UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
FAVORECENDO INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS ATRAVÉS DO COMPUTADOR

Tese apresentada por
José Rogério Santana

Núcleo: Educação, currículo e ensino
Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Hermínio Borges Neto

Laboratório Multimeios

Fortaleza
Abril– 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
FAVORECENDO INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS ATRAVÉS DO COMPUTADOR

Tese apresentada por
José Rogério Santana

Núcleo: Educação, currículo e ensino
Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Hermínio Borges Neto

Laboratório Multimeios

Fortaleza
Abril – 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FAVORECENDO INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS ATRAVÉS DO COMPUTADOR

José Rogério Santana

Orientador: Hermínio Borges Neto

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação Brasileira, com área de concentração em Educação Matemática, à banca examinadora da Universidade Federal do Ceará, presidido pelo Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

Laboratório Multimeios

Fortaleza
Abril – 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
FAVORECENDO INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS ATRAVÉS DO COMPUTADOR

José Rogério Santana

Participantes da Banca:

Dr. Hermínio Borges Neto (Presidente) – FACED/UFC
Dra. Eliane Dayse Pontes Furtado – FACED/UFC
Dr. João Montenegro de Miranda – Matemática/UECE
Dr. Júlio Wilson Ribeiro – Computação/UFC
Dr. Orlando Stanley Juriaans – IME/USP

Tese Aprovada em 12 de Abril de 2006.

Laboratório Multimeios

Fortaleza
Abril – 2006

AGRADECIMENTOS

Aos momentos que até o presente pude viver,

Ao meu filho Ângelo Ceccatto C. Santana por simplesmente existir,

À Vânia M. Ceccatto pela sua paciência, respeito e pelo seu amor por mim,

À minha mãe Cleusa Santana Lopes por ter me apoiado em tudo,

Aos meus ancestrais, pois devido eles que hoje aqui estou,

Ao Professor, amigo e exemplo de vida Hermínio Borges Neto,

Ao Laboratório Multimeios e seus membros pelo apoio e compreensão,

Ao CNPq pelo apoio aos Projetos Telemeios/BioGeoMeios,

Ao Colégio Militar de Fortaleza pelo braço forte e mão amiga,

Ao Colégio Monteiro de Moraes pelos momentos de grande alegria,

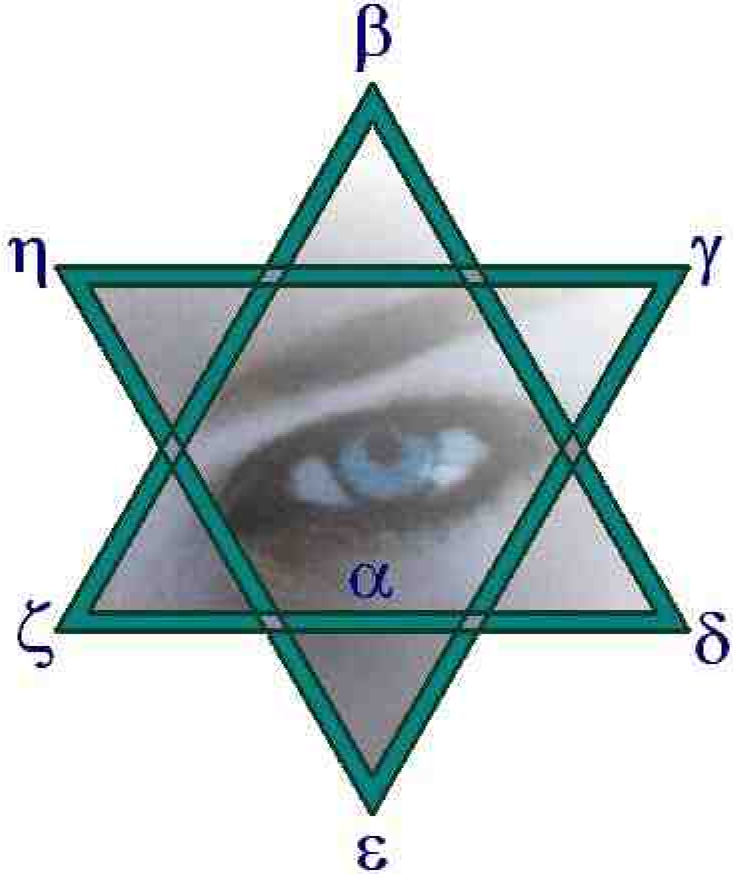
Aos meus amigos e amigas pelas suas contribuições diretas e indiretas,

Ao Fábio F. Figueiredo pelas horas etílicas e pela amizade e irmandade,

Ao meu grande amigo de década Moacir Farias pelas sugestões e idéias,

Ao TODO, Ancião de Dias, arquiteto das coisas conhecidas e desconhecidas.

DEDICATÓRIA



“O TODO é Mente, o Universo é Mental”.

H.T.

<u>In Memoriam</u>

Ao grande amigo e irmão Ciro Degasperi Júnior,

Senti sua ausência meu amigo e irmão,

Mas sei que em minhas lembranças sobre tua pessoa tu se fazes presente aqui,

Por isso também lhe faço a dedicação deste trabalho,

Gostaria que soubesse que neste trabalho há um pouco de ti.

Uma atitude reflexiva é mais enriquecedora que a confiança na tecnologia, mas uma visão míope sobre a tecnologia pode ser pior que a cegueira de nossos pensamentos. Mas o que é refletir sobre a tecnologia? É compreender que o poder tecnológico pode se tornar dominação tecnicista, assim como, entender que mesmo com as tecnologias mais revolucionárias precisamos ter humildade frente o desafio que constitui as nossas vidas enquanto fluxo de acertos e erros.

José Rogério Santana

21 de Agosto de 2005.

2h32 min.

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas e Quadros

Lista de Símbolos

MEDIDAS

cm	Centímetros (unidade para medida de comprimento)
º	Graus (unidade para medição de ângulo)

SÍMBOLOS ARITMÉTICOS

+	Adição
-	Subtração
x	Multiplicação
*	Multiplicação
.	Multiplicação
/	Divisão
^	Exponencial
sqtr( )	Raiz quadrada
$\sqrt{\ }$	Radiciação
abs( )	Valor absoluto ou módulo
| |	Valor absoluto ou módulo
=	Igualdade
≠	Desigualdade
≅	Aproximadamente
≥	Maior ou igual que
≤	Menor ou igual que
±	Mais ou menos
>	Maior que
<	Menor que

$\forall$	Quantificador universal (para todo)
$\exists$	Quantificador existencial (existe)
Σ	Somatório (letra grega sigma)
Δ	Indica variação (letra grega delta)
π	Número pi (letra grega minúscula pi)
Π	Usado neste trabalho para designar o plano (letra grega maiúscula pi)

OPERADORES LÓGICOS

^	Conjunção (operação lógica "e")
v	Disjunção (operação lógica "ou")
$\rightarrow$	Condicional (operação lógica do tipo "Se ... então ...")
$\leftrightarrow$	Bicondicional (operação lógica do tipo "se e somente se")
$\Rightarrow$	Implicação material
$\vdash$	Dedução lógica
$\Leftrightarrow$	Equivalência
$\equiv$	Equivalência
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
( )	Colchetes
[ ]	Parênteses
{ }	Chaves

Resumo

Os recursos computacionais representam novas perspectivas e problemas na área educacional com respeito ao ensino de matemática. Um dos questionamentos presentes, consiste em compreender como ferramentas computacionais podem favorecer o trabalho docente e a aprendizagem discente. Neste aspecto, um fenômeno comum consiste na abordagem que favorece a passagem do Velho PC (Papel Caneta) ao Novo PC (*Personal Computer*), entretanto, este tipo de postura recaiu sobre a perspectiva do tipo "implementou no computador, funcionou, acabou". Neste sentido atividades para formação matemática escolar em ambientes informatizados se tornam pouco reflexivas e acabam por valorizar manipulações e simulações em detrimento do método matemático através de provas e refutações. Tomando estes problemas como base, neste trabalho, investigo a passagem do Novo PC ao Velho PC como possibilidade metodológica em termos educacionais para dimensionar o uso do computador no ensino de matemática favorecendo o processo investigativo. A pesquisa consistiu em compreender ações inesperadas em *software* educativo de matemática nomeado por situações surpresa. A partir destas, decorrentes de restrições computacionais, a idéia consiste em viabilizar conjecturas que exigiam a argumentação matemática ou o processo de validação por demonstração. Para compreender a dinâmica deste trabalho se investigou e caracterizou: i) As situações surpresa; ii) Os procedimentos heurísticos e dedutivos na validação matemática na passagem do Novo PC ao Velho PC em termos docentes/discentes; iii) Que contribuições a passagem do Novo PC ao Velho PC poderia oferecer ao desenvolvimento e uso de *software* educativo de matemática. A pesquisa fez uso da engenharia didática enquanto para favorecer a preparação docente no contexto das situações didáticas, e para a postura do professor-investigador se fez uso da Seqüência Fedathi. A pesquisa de campo no ambiente escolar ocorreu em 3 etapas que consistiram na formação de professores no Colégio Militar de Fortaleza, formação de alunos de 6ª série da EMEF Monteiro de Moraes em Fortaleza, e etapa final com estudantes de 8ª série do CMF. Foram realizadas 40 horas/aula nestas 3 etapas. E pela transcrição de filmagens, questionários entre outros dados, foi possível compreender aspectos da passagem do Novo PC ao Velho PC como metodologia educacional que favorece investigações matemáticas através do computador. Foram consideradas situações de experimentação e desenvolvimento em *software* educativo de matemática. Após transcrição dos dados se obteve 18 situações surpresa, houve dados decorrentes de experimentação na manipulação de *software* educativo de matemática, e relato sobre experiência no desenvolvimento do *software* GeoMeios. Os resultados mostraram que as situações surpresa podem decorrer de limitações computacionais, mas também resulta da ação-instrumental realizada na interação homem-computador-saber. Também foi possível realizar a passagem do Novo PC ao Velho PC de forma reflexiva e crítica junto aos docentes e discentes, e por fim, foi se compreendeu que as ações instrumentais e as limitações computacionais relativas a divergências conceituais saber matemático por parte dos desenvolvedores são fatores que exigem maior consideração na perspectiva da engenharia de *software* em termos educacionais.

Palavra(s) chave(s): Situação surpresa, investigações matemáticas, Seqüência Fedathi, engenharia didática, reflexão, metareflexão.

Abstract

The computerized resources represents new perspectives and problems in the educational area with regard to the mathematics teaching. One of the present questions, consist in understanding as computer tools can favor the educational work and the learning studant. In this aspect, a common phenomenon consists in approach that favors the passage of the Old PC (PenCil) to the New PC (Personal Computer), however, this posture type relapses on the perspective of the type " it implemented in the computer, it worked, it ended ". In this sense activities for school mathematical formation in computerized atmospheres turn not very reflexive and they end for valuing manipulations and simulations in detriment of the mathematical method through proofs and refutations. Taking these problems as base, in this work, I investigate the passage of the New PC to the Old PC as methodological possibility in educational terms for dimensionar the use of the computer in the mathematics teaching favoring the investigative process. The research consisted of understanding unexpected actions in educational software of mathematics, named by situations surprise. Starting from these, current of restrictions computacionais, the idea consists of making possible structures you conjecture that demanded the mathematical argument or the validation process for demonstration. To understand the dynamics of this work it was investigated and it characterized: i) The situations surprise; ii) The procedures heuristics and deductive in the mathematical validation in the passage of the New PC to the Old PC in terms teacher/studant; iii) That contributions the passage of the New PC to the Old PC could offer to the development and use of educational software of mathematics. The research made use of the didactic engineering while to favor the educational preparation in the context of the didactic situations, and for the posture of the researcher-teacher that used of the Fedathi´s Sequence. The field research in the school atmosphere happened in 3 stages that consisted of the teachers' formation in the Military School of Fortaleza (CMF), formation how students of 6ª series of EMEF Monteiro de Moraes, and final stage with students of 8ª series of CMF. The formation haved 40 hour/class was accomplished in these 3 stages. And for the transcription of filmings, questionnaires among other data, it was possible to understand aspects of the passage of the New PC to the Old PC how an educational metodology that favors mathematical investigations through the computer. Experimentation situations and development were considered in educational sofware of mathematics. After transcription of the data it was obtained 18 situations surprise, had given current of experimentation in the manipulation of educational in software of mathematics, and I tell about experience in the development of the software GeoMeios. The results showed that the situations surprise can elapse of computers limitations, but they also result of the action-instrumental accomplished in the interaction to man-computer-know. It was also close to possible to accomplish the passage of the New PC to the Old PC in a reflexive and critical way the educational ones and studantes, and finally, it was it was understood that the instrumental actions and the limitations relative computacionais to conceptual divergences to know mathematical on the part of the developments they are factors that demand larger consideration in the perspective of the software engineering in educational terms.

Key word: Surprised situation, mathematical investigations, Fedathi´s sequence, didactic engineering, reflection, metareflection.

Résumé

Les ressources informatisées représentent de nouvelles perspectives et des problèmes dans la région pédagogique quant à l'enseignement des mathématiques. Un des questions présentes, consistez dans comprendre comme outils de l'ordinateur peut préférer le travail pédagogique et le studant de l'érudition. Dans cet aspect, un phénomène commun consiste dans approche qui préfère le passage du Vieux PC (Papier Crayon) au Nouveau PC (*Pesonal Computer*), cependant, ces rechutes du type de l'attitude sur la perspective du type " il a rendu effectif dans l'ordinateur, il a travaillé, il a terminé ". Dans ces activités du sens pour école la formation mathématique dans les atmosphères informatisées ne tourne pas très réfléchi et ils terminent pour évaluer des manipulations et des simulations dans détriment de la méthode mathématique à travers preuves et réfutations. Prendre ces problèmes comme bas, dans ce travail, j'enquête sur le passage du Nouveau PC au Vieux PC comme possibilité méthodologique dans les termes pédagogiques pour dimensionar l'usage de l'ordinateur dans le mathématiques apprendre qui préfère le processus investigateur. La recherche a consisté en actions inattendues compréhensives dans logiciel pédagogique de mathématiques, nommé par situation surprise. Commencer de ceux-ci, courant de computacionais des restrictions, l'idée consiste en fabrication structures possibles vous conjecturez qui a demandé la discussion mathématique ou la validation développe pour démonstration. Comprendre la dynamique de ce travail il a été enquêté sur et il a caractérisé: i) La situations surprennent; ii) Procédures L'heuristics et déductif dans la validation mathématique dans le passage du Nouveau PC au Vieux PC dans professeur/studant des termes; iii) Que contributions le passage du Nouveau PC au Vieux PC pourrait offrir au développement et usage de logiciel pédagogique de mathématiques. La recherche a fait usage du ingénierie didactique pendant que préférer la préparation pédagogique dans le contexte des situations didactiques, et pour l'attitude du chercheur-professeur qui a utilisé de la Séquence Fedathi. La recherche du champ dans l'atmosphère scolaire s'est passée dans 3 étapes qui ont consisté en la formation des professeurs dans l'École Militaire de Fortaleza (CMF), formation comme étudiants de 6ª séries d' EMEF de Monteiro Moraes, et étape définitive avec étudiants de 8ª séries de CMF. la réalisation de la formation terminez dans 40 heure/classe a été accompli dans ces 3 étapes. Et pour la transcription de filmages, questionnaires parmi autre données, c'était possible de comprendre aspects du passage du Nouveau PC au Vieux PC comme un metodology pédagogique qui préfère des enquêtes mathématiques à travers l'ordinateur. Les situations de l'expérimentation et développement ont été considérés dans le logiciel pédagogique de mathématiques. Après transcription du données il a été obtenu 18 situations surprennent, avait donné courant d'expérimentation dans la manipulation d'éducateur dans logiciel de mathématiques, et je dis au sujet d'expérience dans le développement du logiciel GeoMeios. Les résultats ont montré que la situations surprennent peut s'écouler de limitations des ordinateurs, mais ils résultent aussi de l'action-instrumental a accompli dans l'interaction pour homme-ordinateur-savoir. C'était aussi près de possible pour accomplir le passage du Nouveau PC au Vieux PC dans un chemin réfléchi et critique les ceux pédagogiques et studantes, et finalement, c'était il était compris que les actions instrumentales et les limitations computacionais relatif aux divergences conceptuelles savoir les mathématiques de la part des développements ils sont des facteurs qui demandent la plus grande considération dans la perspective du logiciel qui construit dans les termes pédagogiques.

Le mot clé: situations surprennent, la recherche mathématiques, Sequence Fedathi, Ingénierie didactique, réflexion, metareflexion.

INTRODUÇÃO

O uso de tecnologias computacionais como recurso didático para professores de diversas áreas é cada vez mais comum nos sistemas escolares em vários países. No Brasil, mesmo diante das dificuldades sócio-econômicas esta realidade não é diferente. Na atualidade, muitas iniciativas nos setores público e privado, sem falar nas parcerias institucionais, estão em andamento em várias cidades brasileiras. Diante destes fatos, há a necessidade em trabalhar a formação de professores e estudantes para os desafios que as tecnologias computacionais estão colocando diante da sociedade nestes últimos tempos.

Novos problemas, paradigmas e perspectivas surgem em diferentes contextos sociais, e o computador, equipamento que em um passado recente era visto como "uma possibilidade do futuro", é parte integrante e indissociável da História Humana do século XXI. Tecnologias como calculadoras, celulares, aparelhos de televisão, videogames entre tantos outros, integram recursos de trabalho e estudo para manipulação, transmissão e recepção de dados. Recursos globalizados como a Internet viabilizam a convergência de diferentes tecnologias numa rede mundial de troca de informações e serviços entre pessoas em vários locais do Planeta. Fatos como estes a pouco mais que vinte anos seriam inimagináveis para boa parte da população mundial. Instituições financeiras e diversas prestadoras de serviços usam tecnologias computacionais para otimização e automação de atividades que outrora eram realizadas somente através de recursos mecânicos. Na área educacional não têm sido diferente. O mundo mudou, mas em quais aspectos tais transformações alteraram a realidade em que vivemos? E como a "novidade" tecnológica modifica e transforma o ser humano em seu modo de perceber, confrontar e refletir a realidade?

Mediante o uso de recursos computacionais, o processo que constitui a interação entre o homem, a máquina e o saber acadêmico, coloca diante dos profissionais de educação e dos desenvolvedores de *software* educativo novos problemas e questionamentos relativos ao uso e manuseio de ferramentas computacionais no processo de formação humana. Neste estudo procuro abordar alguns destes questionamentos de uma perspectiva disciplinar relativo ao saber matemático e o seu ensino no ambiente escolar mediante reflexões que envolvem a realidade do professor e dos alunos em situações de ensino-aprendizagem. No entanto, para abordar problemas sobre o uso de recursos computacionais, se fez uma necessidade compreender o problema epistemológico do processo de validação no saber matemático relacionando-o com o comportamento dos recursos computacionais em ocorrências que envolvem a interação homem/máquina/conhecimento mediante situações inesperadas que optei por chamar como "situações surpresa" conforme é apresentado em Santana (2002)[1].

Além das questões acima apresentadas, um dos objetivos do presente trabalho está relacionado à proposta metodológica de Santana (2002) que constitui o processo que chamo por passagem do "Novo PC (*Personal Computer*)" ao "Velho PC (Papel e Caneta)". E ao desenvolver este trabalho busco experimentar e vivenciar, em situações de ensino-aprendizagem, a viabilidade desta proposta em suas possibilidades e seus limites. No entanto, para realização da pesquisa de campo se fez necessário o uso e adequação de procedimentos e metodologias distintas para contemplar o contexto social relacionado à realidade brasileira, e especificamente cearense, de duas escolas públicas com histórias e características próprias, mas que permitiram vislumbrar algumas das relações que surgem ao se trabalhar com a passagem do "Novo PC" ao "Velho PC" na perspectiva da construção de investigações matemáticas por parte dos alunos.

Os objetivos de investigação que procuro explorar neste trabalho representam a continuidade das realizações do mestrado e constituem os seguintes questionamentos:

a) Identificar e caracterizar as situações surpresa, durante processo de investigação matemática na sala-de-aula, ou em situações experimentais,

[1] SANTANA, J.R. **Do Novo PC ao Velho PC: A prova no ensino de Matemática a partir do uso de recursos computacionais.** 2002. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE.

considerando possibilidades e limitações dos recursos computacionais;

b) Averiguar como os procedimentos heurísticos e dedutivos no processo de validação matemática a partir de recursos computacionais, tomando como base situações surpresa, viabilizam a geração de conjecturas que favoreçam a construção do processo investigativo matemático em sala-de-aula com professores e alunos de forma reflexiva, e qual o papel que o professor deve exercer diante deste processo denominado passagem do “Novo PC” ao “Velho PC”;

c) Com base na passagem do “Novo PC” ao “Velho PC” , como os desenvolvedores sejam eles voltados a *software* educativo e/ou recursos de educação a distância pela Internet, podem pensar questões didáticas, pedagógicas e ergonômicas relativas a epistemologia do saber que se pretende ensinar.

Para verificar as questões apresentadas como objetivos de investigação, desenvolvi uma pesquisa-ação experimental que se fundamentou na Engenharia Didática e na Seqüência Fedathi[2], com objetivo de elaborar cursos de curta duração sobre o ensino de Matemática assistido por computador com professores e estudantes do CMF[3], bem como, com professores da Escola Estadual “Tecla Ferreira” e alunos da Escola Municipal “Monteiro de Moraes”.

Foram três atividades de formação para realização do trabalho experimental de campo que podem ser divididas do seguinte modo:

Etapa 01 - Atividade realizada em fevereiro de 2004 junto aos docentes do CMF e da Escola Estadual “Tecla Ferreira”, cuja finalidade consistiu

---

[2] Estas metodologias serão discutidas mais detalhadamente no transcorrer do trabalho.
[3] Colégio Militar de Fortaleza.

em trabalhar a capacitação de professores que poderiam viabilizar ou auxiliar na formação discente nas fases posteriores;

Etapa 02 - Momento realizado com discentes de 5^a e 6^a séries da Escola Municipal "Monteiro de Moraes" durante a primeira quinzena de outubro de 2004, cujo objetivo consistia em testar algumas hipóteses sobre materiais didáticos e recursos computacionais utilizados, bem como, para preparar a equipe de pesquisa para a fase posterior;

Etapa 03 – Momento realizado com discentes de 8^a série do CMF, durante a segunda quinzena de outubro de 2004. O objetivo deste momento consistiu na validação do trabalho de pesquisa sobre a pertinência da metodologia sobre a passagem do "Novo PC" ao "Velho PC".

Além deste trabalho de pesquisa, foi possível contar com a experiência na análise e desenvolvimento de *software* educativo voltado ao ensino de matemática para compreensão de diversos problemas relativos ao uso do computador durante os anos de 1999 a 2004 através do Projeto Telemeios, financiado pelo CNPq[4], e realizado pelo Laboratório Multimeios FACED/UFC[5].

Este trabalho foi organizado em quatro capítulos. No Capítulo 01, procuro discutir e revisar as concepções sobre a passagem do "Novo PC" ao "Velho PC", levando em consideração concepções e reflexões sobre validação matemática, o processo investigativo matemático no meio escolar, o uso do computador no ensino de matemática, a ação reflexiva e o uso de ferramentas computacionais em situações de ensino e suas limitações em relação ao saber matemático, além de questões sobre a ação instrumental relacionando o uso da régua e compasso com respeito aos *softwares* voltados ao ensino de geometria.

No Capítulo 02, procuro discutir o aparato metodológico desenvolvido e utilizado durante a pesquisa de campo, levando em conta as dificuldades na realização do trabalho, os recursos materiais utilizados e os recursos humanos envolvidos neste processo, bem como, as concepções teórico-metodológicas que nortearam minhas idéias, dando destaque à engenharia didática e a Seqüência Fedathi. Além disto, procuro comentar algumas idéias que

---

[4] Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

foram desenvolvidas durante a experimentação e a pesquisa de campo entre 2002, 2003 e 2004.

No Capítulo 03, discuto e busco analisar os dados coletados abordando: os *softwares* educativos relativos ao ensino de matemática, considerando a passagem do “Novo PC” ao “Velho PC” como procedimento para avaliação destes recursos. Também abordo temas como educação a distância na Internet e *software* livre, a luz de alguns conceitos que permitem definir o que é um *software* educativo no contexto da Informática Educativa e da Cultura Digital. Também são consideradas concepções sobre formação docente para o uso de recursos computacionais no ensino de matemática, relacionando idéias como a reflexão e a metareflexão na formação docente e discente. Além destas temáticas, abordo princípios que podem nortear a prática docente sobre os cuidados que se deve ter ao usar a passagem do “Novo PC” ao “Velho PC” no ensino de matemática assistido por computador, bem como, proponho algumas estratégias que podem favorecer a postura investigativa dos estudantes.

No Capítulo 04, procuro apresentar e discutir os resultados obtidos com a realização desta pesquisa, considerando as perspectivas sobre a passagem do “Novo PC” ao “Velho PC” em termos didáticos, de modo que seja possível viabilizar investigações no ensino de matemática assistido por computador nas relações docentes e discentes no meio escolar.

Este trabalho representa um esforço de pesquisa em educação que está sendo realizada por minha pessoa sob orientação do Prof. Dr. Hermínio Borges Neto desde 1997. Daquela época aos dias atuais, ocorreram várias transformações no cenário educacional em matemática no Brasil e em vários países. Na atualidade, após várias experiências no ensino de matemática com uso de recursos computacionais, percebo que este trabalho de tese é um esforço teórico-metodológico e prático, no intuito de apresentar alguns parâmetros didáticos para favorecer a formação reflexiva de estudantes e professores de matemática. No entanto, também busco abordar idéias e reflexões que visam contribuir com desenvolvimento de tecnologias computacionais voltadas ao ensino

[5] FACED/UFC: Faculdade de Educação / Universidade Federal do Ceará.

de matemática, e neste sentido, a pesquisa em questão visa formar e apresentar algumas idéias e parâmetros que possam ser úteis aos desenvolvedores de *software* educativo voltado ao ensino de matemática. Espero que o leitor desta tese desenvolva também suas reflexões próprias, e faça o uso crítico destas idéias para o fortalecimento do seu próprio trabalho na formação matemática de docentes e discentes em relação ao uso de tecnologias no ensino desta disciplina. Para contatos posteriores, críticas e sugestões, deixo meu correio eletrônico para discussões sobre a temática que estudo.

CAPÍTULO 01 – DO NOVO PC AO VELHO PC

As idéias iniciais sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC, como foi mencionado acima, surgiram com base na observação de situações surpresa que ocorriam freqüentemente pela manipulação de recursos existentes nos *softwares* voltados ao ensino de matemática por parte de alunos e professores.

Ao desenvolver atividades matemáticas no computador que eram propostas nos cursos de formação em geometria euclidiana e construções geométricas, realizadas no Laboratório Multimeios FACED/UFC entre 1997 e 2002, observei que os usuários, professores e alunos, quando usavam recursos que favoreciam a manipulação, simulação e a animação, se deparavam freqüentemente com questionamentos novos que confrontavam concepções matemáticas pré-estabelecidas e os seus conceitos sobre geometria. Casos como a obtenção da soma dos ângulos internos de um triângulo, superior ou inferior a dois ângulos retos, que haviam sido obtidos a partir de *software* educativo matemático, desafiava o raciocínio dos professores e alunos, e neste sentido, surgiu como questionamento compreender como estes fatos poderiam ser uma oportunidade para o professor desenvolver o processo investigativo matemático em sala-de-aula para formação do senso-crítico e da reflexão matemática dos alunos a partir de conjecturas matemáticas com base em situações geradas a partir do computador. Neste sentido, caberia ao professor catalogar, conjecturar e estruturar a contextualização das situações surpresa que ocorriam espontaneamente no computador pela manipulação dos recursos existentes em *software* educativo para o desenvolvimento de atividades futuras de ensino.

No entanto, para utilizar situações surpresa, oriundas das limitações do computador, com fins educacionais que favoreçam a postura investigativa de professores e alunos no ensino de matemática, exige-se uma compreensão sobre o significado de teoremas, definições e axiomas presentes no processo de validação dos argumentos matemáticos. Este processo de recontextualização das situações inusitadas em conjecturas e problemas matemáticos novos, com fins educacionais, foi nomeado como passagem do Novo PC ao Velho PC.

A passagem do Novo PC ao Velho PC, na perspectiva educacional, é um processo metodológico para o uso do computador no ensino de matemática, e visa permitir um novo olhar sobre problemas antigos, ou ainda a geração de novas conjecturas matemáticas que poderiam ser exploradas e investigadas por professores e estudantes durante aulas de matemática com uso de computadores. Um dos objetivos desta proposta consiste em viabilizar em aula a construção do processo investigativo em matemática, permitindo aos docentes e discentes viver uma experiência significativa a partir das situações surpresa oriundas do computador.

Neste aspecto, o computador passa a ser visto como uma geratriz de problemas matemáticos genuínos para os estudantes e professores. Além disto, estes problemas ocorrem espontaneamente em decorrência de falhas oriundas de manipulações livres realizadas no transcorrer de uma aula, ou seja, não se tratam de situações artificialmente geradas por meio de livros didáticos e paradidáticos, mais sim, são fenômenos decorrentes do uso das tecnologias computacionais em situações de ensino-aprendizagem em *software* educativo, que em muitos casos são mal aproveitadas pelos docentes por falta de metodologias que lhes viabilizem construir um novo olhar educativo sobre aquelas falhas que os alunos apresentam em sala-de-aula ao interagir com tais recursos[6].

Diante destes fatores, porque não usar situações surpresa para viabilizar a construção de conhecimentos e saberes por meio do processo de validação matemática com base em provas e contra-exemplos, favorecendo a reflexão e construção de uma experiência matemática significativa entre alunos e professores? Ou seja, não se trata do computador como um recurso para sistematizar o que já havia sido desenvolvido no papel, fato este que configura o que chamo de passagem do Velho PC ao Novo PC, que constitui a implementação de atividades desenvolvidas em aulas teóricas no computador[7].

[6] As falhas aqui não são necessariamente erros cometidos pelos alunos, podem ser erros decorrentes do próprio software, ou ainda, da própria concepção matemática que um grupo de desenvolvedores possui sobre um assunto.

[7] Do Velho PC ao Novo PC: O Problema deste tipo de abordagem na prática de ensino, é que o aluno após ter implementado a situação no computador, considera seus problemas por encerrados, e as possibilidades da ferramenta computacionais nesta perspectiva se reduzem ao “funcionou” ou “não funcionou”.

Como resultados parciais da pesquisa realizada de 1997 até 2003, foi possível compreender que o processo de validação por demonstração na passagem do Novo PC ao Velho PC permitiu confrontar problemas antigos sobre uma nova perspectiva, mas também observei que é necessário o aprimoramento na formação dos professores para o desenvolvimento deste trabalho. Também foi possível averiguar uma relação entre a didática reflexiva de Schön (2000) com as concepções desenvolvidas sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC, bem como, desenvolver um estudo epistemológico sobre os aspectos dedutivos e heurísticos da prova matemática com respeito às concepções práticas do trabalho do matemático em relação ao uso de novas tecnologias.

No entanto, ao longo destes estudos surgiram questionamentos relacionados às condições e possibilidades para implementação real da passagem do *Novo PC ao Velho PC*, pois durante o mestrado, os cursos de formação tiveram curta duração. Além disto, poucas práticas haviam sido filmadas com estudantes do Ensino Fundamental, e a maior parte da minha experiência estava centrada na formação dos professores, fator este que não considerava o cotidiano escolar e o contato com os alunos, adolescentes para averiguar as possibilidades e limites da passagem do Novo PC ao Velho PC. Diante da ausência de respostas em situação de aula no ambiente escolar, surgiu como questionamento também compreender como uma didática reflexiva poderia ser adequada ao ensino de matemática através de recursos computacionais. Neste sentido, foi necessário o desenvolvimento de uma pesquisa ampla para averiguar em sala-de-aula com alunos do Ensino Fundamental as possibilidades reais das concepções teóricas desenvolvidas sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC.

Para responder estes questionamentos se fez necessário a realização de cursos de formação com estudantes do Ensino Fundamental, no entanto, antes de discutir a pesquisa em si mesma, procurarei apresentar a seguir os preceitos teóricos que fundamentaram a prática didático-metodológica realizada nesta pesquisa sobre as questões relativas a abordagem que chamo por passagem do Novo PC ao Velho PC.

01. 1 – Concepção teórica

A princípio, a passagem do Novo PC ao Velho PC, se configurou em uma postura metodológica em que busco adequar os elementos das tecnologias computacionais ao processo de investigação matemática com base em situações surpresa. Segundo Santana (2002: p. 90):

> "Na passagem do Novo PC ao Velho PC, se propõem a exploração das possibilidades de simulação e manipulação de ferramentas computacionais, para o estabelecimento de novos problemas matemáticos que exigirão o processo de validação matemática, seja por verificação ou por demonstração. A idéia é fazer uso do computador para obtenção de conjecturas genuínas, ou ainda, para obter um ponto de vista novo sobre problemas antigos. Neste aspecto um dos objetivos do uso do computador no ensino de matemática, consiste em proporcionar ao estudante uma experiência matemática prática e significativa que lhe permita compreender o processo de produção do saber matemático, a partir de enunciados novos que surgem da manipulação e simulação das ferramentas computacionais."

Para Santana (2002), o uso do computador no ensino de matemática, está justamente, na possibilidade desta ferramenta apresentar um "novo olhar" sobre problemas antigos, ou ainda, nas ações de manipulação que viabilizam novos questionamentos através de conjecturas matemáticas. Neste mesmo sentido Gravina (2001), ao relacionar a pesquisa matemática atual com os recursos computacionais, chama atenção para a visualização através dos elementos de simulação enquanto estruturas que podem favorecer a construção de novos olhares sobre a elaboração de conhecimentos e saberes. Segundo Gravina (2001: p.40):

> "Na pesquisa matemática atual, objetos e processos abstratos até então restritos aos 'olhos da mente' são agora externalizados através de precisas, objetivas e dinâmicas visualizações na tela de um computador, implicando novos insights na abordagem da complexidade e do precário entendimento de muitos destes objetos e processos".

Nesta concepção, Gravina (2001) compreende visualização não somente como observação de imagens, mas a reconstrução de processos abstratos que podem apresentar dificuldades de compreensão para muitos estudantes. No entanto, se por um lado uma visualização pode favorecer o pensar matemático criativo, se torna uma necessidade propiciar o entendimento sobre os elementos de validação do saber matemático que se pretende ensinar, caso contrário, poderia ocorrer aos alunos que a matemática se torne algo que é satisfeito somente por processos que envolvam animação, manipulação e visualização. Fator este que pode distanciar o estudante do caráter investigativo real do saber matemático. Nesta perspectiva, para fundamentar adequadamente a passagem do Novo PC ao Velho PC, é necessário compreender a validação matemática, enquanto processo de estruturação deste tipo de saber, considerando suas perspectivas em termos de ensino-aprendizagem.

01.1.1 – Validação Matemática e as demonstrações

O processo de validação em matemática está fortemente relacionado às concepções sobre resolução de problemas, pois boa parte do trabalho matemático se constitui na averiguação e análise de questionamentos através de estruturas de validação deste saber. Por outro lado, a matemática ensinada na escola, está associada ao estudo de questões instanciadas que na maioria das vezes não constituem os processos investigativos desta ciência. Entretanto, ao desenvolver atividades didáticas nas escolas, o ideal do ponto de vista docente deveria ser se reportar ao processo de validação matemática frente o saber escolar ensinado. Diante destas questões, se tornou necessário compreender a resolução de problemas a partir do processo de validação, enquanto elemento que constitui parte do trabalho de um matemático, até mesmo para entender diferenças e semelhanças entre a postura de pesquisadores, docentes e discentes frente o saber matemático e escolar ensinado nesta disciplina.

Segundo Polya (1978: p 125 – 129), os problemas matemáticos podem ser divididos em dois tipos: os problemas de determinação e os problemas de demonstração.

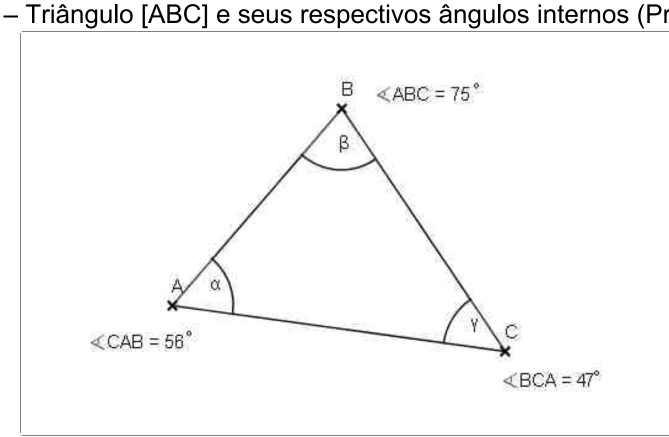
a) Problemas de Determinação: Possuem como objetivo encontrar um resultado, que na maioria das vezes é instanciado e não generalizado. Segundo Polya (1978), as partes que constituem este tipo de problema seriam a incógnita, os dados e a condicionante.

b) Problemas de Demonstração: Têm por objetivo averiguar de forma conclusiva se uma determinada afirmação, denominada como conjectura, é verdadeira ou falsa. Fato este que exige o processo conhecido como demonstração matemática. Quanto este tipo de problema, Polya (1978) considera que suas partes são a hipótese e a conclusão. Ou seja, apresenta-se neste processo uma estrutura argumentativa lógico-condicional em que o "se X" equivale à hipótese, e o "então Y" é equivalente a conclusão.

Para refletir melhor sobre os problemas de determinação e demonstração, considere o exemplo a seguir:

Exemplo 001 – Dado um triângulo **[ABC]**, cujos ângulos internos **[CAB] = 58º**; **[ABC] = 75º**; **[BCA] = 47º**. Calcule a soma dos ângulos internos, verificando se estes equivalem a dois ângulos retos.

Figura 001 – Triângulo [ABC] e seus respectivos ângulos internos (Problema 001).



O exemplo 001 constitui um clássico problema de determinação pelas concepções de Polya (1978). O objetivo consiste em verificar se a soma dos ângulos internos do triângulo **[ABC]** é equivalente a dois ângulos retos (**180^o**). Como problemas de determinação exigem a existência de dados, incógnita e condicionante, procurarei identificar estas estruturas de validação no exemplo 001.

i) Dados: No caso do exemplo 001, são relativos ao enunciado:

a1) O triângulo **[ABC]**;

a2) Os ângulos internos:

α **= [CAB] = 58^o**

β **= [ABC] = 75^o**

γ **= [BCA] = 47^o**

a3) Dois ângulos retos que equivalem a **180**^{o}.

ii) Incógnita: No exemplo 001, **x** é uma incógnita implícita ao enunciado, o **x** é a soma dos ângulos internos de **[ABC]**, ou seja, **x** é a incógnita que se pretende averiguar. Em termos matemáticos:

x = $\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow$ **x = [CAB]+[ABC]+[BCA]**.

iii) Condicionante: Verificar se o valor de **x** equivale a dois ângulos retos. Ou seja:

x = [CAB]+[ABC]+[BCA] = $\alpha+\beta+\gamma =$ **180^o**.

Tendo dados, incógnita e condicionante o processo de validação para o problema de determinação em questão (exemplo 001), consiste em verificar se **x** equivale a dois ângulos retos pela soma dos ângulos internos de **[ABC]** que são **[CAB]**, **[ABC]** e **[BCA]**. Em termos matemáticos consiste em afirmar que:

x = $\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow$ **x = [CAB]+[ABC]+[BCA] = 58^o + 75^o + 49^o**

x = 58^o + 75^o + 47^o = 180^o.

Como foi possível observar, no exemplo proposto o problema de determinação consistiu em conferir se a incógnita está ou não em correspondência com os dados e os condicionantes apresentados no enunciado, em outros casos, um problema de determinação pode corresponder a apresentação de um resultado a partir dos dados e dos condicionantes. No entanto, o processo de validação relativo aos problemas de determinação consiste na verificação que corresponde à descoberta de uma incógnita a partir dos dados e condicionantes apresentados em um problema matemático.

A verificação, enquanto processo de validação em matemática, se caracteriza pela apresentação de uma resposta específica para uma situação problema contextualizada. No entanto, este procedimento de validação não permite averiguar se a repetição de uma série de questões equivalentes, ao apresentar resultados similares, pode enunciar um princípio ou uma lei matemática que represente uma verdade explicativa comum para todos os questionamentos daquele tipo. Em outros termos, podemos dizer que a soma dos ângulos internos do triângulo **[ABC]** do exemplo 001 é equivalente a dois ângulos retos. No entanto, em outros triângulos **[ABC]** quaisquer, a soma dos ângulos internos será equivalente a dois ângulos retos sempre? O que poderia garantir que tal fato seja uma verdade matemática? Deste tipo de questionamento advêm os processos de validação por demonstração.

Mas, conceitualmente, o que é a demonstração em matemática? Vou apresentar um novo exemplo que constitui um problema de demonstração.

Exemplo 002 – Dado um triângulo **[ABC]** qualquer, cujos ângulos internos sejam α **= [CAB]**, β **= [ABC] e** γ **= [BCA]**, investigue e justifique se a expressão $\alpha+\beta+\gamma =$ **180^{o}** é verdadeira para qualquer triângulo **[ABC]**.

No caso do exemplo 002 surgiu um novo questionamento. Se pretende compreender se a proposição $\alpha+\beta+\gamma =$ **180^{o}** é verdadeira para qualquer triângulo, que por uma questão de nomenclatura chamo por **[ABC]**. Este tipo de problema possui um alcance maior, pois o que está sendo investigado não é um resultado instanciado de uma situação específica, mas sim, uma suposta propriedade que pode existir em um triângulo qualquer.

Neste caso, segundo Polya (1978) o exemplo 002 constitui um problema de demonstração, e este tipo de questionamento carece da prova matemática, que chamarei por processo de validação por demonstração. Portanto, deste enunciado se deve obter a hipótese e a conclusão, sendo possível escrever uma expressão do tipo “Se **X** então **Y**”. Identificando esta estrutura no exemplo 002 se pode dizer que existe:

Condicional Implícito ao problema - Se **[ABC]** é um triângulo que tenha os ângulos α **= [CAB]**, β **= [ABC] e** γ **= [BCA]**, então $\alpha+\beta+\gamma =$ **180º**.

Hipótese - [ABC] é um triângulo e seus ângulos são: α **= [CAB]**; β **= [ABC]** e γ **= [BCA]**.

Conclusão - A soma dos ângulos internos de **[ABC]** deve ser equivalente a dois ângulos retos (**180º**). Em termos matemáticos: $\alpha+\beta+\gamma =$ **180º**.

O problema de demonstração é provar que $\alpha+\beta+\gamma =$ **180º**.

Para fins elucidativos, vou usar um termo técnico matemático para a proposição condicional. A chamarei como conjectura, que em matemática é uma proposição que não está devidamente comprovada, não constituindo assim uma verdade matemática. Por outro lado, se uma conjectura tiver sido devidamente averiguada e provada, ela passa a ser reconhecida como um teorema. Logo, um teorema pode ser considerado uma verdade matemática, e o trabalho que deve ser realizado são a averiguação de uma conjectura para saber se a mesma constitui um teorema. Neste sentido, um problema de demonstração é uma ação mais profunda e reflexiva que um problema de determinação, pois a ação proposta é de âmbito conceitual e filosófico.

Diante da conjectura posta ao aprendiz-pesquisador, surgem questões que envolvem as características epistemológicas da produção do saber matemático. Por exemplo, o aprendiz pode questionar: “Como iniciar a resolução deste tipo de problema, se não há um valor numérico com que possa trabalhar?”.

De fato, nos problemas de demonstração não se torna adequado o uso de valores numéricos, pois estes constituiriam constantes que particularizariam a situação que se pretende averiguar enquanto generalização. Por exemplo, se no exemplo 002 for utilizado algum tipo de medição para os ângulos internos de **[ABC]**, o problema recaí sobre problemas de determinação, a semelhança do que ocorre ao exemplo 001, logo não seria possível provar a conjectura proposta pelo exemplo 002. Por outro lado, o estudante pode propor: “Vamos listar todos os casos particulares possíveis”. No entanto, ao realizar tal ação o aprendiz se defrontará com infinitas possibilidades de combinação sobre as medidas dos ângulos, afinal estas podem, aritmeticamente, ser subdivididas infindáveis vezes, e se corre o risco de verificar um bilhão de casos particulares que corroborem a conjectura enquanto teorema, no entanto, pode ser que em um bilhão e um de casos se obtenha uma anomalia que desabone todo o trabalho desenvolvido.

Portanto, buscar uma estrutura metodológica que seja indutiva é inviável para resolução deste tipo de problema ainda que muitos casos particulares, com resultados equivalentes, permitam pensar sobre conjecturas novas.

Por outro lado, partir de estruturas gerais para particulares, ou seja, usar idéias dedutivas, pode ser uma forma para tratar este tipo de questão. Neste caso, o aprendiz deve ter condições para compreender que uma conjectura é uma proposição generalizada que deve funcionar como ponto de partida para sua investigação matemática. Mas, ao propor uma conjectura se deve supor que a mesma é parte de um contexto matemático específico que envolve este tipo de saber, ou seja, ter uma conjectura pressupõe uma linguagem e um modo de pensar, fato este que exige uma estrutura que é conhecida como sistema axiomático. Posteriormente discutirei um pouco mais este assunto, mas para que seja possível compreender este exemplo 002, considerarei um sistema axiomático: a geometria euclidiana plana.

Compreendendo qual deve ser o ponto de partida de um aluno-aprendiz, e já se sabe que ele está envolvido com o raciocínio axiomático da geometria euclidiana plana, é preciso agora que ele identifique concepções que configuram os pré-requisitos conceituais para a existência da conjectura acima apresentada.

Sabe-se que o problema apresenta concepções sobre: triângulos, ângulos, medidas de ângulos, tipologia de ângulos além da própria estrutura aritmética necessária para se trabalhar adição e equivalência de medidas dos ângulos. E após o mapeamento das idéias presentes no enunciado, cabe ao aprendiz estabelecer uma estratégia para desenvolver o problema de demonstração proposto.

Neste estágio, o aluno-aprendiz busca relações entre os conteúdos do enunciado e questões matemáticas que dentro do sistema axiomático em voga façam relação. Por exemplo, o aluno pode perceber que ao se falar de dois ângulos retos (**2** ângulos de **90^o**) estamos falando de um ângulo raso (**180^o**). Também pode relacionar que os segmentos que compõem os lados de um triângulo podem ser prolongados infinitamente conforme o axioma I_2 (*in* Barbosa, 1997: p 1-2), alem disto, o aprendiz pode pensar em utilizar os casos de congruência de ângulos na resolução do problema posto.

Diante deste ferramental matemático existente no sistema axiomático da geometria euclidiana plana, e considerando os enunciados apresentados pelo problema, bem como, o teor do enunciado em questão. O aluno-aprendiz estabelece sua estratégia do seguinte modo:

a) Se pretende provar que a soma dos ângulos internos de **[ABC]** equivalem a dois ângulos retos ($\alpha+\beta+\gamma =$ **180^o**), então o problema é mostrar em termos geométricos que a soma dos ângulos internos de **[ABC]** equivalem a um ângulo raso;

b) Mas um ângulo raso é aquele formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta (*in* Barbosa, 1997: p 22);

c) Logo, para que os ângulos internos de **[ABC]** correspondam a um ângulo raso, então se deve prolongar os segmentos que formam seus lados, de tal modo, que seja possível trabalhar com congruência de ângulos no triângulo;

d) Após prolongar todos os segmentos dos lados de **[ABC]**, então se deve escolher um dos vértices do triângulo, e construir uma reta paralela ao lado oposto ao vértice, que passe pelo mesmo, para que seja possível trabalhar a averiguação dos casos de congruência dos ângulos;

e) Após tal construção, se verificará que a reta paralela que contém o vértice escolhido, tal que, este vértice corresponde à origem de duas semi-retas que constituem dois ângulos rasos. Tendo estes ângulos rasos, um deles é escolhido para que se possa estabelecer correspondência entre os ângulos internos do triângulo e este ângulo raso. Portanto, pelos casos de congruência de ângulos, se pretende averiguar se os ângulos internos de **[ABC]** equivalem ao ângulo raso com origem no vértice escolhido, usando os casos de congruência de ângulos. Caso exista tal correspondência, então a conjectura proposta é um teorema.

Pode-se notar, que a estratégia formada pelo aluno-aprendiz corresponde a uma série de argumentos formulados com base nos saberes matemáticos que são viabilizados pelo sistema axiomático da geometria euclidiana, e somente neste modo de raciocinar se percebe a complexidade dos problemas de demonstração em relação aos de determinação, com respeito à compreensão dos enunciados em termos de generalização[8]. Nos problemas de

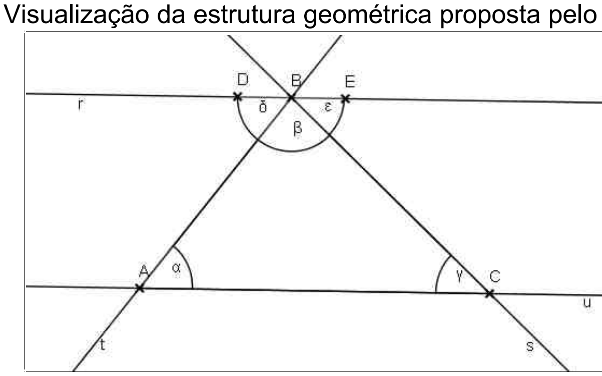
[8] A complexidade aqui mencionada não está associada à idéia sobre obtenção de resultados, neste sentido, problemas de determinação e demonstração podem ser dificeis. No entanto, em termos lógico-racionais, a demonstração carrega uma complexidade que a determinação não pode ter por não permitir discutir generalização e verdade no mesmo sentido.

demonstração existe todo um processo argumentativo e reflexivo que exige do aluno-aprendiz a manipulação de concepções matemáticas de modo articulado. E neste sentido, a demonstração pode ser compreendida como a base do processo de descoberta, construção e elaboração do saber matemático. Mas retornando aos questionamentos do aluno-aprendiz sobre o problema em pauta, se observa que ele:

i) Compreendeu o enunciado e identificou a conjectura em pauta;
ii) Estabeleceu a hipótese e a conclusão da conjectura;
iii) Fez o mapeamento conceptual do enunciado relativo à conjectura;
iv) Com base no mapa conceptual, fez relações das concepções presentes no problema com o saber matemático contemplado no sistema axiomático da geometria euclidiana;
v) Estabeleceu uma estratégia que utiliza o saber matemático existente a partir do sistema axiomático em questão, tomando como base, a conjectura proposta. Nesta estratégia, também foi contemplado o teste que pode averiguar a veracidade da conjectura em pauta.

Tendo os procedimentos devidamente formulados, falta somente a realização dos mesmos. E é este processo que apresentarei a seguir.

Figura 002 – Visualização da estrutura geométrica proposta pelo aluno-aprendiz.



Considerando o triangulo **[ABC]** e seus ângulos internos α **= [CAB]**; β **= [ABC]** e γ **= [BCA]**, os procedimentos para resolução podem ser:

a) Prolongar os segmentos que compõem os lados do triângulo **[ABC]** para obtenção de retas. Deste modo, conforme figura 002, se obteve a partir de **[AB]** a reta **[t]**, por **[BC]** a reta **[s]**, por **[CA]** a reta **[u]**.

b) Traçar uma reta **[r]** paralela a **[AC]** (e por **[u]**), que passe por **[B]**.

c) Colocar sobre **[r]** os pontos **[D]** e **[E]**, desde que:
   1. **[D]** e **[E]** não sejam coincidentes com **[B]**;
   2. **[B]** seja origem das semi-retas **[BD]** e **[BE]**.

d) Traçar os ângulos δ **=[DBA]** e ε **=[CBE]**.

A idéia é provar que o ângulo raso κ **=[DBE]** é equivalente, em termos de medida, a $\alpha+\beta+\gamma$. Como $\kappa=\delta+\beta+\varepsilon$, então, a idéia consiste em averiguar se:

$$\boxed{[DBE]= ([DBA]+[ABC]+[CBE])= ([CAB]+[ABC]+[BCA]) \Leftrightarrow \kappa = (\delta+\beta+\varepsilon) = (\alpha+\beta+\gamma).}$$

Usando as concepções sobre congruência de ângulos, sabemos que:

i) O ângulo **[CAB]** = **[DBA]**, pois as retas **[r]** e **[u]** são paralelas, logo, temos que estes ângulos são alternos.

ii) O ângulo **[BCA]** = **[CBE]**, pois as retas **[r]** e **[u]** são paralelas, pelo mesmo caso anterior, ambos são ângulos alternos também.

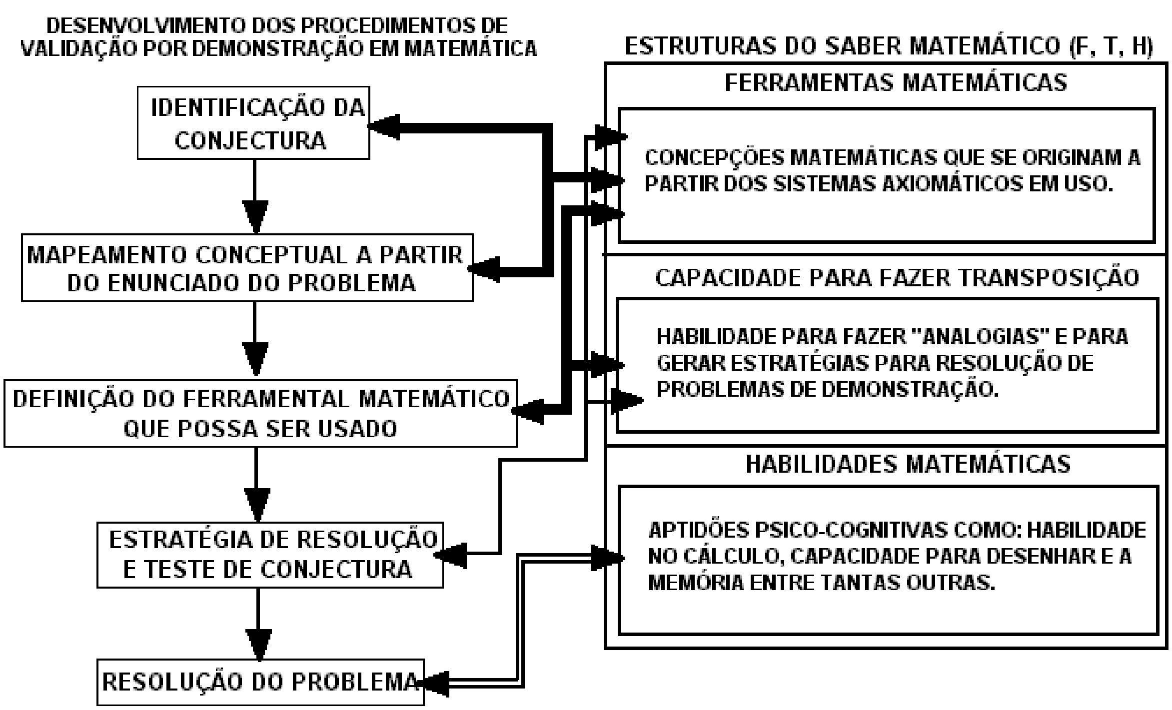
E essa propriedade se justifica pelo fato de uma transversal a duas paralelas gerar ângulos correspondentes, mas como os ângulos opostos pelos vértices também correspondem entre si. Pode-se dizer que os ângulos **[CAB] = [DBA]** e **[BCA] = [CBE]**, pois estes ângulos correspondem com os ângulos opostos pelos vértices dos respectivos pares (*in* Barbosa, 1997: p 72 - 76). Neste caso, trata-se de ângulos alternos internos. E tendo tais dados em mãos o aluno-aprendiz pode agora dizer que:

[DBE]= ([DBA]+[ABC]+[CBE])= ([CAB]+[ABC]+[BCA])

$\boxed{\textbf{[DBE]= ([CAB]+[ABC]+[BCA]) =>}\ \kappa = (\alpha+\beta+\gamma).}$

Como se sabe que **[DBE]** é um ângulo raso, então a conjectura apresentada é verdadeira, ou seja, trata-se de um teorema, este problema de demonstração está finalizado.

