M^{2m-1} , $m = 2, 3$, uma hipersuperfície completa e mínima de $R^{2m} \setminus \{0\}$, invariante por $SO(m) \times SO(m)$.*

(i) *Se M^{2m-1} é do tipo topológico $R^m \times S^{m-1}$ então M^{2m-1} é mergulhada;*

(ii) Se M^{2m-1} é do tipo topológico de um cilindro $S^{m-1} \times S^{m-1} \times R$ então M^{2m-1} se auto-intercepta infinitas vezes (isto é, o conjunto intersecção tem infinitas componentes conexas).

Além disto, nos casos (i) e (ii) as hipersuperfícies interceptam o cone quadrático mínimo fora de qualquer compacto e se aproxima arbitrariamente deste cone.

Demonstração. (i) Como M^{2m-1} é do tipo topológico $R^m \times S^{m-1}$, tem-se que sua curva geratriz pertence a família $\{\gamma_\lambda\}$. Portanto, pelo lema 4.2(i), sua curva geratriz é mergulhada e desta forma M^{2m-1} também é mergulhada;

(ii) Como M^{2m-1} é do tipo topológico de $R \times S^{m-1} \times S^{m-1}$, sua curva geratriz pertence a família $\{\alpha_\lambda\}$. Portanto, pelo lema 4.4 esta curva geratriz se auto-intercepta. Assim M^{2m-1} se auto-intercepta.

O fato que M^{2m-1} intercepta o cone quadrático mínimo fora de qualquer compacto e se aproxima deste cone segue-se do lema 4.2(ii) e do lema 4.4(i).

5 SOLUÇÕES NO \mathbb{R}^{2m} , COM $m \geq 4$.

A trajetória $\bar{\alpha}$ (lema 3.7) corresponde a uma família $\{\bar{\alpha}_\lambda\}$, $\lambda > 0$, $-\infty < s < +\infty$, de curvas homotéticas parametrizadas pelo comprimento de arco, no plano xy , soluções de (2). Pelo comportamento do campo determinado pelo sistema (9) observamos que cada curva $\bar{\alpha}_\lambda$ não intercepta a fronteira de $\pi(\mathbb{R}^{2m})$.

Apresentamos agora, algumas propriedades da curva $\bar{\alpha}_\lambda$.

Proposição 5.1 *A curva $\bar{\alpha}_\lambda$ tem as seguintes propriedades:*

(i) $\bar{\alpha}_\lambda$ intercepta a reta $x = y$ uma única vez e é assintótica a mesma quando s tende a $+\infty$ ou a $-\infty$;

(ii) $\bar{\alpha}_\lambda$ é mergulhada.

Demonstração. (i) Como, pelo lema 3.8 $\bar{\alpha}$ intercepta a reta $\sigma = \psi$ uma única vez, tem-se que $\bar{\alpha}_\lambda$ intercepta uma única vez a diagonal $x = y$. Além disto $\bar{\alpha}(-\infty) = (\pi, \pi)$ e $\bar{\alpha}(+\infty) = (0, 0)$ implicam que

$$\varphi = \frac{\psi - \sigma + \pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4},$$

quando $s \rightarrow +\infty$ ou a $-\infty$;

$$\theta = \frac{3\psi + \sigma + \pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4},$$

quando $s \rightarrow +\infty$;

$$\theta = \frac{3\psi + \sigma + \pi}{4} \rightarrow \frac{5\pi}{4},$$

quando $s \rightarrow -\infty$. O que demonstra (i).

(ii) Como

$$\varphi = \frac{\psi - \sigma + \pi}{4},$$

tem-se que

$$\sigma > \psi \Rightarrow x > y,$$

$$\sigma < \psi \Rightarrow x < y.$$

Além disto, pelo lema 3.8 e pela proposição 4.3, $\bar{\alpha}_\lambda$ só possui um ponto de máximo e outro de mínimo. De onde afirmamos que $\bar{\alpha}_\lambda$ é mergulhada.

Demonstraremos agora o seguinte teorema.