Figura 003 – Relação entre o saber matemático e o processo de validação por demonstração.



Fonte: Desenvolvido e adaptado a partir de notas de aula de BORGES NETO (2000).

No caso do exemplo 002, busquei ser meticuloso, e poderia ter sido mais detalhista, no entanto, chamo a atenção do leitor para a complexidade que há nas ações que envolvem procedimentos de validação por demonstração. E no trabalho matemático, as questões relativas à validação que interessam são correspondentes ao processo de demonstração.

Pelo exemplo 002, foi possível notar que o aluno-aprendiz, um estudante idealizado, buscou compreender a conjectura que lhe havia sido colocada pelo problema e estabeleceu uma série de procedimentos dedutivos e heurísticos que lhe permitiu realizar um planejamento de ações para efetivação da demonstração de uma conjectura proposta. No entanto, para estabelecer a argumentação matemática foi necessário recorrer ao que chamo por estruturas do saber matemático.

Segundo Borges Neto (2000), o saber matemático é constituído por três estruturas básicas (ver Figura 003):

a) Ferramentas matemáticas: Considerando as idéias de Borges Neto (2000), quando um matemático faz suas investigações, ele precisa estar apoiado em concepções matemáticas devidamente validadas, através de processos argumentativos, dentro do sistema axiomático em que um questionamento é colocado. Neste sentido, um enunciado matemático que configura um objeto de investigação carece de outras proposições fundamentadas e validadas. Logo, um assunto como o Teorema de Pitágoras para ser investigado, precisa de um ferramental que envolve campos conceituais como: A compreensão do que sejam triângulos retângulos; o entendimento sobre a tipologia dos lados de um triângulo; compreensão sobre adição, exponenciais e radiciação; o que configuram distâncias e invariância métrica; o Teorema de Talles, entre outros assuntos. Em um outro enunciado pode se pretender investigar conceitualmente o que são distâncias, e neste caso, o Teorema de Pitágoras deixa de ser objeto de investigação e passa a ser uma ferramenta matemática que auxilia na compreensão das concepções investigadas.

b) Capacidade para fazer transposições: Trata-se da habilidade em realizar analogias que permitem interpretar um contexto matemático em outro na resolução de um problema. Envolve estratégias matemáticas. É a possibilidade de transcendência de uma situação matemática em outra. Envolve em parte, a experiência e o saber matemático. Consiste na capacidade de leitura de um contexto que envolve o problema e o sistema axiomático em questão. Um problema clássico que envolve esta capacidade é a demonstração sobre o problema da incomensurabilidade entre segmentos de reta que permitiu a descoberta dos números irracionais. Lima (1991: 1-4) apresenta uma discussão sobre esta demonstração, e neste contexto, o Teorema de Pitágoras foi um dos ferramentais usados, pois ele permitiu averiguar se existe ou não comensurabilidade entre os segmentos que compõem o lado de um quadrado e sua respectiva diagonal. Partindo desta analogia, foi averiguado que ambos segmentos eram incomensuráveis entre si. Em outros termos, se pode dizer que esta é a parte criativa do saber matemático.

c) Habilidades matemáticas: Envolvem aptidões psico-cognitivas e emocionais para o trabalho investigativo em matemática. Por exemplo, pessoas que possuem habilidades para o cálculo, habilidade lógico-dedutiva, domínio de representações espaciais ou ainda, que conseguem desenhar com facilidade podem ter predisposição para desenvolver o trabalho matemático. Por outro lado há questões emocionais que devem ser relevadas, a matemática é uma ciência que envolve persistência, determinação frente enunciados que desafiam a mente humana,

> e estes tipos de desafio envolvem elementos afetivos que podem determinar o sucesso ou fracasso de um investigador em um empreendimento intelectual matemático. Esta parte envolve as questões inatas e cognitivas referentes ao saber matemático.

A relevância das estruturas para o saber matemático está no fato de se compreender aspectos relativos ao trabalho matemático do ponto de vista do pesquisador. E a partir destas concepções de Borges Neto (2000), se pode compreender o saber matemático não como “um conteúdo para ser transmitido”, mas sim, como um processo produtivo que envolve a experiência de vida dos investigadores desta comunidade acadêmico-científico. Neste sentido, no centro do trabalho do matemático está o processo de validação por demonstração enquanto método científico deste tipo de saber. Segundo Borges Neto (2000), o matemático para efetuar a contento seu trabalho, precisa das três estruturas do saber matemático devidamente articuladas em suas ações, fato este que implica no seguinte questionamento: Exercer o trabalho matemático, como pesquisador, exige domínio de concepções matemáticas, criatividade e habilidades. Ter somente uma ou duas destas habilidades não implica em estar capacitado para o exercício do trabalho matemático enquanto investigador.

Considerando os argumentos acima apresentados se pode pensar que o senso-crítico sobre o trabalho matemático deve superar a preocupação escolar com as habilidades de cálculo e/ou com domínio de conteúdo, pois a natureza do saber matemático apresenta outras exigências ao estudante, e a demonstração matemática é essencial neste contexto. Por este motivo, ao configurar a passagem do Novo PC ao Velho PC, tomo como ponto de partida a compreensão sobre o significado das demonstrações matemáticas enquanto parte significativa do trabalho matemático, no entanto, em termos conceituais o que são demonstrações? Pois compreender a tipologia dos problemas matemáticos, como foi apresentado acima, somente distingue os processos de validação, mas não justifica o significado conceitual do termo demonstração.

Em termos etimológicos, Santos *apud* Santana (2002: p. 11) apresenta os termos “mostração” e “demonstração” como concepções filosóficas que fundamentam o processo de validação por demonstração. Conceitualmente, a “mostração” de algo se dá por vias diretas, ou seja, se trata da verdade que é imediatamente descoberta. Quanto à “demonstração” esta pode ser compreendida como o processo racional através do qual se busca a verdade por meio de uma outra devidamente inferida, ou seja, existiria um “termo médio” que viabilizaria a construção do processo de validação. Neste sentido, o próprio saber matemático produzido e validado, com base em estruturas argumentativas racionais, subsidia a matemática que é produzida pelo pesquisador[9].

Considerando a História da Matemática, é notório que o domínio das idéias básicas sobre demonstrações, foi um dos elementos que fez da matemática grega um diferencial em relação às matemáticas produzidas nas sociedades da Antigüidade Clássica, pois na época em que os gregos iniciavam o uso do processo argumentativo-filosófico no saber matemático, os povos egípcios, babilônicos, fenícios, hebreus, chineses entre outros, tinham o domínio de vários algoritmos e sabiam como resolver muitos problemas práticos, no entanto, nestas sociedades a matemática era tratada na maioria dos casos, sob o ponto de vista dos problemas de determinação.

Segundo Boyer (1978: p. 143), os chineses faziam compilações de problemas específicos, assim como, os egípcios e os babilônicos.

> “Quase tão antigo quanto o Chou Pei, e talvez o mais influente livro de matemática chinês, foi o Chui-Chang Suan Shu ou Nove capítulos sobre a arte matemática. Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações, e propriedades dos triângulos retângulos. Ao passo que os gregos da mesma época estavam compondo tratados logicamente ordenados e sistematicamente expositórios, os chineses repetiam o velho hábito dos babilônios e egípcios de compilar coleções de problemas específicos”.

[9] A demonstração enquanto processo de validação exige como “termo-médio” o “edifício matemático” já validado e reconhecido.

Em outras palavras, o diferencial da Grécia em relação aos outros povos da Antigüidade Clássica, em relação ao saber matemático, estava sim, em seu modo de abordar e compreender os questionamentos matemáticos. Considerando Polya (1978) e as concepções sobre os problemas de determinação e demonstração, se pode dizer que muitas civilizações se preocupavam com a resolução de problemas de determinação através de procedimentos de verificação, que constituíam soluções específicas para problemas instanciados que na maioria das vezes eram aplicações práticas. Por outro lado, os gregos se preocupavam com as conseqüências conceptuais que as idéias matemáticas poderiam apresentar. Disto os processos de validação por demonstração, permitiam ao pesquisador, não somente a solução de questões práticas, mas sim, a exploração de situações limites, e a colocação de novos desafios matemáticos que iam além das fronteiras dos questionamentos do cotidiano. Lévy (1998: p. 81) corrobora este pensamento dizendo que a inovação nas concepções matemáticas dos gregos estava na descoberta da demonstração matemática, pois o processo de validação por demonstração transforma a matemática limitada pela tradição dos “receituários” em uma saber matemático argumentativo e vivo.

> O saber do grego não vem da tradição. O conhecimento é reatualizado a cada geração. A verdade não é herdada, ela deve ser fundada aqui e agora. A alma grega é sempre jovem, pois fica próxima à eclosão sempre reiterada do saber. Quando um egípcio aprende a calcular o volume de uma pirâmide, ele está herdando. quando Theetete acompanha uma demonstração de Teodoro, está assistindo ao nascimento de um Teorema.
>
> LÉVY (1998: p.81)

Com o desenvolvimento da filosofia na Grécia Antiga, a matemática assumiu suas bases na argumentação racional. E foi por ter este diferencial que a matemática grega, provavelmente, se tornou modelo para construção de um saber matemático “universalizado”.

> “Não que a matemática egípcia, babilônica ou chinesa não fosse desenvolvida. Pois em termos de abrangência em conhecimentos

> matemáticos, indiscutivelmente, as civilizações orientais eram capazes de uma rica abordagem sobre diversos assuntos".
> SANTANA (2002: p. 9)

Acatando as concepções discutidas, se pode dizer que o processo de validação por demonstração foi e é o elemento que viabiliza ao saber matemático como uma estrutura racional argumentativa. No entanto o que caracteriza a estrutura básica de uma demonstração matemática?

Como foi dito acima, o processo de validação por demonstração exige uma estrutura lógico-argumentativa, mas o papel disto consiste em organizar o pensamento matemático pela hierarquização conceptual.

Este processo geralmente é conhecido como sistema formal axiomático, e segundo Machado (1997: p. 30), os sistemas formais axiomáticos estão organizados do seguinte modo:

a) Termos primitivos: Descrevem os objetos concretos tratados por uma teoria formal;

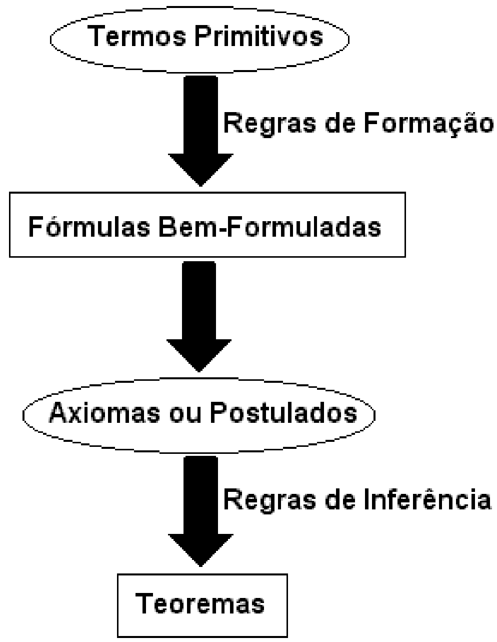
b) Regras de formação das fórmulas: Distinguem as regras de formação bem estruturadas daquelas que carecem de significação dentro da teoria;

c) Axiomas ou Postulados: Estas seriam verdades fundamentais que necessitam de evidência empírica;

d) Regras de Inferência: Distinguem dentre as fórmulas bem estruturadas quais são os teoremas enquanto verdades demonstráveis a partir dos axiomas.

e) Teoremas: São as proposições matemáticas devidamente demonstradas.

Figura 004 – Esquema de MACHADO (1997: p. 30) para explicar sistemas formais axiomáticos.



Para elucidar suas idéias sobre os sistemas formais axiomáticos, Machado (1997) propõe uma estrutura esquemática conforme é exposto acima na figura 004.

Quanto sua origem, os sistemas formais axiomáticos ao longo do desenvolvimento matemático na Grécia Antiga iam se estruturando aos poucos junto ao edifício que constitui o saber matemático propriamente dito. No entanto, somente entre o período que constitui o final do século IV a.C e o início do século III a.C. que surgiu a obra do matemático Euclides que ficou conhecida como "*Os Elementos*". Nesta obra, são apresentadas várias idéias matemáticas, sintetizadas ao longo de séculos, através de demonstrações, no entanto, o que chama atenção nesta obra é a estrutura axiomática que configura em princípio o que é conhecido hoje por geometria euclidiana. Em Euclides, os axiomas e postulados configuram verdades evidentes que dão origem a definições, proposições diversas, conjecturas e teoremas.

Segundo Boyer *apud* Santana (2002: p. 10), é provável que as concepções euclidianas sobre postulados e axiomas sejam influenciadas pelas idéias de Aristóteles que fazia distinção entre eles. Pois em Aristóteles, os axiomas, eram noções comuns que deviam ser convincentes por si mesmos, como verdades aceitas em todos os tipos de saber. Quanto os postulados estes seriam menos óbvios, pois estariam relacionados a um tipo de saber específico, no entanto, mesmo assim, não se pode afirmar que Euclides compartilhava exatamente desta mesma concepção. Na atualidade, o que se pode dizer é que para os matemáticos axiomas e postulados são tidos como sinônimos.

Outros termos usuais na matemática que são enumerados por Fossa *apud* Santana (2002: p. 30 – 31), que estabelecem relações com demonstrações matemáticas são:

i) Proposições: São sentenças afirmativas declarativas.
ii) Conjecturas: São proposições que carecem de demonstração.
iii) Teorema: É uma proposição devidamente demonstrada, que assume o *status* de uma "verdade matemática".
iv) Corolário: É uma proposição de fácil demonstração a partir de um teorema referido.
v) Lema: É uma proposição demonstrada que prepara um teorema que deve ser demonstrado.
vi) Definição: É a explicação e/ou enumeração de alguma coisa de modo que se torne viável determinar seus limites e sua extensão.

É relevante salientar que em termos formais, na atualidade, não há diferenças significativas entre lemas, corolários e teoremas, pois correspondem a proposições devidamente demonstradas. No entanto, na maioria das vezes os termos lema e corolário são substituídos pelo termo teorema.

Outro ponto que envolve a discussão sobre o processo de validação por demonstração está associado à própria evolução das idéias matemáticas ao longo dos séculos. Pois se na época dos gregos as demonstrações matemáticas representavam, em termos filosóficos, a busca por uma verdade pré-existente através da argumentação racional, na atualidade este significado é outro, assumindo uma vertente filosófica diferenciada com implicações distintas daquelas que existiam em outros tempos.

Segundo Barbosa (1997: p. 10-11), na atualidade é possível estabelecer uma analogia entre um sistema formal axiomático e as idéias de um jogo para compreender a geometria enquanto um sistema dedutivo.

> "Ao criar-se um determinado jogo é importante que suas regras sejam suficientes e consistentes. Por suficiente queremos dizer que as regras devem estabelecer o que é permitido fazer em qualquer situação que possa vir a ocorrer no desenrolar de uma partida do jogo. Por consistente queremos dizer que as regras não devem contradizer-se, ou sua aplicação levar a situações contraditórias.
> Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecido com um jogo: partimos com um certo conjunto de elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, as quais são chamadas de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço. Tais propriedades, chamadas Teoremas ou Proposições, devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades já estabelecidas.
> De fato, existem várias geometrias distintas dependendo do conjunto de axiomas fixado."
>
> BARBOSA (1997: p. 10-11)

Diante das concepções acima, surge um novo questionamento: Por qual motivo, na atualidade, a concepção sobre sistemas axiomáticos é diferente da visão na Grécia, local que tal visão originalmente se desenvolveu? Porque hoje os matemáticos percebem os sistemas axiomáticos, e conseqüentemente o processo de validação, como um "jogo matemático" e na Antiguidade Clássica grega se via tal processo como uma "busca pela verdade matemática?" Para compreender este questionamento, procurarei discutir, a seguir, as concepções dedutivas e heurísticas presentes no processo de validação por demonstração.

Em termos históricos, até meados do século XIX o sistema axiomático euclidiano era visto como absoluto. Para muitos matemáticos e vários pensadores, a geometria euclidiana representava um ideário que comprovava a existência sobre verdades absolutas pré-existentes. No entanto, entre os ditos postulados euclidianos sempre houve um deles que incomodou durante muitos séculos comentaristas da obra de Euclides.

Como vimos anteriormente, os sistemas axiomáticos funcionam a partir de noções intuitivas, das regras de inferência, dos axiomas ou postulados[10], que são tidos como verdades fundamentais dentro desta estrutura. Portanto, se um axioma estivesse em contradição dentro de um sistema axiomático, este sistema poderia ser falho e a possibilidade de conhecer algo dentro de tal estrutura poderia estar comprometida, sendo assim, a importância da discussão sobre os postulados da geometria euclidiana estava nos pilares que sustentam as idéias básicas sobre as possibilidades do saber em geometria e conseqüentemente em matemática. No entanto, ao avançar nestas discussões, se torna necessário conhecer os postulados de Euclides conforme este os desenvolveu, para que seja compreensivo o problema existente com respeito aos sistemas formais axiomáticos. Os postulados euclidianos respectivamente são:

> P1. É possível traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
> P2. Qualquer segmento de reta finito pode ser prolongado indefinidamente para construir uma linha reta.
> P3. Dado um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à distância dada.
> P4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
> P5. Se uma reta cortar duas outras de modo que dois ângulos interiores de um mesmo lado tenham soma menor que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzarão, se prolongadas indefinidamente, do lado da primeira reta em que se encontram os dois ângulos citados.
> EUCLIDES *apud* MACHADO (1997: p. 31-32)

Ao observar os postulados P1 até P4 não se averigua algum problema em compreender tais estruturas, no entanto, o postulado P5 inquietou muitos pesquisadores por séculos. Os comentadores árabes e gregos da obra de Euclides durante muito tempo tentaram a partir dos postulados que vão de P1 até

---

10 Nota explicativa: Para retificar, na atualidade, não se faz distinção entre postulados e axiomas, logo, o que Euclides chamava por postulados é chamado hoje por axiomas. E para Euclides os postulados eram enunciados que deveriam valer para quaisquer áreas do saber.

P4, eliminar P5 tentando o apresentar como um teorema, no entanto, nunca houve muito sucesso nestas empreitada (*in* Machado, 1997: p. 33). No século XVII, o italiano Sacchieri averiguou a independência de P5 com respeito aos outros postulados, e obteve vários resultados anormais, no entanto, não encontrou alguma inconsistência em P5. Foi somente, ao final do século XVIII e a partir do século XIX, por volta de 1860, que a independência de P5 pôde ser estabelecida através dos trabalhos, independentes, de Gauss, Lobachevsky e Bolyai.

Os trabalhos de Lobachevsky e Bolyai apontavam para novos modelos de geometria. Posteriormente, Riemman, independentemente, também publicou um trabalho em que uma nova geometria estava sendo fundada. Na geometria de Riemman, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre superior a dois ângulos retos. No entanto, em Lobachevsky, a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a dois ângulos retos. Diante destes resultados, surgia como necessidade provar a consistência do modelo formal axiomático euclidiano. Em suma, o que se pretendia averiguar é se havia consistência nas geometrias não-euclidianas com respeito ao sistema formal axiomático euclidiano. Mas como seria feito isto?

> Existem pelo menos duas maneiras. A primeira consiste em encontrar uma interpretação dos termos primitivos da teoria na qual todos os axiomas se mostrem evidentemente verdadeiros e, em conseqüência disso, todos os teoremas. A dificuldade desta empreitada é a verificação da veracidade dos axiomas interpretados. Outro método de verificação de consistência é o estabelecimento da consistência relativa, isto é, a demonstração de que se um sistema formal A for consistente, então o sistema formal B também o será. Consegue-se isso mostrando que se existir uma interpretação I_A capaz de revelar a consistência do sistema formal A, então existirá também uma interpretação I_B que revelará a consistência do sistema B.
>
> MACHADO (1997: p.34)

Pelo estabelecimento de consistência relativa, foi possível demonstrar que as geometrias de Riemman e Lobachevsky se somavam a geometria euclidiana. Por exemplo, no caso da geometria riemmaniana o que ocorre é que se adotam os termos primitivos da geometria euclidiana para que os mesmos sejam interpretados em uma superfície esférica euclidiana correspondente ao plano riemmaniano, e assim, cada postulado de Riemman se transformou em um teorema de geometria euclidiana. Como tal interpretação foi válida na geometria euclidiana, então as concepções de Riemman se tornaram consistentes. De modo similar, ocorreu o mesmo com a geometria de Lobachevsky.

A partir das geometrias não-euclidianas, as idéias existentes sobre sistemas axiomáticos tiveram que ser repensadas, pois mesmo que as geometrias de Riemman e Lobachevsky se mostrassem como uma extensão da geometria euclidiana, surgiram novos questionamentos sobre a questão da validade do saber matemático. Afinal não seria possível que outros saberes matemáticos tidos como certezas inabaláveis, ao longo dos séculos, fossem incoerentes? Além disto, ao final do século XIX se percebia que havia uma grande quantidade de trabalhos matemáticos que não haviam sido sistematizados. Diante de tais problemas, por volta de 1880 surgem concepções filosóficas sobre matemática que ficam conhecidas como logicismo que apresentam como exponenciais Gottlob Frege e Bertrand Russell e Whitehead. Segundo Meneghetti (2003):

> O Logicismo se caracteriza pelo propósito de reduzir toda a matemática à lógica. O primeiro trabalho, de caráter determinado nesta direção, foi o do matemático alemão Frege (1848 – 1925), que pretendeu reduzir a aritmética à lógica, visto que, com a aritmetização da análise, caso conseguisse seu intento, toda matemática clássica seria reduzida à lógica.
>
> MENEGHETTI (2003: p. 1)

As idéias fundamentais do logicismo consistem em considerar que o saber matemático é redutível aos princípios da lógica formal. Na obra intitulada "*Begriffsschift*", Frege teve por objetivo obter as concepções básicas da aritmética a partir dos princípios da lógica formal. Para tanto, era necessário interpretar todos os enunciados aritméticos em termos lógicos, mostrando que todos resultavam de verdades lógicas. Deste empreendimento surgiram idéias como a teoria dos conjuntos de modo que foi possível equiparar a lógica formal em suas regras básicas com os princípios aritméticos fundamentais. Meneghetti (2003: p. 2), mostra que para Frege todo conceito está associado a um objeto lógico.

> *Por exemplo, na expressão '2 é um número', 'x é um número' é o conceito, e 2 é o objeto. Nesse caso posso dizer que '2 cai' sob o conceito 'x é um número' (porque quando substituo x por 2 obtenho uma proposição verdadeira), e portanto, 2 pertence à extensão do conceito 'x é um número'. Os números são definidos como extensão de conceito. Dizer que algo é um número significa dizer que existe pelo menos um conceito F tal que este algo seja extensão do conceito 'equinumérico a F'. Após ter definido número, Frege tem por objetivo examinar se as propriedades conhecidas dos números podem ser derivadas dessa definição. Inicia tal investigação ainda nessa obra, continuando-a em sua seguinte: As Leis Fundamentais da Aritmética (1903).*
>
> MENEGHETTI (2003: p. 2)

No entanto, à medida que tais concepções iam tomando forma, surgiam enunciados paradoxais, proposições indicidíveis que colocaram em cheque a tese logicista de Frege. Em 1902, Russell (1872 – 1970) apresenta o seu famoso paradoxo. Como na teoria de Frege o conceito aceita extensão, e essa extensão é um objeto sobre o qual se pode questionar que recaia sobre um conceito, é possível questionar se este recai sobre o conceito que o originou.

> [...] se admitirmos o conceito $x \notin x$, a extensão desse conceito é a classe $y=\{x ; (x \notin x)\}$, a classe de tudo aquilo que não é membro de si próprio. Desde que y é um objeto, podemos perguntar se ele cai ou não sob o conceito $x \notin x$ ou $y \notin y$. Mas, se $y \in y$ chegamos à conclusão de que $y \notin y$ e se $y \notin y$ chegamos a $y \in y$. Todavia, ambos os casos são contraditórios. Tal paradoxo põe em risco todo o trabalho de Frege, que, então, passa a buscar uma solução para o problema e, no entanto, não obtém sucesso.
>
> MENEGHETTI (2003: p. 3)

Um exemplo de um enunciado paradoxal na perspectiva de Russell é a famosa expressão: "Tudo é relativo". Trata-se de uma expressão que ao ser afirmada nega o que se propõem dizer. Afinal ser relativo é não ser absoluto, mas tudo é absoluto. Portanto se está diante de um paradoxo que é indicidível por não ser possível extrair a verdade de tal expressão, e um dos princípios da lógica formal, consiste em ser possível extrair verdade ou falsidade de uma proposição dada. Problemas como estes afetaram diretamente o programa logicista (*in* Machado 1997: p. 29), que apesar das dificuldades teve sua continuidade a partir de Russell e Whitehead com o livro "*Principia Mathematica*".

Com base no "fracasso" logicista novas idéias tomam corpo e surge o formalismo, ao final do século XIX e inicio do século XX, e teve seu maior representante em David Hilbert (1862 – 1943). Segundo Machado (1997: p. 36), para Hilbert a matemática é visto como um saber que têm sua independência em relação à lógica formal. No entanto, o formalismo usa a lógica como uma linguagem para expressar idéias matemáticas. Os objetivos do formalismo podem ser descritos do seguinte modo:

> (a) Cabe ao saber matemático descrever objetos e construções concretas e não-lógicas;
>
> (b) Estas construções devem ser estruturadas em teorias formais, de tal modo, que a lógica possa ser uma ferramenta fundamental;
>
> (c) O trabalho do matemático deve ser o estabelecimento de teorias formais consistentes, que busquem a completude até que seja possível a formalização completa da matemática.

Para Hilbert a lógica formal era uma ferramenta indispensável ao trabalho matemático, no entanto, ele percebia que a matemática não poderia ser reduzida a lógica, refutando assim a tese logicista. Por outro lado, nas idéias de Hilbert havia uma tentativa em se agregar à lógica formal às concepções sobre sistema axiomático. Ato que consiste em associar as concepções matemáticas de validação às concepções sobre sistemas lógico-formais que obedeçam às idéias proposicionais dedutivas, neste caso, o que se obtém é a redução do paradigma matemático a princípios como "verdadeiro" e/ou "falso". E ao efetuar tal organização, Hilbert sujeitou o saber matemático às duas leis básicas dos sistemas formais dedutivos: a lei de não-contradição e o princípio de trivialidade.

Segundo Da Costa (1993: p. ix – x), a lei de não-contradição ou princípio do terceiro excluído, afirma que um sistema formal dedutivo **K** que apresente em seus termos a operação lógica negação (**~**), é considerado inconsistente, se no conjunto dos seus teoremas, existe pelo menos dois deles em que um seja a negação do outro. Logo, se em **K** existem os teoremas **T** e **~T**, então o sistema formal **K** é inconsistente[11]. Caso contrário, é dito que o sistema formal **K** é consistente.

Quanto à trivialidade, um sistema formal **X** é trivial, se o conjunto de suas fórmulas coincidem com seus teoremas, ou seja, caso não seja possível em todos os enunciados bem-formulados, segundo a linguagem de **X**, distinguir o que é demonstrável do não-demonstrável. Portanto, num sistema formal em que não seja possível distinguir o que é um teorema do que não é, tudo pode ser verdadeiro ou tudo pode ser falso. Neste sentido, um sistema formal **X** com tais características é considerado trivial e deixa de ter relevância.

Um sistema formal axiomático que obedece a leis de não-contradição e não é trivial é considerado um sistema consistente, pois é possível estabelecer deduções que permitem comprovar ou não um teorema sem contradições. Mas em que consistem as deduções? Para Oliveira (1996: p.54), deduções ou derivações na lógica formal, são correspondentes às concepções sobre demonstração em matemática, em síntese, trata-se de uma relação entre conjuntos de fórmulas e fórmulas. Para Hofstadter (2001: p.213), há uma diferença fundamental entre demonstrações e derivações. Os métodos presentes no cálculo lógico-proposicional empregado nos sistemas formais dedutivos constituiriam estruturas artificiais que se assemelham ao processo de validação por demonstração, entretanto, Hofstadter (2001) chama atenção que nas demonstrações há uma “informalidade” que caracterizaria este como um produto genuinamente humano.

> Todos os tipos de aspectos complexos do pensamento podem ser empregados em demonstrações e, embora eles possam “parecer corretos”, pode-se sempre cogitar se eles podem ser defendidos logicamente. É para isso, na verdade que a formalização existe.

---

[11] Um sistema formal é consistente quando contempla entre seus enunciados proposições que não entram em contradição.

> Uma derivação é uma contrapartida artificial de uma demonstração e seu propósito é o de alcançar o mesmo objetivo, mas por meio de uma estrutura lógica cujos métodos são não só totalmente explícitos, mas também muito simples.
> HOFSTADTER (2001: p.213)

Para exemplificar o que está sendo chamado por dedução[12] dentro dos sistemas formais, vou recorrer a um exemplo que permite discutir tal temática.

Exemplo 003 – Dadas às proposições simples **k** e **m**, e as proposições compostas **L=(k ^ m)** e **N=(k v m)**, verifique se **(L → N)** é derivável ou dedutível.

Estruturando a tabela-verdade[13] dos termos acima podemos obter a tabela 001 apresentada a seguir:

Tabela 001 – Exemplo 003: sobre dedução lógica.

Nomenclatura	**k**	**m**	**L (k ^ m)**	**N (k v m)**	**L → N**
Caso 01	V	V	V	V	V
Caso 02	V	F	F	V	V
Caso 03	F	V	F	V	V
Caso 04	F	F	F	F	V

Sabendo que a proposição composta **L** é uma conjunção (**k** e **m**), operação lógica que exige que as proposições simples sejam simultaneamente verdadeiras para que **L** seja verdadeira. Tendo que a proposição composta **N** é uma disjunção (**k** ou **m**), operação lógica que exige que pelo menos uma de suas proposições simples seja verdadeira para **N** ser verdadeira. Ao desenvolver a tabela-verdade destas expressões temos que **(L → N)** é um condicional que constitui uma operação lógica do tipo “Se **L** então **N**”, em que **L** é a hipótese e **N** a tese ou conclusão, como foi visto anteriormente. E sabendo que para o condicional ser verdadeiro a tese deve ser verdadeira ou a hipótese e as teses

[12] Nota explicativa: A idéia sobre dedução ou derivação dentro dos sistemas formais na lógica obedecem aos princípios da dedução, enquanto método como é colocado por Descartes, no entanto, não se pode considerar que sejam as mesmas idéias o método dedutivo e a dedução enquanto processo lógico formal. No caso do método dedutivo este caracteriza áreas como matemática e lógica. No entanto, a dedução enquanto processo está restringido ao uso de manipulações de proposições para obtenção de teoremas.

[13] A tabela-verdade é uma técnica para obtenção de todos os valores lógicos possíveis em operações proposicionais. O seu equivalente gráfico é a árvore de possibilidades, e são meios de aferir o conhecimento lógico formal.

devem ser simultaneamente falsas. Pode-se concluir que **$(L \rightarrow N)$** é uma tautologia, ou seja, para quaisquer casos esta proposição sempre será verdadeira. Logo, **$(L \rightarrow N)$** é uma proposição dedutível ou derivável no contexto da lógica proposicional, neste sentido, esta fórmula é análoga a um teorema.

Apesar da simplicidade do exemplo acima, é possível notar que em nenhum momento foi necessária uma contextualização sobre o problema proposto. O processo foi "automático", e lidou exclusivamente com questões de forma. As proposições simples **k** e **m**, ponto de partida para o problema, podem ser quaisquer coisas. Neste sentido, um logicista observaria num problema deste a possibilidade em se reduzir particularidades geométricas, aritméticas, algébricas à universalidade da lógica. Mas para um formalista, um problema como este representa um modelo axiomático que explora a forma lógica com ausência dos conceitos matemáticos, neste sentido, a lógica formal e as demonstrações seriam somente uma linguagem para a matemática, mas não parte do saber matemático. E será a partir deste momento que surgem outros questionamentos que apresentam implicações diretas na formação matemática.

> Propriamente, podemos dizer que a formalização torna a matemática uma coleção de fórmulas. Estas são distintas das fórmulas comuns somente pelo fato de que, junto com os símbolos e sinais comuns, estão também símbolos da lógica, especialmente a implicação (->) e a negação (~). Determinadas fórmulas, que servem como pedra para o edifício formal da matemática, são chamadas axiomas. Uma prova é uma seqüência de fórmulas F1, F2, ..., Fn, em que cada fórmula ou é um axioma ou provém de fórmulas que a precedem na seqüência, por meio das regras de inferência. Uma prova é uma prova de sua última fórmula (Fn). Uma fórmula diz-se provável ou um teorema se existir uma prova dela.
> Percebemos que, no formalismo, a matemática, de fato, está preocupada com formas, porém não com as de Platão e sim com formas de representação de objetos.
> A filosofia que mais se aproxima do formalismo é o "nominalismo".
> MENEGHETTI (2003: p. 5)

Snapper *apud* Meneghetti (2003: p. 5 – 6) considera que no nominalismo, entidades abstratas não possuem algum tipo de existência, seja fora da mente como no realismo, ou ainda, em construções mentais como no conceptualismo. No nominalismo, entidades abstratas são articulações sonoras ou escritas que constituem somente a forma. Neste sentido, todo tipo de estudo nominalista é meramente sintático e sem significação. Nesta concepção, entidades abstratas são manipuladas como peças em um tabuleiro. O formalismo enquanto um tipo de nominalismo apreende o saber matemático deste modo, mas Tiles *apud* Meneguetti (2003: p. 6), chama atenção pelo fato de Hilbert não ter chegado à este tipo de extremo ao abordar questões sobre aritmética dos números finitos, pois ele tinha compreendido as verdades sobre esta área fundamentadas intuitivamente pelas noções sobre unidade e sucessão recursiva.

Os problemas do formalismo surgem quando, ao questionar os métodos metamatemáticos de Hilbert, adotados para construção de sistemas formais não interpretados, se pretendia exibir consistência relativa e completude da matemática, mas por volta de 1931, Kurt Gödel demonstrou que completude e consistência são incompatíveis, enunciando que em sistemas que englobam a aritmética elementar é impossível o estabelecimento de consistência lógica interna.

Ou seja, Gödel mostrou que completude e consistência não são compatíveis. No entanto, o trabalho de Gödel não afirmava que os sistemas axiomáticos são inconsistentes. Weil *apud* Singh (2000: 153-154) exibe, o impacto do problema posto por Gödel, em um tom bem humorado dizendo: "*Deus existe já que a matemática é consistente e o Diabo existe já que não podemos prová-lo".* Ou seja, se por um lado o trabalho de Gödel mostrava que a tese logicista poderia sobreviver, por outro, tais idéias exibiam que profundas limitações nesta forma sobre o pensar a matemática. Mas para compreender, o significado de tais descobertas, apresento uma breve síntese sobre os metateoremas de Gödel, sobre os problemas da aritmética elementar sob o ponto de vista formalista, a partir de Oliveira (1996: p. 123):

1º Metateorema de incompletude de Gödel: Se os axiomas da aritmética elementar são verdades, então existem verdades que não são teoremas.

Demonstração: Considere uma expressão **p(k)** que será chamada por sentença de Gödel. A sentença **p(k)** é verdadeira, se e somente se, **p(k)** não é teorema da aritmética elementar.

Portanto, se **p(k)** é um teorema, **p(k)** seria falso, contrariando a suposição de que os teoremas são verdadeiros.

Logo, **p(k)** não é teorema, mas é verdadeiro.

Mas, sendo **p(k)** verdadeiro, então **~p(k)** é falsa. Ou seja, **~p(k)** não pode ser teorema.

Disto se conclui que, existem verdades na aritmética elementar que não são teoremas.

2º Metateorema de incompletude de Gödel: Se **T** é uma teoria com um sistema decidível de axiomas, contendo a aritmética elementar, e consistente, então existe uma sentença aritmética que exprime "**T** é consistente" que não é teorema de **T**.

Explicação: Há uma interpretação sintática da aritmética básica em **T**, tal que, seus axiomas e teoremas sejam escritos na forma de **T**. Segundo OLIVEIRA (1996: p. 215) isso é correspondente às modernas teorias axiomáticas de conjuntos ou de classes. Como o formalismo adota como linguagem à teoria dos conjuntos, então é possível concluir que não há algum tipo de método lógico que prove que uma teoria axiomática, baseada na aritmética básica, seja consistente. Por outro lado, Gödel não disse em momento algum que a matemática é inconsistente, mas mostra que os sistemas formais axiomáticos, fundados na aritmética básica, e por conseqüência, em pressupostos da lógica formal, são limitados diante da completude e da consistência.

O problema da abordagem formalista, quando esta é levada a cabo, é que a mesma minimiza a discussão epistemológica sobre a construção do saber matemático, pois a abordagem em questão desconsidera os contextos históricos e os aspectos intuitivos reduzindo o paradigma matemático a questões formais da lógica. Neste contexto, a matemática é minimizada ao jogo de fórmulas ignorando aspectos da criatividade humana mediante procedimentos automatizados.

Segundo Meneghetti (2003: p.7), o problema em se pensar matemática no formalismo, reside no fato, desta abordagem, se levada ao extremo, deixar o trabalho matemático sem significação, como se pode ver no exemplo 003. No entanto, os metateoremas de Gödel, apresentam subsídios para reflexão sobre as limitações do formalismo matemático enquanto processo de validação. Pois se por um lado, o formalismo é eficaz, devido à possibilidade em se explorar o processo de derivação, como uma espécie de “automatização do pensamento”, de modo análogo à demonstração. Por outro, sua limitação está na impossibilidade da formalização absoluta do saber matemático, bem como, em sua descontextualização com respeito à experiência, criatividade e história deste saber.

Diante das limitações logicistas e formalistas quanto o saber matemático, Brouwer (1881 – 1966) e Heyting (1898 – 1980), apresentam ao final dos anos 1940 uma nova concepção filosófica do saber matemático que ficou conhecido como intuicionismo.

Segundo Meneghetti (2003: p.7), no intuicionismo a matemática é compreendida como um saber independente da lógica que se caracteriza por ser intuitivo. Nesta concepção, toda matemática pode ser derivada de séries fundamentais de números naturais através de processos construtivos. Na perspectiva desta visão, se entende que as concepções de “intuição” aqui assumidas sejam similares as idéias sobre “intuição temporal” de Kant (1724 – 1804). Para os intuicionistas os aparatos simbólicos e a lógica são meios comunicacionais, mas não representam o ferramental matemático, e por isto não são básicos.

> De acordo com os intuicionistas, a matemática é essencialmente uma atividade mental, e os números são entidades mentais. A este respeito, o que significa dizer que há um número com tal propriedade é que tal número é construtível. A concepção distintamente psicologista e construtiva da matemática os leva a conclusão de que algumas partes da matemática clássica - aquelas que lidam com totalidades completas, infinitas, por exemplo – são inaceitáveis. E dessa restrição da matemática segue-se uma restrição lógica; alguns dos princípios da lógica clássica não são, insiste o intuicionista, universalmente válidos.

> Por exemplo, argumenta Brouwer, há contra-exemplos à lei do terceiro excluído. Suponhamos que não seja possível nem construir um número com propriedade F, nem provar que não pode haver tal número. Então, pelos padrões intuicionistas, não é verdade que ou há um número que é F, ou não há.
>
> HAACK (2002: p. 285)

Para Snapper *apud* Meneghetti (2003: p.7-8), o intuicionismo reduz o saber matemático à subjetividade, e talvez devido tamanho contraste frente o formalismo, tal visão tenha sido rejeitada pela comunidade científica matemática. Os motivos que levariam a tal rejeição, para Snapper *apud* Meneghetti (2003), seriam três:

> i – Os matemáticos “clássicos” não aceitam recusar-se lançar mão de muitos teoremas “vistosos” que são irrelevantes aos intuicionistas;
>
> ii – A prova na matemática clássica é bem mais objetiva, e curta, que para os intuicionistas;
>
> iii – Existem teoremas válidos no intuicionismo e inválidos na matemática clássica.

Quanto aos aspectos aplicáveis, o formalismo, e os princípios da lógica formal apresentaram novas possibilidades em diversas áreas de ciência e tecnologia, e muito disto ocorreu devido desenvolvimento das idéias sobre computabilidade e prova automática que tiveram como base concepções de lógica formal, especificamente, lógica de primeira ordem. Ou seja, não era viável abandonar as concepções desenvolvidas no formalismo, pois estas são manipuláveis tanto do ponto de vista científico como tecnológico.

Além das questões acima mencionadas sobre o desenvolvimento das idéias sobre demonstração em relação às concepções filosóficas do saber matemático, existem relações entre o processo de validação matemática e o uso de tecnologias que buscarei discutir a seguir.

Ao compreender que as tecnologias computacionais estão associadas ao desenvolvimento das idéias formalistas, nas situações que envolvem o ensino de matemática assistido por computador, não se pode deixar de lembrar que o Novo PC é uma máquina dedutiva que trabalha sobre problemas de determinação. As suas restrições tecnológicas podem inviabilizar uma abordagem significativa em certos problemas matemáticos se for proposta apenas a passagem do Velho PC ao Novo PC. Por outro lado, uma mudança na forma de olhar os problemas matemáticos a partir do computador, com base na passagem do Novo PC para o Velho PC, pode se construir como um processo significativo que reúne às técnicas usuais de prova, na construção de uma nova abordagem sobre os problemas de demonstração, de modo que a capacidade criativa humana, presente no saber matemático, seja estabelecida através do rompimento entre os procedimentos experimentais e matemáticos propriamente ditos. No entanto para que seja possível avançar no contexto do Novo PC, respectivamente, se deve compreender algumas concepções sobre computabilidade e heurística matemática.

O problema da computabilidade, relacionado ao processo de validação por demonstração está na representação de conhecimentos através de máquinas. A prova automática de teorema é um procedimento dedutivo utilizado na lógica predicativa de primeira ordem, e além disto, é um método de computação, que contribui com estudos em Inteligência artificial na atualidade, e foi neste sentido, que muitas concepções dos logicistas e dos formalistas contribuíram com a ciência da computação do século XX.

Chang & Lee (1973: p. 45) mencionam que a prova automática de teorema foi desenvolvida por Herbrand em 1930. Através dos seus estudos foi possível estabelecer, que uma fórmula válida é uma fórmula verdadeira sob todas as interpretações. Herbrand desenvolveu um algoritmo para encontrar uma interpretação que pudesse falsificar uma fórmula dada sob todas as interpretações. Entretanto, se a fórmula dada for válida, chega um ponto em que nenhuma interpretação pode existir e seu algoritmo é finalizado após um número finito das experimentações. O método de Herbrand é considerado a base para a maioria de procedimentos automáticos modernos da prova.

Na década de 1960, Gilmore foi o primeiro pesquisador que implementou os procedimentos de Herbrand em um computador. Pode-se averiguar em termos computacionais, que uma fórmula é válida, se e somente se, a sua negação é inconsistente, pois Gilmore projetou um *software* para detectar a inconsistência da negação de uma fórmula.

Chang & Lee (1973) comentam que ao executar o programa de Gilmore, as fórmulas proposicionais são geradas e testadas periodicamente para encontrar inconsistência. Caso a negação da fórmula dada fosse inconsistente, seu programa detectava este fato. Gilmore conseguiu provar algumas fórmulas simples, mas encontrou dificuldades de decisão na maioria das fórmulas da lógica de primeira ordem.

Em pouco tempo, alguns estudos sobre o programa de Gilmore mostraram que o seu método não estava suficientemente adequado para execução de testes de inconsistências para fórmulas proposicionais. Entretanto, o método de Gilmore foi aperfeiçoado por Davis e Putnam em questão de meses. (*in* Chang & Lee 1973: p.45-46)

Entretanto, existiam problemas nos avanços apresentados, pois várias fórmulas da lógica de primeira ordem não eram bem executadas pelo processo de prova automática.

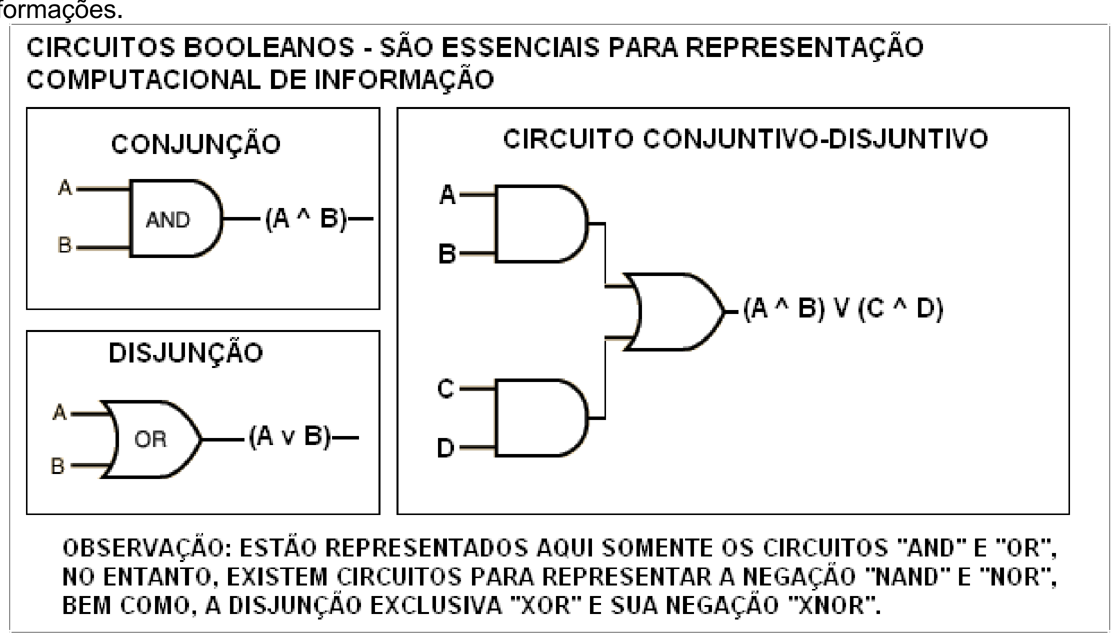
Em 1965, os maiores avanços foram feitos por Robinson, ao introduzir o princípio que ficou conhecido como "Resolução de Robinson". O procedimento de Robinson era mais eficiente que seus predecessores, e desde a introdução do seu algoritmo, diversas modificações foram propostos para melhoria da prova automática de teorema em equipamentos computacionais, no entanto, a base destes estudos se fundamentou no teorema de Herbrand.

Mas qual a relevância das idéias sobre demonstração na perspectiva formalista com respeito à representação de conhecimentos? Equipamentos como calculadoras e computadores possuem em seus circuitos um *designer* proposicional baseado na lógica formal. A partir destes circuitos, é possível usar impulsos elétricos para comunicar concepções de uma aritmética binária que pode ser codificada e re-codificada através de interpretações baseadas em parâmetros lógico-operacionais.

Considerando uma operação condicional, em uma lógica formalista, com uma estrutura dedutiva em que: Uma hipótese é tomada como um conjunto de enunciados que são assumidos como suposições admissíveis como ponto de partida para o processo de derivação; E a tese é uma proposição que pode ser testada dentro de uma estrutura derivável formalizada. Então, no ato de executar uma tarefa em uma estrutura formalizada, temos um conjunto de informações base como enunciados hipotéticos e um conjunto de ações, estruturadas em um enunciado tese, em que se pretende testar sua validade. Para compreender este paradigma da representação computacional de conhecimentos, vou recorrer à um exemplo que desenvolvi e a partir deste exemplo vamos explicar algumas idéias presentes no teorema de Herbrand.

Um dos maiores problemas ao se trabalhar com representação de conhecimentos em máquinas consiste na preparação de enunciados para o teste da prova automática de teorema, sem que os mesmos enunciados não percam os seus significados originais.

Figura 005 – Circuitos lógico-proposicionais booleanos para representação de dados e informações.



Como foi dito anteriormente, os recursos computacionais usuais, na atualidade, possuem um *designer* proposicional, nos quais as operações lógicas devem estar presentes, mas os circuitos de um processador de informações trabalham diretamente com estruturas lógicas simples em termos operacionais, ou seja, os autômatos para funcionar usam somente operações lógicas como conjunção e disjunção, e a partir destas as outras estruturas são deduzidas. Para entender tal processo observe a figura 005 acima apresentada. Esta simplicidade decorre da necessidade em desenvolver operações lógicas e matemáticas dentro de uma aritmética cuja base do seu sistema de numeração, em nível mais "primitivo" é binário, devido à possibilidade em se obter *status* como "ligado" e "desligado" em circuitos digitais.

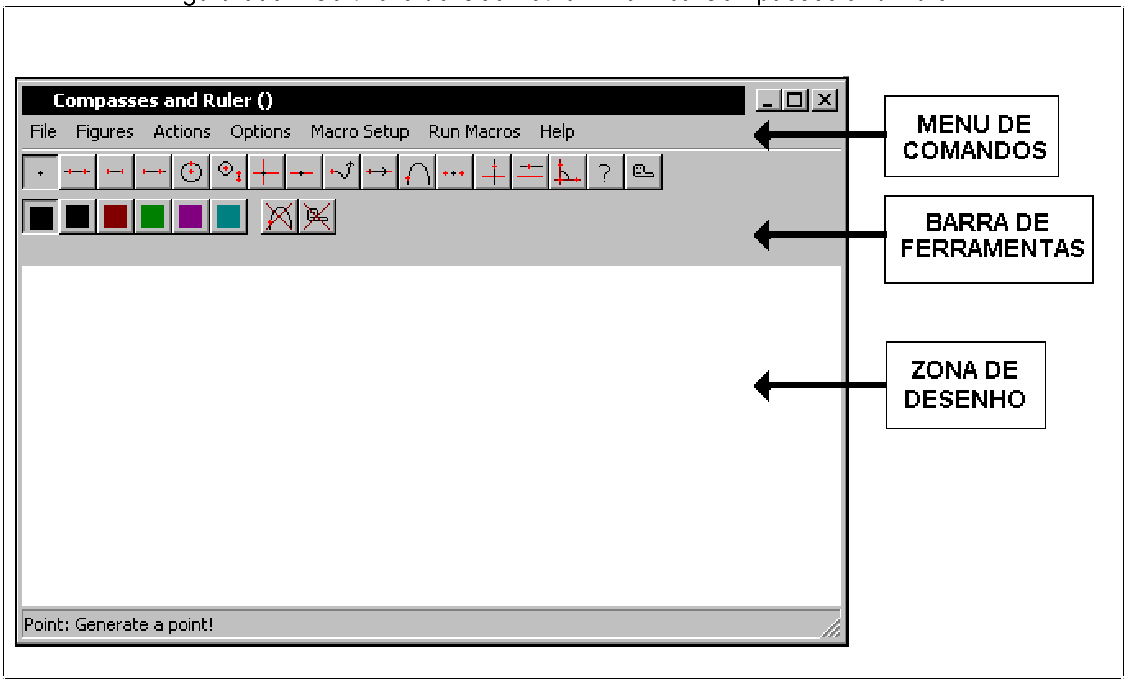
No entanto, as expressões usuais em deduções na lógica de primeira ordem, geralmente são estruturas, que além de conjunções e disjunções envolvem: condicionais, bicondicionais, quantificadores, fórmulas, variáveis e constantes. Portanto, obter uma prova automática de teorema a partir da lógica de primeira ordem, implica em transformar expressões lógico-formais em estruturas atômicas simples que trabalhem apenas com conjunções e disjunções. Tais estruturas lógicas são conhecidas como cláusula, e em princípio devem preservar a informação original da linguagem natural.

Diante de tal necessidade, o ponto de partida para usar o processo de validação por demonstração, na estrutura formalista da lógica de primeira ordem consistiu em elaborar um algoritmo de representação clausal e este trabalho pela representação de conhecimento em um autômato foi o trabalho que resultou no Teorema de Herbrand.

Para compreender o algoritmo de representação clausal e sua aplicação por meio de computadores, apresento a seguir como exemplo, o funcionamento de um *software* de geometria dinâmica que é utiliza no ensino de matemática, mas para tanto, é preciso compreender como estes dispositivos funcionam.

Exemplo 003 – Os *softwares* de geometria dinâmica são recursos computacionais que permitem trabalhar com simulações e manipulações de entidades geométricas como se os mesmos fossem objetos. Um exemplo deste tipo de *software* é o "*Compasses and Ruler*" desenvolvido por Grotmann (2000).

Figura 006 – Software de Geometria Dinâmica Compasses and Ruler.



No "*Compasses and Ruler*", temos três grandes agrupamentos de comandos e recursos conforme está apresentado na figura 006: Menu de comandos; barra de ferramentas; zona de desenho. Este tipo de interface com o usuário geralmente é um padrão dos *softwares* de geometria dinâmica, mas em suma, se pode dizer que tanto menu de comandos como barra de ferramentas permitem o usuário ter comunicação com os recursos disponíveis no programa, a diferença é que no menu de comandos a comunicação usa palavras-chave para indicar comandos em uma estrutura de menu, já na barra de ferramentas os mesmos comandos estão presentes, no entanto, o dispositivo de comunicação consiste no uso de ícones.

No caso da zona de desenho, trata-se da área de trabalho presente em *software* de geometria dinâmica. Neste espaço são realizadas as ações de construções geométricas preestabelecidas pelos comandos da barra de ferramentas e/ou do menu de comandos.

Considerando a estrutura organizacional de *software* de geometria dinâmica, os comandos essenciais para realização de construções geométricas no computador são aqueles que permitem representação de pontos, retas e circunferências, pois a partir destes comandos é possível obter a simulação de régua e compasso no computador. Quanto outros comandos como polígonos, retas paralelas e perpendiculares entre outros comandos, estes podem ser obtidos através das construções geométricas geradas pelos comandos essenciais acima mencionados, em termos computacionais obtemos macro-construções. No entanto, compreender aspectos desta dinâmica não explica detalhadamente como a prova automática de teoremas funciona em *software* de geometria dinâmica, logo vamos apresentar uma situação problema que mostra como isto pode funcionar.

Situação Problema 01 – Dados os pontos **[A]** e **[B]**, construir um segmento de reta **[AB]**.

A atividade apresentada está em linguagem natural, no entanto, como o objetivo consiste em mostrar como funciona a prova automática de teoremas, é necessário que se transforme a sentença enunciada, na situação problema 01, em uma proposição condicional da lógica de primeira ordem para que a mesma seja operacional em termos computacionais. Deste modo se obtêm:

> **Proposição A01:** Se existem os pontos **[A]** e **[B],** então pode existir o segmento **[AB]**.
>
> Em termos simbólicos, se pode dizer que:
>
> **Proposição A02:** $\exists$**[A], [B], [AB] {P(A ; B)** $\rightarrow$ **S(AB)}**

Ao transformar a proposição A01 em A02, se obtém em A02 quantificadores universal ($\forall$) e existencial ($\exists$), bem como, as funções lógicas **S()** e **P()**, que respectivamente representam as funções segmento de reta e ponto. Além disto, estas funções estão na forma condicional de tal modo que o que está dito em termos simbólicos em A02 é o que está dito em A01, ou seja, da passagem da linguagem natural para a lógica proposicional de primeira ordem não houve perda de informação. Mas como o computador trabalha com circuitos que operam em uma estrutura conjuntivo-disjuntivos, então se torna necessário:

a) Transformar a sentença condicional em uma expressão conjuntivo-disjuntiva;
b) Eliminar os quantificadores existenciais;
c) Eliminar os quantificadores universais.

A partir deste tratamento, a formula resultante, deverá fazer a representação clausal da proposição A02.

Para atender o item (a), acima apresentado, utiliza-se uma das equivalências lógicas De Morgan em que se transforma o condicional em uma disjunção, através da negação da hipótese de um condicional. No caso acima exposto na proposição A02, o processo resultaria em:

$$\exists \mathbf{[A], [B], [AB] \{P(A ; B) \rightarrow S(AB)\}} \equiv$$
$$\equiv \exists \mathbf{[A], [B], [AB] \{\sim P(A ; B) \vee S(AB)\}}$$

Para averiguar a veracidade disto, basta tomar as estruturas proposicionais presentes na proposição A02, se toma **S(AB)** equivalente à conjunção **(A ^ B)**, assim como, se toma **P(A; B)** $\equiv$ **P(A) ^ P(B)** como equivalente a **(A ^ B)**. A partir destas equiparações é construída uma tabela-verdade em que são comparadas as expressões **K: P(A; B)** $\rightarrow$ **S(AB)** e **L: ~P(A; B) v (AB)** para averiguação de equivalência lógica, caso se encontre tautologia entre **K** e **L**, é possível afirmar que as expressões possuem o mesmo valor lógico.

Tabela 002 – Averiguação da equivalência lógica entre as expressões K e L.

A	**B**	**A ^ B**	**~(A ^ B)**	**K: {P(A; B) → S(AB)}**	**L: {~P(A; B) v S(AB)}**	**K ≡ L**
V	V	V	F	V	V	**V**
V	F	F	V	V	V	**V**
F	V	F	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	**V**

Pela tabela 002, é possível observar que **K** e **L** são tautológicas entre si, portanto, se conclui que tais expressões possuem o mesmo valor lógico. Portanto, a proposição A02 pode ser transformada em A03:

Proposição A03: ∃[A], [B], [AB] {~P(A ; B) v S(AB)}

A partir desta proposição A03, se deve trabalhar na eliminação dos quantificadores existenciais e universais, para tanto, um dos recursos consiste em fazer uso da função Skolem. Segundo Chang & Lee (1973: p. 46-47), a função Skolem permite eliminar quantificadores existenciais. Para efetuar tal ação, se deve substituir uma variável por uma função.

Neste caso, com respeito a proposição A03, temos 3 variáveis **[A]**, **[B]** e **[AB]** que em tese é obtida a partir de **[A]** e **[B]**. Como a função **P()** envolve **[A]** e **[B]**, e **S()** envolve **[AB]**, então se deve encontrar um modo de colocar **[AB]** em função de **[A]** e **[B]**. Tomando estas idéias como base se pode considerar:

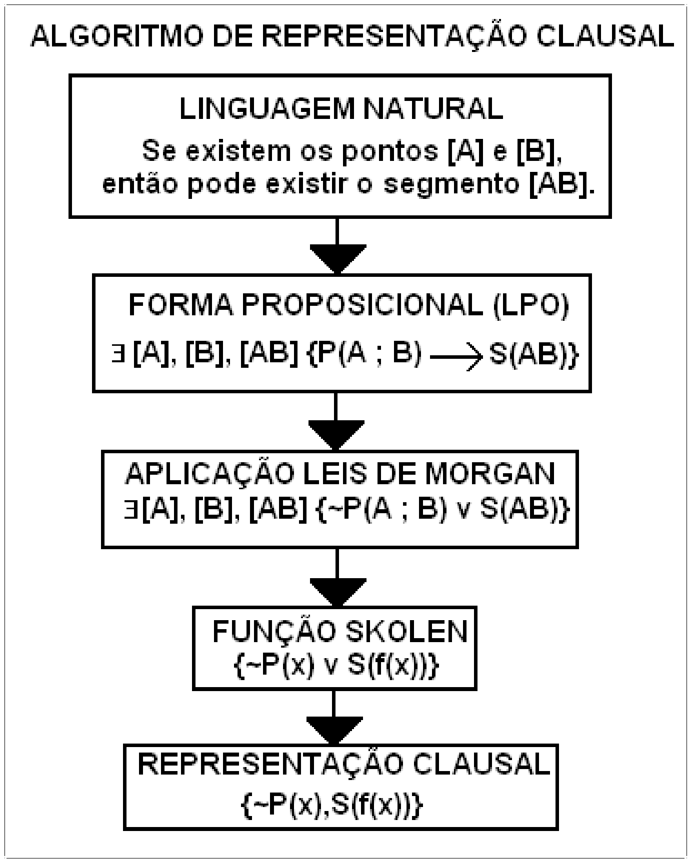
P(A ; B) => (A ^ B) = (x)
S(AB) = f(x)
∃[A], [B], [AB] {~P(A ; B) v S(AB)} ≡ {~P(x) v S(f(x))}

Como **P(A; B)** implica na expressão em uma proposição composta **(A ^ B)**, esta pode ter equivalência com uma única variável que carrega suas informações, e a partir disto **S(AB)** pôde ser posto em função de **P(A; B)** com base na função Skolem.

Como resultado se obtém a proposição A04.

Proposição A04: {~P(x) v S(f(x))}

Figura 007 – Esquema sobre o algoritmo de representação clausal.



Como na expressão inicial não havia quantificador universal, não foi necessário operacionalizar sobre o mesmo, no entanto, se houvesse tal quantificador este seria a partir daqui ignorado. Em suma, as etapas acima expostas, conforme esquema da figura 007, configuram o algoritmo de representação clausal, e a partir deste fundamento é possível efetuar a representação de conhecimentos em computadores digitais, no entanto, sequer foi dito algo sobre o teorema de Herbrand e o seu papel em prova automática de teoremas.

O algoritmo de representação clausal, exposto acima, exibe em termos logicistas como é possível representar conhecimentos em um autômato como o computador, no entanto, como no exemplo 003 se lida com *software* de geometria dinâmica, e a situação problema 01 possui por objetivos construir uma reta a partir de dois pontos, deve existir um processo que viabilize a operacionalização da construção proposta, caso contrário, é possível que o *software* permita efetuar o “desenho geométrico” esperado sem obtenção da “construção geométrica” de fato, neste contexto, o teorema de Herbrand é essencial.

Herbrand *apud* Chang & Lee (1973: p. 54-68), considerou que para efetuar um processo de prova que fosse construtivo em um autômato, precisaria ter uma interpretação finita do conhecimento que se pretende representar e simular, ou seja, se uma reta é constituída de infinitos pontos, seria necessário obter uma interpretação finita que viabilizasse elaborar tal construção.

Por exemplo, se considerar no exemplo acima nosso universo de Herbrand que representa uma reta, com base na situação problema 001 pode ser escrito como:

H(S) = {s, ~P(s), S(f(s)), ~P(P(s)), S(f(S(f(s))), ~P(P(P(s))), S(f(S(f(S(f(s))))),...}

Sendo **H(S)** o universo de Herbrand e **S**=**{~P(x), S(f(x))}** é o conjunto de clausulas obtidas a partir do algoritmo de representação clausal com elementos **s** quaisquer de um domínio **D**, temos que:

Em uma tentativa de recobrir uma “reta” tomando dois pontos quaisquer um em função do outro, o núcleo operacional deste procedimento será chamado por átomo **A** que pode ser escrito como:

A = {~P(s), S(f(s))}

Neste caso, o átomo **A** em questão corresponde ao resultado do algoritmo de representação clausal, e se este átomo **A** é uma **Interpretação I** correspondente a **H(S)**, então haverá uma **H-interpretação I** que satisfará **S**. Em termos mais precisos:

> Lema – Se uma interpretação I sobre um domínio D satisfaz um conjunto S de cláusulas, então há uma H-interpretação I correspondente a I que satisfaz S.
>
> CHANG & LEE (1973: p.55)

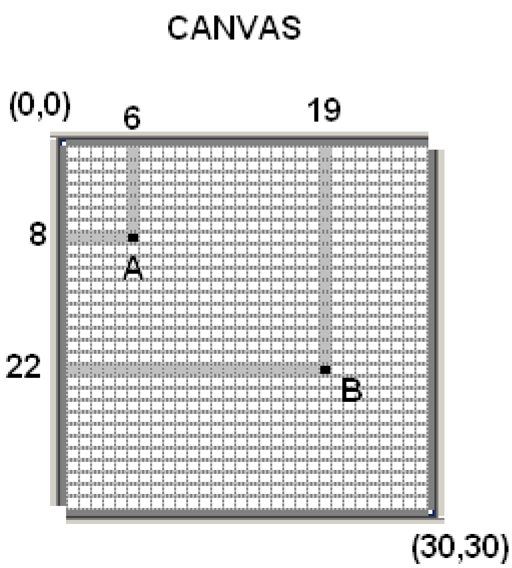
Deste lema decorre o teorema de Herbrand que diz:

> Teorema de Herbrand – Um conjunto S de clausulas é insatisfativel se e somente se, é falso sob todas as H-interpretações de S.

Considerando o lema e o teorema acima exposto, se pode dizer que **S** não é satisfeito se for falso em todas as interpretações sobre o domínio **D** de **S**, mas na prática como tal processo funciona?

Os construtores de *software* de geometria dinâmica usam como domínio uma matriz gráfica que é conhecida como canvas que é correspondente, nos *software* de geometria dinâmica à zona de desenho (cf. 47). Em um canvas se faz corresponder um ponto a um determinado valor numérico dentro de um quadrante "cartesiano positivo" invertido para baixo.

Figura 008 – Estrutura de funcionamento de um Canvas.



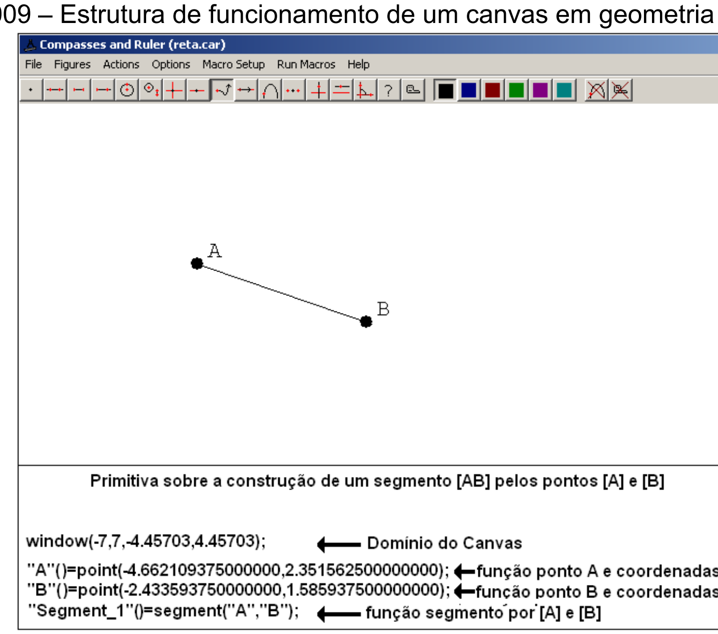
Nome	Valor x	Valor y
A	6	8
B	19	22

Por exemplo, na figura 008 o canvas vai dos pontos **(0,0)** até **(30,30)**, e o ponto **A** têm coordenadas $\mathbf{x_a=6}$ e $\mathbf{y_a=8}$, enquanto **B** possui coordenadas $\mathbf{x_b=19}$ e $\mathbf{y_b=22}$. Pode-se dizer que ao clicar os pontos **A** e **B**, foram determinados as suas respectivas coordenadas em um domínio **CANVAS (0,0; 30,30)**. No caso dos *softwar*es de geometria dinâmica o canvas passa por um processo chamado "transformação de visualização para janela" que é descrito por Velho & Gomes (2001: p. 17-18), neste processo, ocorre a redefinição de coordenadas para a criação de quatro quadrantes que permitam trabalhar com coordenadas no plano na perspectiva da geometria analítica.

Tendo em mente que o canvas constitui um domínio é preciso conceber que os comandos de um *software* de geometria dinâmica permitem representar entidades geométricas como ponto, reta, segmentos entre outras. Logo, tais comandos que carregam as características dos entes geométricos permitindo sua manipulação, simulação e representação constituem funções computacionais que podem ser operacionalizadas em uma lógica de primeira ordem. Sendo assim, há funções: **ponto()**, **reta()**, **segmento()** entre outras. E tais funções podem constituir clausulas na lógica de primeira ordem.

Na situação problema 01, o que ocorre no *software Compasses and Ruler* constitui os seguintes eventos:

Figura 009 – Estrutura de funcionamento de um canvas em geometria dinâmica.



Tendo:

A = {~P(s), S(f(s))} interpretação de **{~P(x), S(f(x))}**

Sabendo que **{~P(x), S(f(x))}** $\equiv$ **{P(A; B)** $\rightarrow$ **S(AB)}**

Pode-se concluir que **s** pertence ao domínio **D(x)** ≡ **CANVAS ()**, é possível obter **(A ^ B) = x** que pode ser rescrito como **(A_n ^ B_n) = x**, tal que **n** pertence ao universo de Herbrand. Logo, se obtiver **(A_a ^ B_b) = s,** tal que **s** pertence a interpretação **I** do universo de Herbrand em um domínio **CANVAS ()**, se pode dizer que na primitiva da figura 009 se pode considerar:

- A existência do conjunto domínio;
- A existência das funções Skolen para pontos e o segmento de reta;
- A existência de uma H-interpretação I.
-

Tabela 003 – Aplicação do teorema de Herbrand em representação clausal.

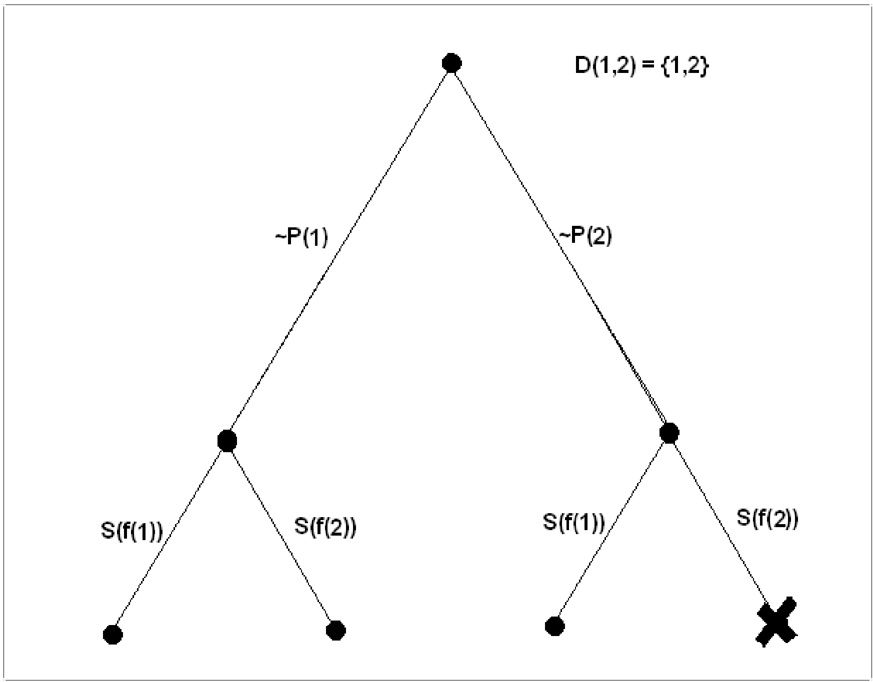
Primitiva do *software Compasses and Ruler*	**Estrutura clausal**	**Descrição**
window(-7,7,-4.45703,4.45703);	**D(x) ≡ CANVAS ()**	**Conjunto domínio D(x)**
"A"()=point(-4.662109375000000,2.351562500000000);	**Ponto(x1, y1) = A**	**Função Ponto A**
"B"()=point(-2.433593750000000,1.585937500000000);	**Ponto (x2,y2) = B**	**Função Ponto B**
"Segment_1"()=segment("A","B");	**Segmento (A,B)**	**Função Segmento de reta A e B**

Mas como funciona o teorema de Herbrand em termos lógicos?

Como Herbrand trabalha com a concepção de “insatisfabilidade”, de tal modo que um conjunto de clausulas é insatisfazível somente quando este conjunto é falso sob todas as **H-interpretações de S**.

Para averiguar como este processo funciona é possível recorrer à árvore semântica, considerando o átomo **A** conforme apresentado a seguir.

Figura 010 – árvore semântica de **A = {~P(s), S(f(s))}**



Nesta árvore semântica há três situações verdadeiras e uma falsa para a expressão em questão, logo, o átomo não é insatisfável. Considerando as ações passíveis de realização na representação da reta, o único caso insatisfável ocorre em **~P(2)** e na **~S(f(2))**, ou seja, é a situação em que ambas proposições são simultaneamente falsas. Trata-se de uma situação falseável por não ter sido executada, ou seja, é como se os comandos não fossem realizados em um computador. Nos outros casos a existência dos pontos implica em segmento e a deste nos pontos e ocorre assim satisfação de três **H-interpretações** de **S** para o átomo **A**. Logo, se deduz que **A** é válido. Trata-se de uma ótica de testabilidade automática em um conjunto domínio possível parte de um universo clausal. Neste caso o processo de validação por demonstração está reduzido ao processo dedutivo, e devido à velocidade de cálculo do autômato, aliado ao uso de procedimentos finitos, torna-se possível, dentro dos limites de representação efetuar a construção dos objetos geométricos em *software* de geometria dinâmica usando a estrutura condicional para validar ou invalidar processos manipuláveis nestes autômatos. De fato, procurei nesta simples ação esboçar como tais processos funcionam em um computador trazendo luz sobre questões relativas ao Velho PC e o Novo PC.

Situação problema 02 – Para compreender alguns outros aspectos deste processo, vamos recorrer à outra situação.

Construir o ponto médio **[M]** de um segmento **[AB]** no *software Compasses & Ruler*.

Tabela 004 – Construindo ponto médio de [AB] em *software* de geometria dinâmica.

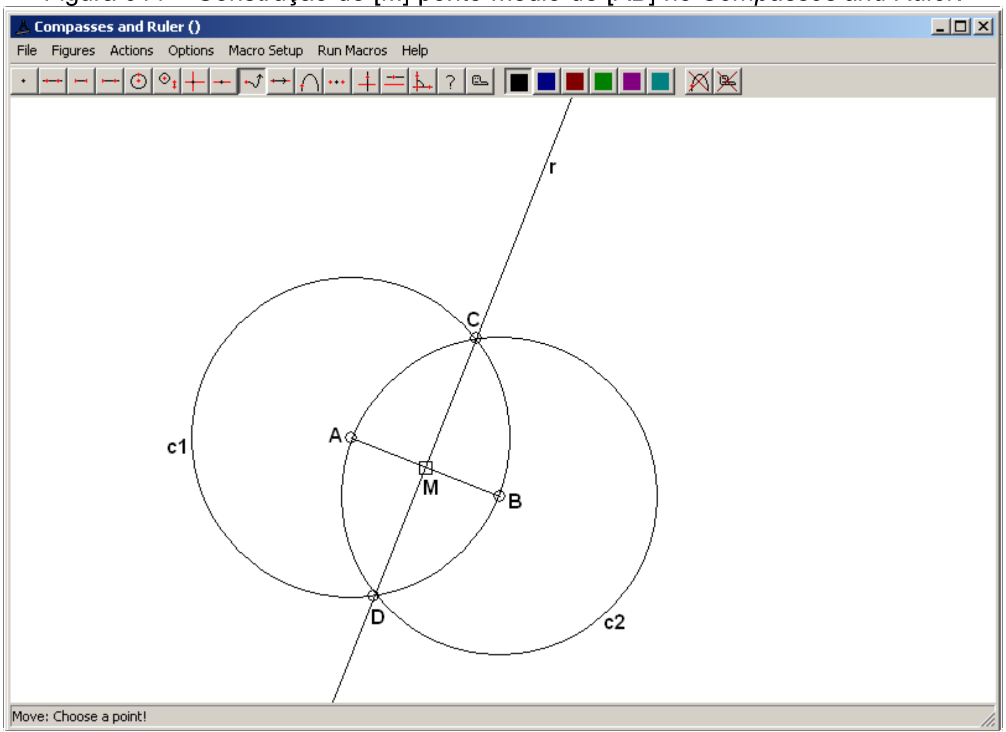
Primitiva do *software Compasses & Ruler*	Algoritmo das ações
windows(-7,7,-4.27387,4.27387);	**Determinação do Domínio no CANVAS**
“A”()=point(-2.160156250000000,-0.533203125000000);	**Marcar ponto [A];**
"B"()=point(-0.052763819095477,-1.371859296482412);	**Marcar ponto [B];**
"Segment_1"()=segment("A","B");	**Traçar segmento [AB];**
"c1"()=circle("A","B");	**Construir circunferência [c1] com centro em [A] e raio [AB];**
"c2"()=circle("B","A");	**Construir circunferência [c2] com centro em [B] e raio [BA];**
"D"(),"C"()=intersection("c1","c2");	**Marcar [D] e [C] intersecções entre [c1] e [c2];**
"r"()=line("C","D");	**Traçar reta [r] pelos pontos [C] e [D];**
"M"()=intersection("r","Segment_1");	**Marcar [M] intersecção entre [r] e [AB].**

Na tabela 004 se obtém o algoritmo do sistema que é conhecido como primitiva do sistema[14] trata-se de um algoritmo que permite descrever as ações que se realizam no computador. Além da primitiva, temos o algoritmo da construção que representa as ações que devem ser realizáveis no computador ao se construir o ponto médio **[M]** do segmento **[AB]**. Na figura 11 exposta abaixo, se obtém a construção referente a primitiva da tabela 004 em execução. O que se pode compreender do processo de prova automática de teoremas, neste sentido, é que seus objetivos estão associados ao processo de representação de conhecimentos muito mais que aos objetivos de validação que o processo de derivação pode assumir em matemática, ou seja, trata-se muito mais de uma aplicação computacional que propriamente de um processo reflexivo efetuado por

[14] O termo primitivo é usado para descrever um algoritmo do sistema que é interpretado pelo *software*, que neste caso, é o *Compasses & Ruler*.

um profissional em matemática[15]. Neste aspecto, alguns fatos assumem uma nova conotação na perspectiva da passagem do Novo PC ao Velho PC.

Figura 011 – Construção de [M] ponto médio de [AB] no *Compasses and Ruler*.




```
window(-7,7,-4.27387,4.27387);
/*
*/
"A"(showname,symbol:circle)=point(-2.160156250000000,-0.533203125000000);
"B"(showname,symbol:circle)=point(-0.052763819095477,-1.371859296482412);
"Segment_1"()=segment("A","B");
"c1"(showname)=circle("A","B");
"c2"(showname)=circle("B","A");
"D"(showname,symbol:circle),"C"(showname,symbol:circle)=intersection("c1","c2");
"r"(showname)=line("C","D");
"M"(showname)=intersection("r","Segment_1");
```

a) A derivação enquanto processo de validação é eficaz como aplicação do saber matemático em áreas científicas e tecnológicas devido a facilidade de manipulação que os parâmetros de um *designer* lógico confere ao autômato;
b) A derivação enquanto expressão extrema do formalismo ignora o processo epistemológico de construção do saber matemático

[15] As idéias apresentadas sobre Geometria Dinâmica relacionadas à prova automática de teorema podem ser encontradas na tese de Laborde (1977) intitulada como "*Um developpement algebrique de l'algorithme d' exclusion et quelques problemes geometriques en algebre de Boole.*

reduzindo-o a questões que envolvem manipulação de expressões e sentenças;

c) Em termos profissionais, a derivação se presta bem ao trabalho do matemático que trabalha em áreas de ciência e tecnologia, no entanto, para compreensão de aspectos filosóficos e conceituais da matemática em si mesma, é essencial à formação de discentes e docentes. Além disto, o formalismo descontextualizado, quando levado ao extremo, valorizaria o desenvolvimento das habilidades em detrimento das capacidades em fazer transposições, bem como, em relação ao ferramental matemático. Disto surgiria uma pseudo-cultura matemática que caracteriza este saber como algo inútil que somente uns poucos "gênios" de sala-de-aula poderiam compreender;
d) Em termos computacionais, a derivação é mais valorada pelo homem como processo que viabiliza representação de conhecimento que como saber matemático que trata o processo de validação em si mesmo. Logo, uma tendência comum resultante deste fato é considerar a representação de um saber como o saber em si mesmo. Nesta perspectiva, pode surgir como "mito moderno" a falsa idéia de que tendo a representação, sido efetivado, no computador a mesma esteja correta. No entanto, se ignora o fato de que uma representação é um recurso do qual os homens dispõem para efetuar a construção de conhecimentos e por isso nem sempre é o conhecimento em si.

Levando a cabo os questionamentos acima, e considerando questões sobre a formação matemática em sua perspectiva epistemológica, para Lakatos (1978) o processo de validação matemática envolve a história de construção deste saber, ou seja, a verdadeira matemática para Lakatos (1978) está nos bastidores do desenvolvimento das idéias matemáticas. No livro de filosofia da matemática intitulado "*A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*", Lakatos (1978) faz uma discussão sobre o vetor-algébrico Descartes-Euler que corresponde à conjectura **V – A + F = 2** para poliedros regulares[16]. Para tanto, Lakatos criou um uma sala-de-aula imaginária com um professor e alunos imaginários que representam diversos matemáticos que ao longo da história tentaram provar a conjectura mencionada.

Durante o desenvolvimento das idéias sobre o processo de validação da conjectura, o dialogo entre os alunos-matemáticos se dá através de exemplos e contra-exemplos matemáticos e destas discussões entre os alunos Lakatos (1978) exibe o fator humano como um elemento essencial para produção do saber matemático. O trabalho de Lakatos (1978) é uma crítica ao formalismo matemático e suas conseqüências na percepção que os próprios pesquisadores da área possuem sobre este tipo de saber. Para Lakatos (1978) a "lógica do descobrimento", que constitui os processos heurísticos associados à validação matemática, é fundamental ao desenvolvimento do saber matemático, pois isto revelaria os processos mentais que constituiriam a epistemologia deste tipo de saber.

Segundo Polya (1978: p. 86), a heurística é uma área do saber humano que não era bem delimitada, e estava relacionada aos estudos de lógica, filosofia e psicologia. Os objetivos da heurística consistiam em compreender os métodos e as regras da invenção e da descoberta humana. Alguns dos indícios destas idéias podem ser encontrados nos comentaristas de Euclides.

Um dos mais antigos fragmentos que falam sobre heurística, é o texto do *Livro VII das Collectiones* do matemático grego conhecido como Pappus que viveu por volta de 300 d.C.

> A chamada Heurística é, em suma, um corpo especial de doutrina para uso daqueles que, depois de terem estudado os Elementos comuns, desejam adquirir a capacidade de resolver problemas matemáticos e somente serve para este fim. É resultado do

[16] Vetor Algébrico Descartes-Euler: V – A + F = 2 para poliedros regulares – V = vértices, A = arestas, F = faces.

> trabalho de três homens: Euclides, o autor dos Elementos, Apolônio de Perga e Aristeu, o Antigo. Ela ensina os procedimentos da análise e da síntese [...]
>
> PAPPUS apud POLYA (1978: p. 104).

Para Pappus os estudos da Heurística, estavam relacionados ao desenvolvimento da capacidade para resolver problemas matemáticos, de modo que só serviria para tal fim, no entanto, para Polya(1978: p.106), a heurística se presta também à resolução de problemas não matemáticos. Pappus considerou que a heurística matemática antiga apresentava dois tipos de abordagens que consistiam em procedimentos de análise e de síntese.

A análise se iniciaria por aquilo que é necessário e que é admitido como correto, e disto se obtém conseqüências, e desta se deduz outras até que se chegue em um ponto de partida para a síntese. No entanto, na síntese, também conhecida como resolução construtiva ou raciocínio regressivo, se adotaria como ponto de partida o último ponto da análise, que foi considerado verdadeiro, e disto se deduz o caminho inverso de modo que se chegue à resolução de um problema de determinação ou demonstração.

Nos processos heurísticos, segundo Pappus, ocorreriam dois tipos de análise, uma seria voltada aos problemas de determinação, e outra voltada aos problemas de demonstração. A diferença é que na análise voltada aos problemas de determinação, se pretende mostrar em que situação uma incógnita satisfaz um determinado condicionante, enquanto que na análise voltada aos problemas de demonstração se pretende saber se uma conjectura é ou não um teorema.

Em suma, tanto para os problemas de determinação como de demonstração, na heurística de Pappus, a análise corresponde à conversão de um enunciado em outro, a partir de uma seqüência de enunciados {01, 02, 03,..., n} de modo que em n se pretende obter algum tipo de evidência matemática. Enquanto na síntese, se procura a partir da evidência matemática obtida pelo enunciado n, averiguar o conjunto de enunciados conversíveis {n,..., 03, 02, 01} de forma reversa, deve ser possível obter alguma resposta que confirme ou não um problema de determinação ou demonstração.

Para Polya na heurística de Pappus, é possível considerar a análise de um processo teórico que resulta na síntese que consiste na prática. Para contextualizar tais idéias sobre a heurística, Polya considera um exemplo não matemático.

> Um homem primitivo deseja atravessar um riacho, mas não pode fazê-lo da maneira habitual porque o nível da água subiu desde a véspera. Por isso, a travessia tornou-se o objeto de um problema: “a travessia do riacho” é o x deste problema primário. O homem pode lembrar-se de já ter atravessado algum outro riacho por uma árvore caída. Ele procura ao redor uma árvore caída que lhe sirva, a qual se torna a sua nova incógnita, o seu y. O homem não encontra nenhuma nessas condições, mas há muitas árvores em pé à margem do riacho; ele deseja que uma delas caia. Ser-lhe-ia possível fazer uma árvore cair atravessada sobre o riacho? Surgem uma grande idéia e uma nova incógnita: por que meios poderia o homem derrubar a árvore sobre o riacho?
> Esta seqüência de idéias deve chamar-se análise, se aceitamos a terminologia de Pappus. Se o homem primitivo conseguir concluir a sua análise, ele poderá tornar-se o inventor da ponte e do machado. Qual seria a sua síntese? A tradução das idéias em ações. O ato final da síntese será a passagem do homem por sobre a árvore através do riacho.
>
> POLYA (1978: p. 106).

Em suma, os procedimentos heurísticos estão próximos à lógica do descobrimento, revelando algo além da estrutura dedutivo-formalista. Entretanto, há outras questões presentes na heurística que devem ser considerados.

Segundo Polya (1978: p. 132-133), o raciocínio heurístico não se considera conclusivo, sendo algo provisório e aceitável, nele é possível obter uma estimativa que permite saber se o trabalho matemático está avançando. Para se chegar em uma demonstração matemática é necessário o raciocínio heurístico. Entretanto, não se deve em hipótese alguma, considerar que tal raciocínio seja correspondente ao processo de validação por demonstração.

> O raciocínio heurístico vale por si próprio. O que é mau é confundi-lo com a demonstração rigorosa. Pior ainda é fazer passar um raciocínio heurístico por uma demonstração rigorosa.
>
> POLYA (1978: p. 133).

Afinal, se uma demonstração é válida, isto se deve ao edifício que constitui o saber matemático, e em nenhuma instância a heurística pode corresponder à demonstração, pois no ato de provar uma afirmação já ocorre à subordinação de uma conjectura aos axiomas e teoremas existentes em um sistema formal. No entanto, é no processo heurístico que as concepções intuitivas e o processo criador estão sendo gerados. Em suma para Pappus *apud* Polya, enquanto os processos matemáticos heurísticos caminham entre a hesitação e a pretensão, os procedimentos de validação por demonstração na matemática, estruturam este saber de modo que seja possível a eliminação de ambigüidades por procedimentos metodológicos calcados na lógica.

Para Lakatos os desenvolvimentos do processo heurísticos ao longo da história da matemática, expõem uma epistemologia que revelaria as verdadeiras características deste saber, neste aspecto, a heurística seria parte do processo de validação matemática revelando a atitude humana frente à matemática através das demonstrações.

Segundo Lakatos (1978), o processo de validação por demonstração é um processo dialógico que envolve a apresentação de exemplos e contra-exemplos, bem como, a justificação de idéias e a revisão constante de concepções acatadas e aceitas historicamente. Em "provas e refutações" Lakatos (1978) expõem uma nova concepção teórica sobre o significado das demonstrações matemáticas de modo que os aspectos axiomáticos de uma demonstração são carregados de significações heurísticas produzidas no dialogo entre matemáticos sobre o saber matemático que está em construção. Segundo Davis & Hersh (1985: p. 388-389) o trabalho de Lakatos (1978) em "Provas e Refutações" mostra uma matemática que cresce através da dúvida e da crítica.

> Proofs and Refutations usa a História como o texto sobre o qual basear seu sermão: a matemática, também, como as ciências naturais, é falível, não é indubitável; ela cresce por meio da crítica e correção de teorias que nunca estão totalmente livres de ambigüidades ou da possibilidade de erro ou descuido. Partindo de um problema ou uma conjectura, há uma procura simultânea de demonstrações e contra-exemplos. Novas demonstrações explicam velhos contra-exemplos, novos contra-exemplos solapam velhas demonstrações. Para Lakatos, "demonstração"

> neste contexto de matemática informal não significa um processo mecânico que transmite a verdade numa cadeia inquebrável, das hipóteses até as conclusões. Em vez disso, significa explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível, mais convincente, enquanto é tornada mais detalhada e exata sob a pressão de contra-exemplos.
>
> DAVIS & HERSH (1985: p. 388-389)

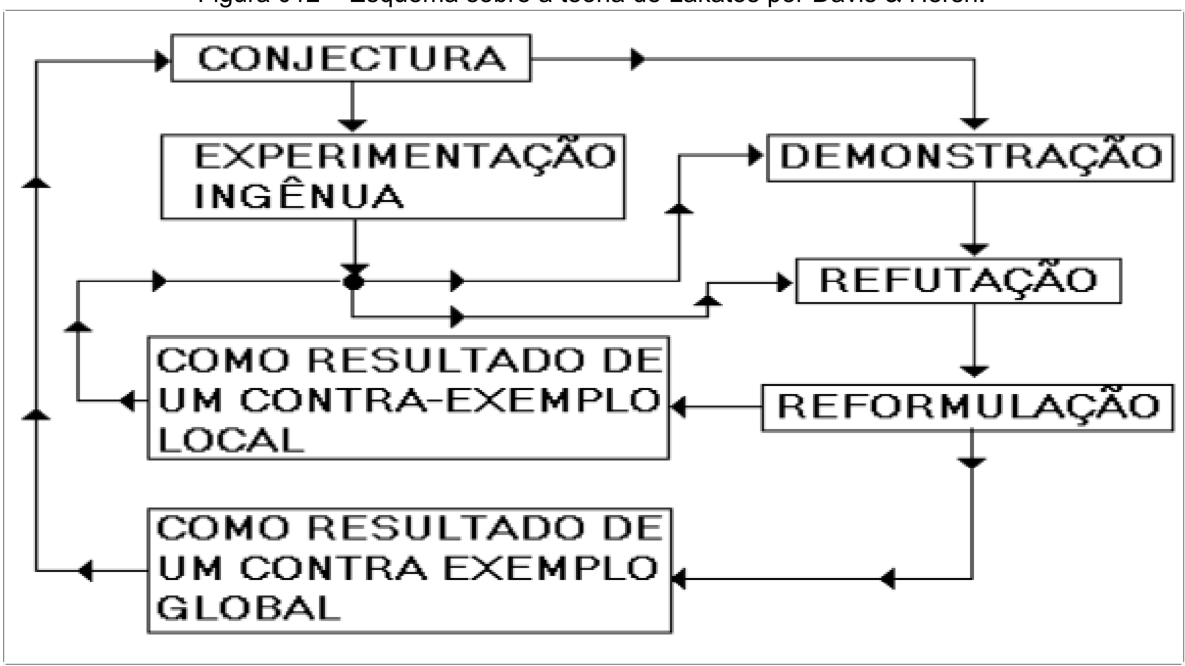
Num certo sentido, a teoria de Lakatos (1978) poderia ser chamada por “falibilismo matemático”, ou como Davis & Hersh (1985: p.386) nomeiam por “filosofia da dubitabilidade matemática”. Estas percepções “falibilistico-heurístico” dos métodos matemáticas em Lakatos (1978) mostram a influência que Polya e Popper tiveram sobre sua obra, pois os mesmos durante o trabalho de doutoramento de Lakatos foram seus orientadores. Neste aspecto, o trabalho de Lakatos resultou do debate proposto por Popper na primeira metade do século XX sobre a filosofia da ciência.

> Em ciência, a procura dos “fundamentos” conduz ao problema tradicional, da “lógica indutiva”: como deduzir leis gerais de experiências e observações particulares. Em 1934 houve uma revolução na filosofia da ciência quando Karl Popper propôs que não é possível nem necessário justificar as leis da ciência justificando o raciocínio indutivo. Popper afirmou que as teorias científicas não são deduzidas indutivamente dos fatos; ao contrário, são inventadas como hipóteses, especulações, até mesmo adivinhações, e são então submetidas a testes experimentais com os quais os críticos tentam refutá-las. Uma teoria tem o direito de ser considerada científica, disse Popper, somente se é, em princípio, capaz de ser observada e arriscar-se a ser refutada. Uma vez que uma teoria tenha sobrevivido a tais testes, adquire um certo grau de credibilidade, e pode ser considerada experimentalmente estabelecida; mas nunca é demonstrada. Uma teoria científica pode ser objetivamente verdadeira, mas nunca poderemos saber isso com certeza.
>
> DAVIS & HERSH (1985: p. 386-387)

Segundo Davis & Hersh (1985: p.387), Popper e outros pensadores da filosofia das ciências, durante a primeira metade do século XX, arriscaram e apresentaram concepções novas plausíveis que transformaram a visão de ciências por parte de pesquisadores e filósofos, no entanto, na matemática os programas logicista, formalista e intuicionista deixaram traços na forma de projetos de pesquisa sobre os fundamentos da matemática, no entanto, estas idéias fracassaram nos seus objetivos. Nesta perspectiva as idéias de Lakatos (1978) representam novas perspectivas sobre os fundamentos e os objetivos do saber matemático.

Davis & Hersh (1985: 328-335) esboçaram um esquema sobre a teoria heurística de Lakatos sobre o processo de validação em matemática. Neste esquema são apresentados os procedimentos heurísticos e a terminologia adotada por Lakatos (1978) em "*Provas e Refutações*", e o processo de validação por demonstração a partir de uma conjectura dada como um problema de demonstração.

Figura 012 – Esquema sobre a teoria de Lakatos por Davis & Hersh.



Com base no esquema enunciado na figura 12 acima, o matemático com pouca experiência, pode optar por manipulações e experimentos que correspondem aos problemas de determinação e são conhecidos por experimentação ingênua, que podem ajudar *a priori* no desenvolvimento da demonstração. Entretanto, caso o matemático seja experiente, é provável que este trabalhe diretamente no processo de validação por demonstração, ignorando inicialmente a experimentação ingênua. No entanto, há momentos em que um problema pode ser tão complexo, que seja necessário o uso da experimentação ingênua para uma melhor visualização do problema proposto através da conjectura.

No processo de validação por demonstração, ocorrem as técnicas de prova, que revelam aspectos lógico-dedutivos e conceituais. Neste processo, é possível considerar a estrutura dedutiva, no entanto, o processo heurístico é visto por Lakatos (1978) como parte da demonstração. Após o término da demonstração proposta, ocorre o processo de refutação que corresponde ao questionamento da prova proposta por parte da comunidade matemática, e deste procedimento decorre a reformulação das concepções e idéias matemáticas.

Na reformulação, o problema pode ser reconstruído, a partir da apresentação dos contra-exemplos locais, que correspondem à crítica de aspectos específicos de uma prova, com base no saber matemático. No texto de Lakatos, desenvolvido em um estilo que lembra Platão, em um dos diálogos um dos alunos questiona o professor perguntando se a prova proposta seria desprezada mediante um contra-exemplo local.

> ALFA: Neste caso, o senhor despreza a sua prova?
> PROFESSOR: De modo algum. Crítica não significa necessariamente destruição. Aperfeiçoarei minha prova, de modo que ela suporte a crítica.
>
> LAKATOS (1978: p. 25)

Portanto, a apresentação de contra-exemplos locais não desabona toda a demonstração e exige que o matemático retorne ao processo de validação por demonstração. No entanto, há contra-exemplos que refutam a conjectura principal, de modo que não ocorra mais dúvida sobre o problema em questão, e se saiba que a conjectura não é um teorema – este é o contra-exemplo global.

Caso uma prova resista aos contra-exemplos locais e globais, então se sabe que a prova apresentada transforma a conjectura dada em um novo teorema.

Segundo Lakatos os procedimentos heurístico-matemáticos devem ser vistos como a “metodologia da matemática”.

> O objetivo destes ensaios é enfocar alguns problemas da metodologia da matemática. Emprego a palavra “metodologia” em sentido análogo ao de “heurística”, de Polya e Bernays, e “lógica do descobrimento” ou “lógica situacional”, de Popper. A recente expropriação do termo “metodologia da matemática” para servir como sinônimo de “metamatemática” tem, fora de dúvida, um toque formalista. Indica que na filosofia formalista da matemática, não há lugar adequado para metodologia como lógica do descobrimento. De acordo com os formalistas, matemática é matemática formalizada. Mas que se pode descobrir numa teoria formalizada? Duas espécies de coisas. Primeiro, pode-se descobrir a solução de problemas que a máquina de Turing devidamente programada poderia resolver em tempo finito (como por exemplo: certa pretensa prova é ou não uma prova?). Nenhum matemático tem interesse em obedecer ao monótono “método” mecânico preconizado por tais processos decisórios. Segundo, pode-se descobrir soluções para problemas (tais como: será teorema certa fórmula numa teoria não conclusiva) em que só se pode ser orientado pelo “método” do “vislumbre indisciplinado e boa sorte”.
>
> LAKATOS (1978, p. 15-16)

Segundo o olhar de Lakatos (1978), a heurística matemática é a metodologia matemática por excelência, pois permite o descobrimento e como conseqüência, o avanço da matemática. Não que os procedimentos formalistas devam ser desprezados, mas em Lakatos (1978) existe à crítica da valorização excessiva do processo dedutivo enquanto demonstração matemática. Por outro lado, na heurística matemática existe a possibilidade em trabalhar uma matemática investigativa através da lógica situacional. O que teria ocorrido no formalismo, é a substituição da metodologia matemática histórica, por procedimentos de sistematização e organização da linguagem expressos na lógica formal, sendo assim, a matemática formalista, se adotada de forma sistemática, é uma atividade sem significado e sem história, descontextualizada e desconexa em si mesma.

> Ora, essa fria alternativa entre o irracionalismo da máquina e o irracionalismo da suposição cega não prevalece no caso da matemática viva: uma investigação de matemática não-formal ensejará fecunda lógica situacional para matemáticos operosos, lógica situacional que nem é mecânica nem irracional, mas que pode ser reconhecida e muito menos estimulada pela filosofia formalista.
>
> LAKATOS (1978, p. 17)

Mediante as considerações apresentadas, é possível relacionar o Velho PC (papel e caneta), em termos de atividade matemática, aos procedimentos heurísticos matemáticos, e o Novo PC (*personal computer*), aos procedimentos dedutivo-formalistas.

Tanto no Novo PC como no Velho PC, a demonstração é relevante, mas estão associados a finalidades distintas. No Novo PC, os procedimentos dedutivo-formalistas estão na perspectiva da aplicação lógico-matemática para representação de conhecimento em autômatos. No Velho PC, mesmo os procedimentos dedutivo-formalistas são carregados de uma heurística que envolve a construção e reconstrução do saber matemático na perspectiva de um pesquisador e/ou estudante da área, em suma, se observa que a demonstração consiste em uma tentativa de compreensão do significado dos conceitos matemáticos.

> Como já mencionamos, o estilo dedutivista rompe as definições geradas pela prova dos antepassados, apresentando-as no vazio, de modo artificial e autoritário. Ele oculta os contra-exemplos globais que levaram ao seu descobrimento. Pelo contrário, o estilo heurístico acentua esses fatores. Dá ênfase à situação problemática: acentua a "lógica" que deu nascimento ao novo conceito.
>
> LAKATOS (1978: p. 188)

Com respeito ao ensino de matemática assistido por computador, a passagem do Velho PC ao Novo PC, é o que se faz tradicionalmente, inviabiliza o desenvolvimento da lógica situacional, de modo que o estudante se restringe à implementação de um algoritmo em um problema de determinação. O que acaba ocorrendo, é que ao terminar a execução do algoritmo no computador, o problema é dado como solucionado, sem questionamentos e sem a compreensão dos conceitos, neste aspecto, o formalismo-dedutivo do autômato prevalece, a representação acaba por substituir os conhecimentos que se pretende ensinar aos estudantes. Por outro lado, ao se passar do Novo PC para o Velho PC, é cabível o desenvolvimento da lógica situacional, através das possibilidades de manipulação e animação do Novo PC, de modo, que seja viável a visualização de uma situação conhecida e tida como trivial como algo interessante por meio de um “novo olhar” que deve ser proporcionado pelo docente, que deverá ter uma formação adequada aos desafios que a tecnologia apresentam nesta perspectiva.

Em termos gerais, os procedimentos heurísticos e dedutivos são atualmente parte dos procedimentos matemáticos, e com desenvolvimento do computador o aspecto dedutivo foi valorizado, de modo, que em 1976 Kenneth Appel e Wolfgang Haken, demonstraram a conjectura das quatro cores, com auxílio de um computador, devido à complexidade dos cálculos envolvidos no processo, conforme é apresentado por Davis & Hersh (1985: p. 423 – 430)[17]. Sendo assim, tanto o uso do Velho PC como do Novo PC, estão enunciando uma nova matemática. Entretanto, ainda ocorre a valorização exacerbada dos pressupostos dedutivo-formalistas sobre a heurística matemática. Por outro lado, até qual ponto a heurística-matemática de Lakatos (1978) sobre o formalismo, seria uma contribuição útil para o desenvolvimento da matemática? Como a passagem do Novo para o Velho PC, está relacionado aos procedimentos de validação por demonstração, compreender os processos dedutivos e heurísticos, e seus aspectos teóricos e práticos, podem revelar os limites e as possibilidades das ferramentas computacionais com respeito ao saber matemático quando assunto é o ensino.

01.1.2 – Favorecendo uma atitude investigativa em matemática

Como foi visto anteriormente, os procedimentos de validação do saber matemático estão diretamente relacionados à investigação matemática propriamente dita. Segundo Ponte (2003: p. 13) pode ser dito que:

[17] O teorema das quatro cores serve para demonstrar que qualquer mapa sobre uma superfície plana ou esférica pode ser colorido sem que se use mais de quatro cores, de modo, que não haja duas regiões do mapa com fronteira comum e a mesma cor.

> Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades [...].
>
> PONTE (2003: p. 13)

Nos últimos anos, nos meios educacionais, matemáticos, professores de matemática, pedagogos, psicólogos, entre outros profissionais, procuram compreender como os procedimentos relacionados à investigação em matemática podem contribuir com seu ensino.

Segundo Ponte (2003: p. 22-23), um dos aspectos importantes, consiste em distinguir a diferença entre exercícios, problemas e a investigação propriamente dita. Ponte (2003: p.22) considera que Polya foi o formulador das distinções básicas entre problemas e exercícios.

> Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita sua resolução imediata, enquanto um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. É claro que pode haver exercícios mais difíceis, requerendo a aplicação mais ou menos engenhosa de vários métodos e também existem problemas mais simples ao lado de outros mais complicados. Em vez de uma dicotomia, temos um <u>continuum</u> entre exercício e problema, e o seu interesse educativo depende de muitos fatores para além do seu grau de dificuldade.
>
> PONTE (2003: p. 23)

Considerando ainda as concepções de Ponte (2003: p.22), existe um aspecto comum que caracterizam os exercícios e os problemas, a presença de um enunciado que indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não haveria margem para ambigüidades o professor conhece a solução por antecipação, logo, o professor teria como analisar o que está correto e o que está errado.

Quanto à investigação matemática, esta se caracteriza por situações abertas em que não há um enunciado claro em princípio, deste modo, caberia a quem investiga definir a questão em pauta. Além disto, em situações como estas o professor nem sempre possui condições de saber se as formulações dos estudantes estão corretas ou não, fato este que exigiria a mudança de postura do professor junto aos alunos. Mas não se deve esquecer que Ponte (2003: p. 22), menciona que uma investigação pode ser desencadeada a partir da resolução de um simples exercício, ou seja, exercícios e problemas podem ser elementos geradores. Mas em quais aspectos a investigação matemática pode ser interessante à formação de docentes e discentes em sala de aula?

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação das questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor.
>
> PONTE (2003: 23)

Nas concepções de Ponte (2003), a investigação matemática é um recurso a mais na sala de aula, por promover uma atitude investigativa por parte dos alunos, bem como, por viabilizar ao aluno uma visualização do trabalho matemático, no entanto, nem sempre a investigação matemática no meio escolar é uma metáfora educativa, em certas ocasiões a situação que surge em sala de aula pode se tornar uma conjectura genuína.

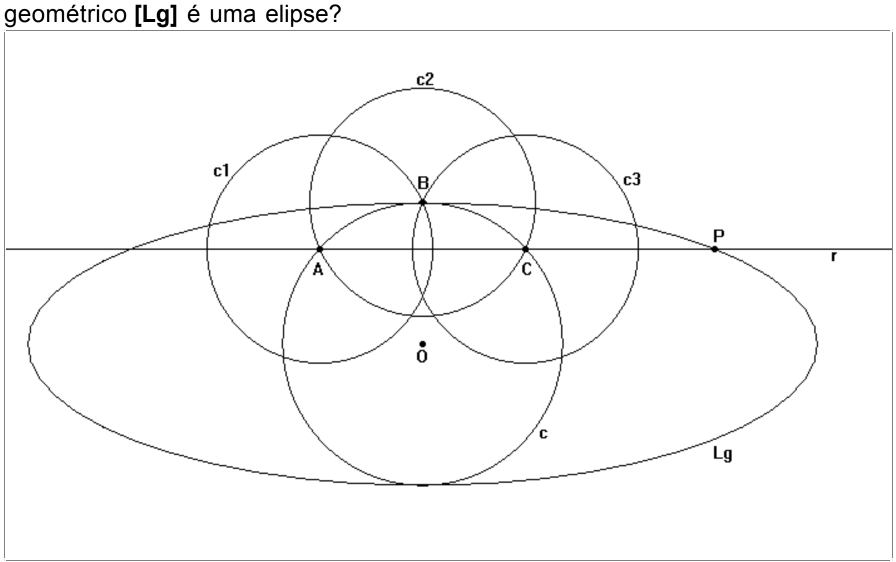
Em 1998 no Laboratório Multimeios FACED/UFC, três estudantes de Ensino Médio participantes de um curso sobre construções geométricas com duração de duas semanas, apresentaram uma situação inusitada gerada a partir do *software Cabri Géomètre II for Windows*. Um deles desenvolveu uma construção geométrica usando recursos deste *software,* e após alguma discussão chegaram ao professor (que no caso era minha pessoa) para apresentar a figura geométrica que era o lugar geométrico resultante da construção dos alunos. Em princípio o questionamento do professor consistiu em propor aos alunos descobrir se o lugar geométrico em questão era ou não uma elipse, no entanto, a construção não permitia compreender se a figura era de uma elipse ou não. Então foi recomendado pelo professor aos alunos que sistematizassem passo-a-passo o que haviam realizado a fim de se produzir o algoritmo da construção. A seqüência resultante produzida pelos alunos é apresentada na tabela 005 abaixo.

Tabela 005 – Algoritmo da construção do lugar geométrico da suposta elipse.

Passos	Ações realizadas
01	Construir uma circunferência **[c]** com centro no ponto **[O]**;
02	Marcar um ponto **[A]** sobre a circunferência **[c]**;
	Marcar um ponto **[B]** sobre a circunferência **[c]**, não coincidente com **[A]**;
03	Construir uma circunferência **[c1]** com centro em **[A]** e raio **[AB]**;
05	Construir uma circunferência **[c2]** com centro em **[B]** e raio **[BA]**;
06	Marcar **[C]** como ponto de intersecção entre **[c]** e **[c2]** que não coincida com **[B]**;
07	Construir uma circunferência **[c3]** com centro em **[C]** e raio **[CB]**;
08	Traçar uma reta **[r]** pelos pontos **[A]** e **[C]**;
09	Marcar **[P]** um ponto da reta **[r]** não coincidente com **[A]** e **[C]**;
10	Usando o comando "Lugar Geométrico" do *Cabri Géomètre II*, construir o lugar geométrico **[Lg]** do ponto **[P]** quando o ponto **[A]** é deslocado sobre a circunferência **[c]**.