Teorema 5.2 *As hipersuperfícies completas e mínimas do $R^{2m} \setminus \{0\}$, $m \geq 4$, invariantes por $SO(m) \times SO(m)$ com tipo topológico $S^{m-1} \times S^{m-1} \times R$ e que interceptam o cone quadrático mínimo têm as seguintes propriedades.*

(i) *As hipersuperfícies são mergulhadas;*

(ii) *As hipersuperfícies interceptam o cone quadrático mínimo uma única vez e se aproxima arbitrariamente do mesmo.*

Demonstração. (i) Como as hipersuperfícies são do tipo topológico $S^{m-1} \times S^{m-1} \times R$ e interceptam o cone quadrático mínimo obtém-se que suas curvas geratrizes pertencem a família $\{\bar{\alpha}_\lambda(s)\}$, $\lambda > 0$. Pelo lema 5.2 as curvas $\bar{\alpha}_\lambda$, são mergulhadas. De onde se segue que as hipersuperfícies consideradas são mergulhadas.

(ii) Como pelo lema 5.2 a curva $\bar{\alpha}_\lambda$ corta a reta $x = y$ uma única vez e é assintótica a mesma quando s tende a $+\infty$ ou a $-\infty$ tem-se (ii).

6 SOLUÇÕES QUE PASSAM PELA ORIGEM DO \mathbb{R}^{2m}

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 6.1 *Seja M^{2m-1} uma hipersuperfície mínima do \mathbb{R}^{2m} invariante por $SO(m) \times SO(m)$ e que passa pela origem do \mathbb{R}^{2m} , $m \geq 2$. Então M^{2m-1} é o cone quadrático mínimo:*

$$C = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m; |X|^2 = |Y|^2\}.$$

O ponto crucial desta demonstração está contido no seguinte resultado.

Lema 6.2 *Se $x(s), y(s)$ são funções analíticas reais que satisfazem (2) com $x(0) = y(0) = 0$. Então $x(s) = y(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s$.*

Demonstração. Como x, y são funções analíticas com $x(0) = y(0) = 0$, então (veja [5], página 72)

$$x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n, \quad y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n,$$

Estas séries podem ser derivadas termo a termo, obtendo-se:

$$x'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} x x' &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1} \right) \\ &= s \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} s^n \right) \\ &= s \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} s^k a_{n-k+1} s^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} a_{n-k} \right) s^n \end{aligned}$$

Analogamente,

$$yy' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)b_{k+1}b_{n-k} \right) s^n.$$

Portanto

$$xx' - yy' = (a_1^2 - b_1^2)s + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(a_{k+1}a_{n-k} - b_{k+1}b_{n-k}) \right) s^n. \quad (12)$$

Além disto, como

$$x'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n s^{n-2},$$

tem-se:

$$\begin{aligned} x''y' &= \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n s^{n-2} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} nb_n s^{n-1} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1} s^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+2)(k+1)(n-k+1)a_{k+2}b_{n-k+1} \right) s^n. \end{aligned}$$

Analogamente

$$x'y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+2)(k+1)(n-k+1)b_{k+2}a_{n-k+1} \right) s^n.$$

Portanto

$$x''y' - x'y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+2)(k+1)(n-k+1)(a_{k+2}b_{n-k+1} - a_{n-k+1}b_{k+2}) \right) s^n. \quad (13)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(a_{k+1}a_{n-k} - b_{k+1}b_{n-k}), n \geq 2, \\ d_n &= \sum_{k=0}^n (k+2)(k+1)(n-k+1)(a_{k+2}b_{n-k+1} - b_{k+2}a_{n-k+1}) \end{aligned}$$

podemos reescrever (12) e (13) como

$$\begin{aligned}
 xx' - yy' &= (a_1^2 - b_1^2)s + \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n, \\
 x''y' - x'y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n s^n.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Vamos agora calcular o segundo termo de (2). Observando-se inicialmente que

$$\begin{aligned}
 xy &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n \right) \\
 &= s^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} s^n \right) \\
 &= s^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j+1} b_{j+1} \right) s^n \right)
 \end{aligned}$$

e fazendo-se

$$\epsilon_n = \sum_{j=0}^n a_{n-j+1} b_{j+1}, \quad n \geq 0,$$

tem-se:

$$xy = s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n s^n.
 \tag{15}$$

Segue-se daí e de (14) que :

$$\begin{aligned}
 xy(x''y' - x'y'') &= s^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n s^n \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n d_i \epsilon_{n-i} \right) s^{n+2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-2} d_i \epsilon_{n-i-2} s^n \right).
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