Com os procedimentos descritos pelos alunos, foi possível obter o algoritmo da tabela 005, e por esta seqüência de comandos é construtível o lugar geométrico **[Lg]** apresentado na figura 013 abaixo. Mas obter a construção não é suficiente para ser dito se **[Lg]** corresponde ou não a uma elipse, e nem mesmo as evidências visuais obtidas por meio de computador devem ser consideradas como prova definitiva, se exigia tanto dos alunos como do professor um processo investigativo que poderia permitir confirmar ou não o questionamento que se apresentou inicialmente. Havia a noção do que se pretendia investigar, mas não havia claro o que se poderia ser feito para averiguar se **[Lg]** era ou não uma elipse.

Figura 013 – Lugar geométrico **[Lg]** resultante da construção geométrica apresentada na tabela 005: O Lugar geométrico **[Lg]** é uma elipse?



O processo de reconhecimento de um problema e sistematização da construção levou cerca de dois dias para ser concluído pelos estudantes com o auxílio do professor.

Após realizar a sistematização da construção, sob orientação do professor, e com auxílio de livros sobre geometria euclidiana, geometria analítica e construções geométricas, os alunos foram instigados à averiguar as propriedades da construção em voga, e durante uma semana, aproximadamente, os alunos realizaram a análise sobre características e propriedades de **[Lg]** e sua construção. O que foi obtido foi uma descrição das características e propriedades presentes na construção realizada. O que os alunos observaram, em princípio, permitiu apresentar as informações seguintes:

a) As circunferências **[c1]**, **[c2]** e **[c3]** são congruentes;
b) Os raios **[AB]**, **[BC]** e **[CB]** são congruentes;
c) Os pontos **[A]** e **[B]** possuem grau de liberdade 2, sendo possível mover **[A]** e **[B]** sobre **[c]**, além disto, o ponto **[C]** possui grau de liberdade 0. Ou seja, [C] só se move, se e somente se, **[A]** ou **[B]** são movimentados;
d) O ponto **[P]** deforma **[Lg]** quando manipulado sobre a reta **[r]**;
e) Ao mover o ponto **[A]** temos o movimento do ponto **[P]** (conseqüentemente mover **[A]** implica mover **[P]** que traça o lugar geométrico **[Lg]**);
f) Ao mover o ponto **[B]** ocorre a rotação de **[Lg]** ao redor de **[c]**;
g) O lugar geométrico **[Lg]** inscreve a circunferência **[c]** quando o ponto **[C]** está entre **[A]** e **[P]**, ou quando **[A]** está entre **[C]** e **[A]**;
h) O lugar geométrico **[Lg]** corresponde a **[c]** quando **[P]** e **[C]** coincidem;
i) **[Lg]** é simétrico nos eixos maior e menor, em relação ao ponto **[O]**, independente da posição de **[P]**;
j) O ponto **[O]** é centro de **[c]** e de **[Lg]**.

Mesmo após a investigação das propriedades de **[Lg]** e sua construção, as informações obtidas eram insuficiente para compreensão do que se pretendia averiguar, no entanto, para os alunos e o professor este foi o ponto de partida para a compreensão do processo.

Ocorreu que havia necessidade de subsídios teóricos por parte dos alunos envolvidos para continuar o processo de investigação, e é a partir deste momento que houve aprofundamento sobre a investigação dos conteúdos necessários a resolução do problema, que foi chamado por investigação dos campos conceituais.

Os campos conceituais são os pré-requisitos necessários à resolução de um problema e a confecção uma atividade matemática, sendo assim, as pessoas envolvidas no processo de resolução pesquisaram dados bibliográficos sobre secções cônicas para obter preparo matemático para o desafio que estava sendo posto. Neste contexto, ao implementar o algoritmo apresentado pela tabela 005 no *software Cabri Géomètre* II, o problema que se colocou diante de todos que estavam envolvidos na resolução do problema, permitiu enunciar uma conjectura que foi escrita como:

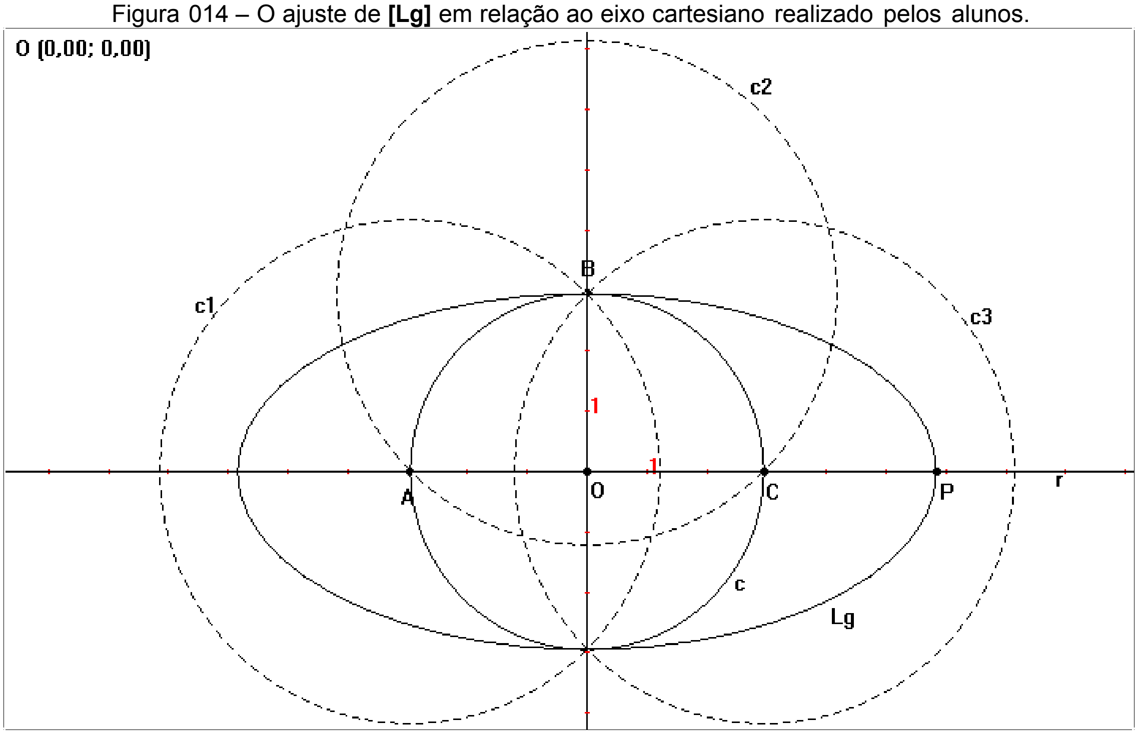
> **Conjectura** – Se o ponto **[A]** é movido sobre **[c]**, então **[P]** forma um lugar geométrico **[Lg]** que é uma elipse.

Munidos desta conjectura, do ferramental matemático adequado, era preciso definir uma estratégia que favoreça uma transposição adequada ao processo de resolução.

Após uma semana e meia de aprofundamento, e tentativas frustradas a partir dos alunos, a resolução se iniciou a partir do momento em que os envolvidos apresentaram avançaram na discussão sobre secções cônicas com base nas idéias da geometria analítica.

Com base nos pressupostos adquiridos foi proposto por um dos alunos fazer a construção usando o gráfico cartesiano para que fosse possível encontrar os focos da suposta elipse, de tal modo, que pelo ponto **[B]** fossem feitos os ajustes de posicionamento via rotação de **[Lg]**, e pelo ponto **[A]** a reta **[r]** e o ponto **[P]** fossem posicionados sobre o eixo das abscissas, em que o segmento **[OB]** seria coincidente com o eixo das ordenadas. Neste procedimento, os eixos poderiam corresponder ao diâmetro maior e menor da suposta elipse, de tal modo, que o eixo maior seria um segmento pertencente ao eixo das abscissas, enquanto que, o eixo menor seria um segmento pertencente ao eixo das ordenadas, além disto, o ponto **[O]** estaria na origem do gráfico conforme se pode averiguar na figura 014 apresentada abaixo.

Figura 014 – O ajuste de **[Lg]** em relação ao eixo cartesiano realizado pelos alunos.



A questão agora consistia em encontrar os focos da suposta elipse, pois caso houvesse focos seria possível ter indícios de que a figura era uma elipse, pois, para os estudantes (havia a suposição de que) **[Lg]** era uma elipse.

O processo para explorar a existência dos focos demorou cerca de dois dias, mas após este tempo foi descoberta, em pesquisa bibliográfica dos alunos, uma relação entre os focos e a diagonal maior, que permitiu implementar uma solução no computador através de uma equação que permitia conhecer os focos através dos dados já conhecidos.

Sabendo que à distância de **[OP]** (cujo comprimento é metade do eixo maior de **[Lg]**), equivale à distância **[B]** até os focos de uma elipse regular. Foi possível obter pelo Teorema de Pitágoras que:

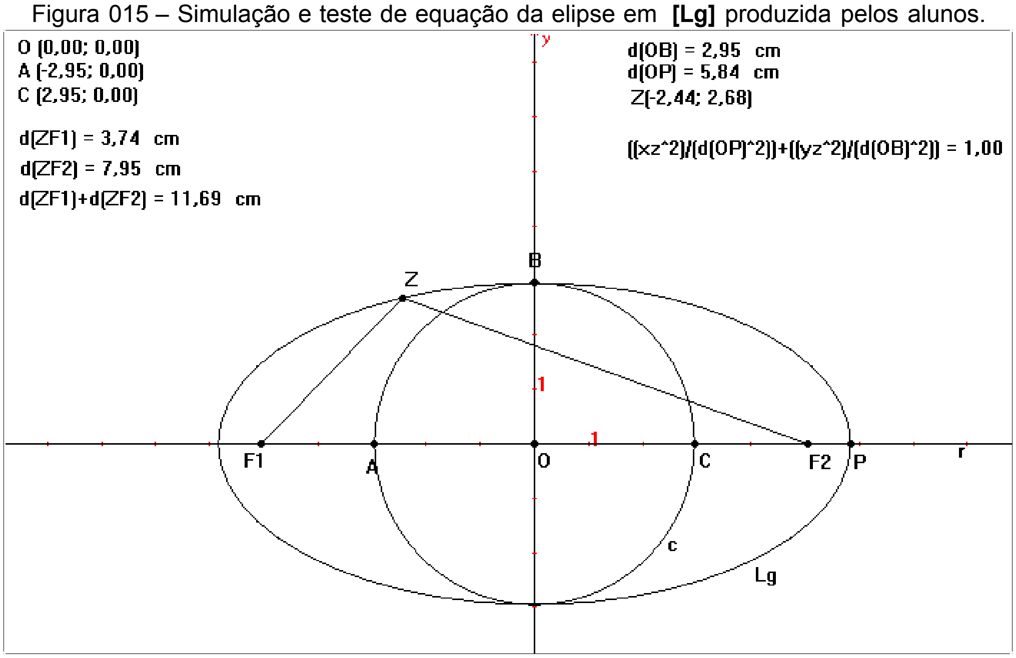
$$\mathbf{d(OF) = [\ d(BF_1)^2 - d(OB)^2\ ]^{(1/2)}}$$

Sendo $\mathbf{d(OF_1)}$ a distância de um dos focos até a origem da circunferência **[c],** encontrando $\mathbf{d(OF_1)}$ encontrar $\mathbf{d(OF_2)}$ é simples, pois por uma circunferência com centro em **[O]** e medida de raio $\mathbf{[OF_1]}$ é possível encontrar $\mathbf{[F_2]}$. deste modo, foi possível achar os focos $\mathbf{[F_1]}$ e $\mathbf{[F_2]}$, para aplicar a equação da elipse à **[Lg]** para averiguar a veracidade da conjectura em questão.

Após solucionar o problema sobre o "como fazer" foi preciso implementar no computador, e colocando um ponto **[Z]** sobre **[Lg]**, e observando se a soma das distâncias dos segmentos $\mathbf{[ZF_1]}$ e $\mathbf{[ZF_2]}$ permaneciam constantes na equação $\mathbf{d(ZF_1) + d(ZF_2)}$ para todos os pontos de **[Lg]**.

Através da animação obtida por meio de $\mathbf{d(ZF_1) + d(ZF_2) = c}$, pode ser observado a constância de **c**, mas ainda era necessário testar a equação da elipse que diz que **[(x^2)/(a^2)) + ((y^2)/(b^2)] = 1**, em que **x** e **y** são coordenadas do ponto **Z(x,y)** tendo que **a = d(OP)** e **b = d(OB)**.

Figura 015 – Simulação e teste de equação da elipse em **[Lg]** produzida pelos alunos.



Ao efetuar os testes da equação da elipse, os alunos averiguaram que os resultados apresentados correspondiam à teoria, e os alunos imaginaram que a questão havia sido respondida, estavam dando por encerrado os questionamentos, no entanto, ao manipular o ponto **[Z]** sobre o **[Lg]**, ocorria que quando **[Z]** se aproximava das extremidades dos diâmetros da suposta elipse, foi observado que os segmentos **[ZF_1]** e **[ZF_2]** desapareciam rapidamente.

Este "*bug*" que ocorria no computador desafiava os alunos e o professor fez questão em propor aos alunos investigar a ocorrência. Após alguns dias, os alunos e o professor após uma discussão sobre o assunto, propuseram analisar a questão em voga considerando a soma de vetores e com isto chegaram a outro modelo que exigiu fundamentação teórica sobre o assunto vetores.

Após uma semana, foi possível analisar a construção de outra perspectiva. Pela soma de vetores foi possível observar que adição dos vetores **v(AB)** e **v(BC)** resulta em:

v(AB) + v(BC) = v(AC)

De modo que foi possível relacionar **v(AC)** com **d(AC)**, sobrepondo o vetor **v(AC)** sobre o segmento **[AC]** que é um subconjunto da reta **[r]** na construção.

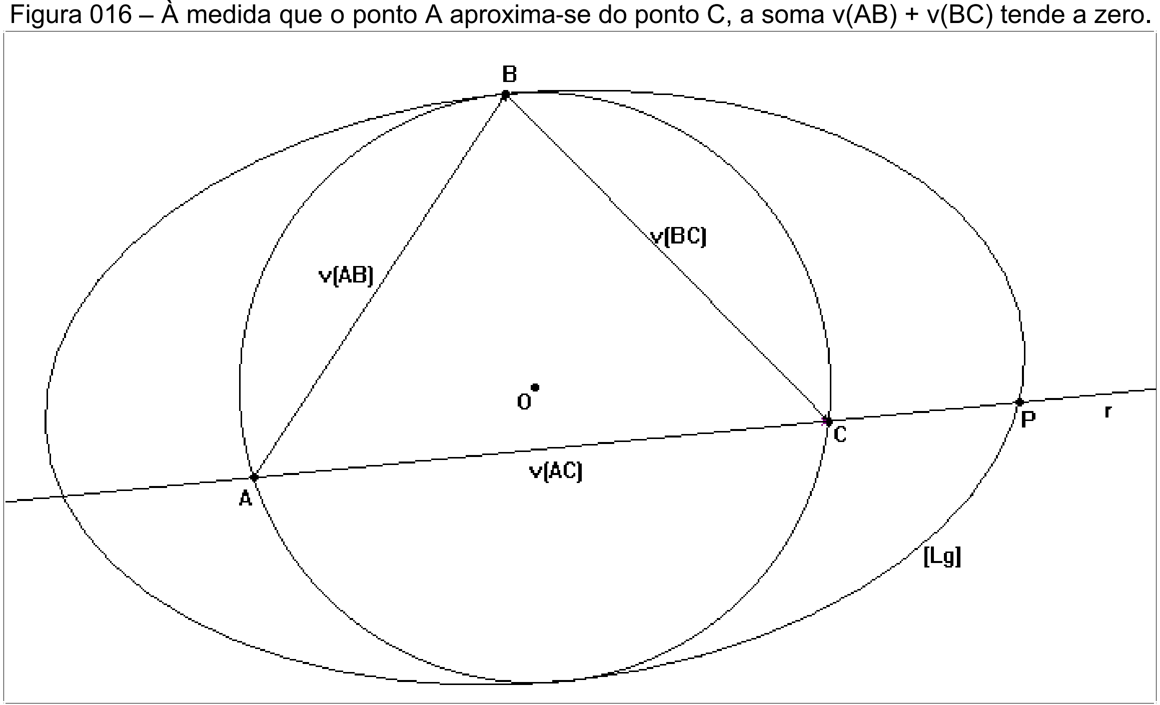
Também foi testado no *Cabri Géomètre*, se era possível por meio dos comandos "Vetor" e "Soma de vetores", construir **[Lg]**, e se pode observar que eram procedimentos correlatos. No entanto, se observou que quando o ponto **[A]** é movimentado, ocorrem duas situações:

a) Se os pontos **[A]**, **[B]** e **[C]** coincidem quando **[A]** é movimentado, o vetor **(AB)** e **v(BC)** são nulos, logo, a reta **[r]** não existe nestes pontos e **[Lg]**, nesta situação, não é continuo;

b) Quando os vetores **v(AB)** e **v(BC)** correspondem as diagonais, faz com que a soma de vetores se anulem, sendo assim, a reta **[r]** desaparece neste caso, e **[Lg]** não é continuo neste caso também.

Portanto, a conclusão que se chegou é que a conjectura proposta era falsa, pois a continuidade de uma elipse é um dos fatores que a caracterizam a mesma. Diante de tal fator, os alunos haviam se entristecido, pois eles queriam que **[Lg]** fosse uma elipse, no entanto, coube ao professor mostrar para eles o ganho que tiveram em se aventurar como matemáticos diante dos desafios que a situação lhes apresentava.

Figura 016 – À medida que o ponto A aproxima-se do ponto C, a soma v(AB) + v(BC) tende a zero.



Algumas conclusões interessantes que a situação apresentada mostrou, é que mesmo ao usar os vetores do *Cabri Géomètre* II, **[Lg]** não desaparece mesmo que os pontos **[A]**, **[B]** e **[C]** coincidam e mesmo que os vetores se anulem, ou seja, com base nestas informações, se pode dizer que o *bug* computacional falseou a visualização dos resultados, e somente pela apresentação de exemplos e contra-exemplos no processo de validação por demonstração foi possível averiguar que a conjectura proposta era uma proposição falsa.

Além da matemática produzida pelos alunos, estes puderam compreender o significado do saber matemático, pois haviam construído matemática. Neste sentido, ao favorecer investigações por parte dos alunos, não se está somente apresentando uma "metáfora educacional", mas sim, surge a possibilidade de se vivenciar uma experiência matemática que seja significativa.

Na situação acima, tive oportunidade em ser o professor destes três alunos, e o que mais me chamou atenção foi à mudança de postura que estava ocorrendo quando adotava a investigação matemática enquanto método de ensino.

Deveria deixar a postura de um "professor que sabe", para me colocar frente os alunos como um orientador mais experiente que não possui todas as respostas, mas que pode indicar alguns rumos e novos caminhos. Neste aspecto, favorecer investigações matemáticas modifica não somente a postura dos alunos, mas também do professor de matemática que precisa compreender o papel da pesquisa pela prática.

Ponte (2003: p. 25) considera que todos os alunos de matemática em quaisquer níveis deveriam experimentar este tipo de atividade no ambiente escolar, no entanto, realizar este tipo de atividade, em relação ao ensino que é realizado no Brasil exige uma grande mudança de postura do professor.

> Pode sempre programar-se o modo como começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação.
>
> PONTE (2003: p. 25)

Segundo Ponte (2003: 21), existem quatro momentos na realização de uma investigação matemática. Basicamente são estes momentos:

i) Exploração e formulação de questões: É o momento em que se reconhece uma situação problema e são realizadas as experimentações iniciais para investigação matemática;

ii) Conjecturas: É a organização dos dados após os testes iniciais que visam a formulação de conjecturas para investigação;

iii) Testes e reformulação: Trata-se da realização de testes e a reformulação de conjecturas;

iv) Justificação e avaliação: Trata-se da justificação de uma conjectura, bem como, da avaliação do raciocínio bem como de seus resultados.

A seqüência que Ponte (2003) apresenta acima, relativos à investigação matemática é correlatos à Seqüência Fedathi que nesta pesquisa foi adotado como metodologia para favorecer o processo investigativo, no entanto, vale discutir posteriormente os aspectos similares e distintos destas idéias em relação a Seqüência Fedathi.

Ponte (2003: p. 25-53), menciona que a aula de investigação possui três fases distintas:

a) Introdução da tarefa: Momento em que o professor faz a proposta a turma oralmente ou por escrito;

b) Realização da investigação: Momento de pesquisa dos alunos seja individualmente, ou aos pares, ou em pequenos grupos, ou ainda, com toda a turma;

c) Discussão dos resultados: Momento em que os alunos socializam o trabalho realizado.

Ambas seqüências que Ponte (2003) apresenta, são similares as idéias que temos desenvolvido no Laboratório Multimeios FACED/UFC sobre a Seqüência Fedathi, no entanto, a aplicação das investigações matemáticas que está sendo realizado no Laboratório Multimeios enfatiza situações de ensino-aprendizagem em investigações matemáticas com uso de tecnologias computacionais. Portanto, tendo compreensão do que seja uma investigação matemática, bem como, do seu potencial educativo procurarei discutir a seguir o computador enquanto ferramenta de ensino na perspectiva da ação reflexiva.

01.1.3 – A ação reflexiva e o uso do computador no ensino de Matemática

O uso de computadores no ensino de matemática é uma proposta que está em andamento, no entanto, as abordagens que estão sendo adotadas junto aos estudantes, na maioria das vezes, visam ao desenvolvimento de habilidades na resolução de exercícios e problemas semelhantes aos que ocorrem em sala-de-aula. Nada contra o uso racional deste tipo de abordagem, pois a resolução de problemas e o uso de exercícios são algo que faz parte do contexto matemático. Porém, a prática na resolução de exercícios e problemas com o uso do computador está se resumindo a passagem do Velho PC ao Novo PC, ou seja, são tomados problemas que poderiam ser resolvidos em sala-de-aula, para que os mesmos sejam implementados no computador, e após a execução e o funcionamento correto do algoritmo no computador tudo termina. O professor acredita que houve a aprendizagem do estudante, e este supõe que houve ensino, afinal o algoritmo funcionou no computador, não há discussões e reflexões sobre o assunto. No entanto, surge aqui uma questão: Como o computador pode ser utilizado de modo que leve o aluno à uma experiência matemática que lhe seja significativa para sua vida?

Na passagem do Novo PC ao Velho PC, se propõe à exploração das possibilidades de simulação e manipulação das ferramentas computacionais, para o estabelecimento de novos problemas matemáticos que exigirão os procedimentos de validação matemática, seja por verificação ou demonstração. A idéia é fazer uso do computador para obtenção de conjecturas genuínas, ou ainda, para obter um "novo olhar" sobre problemas antigos. Neste aspecto, um dos objetivos do uso do computador no ensino de matemática, consiste em proporcionar ao estudante uma experiência matemática prática e significativa que lhe permita compreender o processo de produção do saber matemático, a partir de enunciados novos que surgem da manipulação e simulação das ferramentas computacionais. Neste sentido, o computador apresenta novas possibilidades tanto na atividade matemática, tanto na pesquisa como no ensino.

> O suporte dos ambientes informatizados a pesquisa em matemática favorece a exploração, a elaboração de conjecturas e o refinamento destas, e a gradativa construção de uma teoria matemática. Por exemplo: a teoria do caos nasceu do estudo de equações diferenciais por Lorentz; ao implementar sistemas que diferenciavam minimamente das condições iniciais, Lorentz constatou que a evolução do sistema tornava-se imprevisível, surgindo daí resultados teóricos sobre a instabilidade dos sistemas dinâmicos. Um segundo exemplo: a representação gráfica de maciças computações tornou possível a teoria dos fractais, em que figuras surpreendentes provocaram conjecturas que desencadearam a busca de demonstrações.
>
> GRAVINA (2001: p. 36)

Portanto, ao propor o uso do computador na escola, para que o estudante possa viver uma experiência matemática significativa, por meio da pesquisa matemática, não se pode desconsiderar que deve ocorrer uma ruptura violenta com respeito à conotação da palavra problema para professores e alunos de matemática. Pois um problema deixa de ser uma tarefa, no sentido escolar usual, para se tornar uma ação de pesquisa e investigação que envolve os procedimentos de validação matemática, de modo que os professores e os alunos possam discernir e compreender a lógica do descobrimento matemático.

Em termos educacionais, a proposta sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC corresponde ao desenvolvimento de uma prática de pesquisa em que deve ocorrer uma ação reflexiva sobre a própria ação por parte do aluno mediante intervenções feitas pelo professor enquanto orientador. Neste sentido, ao propor uma experiência matemática significativa ao estudante, o que está sendo desenvolvido é a compreensão do trabalho que um matemático executa quando produz o seu saber, e neste aspecto o que se obtém é uma noção do trabalho profissional que o pesquisador-matemático realiza no seu cotidiano. Porém, não se deve interpretar de modo algum que tal proposta deva ser usada em todas as aulas de um curso de matemática, há restrições e cuidados que devem ser considerados, além disto, cada individuo possui uma determinada vocação. Neste caso, o que está sendo proposto, é que o aluno possa conhecer a natureza do trabalho matemático enquanto realiza uma ação de pesquisa coordenada pelo professor que pretende atingir alguns objetivos educacionais, e a reflexão-na-ação dos estudantes é um dos objetivos que devem ser motivadas pela prática docente.

Segundo SCHÖN (2000), muitas das ações inteligentes que são realizadas pelo ser humano, são aprendidas de forma tácita e espontânea por meio de construções práticas que em muitos casos não se sabe expressar como foram adquiridas. Este fenômeno é apresentado como conhecer-na-ação.

> Usarei a expressão conhecer-na-ação para referir-me aos tipos de conhecimento que revelamos em nossas ações inteligentes – performances físicas, publicamente observáveis, como andar de bicicleta, ou operações privadas, como a análise instantânea de uma folha de balanço. Nos dois casos o ato de conhecer está na ação. Nós o revelamos pela nossa execução capacitada e espontânea da performance, e é uma característica nossa sermos incapazes de torná-la verbalmente explícita.
>
> SCHÖN (2000: p. 31)

Na produção do saber matemático, o fenômeno do conhecer-na-ação ocorre muitas vezes, pois no diálogo e na elaboração de conjecturas, concepções e idéias já se está produzindo matemática, ainda que seja informalmente.

Ao se trabalhar com o processo de validação matemática, o fenômeno de conhecer-na-ação se revela por abordagens dedutivas ou heurísticas para certas atividades matemáticas. Entretanto, os caminhos que as pessoas desenvolvem devem ser consideradas como parte das características de cada um, sejam docentes ou discentes, pois cada qual deve encontrar a abordagem que melhor lhe permita produzir concepções e análises matemáticas, no entanto, cabe ao professor, enquanto orientador, mostrar que para o caminho que um estudante escolheu existem outros que podem ser complementados na busca de soluções confiáveis.

Segundo Poincaré (1995, p. 13), existem dois tipos de matemáticos, aqueles que são mais dedicados ao conhecimento lógico, e há aqueles que são voltados à intuição que são denominados como geômetras.

Para Poincaré (1995: p.13), os primeiros vão trabalhando e produzindo cuidadosamente, no entanto, encontram bons resultados demoradamente. Quanto os últimos na primeira investida conseguem ótimos resultados, mas são menos cautelosos que os primeiros.

Nas concepções de Poincaré (1995: p.13), não foi a educação que lhes imprimiu tais habilidades, assim como, o fato de alguém ser ou não um matemático dependeria de uma pessoa nascer com este talento.

Poincaré (1995: p. 13) chega a dizer que “o indivíduo nasce matemático, não se torna matemático”.

Controvérsias à parte, o que Poincaré (1995) expõe é algo que merece ser investigado, mas é provável que na matemática o conhecer-na-ação se revele pelas habilidades dedutivas e/ou heurísticas que os indivíduos expõem ao tentar compreender o significado de enunciados matemáticos no processo de validação. Entretanto, independente de tal hipótese, cabe ao professor propor aos seus alunos sempre uma nova forma de observar um determinado assunto mediante contra-exemplos locais ou globais variando o seu modo de olhar uma determinada situação problema. Neste aspecto, surgem os primeiros indícios da reflexão-na-ação como um dos elementos para formação do professor para sua prática de ensino.

Schön (2000: p. 32-33) considera que quando alguém está aprendendo algo, e está apto na realização de seqüências fáceis de uma atividade, que envolvem habilidades como reconhecimento, ajuste e decisão sem se ter que pensar no que está sendo desenvolvido, o ato de conhecer-na-ação permite que uma pessoa dê conta de uma tarefa que lhe foi designado.

No entanto, em certos momentos, ocorrem resultados inesperados em rotinas que eram tidas como simples, e nestas situações um indivíduo está diante de um elemento surpresa, algo que não estava em suas expectativas.

Diante de tal situação há duas possibilidades:

a) O sujeito pode refletir sobre a ação desenvolvida de forma retrospectiva, tentando descobrir como o ato de conhecer-na-ação contribuiu para apresentação de um resultado inesperado após terminar a ação;

b) b) Ou se pode "parar e pensar" antes do término desta ação.

Segundo Schön (2000: p.32-33), tanto na situação (a) como em (b), a reflexão feita não possui relação com o presente, mas sim, com o passado. No entanto, ao refletir durante a ação, é possível interferir no processo que está sendo desenvolvido, de modo que o pensar do sujeito serve para dar nova forma ao que está sendo feito enquanto se está fazendo.

Um caso como este para SCHÖN é o que ele chama por reflexão-na-ação e pode ser descrito por uma seqüência de passos que pode ser relacionado à passagem do Novo PC ao Velho PC.

Tabela 006 (a) – A passagem do Novo PC ao Velho PC como reflexão-na-ação em aula.

Passo	Descrição com base em Schön da Reflexão-na-ação	Passagem do Novo PC ao Velho PC
01	Existe uma situação de ação para a qual são trazidas respostas espontâneas e de rotina, de modo que seja revelado o processo de conhecer-na-ação por meio de estratégias e compreensão de fenômenos.	Ocorre uma situação de exploração e manipulação com uso do computador contextualizado pelo professor através de uma atividade programada. São realizadas atividades rotineiras que visam permitir aos estudantes formular proposições com respeito ao saber matemático em questão.
02	As respostas de rotina apresentam uma situação surpresa que é um resultado não esperado, independente de ser ou não agradável, mas que não se encaixa na categorização do conhecer-na-ação.	Surge uma situação inesperada na manipulação e/ou simulação computacional que não se encaixa nas respostas esperadas pelos alunos e pelo professor. O problema presente é apresentado para todo o grupo.
03	A surpresa leva à reflexão dentro do problema presente, e é algo consciente mesmo que não tenha sido expresso em palavras. Leva-se em consideração a situação surpresa e o conhecer-na-ação. O pensamento se volta ao fenômeno e a si próprio.	O professor, na qualidade de orientador, apresenta aos seus alunos o problema e propõe a discussão entre os estudantes para que os mesmos pensem sobre a questão. É proposta pelo professor a sistematização deste problema por meio de uma conjectura, e o primeiro passo é uma descrição de cada procedimento para compreender o fenômeno e o pensamento em voga.
04	Como a reflexão-na-ação possui uma função crítica, questionando os princípios do ato de conhecer-na-ação, se busca pensar criticamente sobre o pensamento (meta-pensamento) que levou a essa situação inesperada, e se procura reestruturar as estratégias de ação para compreender os fenômenos e as formas de conceber o problema.	Mediante a descrição dos procedimentos, é possível desenvolver uma análise sobre as propriedades matemáticas envolvidas em cada ação, e neste contexto são desenvolvidas abordagens matemáticas dedutivas e heurísticas através do processo de validação por demonstração. O ato de demonstrar apresenta novos problemas. Neste processo é desenvolvido o trabalho dos alunos sem intervenção do professor. É importante ter material de investigação, ter a presença do papel e caneta é uma forma de conceber o problema.
05	A reflexão-na-ação gera o experimento imediato. São experimentadas novas ações para explorar a situação surpresa. O problema pode ser solucionado ou uma surpresa maior pode ocorrer.	O teste dos argumentos dos alunos e do professor ocorre mediante apresentação dos mesmos diante do grupo. Ao professor cabe incentivar a apresentação de contra-exemplos, a conjectura pode ser solucionada mediante prova ou se pode reformular a prova apresentada.

Em termos gerais, a passagem do Novo PC ao Velho PC é uma proposta que corresponde à concepção de formação com base nas ações-reflexivas propostas por Schön (2000), pois ao pretender uma formação matemática que valoriza os aspectos científicos do saber matemático, o que se está propondo, é ao menos mostrar o que é o trabalho matemático em termos práticos.

Por outro lado, ocorre uma mudança significativa na postura do professor e dos alunos frente à concepção de ensino prático-reflexivo com respeito à passagem do Novo PC ao Velho PC. Pois tal proposta, enquanto uma didática para uma turma de alunos toma como base o problema proposto para uma coletividade e não somente uma situação que ocorre com um indivíduo.

No entanto, não é possível desconsiderar que os elementos mínimos para ocorrer a passagem do Novo PC ao Velho PC, enquanto concepção educacional, necessitam de uma situação surpresa, um professor, um computador e um aluno.

Quanto o papel do professor, a passagem do Novo PC ao Velho PC, no contexto de aula, representa uma série de mudanças na postura do professor, quando este usa tecnologias computacionais com seus alunos. Inicialmente um dos problemas existentes está relacionado com o ambiente LIE ou LEI[18].

No ensino tradicional, a sala-de-aula da escola, favorece que o professor seja considerado o centro de todas as atenções no processo ensino-aprendizagem. No LIE as coisas mudam um pouco, pois o computador concorre com o professor em termos de atenção com respeito ao estudante, e este é o primeiro impacto nas concepções usuais. Por outro lado, segundo Schön (2000: p. 37), se deve levar em conta que a sala-de-aula da escola não é o ambiente de trabalho do matemático profissional.

> O processo de conhecer-na-ação de um profissional tem suas raízes no contexto social e institucionalmente estruturado do qual compartilha uma comunidade de profissionais. Conhecer-na-prática é exercitado nos ambientes institucionais particulares da profissão, organizados em termos de suas unidades de atividade características e seus tipos familiares de situações práticas e limitado ou facilitado por seu corpo comum de conhecimento profissional e seu sistema apreciativo.

[18] No Município de Fortaleza, LIE é Laboratório de Informática Educativa. No Estado do Ceará, LEI é Laboratório de Informática Escolar.

Na realidade, a passagem do Novo PC ao Velho PC, consiste em permitir que o estudante tenha uma experiência matemática significativa na escola, e tal experiência está relacionada à prática reflexiva. No entanto, o contexto de formação do matemático profissional no Brasil é o meio universitário, nos departamentos de matemática pura ou aplicada, e nestes locais existem pessoas com quem é possível compartilhar e trocar opiniões, bem como, ouvir as novidades sobre a comunidade matemática. No entanto, mesmo que o contexto do profissional matemático seja distinto do ambiente escolar dos Ensinos Fundamental e Médio, no Brasil, boa parte da matemática desenvolvida profissionalmente, ocorre em gabinetes, salas-de-aula e corredores dos departamentos de matemática. Ou seja, ainda que o contexto social de um matemático profissional se diferencie do ambiente escolar tradicional, há similaridades que viabilizam a aprendizagem facilitando a passagem do Novo PC ao Velho PC.

No entanto, para compensar as dificuldades existentes em relação à distinção entre ambientes escolar e o profissional matemático, é necessário ao professor estabelecer vínculos de comunicação com a comunidade matemática, e o computador e a *Internet*, atualmente, podem contribuir neste sentido. No entanto, cabe a comunidade acadêmica matemática e aos sistemas educacionais o desenvolvimento de programas e projetos para formação continuada de professores de matemática, de modo que os docentes da universidade possam formar uma rede que relacione universidade e escola no ensino de matemática da Educação Básica no Brasil. Afinal, sem tais contatos a formação do professor de matemática não se renova, e por outro lado, ao formar o professor da escola é possível contribuir com a melhoria na qualidade da formação dos futuros estudantes universitários.

Outra dificuldade diz respeito ao conhecimento que o professor pode possuir mediante as ferramentas computacionais. É necessário ao professor que pretende trabalhar a passagem do Novo PC ao Velho PC ter convívio com tecnologias computacionais, de modo que o mesmo saiba como solucionar e resolver problemas simples que ocorrem no LIE. Neste sentido, cabe ao professor explorar novos programas apropriados ao ensino de matemática, procurando compreender os limites e possibilidades que a tecnologia apresenta no cotidiano do trabalho escolar com respeito ao saber matemático, no entanto, é preciso que este professor tenha acesso aos recursos *software*, bem como, a formação para o seu uso, pois se torna, ao professor, necessário entender aspectos relativos a teoria computacional e sua relação com o conhecimento matemático, bem como, trabalhar a manipulação de *softwares* educativos matemáticos, implementando conteúdos, bem como, explorando por meio de manipulações e simulações o que pode ocorrer com o que está sendo desenvolvido.

As explorações dos recursos computacionais devem estar associadas às necessidades de convívio com a comunidade matemática, relacionando a nova formação do professor e à compreensão do ambiente escolar novo que é conhecido como LIE. Por outro lado, é preciso considerar que na atualidade, com recursos como *Data Show* e *Notebooks*, é possível levar o computador a sala-de-aula, tornando-a um Laboratório de Informática Educativa. Considerando tal tendência, hipoteticamente, se podem conceber em um futuro próximo, salas-de-aula que tenham incorporado recursos computacionais que excluam a necessidade de LIE ou LEI, e deste como a formação de professores para uso destes recursos, deve ser uma preocupação para os cursos de licenciatura em matemática, para os estados e os municípios.

No entanto, há outros aspectos da mudança de postura do professor que devem ser considerados em termos da sua individualidade.

Enquanto realidade da sala-de-aula tradicional, o professor exerce como função à transmissão do saber associado à gestão do ambiente em questão, no LIE, ou em ambientes informatizados, ao se propor a passagem do Novo PC ao Velho PC, cabe ao professor propor questionamentos assumindo como postura o papel da orientação ao invés da transmissão de saber, o estudante deve ser motivado para o diálogo com os colegas e os professores, pois somente assim, poderá compreender e entender os fenômenos matemáticos que surgem na atividade investigativa. Deste modo, o professor deve assumir a posição de um pesquisador mais experiente mediante seus alunos, e não mais a função do sábio que entrega o “ouro dos deuses”.

Neste sentido, a função docente passa ser mais humana, o professor deixa de ser “resolvedor de problemas matemáticos” para os estudantes a função docente é mais que “passar um bizu”, mas sim, consiste em mostrar posturas que um profissional matemático deve exercer ao se aprofundar na pesquisa matemática. Mas quais ações, efetivamente, durante investigações matemáticas com uso do computador devem ser favorecidas pelo professor?

O professor na passagem do Novo PC ao Velho PC precisa apresentar idéias e concepções novas para que o estudante possa atacar de maneiras diferentes o problema existente. Ao professor também cabe motivar e ouvir seus alunos, lhes permitindo errar, mostrando para todos os alunos que na produção do saber matemático é comum a ocorrência de erros e dificuldades quando se tenta desenvolver uma investigação que permite compreender os enunciados e fenômenos matemáticos. Além disto, cabe ao professor saber dizer “não sei”, mostrando aos estudantes que é necessário que docentes e discentes avancem na busca de soluções para os problemas expostos.

Um outro aspecto mais profundo sobre o papel do professor na passagem do Novo PC ao Velho PC está na metareflexão e na metacognição, tais idéias permitem compreender a diferença entre os professores *experts* e os novatos. Mas como estas concepções podem afetar o trabalho docente com uso de tecnologias computacionais?

No exercício da relação que envolve ensino-aprendizagem em uma situação prática, em alguns momentos podem surgir impasses na aprendizagem do aluno com respeito à incompreensão do dialogo entre o professor, enquanto orientador, e os estudantes que exercem o papel de pesquisadores.

Segundo Schön (2000: p. 99-100) nos relatos de suas observações, as atitudes de alguns instrutores em proteger seu talento com receio que estudantes possam fazer mal uso de conhecimentos, ao se apropriar dos mesmos, faz com que estes, sob a armadura do “ensino”, retenham o que sabem, e em muitos casos de forma inconsciente. Por outro lado, para alguns alunos a especialização de um professor pode representar uma ameaça de modo que o estudante assuma uma postura defensiva também, fato que impede que o aluno possa aprender quaisquer conhecimentos novos.

Para Schön (2000: p. 100), o ponto de vista do estudante é que:

> Tais restrições parecem estar ligadas à nossa idéia de virarmos adultos, a qual concebemos em termos de independência, liberdade de escolha e completo exercício da iniciativa individual. Elas também estão ligadas a uma ideologia de educação que defende o pensar por conta própria (considera-se o epíteto pejorativo “imitador!”). Porém, restrições contra a idéia de imitação vão de encontro à prática quase universal da imitação. Estudantes pertencentes à cultura americana, especialmente aqueles que vêm de uma experiência recente de rebelião adolescente, provavelmente serão profundamente ambivalentes em relação à imitação, desprezando-a na teoria mas assumindo na prática.

Schön (2000: p. 101 – 110) ao relatar suas observações em um ateliê de *designer* em arquitetura, expõe um dialogo que mostra a relação entre um instrutor que defende uma postura específica do *designer* com uma aluna que se considera perseguida por ser incompreendida pelos seus professores.

Neste diálogo, se revela o que é chamado por Schön (2000) como um impasse na aprendizagem. Pelo diálogo entre o professor e a aluna, se percebe que a aluna pensa que o professor está repudiando o seu projeto por motivos ideológicos relativos ao seu estilo arquitetônico, no entanto, o professor está mostrando falhas técnicas existentes no projeto. De forma insistente, o professor pede à aluna que faça uma representação por meio do desenho do projeto, para que seja possível para o estudante efetuar seus experimentos mentais. No entanto, a aluna vê o desenho do seu projeto apenas como uma forma de apresentação de idéias não imaginando que pelo desenho seja possível efetuar o experimento mental que o professor deseja. Por outro lado, o professor em nenhum momento convida à aluna para que a mesma entre no universo de suas idéias. Segundo Schön (2000, p. 109), este impasse na aprendizagem está de acordo com o modelo da teoria da ação interpessoal de Chris Argyris, e é conhecido como Modelo I.

> É um modelo de controle unilateral, estratégias de mistério e maestria do tipo vitória/derrota, ocultação de sentimentos negativos e racionalidade superficial. É um modelo no qual indivíduos fazem atribuições negativas a outros, as quais eles testam apenas na privacidade de suas próprias mentes, nunca publicamente, em aberto, com outra pessoa.

Situações como estas são comuns ao exercer um trabalho didático que envolve diálogo entre alunos jovens e adolescentes e seus professores. Na passagem do Novo PC ao Velho PC, tais situações podem ser obstáculos que podem impedir a vivência de uma experiência significativa ao estudante e ao professor. No entanto, para quebra de tal impasse, de forma que seja possível construir um ambiente favorável à aprendizagem, é preciso que o professor desenvolva formas de trabalhar com o estudante. As recomendações apresentadas por Schön (2000: p. 111) como reflexão-na-ação recíproca consistem em:

- Prestar atenção à presente interação como um objeto de reflexão em si.
- Entrar em contato e descrever seu próprio processo, bastante tácito, de conhecer-na-ação.
- Refletir sobre as idéias que o outro tem do material substantivo que o instrutor quer transmitir e o estudante quer aprender.
- Testar o que se entendeu sobre o processo de conhecer-na-ação do outro e sua concepção de interação. Testar o que o outro fez de nossas tentativas de comunicação.
- Refletir sobre as teorias-em-uso interpessoais trazidas ao processo comunicativo.

Em suma as orientações de Schön (2000), propõem o que é conhecido como meta-reflexão. A metareflexão é a capacidade que o docente, deveria ter, em pensar sobre o seu próprio pensamento, bem como, em pensar sobre o pensamento do outro. E na passagem do Novo PC ao Velho PC, tais procedimentos em princípio são essenciais ao professor, para que as atividades deste com seus alunos possam ser bem sucedidas. Um dos aspectos que pode favorecer a continuidade do diálogo entre professor e aluno está nas concepções sobre contrato didático que é estabelecido inicialmente entre o professor e cada um dos alunos. Brosseau *apud* Machado *et al* (1999: p. 43-44), apresenta uma definição do que pode ser entendido como contrato didático:

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Mesmo quando o professor não propõe um contrato didático de forma explicita, estes acabam por se estabelecer nas regras de convívio entre os indivíduos. No caso da passagem do Novo PC ao Velho PC, a meta-reflexão é favorecida quando os papeis dos atores sociais do meio escolar, na sala-de-aula, são definidos de forma explícita. Tal fator pode favorecer o desenvolvimento da reflexão-na-ação enquanto ocorre o trabalho prático matemático por meio do processo de validação por demonstração. No entanto, além do impasse de aprendizagem, existem outros problemas que podem ser solucionados mediante o contrato didático e a intervenção docente para que se favoreça a reflexão-na-ação recíproca.

Balacheff (1991: p.175-192), ao escrever um artigo intitulado: *The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof*. Expõe dois casos, em que o ensino mediante os procedimentos de validação por demonstração, apresentam dificuldades para os estudantes.

Trabalhar com a demonstração matemática em aula implica na confrontação de idéias, o processo exige a negociação, pois ocorre a apresentação de provas e refutações, para alunos acostumados ao sistema escolar tradicional, isso pode ser algo frustrante. Afinal é difícil para um indivíduo aceitar a crítica de seus semelhantes, principalmente as suas idéias.

> *Assim, a fim de obter sucesso no ensino da prova matemática, o maior problema aparenta ser o como negociar a aceitação pelos estudantes de novas regras, mas não necessariamente para requerer que eles rejeitem argumentação que pode ser bem*

> *adaptada em outros contextos. A prova matemática deve ser aprendida "pela contra" argumentação, trazendo estudantes à consciência da especificidade da prova matemática e de sua eficiência para resolver o tipo do problema que temos que resolver em Matemática.*
>
> BALACHEFF (1991: p. 189)

Portanto, mediante as concepções de Balacheff (1991) e Schön (2000), é possível compreender que o papel do professor na passagem do Novo PC ao Velho PC, deve ser permitir que o estudante tenha uma experiência prática e reflexiva significativa através validação matemática por demonstrações, de modo que a meta-reflexão seja parte do processo de compreensão do conhecer-na-ação, bem como, parte do processo de negociação que permite que os universos do professor e dos alunos sejam convergentes aos objetivos do ensino de matemática. No entanto, ao se trabalhar com demonstrações matemáticas com estudantes da Educação Básica no Brasil, é preciso considerar que:

> Nem sempre as estruturas cognitivas dos alunos se apresentam prontas para a construção de saberes matemáticos conforme ilustram, especialmente, suas dificuldades frente ao aprendizado de teoremas e demonstrações, quando são solicitadas estruturas de pensamento de caráter operatório-formal. É o próprio processo de aprendizagem, desencadeado com a intenção de ensinar-se um certo saber matemático, que permite potencializar, e mesmo desenvolver os aspectos cognitivos.
>
> GRAVINA (2001: p. 42-43)

Levando em conta Gravina (2001) e Tochon (1993), um dos papeis que o professor deve assumir está associado ao trabalho metacognitivo e meta-reflexivo.

Quando se fala sobre metacognição, se considera a possibilidade em analisar o conhecimento que se possui sobre o próprio conhecimento, e em uma perspectiva meta-reflexiva poderia se pensar a possibilidade em refletir sobre o conhecimento que um professor têm sobre um saber matemático, levando em conta, levando em conta, as capacidades que este possui em mobilizar habilidades, ferramentas e transposições quando se tenta solucionar problemas na perspectiva das investigações matemáticas.

> *L'activité de l'expert est métacognitive dans le sens où elle procède d'une recherche de la connaissance sur la connaissance. Pour cette raison, de nombreux systèmes de formation ont été conçus depuis quelques années pour favoriser la réflexion-en-action. Certains formateurs d'enseignants, par example, estiment que l'aptitude à la recherche-action en classe est un excellent moteur de perfectionnement tant en formation continue qu'en formation initiale; mais, avant d'examiner ces systèmes, il semble utile d'examiner les difficultés propres à la définition d'un expert dans le domaine pédagogique[19].*
>
> TOCHON (1993: p. 132)

Ao discutir as concepções e aptidões de um professor perito em suas pesquisas, Tochon (1993) considera que um professor perito trabalha aspectos metacognitivos para o favorecimento da reflexão-na-ação, ou seja, o trabalho de um docente perito em sua área está na sua capacidade em refletir, inclusive, sobre os conhecimentos dos seus alunos. E na passagem do Novo PC ao Velho PC a atividade metacognitiva é essencial pois se torna necessário compreender aspectos relativos às concepções que os discentes possuem sobre o saber matemático, bem como, a compreensão sobre o conhecimento que cada estudante possui, tal tarefa, exige um entendimento profundo sobre avaliação do ponto de vista do pesquisador em educação, em outros termos, cabe ao professor que pretende trabalhar a formação reflexiva assumir a postura de um pesquisador na área pedagógica.

Em termos gerais, a relação ensino-aprendizagem na passagem do Novo PC ao Velho PC, apresenta como desafio aos docentes, o desenvolvimento da meta-reflexão, metacognição e da negociação, a partir da prática reflexiva, pois é somente com base na prática dos docentes e discentes que se pode pensar o trabalho com situações surpresa geradas a partir do computador em um processo do que é chamado por conhecer-na-ação. Entretanto, para compreender a especificidade das atividades desenvolvidas se devem compreender o papel

[19] Tradução: A atividade do perito é metacognitiva no sentido em que realiza uma pesquisa do conhecimento sobre o conhecimento. Por isto foram concebidos muitos sistemas de formação à alguns anos para encorajar a reflexão-na-ação. Por exemplo, alguns formadores de professores consideram que a aptidão para a pesquisa-ação em classe é tanto um motor excelente para aperfeiçoamento tanto da formação continuada como inicial; mas, antes de examinar estes sistemas parece útil examinar as dificuldades com respeito à definição sobre. um perito no domínio pedagógico.

investigativo do professor pesquisador com respeito aos procedimentos metodológicos didáticos no decorrer das aulas em ambientes informatizados escolares como o LIE.

01.2 – Situações surpresa

Na passagem do Novo PC ao Velho PC, as situações surpresa assumem um papel central no favorecimento das investigações matemáticas, pois ao surgirem é que se desencadeiam as ações do professor para que os estudantes possam refletir sobre as possibilidades apresentadas por meio das simulações e manipulações que ocorrem em *software* educativo voltado ao ensino de matemática. Deste modo, se torna necessário à compreensão da natureza destas situações tanto na perspectiva instrumental quanto educacional.

Quando iniciei a construção metodológica sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC, observei em cursos de formação que ocorreram entre 1997 e 2000, algumas regularidades sobre o surgimento destas situações. E durante o meu mestrado entre 2000 e 2002, foi possível averiguar algumas condições em que as situações surpresa podem ocorrer. A partir de uma analise apurada sobre vários contextos e quadros foram considerados os seguintes pontos:

a) Na maioria das vezes, as situações surpresa decorrem de limitações computacionais e instrumentais espontâneas, no entanto, em ocasiões raras, alguns alunos usam tais limitações, intencionalmente, para apresentação de contra-exemplos que apresentam novas situações surpresa;

b) Há três tipos de limitações computacionais e instrumentais que desencadeiam a passagem do Novo PC ao Velho PC: i) Os problemas de manipulação; ii) As divergências conceituais em software educativo que possuem a mesma proposta; iii) Os *bugs* propriamente ditos, que constituem limitações computacionais de fato;

c) Os problemas de manipulação são mais freqüentes que as divergências conceituais e os *bugs*;

d) Os bugs exigem literalmente a passagem do Novo PC ao Velho PC, pois nestes casos, no computador se torna impossível comprovar uma conjectura através do computador.

Os itens acima apresentados resultam da análise das situações surpresa e das limitações instrumentais e computacionais em Santana (2002: 104-135), mas para compreender cada uma das limitações, apresentarei a seguir algumas situações surpresa, procurando discutir o caráter de cada uma delas.

01.2.1 – Os problemas de manipulação em *software* educativo de matemática

As situações surpresa decorrente das limitações instrumentais relativas a manipulação em *software* educativo de matemática, se originam quando o usuário de um programa seja professor ou aluno, cometem falhas no uso do *software*. Seja pela falta de formação para uso dos recursos computacionais, ou ainda, pelo desconhecimento dos comandos de um programa. Nestes casos surgem situações surpresa que contradizem concepções e idéias já estabelecidas, e nestas ações o professor pode apresentar algumas intervenções para averiguar o conhecimento dos estudantes, bem como, para favorecer o processo investigativo.

A situação surpresa abaixo diz respeito a soma dos ângulos internos de um triângulo ser ou não ser dois ângulos retos (180^o), e teve origem em um curso de formação de professores realizado no NTE/CREDE[20] 12 em Quixadá-CE. Durante uma atividade foi proposto aos alunos do curso construir um triângulo **[ABC]**, de forma que fosse possível medir os ângulos internos. Inicialmente, pela medição de cada um dos três ângulo através do comando de verificação “Ângulos”, e posteriormente, os três ângulos medidos foram somados pelo comando “Calculadora” do *Cabri Géomètre II*. Espontaneamente, houve duas situações-surpresa em dois dos doze computadores em uso no LEI, envolvendo três alunos.

Em um dos casos, a soma dos ângulos internos era superior a dois ângulos retos (180^o) e no outro caso era menor que dois ângulos retos. Considerando a situação-surpresa, foi proposto pelo Professor em aula discutir o problema e foram apresentadas pelos alunos quatro conjecturas:

(a) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o graus;
(b) A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior ou igual a 180^o graus;
(c) A soma dos ângulos internos do triângulo é menor ou igual a 180^o graus;
(d) Todos enunciados apresentados são válidos.

Para que a situação surpresa possa ser compreendida apresento parte da transcrição dos dados de observação do diário de campo, que mostram o dialogo construído ao longo da situação surpresa que se apresentou frente o grupo de alunos, que eram professores em formação, e o Professor que é o pesquisador anotou o dialogo entre o Professor e os alunos, com auxilio de um dos professores do NTE que disponibilizou um gravador e duas fitas que foram transcritas posteriormente.

[20] NTE (Núcleo Tecnólogico Educacional/ CREDE (Centro Regional de Desenvolvimento da Educação)

Relato do diário de campo

No surgimento de uma situação surpresa nova, os alunos iniciaram uma discussão, e alguns diziam que "se fosse considerada uma geometria não-euclidiana era possível tais resultados". No entanto, o professor disse que se tratava de uma representação do plano euclidiano. O aluno A propôs: "Vamos sistematizar os dados que temos aqui...".

Alguns relutam, mas a maioria concorda em fazer a organização dos dados. Usando uma televisão acoplada em um computador através de *TV Colder*, uma das professoras do NTE, que estava como assistente do curso, foi até o computador e digita as conjecturas que os alunos propõe. O aluno B diz:

Aluno B: "Temos três resultados, não é?".

Turma: "É temos três resultados...".

Aluno B: "Primeiro, a soma dos ângulos **[a]**, **[b]** e **[c]** é 180^{o} graus, segundo a soma dos ângulos **[a]**, **[b]** e **[c]** é maior que 180^{o} graus...".