De (2) tem-se

$$(xx' - yy')(m-1) + xy(x''y' - x'y'') = 0$$

Logo, por (14) e (16), obtem-se

$$(m-1)(a_1^2 - b_1^2) + \sum_{n=2}^{\infty} [(m-1)c_n + \sum_{i=0}^{n-2} d_i e_{n-i-2}] s^n = 0, m \geq 2. \quad (17)$$

Fazemos agora, uso do método de indução sobre os coeficientes, para concluirmos a demonstração. É claro, pela expressão acima que $a_1 = b_1$.

Supondo que

$$a_l = b_l, \quad l = 1, \dots, n-1,$$

tem-se

$$a_{k+2}b_{i-k+1} - a_{i-k+2}b_{k+2} = 0$$

quando $i = 0, 1, \dots, n-2$ e $k = 0, 1, \dots, n-3$.

Dai

$$\sum_{i=0}^{n-2} d_i e_{n-i-2} = n(n-1)a_1^2(a_n - b_n)$$

e

$$e_n = (n-1)a_1(a_n + b_n).$$

Por (17) tem-se:

$$a_1[(m-1)(n+1) - n(n-1)a_1^2](a_n - b_n) = 0.$$

De onde decorre que

$$a_n = b_n.$$

Isto prova que $x(s) = y(s)$ e dai o resultado.

Demonstração do teorema 5.1. O fato que toda hipersuperfície mínima do R^{2m} é analítica implica que sua curva geratriz é analítica. Portanto, como a hipersuperfície passa pela origem de R^{2m} , tem-se que as funções coordenadas de sua curva geratriz estão nas condições do lema 5.2. Assim a curva geratriz é dada por

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s, \frac{\sqrt{2}}{2}s \right)$$

e a superfície correspondente a esta curva é o cone quadrático mínimo.

7 APÊNDICE

Proposição 7.1 *Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, uma curva solução de (2). Se*

$$I(s) = [x(s)]^{m-1}y'(s) \quad e \quad J(s) = [y(s)]^{m-1}x'(s).$$

Então tem-se as seguintes equações básicas para I e J :

$$\frac{dI}{ds} = (m-1) \frac{x^{m-1}[x']^2}{y}$$

$$\frac{dJ}{ds} = (m-1) \frac{y^{m-1}[y']^2}{x}$$

Demonstração. Como $x' = \cos \theta$ e $y' = \operatorname{sen} \theta$, tem-se:

$$x'' = -\theta' \operatorname{sen} \theta = \theta' y', \quad y'' = \theta' \cos \theta = \theta' x'.$$

De onde decorre que

$$y'x'' = -\theta'[y']^2, \quad x'y'' = \theta'[x']^2.$$

Subtraindo-se membro a membro as igualdades acima, observando-se que $x^2 + y^2 = 1$ e que x, y satisfazem (2) obtém-se:

$$\theta' = x'y'' - y'x'' = \frac{(m-1)x'}{y} - \frac{(m-1)y'}{x}.$$

Segue-se daí que

$$\begin{aligned} \frac{dI}{ds} &= (m-1)x^{m-2}x'y' + x^{m-1}y'' \\ &= x^{m-1}x' \left[\frac{(m-1)y'}{x} + \frac{y''}{x'} \right] \\ &= x^{m-1}x' \left[\frac{(m-1)y'}{x} + \theta' \right] \\ &= \frac{x^{m-1}x'(m-1)x'}{y} \\ &= (m-1) \frac{x^{m-1}[x']^2}{y}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{dJ}{ds} = (m-1) \frac{y^{m-1} [y']^2}{x}.$$

Corolário 7.2 I e J são funções não decrescentes, se $x > 0$, $y > 0$.