Aluno C: "Calma lá, quando eu movimento um dos pontos do triângulo, o que eu vejo, é que quando os pontos **[A]**, **[B]** e **[C]** quase formam uma linha, o que tenho é que o valor medido se aproxima de 180^{o}, portanto, porque não dizer que a soma dos ângulos internos **[a]**, **[b]** e **[c]** é maior ou igual a 180^{o} graus?".

Aluno B: "É, você tem razão, vamos dizer que a o segundo resultado é: A soma dos ângulos **[a]**, **[b]** e **[c]** é maior ou igual a 180^{o} graus, alguém discorda? O Professor discorda?".

Professor: "Fiquem a vontade, quando achar necessário vou intervir".

Aluno B: "Continuando, considerando nossa colega Aluno D, posso dizer também que o terceiro resultado é a soma dos ângulos **[a]**, **[b]** e **[c]** é menor ou igual a 180^{o} graus".

Aluno T: Pode dizer isso sim, pois to movendo os vértices e quando se aproximam da colinearidade os pontos **[A]**, **[B]** e **[C]**, eles ficam próximos de 180^{o} graus.

Aluno B: “Então, temos os três resultados como: **$(a+b+c)=180^o$** ou **$(a+b+c)\geq 180^o$** ou **$(a+b+c)\leq 180^o$**, alguma coisa mais?”

Aluno A: “Sim, e se todas as três forem verdadeiras simultaneamente? Vamos considerar que os três resultados podem ser verdadeiros.”

Turma: “É sem problemas”.

Aluno B: “E agora professor, o que vamos fazer?”.

Professor: ”O que vocês fizeram, foi enunciar quatro conjecturas...”.

Aluno I: “O que é uma conjectura?”.

Professor: “É uma afirmação que não é um teorema, ou seja, não é algo provado...”.

Aluno I: “Mas a soma dos ângulos internos de um triângulo é provado!”.

Professor: “E como é a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo?”.

Aluno I: “Bem, eu não sei, mas nos livros está escrito...”.

Aluno T: “É, acho que a gente pode tentar provar a soma dos ângulos internos, não é ? Vamos nos dividir em dois grupos, um tenta resolver o problema no computador, e a gente senta naquela mesinha ali na frente e vai tentando esboçar no papel, o que acham?”

Turma: “Pode ser, vamos tentar, sem problemas Professor?”.

Professor: “Ok, mas vamos marcar o tempo são 14:25 min, vamos levar uns 50 minutos nisso, pois infelizmente este é um curso de 30 horas. No entanto, acho que dois grupos com 10 pessoas é muito! Se dividam em grupos de no máximo 05 pessoas, dois grupos usam o computador e os outros usam o lápis e papel”.

Os grupos iniciam o trabalho, e levam cerca de 55 minutos de investigação, discutindo de forma bem intensiva e participativa. Após o término do tempo proposto, o Professor retoma a discussão dizendo:

Professor: “Bem, vamos lá, vocês discutiram e fizeram barulhada igual menino em sala de aula...”.

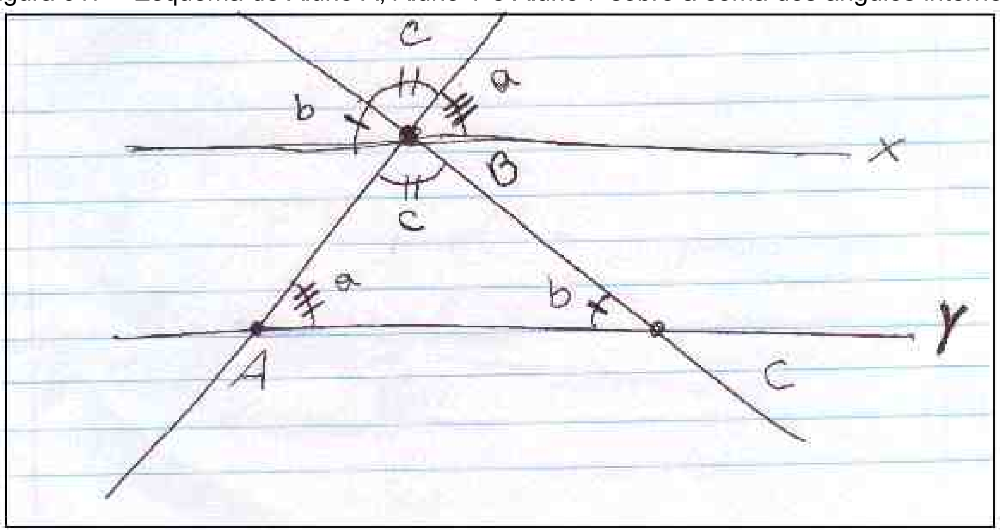
Turma: risos

Professor: “Vamos reiniciar e recapitular, quando vocês fizeram a medição da soma dos ângulos internos de um triângulo, encontraram três situações distintas com respeito à soma dos ângulos internos de um triângulo, a maioria viu que **$(a+b+c)=180^{o}$** em dois computadores ocorreu dois casos diferentes. Em um deles **$(a+b+c)\geq 180^{o}$**, não é Aluno K?”

Aluno K: “É sim, Professor“.

Professor: “E no computador do Aluno T e Aluno A, **$(a+b+c)\leq 180^{o}$**. Por fim, vocês enunciaram quatro conjecturas a partir de três situações, sendo que a quarta corresponde a dizer que: **$(a+b+c)=180^{o}$** o u **$(a+b+c)\geq 180^{o}$** o u **$(a+b+c)\leq 180^{o}$**. No mais vocês me disseram que iam apresentar, uma demonstração sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, então vamos lá”.

Figura 017 – Esquema de Aluno A, Aluno T e Aluno I sobre a soma dos ângulos internos.



Aluno K: “Professor, olha o grupo do Aluno A, Aluno T e Aluno I, fizeram este esquema aqui... (neste momento os alunos mostram o desenho feito em folha de papel almaço para a turma)”.

Professor: “E qual foi a conclusão que vocês chegaram?”.

Aluno T: “Bem, é preciso mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, não é isso? Portanto, se um ângulo reto mede 90^o graus e um ângulo raso mede dois ângulos retos, é possível dizer que um ângulo raso é 180^o graus, deste modo, é preciso de um meio que permita saber se de um triângulo qualquer se pode obter um ângulo raso por meio dos seus ângulos, e este esquema mostra tudo”.

Professor: “Não necessariamente, o esquema que você me apresentou apenas pode representar as suas idéias, é preciso de mais que isso, é necessário detalhar o que você propõe neste esquema (Figura 017)”.

Um breve silêncio toma conta da turma.

Aluno E: “Professor, o esquema que ele propôs significa o seguinte: Primeiro você prolonga os segmentos que formam os lados do triângulo até formar várias retas, que ele esqueceu de nomear no esquema, mas vamos dizer que para **[AB]** está a reta **[k]**, para **[BC]** está a reta **[l]** (**[x]** e **[y]** já estavam nomeados no esquema). Segundo, a reta **[x]** que ele colocou é paralela à reta **[y]**, então de um lado de **[x]** eu tenho o triângulo **[ABC]** e do outro eu tenho três ângulos, que formam um ângulo raso. Agora é só mostrar que os ângulos do ângulo raso são iguais aos ângulos internos do triângulo. Bem o ângulo **[c]** do triângulo é oposto pelo vértice ao **[c]** do ângulo raso, o ângulo a do triângulo é correspondente ao ângulo **[a]** do ângulo raso, e pelo mesmo caso o ângulo **[b]** do triângulo é o ângulo **[b]** do ângulo raso. Sendo assim, eu digo que **$(a+b+c)=180^o$** é o resultado verdadeiro, e tá acabado”.

Aluno A: “Mas em dois dos computadores, apareceram respostas diferentes desta!”.

Aluno D: “Então o computador tá errado, não é Professor?”

Professor: “É provável”.

A Turma inicia uma discussão sobre o fato. O professor pede silêncio, e o Aluno K pede para falar:

Aluno K: “Acho que sei o que é!”

Todos se voltam para Aluno K esperando sua explicação.

Aluno K: “Eu tava mexendo na figura que eu fiz, e vi um ponto perto do vértice **[A]**, mexi o ponto e a soma dos ângulos começou a mudar, acho que na hora de fazer a figura eu dei um *click* fora do vértice e deu este resultado, pode dar uma olhada no computador do Aluno T e do Aluno A que eles deram *click* errado quer ver?”

Aluno T: “É mesmo, e aqui foi dois erros um *click* errado perto do ponto **[C]** e outro perto do ponto **[A]**”.

Aluno D: “Mas o computador errou ou eles erraram?”.

Professor: “Na realidade quando se utiliza o computador é possível cometer erros, pois ao simular algo se está experimentando, houve um erro de manipulação deles, mas o proveitoso disto tudo foi à discussão que foi possível obter”.

No caso apresentado, a situação-surpresa não estava em um *bug* do *software*, mas sim em uma dificuldade relativa ao uso e manipulação dos recursos computacionais. Tais situações ocorrem com freqüência em aula, mas na maioria dos casos os professores costumam desprezar possibilidades de situações surpresa como esta.

De um modo geral, houve um repentino espanto por parte dos estudantes, principalmente após a apresentação das quatro conjecturas que foram enunciadas, no entanto, houve organização e negociação entre os alunos, que no caso, são professores de matemática. Entretanto, caso a situação tivesse ocorrido em uma turma de adolescentes, é provável que ocorreriam dificuldades com respeito à negociação, exigindo que as intervenções do professor fossem mais presentes.

O mais relevante que se pode aprender sobre este tipo de situação, consiste em dizer que ao usar *software* matemático, na interação homem/máquina/saber, por questões ergonômico-instrumentais podem surgir falhas que contradigam em simulação e visualização concepções sobre o saber matemático validado, no entanto, dependendo da postura do professor tais situações podem se tornar possibilidades para visualizar este saber reconhecido sobre um “novo olhar”.

A situação surpresa acima está descrita em Santana (2002: p. 112-117) e dados mais detalhados devem ser observados no Anexo 5.

01.2.2 – Divergências conceituais em *Software* Educativo de Matemática

As divergências conceituais em *software* educativo decorrem das diferentes concepções epistemológicas que grupos de desenvolvedores possuem sobre os programas de computador que apresentam propostas similares. Em outras palavras, as divergências sobre as noções intuitivas, definições de entes matemáticos, bem como, as estratégias de representação do saber matemático para muitos assuntos não são consensuais, e acabam por refletir nos processos instrumentais e ergonômicos dos *softwares* educativos, diferenças construtivas que levam diferentes resultados para ações similares. A situação surpresa apresentada a seguir relata como este processo pode ocorrer em *software* educativo com propostas similares.

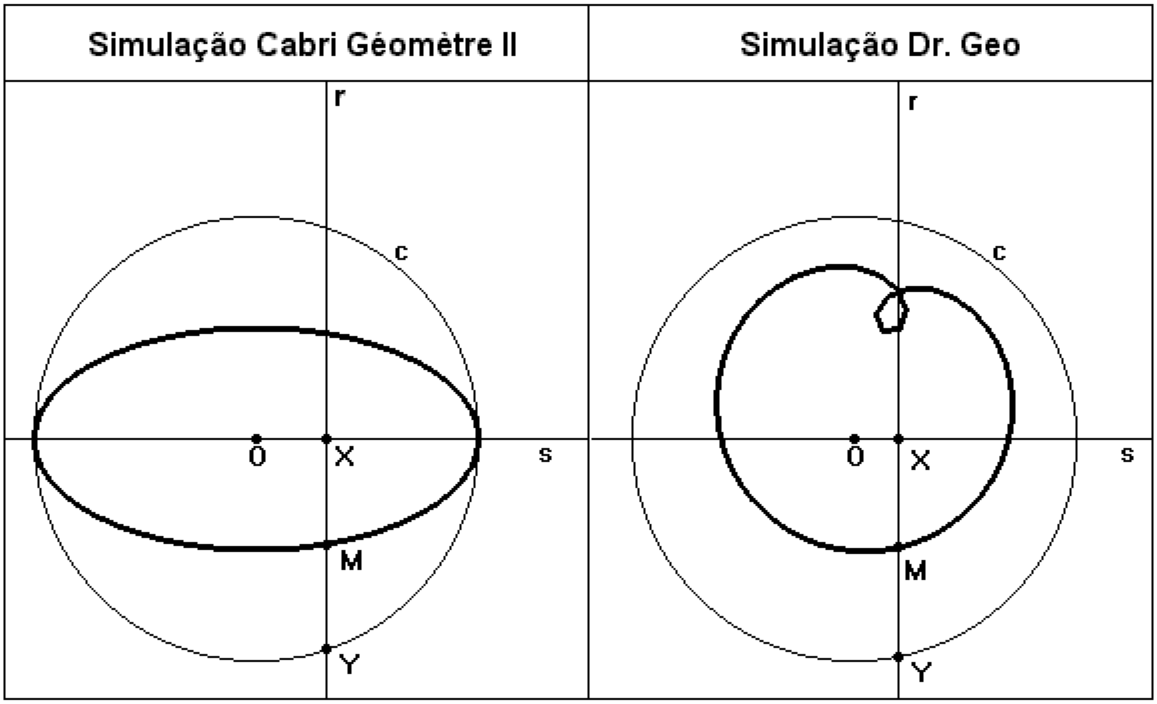
Relato da Situação Surpresa

Esta situação foi obtida a partir da comparação de um algoritmo em dois programas distintos cujas propostas de trabalho em geometria dinâmica são similares.

O local de aplicação deste experimento foi no Laboratório Multimeios FACED/UFC entre 1999 e 2000.

O algoritmo apresenta uma construção geométrica que permitiu obter no *Cabri Géomètre II*, um lugar geométrico que é uma elipse por deformação da circunferência **[c]** com base no ponto médio **[M]**, no entanto, ao aplicar o mesmo algoritmo no *software Dr. Geo*, a figura correspondente ao lugar geométrico obtido, não resultou em uma elipse, mas sim, em uma curva cardióide que ao ser manipulada podia ser deformada de modo que fosse possível obter outras curvas a partir desta.

Figura 018 – Um algoritmo que resultou em dois lugares geométricos distintos.



Diante destes resultados o primeiro questionamento sobre o problema foi: Se o algoritmo é o mesmo, a proposta é a mesma e os *softwares* são diferentes, há em um dos programas um resultado equivocado, ou o algoritmo está, de algum modo, sendo mal implementado. Foi necessário iniciar um processo comparativo entre as atividades desenvolvidas em ambos os programas, de modo, que cada passo foi descriminado, e assim, se pôde estabelecer através do algoritmo o processo de reflexão-na-ação para compreender o fenômeno dado.

Tabela 007 – O algoritmo utilizado na situação nos programas *Cabri Géomètre II* e *Dr. Geo*.

Passos	Ações realizadas
01	Construir uma circunferência **[c]** com centro no ponto **[O]** e raio arbitrário com medida superior a zero.
02	Marcar um ponto **[Y]** sobre a circunferência **[c]**.
03	Traçar uma reta **[r]** pelo ponto **[Y]**.
04	Traçar uma reta **[s]** perpendicular à reta **[r]** pelo ponto **[O]**.
05	Marcar **[X]** como o ponto de intersecção entre **[r]** e **[s]**.
06	Encontrar o ponto médio do segmento **[XY]** nomeando-o como **[M]**.
07	Construir o lugar geométrico de **[M]** quando **[Y]** é movimentado sobre **[c]**.

Após análise desta situação, se chegou considera que ambas construções são corretas do ponto de vista matemático, mas o que ocorre é que a construção no *Dr. Geo* no passo 03 do algoritmo está relacionado ao 1º postulado de Euclides que diz que *por dois pontos quaisquer passa uma única reta*. No entanto, o comando usado no *Cabri Géomètre* para efetuar a construção da reta, foi o comando "Reta", que está relacionado ao enunciado que diz: *dado um único ponto e uma direção, é possível a construção de uma reta*. No entanto, é possível no *Cabri Géomètre* elaborar tal construção de forma similar ao *Dr. Geo*, pois este programa permite ao usuário colocar dois pontos e depois aplicar o comando "Reta", com um *click* e m cada ponto, mas este procedimento é menos utilizado que o anterior. Deste modo, vale ressaltar que se no *Cabri Géomètre* a reta pode ser construída de duas formas distintas, o mesmo não ocorre no *Dr. Geo* em que só é possível uma abordagem por meio do 1º p ostulado de Euclides. Neste sentido, o *Dr. Geo* se mostrou limitado em relação ao *Cabri Géomètre II*, pois permitiu tratar um problema que apresenta duas abordagens distintas de uma única forma.

Pode-se observar que mesmo quando dois *software*s educativos possuam a mesma proposta educacional, ocorrem atividades que se aplicam em um *software*, mas não são aplicáveis em outro com respeito à um tipo de conteúdo.

Considerando os questionamentos acima, é necessário que uma escola tenha uma quantidade significativa de programas distintos, mesmo que estes apresentem o mesmo tipo de proposta, e cabe ao professor incentivar que os alunos usem diferentes programas para averiguar similaridades e diferenças destes programas, ou seja, se um software representa um ponto de vista sobre o saber dois softwares podem representar dois pontos de vista distintos, fato que viabiliza questionamentos novos que podem potencializar a passagem do Novo PC ao Velho PC.

Em síntese, a passagem do Novo ao Velho PC neste tipo de situação, pode ser visto como uma forma de propor aos professores e estudantes, o desenvolvimento de abordagens distintas sobre um tipo de saber, que neste caso, é o saber matemático viabilizando que possibilidades na construção de conhecimentos e saberes novos por meio do processo reflexivo que uma situação-surpresa pode gerar com base na comparação entre programas distintos que possuem a mesma proposta. A situação acima apresentada pode ser vista em Santana (2002: p. 124 – 125) e detalhada no Anexo 5.

01.2.3 – Limitação computacional, *bugs* e o *Software* Educativo em Matemática

Segundo Santana (2002: p. 137 – 138), as situações surpresa podem ser oriundas em *bugs*[21] computacionais, ou seja, podem ter origens em erros nos procedimentos de programação, falta de integração de funções que deveriam ser comuns, falhas decorrentes das limitações gráficas, entre outros problemas que estão nas limitações técnicas que podem surgir nas ações de desenvolvimento do *software*, bem como, nas restrições de cálculo de *hardware*. Santana (2002) identificou quatro categorias de *bugs* que podem favorecer situações surpresa:

(a1) – Incompatibilidade de funções: Constituem erros relacionados à contradição entre comandos que deveriam apresentar funções complementares entre si, no entanto, para efeito de manipulação e simulação, tais falhas colocam diante dos usuários contradições conceituais que resultam em situações paradoxais.

A situação surpresa apresentada a seguir exibe este tipo de *bug*, e está baseado em uma ocorrência enviado ao fórum de discussão sobre o *Cabri Géomètre* II, apresentado por Genevieve Tulloue[22], mas que foi remetido por Hermínio Borges Neto.

A situação surpresa leva o usuário à considerar uma conjectura paradoxal, pois permite, no computador, mostrar que o valor numérico da

[21] *Bug*: É um termo em inglês utilizado para expressar falhas computacionais.

distância de um segmento que pode ser chamado como **[A1B1]** não corresponde a diferença dos valores absolutos de **[B1]** em relação à **[A1]**. De forma que se pode escrever a expressão:

$$\mathbf{d(A1B1) \neq abs(B1) - abs(A1).}$$

Para obter a conjectura acima, basta efetuar a execução do algoritmo apresentado a seguir.

Tabela 007b – algoritmo da situação surpresa que apresenta problema métrico no *Cabri Géomètre*

Passos	Ações realizadas
01	Acionar o comando “Mostrar Eixos” para exibição de eixos cartesianos.
02	Marcar um ponto sobre o eixo das abscissas nomeando-o como **[A1]**.
03	Marcar outro ponto sobre o eixo das abscissas que não seja coincidente a **[A1]**, nomeando-o como **[B1]**.
04	Usando comando “Equações e Coordenadas”, exibir as coordenadas de **[A1]** e **[B1]**.
05	Traçar um segmento pelos pontos **[A1]** e **[B1]**.
06	Usando comando “Calculadora” obter **(B1 – A1)** através das coordenadas destes pontos, e arraste o resultado sobre a zona-de-desenho.
07	Pelo comando “Transferência de Medidas”, selecione o resultado de **(B1 – A1)** que está na zona-de-desenho, expresso em termos numéricos, e selecione o ponto **[A1]**, de modo que o ponto resultante da transferência não pertença ao eixo cartesiano, e nomeie este ponto como **[B2]**.
08	Trace um segmento pelos pontos **[A1]** e **[B2]**.
09	Meça os segmentos **[A1B1]** e **[A1B2]** pelo comando “Distância e Comprimento”.
10	Construir uma circunferência **[c1]** com centro em **[A1]** e raio **[A1B2]**.
11	Movimente os pontos **[A1]** e **[B1]** pelo plano e verifique os valores métricos dos segmentos **[A1B1]** e **[A1B2]**.
12	Modifique a escala do eixo das abscissas, arrastando a marca de unidade da escala, e observe se **[A1B1]** e **[A1B2]** possuem os mesmos valores métricos, ou seja, se são segmentos congruentes.

A situação-surpresa surgiu a partir das coordenadas de dois pontos que podem ser **[A1]** e **[B1]** que estão sobre o eixo das abscissas, entretanto, ao usar o comando “Calculadora” no *Cabri*, se obtém da diferença entre **[B1]** e **[A1]** que é um valor **[Z]**, tal que, se expressa por **(B1 – A1) = [Z]** que é usado para construir um segmento **[A1B2]** a partir de **[A1]** pelo comando “Transferência de Medida”.

[22] Matemático francês participante da lista de discussão do Cabri-Géomètre.

Deste modo, se obteve dois segmentos **[A1B1]** e **[A1B2]** cujas medidas de comprimento são iguais, entretanto, ao mudar a escala do eixo das abscissas surge diferença entre as medidas de **[A1B1]** e **[A1B2]** o que caracteriza uma situação-surpresa.

Nesta atividade se observou que dois segmentos que deveriam ser congruentes deixam de ser, quando a escala do *software Cabri Géomètre* é modificada. Mas por quais motivos isto ocorre quando a escala é deslocada?

Em princípio considere que a expressão **(B1 – A1)**, expresso no passo 06 da tabela 007b, é uma equação que permite obter a distância do segmento **[A1B1]**, a partir das coordenadas de abscissas dos pontos **[A1]** e **[B1]**. Portanto, é possível reescrever **(B1 – A1)** como:

$$\mathbf{(B1 - A1) = \{[\,B1(x2) - A1\,(x1)]^2 + [\,B1(y2) - A1(y1)\,]^2\}^{(1/2)} =}$$
$$\mathbf{= [B1A1(x2 - x1)^{\,2} + B1A1(y2 - y1)^{\,2}]^{\,(1/2)} =}$$
$$\mathbf{= B1A1\,[\,(x2 - x1)^{\,2} + (y2 - y1)^{\,2}]^{\,(1/2)} = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{(1/2)}}$$

Deste modo, é possível garantir que **(B1 – A1) =** $\mathbf{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{(1/2)}}$, mas esta expressão corresponde à diferença dos valores absolutos de **[B1]** e **[A1]**, e pode ser escrito como **[abs(B1) – abs(A1)]** que é a equação da distância entre dois pontos, que correspondem à medida de um segmento pertencente a abscissa. Sendo assim, se obtém:

$$\mathbf{d(A1B1) = d(B1A1) = (B1 - A1) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\,(1/2)} = [abs(B1) - abs(A1)] =}$$
$$\mathbf{d(A1B1) = [abs(B1) - abs(A1)]}$$

E enquanto a escala é fixa no *software* a relação é válida, e pode ser observada com base na manipulação dos pontos **[A1]** e **[B1]** pelo eixo das abscissas. No entanto, o resultado de **(B1 – A1)** na calculadora é **d(A1B1)**, e pelo comando “Transferência de medida” se obtém o segmento **[A1B2]** cuja distância **d(A1B2)=d(A1B1)**, portanto, **[A1B1]** e **[A1B2]** devem ser sempre congruentes.

Além disto, pela circunferência **[c1]** com raio cuja medida é **d(A1B2)**, se sabe que é possível escrever que:

Raio de c1 = d(A1B2) = d(A1B1) = [abs(B1) – abs(A1)]

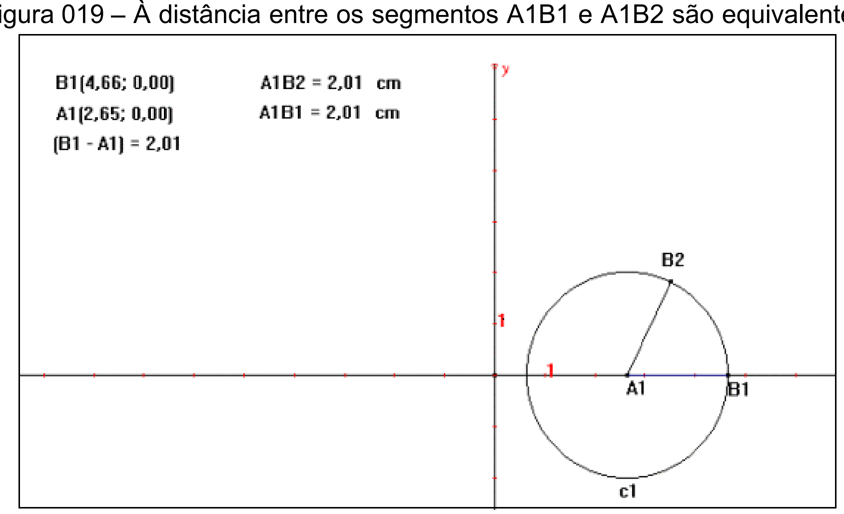
No entanto, ao ser modificada a escala, o que ocorre na prática é que surge uma contradição matemática, pois o **Raio de c1 = d(A1B2)** $\neq$ **d(A1B1)**, trata-se de um *bug*, que mostra:

(a) **d(A1B1) = (B1-A1) = [abs(B1) – abs(A1)]** $\neq$ **d(A1B2),** mas por definição **d(A1B2)=d(A1B1)**, logo é possível concluir que está ocorrendo uma situação contraditória e paradoxal;

(b) Os eixos cartesianos no *Cabri Géomètre* e o comando “Distância e Comprimento”, são funções distintas que funcionam somente quando há correspondência entre as medidas do eixo cartesiano em relação a função interna que calcula a métrica para o comando “Distância e Comprimento”. Em outras palavras, tais comandos deveriam estar relacionados entre si, no entanto dentre do *Cabri Géomètre* tais funções são independentes, fato este que gera o paradoxo apresentado;

(c) Se o eixo cartesiano é modificado, deveria ocorrer no *software* à correção automática da métrica do comando “Distância e Comprimento”;

Figura 019 – À distância entre os segmentos A1B1 e A1B2 são equivalentes.



A situação acima descrita expõe um tipo de *bug* que ocorre devido a falhas no desenvolvimento deste *software*, no entanto, mediante tais circunstâncias cabe ao professor considerar as possibilidades didáticas de uma situação como esta para favorecer o processo investigativo em sala-de-aula. A situação acima está em Santana (2002: p. 121-123), e pode ser observada no Anexo 5.

Outros tipos de *Bugs* que constituem limitações tanto de *software* como de *hardware* são:

(a2) – Limitação Numérica: São erros decorrentes das limitações computacionais no cálculo numérico, pois no computador como em quaisquer instrumentos para mensuração, se trabalha com conjuntos finitos de números e com aproximações racionais, no entanto, na matemática, freqüentemente se está pressupondo idéias sobre infinitude e continuidade na tentativa de generalizar para compreender dedutivamente determinadas conjecturas, no entanto, nos recursos instrumentais computacionais e de mensuração, devido restrições físicas a representação, em diversos casos, não correspondem ao que se pode conceber em termos matemáticos.

(a3) – Restrição de Manipulação: São falhas decorrentes da incompatibilidade de um comando enquanto o mesmo é utilizado, com respeito aos conceitos matemáticos. Por exemplo, a restrição de manipulação de uma reta a uma região de tela do computador pode constituir este tipo de problema pois considerando concepções sobre infinitude se pode pensar que o fato de não ser viável uma manipulação plena pela reta constitui uma restrição na representação dada fato que não corresponde com a intuição matemática sobre a significação conceptual de uma reta.

(a4) – Limitação Gráfica: Ocorre quando a representação gráfica de uma situação é imediatamente contraditória à construção do ponto de vista matemático. Nestas situações, o computador representa estruturas impossíveis do ponto de vista matemático, podendo levar o usuário à concepções completamente errôneas. Um exemplo deste tipo de situação surpresa está descrito acima entre as páginas 86 e 95.

Tendo entendimento sobre os tipos de limitação que surgem na interação homem-máquina-saber, e compreendendo o contexto de realização das situações surpresa, procurarei a seguir discutir a ação instrumental do ponto de vista da significação e sua relação com *software* educativo no ensino de matemática.

01.3 – A ação instrumental e *Software* Educativo de Matemática

Ao se falar sobre o ensino de matemática com uso do computador, é comum imaginar que grande parte dos problemas estão relacionados, somente, ao uso do computador. Entretanto, existem vários fatores formativos e conceptuais relativos aos professores que dificultam para o aluno a compreensão sobre os conceitos matemáticos, em muitos casos levando estes à estratégias de resolução de um problema que podem mobilizar estruturas cognitivas diferentes daquelas que se pretendia trabalhar em aula.

Em diversas situações ao professor é comum confundir o raciocínio lógico e o matemático, entretanto, estas estruturas mentais apresentam características diferentes.

O raciocínio lógico faz menção ao grupo das operações comuns nas lógicas proposicionais e de primeira ordem, e estas são utilizadas na resolução de problemas em várias áreas do saber humano, pois mobilizam concepções estratégicas para solução de dificuldades do nosso cotidiano. Neste sentido, um carteiro pode criar, mediante sua experiência, o melhor caminho para terminar o mais rápido a entrega de suas correspondências, de tal modo que consiga passar em um banco para receber o seu salário para ir a uma determinada loja pagar suas dividas. No entanto, como o carteiro está sem dinheiro, passar na loja para depois passar no banco está fora de cogitação, ou seja, segue os princípios lógicos associados à percepção da relevância de suas necessidades. Mas se o problema fosse calcular a distância que o carteiro percorreu, ou ainda, saber quantas possibilidades existem para realização de um melhor trajeto, estão sendo mobilizas outras estruturas cognitivas que envolvem saberes e conhecimentos sobre estruturas algébricas, aritméticas e geométricas, em que é comum o estabelecimento de relações sobre relações, neste caso, se abstrai não mais sobre os objetos, mas sobre as próprias ações. Piaget *apud* Gravina (2001: p. 23-24) chama este movimento como abstração reflexionante, e o caráter do saber matemático está muito mais associado à este tipo de pensamento pois as entidades matemáticas constituem relações abstraídas de objetos do mundo físico, ou mesmo, de outras abstrações.

No ensino de matemática assistido por computador, as mediações interventivas que o professor faz junto aos alunos no uso instrumental das ferramentas computacionais, ou mesmo, o processo de preparação de seqüências didáticas para desenvolver aulas ou cursos, podem, se mal estruturados, acarretar obstáculos à aprendizagem do aluno e mobilização de estruturas cognitivas que não se pretendia mobilizar naquele tipo de atividade. Não se está afirmando que o raciocínio lógico-matemático seja indesejável, pois ele é uma necessidade aos estudantes inclusive ao subsidiar o raciocínio matemático, entretanto, na formação matemática se espera trabalhar raciocínio matemático para construção do saber matemático.

Outras dificuldades podem decorrem da linguagem e da notação adotada pelo professor em determinadas atividades, ou ainda, na excessiva fragmentação que certas atividades podem apresentar, pois em muitos casos, os alunos deixam de ter uma visão do todo e passam a ter uma noção particionada sobre uma atividade, pois o estudante somente considera comandos como “faça isto deste modo”, quando não é “faça do meu modo” somando estes problemas as dificuldades naturais que um *software* pode apresentar, caso as ações do professor desconsiderem a percepção dos alunos frente o ferramental instrumental apresentado pelo computador, o estudante vai tender a preocupar-se em solucionar o problema somente da perspectiva do computador desconsiderando as estruturas matemáticas.

Um exemplo que permite averiguar este tipo de situação ocorreu com um grupo de estudantes do curso de pedagogia da Universidade Federal do Ceará em 2000. Eram 6 alunos do curso de graduação que participaram de uma formação experimental no Laboratório Multimeios FACED/UFC.

Tratava-se de um curso com dez sessões de uma hora cada, e durante todo o curso eram utilizados cinco computadores com *software* de geometria dinâmica como *Cabri Géomètre II*.

Este curso foi realizado em dois momentos:

- Formação – Quando por meio de seqüências didáticas os alunos seriam capacitados para resolver problemas que envolviam saberes em geometria;
- Coleta – Momento em que se apresentaram aos alunos questões problemas que revelariam concepções geométricas construídas e generalizadas por eles.

Ao todo, foram dez sessões de formação e duas para coleta de dados. Este trabalho foi realizado entre os meses de abril, maio e junho de 2000.

Durante as sessões iniciais, houve momentos de exposição de conceitos, bem como, foram propostas algumas atividades aos alunos. Pois a programação do curso pretendia contemplar na formação os campos conceituais necessários ao desenvolvimento das atividades de coleta. Neste sentido, houve uma série de estudos desde Janeiro de 2000, com objetivo de desenvolver a formação de recursos humanos na equipe de pesquisa para trabalhar os processos de engenharia didática em educação matemática, no preparo de materiais e no desenvolvimento de metodologias em sala-de-aula, procurando trabalhar, principalmente, aspectos relacionados à mediação e interação. Haviam vários professores entre os pesquisadores e eu fui um entre estes.

A situação ocorreu na oitava sessão, quando foi apresentada aos alunos uma atividade que consistia na divisão de um segmento de reta em partes iguais. O *software* usado foi o *Cabri Géomètre II*. Observou-se que a dificuldade dos alunos neste tipo de atividade estava em dividir o segmento de reta em 3, 5 e 7 partes congruentes. No entanto, não havia difculdades em dividir o segmento em 2, 4 e 8 partes devido conhecimentos que os mesmos possuíam sobre o comando "ponto médio" do *Cabri Géomètre II*. Os alunos recebiam a atividade com um algoritmo de construção que se baseia na divisão de segmentos pelo *Teorema de Tales*, mas os alunos não conseguem desenvolver a construção por dificuldades em trabalhar o comando "ponto de intercessão" no *Cabri*. A partir desta dificuldade instrumental associado à falhas na mediação do professor as dificuldades instrumentais surgiram e a resolução dos alunos revela estratégias que apelam para estruturas que não mobilizaram o raciocínio matemático, mas sim, o raciocínio lógico-matemático como se pode observar na situação descrita do quadro 001 abaixo:

Quadro 001(a) – Transcrição da situação que expõem dificuldades instrumentais dos alunos.

[Professor]: Agora sobre a outra atividade que vocês tão desenvolvendo agora, atividade de divisão de segmento. qual a dificuldade que vocês estão percebendo agora ?
[Aluno 1]: Dividir o segmento em três partes iguais.
[Professor]: A dificuldade tua é dividir em três partes, tem mais alguém fazendo essa atividade ?
[Aluno 2]: Levanta a mão.
[Professor]: Qual a dificuldade ? A mesma ?
[Aluno 2]: A mesma..
[Aluno 1]: Consigo dividir 4 e 8 sempre 2, 4, 8...
[Aluno 2]: Acabei de fazer dividido por três...
[Professor]: Conseguiu ?
[Aluno 1]: Como foi que tu fez ?
[Aluno 2]: Eu fiz com que a reta tivesse um número ímpar, o comprimento tinha que ser um número ímpar, aliais, um número que dá pra dividir por 3
[Aluno 3]: Aí ?
[Aluno 2]: Eu botei, o comprimento dela 15 e dividi por três e ficou 5 num segmento, 5 no outro e 5 no outro.
[Aluno 3]: Mas como foi que tu colocou 5, 5 e 5 ?
[Aluno 2]: Arrastando os pontinhos.
[Aluno 3]: Ah, ah eu também, só que eu botei o primeiro, depois botei o ponto médio...
[Professor]: Então vamos continuar trabalhando nesta atividade...
[Vídeo] Professor pergunta aos alunos sobre o andamento da atividade sobre divisão de segmento em partes iguais, Aluno 1 coloca suas dificuldades, depois o Aluno 3 levanta as mãos falando sobre suas dificuldades também, já a Aluno 2 explica como fez para fazer a divisão de segmento em três partes iguais. E o Aluno 3 pede explicações sobre o como o Aluno 2 fez a atividade.
[Observação]: Na fala do Aluno 2 percebe-se o uso de um artifício simples, ele fez com que o segmento meça um número n, múltiplo de 3, que dividido por 3 dê como resultado três medidas inteiras, daí ao são colocados os pontos e arrastados pelo *mouse*. E ao movimentar as extremidades do segmento as medidas mantiverem sua proporcionalidade, a solução do Aluno 2 ocorreu pelas características do *software*, e não foi realizada uma construção geométrica que abordasse a temática pretendida que consistia em explorar características do Teorema de Talles. Além disto, o Professor não soube abordar a situação surpresa.

Em suma o Aluno 2 mediu **[AB]**, fazer com que a medida de **[AB]** fosse equivalente a **15 cm** no *software*, colocou dois pontos sobre **[AB],** de tal modo, que pelo arrasto dos pontos pelo mouse fez corresponder a medida dos segmentos resultantes ao valor de **5 cm**, ou seja, a estratégia de resolução primou pelo raciocínio lógico-matemático muito mais que pelo raciocínio matemático propriamente dito.

Nesse episódio, o Aluno 2 usou a “tentativa e erro” como estratégia, não conseguindo elaborar uma generalização que viabiliza-se o entendimento do princípio matemático da divisão de segmentos em partes congruentes pelo Teorema de Talles. Além disto, o software viabilizou o falseamento pela sua estrutura de manipulação. Uma limitação do *software*, não necessariamente, houve a falta de uma mediação interventiva por parte do Professor, que neste caso fui eu, para viabilização do raciocínio matemático. Neste contexto, um procedimento instrumental associado à falta de percepção sobre a situação, por parte do docente, gerou concepções mal elaboradas. Além disto, as manipulações e simulações foram insuficientes para invalidar a construção do Aluno 2. Mas que significa isto em termos didáticos?

As ferramentas computacionais permitem o desenvolvimento de estratégias mentais que falseiam o raciocínio matemático. E por não haver uma mediação interventiva de qualidade, por parte do professor, o problema em questão foi solucionado pela Aluna 2, no entanto, em termos pedagógicos a resolução não gerou a aprendizagem que se pretendia desenvolver junto ao estudante. Não que a construção tenha sido invalida, mas estes tipos de situação surpresa foram mal aproveitados, e geralmente os problemas da ação instrumental são mais complexos em termos argumentativos que aquelas que decorrem de limitações computacionais. O problema aqui não foi à falta de aprendizagem e de interação entre alunos, o que houve foi à aprendizagem dos conceitos que não se pretendia ensinar. Os alunos aprenderam utilizar a estrutura lógica do *software*, mas deixaram de aprender o saber matemático que era o que se pretendia ensinar. Neste sentido, uma seqüência didática deveria prever os aspectos instrumentais diante das estratégias cognitivas dos estudantes para com isso desenvolver formas de intervenção realizáveis juntos aos alunos.

Em suma, as características do *software* não são suficientes para constituírem situações tais para os sujeitos que favoreçam o desenvolvimento conceitual na direção prevista com a elaboração da situação. Cabe a mediação realizada pelo professor como dispositivo pedagógico que faça emergir a aprendizagem que se pretende obter junto aos alunos. No tópico seguinte procuro explorar a ação instrumental no uso de diferentes recursos de representação, bem como, sua relação com as questões epistemológicas que são colocadas pelo saber matemático.

01.3.1 – Régua e Compasso *versus* Computador

Uma das questões sobre uso de instrumentos que surgem ao pensar a passagem do Novo PC ao Velho PC está relacionado à relação entre a produção de saberes matemáticos e o uso de recursos materiais para representação. Pois se em certo aspecto a representação física não constitui o saber matemático, por outro lado, é a partir dela que se realiza a comunicação que viabiliza a interação matemática tanto na comunidade científica quanto escolar. Neste sentido, surge como especulação os questionamentos seguintes:

- A natureza dos recursos materiais para representação de concepções matemáticas, em seu uso instrumental, transforma conhecimentos e saberes?
- No caso específico da geometria, os usos da régua e do compasso em relação ao uso de software de geometria dinâmica, modificam os conhecimentos e saberes nesta área?

Para compreender a dinâmica destes questionamentos, procurei entender a concepção sobre artefatos culturais.

Segundo Luria *apud* Cole (1996: p.87) os artefatos culturais são instrumentos que viabilizam a mediação cultural pois carregam em si significados que permitem os homens interagirem entre si.

> Os artefatos culturais são simultaneamente ideais (conceituais) e materiais. São ideais na medida em que contém, na forma codificada, as interações das quais eles previamente fizeram parte. Tais artefatos existem apenas na medida em que estejam corporificados na materialidade. Isto se aplica à linguagem/discurso tanto quanto às formas de artefato mais usualmente assinaladas. Na medida em que medeiam a interação com o mundo, os artefatos culturais podem também ser considerados instrumentos.

Em outras palavras, instrumentos como régua, compasso e *software* de geometria dinâmica, carregam em si: concepções idealizadas, o dispositivo comunicacional e a construção de significados. Neste sentido, é possível conceber tecnologia de representação como um dispositivo epistemológico e pedagógico que carrega em si uma linguagem autodidática materializada nos instrumentos.

Considerando a concepção sobre artefato cultural do ponto de vista de Cole (1996), é possível considerar concepções “ideais” e “materiais” que viabilizam construir a concepção do que sejam as tecnologias de representação, com respeito ao saber matemático mediante a ação instrumental, no entanto, é preciso entender alguns princípios norteadores com base em Granger (1994), Levy (1996), Cole (1996) e Henri (1997).

Segundo Granger (1994), tecnologia pode ser compreendida não só como instrumento, mas constitui um conjunto de técnicas e processos que transformaram a vida humana ao longo dos séculos, permitindo à superação dos limites físicos. Granger (1994) percebe a tecnologia como uma extensão do corpo, destacando as características instrumentais relativas aos limites humanos. Por exemplo, óculos, telescópios, microscópios são extensões da capacidade humana em poder ver. Além disto Granger (1994) considera que muitas tecnologias tiveram origem acidental na exploração humana do cotidiano, o que Granger (1994) chamou por “empírico”, e aos poucos, com o desenvolvimento matemático-científico foram se desenvolvendo tecnologias mais complexas resultantes da pesquisa.

> Qualificamos, aqui como ‘empíricas’ as técnicas que não estão penetradas de saber científico, tomando a palavra não mais no sentido dos filósofos, mas antes no sentido comum, mais vago, de

> conhecimentos derivados diretamente das experiências e das práticas, e não tiradas de explicações teóricas.
>
> GRANGER (1994: p.25)

A definição de Granger (1994) sobre tecnologia destaca o seu caráter instrumental e neste sentido se poderia conceber as tecnologias de representação, instrumentos que estendem os limites humanos na expressão de idéias complexas. Neste sentido, notação matemática, régua, compasso, computador são ferramentas que viabilizam:

a) O armazenamento de informação matemática;
b) A socialização das idéias internalizadas pelos homens, viabilizando assim a expansão de conhecimentos em saberes matemáticos;
c) A simulação pela representação instrumental, para favorecer novos olhares sobre concepções matemáticas.

Um outro ponto de vista que se pode desenvolver sobre tecnologias está em Lévy (1996) ao discutir o significado da idéia de virtualização. Lévy (1996) ao explorar o significado do termo latino *virtus* cujo significado é potente ou possível, questiona a relação que o senso-comum estabelece ao propor a oposição realidade-virtualização, como se o virtual fosse uma espécie de "não-realidade". Lévy (1996) ao discutir a idéia do virtual a partir do *virtus*, chama atenção não para oposição realidade-virtualização, mas sim, para relação atual-virtual, em que o conceito de atualização consiste no estado da arte, enquanto, o virtual consiste na possibilidade que surge a partir deste estado da arte. No entanto, o que é virtual agora pode se tornar atual, sendo neste sentido, tanto o atual como o virtual, são coisas reais. Por exemplo, ao entrar em uma sala de bate-papo pela Internet, se interage com pessoas reais, ou ainda, ao se comprar com cartão de crédito, não se vê dinheiro, mas a operação virtualizada permite a compra de produtos de fato. Mas qual é a relação destas concepções com o conceito de tecnologia para representação de conhecimentos e saberes? A relação virtualização-atualização em Lévy (1996), expressa a tecnologia enquanto um contínuo processo de concepções ideais e materiais em evolução ininterrupta. Ou seja, compreender a tecnologia atual implica em entender as tecnologias pré-existentes, assim como, compreender a tecnologia do amanhã consiste no entendimento das tecnologias existentes hoje. Há uma relação "filogenética" no desenvolvimento tecnológico de tal modo que se pode dizer que a existência de uma tecnologia resulta do esforço de vários inventores e pesquisadores ao longo dos séculos. No caso das tecnologias de representação do saber matemático, se poderia dizer que régua, compasso e *software* de geometria dinâmica possuem um "parentesco conceitual" estão no mesmo espaço de ação, no entanto, as ações instrumentais realizadas por estas tecnologias são distintas.

Por exemplo, na régua e no compasso o trabalho para construção do ponto médio de um segmento de reta, exige o uso da régua para tracejado das retas e do compasso para construção da circunferência. No computador, o recurso instrumental é somente o *mouse*. No mesmo exemplo, ao traçar uma reta com a régua, o usuário deste instrumento estende a caneta ou giz ao longo da régua sobreposta sobre uma lousa ou um papel.

No computador, o usuário recorre ao comando reta com o *mouse*, e depois faz dois *clicks* sobre regiões distintas da zona-de-desenho. Ou seja, se por um lado o estudante com régua e compasso "sente" a linearidade ao traçar uma reta a partir de uma origem, no computador, o estudante "percebe" que por dois pontos passam uma reta. São ações aparentemente similares mas enunciam de modo subjetivo, concepções diferentes. Neste sentido, a tecnologia exige ações instrumentais que no ato da construção das representações do saber matemático, enunciam concepções prévias, ou seja, uma representação não constitui o saber, mas realiza representações que enunciam conhecimentos, e conseqüentemente, saberes.

Diante destas percepções, as idéias sobre artefato em Luria *apud* Cole (1996: p. 87) também enunciam uma concepção sobre tecnologia, no entanto, estas idéias estão relacionadas às concepções sobre mediação cultural.

> Mediação cultural: Aqui, a idéia básica que pode ser retrospectivamente traçada até a antiguidade e que forma a base de boa parte da teorização antropológica, é a noção de que os seres humanos vivem em um ambiente transformado pelos artefatos das gerações anteriores, estendendo-se até o início das espécies. A função básica destes artefatos é coordenar os seres humanos com o mundo físico e uns com os outros. Em conseqüência, os seres humanos habitam um "mundo duplo", ao mesmo tempo "natural" e "artificial". A cultura, neste sentido, deve ser considerado o único meio da existência humana.

Neste sentido, os recursos tecnológicos são artefatos que viabilizam a mediação cultural, transformando o homem que age sobre estes e os modifica. Neste contexto, a tecnologia enquanto artefato cultural, carrega estruturas simbólicas que regulam as relações entre os seres humanos lhes permitindo interagir. Pois quando um homem toma para si em seu contexto cultural próprio, recursos tecnológicos do seu meio cultural, estes estabelecem contato com os saberes dos seus ancestrais e do seu próximo e no caso dos recursos tecnológicos apropriados à representação este contato é uma oportunidade para o resgate da epistemologia do saber que pretende produzir ou estudar, pois a tecnologia e seus processos modificam estruturas cognitivas do ponto de vista individual e coletivo.

Segundo Luria *apud* Cole (1996: p. 86-88), a mediação cultural muda a estrutura das funções psicológicas humanas, além disto, constituem fenômenos históricos. Considerando as tecnologias de representação do saber matemático enquanto artefatos culturais, se pode considerar que no uso destes instrumentos se produz o ato do conhecer-na-ação, mas ao mesmo tempo, na interação humana um saber da prática se constrói transformando estruturas do saber acadêmico, sejam eles científicos ou escolares, ao longo do tempo.

Na perspectiva acima exposta, um exemplo está no uso que os gregos faziam da régua e do compasso. Para eles estes recursos tecnológicos funcionavam como meios computacionais. As idéias sobre adição e subtração de segmentos, bem como, a multiplicação e divisão dos mesmos, com base nos pressupostos sobre o Teorema de Talles ocorriam através das construções geométricas. A matemática era estudada em caráter científico, no entanto, os teoremas produzidos associados às construções geométricas enunciavam algoritmos que viabilizavam o trabalho aritmético.

Segundo Wagner (1998: p. 1) “as construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C. na época dos pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega”.

Não sabemos ao certo as origens da régua e do compasso, tal como se conhece hoje, no entanto, se sabe que a partir dos gregos surgiu uma espécie de álgebra geométrica em que a palavra *construir* era o sinônimo do termo *resolver*, além disto, nesta álgebra geométrica equações do tipo ***ax = b***, comuns no na atualidade, não tinham significado para os gregos antigos, pois o lado esquerdo da equação (***ax***) estava associado à área de um retângulo, deste modo, era compreensiva expressão do tipo ***ax = bc*** que significava dizer para encontrar a altura ***x*** de um retângulo de base ***a*** que tivesse a mesma medida de área de um retângulo de dimensões ***b*** e ***c***. O problema consiste em comparar medidas de comprimento e área. Logo, os objetivos matemáticos estavam relacionados às possibilidades de construção de segmentos e circunferências por meio do Velho PC, no entanto, havia entre os gregos a concepção de validação de conhecimento com base em argumentos racionais firmados em aspectos relativos às propriedades geométricas das figuras. Neste sentido, a construção geométrica é um meio pelo qual se apresentam novos problemas, bem como, um recurso para resolução de problemas matemáticos.

Se os usos instrumentais de tecnologias de representação enunciam percepções distintas e estão apropriadas a um certo contexto cultural, se pode considerar que o Novo PC, com visualizações dinâmicas, simulações e manipulações exercem transformações cognitivas na mente dos estudantes de hoje que hão de ser os pesquisadores e professores do amanhã. No entanto, o risco em se esquecer o velho em função do novo é uma realidade também, e a perda da compreensão epistemológica e histórica do saber matemático é um dos elementos que coloca seu ensino em crise. Neste sentido, ao desenvolver software educativo voltado ao ensino de matemática, se torna necessário à equipe de desenvolvimento ter em mente uma engenharia pedagógica para que o software, enquanto artefato cultural, viabilize em sua manipulação o resgate de questões epistemológicas, mas o que constitui a engenharia pedagógica?

> *L´ingénierie pédagogique désigne l´emsemble des processus mis en œuvre pour produire de façon systémique et planifiée un produit ou un environnement d´apprentissage. Ces processus vont de l´analyse initiale des besoins jusqu´à la livrasion, l´entretien et la révision continue du produit fini. Dans le domaine des sciences de l´education, on utilize aussi le term design lorsqu´il s´agit de concevoir et développer des produits ou des environnements d´apprentissage. Il n´existe pas d´unanimité chez les auteus œuvrant dans le domaine quant au sens spécifique à donner aux termesin ingénierie pédagogique et design pédagogique.*
>
> HENRI (1997: p. 1) [23]

Segundo Henri (1997: p.3-17), a engenharia pedagógica, é uma metodologia para o desenvolvimento de tecnologias para representação de saberes, do ponto de vista educativo está centrado nas idéias sobre modelização de conhecimentos, concepções pedagógicas e nas concepções midiáticas e a partir destes princípios são constituídas as seguintes etapas, que procurarei expor de modo suscinto:

a) Analise preliminar: Compreender e coletar dados sobre os conhecimentos e saberes envolvidos, as concepções pedagógicas e as estruturas midiáticas mediante o problema tecnológico em questão;
b) Concepção sobre o *designer* pedagógico: A partir das estruturas acima expostas é definido um *designer* pedagógico que constitui uma solução aos questionamentos que uma tecnologia visa responder. A partir deste *designer*, se desenvolve uma

[23] Tradução: A Engenharia pedagógica designa um conjunto de processos posto para produção sietemática e planejada de um produto ou ambiente de aprendizagem. Estes processos vão da analise inicial até à de necessidades para livre, manutenção e atualização contínua do produto final. É um domínio das ciências educacionais, e se usa este termo para desígnar qualquer ação para concepção e desenvolvimento de produtos ou ambientes de aprendizagem. Não existe unanimidade entre os autores que trabalham neste domínio sobre a especificidade dada aos termos engenharia pedagógica e *designer* educacional.

arquitetura que deve contemplar material para formação do usuário, e indo além disto, estes materiais devem levar em conta não só a formação do ponto de vista instrumental material, mas também do ponto de vista conceptual visando o resgate dos aspectos epistemológicos mediante idéias pedagógicas e midiáticas no sentido da mediação cultural e os meios de comunicação;

c) Realização do material: Após a fase do *designer* ocorre a implementação do ponto de vista material e midiático;
d) Validação: São averiguações sobre o produto implementado produzido a partir de pilotos, testes de usabilidade, analise ergonômica para correção e revisão nas perspectivas da modelização de conhecimentos, das concepções pedagógicas, bem como, da modelização midiática
e) Difusão: Trata-se das estratégias de distribuição do recurso tecnológico;
f) Gestão do produto: Consiste na administração, reparação e evolução do recurso tecnológico ao longo do seu tempo de vida.

Com base na engenharia pedagógica, recursos para representação de saberes podem ser viabilizados dentro de perspectivas que considerem os fatores epistemológicos e os aspectos da mediação cultural mediante os instrumentos de midiáticos de comunicação.

No sentido do uso instrumental, a passagem do Novo PC ao Velho PC pode ser uma ferramenta útil ao desenvolvimento de estratégias e de dispositivos pedagógicos que contemplem os aspectos epistemológicos em *software* educativo de matemática, bem como, podem considerar aspectos que viabilizem instrumentos para avaliação dos produtos educativos voltados ao ensino de matemática, considerando os recursos em si e os materiais voltados à formação para o uso destas ferramentas. No entanto, um trabalho apurado, que considere tais questionamentos pretendo desenvolver em pesquisas futuras sobre o uso de instrumentos no ensino de matemática.

No capítulo a seguir, apresentarei a metodologia da pesquisa em questão fazendo discussões sobre a engenharia didática e a Seqüência Fedathi com respeito à passagem do Novo PC ao Velho PC.