Lema 7.3 Seja A uma matriz complexa (respectivamente real). Se λ é um valor próprio complexo (respectivamente, valor próprio real) de A e v é um vetor próprio correspondente, então $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$ é uma solução da equação complexa (respectivamente real) de

$$x' = Ax.$$

Demonstração: Como $Av = \lambda v$, tem-se

$$\varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = A(e^{\lambda t} v) = A(\varphi(t)).$$

Proposição 7.4 Se a matriz complexa (respectivamente real) A de ordem $n \times n$ tem valores próprios complexos (respectivamente reais) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e v_1, v_2, \dots, v_n são vetores (próprios) linearmente independentes tais que $Av_i = \lambda_i v_i$, então $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ forma uma base do espaço solução de $x' = Ax$.

Demonstração. Pelo lema 7.3 $\varphi_i(t)$ é solução de $x' = Ax$. Como os v_i são linearmente independentes, os φ_i são linearmente independentes. Logo os φ_i formam uma base do espaço solução de $x' = Ax$.

Observação 7.1. Seja A uma matriz real, $\lambda = \alpha + i\beta$ um valor próprio e $v = v_1 + iv_2$ um vetor próprio de A correspondente a λ . Então $\bar{v} = v_1 - iv_2$ é um vetor próprio correspondente a $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Pois $\bar{\lambda}v = \overline{\lambda v} = \overline{A v} = A(\bar{v})$, por A ser real.

Pela proposição 6.4 $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$ e $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$ são soluções linearmente independentes da equação $x' = Ax$. Com A considerada complexa. Logo

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \frac{1}{2}[\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)], \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2i}[\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)]\end{aligned}$$

são soluções reais do sistema $x' = Ax$, com $\varphi_1(0) = v_1$ e $\varphi_2(0) = v_2$, como equações reais. Por serem v_1, v_2 vetores do R^n linearmente independentes, segue-se que estas

soluções são linearmente independentes. Os vetores v_1, v_2 são linearmente independentes, pois caso contrário teríamos $v_2 = cv_1$, e assim $v = (1 + ic)v_1$ e $\bar{v} = (1 - ic)v_1$ resultariam linearmente dependentes em C^n .

Por exemplo, se A é 2×2 , tem-se que:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t}v \\ &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)(v_1 + iv_2) \\ &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)v_1 + ie^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)v_2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(t) &= e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t)v_1 - ie^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t)v_2.\end{aligned}$$

De onde decorre que:

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)v_1 - \operatorname{sen}(\beta t)v_2]$$

e

$$\varphi_2(t) = e^{\alpha t}[\operatorname{sen}(\beta t)v_1 + \cos(\beta t)v_2]$$

formam uma base do espaço solução de $x' = Ax$. Onde $v_1 + iv_2$ é o vetor próprio associado a $\lambda = \alpha + i\beta$, isto é, toda solução de $x' = Ax$ pode ser escrita como

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t).$$

Caso λ_1 e λ_2 sejam complexos conjugados. Escrevendo, $c_1 = \rho \cos \omega$ e $c_2 = \rho \operatorname{sen} \omega$, tem-se

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{\alpha t}[(\cos \omega \cos \beta t + \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \beta t)v_1 + (\operatorname{sen} \omega \cos \beta t - \cos \omega \operatorname{sen} \beta t)v_2] \\ &= e^{\alpha t}\rho[\cos(\omega - \beta t)v_1 + \operatorname{sen}(\omega - \beta t)v_2].\end{aligned}$$

Proposição 7.5 *Seja M^{2m-1} uma hipersuperfície do R^{2m-1} , invariante por $SO(m) \times SO(m)$. Então M^{2m-1} tem curvatura média constante se, e somente se, $\pi(M^{2m-1})$ é uma solução da seguinte equação:*

$$x'y'' - y'x'' = (2m - 1)h + (m - 1)\left(\frac{x'}{y} - \frac{y'}{x}\right).$$

Demonstração. Seja $\{v_1, v_2\}$ a base canônica do R^2 . Considere a curva $\mu(s) = x(s)v_1 + y(s)v_2$, onde $x(s), y(s) \geq 0$.

Seja $\{\xi, (u_1, \dots, u_{m-1})\}$ e $\{\zeta, (u_m, \dots, u_{2m-2})\}$ parametrizações de esferas unitárias. Se

$$X(s, u_1, \dots, u_{2m-2}) = x(s)\xi(u_1, \dots, u_{m-1})v_1 + y(s)\zeta(u_m, \dots, u_{2m-2})v_2.$$

tem-se que

$$dX = (x'\xi v_1 + y'\zeta v_2)ds + x \sum_{i=1}^{m-1} \zeta_i v_1 du_i + y \sum_{j=m}^{2m-1} \zeta_j v_2 du_j.$$

De onde decorre que

$$d^2s = dX \cdot dX = (x'^2 + y'^2)d^2s + x^2 d^2\sigma_1 + y^2 d^2\sigma_2,$$

onde $d^2\sigma$ denota a métrica da esfera unitária. Além disto tomando-se

$$N = -y'\xi v_1 + x'\zeta v_2,$$

verifica-se que N é um vetor normal à M^{2m-1} .

Sendo

$$dN = (-y''\xi v_1 + x''\zeta v_2)ds - y' \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i v_1 du_i + x' \sum_{j=m}^{2m-1} \zeta_j v_2 du_j$$

tem-se que

$$dX \cdot dN = (-y''x' + x''y')d^2s - xy'd^2\sigma_1 + x'y d^2\sigma_2$$

e desta forma

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}; \\ k_i &= \frac{y'}{x}, \quad i = 1, \dots, m-1; \\ k_j &= -\frac{x'}{y}, \quad j = m, \dots, 2m-2. \end{aligned}$$

De onde vem que

$$(2m-1)h = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2} + (m-1)\frac{y'}{x} - (m-1)\frac{x'}{y}.$$

Concluindo assim a proposição.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALENCAR, Hilário. **Minimal hypersurfaces of R^{2m} invariant by $SO(m) \times SO(m)$.** American Mathematical Society. v. 337, number 1, p. 129-141, 1993.
- [2] ——— **Hipersuperfícies mínimas do R^{2m} invariantes por $SO(m) \times SO(m)$.** Tese de Doutorado, IMPA, 1988.
- [3] BACK, A.; CARMO, Manfredo do.; HSIANG, W. Y.. **On some fundamental equations in equivariant Riemannian geometry.** Preprint.
- [4] BOMBIERI, E.; GIORGI, E. de; GIUSTI, E.. **Minimal cones and the Bernstein problem.** Invent. Math. v. 7, p. 243-268.
- [5] CONWAY, John B. **Functions of one complex variable (graduate texts in mathematics, 11).** Springer-Verlag, New York, 1978.
- [6] GOMES, Jonas de Miranda. **Sobre hipersuperfície com curvatura média constante no espaço hiperbólico.** Tese de Doutorado, IMPA, 1980.
- [7] HALE, J. K.. **Ordinary differential equations.** rev. ed., Krieger, 1980.
- [8] HSIANG, W. Y.; HSIANG, W. T.. **On existence of codimension one minimal spheres in compact symmetric spaces of rank 2.** Journal Differential Geometry. v. 17 p. 583-594, 1983.
- [9] HSIANG, W. Y.; YU, W.. **A generalization of Delaunay's theorem on the construction of rotational symmetric hypersurfaces of constant mean curvature and harmonic maps.** Journal Differential Geometry. v. 16, p. 161-177, 1981.
- [10] HSIANG, W. Y.; TENG, Z. H.; YU, W. C.. **New examples of $(2k-1)$ -spheres into Euclidean $2k$ -space.** Annals of Math. (3). v. 117, p. 609-625, 1983.
- [11] SOTOMAYOR, J.. **Lições de equações diferenciais ordinárias.** Projeto Euclides. 1979.