Capítulo 02 – Trabalhando com professores e alunos de matemática através do computador

No capítulo anterior, foram apresentados os pressupostos teóricos que fundamentam a pesquisa vigente. Concepções sobre validação e demonstrações em matemática, a investigação matemática enquanto metodologia de ensino-aprendizagem em aula, a ação reflexiva com respeito ao trabalho do aluno e a postura do professor, bem como, os conceitos sobre situações surpresa, limitações computacionais na interação homem-máquina-saber e a ação instrumental constituem o alicerce teórico da passagem do Novo PC ao Velho PC.

O que procurarei apresentar a seguir, são as concepções metodológicas que fundamentam a prática do pesquisador considerando os procedimentos metodológicos, as dificuldades que surgiram ao longo da pesquisa e também farei uma exposição dos dados coletados mais relevantes à discussão que há de se seguir no capítulo posterior. A partir deste ponto, a idéia consiste em apresentar ao leitor como a engenharia didática está sendo trabalhada no Laboratório Multimeios, bem como, a construção da Seqüência Fedathi enquanto metodologia que trabalha a mediação pedagógica no intuito de favorecer as investigações matemáticas em aula junto aos docentes e discentes do CMF[24], professores da Escola Estadual “Tecla Ferreira” e os alunos da Escola Municipal “Monteiro de Moraes”. Ambas escolas situadas na cidade de Fortaleza, estado do Ceará.

02.1 - A Metodologia e os Procedimentos de Pesquisa

Como foi dito acima, as articulações metodológicas desta pesquisa envolvem duas concepções teóricas distintas, respectivamente a engenharia didática e a Seqüência Fedathi. A seguir procurarei detalhar aspectos destas concepções pontuando a articulação das mesmas nesta pesquisa. Após esta

---

[24] Colégio Militar de Fortaleza.

descrição detalharei os procedimentos metodológicos em sua realização na pesquisa de campo.

02.1.1 – A Engenharia Didática e a organização da pesquisa

O termo engenharia didática é utilizado para designar uma metodologia de pesquisa utilizada no meio educacional. Enquanto metodologia, a engenharia didática permite a organização de sessões didáticas de curta, média e longa duração pois viabiliza a organização das seqüências didáticas que possam ser aplicáveis durante o processo formativo.

Uma outra característica desta metodologia consiste nesta viabilizar tanto ações docentes convencionais, como ações de pesquisa e num último caso ações relativas à produção de materiais didáticos. Para compreender melhor isto, vou recorrer a um exemplo. Imagine que um professor queira trabalhar um assunto específico como, por exemplo, equação do segundo grau com estudantes de sexta série (ciclo III), o assunto é parte do programa do sistema educacional em que este professor está inserido, e neste caso, a engenharia didática funciona como metodologia para favorecer suas ações didáticas durante o momento das suas aulas. Por outro lado, se um pesquisador em educação matemática quiser compreender um determinado fenômeno, ou mesmo, comprovar uma hipótese sobre as estruturas cognitivas envolvidas no processo de aprendizagem dos estudantes sobre o assunto equações do segundo grau, ou ainda, se o professor quiser entender aspectos da formação do professor relacionados ao tópico que está sendo ensinado, nestas circunstâncias, a engenharia didática estará sendo utilizada como metodologia de pesquisa.

Uma outra possível aplicação da engenharia didática, se associa à idéia da elaboração de materiais didáticos. Neste sentido, esta metodologia é equivalente a um tipo de engenharia pedagógica (cf. 123 – 124). Usando o exemplo das equações de segundo grau, imagine que um grupo de editores quer testar as atividades de uma apostila sobre equações do segundo grau na formação de estudantes do Ensino Fundamental da sexta série de escolas públicas e particulares. Neste caso, o objetivo consiste em averiguar a relação ensino-aprendizagem, não em função dos alunos, mas sim para testar o material desenvolvido.

Nos três casos, a engenharia didática se presta ao desenvolvimento e organização de sessões didáticas, no entanto, a perspectiva metodológica que ela assume, depende dos objetivos de trabalho em aula, no caso deste trabalho, a engenharia didática está sendo trabalhada uma metodologia de pesquisa na área educacional para averiguar os fenômenos envolvidos na passagem do Novo PC para o Velho PC com professores e estudantes do Ensino Fundamental de quinta a oitava série (ciclos III e IV). Logo, a perspectiva minha sobre este assunto daqui para frente visa esclarecer esta metodologia na ótica de um pesquisador em educação.

A engenharia didática foi desenvolvida na França por Michele Artigue, é considerada parte da Escola Francesa de Didática da Matemática e visa trabalhar a implementação e desenvolvimento de realizações didáticas. Segundo Gravina (2001: p.99-100), esta metodologia adota princípios gerais da teoria piagetiana ao privilegiar os funcionamentos cognitivos que concorrem para o aprendizado. E isto seria perceptível no espaço que o aluno possui dentro desta metodologia. Além disto, a engenharia didática faz uso de concepções da teoria das situações didáticas de Guy Brosseau que visa compreender as relações que são estabelecidas em momentos de formação. Para entender melhor a engenharia didática considere uma síntese dos conceitos centrais da Escola Francesa de Didática da Matemática.

i) Situações didáticas: B rosseau *apud* Machado (1999: p. 67), define situações didáticas como:

> [...] um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição... o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes.

Em outras palavras, o conjunto de relações estabelecidas entre o professor, o aluno e um saber, e arrisco adicionar, recursos tecnológicos de ensino, constituem o que é concebido como situação didática. Segundo Brosseau *apud* Pais (2001: p. 65-67), é nas múltiplas relações que envolvem o trinômio professor, alunos e saber que se estabelecem as situações didáticas, no entanto, ao considerar que um saber é socializado, devo levar em consideração "meios de ensino", por motivos como este faço questão em acrescentar os recursos tecnológicos de ensino. Em suma, é no campo de atuação das situações didáticas que se estabelece a ocorrência dos fenômenos didáticos

ii) <u>Situações a-didáticas:</u> Segundo Pais (2001: p.68-69), são aspectos dos fenômenos de aprendizagem, em que não ocorre uma intencionalidade pedagógica direta ou o controle didático por parte do professor. No entanto, o próprio Pais (2001) reconhece que a expressão "situações a-didáticas" em relação a sua definição parece ser algo contraditório, pois num certo sentido, este tipo de situação ao afetar as relações didáticas acabam por interferir no andamento das situações didáticas em si.

iii) <u>Contrato didático:</u> Esta definição foi apresentada anteriormente (cf. 93), no entanto, vale ressaltar que está concepção constitui um dos fenômenos didáticos mais influentes em situações de ensino-aprendizagem. Pode-se dizer que trata-se do conjunto de expectativas e comportamentos que os alunos têm sobre o professor e vice-versa. O contrato didático pode ser estabelecido implica e explicitamente entre o professor e o aluno. Além disto, o contrato didático revela aspectos da gestão docente em aula, bem como. Segundo Pais (2001: p. 78), as concepções sobre contrato didático em Brosseau foram fundamentados nas idéias sobre contrato social de Rosseau, bem como, na concepção sobre contrato pedagógico em Filloux.

iv) Transposição Didática: Segundo Pais (2001: p. 17) pode ser compreendida como um caso específico de transposição dos saberes. Deste modo, antes de perguntar o que é a transposição didática se deve questionar o que significa transposição de saberes. Para Khun *apud* Pais (2001: p. 17-18), ao considerar o saber como um conjunto de paradigmas (no sentido de princípios e regras) que os membros de uma comunidade científica compartilham entre si, uma produção intelectual para que seja considerada científica deve respeitar as normas e princípios aceitos pela comunidade científica[25]. Nesta perspectiva, um dos objetivos dos sistemas escolares, e do professor, consiste em propor aos alunos o ensino do saber científico como um saber a ensinar, neste aspecto, Chevallard *apud* Pais (2001: p.19) apresenta a noção de transposição didática:

> *Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.*

Munidos destas concepções da Escola Francesa de Didática da Matemática, já posso definir o que constitui a engenharia didática e detalhar suas fases.

[25] Na percepção que tenho sobre a definição de PAIS sobre o saber, esta apenas expressa o significado do saber científico, desconsiderando outros saberes (como por exemplo, a Filosofia e as Artes), logo, reconsiderando KHUN, compreendo o saber, com base em Brousseau apud Machado *et al.* (1999: p. 15) como o conjunto de paradigmas que os membros de uma comunidade acadêmica compartilham entre si. Já o conhecimento seria a produção intelectual humana não pertencente aos círculos intelectuais especializados. Sendo assim, se pode dizer que a maioria das pessoas detém conhecimentos matemáticos, no entanto, somente a comunidade acadêmica matemática detém o saber matemático. Por outro lado, algo que é tido como um conhecimento pode vir à tornar-se saber, se e somente se, a comunidade acadêmica assim o aceitar, neste aspecto haveria uma espécie de “mobilidade social” dos conceitos, e a estrutura acadêmica é um dos mecanismos de validação do saber acadêmico e da produção intelectual humana.

A engenharia didática é um tipo de pesquisa-ação participante baseada em esquemas experimentais e segundo Pais (2001: p. 99-100), nela está implícita uma analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro com respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto. Segundo Artigue *apud* Machado *et al* (1999: p. 198-199):

> *[...] este termo foi "cunhado" para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle do tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta... a engenharia didática pode ser compreendida como um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala-de-aula, isto é, sobre a concepção e a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino.*

Na atualidade, no Laboratório Multimeios FACED/UFC, a utilização da engenharia didática para desenvolver seqüências didáticas não é realizada para preparação de uma sessão de estudo, mas como um recurso metodológico para desenvolvimento de cursos com várias sessões de curta e média duração, bem como, para elaboração de materiais para o ensino assistido por computador e para educação à distância nos ensinos de matemática, física e biologia. Uma outra questão diz respeito às etapas que constituem esta metodologia são estas:

Análise preliminar: É o processo que corresponde à análise geral dos aspectos envolvidos no ensino do conteúdo que se pretende ensinar. Nesta fase, são estudados os aspectos epistemológicos, sócio-culturais, psicológicos, ergonômicos, didáticos que envolvem os conteúdos que se pretende ensinar.

Algumas pessoas chegam a confundir este processo com o levantamento bibliográfico, no entanto, a engenharia didática é uma análise de situações didáticas que podem ocorrer ao se ensinar um determinado conteúdo. Dentro desta etapa ocorre a contextualização do que se pretende ensinar dentro do contexto das situações didáticas, bem como, a tentativa em compreender situações a-didáticas que podem surgir ao longo de um processo de formação. E nesta etapa se deve buscar entender a institucionalização dos processos ao longo do processo formativo.

Análise *a priori*: Consiste na elaboração das seqüências didáticas. São levados em consideração os dados coletados na análise preliminar, bem como, as hipóteses do pesquisador sobre os fatores que podem ocorrer ao longo da aplicação de cada sessão de formação em um curso. Nesta etapa são desenvolvidos materiais de apoio como: apostilas, atividades e são pensadas todas as hipóteses como variáveis de controle da pesquisa. Por este motivo, nesta etapa, intervenções e mediações são trabalhadas, bem como, a formação da equipe de pesquisa.

Experimentação: É a aplicação das seqüências didáticas em cursos de formação, é o momento de realização de um curso. Nesta etapa o pesquisador pode validar ou invalidar suas hipóteses didáticas que foram estabelecidas ao desenvolver sua análise *a priori*.

Análise *a posteriori*: Trata-se da verificação das hipóteses definidas na análise *a priori*, de modo que seja possível comparar as seqüências didáticas com os resultados de experimentação, em outras palavras, trata-se de uma confrontação do real em relação ao ideal.

Para viabilizar este trabalho, ocorreu uma análise *a posteriori* específica feita após cada sessão, e ao final de um curso ocorre a análise *a posteriori* é proposta como uma avaliação final que envolve o trabalho dos professores e dos alunos.

Outro dado que deve ser considerado, é que em certo sentido, tanto as engenharias didática e pedagógica são similares, entretanto, a primeira está centrada em aspectos do trabalho do professor, já na segunda os questionamentos estão centrados na produção de recursos tecnológicos de ensino, ou ainda, no desenvolvimento de estruturas de ensino que tornem tecnologias autoformativas. Ou seja, uma engenharia didática é pedagógica quando são pensados recursos materiais para formação em uma determinada área do saber e este fato é muito comum em áreas como educação a distância, inclusão digital, bem como, ao se desenvolver *software* educativo. Procurarei a seguir abordar a Seqüência Fedathi e sua relação com a engenharia didática.

02.1.2 – A Seqüência Fedathi como Mediação Pedagógica

A Seqüência Fedathi é uma proposta metodológica desenvolvida por professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará. Estas pessoas constituem o Grupo Fedathi, e este foi formado no início dos anos 1990 para tratar de questões relativas à didática da matemática.

Entre 1997 e 1998, Borges Neto, coordenador do Grupo Fedathi, desenvolveu uma seqüência didática com base em sua experiência como matemático e como professor de matemática, de modo que fosse viável aos professores criar condições e possibilidades para que os estudantes de matemática na Educação Básica e no Ensino Superior pudessem ter uma experiência significativa quanto à aprendizagem matemática do ponto de vista das investigações matemáticas. A idéia fundamental consiste em colocar o estudante na posição de um matemático, por meio de processos que envolvem a apresentação de atividades aos alunos. Neste aspecto não há grandes novidades, pois Polya (1978) propunha a resolução de problemas e o desenvolvimento heurístico como uma didática, no entanto, o diferencial da proposta de Borges Neto está na compreensão da relação ensino-aprendizagem com base nas posturas e mediações do professor, enquanto que a preocupação de Polya está centrada no desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas por parte dos alunos.

Entre 1999 e 2002, várias experiências com a Seqüência Fedathi foram realizadas em pesquisas sobre didática da matemática assistida por computador, no entanto, alguns estudantes de pós-graduação utilizaram a Seqüência Fedathi na estruturação de cursos que envolviam informática educativa em diversas áreas do saber no Centro de Referência do Professor, órgão pertencente à Prefeitura Municipal de Fortaleza.

Vários cursos que envolviam a informática educativa utilizaram a Seqüência Fedathi como metodologia pedagógica para o desenvolvimento de atividades em cursos de formação docente e discente. Na atualidade, muitos questionamentos estão sendo propostos sobre a Seqüência Fedathi, e existe o desenvolvimento de articulações desta com a engenharia didática, bem como, com conceitos desenvolvidos pela escola francesa de didática da matemática.

Na atualidade a Seqüência Fedathi, é aplicada envolvendo a articulação entre os conceitos apresentados acima, no entanto, para compreender integralmente a relação entre estes conceitos é preciso averiguar as etapas que estruturam a Seqüência Fedathi enquanto uma seqüência de ensino, portanto, a aplicação da Seqüência Fedathi em uma sessão de estudo se divide nas seguintes fases segundo Souza (2001: p. 83-84):

Tomada de Posição: Corresponde à apresentação de um problema para um aluno ou um grupo de alunos, de modo que seja possível relacionar a situação proposta com o saber que deve ser ensinado, ou seja, neste momento é feita a transposição didática.

Nesta fase são estabelecidas as regras implícitas e explícitas entre professor e alunos, fato que implica no estabelecimento do contrato didático para que sejam estruturados as posturas e comportamento entre professor e aluno. Neste momento, cabem ao professor em aula, diagnosticar condições possibilidades em que os alunos estão em relação à aprendizagem dos conteúdos em questão.

No caso do ensino de matemática, os problemas propostos remetem o aluno ao estudo com base em situações gerais apresentadas por meio de conjecturas matemáticas, fator correspondente ao processo de investigação matemática, no entanto, em outros tipos saber, cabe ao professor elaborar atividades que estejam devidamente contextualizados em relação ao saber acadêmico.

O objetivo da tomada de posição consiste em criar os elementos necessários a imersão cultural do aluno na estrutura de saber que se pretende ensinar, como se o mesmo fosse o pesquisador, neste sentido, cabe ao professor colocar-se em uma postura de colaboração, enquanto um "pesquisador" mais experiente, e não como o detentor único do saber que se pretende estudar. Tal processo é essencial ao desenvolvimento da segunda fase;

Maturação ou Debruçamento: Nesta etapa cabe ao professor iniciar discussões com o aluno sobre a atividade em questão, ao longo de uma sessão o professor pode propor ao aluno que este desenvolva seus raciocínios incentivando sua argumentação.

Neste estágio, o estudante deve reconhecer o significado das conjecturas apresentadas na fase anterior e a partir deste reconhecimento, gradativamente, cabe ao aluno trabalhar mais sobre a atividade em questão, enquanto o professor aos poucos se afasta para que o aluno possa pensar sobre as dificuldades e estratégias para a atividade em curso. No entanto, não significa que o professor está livre, cabe ao professor observar como os alunos desenvolvem suas ações, bem como, cabe questionar os mesmos no intuito de buscar novas estratégias.

Nesta etapa, um professor pode assumir o papel de um pesquisador em educação matemática, averiguando e analisando as construções mentais dos estudantes, mas em hipótese alguma cedendo, no sentido de resolver uma atividade para um aluno.

Nesta fase, o professor deve perceber se existe desmotivação nos alunos, bem como dificuldades de relacionamento, e aqui deve propor a integração em equipe para realização do trabalho matemático.

Nesta etapa é adequado o uso de anotação por parte dos alunos, pois o registro, seja ele estruturado ou não gera o hábito com respeito a linguagem matemática e viabiliza novas concepções. Não se pode esquecer que o esboço ou rascunho é parte da construção de idéias matemáticas é nele que se revela a liberdade de pensamento e a intuição do estudante.

Solução: Neste processo o professor deve propor aos alunos organizar e sistematizar suas respostas à atividade em questão, tendo em vista que as idéias propostas devem ser apresentadas ao grupo para que possam ser comparadas, rebatidas e discutidas entre os estudantes e o professor.

No entanto, cabe ao professor estar atento para que não haja confrontação entre os alunos, principalmente os adolescentes. Nesta situação o professor pode mostrar aos alunos que a construção de conhecimentos e saberes matemáticos envolve erros e acertos, neste sentido, o professor deve valorizar todas as soluções apresentadas independentes de estarem ou não corretas. Por outro lado, o aluno deve ser conscientizado de seus erros sendo preparado para os novos desafios que se impõem;

Prova ou Justificação: Nesta etapa a solução mais correta para a atividade desenvolvida por todos os alunos é sistematizada pelo professor, e é neste momento que são estabelecidas as relações que envolvem o saber em questão e o processo de validação do saber do ponto de vista formal.

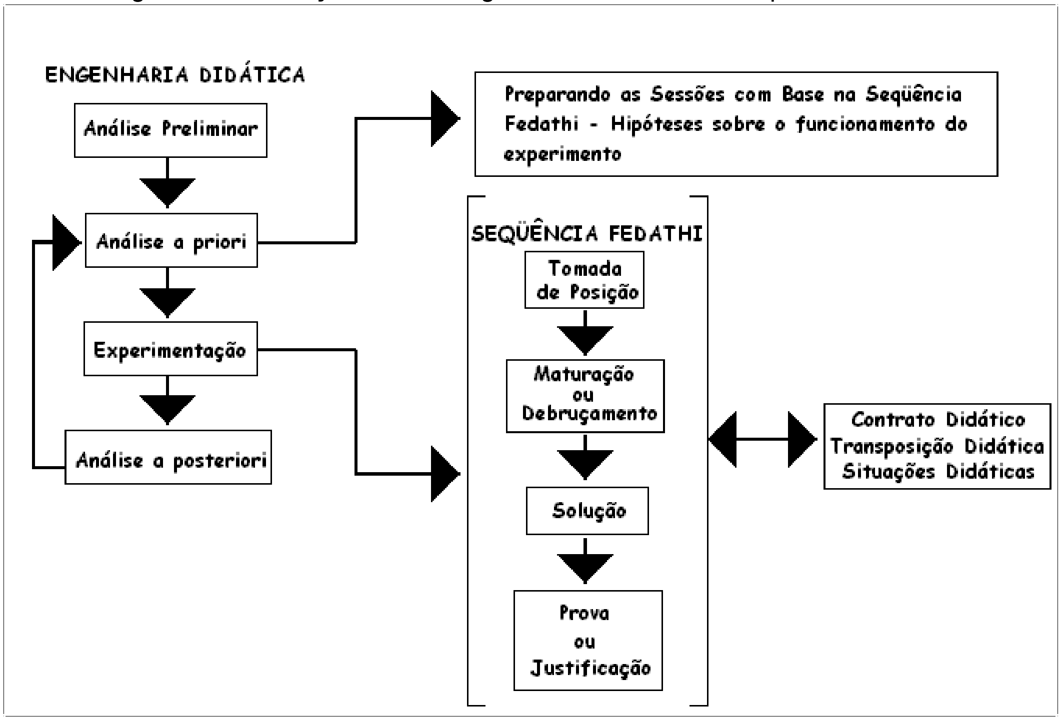
Na matemática é o momento em que são apresentadas as demonstrações rigorosas para as conjecturas apresentadas.

Tendo compreensão sobre a Seqüência Fedathi, suas etapas, desenvolvimento e articulações, surgem questionamentos sobre a integração desta com a engenharia didática. É necessário salientar que a Seqüência Fedathi é um modelo metodológico para construção de seqüências didáticas, no entanto, a Seqüência Fedathi ocorre no desenvolvimento das atividades matemáticas apresentadas aos estudantes.

Como no Laboratório Multimeios se faz uso da engenharia didática para implementação e desenvolvimento de um curso, o papel da Seqüência Fedathi está centrado na postura do professor.

Em certo aspecto se espera que o professor assuma diante dos alunos a postura de um pesquisador mais experiente que seus alunos, ou seja, um orientador. E assim consiga realizar atividades que viabilizem aos alunos compreender o saber matemático em sua vivência trata-se de uma espécie de mediação imersiva.

Figura 20 – A relação entre a engenharia didática e a Seqüência Fedathi.



Compreender a Seqüência Fedathi como um processo de mediação, requer inicialmente, que seja entendido o que estamos chamando por mediação. Logo, para um esclarecimento deste questionamento, tomemos alguns dos princípios desenvolvidos por Vigotsky (1998: p. 1-10) que consistem em propor, a princípio, a fala humana, não somente como um sistema de comunicação entre indivíduos, mas também como um sistema que viabiliza a organização do pensamento de cada indivíduo. Neste aspecto, Vigotsky (1998) compreendia que, ao longo do desenvolvimento evolucionário, a comunicação e o pensamento desenvolviam-se como estruturas psíquicas separadas, no entanto, na evolução humana tais estruturas acabaram por fundir-se nas ações e operações humanas, de tal modo que, foi possível ao homem o estabelecimento de elos que envolvem a comunicação e o pensamento.

Deste modo, a tese de Vigotsky (1998: p.7-8), consiste em propor a princípio a fala como elemento de organização do pensamento humano.

> *A transmissão racional e intencional de experiência e pensamento a outros requer um sistema mediador, cujo protótipo é a fala humana, oriunda da necessidade de intercâmbio durante o trabalho.*

> *De acordo com a tendência dominante, até recentemente a psicologia tratou o assunto de um modo demasiadamente simplificado. Partiu-se da hipótese de que o meio de comunicação era o signo (a palavra ou o som) ; que por meio de uma ocorrência simultânea, um som podia associar-se ao conteúdo de qualquer experiência, servindo para transmitir o mesmo conteúdo a outros seres humanos.*
> *No entanto, um estudo mais profundo do desenvolvimento da compreensão e da comunicação na infância levou à conclusão de que a verdadeira comunicação requer significado – isto é, generalização -, tanto quanto signos ...*
> *Assim, a verdadeira comunicação humana pressupõe uma atitude generalizante, que constitui um estágio avançado do desenvolvimento do significado da palavra. As formas mais elevadas da comunicação humana somente são possíveis porque o pensamento do homem reflete uma realidade conceitualizada. É por isso que certos pensamentos não podem ser comunicados às crianças, mesmo que elas estejam familiarizadas com as palavras necessárias. Pode ainda estar faltando o conceito adequadamente generalizado que, por si só, assegura o pleno entendimento...*

Para Vigotsky (1998: p. 5), o significado é proposto como a unidade de estudo do pensamento verbal, e foi no significado, que ele estruturou sua relação entre o pensamento e a fala que até os dias de hoje, em alguns casos, são estudados por muitos autores como estruturas independentes. Segundo Cole (1996: p. 86-87), o axioma fundamental da escola sócio-histórica, consiste em dizer que:

> *[...] as funções psicológicas humanas diferem dos processos psicológicos de outros animais porque são culturalmente mediadas, historicamente desenvolvidas e emergem da atividade prática.*

As concepções já discutidas sobre mediação cultural e artefatos, bem como, a concepção sobre significado, viabiliza entender a relação signo-significado, presente nas palavras, nos desenhos, nos instrumentos, de tal modo que é possível compreender o homem como produto do meio em Vigotsky (1998) e este por sua vez, como produção do pensamento humano com base em sua cultura.

No entanto, a relação homem-meio decorreu (e ainda ocorre), da ordem natural dos fatos que envolvem a evolução biológica, bem como, o desenvolvimento das culturas e as relações históricas construídas espontaneamente ao longo de séculos. Neste sentido, mesmo que a escola seja considerada como um produto destas relações, o mesmo não se pode dizer que ocorra dentro de um ambiente escolar de ensino-aprendizagem naturalmente.

Na sala-de-aula, a mediação é tida tradicionalmente, como uma relação de via única, em que o aluno está subordinado ao professor e este ao sistema escolar e seus programas de formação, tal fato decorre da existência de objetivos escolares que se pretende cumprir ao longo do ano escolar. Logo surge como questão: Como superar uma estrutura de controle, sem ter que abrir mão do domínio docente frente os discentes? Este é, um grande paradoxo escolar existente na prática docente na sala-de-aula atualmente. Neste aspecto Freire (1997: p. 24) ao discutir a relação docente/discente mencionou que: “A reflexão crítica sobre a prática se torna uma exigência da relação Teoria/Prática sem a qual a teoria pode ir virando blábláblá e a prática ativismo”.

Neste sentido, a Seqüência Fedathi é um processo de mediação, enquanto ação docente, que propõem a imersão do discente na prática do pesquisador que desenvolve o conteúdo que se pretende ensinar. Sendo assim, o papel do professor consiste em criar condições e possibilidades para que o aluno seja colocado na posição de pesquisador, e tal fator somente ocorre quando o professor, ao preparar sua seqüência de ensino, exerce uma postura meta-reflexiva frente o aluno respeitando-o como um sujeito construtor de conhecimentos, bem como, reconhecendo a si mesmo, como um agente ativo na construção do saber que pretende ensinar.

Nesta postura, o professor não sabe “todas as coisas”, mas sim, é um pesquisador com mais experiências e saberes sobre o que pretende ensinar que seus alunos. Por outro lado, a Seqüência Fedathi permite que o docente, enquanto pesquisador mais experiente que seus alunos, e como um pesquisador em didática, torna-se gestor do processo de modo que lhe seja possível analisar, compreender, motivar e formalizar o conhecimento desenvolvido pelos alunos considerando acertos e erros como parte do processo de aprendizagem dos alunos.

Ao considerar a Seqüência Fedathi frente etapas proposta por Ponte (2003) para descrever os momentos de uma investigação matemática, se pode observar que estes momentos constituem as idéias básicas da Seqüência Fedathi (cf. p. 133-136), no entanto, a Seqüência Fedathi procura contemplar ás concepções sobre a investigação matemática uma mediação imersiva que viabilize ao estudante vivenciar uma experiência matemática que lhe seja investigativa através da postura do professor, e este fato exige que o professor de matemática tenha compreensão epistemológica sobre sua área de ensino compreendendo os aspectos históricos e filosóficos que envolvem a ciência que está sendo ensinada. Neste sentido, a Seqüência Fedathi poderia ser usada em outras áreas do saber acadêmico, no entanto, tal uso requer que o pesquisador, ou mesmo o professor, tente observar e compreender o saber que pretende ensinar em sua perspectiva epistemológica compreendendo o saber em sua gênese filogenética e ontogenética, ou seja, o papel de um professor de matemática para o uso destas metodologias exige uma mudança de concepção na formação de professores nas licenciaturas.

Tendo como base a engenharia didática e a Seqüência Fedathi, a seguir vou descrever os procedimentos metodológicos da pesquisa em questão, apresentando alguns dados descritos dos grupos pesquisados, além disto pretendo preparar a a apresentação dos dados coletados sobre a experimentação e as situações surpresa durante a pesquisa de campo.

02.1.3 – Procedimentos de coleta de dados

A pesquisa de campo foi realizada em cinco fases distintas entre 2003 e 2004. Respectivamente podem ser descritas como:

Fase 01: Experimentação em software educativo: Consistiu na elaboração de situações surpresa, a partir da manipulação em *software* educativo voltado ao ensino de matemática. Neste caso, resultados obtidos entre 1997 e 2002 foram testados em *softwares* distintos para averiguar a generalidade de algumas situações surpresa, bem como, outras situações novas foram encontradas entre 2003 e 2004, inclusive nos cursos de formação que constituem as fases 02, 03 e 04. Além disto, este processo contribuiu para compreensão da representação de conhecimentos matemáticos através de recursos computacionais e também estes experimentos contribuíram na elaboração de *software* educativo de geometria dinâmica, bem como, para preparação de seqüências didáticas para pesquisa de campo no ambiente escolar. Esta fase teve realização no Laboratório Multimeios FACED/UFC, e para isto os recursos utilizados foram um computador com acesso a Internet. Nestes experimentos, as situações surpresa iam sendo produzidas por meio da manipulação de recursos computacionais mediante simulações e animações computacionais. As conjecturas iam sendo produzidas e averiguadas ao longo do trabalho. Os dados foram coletados através de protocolos desenvolvidos com intuito em se trabalhar a reprodução das situações surpresas encontradas no computador (Anexo 5).

Fase 02: Formação dos professores no CMF: Foi realizado um curso sobre "ensino de matemática assistido por computador" entre 02 e 06 de fevereiro de 2004 no Laboratório de Informática do CMF. Foi aplicado um questionário que permitiu obter dados para caracterização dos sujeitos, e se utilizou recurso de filmagem para compreensão das situações didáticas em aula. Além disto, houve uma engenharia didática que resultou na preparação de uma seqüência com 11 atividades sobre construções geométricas e foram preparados tópicos educacionais sobre o uso do computador no ensino de matemática.

O *software* utilizado, foi o *Cabri Géomètre II for Windows*, e na equipe de pesquisadores havia 4 pessoas. O Professor, mais 3 bolsistas CNPq/PIBIC[26] integrantes do Laboratório Multimeios FACED/UFC.

Os bolsistas revezavam-se entre si nas filmagens, um deles tinha como papel ajudar nas observações em cada sessão, quanto o outro bolsista auxiliava o Professor em suas mediações, além disto, todos eram responsáveis por checagem dos computadores e instalações de *software*.

[26] CNPq :Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico Tecnológico.
PIBIC: Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica.

Ao todo foram 5 sessões, sendo que cada uma tinha duração de duas horas (10 horas/aula). E Ao todo participaram deste grupo 14 professores sendo 10 do CMF e 4 da Escola Estadual de Educação Básica “Tecla Ferreira”.

Os objetivos deste curso consistiam em selecionar dois professores para que suas turmas fossem contempladas na pesquisa de campo com os discentes.

Um outro objetivo consistia em formar a equipe de pesquisa para os cursos posteriores com os discentes considerando o uso de recursos de filmagem, aspectos da mediação, preparação dos recursos do ambiente e a transcrição dos dados. Também foram significativas as contribuições dos bolsistas nas análises *a posteriori*, pois os bolsistas conseguiam perceber aspectos distintos da formação e isto ajudou no exercício meta-reflexivo e metacognitivo, visto que nos cursos de formação geralmente eu assumi o papel do Professor para realização de intervenções e mediações apropriadas a passagem do Novo PC ao Velho PC, e nestes casos, se não tivesse a presença dos bolsistas muitas situações passariam desapercebidas.

Um outro aspecto, consistia em compreender o comportamento docente mediante a passagem do Novo PC ao Velho PC, ou seja, como os professores de matemática reagem quando os mesmos estão na posição dos discentes nesta metodologia.

Um aspecto desta formação, consistiu em trabalhar nas sessões iniciais a fundamentação teórica sobre a pesquisa em andamento com objetivo em trabalhar a formação destes professores para o uso de tecnologias computacionais no ensino de matemática.

Ao final do curso foi aplicado um questionário junto aos professores para averiguar a avaliação deles sobre este curso.

As dificuldades desta etapa foram duas, a primeira diz respeito ao fato de não ter sido possível selecionar dois professores para a realização da pesquisa com os docentes nas etapas seguintes. O objetivo era trabalhar um curso de formação matemática com alunos da escola “Tecla Ferreira” com estudantes de 7ª e 8 ª séries, e o outro curso com estudantes de 8 ª série do CMF.

No entanto, por problemas institucionais que surgiram entre junho e julho de 2004. O trabalho na escola “Tecla Ferreira” se tornou inviável. Logo, houve uma mudança nos rumos da pesquisa e em agosto de 2004, a Escola Municipal de Educação Básica “Monteiro de Moraes” viabilizou a pesquisa de campo com os estudantes de 5ª e 6ª séries. Este trabalho tinha por finalidade viabilizar alguns momentos de interação entre o professor de uma turma e seus alunos nas fases 03 e 04. Mas na fase 03 isso não foi possível devido tal problema.

Outra dificuldade, estava no fato do curso ter sido realizado em uma semana de planejamento, pois alguns dos professores do CMF tinham de se revezar para participar do planejamento, no entanto, esta foi a única semana disponibilizada para realização deste curso. Mesmo com esta dificuldade esta etapa foi realizada a contento. Os dados foram coletados pelas filmagens e pelos questionários que estão presentes no Anexo 01.

Fase 03: Formação discente no Monteiro de Moraes: Esta formação foi realizada entre 08 e 22 de outubro de 2004, foram realizadas 10 sessões com duas horas de duração por aula (20 horas/aula). Entre as aulas havia um intervalo de 20 minutos, mas as sessões foram pensadas considerando este intervalo. Por isso ao todo cada aula tinha 2 horas e 30 minutos.

Foram utilizados recursos de filmagem para entender as situações didáticas em aula. E houve uma engenharia didática que resultou na preparação de uma seqüência com dois cadernos de atividades um sobre construções geométricas para usar com *software* GeoNext, e outro para trabalhar com Logo. A apostila do GeoNext tinha 8 atividades e a do Logo 5 atividades. Além disto haviam desafios esquematizados para o *software* Torre de Hanói e também havia material para trabalhar o *Modellus* que é apropriado ao Ensino de Física. A idéia em parte consistia em ter material de sobra para trabalhar com os estudantes, e as apostilas deveriam funcionar como cadernos de rascunho pois um dos objetivos consistia em transcrever as anotações dos estudantes para comparar as mesmas com as atividades observadas em vídeo. Além disto, a idéia consistia em testar os materiais desenvolvidos nesta etapa para a fase 04 que seria realizada no final do mês com os discentes do CMF.

A equipe de pesquisadores era a mesma da fase 02 e os bolsistas revesavam-se entre si nas filmagens, e os outros auxiliaram nas observações, nas mediações e no preparo dos computadores e das respectivas instalações dos *softwares*.

Ao todo participaram deste grupo 14 alunos todos da sexta série com idade de 12.

Um dos objetivos consistia em formar a equipe de pesquisa para a etapa 04 com os discentes do CMF considerando: filmagem, mediação, análise a posteriori, preparação do ambiente e a transcrição dos dados. As contribuições dos bolsistas foram significativas.

Além da testagem dos materiais didáticos em uso, e da formação da equipe de pesquisa. Este foi o primeiro contato com discentes com respeito à passagem do Novo PC ao Velho PC. Nesta formação exerci o papel de Professor, e as condições deste curso seriam as mais próximas das que encontraria no CMF.

Sobre as dificuldades desta etapa, os alunos tinham uma formação matemática que dificultava o trabalho com construções geométricas, no entanto, como haviam duas semanas para o curso, foi possível trabalhar aspectos teóricos para fundamentar a prática dos estudantes. Um outro problema, foi a semana da criança e o feriado de 12 de outubro de 2004. Tais situações a-didáticas interferiram em alguns momentos no ambiente do curso ocasionando interrupções, no entanto, considerando as dificuldades enfrentadas com respeito a esta etapa desde fase 02, as atividades foram realizadas a contento.

Outra dificuldade, estava no fato do curso ter sido realizado em uma semana de planejamento, pois alguns dos professores do CMF tinham de se revesar para participar do planejamento, no entanto, esta foi a única semana disponibilizada para realização deste curso. Mesmo com esta dificuldade esta etapa foi realizada a contento. Os dados foram coletados pelas filmagens e pelo caderno de atividades que estão presentes no relatório de dados coletados durante a formação dos alunos da escola Monteiro de Moraes (Anexo 02).

Fase 04: Formação junto aos alunos do CMF: O curso ocorreu entre 25 e 29 de outubro de 2004, foram realizadas 5 sessões com duas horas de duração por aula (10 horas/aula). Entre as aulas havia um intervalo de 30 minutos, mas as sessões foram pensadas considerando este intervalo. Sendo assim, ao todo, cada aula tinha 2 horas e 45 minutos.

Foram usados recursos de filmagem também nesta etapa. Houve uma engenharia didática que incluiu os dados parciais obtidos nas fases 01, 02 e 03, bem como, e foram os cadernos de atividades sobre construções geométricas utilizados na fase 03.

A idéia sobre as apostilas como caderno de rascunho foi a mesma da fase 03. A equipe de pesquisadores foi a mesma das fases anteriores e as ações desenvolvidas também se repetiram, ou seja, os bolsistas revesavam-se entre filmagens, observações, mediações, preparo dos computadores e instalações dos *softwares*.

Ao todo participaram deste grupo 15 alunos todos da oitava série com idade entre 14 e 15 anos.

O objetivo foi testar a passagem do Novo PC ao Velho PC, com um grupo de alunos que tinham formação matemática continua e consistente, e o CMF é conhecido neste aspecto, pois existe toda uma estrutura física e intelectual que facilita este tipo de trabalho. Nesta formação exerci o papel de Professor, mas houve momentos de interação em que Pascal, professor do grupo de alunos pesquisados no CMF, auxiliou nas atividades também.

Sobre as dificuldades nesta fase, um das dificuldades estava na infraestrutura do Laboratório de Informática do CMF. O CMF estava em fase de transição de sistemas operacionais, estava sendo substituido Windows 98 e 2000 por *Linux* Tupiniquim. Neste sentido, tive de primar pelo trabalho com o *software* GeoNext pelo fato dele ser multiplataforma. Outro problema, estava na semana de provas do CMF, pois esta havia sido remarcada para a semana do experimento, devido um eventual concurso que houve em momentos anteriores. Geralmente as provas desta semana são matinais, logo, a maioria destes momentos teve de ser pelo período da tarde, mas houve uma das tardes em que a sessão (terceira sessão) iniciou após 15 horas e terminou às 17 horas. Neste caso, foi uma das sessões em que não houve intervalo. Tais situações a-didáticas interferiram em alguns momentos no ambiente do curso ocasionando alguns problemas sobre gestão de tempo, mas as atividades foram realizadas a contento e o grupo estava preparado para enfrentar eventualidades. Os dados foram coletados pelas filmagens e pelo caderno de atividades que estão presentes no relatório de dados coletados durante a formação dos alunos do CMF (Anexo 03).

Fase 05: Desenvolvimento de *software* educativo: Esta fase ocorreu pela experiência em desenvolver um software voltado a geometria dinâmica no ensino de matemática. Para efetuação deste desenvolvimento, no Projeto TeleMeios financiado pelo CNPq, contei com 2 bolsistas CNPq/PIBIC, 2 estudantes voluntários, e também com recursos computacionais do Laboratório Multimeios FACED/UFC que implicam no uso dos 17 computadores do Laboratório, *software* de desenvolvimento Java entre outros recursos que envolvem livros para estudos e espaço físico para reuniões de trabalho e estudo. Neste caso a engenharia pedagógica foi articulada enquanto engenharia didática, e o período de realização deste trabalho ocorreram entre 2000 e 2003 para obtenção de uma versão provisória deste programa.

Para esta pesquisa o objetivo deste trabalho, consistiu em compreender a passagem do Novo PC ao Velho PC da perspectiva das limitações computacionais, bem como, da ação instrumental. Pois compreender o ponto de vista do desenvolvedor ultrapassa a visão do pesquisador em educação. Muitas situações foram possíveis ser entendidas pela passagem do Novo PC ao Velho PC, em questões relativas ao desenvolvimento de *software*, no entanto, este é um tópico que poderia ser mais explorado em pesquisas posteriores.

Um outro trabalho relacionado ao desenvolvimento, foi a tradução do *software* GeoNext para língua portuguesa do Brasil. E este trabalho foi essencial para utilização do GeoNext nas fases 03 e 04. Mesmo porque as vantagens deste *software* de geometria dinâmicas estão no fato dele ser multiplataforma e ser software livre. Este trabalho foi realizado entre 2003 e 2004 e contou com a participação de Borges Neto para revisão epistemológica dos comandos.

Nesta etapa, as limitações estavam mais na dificuldade em trabalhar a formação dos bolsistas para o trabalho interdisciplinar, pois neste projeto havia estudantes de matemática, computação e pedagogia na maioria das vezes conciliar as mesmas idéias nestes grupos é uma tarefa complexa. No entanto, não houve complicações maiores nestas atividades. Os dados foram coletados estão presentes no relatório resumido do diário de campo do projeto de desenvolvimento do GeoMeios (cf. 309-312). Basicamente as etapas descritas acima expõem o andamento do trabalho ao longo dos anos, e foi possível pela articulação metodológica compreender os fenômenos relacionados à passagem do Novo PC ao Velho PC dos pontos de vista dos professores, dos alunos e dos desenvolvedores. E nos tópicos seguintes procurarei falar sobre dificuldades na transcrição dos dados da filmagem, bem como, apresentar os dados coletados.

02.1.3.1 – As filmagens e o processo de transcrição

Nesta pesquisa, trabalhei com dados coletados através de observação em filmagens, protocolos de experimentação, diário de campo, anotações em caderno de atividades e observações participantes. No entanto, o trabalho mais complexo ocorreu na transcrição dos dados de vídeo. Pois foram ao todo filmadas 40 horas/aula em 22 fitas de vídeo em três momentos didáticos distintas que envolveram 43 pessoas, sendo entre elas 14 professores e 29 alunos.

Ao todo, foram transcritas 22 fitas de vídeo, e para efetuar tal transcrição em cada fita era realizada em uma primeira etapa a transcrição de áudio, na segunda etapa a transcrição do vídeo comparado com relatório de áudio, e por fim, na etapa final eram feitas observações com o intuito de mapear os fenômenos encontrados durante o processo transcritivo. Para tanto, desenvolvi um modelo de protocolo para mapear o áudio, vídeo e as observações de modo integrado usando marcação de tempo, com base no tempo de fita de vídeo.

Quadro 002 – Modelo do Relatório para transcrição das fitas de video.

Tempo de Fita	Relatório de Áudio	Relatório de Vídeo
00h00 00h30	Neste relatório são transcritas as falas dos alunos e do professor. Aqui são apresentados os diálogos entre os alunos, e também entre o professor e os alunos. Neste caso, o tempo de fita de vídeo (a esquerda), mostra que este relato têm como objetivo mostrar 30 minutos de interação em áudio.	Neste relatório são transcritas as imagens que são observáveis em vídeo. Ou seja, as construções visíveis na tela do computador, o ambiente de trabalho, as pessoas envolvidas. Neste caso, são observados as ações realizadas, os personagens do curso e o ambiente de pesquisa. O tempo de fita de vídeo (à esquerda) neste caso, apresenta 30 minutos de ação.
Observações do Pesquisador:		
Percepções do pesquisador sobre os fenômenos observáveis tanto nos diálogos apresentados em áudio como nas ações visualizadas em vídeo. aqui já ocorre o mapeamento das situações surpresa, das mediações docentes, bem como, das realizações discentes. Neste caso o relato em folha corresponde a 30 minutos de filmagem.		

No quadro 002 acima, apresento o modelo do protocolo para relatório de transcrição das fitas de vídeo utilizado nas fases 02, 03 e 04. O período de tempo para transcrição depende do detalhamento que se objetivou obter de um determinado tipo de formação e no caso desta pesquisa para cada fase a transcrição teve as seguintes características:

Transcrição na Fase 02: O período de transcrição por folha de relatório era de 30 minutos. Cada sessão tinha 2 horas de duração em vídeo, e ao todo foram 5 sessões neste curso com os professores no CMF. Ao todo foram 10 horas/aula nesta formação.

Transcrição na Fase 03: O período de transcrição por folha de relatório tinha duração de 1 hora. Cada sessão tinha 2 horas de duração em vídeo e ao todo foram 10 sessões neste curso com os alunos da Escola Monteiro de Moraes. Ao todo foram 20 horas/aula neste curso.

Transcrição na Fase 04: O período de transcrição por folha de relatório tinha duração de 15 minutos. Cada sessão possuía 2 horas de duração em vídeo e ao todo foram 5 sessões com os estudantes do CMF. Ao todo foram 10 horas/aula no curso.

Pode-se perceber que os períodos de transcrição por folha variavam, no entanto, se primou pela fase 04, pois os objetivos iniciais da pesquisa consistiam em averiguar junto aos alunos do CMF, familiarizados com o saber matemáticos, como ocorreria a passagem do Novo PC ao Velho PC.

No caso da fase 03, como foram 10 sessões seriam inviáveis relatórios com períodos de 15 ou 30 minutos, logo optei por períodos de 1 hora, transcrevendo os eventos mais marcantes do ponto de vista da pesquisa. Neste sentido, me voltei mais aos diálogos e as imagens no vídeo do computador.

Quanto a fase 02, como houve poucas situações surpresa se comparadas com as fases 03 e 04, optei por períodos de 30 minutos valorizando mais os diálogos que as imagens em si. Em suma, somente o relatório de transcrição de fitas teve 95 páginas com letra *Times New Roman* tamanho 10. E o relatório de anexos teve 59 páginas ao todo.

Considerando que uma fita de vídeo levava de dois a três dias, foram aproximadamente 3 meses de transcrição e houve atraso pois a equipe de pessoas que haviam se comprometido em transcrever dificultou o trabalho. Houve três pessoas que desistiram da transcrição e cerca de 12 fitas tiveram que ser refeitas completamente. Em um dado momento, salvo 5 fitas de vídeo, as restantes todas foram transcritas por minha pessoa. Neste sentido, uma das dificuldades na elaboração do relatório de tese esteve nas dificuldades ocorridas entre fevereiro e junho de 2005.

No entanto em julho de 2005 o relatório de anexos estava finalizado. A seguir vou falar um pouco sobre os recursos humanos e materiais para realização da pesquisa.

02.1.3.2 – Recursos Materiais para Pesquisa

Sobre os recursos materiais, para as fases 01 e 05, e o desenvolvimento das seqüências didáticas aplicadas nas fases 02, 03 e 04, bem como, na preparação das apostilas, o ambiente utilizado foi, exclusivamente, o Laboratório Multimeios FACED/UFC. Neste ambiente, tive acesso a cerca de 17 computadores, 2 *scanners*, 3 impressoras, vários *softwares* voltados ao ensino de matemática, bem como, ao acesso a Internet. Para uso pessoal tive acesso à um computador conectado em rede Intranet e Internet. Também dispunha de equipamentos como filmadora e *datashow*, que foram utilizados nas sessões 02, 03 e 04.

O transporte destes equipamentos, bem como, uso de *notebook*, bem como, aquisição de fitas de vídeo, eram de uso pessoal do pesquisador.

Quanto os recursos materiais usados nos ambientes do CMF e da Escola Monteiro de Moraes, fiz uso dos seus respectivos laboratórios de informática.

No caso do CMF, o Laboratório de Informática faz parte da Sessão de Informática comandada pelo Coronel Santos. Ao todo dispunha de 6 computadores e um *datashow* além do quadro branco durantes as fases 02 e 04. Neste laboratório havia acesso à Internet, e no primeiro curso (fase 02), fiz uso do sistema operacional Windows 98 e no segundo (fase 04) fiz uso do sistema operacional Linux Tupiniquim.

Quanto os recursos materiais da Escola Monteiro de Moraes, tive acesso ao seu LIE, ao todo foram utilizados 7 computadores em rede Intranet, no entanto, sem acesso a Internet. Durante a pesquisa os LIE tinham uma professora que acompanhava o inicio e o término deste curso, a professora do LIE, e em algumas circunstâncias, por parte desta escola, tive acesso ao espaço de convivência dos professores, geralmente no horário de intervalo.

Quanto recursos humanos, contei com três alunos CNPq/PIBIC nas fases 02, 03 e 04. Na fase 05 contei com outros dois alunos CNPq/PIBIC e com dois estudantes voluntários. Na transcrição contei com 8 alunos do Laboratório Multimeios e 2 voluntários. No entanto, três alunos do Multimeios desistiram da transcrição e destas várias tiveram que ser refeitas. A seguir a apresentação dos dados coletados durante a pesquisa.

02.2 – A passagem do Novo PC ao Velho PC e os professores

Os dados apresentados a seguir são relativos a formação ministrada junto aos professores no CMF. Para facilitar a compreensão das situações surpresa que surgiram neste curso procurarei inicialmente realizar a caracterização dos participantes do curso, e a seguir uma descrição dos fatos que se destacaram em cada sessão chamando atenção para as situações surpresa que surgiram ao longo do curso. Para preservar a identidade dos sujeitos, substitui seus nomes por nomes de matemáticos e nos dados relativos à transcrição das fitas o Professor é o termo utilizado para caracteriza o pesquisador-mediador que neste caso foi minha pessoa.

02.2.1 – Situações Surpresas na formação docente

Caracterização dos professores-alunos: Participaram deste curso 14 professores, sendo que 10 eram docentes do CMF e 4 da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Tecla Ferreira. Destes professores somente um residia na Região Metropolitana de Fortaleza, e o restante residia em Fortaleza em 2004. Havia entre eles 2 mulheres e 12 homens, e a idade deles estava entre 31 e 55 anos, e a média de idade do grupo era de aproximadamente 41 anos e 7 meses em 2004.

A formação entre os participantes do curso era basicamente:

a) Eram 8 professores licenciados em matemática, sendo que entre estes havia 3 especialistas e um tinha feito mestrado profissionalizante;

b) Havia um bacharel em matemática com especialização e mestrado em matemática;

c) Havia 3 bacharéis em matemática e em engenharia, sendo 2 formados em engenharia civil e um em engenharia mecânica e todos tinham especialização;

d) Um dos professores era licenciado em ciências com especialização em educação, este ministrava aulas de matemática e física;

e) Um dos professores tinha formação em geografia, mas ministrava disciplinas em matemática.

A área específica dos professores com pós-graduação era: 04 em educação, 01 em planejamento educacional, 01 informática educativa, 01 atualização pedagógica, 01 álgebra e teoria dos corpos e 01 em análise e teoria dos códigos. Ao todo 09 professores possuíam pós-graduação e 05 eram graduados, sendo entre estes 04 licenciados em matemática e 01 em geografia. Estes dados podem ser confirmados nas tabelas 008, 009 e 010 apresentadas a seguir.

Tabela 008 – Identificação dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Idade	Bairro	Cidade	Instituição
Aluno 001: Descartes	47	C. Esperança	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 002: Euler	34	Aldeota	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 003: Gauss	55	Dionísio Torres	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 004: Poincaré	48	Esplanada	Maracanaú-CE	CMF
Aluno 005: Hilbert	36	Itaperi	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 006: Willes	50	Aldeota	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 007: Da Costa	38	Aldeota	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 008: Ada	31	Damas	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 009: Fibonacci	38	Cambeba	Fortaleza-CE	Tecla Ferreira
Aluno 010: Pascal	50	Praia do Futuro	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 011: Boole	40	Passaré	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 012: E.Noether	35	C. Funcionários	Fortaleza-CE	Tecla Ferreira
Aluno 013: Pitagoras	42	Montese	Fortaleza-CE	Tecla Ferreira
Aluno 014: Talles	38	Montese	Fortaleza-CE	Tecla Ferreira

Fonte de dados: Questionário - Perguntas 01, 02, 03, 04 e 05.

Tabela 009 – Formação dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Graduação	Conclusão	Pós-graduação				
			Lato Sensu		Strito Sensu		
			Esp.	Ms.Prof.	Ms.	Dr.	Pós Dr.
Aluno 001: Descartes	L.P.Matem.	1982					
Aluno 002: Euler	L.P.Matem.	1992	X				
Aluno 003: Gauss	L.P.Matem.	1982	X				
Aluno 004: Poincaré	L.P.Matem.	1981		X			
Aluno 005: Hilbert	L.Ciências	1991	X				
Aluno 006: Willes	Matem/Eng1.	1977	X				
Aluno 007: Da Costa	L.P.Matem.	1985					
Aluno 008: Ada	L.P.Matem.	1999	X				
Aluno 009: Fibonacci	Matem./Eng2.	1988	X				
Aluno 010: Pascal	Matem./Eng1.	1976	X				
Aluno 011: Boole	Matemática	1985	X		X		
Aluno 012: E.Noether	L.P.Matem	1996					
Aluno 013: Pitagoras	L.P.Matem	1992					
Aluno 014: Talles	Geografia	1999					
L.P. Matem. : Licenciatura Plena em Matemática		Matemática.: Bacharelado em Matemática					
L.Ciências.: Licenciatura Plena em Ciências		Matem/Eng1: Bacharel em Matemática e Eng. Cívil					
		Matem/Eng2: Bacharel em Matemática e Eng. Mecânico					

Fonte de dados: Questionário – Perguntas 07, 08, 09 e 09.1.

Tabela 009b – Área de pós-graduação dos participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Área Específica	Pós-graduação		
		Lato Sensu		Strito Sensu
		Esp.	Ms.Prof.	Ms.
Aluno 002: Euler	Informática Educativa	X		
Aluno 003: Gauss	Atualização Pedagógica	X		
Aluno 004: Poincaré	Álgebra e Teoria dos Corpos		X	
Aluno 005: Hilbert	Educação	X		
Aluno 006: Willes	Educação	X		
Aluno 007: Da Costa	Educação			
Aluno 008: Ada	Educação	X		
Aluno 009: Fibonacci	Planejamento Educacional	X		
Aluno 010: Pascal	Técnico de Ensino	X		
Aluno 011: Boole	Análise / Teoria dos Códigos	X		X

Fonte de dados: Questionário – Perguntas 09, 09.1 e 09.2.

Além destas informações, se sabe que 4 professores ministram somente uma disciplina, todos ensinam pelo menos uma disciplina que envolve conteúdos matemáticos. Há 4 professores que trabalham com desenho geométrico, 2 trabalham conteúdos de física e 1 ministra como disciplina matemática e geometria.

Tabela 010 – Dados sobre atividades docentes dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Instituição	Inicio dos Trabalhos na Instituição	Disciplinas Ministradas			
			Disciplina	Nível de Ensino	Disciplina	Nível de Ensino
Aluno 001: Descartes	CMF	1984	Matemática	Ens.Médio	Física	Ens. Médio
Aluno 002: Euler	CMF	1993	Matemática	Ens.Médio	Ciências	Ens. Fund.(2)
Aluno 003: Gauss	CMF	1983	Geometria	Ens.Fund.(2)	Física	Ens. Fund.(2)
Aluno 004: Poincaré	CMF	1982	Matemática	Ens.Médio	-	-
Aluno 005: Hilbert	CMF	1997	Matemática	Ens. Fund.(2)	Des. Geom.	Ens. Fund.(2)
Aluno 006: Willes	CMF	1990	Matemática	Ens. Fund.(2)	Des. Geom.	Ens. Fund.(2)
Aluno 007: Da Costa	CMF	1985	Matemática	Ens. Fund.(2)	Des. Geom.	Ens. Fund.(2)
Aluno 008: Ada	CMF	2002	Matemática	Ens. Fund.(2)	Física	Ens. Fund.(2)
Aluno 009: Fibonacci	T. Ferreira	2002	Matemática	Ens.Médio	-	-
Aluno 010: Pascal	CMF	1998	Des.Geom.	Ens. Fund.(2)	-	-
Aluno 011: Boole	CMF	1995	Matemática	Ens.Médio	Matemática	Ens. Fund.(2)
Aluno 012: E.Noether	T. Ferreira	1998	Matemática	Ens.Médio	Matemática	Ens. Fund.(2)
Aluno 013: Pitagoras	T. Ferreira	1997	Matemática	Ens.Médio	-	-
Aluno 014: Talles	T. Ferreira	2000	Matemática	Ens.Médio	Geografia	Ens. Fund.(2)

Fonte de dados: Questionário – Perguntas 10.1, 10.2, 11, 12 e 13.

O professor que trabalha há mais tempo no CMF, pertencente ao grupo, iniciou seus trabalhos em 1982, e o que trabalha há menos tempo em 2002. E o docente que ministra aulas faz mais tempo no Tecla Ferreira iniciou seus trabalhos em 1997 enquanto o mais novo em 2002. Ou seja, o tempo médio de trabalho dos professores do grupo que são do CMF é de aproximadamente 13 anos e meio, já o tempo médio com os professores do Tecla Ferreira é de aproximadamente 5 anos e 3 meses. Todos estes dados de caracterização podem ser visto na tabela 010 acima.

Tabela 011 – Estimativa da quantidade de alunos dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Instituição	Quantidade de Alunos estimada pelos respectivos professores
Aluno 001: Descartes	CMF	70 alunos
Aluno 002: Euler	CMF	75 alunos
Aluno 003: Gauss	CMF	80 alunos
Aluno 004: Poincaré	CMF	35 alunos
Aluno 005: Hilbert	CMF	90 alunos
Aluno 006: Willes	CMF	26 alunos
Aluno 007: Da Costa	CMF	28 alunos
Aluno 008: Ada	CMF	100 alunos
Aluno 009: Fibonacci	T. Ferreira	60 alunos
Aluno 010: Pascal	CMF	40 alunos
Aluno 011: Boole	CMF	100 alunos
Aluno 012: E.Noether	T. Ferreira	112 alunos
Aluno 013: Pitagoras	T. Ferreira	50 alunos
Aluno 014: Talles	T. Ferreira	115 alunos

Fonte de dados: Questionário – Pergunta 14.

Quanto à estimativa dos professores sobre a quantidade de alunos com que lidam, se pode dizer que no grupo a média de alunos por professor em 2004 era de aproximadamente 70 alunos/professor. No entanto, no CMF era em 2004 cerca de 64 alunos/professor, enquanto que no Tecla Ferreira era de 84 alunos/professor (dados obtidos a partir da tabela 011).

Quanto a freqüência no curso, a freqüência média do grupo de professores esteve em 91,43%. Sendo que entre os professores do CMF esta média foi de 88%, e entre os professores do Tecla Ferreira foi de 100% (dados obtidos a partir da tabela 012).

Tabela 012 – Freqüência dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Instituição	02.Fev.04	03.Fev.04	04.Fev.04	05.Fev.04	06.Fev.04	Total
Aluno 001: Descartes	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 002: Euler	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 003: Gauss	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 004: Poincaré	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 005: Hilbert	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 006: Willes	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 007: Da Costa	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 008: Ada	CMF	00	01	01	00	01	03
Aluno 009: Fibonacci	T. Ferreira	01	01	01	01	01	05
Aluno 010: Pascal	CMF	01	01	01	01	00	04
Aluno 011: Boole	CMF	01	00	00	01	00	02
Aluno 012: E. Noether	T. Ferreira	01	01	01	01	01	05
Aluno 013: Pitagoras	T. Ferreira	01	01	01	01	01	05
Aluno 014: Talles	T. Ferreira	01	01	01	01	01	05

Fonte de dados: Questionário – Lista de Freqüência.

Pode-se considerar que a maioria dos professores que participam do curso, possui experiência significativa como professores de matemática, além disto, possuem formação acadêmica, e dois deles possuem graduação não correspondente à área de ensino. Alem disto, todos ministram pelo menos uma disciplina com abordagem em conteúdos matemáticos. Também se sabe a quantidade de professores por alunos em média é de aproximadamente 70 discentes/docente, e quanto a freqüência média global no curso é de cerca de 91,43%.

Caracterização das sessões do curso: Como foi dito anteriormente, foram 5 sessões realizadas nas seguintes datas: Sessão 01 – 02 de Fevereiro de 2004; Sessão 02 – 03 de Fevereiro de 2004; Sessão 03 – 04 de

Fevereiro de 2004; Sessão 04 – 05 de Fevereiro de 2004; Sessão 05 – 06 de Fevereiro de 2004. Procurarei descrever cada sessão, apresentando os aspectos que se destacaram em relação a passagem do Novo PC ao Velho PC, considerando a formação docente (Anexo 01).

Sessão 01: Estabelecendo contrato didático e o inicio da formação

[00h00 – 00h30] Contrato didático inicial: No inicio desta sessão, o Professor o professor faz uma breve apresentação dos professores-alunos que comentam suas respectivas formações e suas expectativas sobre o curso. Em seguida o Professor apresenta a equipe de pesquisa e comenta a pesquisa que está sendo realizada. Euler, um dos alunos-professores, pergunta ao Professor se os *bugs* decorriam dos computadores ou dos programas e a partir deste questionamento se desencadeia o primeiro diálogo do curso.

[Professor]: "Vem dos dois. Há *bugs* de *hardware*, *software* e o chamado '*bug* humano' que é o erro de manuseio pelo usuário".

[Hilbert]: "Isso não é limitação da máquina?".

[Professor]: "Sim, são limitações que podem ser postos pela máquina, pelo software aos usuários. Discutirei mais estes assuntos no decorrer do curso, e vou falar sobre a pesquisa que faremos junto ao CMF com estudantes do ensino fundamental afim de encontrar algumas dessas situações. Durante o curso discutiremos o papel do computador no ensino de matemática e em que momentos ele pode ou não ser utilizado". Professor diz que seria fazer a conciliação entre a ferramenta antiga que seria o giz, a lousa ou o pincel e com a nova ferramenta que no caso seria o computador.

[Boole]: "Professor, não acha que o computador surgiu como uma imposição! A educação não pode ocorrer sem a utilização da máquina? Pra que usar o computador?".

[Professor]: "De fato, a educação matemática pode ocorrer sem utilizar a máquina, pois não se precisou durante séculos do computador para ensinar. Mas hoje temos o computador, e a questão é se ele existe, não poderia ser usado pelo professor? Além disto, o computador pode viabilizar ao professor experiências novas, um novo olhar sobre problemas antigos e apresenta novos problemas, se o professor souber como fazer, experiências que não seriam possíveis sem o computador. Apresentarei alguns fatos que ocorreram no mestrado para a gente discutir mais [...]"

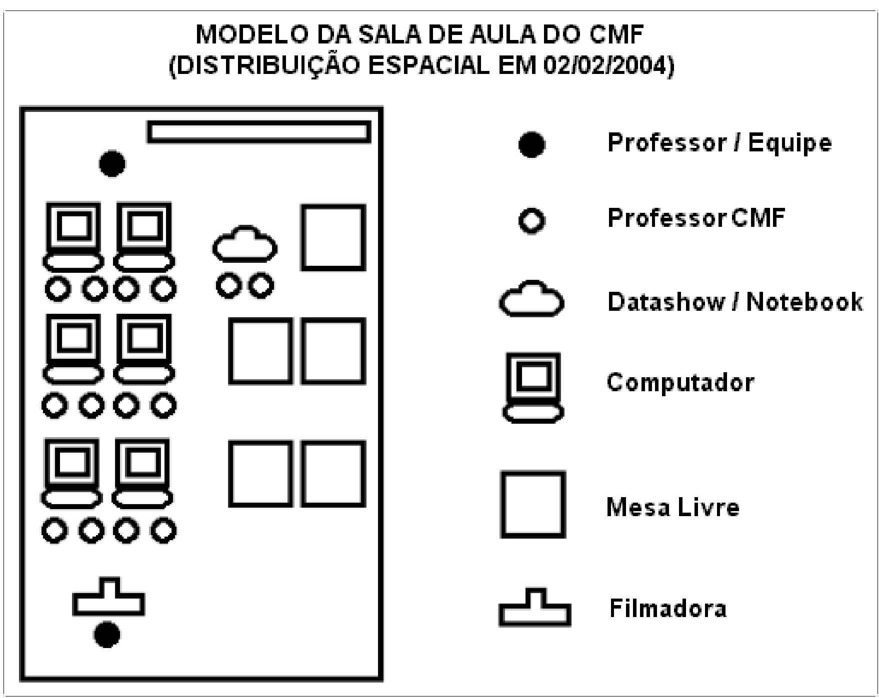
Após este diálogo, o professor realiza o contrato didático junto com os professores-alunos, explica aspectos da participação destes na sua pesquisa, e faz uma apresentação do *software Cabri Géomètre II* que será utilizado no transcorrer do curso.

Na sala há 13 alunos mais a equipe de pesquisadores que possui o Professor, e três bolsistas CNPq/PIBIC membros do Laboratório Multimeios FACED/UFC.

Os alunos professores presentes são: Descartes, Euler, Gauss, Poincaré, Hilbert, Willes, Da Costa, Fibonacci, Pascal, Boole, E. Noether, Pitágoras e Talles. Aluno ausente nesta sessão foi Ada que teve que participar de uma reunião de planejamento de aulas para o semestre 2004.1 no CMF.

A distribuição dos alunos, no Laboratório de Informática do CMF e seus recursos em fevereiro de 2004 podem ser observados na figura 021 abaixo.

Figura 021 – Distribuição Ambiental no Laboratório de Informática do CMF em Fev/2004.



Nos diálogos filmados entre os alunos-professores, se pode observar que Gauss e Hilbert, ao ver o Professor manipular o *Cabri Géomètre II*, diziam entre si, baixinho, que não seriam capazes na manipulação do programa. O Professor leva Hilbert à frente e o orienta, diante de todos, na manipulação de comandos do *software*. Hilbert sente dificuldades na manipulação do *mouse* (motricidade fina), no entanto, executa a tarefa a contento. Professor adota "postura mão-no-bolso"[27]. O Professor explica que dados dois pontos, não coincidentes, se torna possível obter o centro e o raio de uma circunferência. O Professor questiona Hilbert sobre as propriedades da figura construída. Outros alunos-professores reclamam ao executar tal atividade, no entanto, obtém sucesso no trabalho.

Comentários: Nestes 30 minutos, foi realizado um contrato didático inicial explícito. também se estabeleceu os primeiros diálogos e as primeiras interações. Ao adotar a "postura mão-no-bolso", se está dizendo ao aluno que é ele quem realiza a atividade e não o Professor. Em princípio os alunos sentem dificuldades no uso da tecnologia, reclamam, no entanto, realizam a tarefa. Este tipo de comportamento já foi observado em várias formações desde 1997 até 2003.

[00h30 – 01h00] Familiarização com o *software*: Nesta etapa da aula, o Professor pretende explicar aos professores-alunos diferenças entre desenho geométrico, construções geométricas e a própria geometria. O pressuposto é que pela confusão terminológica os professores-alunos não percebam à distinção entre estes conceitos, no entanto, ao lidar com a mídia computacional, as diferenças se tornam explícitas e criam dificuldades aos alunos. Como ponto de partida, o Professor adota a atividade realizada por Hilbert sobre

[27] Postura mão-no-bolso: Termo presente na execução de trabalhos com uso do computador que foi adotado por Borges Neto ao trabalhar com a Seqüência Fedathi. Este termo foi cunhado em uma formação realizada no Centro de Referência do Professor em Fortaleza-CE (CRP), da Prefeitura Municipal em 2000. Quando os alunos solicitavam ajuda no computador, durante a formação, os monitores tendiam a tomar o mouse para explicar o como fazer. No entanto, se observava a posteriori que os alunos não sabiam como usar o software. a partir deste fato, Borges Neto, propôs aos monitores que explicassem verbalmente os comandos, mas que não pegassem no *mouse*, antes ficassem com suas mãos no bolso. Ocorreu que os alunos reclamavam, mas aos poucos iam aprendendo o uso do *software*, e quando menos percebiam sabiam como usar seus recursos.

construção de circunferência, e o Professor pede aos alunos que façam a mesma atividade no computador verificando-a. O Professor adota nesta discussão uma situação surpresa para discutir as idéias sobre desenho e construções geométricas.

Situação Surpresa 001 – O contra-exemplo do tracejado

[Euler]: "Eu faço dois pontos com distância maior que zero. Disto tenho uma circunferência ao usar o comando circunferência, mas não faço a construção do lugar geométrico circunferência, não é?"

[Professor]: "De fato! Mas como você construiria a circunferência enquanto lugar geométrico ?".

[Descartes]: "Lá vem o Euler, ele sabe mexer e acha que todo mundo sabe! O que tu quer fazer?".

[Euler]: "Bem, pretendo construir a circunferência, usando a propriedade básica de uma circunferência. 'Uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes a um determinado ponto [...]".

[Pascal]: "Então vamos procurar um comando para fazer isso, no computador deve ter tudo isso [...]".

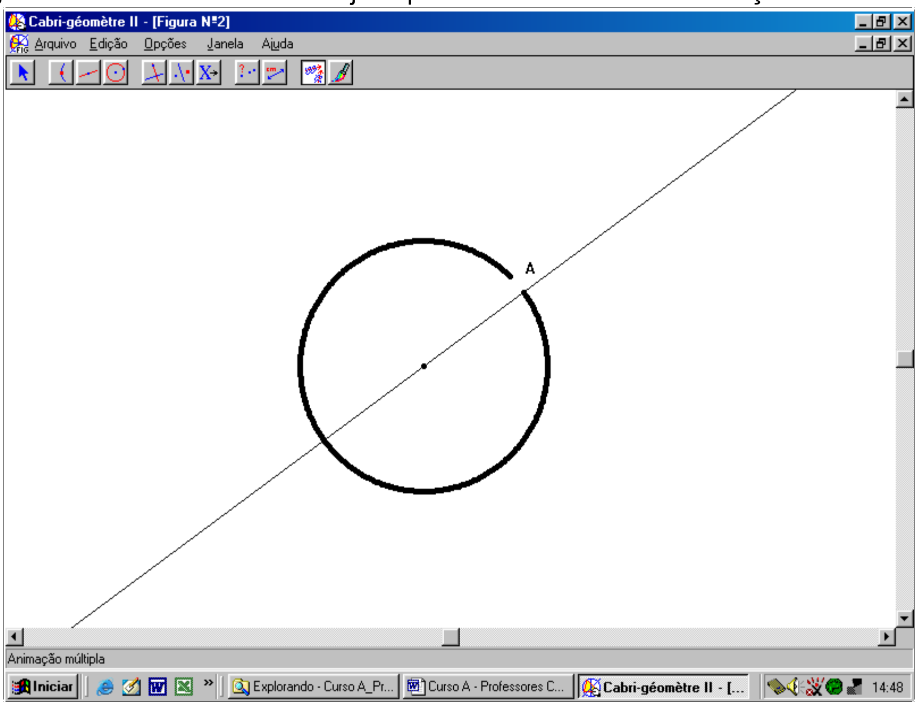
O Professor fala aos alunos-professores que estes terão 20 minutos para realização desta atividade. Após este tempo, o Professor vai a frente e retoma discussão sobre a circunferência e diz que há diferenças no computador entre desenho geométrico e construções geométricas. Sob orientação do computador Hilbert e Euler que estão ao *notebook* ligado com *datashow*, se tornam as "mãos" do Professor ao *mouse*, visto que este adota a postura mão-no-bolso.

[Professor]: "Uma coisa é o desenho, este é uma representação, uma visualização. Já a construção é a lógica que fundamenta o fato desta ou aquela figura ser de um modo ou outro, esta lógica obedece axiomas, teoremas e definições. Já a Geometria é o saber que fundamenta a lógica das construções geométricas [...]".

[Euler]: "Pode nos dar um exemplo?"

[Professor]: "Sim, faça uma reta, com o comando 'reta' do Cabri, reta por um ponto só e uma direção, Ok? Agora façam um ponto [A] sobre a reta que não coincida com a 'origem da reta', isso! Marque tracejado sobre [A] e façam animação múltipla sobre a reta. Tão vendo!" (figura 021).

Figura 022 – Circunferência tracejada por Euler e Hilbert sob orientação do Professor.



[Pascal]: "É o computador está desenhando um circulo."

[Professor]: "Manipulem a circunferência [...]".

[Descartes]: "Olha só, o negócio desmancha, não tá preso a coisa alguma, o que é isso?".

[Professor]: "É desenho".

O Professor neste caso, orientou Euler e Hilbert para utilização do comando "tracejado", para expor a distinção entre desenho e construção, visto que Hilbert anteriormente havia usado o comando "lugar geométrico" para efetuar a mesma construção. Ou seja, a mudança dos comandos permitia surgir resultados de manipulação distintos.

Comentários: Euler interage bem neste diálogo, e provavelmente por estar no *Notebook*, junto com Hilbert, se sinta mais à vontade para discutir junto ao Professor. Os alunos interagiram mais nesta etapa, no entanto, ainda é pouca a interação entre eles. A situação do tracejado constituiu uma situação surpresa, que partiu do Professor, com base no uso instrumental dos comandos do *Cabri*. E neste caso, a situação surpresa funcionou como contra-exemplo à construção anteriormente apresentada por Hilbert que usa o comando "lugar geométrico" do *software Cabri*. No entanto, a situação permitiu ao Professor trabalhar as concepções sobre as diferenças entre desenho e construções geométricas. Ou seja, a situação surpresa apresentada pelo professor se tornou uma mediação pedagógica.

[01h00 – 01h30] Continuando o contrato didático: Após a atividade realizada, o Professor fala sobre a pesquisa, e diz que pretende trabalhar com alunos do Tecla Ferreira e do CMF, entretanto, não descarta o uso de planos de contingência (plano B), caso ocorram eventualidades. O Professor menciona que um dos objetivos do curso em andamento é a formação dos professores para o uso de tecnologias no ensino de matemática, e fala sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC como um dos objetivos de formação deste curso.

O Professor fala que abordará temas como dedução, indução, raciocínio matemático e lógico-matemático, conceitos didáticos como: engenharia didática, contrato didático e seqüências didáticas, bem como, a passagem do Novo PC ao Velho PC. O Professor estabelece que a partir desta aula haverá intervalo de 20 minutos, pois nesta sessão não houve interrupções, e pede aos alunos que tragam na próxima aula papel e caneta.

O Professor discute mais o conceito de contrato didático, e diz que esta aula é um contrato didático para o curso, no entanto, o curso é um contrato didático para a pesquisa em curso.

Os alunos-professores silenciosamente ouvem o Professor.

Comentários: O Professor estabelece contrato didático sobre os assuntos abordados durante o curso, apresenta os tópicos em discussão, retoma falas sobre a pesquisa em curso. O momento é parte do contrato didático do curso. Nas falas do Professor já há considerações sobre problemas na realização dos cursos com os alunos e se pensa em um plano de contingência.

[01h30 – 02h00] Retomando Familiarização: O Professor propõem como atividade que os alunos-professores explorem o *software Cabri Géomètre II*, Boole comenta que haverá reunião de planejamento no dia seguinte no CMF. O Professor é solicitado para orientar alunos Euler, Pascal e Descartes no uso de comandos do Cabri. Os alunos-professores do Tecla Ferreira não sabem se poderão participar da pesquisa, mas estão contentes em participar do curso. Os alunos interagem entre si um pouco mais, ao término do tempo da sessão o Professor finaliza aula. Euler fica e ajuda o Professor e a equipe a desligar os equipamentos.

Comentários gerais: Nesta aula, foram estabelecidos o contrato didático explícito com respeito ao curso, e a pesquisa em seu andamento, mas também se estabeleceu o contrato implícito ao ser realizada a primeira atividade. No contrato explícito, ficou claro que estavam participando de uma pesquisa, como funcionaria o curso, quais conteúdos seriam abordados. No entanto, no contrato implícito, se estabeleceu a conotação didática do curso. A Seqüência Fedathi foi usada ao ser explorada a situação surpresa 001 e idéias didáticas como a postura mão-no-bolso, foram estabelecidas no contrato didático implícito. Este contrato, abordou temáticas como gestão de aula e conteúdos em questão no curso. Além disto, as dificuldades iniciais da pesquisa, nesta fase e nas seguintes, surgiram diante do Professor .

Sessão 02: Familiarização com *software* e Formação

[00h00 – 00h30] Familiarização com o *Cabri*: Ao iniciar aula, Professor fala que a sessão em questão é o processo de familiarização com o *software*, no caso, *Cabri Géomètre II for Windows*. Também menciona que no ensino de matemática assistido por computador a primeira ação que deve ser iniciada em uma formação é a familiarização. Somente Boole está ausente nesta sessão, pois está em uma reunião de planejamento no CMF. E Ada se faz presente neste momento. Um dos bolsistas CNPq/PIBIC antes do inicio da sessão fala sobre o dia anterior e apresenta o contrato didático explícito que o Professor estabeleceu no dia anterior. O Professor fala sobre a estrutura básica de um *software* de geometria dinâmica.

[Professor]: "A atividade de vocês agora, consiste em averiguar os comandos do software para que sejam devidamente utilizados por vocês. Em princípio vocês vão explorar os comandos do Cabri, mas saibam que existe uma estrutura básica neste programa. Nós podemos dividir os programas de geometria dinâmica em 03 partes: (01) menu de comandos; (02) barra de ferramentas; (03) zona de desenho. Vou mostrar como isto funciona [...]"

Após explicar tal fato, Professor vai ao *notebook* ligado ao *datashow*[28], e fala aos alunos-professores sobre a organização básica do *Cabri*. Willes diz conhecer o *software* e o Professor lhe pede para ajudar os outros colegas. O Professor lhes dá tempo para realizarem a atividade, e afasta-se dos alunos-professores observando-os ao fundo. Os alunos interagem mais que na sessão anterior e conversam. Euler pede aos colegas que façam silêncio. A interação entre Willes e Fibonacci apresenta um diálogo transcrito:

[Willes]: "Dados dois pontos existe uma única reta que por eles passa, é esse princípio que os comandos: reta, semi-reta e segmento seguem no Cabri [...]".

[Fibonacci]: "Quer dizer, que tenho de saber matemática para lidar com esse troço [...]".

O aluno-professor está confuso sobre uso dos comandos "ponto", e "ponto sobre objeto" e o Professor interage com Hilbert. O caderno de atividades foi distribuído pelos bolsistas aos alunos-professores.

Comentários: O Professor estabelece contrato didático desta sessão que trata da familiarização sobre os comandos do *Cabri Géométre II*. Alunos-professores realizam atividade A das folhas de atividades (Anexo 01: p.342). Nesta sessão há mais interação entre os alunos. O barulho incomoda Euler que chama atenção dos outros professores. Fibonacci percebeu, através

[28] Ao dizer no texto "o aluno vai ao *notebook* [...]", estou falando sobre o *notebook* conectado ao *datashow*.

da explicação de Willes, que o software *Cabri Géomètre II* segue princípios axiomáticos para realização dos seus comandos. E Hilbert confunde comandos "ponto" e "ponto sobre objeto", e tal questão faz sentido, pois na geometria das construções régua e compasso não há "tipologia" dos pontos. Quanto o papel de Willes enquanto 'monitor" do Professor, este é um tipo de mediação pedagógica. Pois ao declarar "saber fazer", o Professor utiliza-se da prática do aluno para que o mesmo possa revisar suas concepções sobre o assunto, bem como, viabiliza a postura mão-no-bolso do Professor. O diálogo entre Fibonacci e Willes revela o caráter deste tipo de mediação.

[00h30 – 01h00] Ação instrumental e teorema em ação: O Professor vai a frente e fala sobre a concepção de grau de liberdade (conceito de lógica) para os alunos-professores, e faz comparação entre a representação com régua e compasso no quadro branco (Velho PC), em relação a representação no computador (Novo PC). O Professor chama atenção dos alunos-professores para diferença entre desenho e construção geométrica.

Situação Surpresa 002 – O contra-exemplo da intersecção

Mostra que no quadro branco uma intersecção entre retas concorrentes é perceptível visualmente, no entanto, no *Cabri* a mesma intersecção é perceptível visualmente, mas ela não existe para o computador se isto não lhe for indicado através de comandos. Daí a necessidade em ter comandos como "ponto", "ponto sobre objeto" e "ponto de intersecção". para estabelecer uma relação lógica entre entes matemáticos no computador. Neste sentido o computador seria uma máquina "burra" diz o Professor.

Após explicação sobre graus de liberdade, o Professor chama alunos-professores para realização de atividades. Hilbert vai voluntariamente ao *notebook* para apresentar os comandos que descobriu. Fala sobre os comandos para construção de: retas, circunferência e polígonos. Depois mostra comandops para construção de retas paralelas e perpendiculares. Hilbert sente dificuldades na manipulação do *mouse* (motricidade fina), no entanto, não deixa atividades sem realização e explicação. Hilbert pergunta ao Professor se os construtores do Cabri trabalham sobre postulados e axiomas para elaboração dos comandos. O

Professor comenta que um dos construtores do Cabri Jean M. Laborde, em sua tese de doutoramento, faz relação entre grafos e geometria analítica. Professor fala aos alunos-professores sobre axiomas de geometria euclidiana. Euler orienta algumas ações de Hilbert e Willes faz observações que o ajudam.

Comentários: O problema dos graus de liberdade apresentados por Hilbert, leva professor à comparação entre Novo PC e Velho PC. O exemplo comparativo, viabiliza uma **situação surpresa 002** apresentada pelo Professor, que chama atenção sobre o uso de instrumentos. Em outras palavras, não se trata aqui de uma limitação computacional como geratriz de situação surpresa, mas sim, de questões relativas ao uso de instrumentos. Neste caso, a apresentação desta situação surpresa 02 é usada como uma forma que viabilizou uma mediação pedagógica, e permitiu exibir características do Novo PC em relação ao Velho PC. Hilbert se mostra participativo, mas sente dificuldades de motricidade fina. Euler e Willes interagem com Hilbert o ajudando. Pergunta de Hilbert sobre uso de axiomas e teoremas na elaboração de comandos, mostra que Hilbert percebe que no software Cabri, está implícita a idéia de "teorema em ação"[29].

[01h00 – 01h30] Manipulação e teorema em ação: Hilbert aparenta cansaço e solicita que outra pessoa realize atividade:

[Hilbert]: "Professor, estou cansado outra pessoa poderia explicar os comandos?".

[Professor]: "Ok, Quem se prontifica?".

Situação Surpresa 003 – Problemas na ação instrumental e os conceitos geométricos

[Talles]: "Eu vou".

Talles se dirige ao *notebook* para realização da atividade. Os alunos-professores estão atentos as ações dos colegas em suas apresentações. Hilbert

[29] Teorema em ação: É uma concepção de Vergnaud (1996: p.9-19), que considera que ao desenvolver uma ação, em sua realização, estão implícitas concepções matemáticas. No caso do *Cabri Géomètre II*, os comandos para construção de ponto, retas, segmentos, circunferências entre outros, expõem a natureza dos conceitos matemáticos formais, ainda que nas ações não sejam as concepções sistematizadas. Logo, o uso de comandos em sua ação instrumental estão enunciando teoremas em ação para Hilbert.

aparenta cansaço. Alunos interagem mais sobre atividades. O áudio e o vídeo dificultam compreensão dos transcritores de dados.

[Talles]: "Quero chamar a atenção sobre a questão do clique, é fácil errar aqui! Eu fui fazer um triângulo [ABC], usei o comando dos polígonos, afinal um triângulo é um polígono, mas daí dei 2 cliques a mais e ficou parecendo um triângulo, mas para o computador não é triângulo. Veja, minha intenção foi uma o resultado foi outro [...]".

Enquanto Talles explica, a diferença entre os comandos "triângulo" e "polígonos" no *Cabri*, ele faz no computador as figuras e ações correspondentes as figuras 23 e 24 apresentadas abaixo. Muitos alunos-professores observam exposição e tentam reproduzir o que os colegas explicam no computador.

Figura 023 – Triângulo de Talles antes de realizar manipulação.

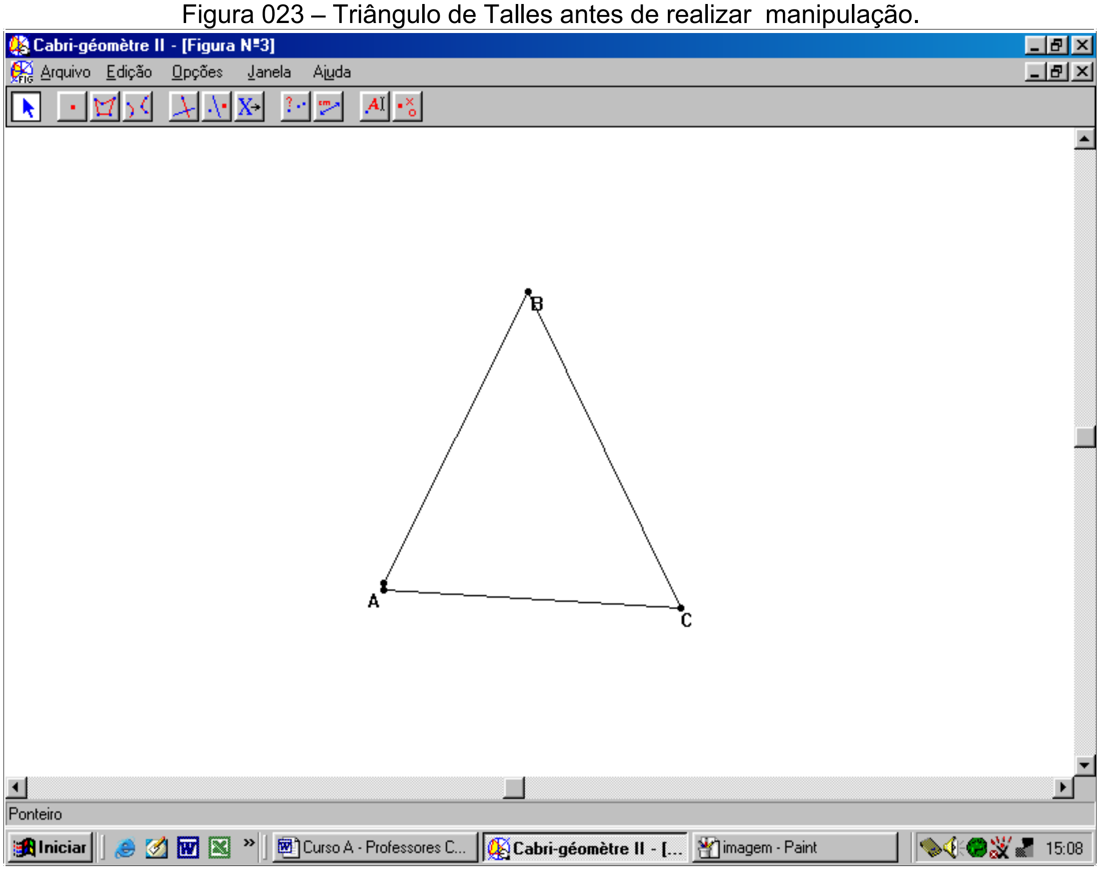
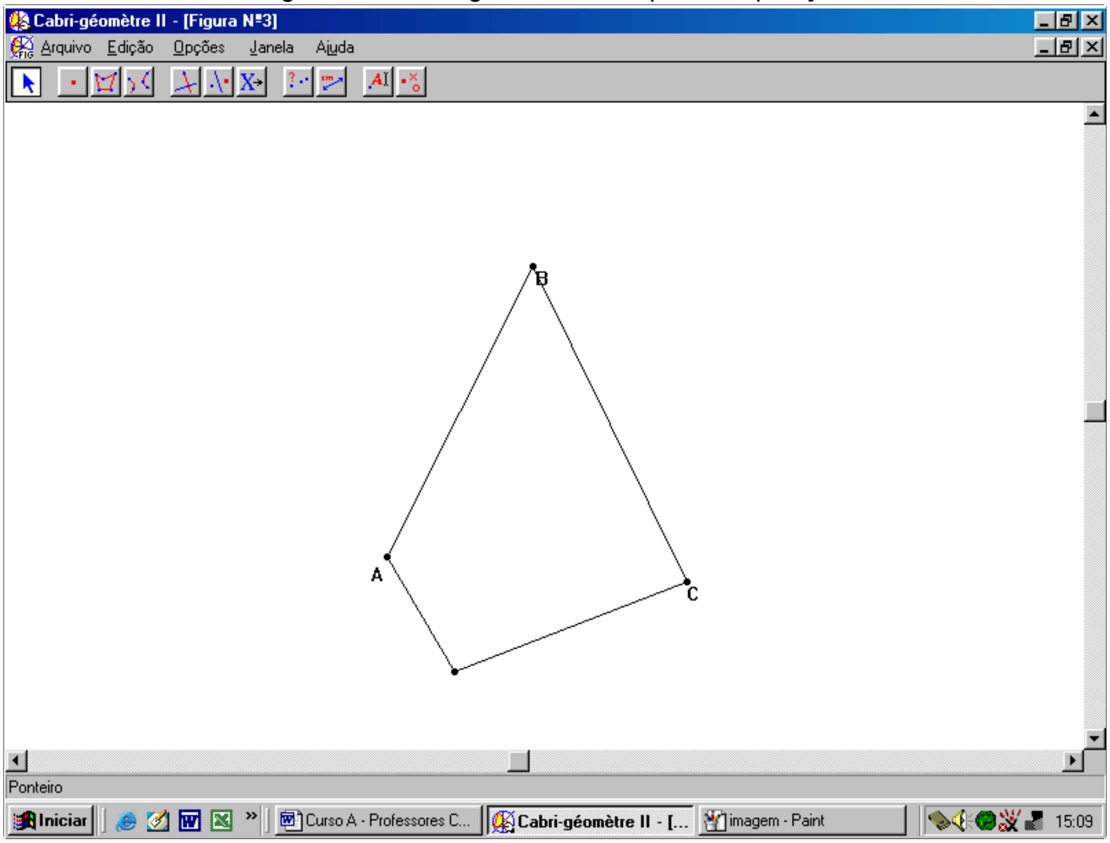


Figura 024 – Triângulo de Talles após manipulação.



Após explicação de Talles, o Professor chama E.Noether, no entanto, ela diz não querer ir sozinha ao computador, por tal motivo, Talles continua formando dupla com E.Noether. Noether explorou comandos estáticos do Cabri e os apresentou antes do intervalo. Intervalo inicia, alunos têm 20 minutos para descanso.

Após retorno do intervalo, o Professor fala sobre a necessidade em se realizar sessões didáticas a partir dos campos conceptuais envolvidos nas concepções que se pretenda ensinar, bem como, nas concepções que os estudantes-professores possam adquirir sobre a realidade sócio-histórica dos alunos. Professor explica articulação das idéias do trabalho com as idéias presentes em pesquisa.

Professor retoma atividade E.Noether tentou usar comando cônicas, no entanto, quem finaliza cônicas é Talles após questionamento do Professor:

[Professor]:” Quantos pontos são necessários para se obter uma cônica qualquer”.

[Talles]: “Pelo Teorema de Pascal (que não é o aluno) é por 5 pontos e a partir daí finaliza sua cônica”.

Noether não respondeu questionamento proposto pelo Professor. Talles realiza teorema-em-ação.

Comentários: Talles ao usar comando “polígono” do *Cabri*, para construir um triângulo [ABC], pressupõem que o comando “polígono” seja equivalente ao comando “triângulo. No entanto, o comando ”triângulo” no *Cabri* finaliza em 3 cliques, já o comando “polígono” para finalizar precisa de 2 cliques no final, ou ainda, precisa que o clique inicial coincida com o clique final, de tal modo que o teorema-e-ação corresponda com o conceito sobre polígono.

No entanto, por razões de ordem instrumental, ainda que conceitualmente um triângulo seja sempre um polígono, se sabe que a recíproca nem sempre é verdadeira, no entanto, em termos de *software Cabri*, o comando “triângulo” é uma função computacional distinta do comando “polígono” em termos de ações realizadas, ou seja, nunca um comando será em termos de ação instrumental correspondente ao outro comando. Fato este que enuncia teoremas-em-ação distintos devido ações instrumentais, mas que não correspondem às concepções matemáticas sobre o assunto. Trata-se de um problema de ação instrumental, mas é uma limitação que decorre das concepções que os autores possuem sobre um determinado enunciado matemático. Neste caso, Talles percebe a limitação e a explica.

Uma outra ação instrumental que enuncia um teorema-em-ação, é com respeito a construção do comando cônicas do *Cabri*, que é baseado no Teorema de Pascal. O aluno Talles percebeu a correspondência instrumental com o saber matemático em questão, mas E.Noether não compreendeu, e tinha somente uma percepção estética sobre as construções realizadas no *Cabri*. Tal aspecto, foi notado na variação de cores para suas construções, bem como, para variação de espessura para segmentos e para retas. Em outras palavras, nem sempre a idéia de teorema-em-ação está presente, para muitos alunos, sejam professores ou não, a animação e visualização é mais “encantadora” que as possibilidades epistemológicas de um recurso computacional. Além disto, a capacidade em refletir sobre suas ações e o *software* em uso, envolvem o conhecer-na-ação, refletir-na-ação na perspectiva do teorema-em-ação. E para isto é um pré-requisito estruturas cognitivas do operatório formal que viabilizem estas ações superiores. Sobre o cansaço de Hilbert, as dificuldades de manipulação devido problemas de motricidade fina, teriam lhe levado à exaustão. Isso implica em um fator: Boa parte das ações instrumentais, quando existem dificuldades de manipulação, forçam as estruturas cognitivas ao limite. Fato este que exige uma postura docente compreensiva e midiática para favorecer aprendizagem cognitiva e o desenvolvimento de motricidade do estudante. Há maior interação no grupo Talles se apresenta como voluntário, no entanto, Noether têm receio em estar só diante do computador .

[01h30 – 02h00] Velho PC ao Novo PC - Funcionou acabou : Após os alunos-professores apresentarem o que compreenderam sobre os comandos do *Cabri*, o Professor explica o processo de familiarização com o software e sua relevância para recapitulação de concepções matemáticas. O Professor propõem atividade 02 do caderno de atividades, sobre construção de retas paralelas. Alunos-professores interagem e tentam estratégias para efetuar construção de retas paralelas Hilbert, Pascal e Ada interagem e desenvolvem a construção das retas paralelas conforme figura 025.

Figura 025 – Paralelas desenvolvidas por Pascal, Hilbert e Ada.

[Hilbert]: “Dados uma reta [r] e um ponto [A] fora desta reta, é para fazer uma reta [s] paralela a reta [r]. Não tem segredo nenhum esse negócio Pascal [...]”.

Professor pede que Pascal, Hilbert e Ada apresentem sua resolução no *notebook*. Eles vão a frente. O Professor fica observando a ação dos alunos-professores. Pascal chama Professor e pergunta:

[Pascal]: “Posso usar o comando reta paralelas?”.

[Professor]: “Não Pascal, a idéia é fazer as retas paralelas sem o comando reta paralelas [...]”.

Pascal, Hilbert e Ada se mostram frustrados e pedem tempo ao Professor. O Professor dá mais tempo para alunos realizarem a atividade, no entanto, o tempo já estava à hora da finalização desta sessão. O Professor vai a frente e finaliza aula dizendo que a atividade será retomada na sessão seguinte.

Comentários Gerais: Ao final desta sessão, os alunos já utilizam o *software Cabri Géomètre II*. Logo, a familiarização foi concluída com sucesso. E mesmo com dificuldades nas manipulações por parte de alguns alunos, os alunos são mais participativos que na sessão anterior. Os alunos percebem limitações computacionais associados à problemas de ação instrumental, e também, compreendem que o *software* na ação instrumental incentiva o ato de conhecer-na-ação pelos teoremas-em-ação. O uso de situações surpresa na mediação pedagógica (situação surpresa 002), viabiliza compreender aspectos da natureza do Velho PC em relação ao Novo PC. No entanto, nos trinta minutos finais, ao apresentar atividade 02 aos alunos-professores, em nenhum momento professor estabelece em contrato didático que os alunos não poderiam usar comando “retas paralelas” para efetuar tal construção. Logo surge como necessidade, a reformulação do contrato didático implícito, através do contrato didático explícito presente nas falas entre o Professor e Pascal. Houve problemas com a gestão do tempo, e a continuidade da atividade 02 fica para sessão posterior.

Sessão 03: Favorecendo investigações matemáticas

[00h00 – 00h30] ***Feedback*** **sobre sessão anterior:** Sessão inicia com atraso, Professor apresenta Bolsista 1 – PIBIC/CNPq e fala que ele pretende conhecer o grupo para posteriormente, em outro curso, trabalhar com *Modellus*, *software* voltado ao ensino de física fala dos trabalhos realizados no Laboratório Multimeios FACED/UFC. Professor menciona que pretende trabalhar parte teórica, mas na sessão anterior valorizou a prática. Esta resposta foi devido questionamento de Euler. Professor diz que na aula anterior queria propiciar um ambiente para investigação matemática, e fala sobre importância das discussões em aula. O Professor relembra atividades realizadas e retoma discussão sobre atividades falando sobre questões relativas ao saber matemático em suas características. O Professor explica que o saber matemático envolve ferramentas, o racicíonio e a capacidade em fazer transposições. Além disto, o Professor diferenciou o saber matemático em relação ao conhecimento sobre o *software*.

Pascal pergunta os motivos para não se utilizar comandos do software para construir retas paralelas, sendo que o Cabri dispõe dos mesmos, e o Professor fala sobre necessidade, em alguns momentos, de se explorar as construções geométricas. O Professor retoma atividade anterior, pede que alguém vá ao notebook, Talles se apresenta como voluntário.

Os alunos presentes na sessão são: Descartes, Euler, Gauss, Poincaré, Hilbert, Willes, Da Costa, Ada, Fibonacci, Pascal, E. Noether, Pitágoras e Talles. Boole está ausente devido reunião de planejamento no CMF. Estão presentes do grupo de pesquisa: Professor e Bolsistas IC/PIBIC 1 e 2 se revezando nas filmagens.

Comentários: Euler pergunta ao Professor porque na sessão anterior as atividades foram mais práticas que teóricas. O Professor fala sobre a familiarização e o conhecer-na-ação. Pascal sente contradição do Professor que apresenta uma atividade para construir retas paralelas, no entanto, impede que os alunos-professores usem o comando “retas paralelas”. Este problema teve origem em uma falha no contrato didático feito pelo Professor, a respeito da atividade 02.

Os alunos interagem mais e se sentem mais à vontade para questionar o Professor. São retomadas atividades da sessão anterior .

[00h30 – 01h00] A situação surpresa e a investigação : O Professor retoma a atividade da sessão anterior. Talles está no computador, mas quem o orientará será Hilbert que junto com Ada e Pascal desenvolveram uma construção para retas paralelas na aula anterior. A retomada da atividade anterior inicia com as falas do Professor.

Situação Surpresa 004 – *Bug* em uma macro-construção

[Professor]: "Na aula passada, iniciamos uma atividade sobre construção de retas paralelas sem usar o comando retas paralelas, bem, Hilbert e Pascal desenvolveram uma solução interessante e Hilbert e Ada queriam expor estas idéias. Bem, como Talles está ao computador, vocês poderiam orientar suas ações, pode ser?"

[Hilbert]: "Sem problemas, vamos lá".

Outros alunos conversam interagem em voz baixa, e reproduzem a solução de Hilbert, acompanhando pelo *notebook* Talles desenvolvendo suas ações. O Professor somente observa os alunos.

[Hilbert]: "Talles, vamos fazer assim, faz um ponto [A]. Isso! Agora faz uma reta [r]. Correto! Veja, temos um ponto [A] que não pertence a reta [r], esse é o enunciado do nosso problema, qual o nosso objetivo, construir uma reta [s], paralela a reta [r] pelo ponto [A]. Sendo este nosso desafio, vamos avançar rumo nossas construções. Como sou um professor tradicional, vi que no Cabri há um comando chamado compasso, bem o que queria saber é se o compasso que tenho no *Cabri* é uma ferramenta como o compasso do papel, sendo assim façamos o seguinte: Talles, usando o comando reta perpendicular, faz uma reta [t] perpendicular a reta [r] pelo ponto [A], bem essa é a régua. Agora vamos chamar a intersecção entre [r] e [t] como [B], agora em [r] marque um ponto [C] distinto do [B] e faça uma reta [a] perpendicular a [r] pelo ponto [C]. Pronto, temos outra régua. Bem após fazer isso, façamos uso do compasso pelo comando "compasso" clique em [A] e em [B] e depois clique em [C]. Pronto! Surgiu uma circunferência que chamarei por [k1]. Agora façamos um ponto [D] intersecção entre [k1] e [a].

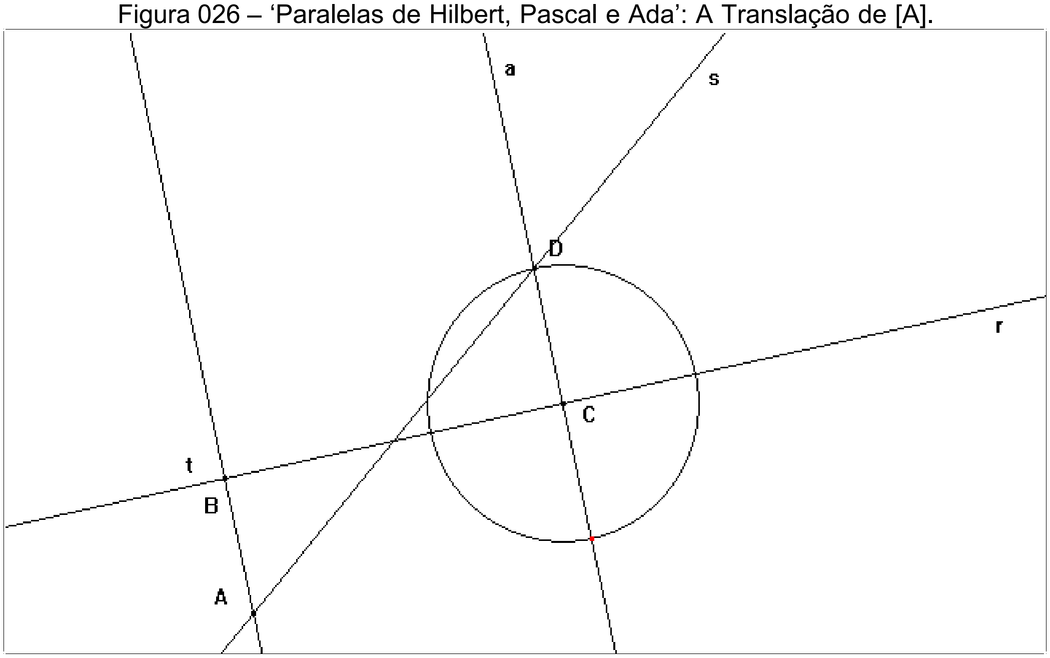
Como o nosso compasso transferiu a distância, vamos agora fazer a reta [s] pelos pontos [A] e [D]. Pronto! Eis a reta [s] paralela a reta [r]. Agora é só mover o ponto [A] e a reta [r], Talles e vai ver que essa retas sempre serão paralelas".

[Talles]: "Bem Hilbert, não é isso que acontece! Se mover o ponto [A] pra cá nem sempre isso vai acontecer".

[Hilbert]: "E ai Professor! Ou Talles errou, ou o compasso do computador não funciona, o que pode ser pior?"

[Professor]: "Nem imagino! Vamos verificar?"

Figura 026 – 'Paralelas de Hilbert, Pascal e Ada': A Translação de [A].



Alguns alunos levantam questão sobre utilidade deste tipo de atividade, dizem que as atividades deveriam ser aplicadas ao cotidiano. O Professor refuta estas idéias, dizendo que existem diferenças entre utilidade e aplicação. Menciona que o saber matemático pode ser aplicado em si mesmo. Os alunos manipulam construção realizada por Hilbert, Ada, Pascal e Talles. Professor coloca a situação presente como uma situação para investigação, e dá tempo aos alunos para preparar argumentação.

Comentários: Professor valoriza a construção como se esta fosse mais de Hilbert que de Ada e Pascal, tal fato constitui uma falha na mediação do

Professor. Para Hilbert, como Cabri possui um comando chamado “compasso” este deve equivaler, em termos instrumentais, ao compasso do Velho PC. Ao deslocar o ponto [A] em semiplanos distintos as retas deixam de ser paralelas (ver figura 026). Talles percebe falha e refuta Hilbert, e este crítica o colega levantando possibilidades de falhas ou do computador ou de Talles. Os alunos seguem as ações de Talles no *notebook*, ao seguir Talles, sem que Professor tenha solicitado tal ação, se estabeleceu contrato didático implícito. Professor adota Seqüência Fedathi como *práxis*, e estabelece “postura mão-no-bolso”. Os alunos interagem mais entre si .

[01h00 – 01h30] A situação surpresa e a investigação : Alunos interagem entre si para encontrar a melhor argumentação. Professor é chamado para falar respostas específicas sobre conteúdo, mas não menciona nem uma palavra. Wiles e Pitágoras vão ao computador enquanto Descartes, Noether e Willes discutem idéias sobre a atividade.

[Da Costa]: “O que você quer saber sobre o problema que surgiu? Eu sei que era pra ser paralelas [r] e [s], pois a gente faz assim com a régua e compasso, mas no papel a gente não move as coisas [...]”.

[Professor]: “Pois é! O que é preciso para ter paralelismo entre duas retas?”.

[Willes]: “Sabe, a perpendicular da perpendicular é a paralela [...]”.

[Professor]: “Mas o que condições são necessárias e suficientes para o paralelismo entre duas retas?”

[Descartes]: “Ter a mesma distância entre [r] e [s]”.

[Talles]: “Sim, mas quando movimento [A] tudo muda”.

[Pitágoras]: “Olha d(AB) = d(DC), mas veja que quando [A] desce [D], mas quando d(DA)=0, temos [D] batendo em [C] voltando para cima, já [A] passa por [B] e continua decaindo”.

[Noether]: “É mesmo, [D] rebate em [C] e retorna. Ou seja, para ter as retas [r] e [s] paralelas temos de fazer com que d(AB)=d(DC) sempre, e temos que ter [A] e [D] sempre no mesmo semiplano [...]”.

[Willes]: "Ou seja, o compasso do computador não é muito bom! Vamos ver o que fazer com o comando circunferência?".

[Professor]: "Willes, vá lá na frente e realize a construção [...]".

[Willes]: "Vamos lá Pitágoras?".

[Pitágoras]: "Vamos".

[Willes]: "Pensei o seguinte, o compasso do computador é um comando mal feito, mas ele parte da circunferência, bem para fazer a circunferência vamos fazer assim. Vou explicando e Pitágoras vai fazendo [...]. Bem, faz a reta [r] e o ponto [A] fora de [r].

Isso, vamos agora fazer uma reta [t] perpendicular a [r] que passa por [A]. Boa! Vamos agora fazer [B] intersecção entre [t] e [r].

Agora a gente faz assim, marca o ponto [C] sobre [r] e depois faz [a] perpendicular a [r] pelo ponto [C], o [C] é distinto de [B]. Agora é que as coisa mudam. Vamos achar [M], ponto médio de [BC], e vamos fazer a reta [u] por [A] e [M]. Veja que [u] faz intersecção com [a], ali é o ponto [D1]. Vamos fazer agora uma circunferência [kb] com centro em [C] e raio [CD1], na outra intersecção livre entre [a] e [kb] fazemos o ponto [D2]. Agora passamos a reta [s] por [AD2] agora é só o Pitágoras mover [...]".

[Pitágoras]: "Deu certo!"

[Professor]: "Porque deu certo?".

Figura 027 – Solução de Willes.

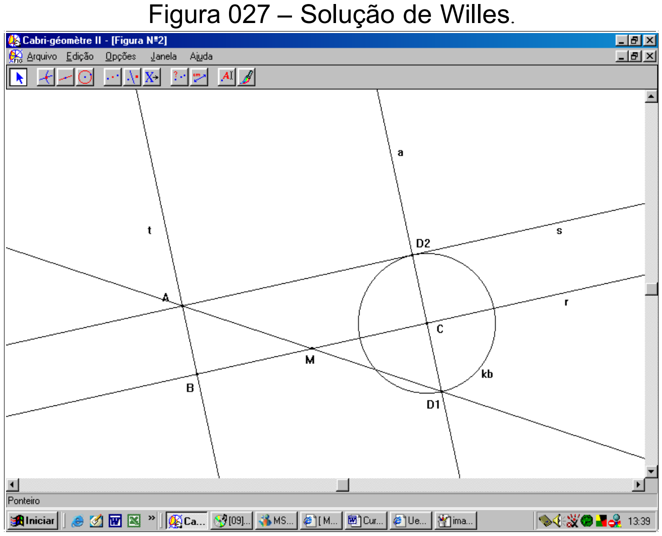
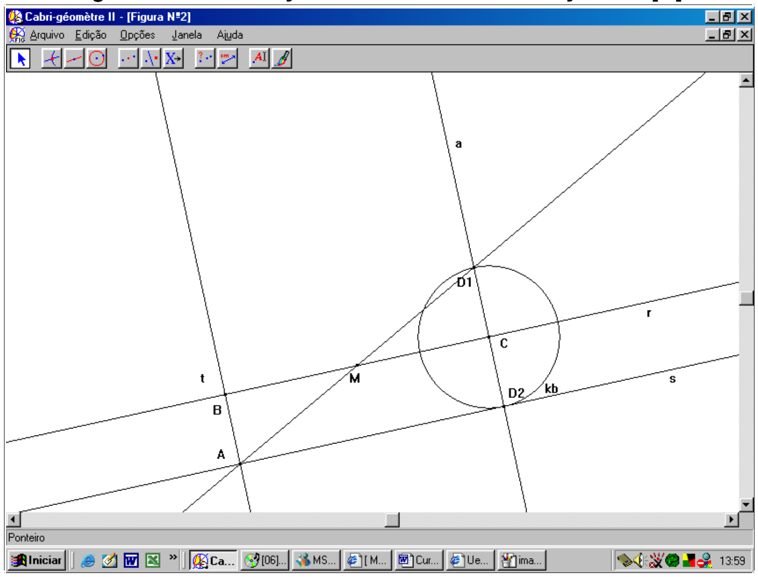


Figura 028 – Solução de Willes na translação de [A].



Alunos efetuam a construção de Willes e fazem verificação pela manipulação. Todos os alunos interagem e estão envolvidos nestas atividades.

Comentários: Willes e Pitágoras comentam que o comando "compasso" estaria com problemas, por isso optam por usar comando "circunferência" e apresentam uma nova solução.

O Professor faz questionamentos aos alunos-professores, mas não lhes dá soluções. As mediações pedagógicas são no intuito de que busquem suas próprias soluções. Neste caso, o Professor faz uso da Seqüência Fedathi e os alunos estariam na passagem da fase de debruçamento para solução.

Os alunos-professores estão tão envolvidos que ao dar intervalo, eles não saem do Laboratório de Informática do CMF. Surgem questionamentos sobre as condições necessárias para existir paralelismo. Da Costa percebe relação instrumental entre Velho PC e Novo PC ao comparar o compasso com o comando "compasso" do *Cabri* .

[01h30 – 02h00] A situação surpresa e a investigação : Com o questionamento do Professor, alunos-professores preparam argumentação. O Professor exige justificativa sobre os motivos para o paralelismo na construção de Willes. Pitágoras apresenta uma solução. Bolsistas mostram ao Professor problemas na gestão do tempo.

[Pitágoras]: "Os segmentos [AB] e [D1C] são homotéticos por [M] com razão de homotetia menos um. Sendo assim, uma circunferência [kb] com centro [C] e raio [CD1] terá um segmento [CD2] congruente ao segmento [AB], de como que ambos preservem a mesma distância e estejam no mesmo semiplano (ver figuras 027 e 028)".

A partir da situação posta , o Professor discute junto aos alunos sobre a importância em se agregar o Novo PC ao Velho PC. Conversando com os alunos-professores Hilbert menciona:

[Hilbert]: "Nós somos incompetentes no uso dessa máquina, o computador não é a geometria".

O Professor diz que o Novo PC permite apresentar situações antigas num outro contexto e menciona que se impõe neste processo a possibilidade em gerar a argumentação com os alunos. O Professor comenta que os alunos-professores devem se acostumar a sofrer desconstruções para ocorrer à reestruturação de novas idéias.

O professor Pascal questiona o sentido desta atividade ao Professor, mas Hilbert responde para Pascal que o Professor se aproveitou de uma situação com o intuito de provocar uma discussão que viabiliza o crescimento da capacidade de refletir novas tecnologias por parte dos alunos-professores.

Os alunos interagiram muito na atividade, ao terminar a apresentação da mesma, o Professor faz uma discussão sobre os aspectos gerais da atividade e finaliza a sessão.

Comentários Gerais: Ao exigir justificativas o Professor queria que os alunos-professores compreendessem sobre as limitações que os computadores apresentam, bem como, compreendessem o caráter da matemática enquanto investigação. Por outro lado, as limitações computacionais podem, se o professor souber como mediar e intervir, ser um instrumento didático poderoso no ensino de matemática assistido por computador. Os alunos-professores conseguiram nesta atividade sair do Novo PC para o Velho PC, fizeram a validação matemática da situação surpresa, além disto, o Professor conseguiu completar a Seqüência Fedathi enquanto postura docente nesta atividade.

O comando “compasso” é uma macro-construção do *software Cabri Géomètre II for Windows*. Nesta macro, os pontos que constroem a figura não conseguem mudar de semiplano. Por isso, quando o raio da circunferência [k1] chega a medida zero, ocorre o rebatimento dos pontos ao mesmo semiplano. fato este que tornava [r] e [s] concorrentes. Neste sentido, devidas limitações intrínsecas ao *software*, no caso um *bug* do *software*, ocorriam as situações surpresas acima. A solução de Willes e Pitágoras adotam como ferramental idéias sobre homotetias e paralelismos, um ponto de vista pouco usual sobre questionamentos antigos, ou seja, um “novo olhar”. Nesta sessão de modo geral houve grande interação entre os alunos.

Sessão 04: Formação e sistematização de idéias do curso

[00h00 – 00h30] Fundamentação Teórica do curso: A sessão atual tinha por objetivo sistematizar os saberes matemáticos e educacionais desenvolvidos junto aos alunos. Em certo sentido, se tratou de um contrato didático sobre o curso em andamento. A maior parte desta sessão foi expositiva, com uso do *notebook* e *slides*, no entanto, várias idéias desenvolvidas na práxis ficaram mais claras para os alunos. Ao final da sessão o Professor apresenta a situação surpresa da soma dos ângulos internos de um triângulo, no entanto, tal situação será abordada melhor na sessão seguinte (cf. 97 – 104). Os alunos-professores presentes são: Descartes, Euler, Gauss, Poincaré, Hilbert, Willes, Da Costa, Fibonacci, Pascal, Boole, Noether, Pitágoras e Talles. Ada está ausente, pois participa de uma reunião de planejamento no CMF. Do grupo de pesquisa estão presentes: Professor e Bolsistas IC/PIBIC 1 e 2. Para que se possa avançar mais nas discussões pertinentes as situações surpresa, descreverei brevemente o período de trabalho entre 00h00 – 01h30 de filmagem, pois os tópicos teóricos abordados junto aos alunos-professores, já estão presentes nesta tese nos itens anteriores.

[00h00 – 00h30] Fundamentação teórica: O Professor inicia sessão apresentando slides sobre tópicos teóricos, explana engenharia didática e a Seqüência Fedathi, falando sobre a relevância destas concepções na passagem do Novo PC ao Velho PC. Usa como exemplo a situação surpresa 004, apresentada na sessão anterior e chama atenção para necessidade em estabelecer a reflexão crítica. Menciona que a passagem do Velho PC ao Novo PC, geralmente, não viabiliza a reflexão crítica, e menciona que os bug e problema de manipulação, quando usados na perspectiva do Novo PC ao Velho PC, podem ser utilizados para viabilizar a investigação matemática por parte dos alunos. Fala sobre os cuidados que se deve ter sobre o mito do computador infalível, e menciona quais os objetivos da pesquisa no doutorado. Os alunos-professores estão atentos à exposição e efetuam anotações próprias.

Comentários: Os tópicos discutidos se referem a metodologia em uso na pesquisa do doutorado com respeito a passagem do Novo PC ao Velho PC.

[00h30 – 01h00] Fundamentação teórica: Professor fala sobre a validação matemática e seus procedimentos. Hilbert interage com Professor sobre o assunto, e chegam ao consenso que tais processos são complementares. O Professor menciona concepções sobre validação com base em Polya, menciona concepções de Lakatos, e fala sobre a demonstração em relação a passagem do Novo PC ao Velho PC. O Professor explica o conceito de situação surpresa e menciona as idéias sobre o conhecer-na-ação com base em Schön. Além disto menciona aspectos da formação docente em relação ao uso do computador no ensino de matemática. Os alunos atentos realizam anotações enquanto o Professor expõem *slides* .

[01h00 – 01h30] Fundamentação teórica: O Professor comenta alguns resultados parciais obtidos na pesquisa do mestrado.

[Professor]: “Os resultados parciais obtidos com a pesquisa do mestrado são as seguintes, os tipos de limitações catalogados são: i) Divergências conceituais de software – quando dois fabricantes utilizam axiomas diferentes para realizar a mesma ação em casa software; ii) Erros de manipulação do usuário – quando ao trabalhar determinada ação o usuário clica aqui ou lá gerando esses erros; iii) Erros do *software* ou de *hardware*. Além disto, O processo de reflexão do aluno se da mediante ao processo de validação. Só pela demonstração é capaz de se identificar um erro em um programa matemático. Para ocorrer a passagem do novo ao velho PC é preciso haver o processo de negociação que é quando eu como professor tento evitar o conflito entre alunos".

O Professor também menciona concepções sobre meta-reflexão em Schön como uma postura que favorece a relação docente-discente. Boole pergunta sobre o significado da heurística, e o Professor responde com base nas idéias de Polya. Após esta fala o Professor faz um breve intervalo.

[01h30 – 02h00] Fundamentação teórica e situação surpresa: O Professor reinicia aula, fala aos alunos-professores sobre a necessidade em se trabalhar com vários *softwares* distintos, mesmo que tenham a mesma proposta, para favorecer o ensino de matemática. Após a apresentação das concepções teóricas, o Professor apresenta aos alunos-professores uma situação surpresa que ocorreu em uma formação realizada em Quixadá (cf. 97 – 104).

Situação surpresa 005 – A soma dos ângulos internos de um triângulo

O Professor fala sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo que eram maior ou menor que 180^o . Menciona-se que foi pedido aos alunos (professores de matemática) de Quixadá para efetuar a soma dos ângulos internos de um triângulo e então quatro alunos mostram que a soma destes havia sido superior a 180°, com isso ele observou a possibilidade em trabalhar com o este saber mostrando as seguintes conjecturas:

$a+b+c=180^o$;

$a+b+c <=180^o$

$a+b+c >= 180^o$.

E o Professor apresentou as situações aos alunos. Após apresentar essa discussão o Professor pergunta aos alunos-professores o que justificaria a soma dos ângulos internos no computador ser maior e/ou menor que 180^o?

Os alunos começam discutir situação apresentada pelo Professor no *notebook*. Professor dá tem aos alunos para averiguar a situação surpresa.

Alunos interagem discutindo a situação em questão. Mas toca corneta do CMF. Professor encerra atividade e propõem a discussão sobre a mesma para a próxima aula. A sessão é encerrada.

Comentários Gerais: Ao apresentar a atividade os alunos tentam reproduzir a figura do Professor em seus computadores. Pascal ao medir, consegue fazer um triângulo cuja soma dos ângulos internos seja inferior à 180º, no entanto, não socializou a situação. A sessão foi meramente teórica, e visou sistematizar o trabalho realizado até o momento. Houve problemas na gestão do tempo da sessão.

Sessão 05: Finalizando formação com professores

A sessão atual tem por objetivo sistematizar os saberes matemáticos, apresentar resultados parciais de pesquisa, bem como finalizar o curso em questão. Boa parte desta sessão foi expositiva, com uso do *notebook* e *slides*, no entanto, houve momentos práticos com a situação surpresa 005. Ao final o Bolsista PIBIC/CNPq 1 apresenta o *Modellus* e a sessão é finalizada após este trabalho. Os alunos presentes são: Descartes, Euler, Gauss, Poincaré, Hilbert, Willes, Da Costa, Ada, Fibonacci, Noether, Pitágoras e Talles. Estão ausentes: Pascal e Boole em reunião de planejamento no CMF. A equipe de pesquisa está composta por: Professor, Bolsistas 1 e 2 IC/PIBIC e o Professor Fedathi.

Para que se possa avançar mais nas discussões pertinentes as situações surpresa, descreverei brevemente alguns períodos de filmagem, pois os tópicos teóricos abordados junto aos alunos-professores, já estão presentes nesta tese nos itens anteriores.

[00h00 – 00h30] Formação e situação surpresa 005: O Professor inicia sessão falando das possibilidades sobre o uso do computador para desconstrução de concepções estabelecidas pelos indivíduos na formação escolar.

[Professor]: “É necessário deixar as concepções que se tornam crenças para assumir novos pontos de vista”.

[Hilbert]: “Mas o que é um novo ponto de vista? É destruir tudo e iniciar de novo?”.

[Euler]: “Talvez seja, mas na realidade o que o Professor quer dizer é que devemos ter flexibilidade no pensar com uso dos computadores no ensino de matemática [...]”.

Após a discussão, o Professor retoma atividade que apresentou a situação surpresa 005. Pergunta aos alunos-professores se alguém deseja explorar situações. Pitágoras vai ao *notebook*. Os outros alunos-professores se voltam ao questionamento sobre a situação surpresa 005, e efetuam algumas hipóteses. O Professor dá 15 minutos para exploração desta atividade.

No notebook a situação surpresa 005 está apresentada, Pitágoras manipula a figura, os outros alunos interagem.

[00h30 – 01h00] Formação e situação surpresa 005: Os alunos-professores tentam compreender a situação surpresa 005. Pitágoras manipula computador. Professor e Professor Fedathi observam os alunos-professores.

[Talles]: “Deve ser uma falha na calculadora do *Cabri*”.

[Euler]: “Talvez, mas pode ser também um erro na manipulação do programa [...]”.

[Professor]: “Sim, pode ser muitas coisas, investiguem [...]”.

Os alunos interagem, mas após algum tempo Pitágoras chama Willes, Ada e Euler estes observam e discutem atividade.

[Pitágoras]: “Pronto! já sabemos o que aconteceu. Na hora de construir a figura o Professor deu um clique errado, quer ver?”.

[Hilbert]: “É mesmo! foi isso, tá vendo o computador engana!”. (Risos).

[Professor]: “Certo, sabemos qual é o erro, mas quero saber porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o ?”.

[Pitágoras]: "Certo! Entendi a idéia! Na realidade o que você quer é que a partir destes problemas nos mostremos, ou melhor, demonstremos [...]".

[Willes]: "É ai que saímos do Novo PC e vamos para o Velho PC".

[Da Costa]: "Mas eu preciso ir para a lousa?"

[Willes]: "Não é isso! O quadro, compasso, papel e caneta são uma forma de matemática estática, mas que a gente usa dedução, pensamento e argumentação. No computador a coisa é visual é aquele papo: 'uma imagem vale mil palavras' entendeu?".

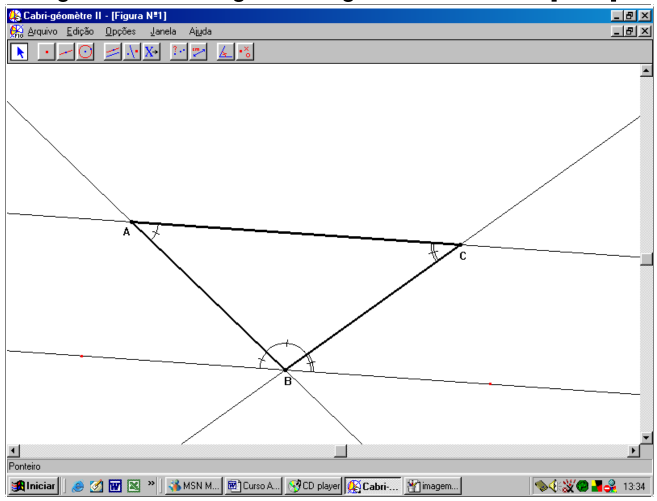
[Professor]: "Certo, vamos avançar nestas idéias pessoal, vou dar um tempo para que vocês preparem suas argumentações matemáticas [...]".

Os alunos interagem para efetivar argumentações. O Professor e Fedathi observam em silêncio os alunos em ação. Pitágoras descobre o erro na situação surpresa 005 e mostra um ponto clicado junto ao vértice [C] do triângulo [ABC]. O Professor cobra dos alunos que estes se detenham em apresentar uma justificativa matemática.

Comentários: Ao efetuar manipulações Pitágoras descobre o erro, no entanto, Professor exige uma demonstração sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo ser equivalente a dois ângulos retos. Após esta mediação, Pitágoras, Willes e Da Costa estabelecem o diálogo acima. O fato dos alunos se preocuparem mais com as falhas computacionais que com o processo de validação do saber matemático, é um dos riscos que se corre na passagem do Novo PC ao Velho PC. Disto se torna uma necessidade a mediação pedagógica

[01h00 – 01h30] Formação e situação surpresa 005: Pitágoras elabora uma construção e apresenta a validação matemática para a situação surpresa 005 (ver figura 029).

Figura 029 – Pitágoras: ângulos internos de [ABC].



Após validação de Pitágoras, o Professor apresenta situação surpresa da elipse, no entanto, como há problemas em gestão de tempo, mostra tal situação de modo expositivo. Enquanto bolsista PIBIC/CNPq 1 está no computador, o Professor lhe dá as orientações sobre a construção e este às realiza no *notebook*. Após esta exposição, O Professor Fedathi faz considerações sobre o uso do computador no ensino de matemática. Após fala de Fedathi o Professor passa palavra para Bolsista PIBIC/CNPq 1 e este trabalha com *Modellus*. O bolsista 1 apresenta os dados sobre o *software*, mas não há detalhamento sobre as ações.

[01h30 – 02h00] Apresentação *Modellus* e o final do curso: O Bolsista 1 apresenta aspectos do uso do Modellus, mas Euler diz que as ações realizadas com Modellus poderiam ser realizadas com MS-Excel, a partir desta fala surge um diálogo entre os alunos-professores e o Bolsista 1.

[Euler]: "A máquina tem o recurso e o professor o conhecimento, mas não vejo novidades naquilo que está falando Bolsista 1".

[Bolsista 1]: "A novidade é o computador".

[Willes]: "Então, vamos deixar que conhecimentos físicos acumulados ao longo dos séculos sejam esquecidos pela simulação computacional?".

O Professor observa a discussão. Poincaré intervém bastante no momento da construção de uma função exponencial e questiona:

[Poincaré]: “Como o aluno vai entender essa construção?”.

O Bolsista 1 diz que no momento da utilização o professor precisa observar as limitações do *software*.

[Bolsista 1]: “Modelação é interpolação e extrapolação [...]”.

O Professor diz que se nos deixarmos levar somente pelo visual podemos chegar a conclusões erradas.

[Gauss]: “Como fazer o aluno vivenciar questões do dia-a dia?”.

[Euler]: “ O *software* é bom, mas é preciso criar um banco de atividades para serem resolvidos [...]”.

O Professor finaliza o curso agradecendo e se despedindo dos alunos-professores.

Comentários Gerais: Houve problemas na gestão de tempo, mas as concepções básicas foram trabalhadas junto aos alunos-professores. Ao apresentar *Modellus*, o Bolsista 1 (Bolsista PIBIC/CNPq 1), pelos problemas de gestão de tempo, não teve como apresentar atividades, nem mesmo o *software*, mas este momento foi essencial para preparação do Bolsista 1 para sua pesquisa PIBIC no CMF que foi realizada em 2004. Também houve problemas para o Bolsista 1 com respeito à meta-reflexão. Quanto diálogo final, até mesmo Poincaré que pouco participou de discussões sobre o curso toma partido na discussão final. Os alunos-professores nesta discussão vão de encontro à análise educativa do *software*.

02.3 – A passagem do Novo PC ao Velho PC e os estudantes

Os dados que apresento a seguir são relativos as formações ministradas junto aos estudantes de 6ª série da Escola Estadual de Ensino Fundamental Monteiro de Moraes e os alunos de 8ª série do CMF.

As informações apresentadas a seguir correspondem as fases 03 e 04 da pesquisa em questão, e procurarei descrever a caracterização dos discentes de cada uma das fases, chamando atenção para as situações surpresa que surgiram ao longo dos cursos nas ao longo das sessões . Para preservar a identidade dos sujeitos, substitui seus nomes por codinomes. No caso do Monteiro de Moraes, os alunos receberam letras em hebraico no lugar dos seus nomes para homenagear a origem judaica de Lakatos, já no caso do CMF os alunos receberam letras em grego como em “Provas e Refutações” de Lakatos. O nome Professor foi o termo utilizado para caracterizar o pesquisador-mediador que neste caso fui eu, e para ambos cursos foram realizadas transcrições das anotações dos alunos nos cadernos de atividade, os dados obtidos das anotações foram relevantes como auxílio para transcrição das fitas de vídeo, no entanto, as mesmas não serão vinculadas ao corpo do texto desta tese.

02.3.1 – Situações Surpresa com alunos de 6ª série

Caracterização dos alunos da Escola Monteiro de Moraes:

Participaram do curso no Monteiro de Moraes 14 estudantes, sendo 6 do sexo masculino e 8 do feminino, todos os estudantes residem em Fortaleza-CE conforme dados da tabela 013 abaixo.

Tabela 013 – Caracterização dos estudantes do MM[30] que participaram do Curso de Geometria assistido por computador em 2004.

Código Identificador	Sexo	Cidade	Instituição
Aluno 001b: Alef	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 002b: Beth	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 003b: Guimel	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 004b: Dalet	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 005b: He	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 006b: Vav	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 007b: Zayin	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 008b: Chet	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 009b: Tet	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 010b: Yud	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 011b: Caf	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 012b: Lamed	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 013b: Mem	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 014b: Num	Masculino	Fortaleza-CE	MM

Fonte de dados: Sondagem junto ao professor, lista de freqüência, Diário de campo e folha de atividades.

[30] Escola Municipal Monteiro de Moraes.

Todos os alunos são da sexta série do Ensino Fundamental, 13 alunos possuem idade de 12 anos e somente Zayin possui 13 anos. A aluna He foi congratulada na OEM[31]/CE em 2003, quanto os outros alunos não havia alguma consideração sobre este assunto, conforme os dados da tabela 014.

Tabela 014 - Caracterização dos alunos do Monteiro de Moraes.

Código Identificador	Série / Ano	Idade em anos	Observações
Aluno 001b: Alef	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 002b: Beth	6ª série / 2004	13	"sem considerações"
Aluno 003b: Guimel	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 004b: Dalet	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 005b: He	6ª série / 2004	12	"Congratulada na OEM/CE"
Aluno 006b: Vav	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 007b: Zayin	6ª série / 2004	13	"sem considerações"
Aluno 008b: Chet	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 009b: Tet	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 010b: Yud	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 011b: Caf	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 012b: Lamed	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 013b: Mem	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 014b: Num	6ª série / 2004	12	"sem considerações"

Fonte de dados: Sondagem junto ao professor e lista de freqüência.

Quanto a freqüência no curso, que teve 10 sessões foi de 97,14% conforme tabelas 015a e 015b.

Tabela 015a – Freqüência dos estudantes no decorrer do curso em Out/2004 (1ª semana).

Código Identificador	Instituição	07.Out.04	08.Out.04	13.Out.04	14.Out.04	15.Out.04	Total
Aluno 001b: Alef	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 002b: Beth	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 003b: Guimel	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 004b: Dalet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 005b: He	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 006b: Vav	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 007b: Zayin	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 008b: Chet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 009b: Tet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 010b: Yud	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 011b: Caf	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 012b: Lamed	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 013b: Mem	MM	00	01	01	01	01	04
Aluno 014b: Num	MM	00	01	01	01	01	04

Fonte de dados: Questionário – Lista de Freqüência.

[31] Olimpíadas Estaduais de Matemática – CE.

Tabela 015b – Freqüência dos estudantes no decorrer do curso em Out/2004 (2ª semana).

Código Identificador	Instituição	18.Out.04	19.Out.04	20.Out.04	21.Out.04	22.Out.04	Total
Aluno 001b: Alef	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 002b: Beth	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 003b: Guimel	MM	01	01	00	01	01	04
Aluno 004b: Dalet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 005b: He	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 006b: Vav	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 007b: Zayin	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 008b: Chet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 009b: Tet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 010b: Yud	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 011b: Caf	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 012b: Lamed	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 013b: Mem	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 014b: Num	MM	01	01	01	00	01	04

Fonte de dados: Questionário – Lista de Freqüência.

Em princípio iam participar deste curso somente 10 alunos, no entanto, a professora da turma solicitou mais 4 vagas pois os alunos estavam interessados nesta atividade. A escolha dos alunos foi realizada pela professora, e os objetivos desta fase da pesquisa estavam em realizar um piloto para as atividades do CMF com os alunos de 8ª série, bem como, para preparar a equipe de trabalho.

Caracterização das sessões do curso: Nesta fase, foram 10 sessões realizadas nas seguintes datas: Sessão 01 – 07 de Outubro de 2004; Sessão 02 – 08 de Outubro de 2004; Sessão 03 – 13 de Outubro de 2004; Sessão 04 – 14 de Outubro 2004; Sessão 05 – 15 de Outubro de 2004; Sessão 06 – 18 de Outubro de 2004; Sessão 07 – 19 de Outubro de 2004; Sessão 08 – 20 de Outubro de 2004; Sessão 09 – 21 de Outubro 2004; Sessão 10 – 22 de Outubro de 2004.

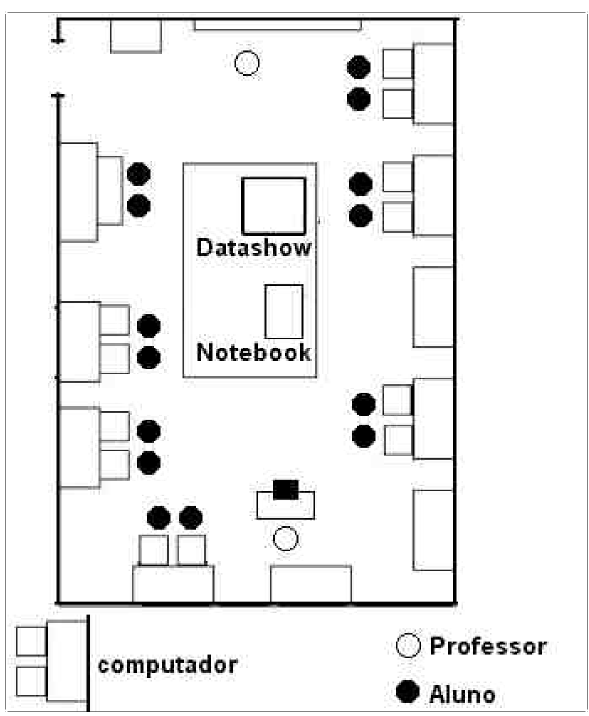
Procurarei descrever cada sessão, destacando situações em que passagem do Novo PC ao Velho PC, favoreceu investigações matemáticas na formação discente.

Sessão 01 – Contrato didático e formação inicial

[00h00 – 01h00] O contrato didático: O Professor inicia o curso junto aos estudantes da Escola Municipal Monteiro de Moraes. Apresenta a equipe formada por dois bolsistas PIBIC/CNPq. Explica aos alunos que faz parte do Laboratório Multimeios FACED/UFC, e diz aos alunos que faz pesquisas sobre *softwar*e educativo no ensino de matemática. Os alunos presentes em aula são: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed. Estão ausentes Mem e Num. Da equipe de pesquisa estão presentes: Professor e dois bolsistas PIBIC/CNPq, sendo um bolsista apoio ao Professor e outro está na filmadora.

Após apresentação da equipe de pesquisa, o Professor pede aos alunos que se apresentem. Após apresentação o Professor estabelece junto aos alunos o horário do curso e o intervalo e lhes pede para que preencham a lista de freqüência. Durante a distribuição do caderno de atividades o Professor fala para que os alunos escrevam e façam os rascunhos que achem necessário ao desenvolver as atividades usando o computador.

Figura 030 – *Layout* do LIE M. Moraes.



[Professor]: “Quem aqui nunca mexeu em um computador? Todos já usaram um computador?”.

Todos os alunos confirmam ter usado em algum momento de sua vida recursos computacionais [00h30].

O Professor propõem atividade de familiarização com o *GeoNext* a partir do caderno de atividades que foi distribuído.

O Professor organiza atividade em duplas e dá tempo aos alunos para realizar atividade.

O Professor repete individualmente atividades para os alunos Vav e Zayin [00h45]. Vários alunos chamam Professor para retirar algumas dúvidas sobre comandos do *GeoNext*.

[He]: “Professor é para fazer essa figura?”

[Professor]: “Não He, essa figura é somente uma ilustração”.

Cometários: Professor estabelece contrato didático do curso nesta primeira hora, faz apresentação e distribui folhas de atividade.

Alunos estão em princípio estão tímidos, mas aos poucos estão se soltando nas atividades.

O *Layout* do Laboratório dificulta o trabalho do Professor e dos alunos do curso, pois obriga todos voltarem suas costas para o centro da sala, deixando o computador de costa para os alunos.

A pergunta de He revela que Figura na folha de atividade (Anexo 04) induz os alunos à reprodução da mesma, fato que caracteriza um problema para compreensão, trata-se de uma “má criação didática” para os objetivos do curso, ou seja, a mediação realizada pela figura induz ao erro na compreensão desta atividade de familiarização.

[01h00 – 02h00] Familiarização com *GeoNext*: Os alunos interagem muito entre si. Muitos alunos perguntam ao Professor se é para reproduzir no computador uma figura da folha de atividades. Professor faz intervalo de 10 min [01h06 – 01h16].

Após o intervalo o Professor chama alunos Alef e Beth para apresentação da atividade 01. Estes alunos explicam o que é o *GeoNext* e falam sobre zona-de-desenho, menu-de-comandos e barra-de-ferramentas.

[Alef]: "Neste tipo de jogo nós mesmos programamos o que vamos fazer, como: medida de ângulos, abertura, podemos saber o valor criando outro ponto".

[Professor]: "Alef e Beth, vão ao computador, lá vocês podem explicar e mostrar o que fazer. Não é melhor mostrar fazendo?".

[Beth]: "Mas se o pessoal rir da minha cara?"

[Professor]: "Uma das regras que temos é a seguinte: Você pode errar o quanto for, ninguém ri do colega, afinal todos nós podemos errar e eu também erro. Agora se errarmos e uma pessoa apontar o erro, vamos descobrir juntos onde erramos! Afinal o erro pode ser um ótimo professor".

Depois desta fala os alunos se tranqüilizam e Alef e Beth vão ao *notebook* do Professor e explicam suas atividades.

Os alunos Alef e Beth explicam como fazer retas, segmentos e semi-retas. Alef e Beth apresentam comando para realizar ângulos.

<u>Situação surpresa 006 – O ângulo "esquisito"</u>

[Professor]: "O valor da medida do ângulo está correto?"

[Beth]: "Não sei, mas o computador deve saber [...]".

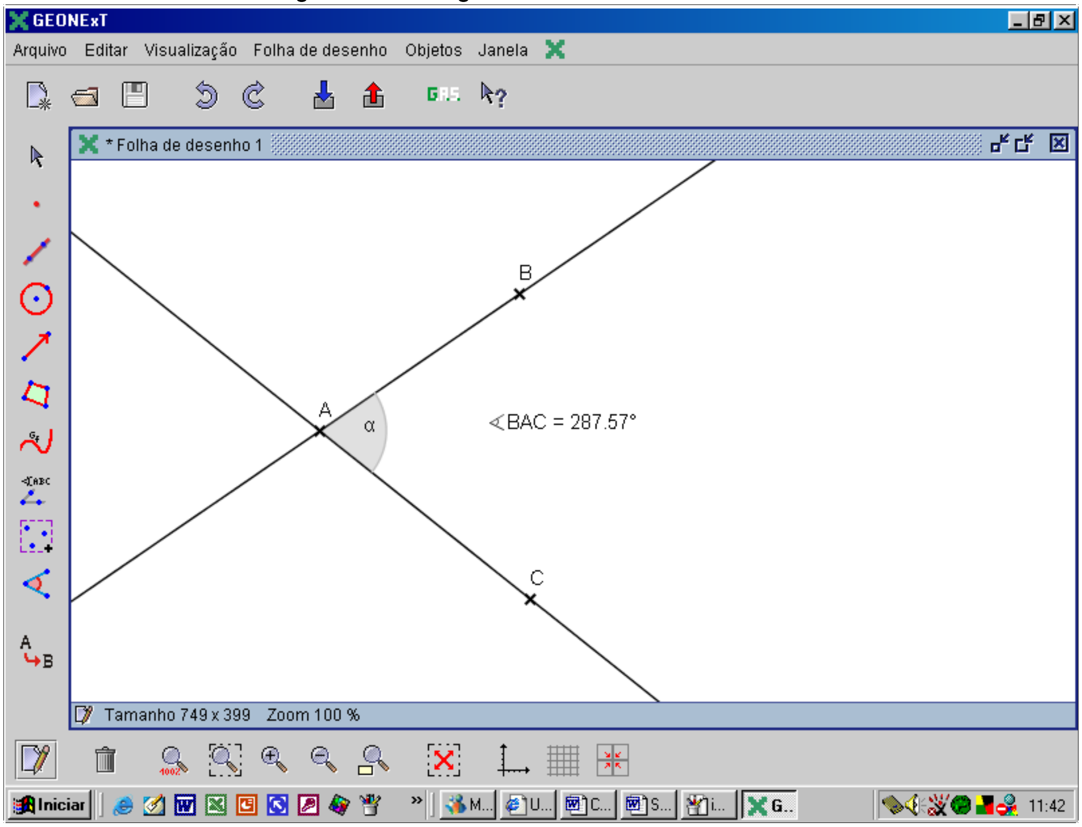
[Alef]: "Uê? Fiz o ângulo agora deu um valor! E medi de novo e deu outro!".

[Professor]: "O que está ocorrendo aqui?".

Alunos ficam em silêncio e observam ações de Alef e Beth.

[Alef]: "Sabe, fiz a medida clicando primeiro [B], [A] e [C]. Na volta fiz depois [C], [A] e [B]. Deu resultados diferentes. Porque?". Alunos discutem e testam atividade.

Figura 031 – Ângulo “estranho” de Alef e Beth.



A maioria dos alunos não percebe, mas o ângulo aparenta ser menor que um ângulo reto, no entanto, sua medida está em 287º. Professor instiga alunos à investigar o ocorrido. Alef e Beth reproduzem atividade.

He faz atividade no computador pretende dar resposta, mas o Professor lhe acena com as mãos para que a mesma deixe para responder depois e a aluna aparenta compreender o Professor. Os outros alunos observam ações de Alef e Beth. Alunos testam atividade o Professor deixa discussão para o dia seguinte termina sessão.

Comentários Gerais: Na fala de Alef se percebe que o aluno pode estar considerando *software* um jogo educativo, uma percepção que pode ter sido desenvolvido devido uso que este tem feito do LIE. Um outro aspecto, está na resistência Beth em ir ao notebook, tal fato desencadeia diálogo e a mediação do Professor estabelece no contrato didático que as pessoas podem errar, mas não podem rir das falhas do colega, antes deve tentar compreender. Esta mediação pedagógica foi essencial ao desenvolvimento da sessão. Figura da atividade 01 induz ao erro vários estudantes. situação surpresa 006, resulta de um problema instrumental associado ao uso do comando "ângulo" junto com o comando "medir" ângulos. No *GeoNext* ao adotar o sentido horário no uso dos comandos "ângulo" e "medir ângulo" calculam o ângulo interno. No entanto, Alef e Beth mediram o ângulo externo e apresentaram o ângulo interno. Deste modo, apareceu o ângulo interno com a medida do ângulo externo. Trata-se de um problema de ação instrumental, no entanto, os desenvolvedores do programa talvez não pensaram que ambos comandos, mencionados acima, poderiam ser utilizados de tal modo, que fosse possível a geração desta contradição conceitual em termos de representação. Os alunos parecem estar familiarizados com o *software GeoNext*

Sessão 02 – Familiarização e atividades de formação

[**00h00 – 01h00] Situação surpresa 006 – O desfecho:** Ao iniciar aula o Professor pede para que os 02 alunos novatos se apresentem. Estes alunos são Mem e Num. O Professor pede que as duplas mudem neste dia. E faz a recapitulação das discussões da aula anterior. Alunos estão manipulando *software* e estão um pouco dispersos. Os alunos presentes em aula são: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed, Mem e Num. Não houve faltas. Da equipe de pesquisa estão presentes: Professor e dois bolsistas PIBIC/CNPq.

O Professor dá tempo aos alunos para que reorganizem suas ações para reiniciar atividades da aula anterior. Alunos interagem mais que na aula anterior. Mem e Num ainda estão um pouco quietos, no entanto, o Professor coloca Mem com Dalet e Num com Caf [00h12].

Após o tempo dado aos alunos o Professor retoma atividade anterior.

[Professor]: "Lembram da atividade de ontem? Porque ao medir o ângulo pelos pontos [B], [A] e [C] é diferente de medir a partir de [C], [A] e [B]?".

Alunos fazem silêncio, mas He responde:

[He]: “Porque os ângulos [BAC] e [CAB] são diferentes, um é ângulo interno e o outro é externo [...]”.

[Caf]: “Mas um triângulo [BAC] não é a mesma coisa que [CAB]?”.

[Alef]: “É!”

[Caf]: “Então porque os ângulos [BAC] e [CAB] são diferentes?”.

[Zayin]: “O ângulo [CAB] é interno e o [BAC] é externo, queríamos medir [CAB], mas medimos [BAC]”.

[Professor]: “Mas porque medimos errado?”.

[Beth]: “Porque escolhemos de cima pra baixo e não de baixo pra cima. O computador tem direção para fazer o ângulo interno ou externo”.

[Professor]: “Compreenderam?”.

Após explicação Professor dá tempo para realização das próximas atividades e lhes é pedido para que usem o caderno de atividades para que realizem anotações. Alunos interagem e discutem atividades com mais desenvoltura. Durante discussão Zayin foi ao quadro apontar os ângulos interno e externo na imagem refletida pelo *datashow*. Os alunos interagem mais entre si que na aula anterior. Professor apenas observa e dá intervalo aos alunos ao toque do sinal do intervalo [01h00].

Comentários: O problema da medição de ângulos no *GeoNext*, envolve limitações conceituais no desenvolvimento, relativos à questões sobre a ação instrumental – O sentido horário é a medição de ângulo interno, sentido anti-horário ângulo externo. He assume liderança na discussão e apresenta sua resposta, em que percebe que este tipo de situação ocorre no computador. Caf, Alef, He, Beth e Zayin interagem na discussão e He e Beth conseguem defender seus argumentos.

Há problemas na gestão do tempo, e durante intervalo 7 alunos ficam e continuam realizando atividades. Mem e Num iniciam curso neste dia, pois haviam pedido à professora para participar da formação. Para facilitar o trabalho, o Professor coloca Mem com Dalet e Num com Caf, neste sentido, o objetivo do Professor é que os alunos Dalet e Caf façam mediações junto a Mem e Num no intuito destes conhecerem as regras e atividades realizadas nas atividades anteriores, bem como, para favorecer a familiarização dos alunos novatos.

Quanto a interação, os alunos estão mais a vontade e desenvoltos, e isto é percebido pelo fato de Zayin na discussão ter ido a frente de forma natural

[01h00 – 02h00] Familiarização com *Cabri*: Após o intervalo, o Professor chama alunos para que apresentem atividades desenvolvidas.

<u>**Situação surpresa 007 – Como finalizar um polígono?**</u>

Os alunos He e Vav apresentam atividade sobre construção de polígonos. Vav manipula computador enquanto He explica atividade.

[He]: "Só tem um problema Professor, não sei como terminar o polígono no computador [...]".

[Professor]: "Porque você não finaliza o polígono onde iniciou?".

[He]: "Vou tentar, vou fazer um triângulo. Vav, vai em opções e clica no comando polígonos, isso! Agora faz um triângulo [ABC], mas você fecha ele no ponto [C], isso! Deu certo".

[Professor]: "Porque ele só faz polígono deste modo?".

Alunos ficam em silêncio, mas Zayin responde ao questionamento colocado.

[Zayin]: "Porque o polígono é fechado, onde a gente inicia a gente finaliza".

Para explicar, Zayin usa uma das mãos para fazer um riscado imaginário no ar [01h14].

Após apresentação de He e Vav a dupla Chet e Tet apresentam suas atividades.

[Chet]: "Vamos fazer um setor circular, eu vou explicando para a Tet e a medida que ela for fazendo eu vou falando sobre o setor [...]".

O Professor vai a lousa e usando computador que está sendo manipulado por Tet pede para que ela faça uma circunferência. Após fazer a circunferência o Professor busca distinguir circunferência de circulo junto aos alunos.

Após esta equipe Lamed e Num vão ao *notebook* e mostram que o comando refazer permite voltar construções que podem ter iniciado errado, mostram também o *Zoom* e exploram as propriedades dos entes geométricos no *software*.

Ao término de exploração do *GeoNext* o Professor apresenta aos alunos o *software Cabri Géomètre II* e pede aos alunos que explorem os comandos do Cabri assim como estes exploraram os comandos do *GeoNext*. Alunos desenvolvem a exploração dos comandos reta, semi-reta, segmento de reta, circunferência, ângulos, retas paralelas e perpendiculares entre tantos outros comandos. Alunos interagem bastante. No entanto, a aula chega ao final e o Professor diz que retomará discussão na próxima aula.

Comentários Gerais: Alguns alunos sentem dificuldades ao usar comando polígono, que em sua ação instrumental, está relacionado a definição deste conceito a partir desta situação, o Professor faz uma mediação questionável, no entanto, Zayin percebe que o comando funciona conforme a definição matemática sobre polígonos, ou seja, trata-se de um teorema-em-ação, este caso constitui uma situação surpresa mal aproveitada pelo Professor.

Alunos estão devidamente familiarizados para ações simples no *software*, no entanto, devidas dificuldades na formação conceptual demoram mais para assimilar idéias do *software*.

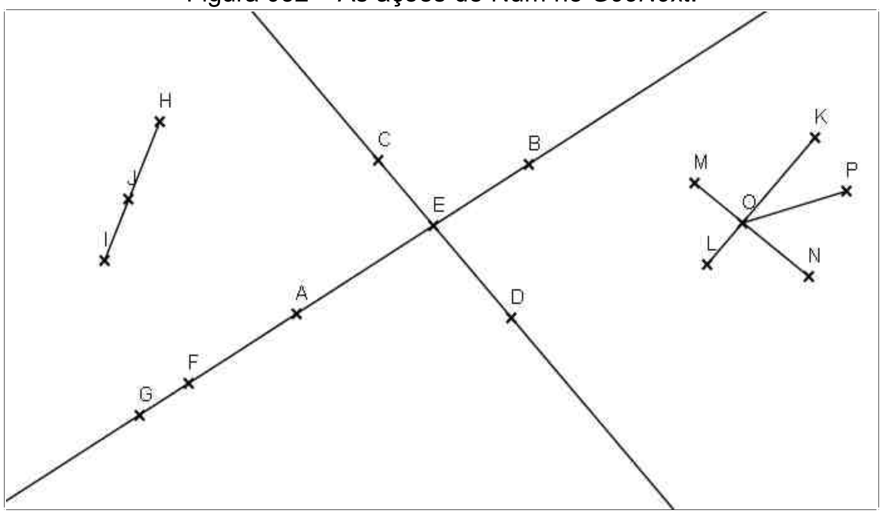
A familiarização com o *GeoNext* facilitou a familiarização com Cabri devida analogias entre os dois *softwares*, no entanto, nas diferenças os alunos sentem necessidade do Professor. Os alunos He, Zayin e Chet se destacam nesta aula pela sua liderança. O *Layout* do LIE dificulta o desenvolvimento das atividades, no entanto, apesar diste empecilho os alunos estão motivados.

Sessão 03 – Formação conceitual e atividades matemáticas

[00h00 – 01h00] Formação conceitual: Para que os alunos possam desenvolver atividades matemáticas, o Professor realiza uma aula expositiva sobre os conceitos matemáticos. Ele toma a palavra e diz que a Bolsista 1 PIBIC/CNPq desenvolverá atividades com eles usando um *software* chamado LOGO na aula seguinte.

Os Alunos presentes: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed, Mem e Num. Equipe pesquisadora: Professor e 2 bolsistas PIBIC/CNPq.

Figura 032 – As ações de Num no *GeoNext*.



<u>Situação surpresa 008 – Intersecção na reta suporte: O segmento que não desaparece</u>

O Professor procura explicar conceitos como intersecção, pertinência de elementos em conjuntos e associa estes tópicos às suas conseqüências geométricas. Também fala sobre grau de liberdade 0, 1 e 2.

Enquanto o Professor usa *GeoNext* para explicar conteúdos, na tela de Num, se observa que o aluno faz testes sobre intersecção e pertinência de pontos associando esta idéia aos graus de liberdade em retas, semi-retas e segmentos de reta. No entanto, ao construir intersecção [O] entre [MN] e [LK], faz segmento [FO] que constitui uma situação surpresa 008 que não foi abordada pelo aluno e pelo Professor por não ter sido percebida (figura 032).

Na análise das atividades gravadas pelos alunos, constatei que ao manipular os segmentos [MN] e [LK], o segmento [FO] não desaparece, pois as construções do *GeoNext* são feitas a partir de uma reta suporte oculta. Fato este que pode constituir uma situação surpresa na manipulação dos segmentos pertencentes à reta suporte. Trata-se de uma ação instrumental associada a questões sobre concepções no desenvolvimento do *software*.

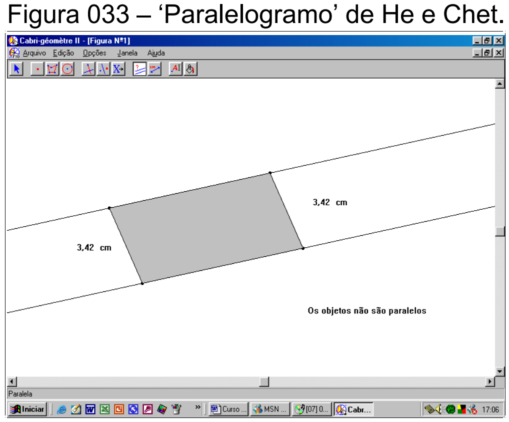
No *Cabri*, por exemplo, a mesma construção faria com que o segmento [FO] desapareça.

Também são mencionadas concepções sobre: paralelismo e concorrência entre retas. Alguns alunos interagem mais com o Professor nesta discussão.

Situação surpresa 009 – Tentativa e erro: Paralelismo e Paralelogramos

Os alunos He e Chet perguntam sobre paralelismo associando estas idéias aos lados opostos de um paralelogramo e usam *GeoNext* para mostrar o que pretendem investigar. Após sua fala o Professor orienta os estudantes para que abram o *Cabri Géomètre II* e lhes pede para que desenvolvam as mesmas atividades de familiarização realizadas com o *GeoNext*. O Professor lhes dá tempo para que realizem as ações [00h50]. As alunas He e Chet ao usar o *Cabri*, fazem duas retas e tentam através de medida de segmentos efetuar a construção de retas paralelas por manipulação, arrastando pontos. Após tal construção usam comando polígono para fazer o que parece ser um 'paralelogramo'. Tentam fazer com que os lados opostos correspondam entre si, e usam a medição na tentativa em realizar tanto paralelogramo como o paralelismo entre as retas. He e Chet não falam com Professor sobre a atividade, mas lhe perguntam como saber se duas retas são paralelas no *software* e o Professor lhes explica como fazer, mais nada se diz sobre a atividade realizada por elas.

Figura 033 – 'Paralelogramo' de He e Chet.



Os alunos desenvolvem atividades e trocam informações entre si. O Professor observa suas ações e faz algumas orientações sobre o uso dos comandos do *Cabri*. O sinal do intervalo toca e os alunos finalizam suas ações. A situação problema 009, de He e Chet constitui limitações quanto à manipulação, bem como, a ação instrumenta. Pois as alunas tentam resolver os problemas matemáticos postos, usando propriedades do *software* aliadas à concepções matemáticas. Neste sentido, para a atividade realizada também por He e Chet também não houve o aproveitamento da situação surpresa. No entanto 8 alunos ficam durante o intervalo executando e testando atividades.

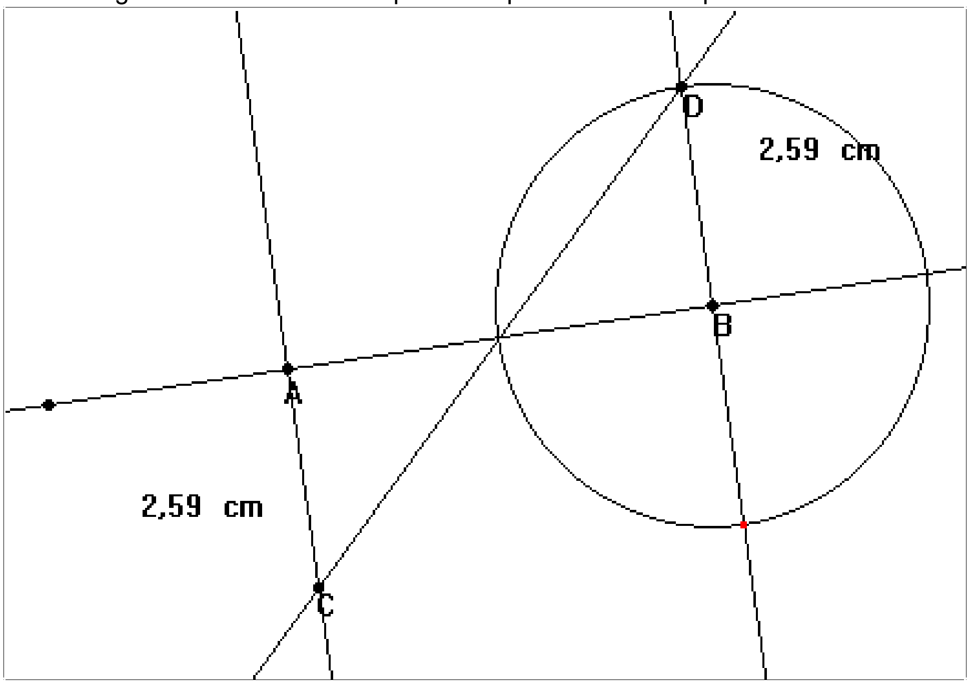
Comentários: Por não observar Num em suas ações, o Professor não aproveita situação surpresa 008. He e Chet fazem um falso paralelogramo (figura 033), no entanto, discutem o problema do paralelismo e o Professor orienta sobre uso de comandos mas não percebe a dinâmica da situação surpresa que surgiu, perdendo de vista a situação surpresa 009. O Professor estava tão preocupado com a formação, ou seja, a aula expositiva que ignorou duas possibilidades em explorar situações surpresas novas. Faltou-lhe visão meta-reflexiva para compreender o ponto de vista dos alunos, por outro lado, o próprio *Layout* do LIE, agregados aos problemas de gestão do tempo dificultaram a mediação. Os alunos ficam no intervalo para resolver atividades propostas.

[01h00 – 02h00] Paralelismo e ponto-médio: He e Chet perguntam antes do Professor reiniciar a aula sobre o paralelogramo e suas possibilidades relativas ao paralelismo.

[Professor]: “Retas paralelas devem ter a mesma distância entre si, e isso só se pode ver a partir de duas perpendiculares distintas”.

O Professor faz um contra-exemplo no *Cabri*, com base situação surpresa 005 apresentada na formação de professores do CMF, para que as alunas compreendam pré-requisitos sobre o paralelismo que devem ser: mesma distância entre pontos em duas retas perpendiculares distintas e estar no mesmo semiplano (cf. 172 – 176).

Figura 034 – Contra-exemplo sobre paralelismo feito pelo Professor.



[Chet]: “Não falei para você He?”.

[Professor]: “Além disto, a reta paralela à reta suporte deve estar contida em um só semiplano, pois pode ocorrer isso (Professor vai ao computador mostrar situação)”.

[He]: “Entendi!”.

Após explicação do Professor alunos voltam aos computadores e o Professor decide trabalhar com estudantes conteúdos relativos ao ponto médio usando o Cabri.

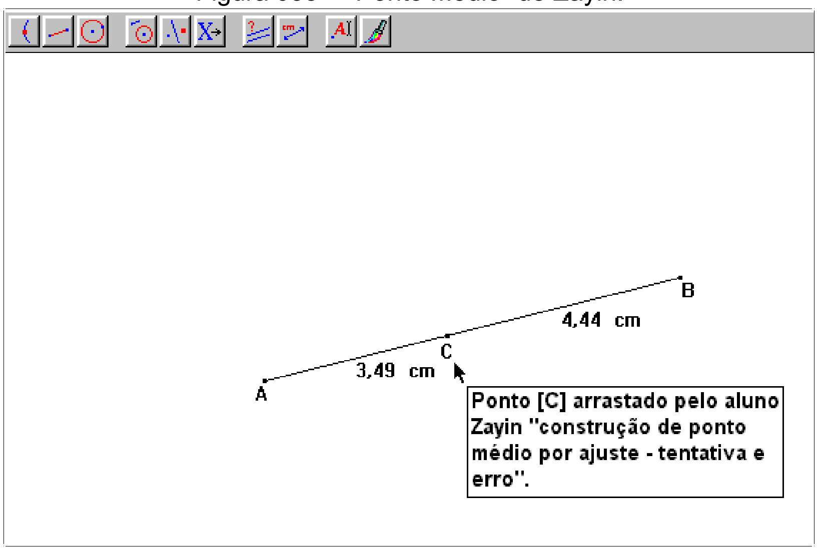
O Professor chama Num e He para o Notebook e lhes orientam na construção de um segmento nomeado como [AB], os outros alunos ficam em silêncio observando o que está sendo feito. O Professor propõem como desafio que os alunos encontrem o ponto médio sem que os alunos usem o comando ponto médio.

O Professor dá tempo aos alunos para realização desta atividade [01h23]. Alunos são interrompidos por professora do colégio que lhes chama para preencher uma ficha relativa a uma atividade escolar [01h25 – 01h37].

Situação surpresa 010 – Tentativa e erro: Ponto médio

Ao propor atividade sobre o ponto médio, a maioria dos alunos coloca um ponto [C] sobre o segmento [AB] e pelo arrasto tentam encontrar o ponto médio no ajuste, como é feito pelos alunos Zayin na figura 035 abaixo.

Figura 035 – "Ponto Médio" de Zayin.



Alunos saem e entram para preencher a ficha. Professor diz que atividade com o LOGO será realizada no dia seguinte.

Alunos interagem bastante e discutem atividades, a bolsista PIBIC/CNPq é chamada por alunos que são por ela também orientados. O Professor alguns alunos, o sinal da escola é tocado. O Professor diz que na próxima sessão (sessão 04) alunos trabalham com o LOGO, mas na sessão posterior (sessão 05) a questão sobre o ponto médio seria retomada.

Comentários Gerais: Problemas de gestão de tempo são acentuados por interrupção de professora do colégio. As alunas He e Chet falam com Professor, este apresenta contra-exemplo a partir da situação surpresa 005, fala sobre condições essências para paralelismo, no entanto, não consegue perceber que alunas possuem uma situação surpresa significativa (problemas de metareflexão e comunicação). Alunos tentam construir ponto médio pelo ajuste, surge outra situação surpresa, (problemas de manipulação e ação instrumental), no entanto, sentem dificuldades ao efetuar manipulação. Articulação de He com Chet mostra construção de cooperação por afinidade intelectual. Professor pretende trabalhar tópico do ponto médio após a sessão seguinte, devido necessidades pessoais da Bolsista PIBIC/CNPq, e devido atraso que ocorreu na sessão presente. Nesta sessão, surgem várias situações surpresa naturalmente, no entanto, o Professor têm dificuldades em visualizar as ações dos alunos em seus respectivos computadores. Somente pela filmagem, salvação de atividades e transcrição das anotações foi possível ver as situações surpresa novas.

Sessão 04 – O problema do ponto médio e atividades com LOGO

[00h00 – 01h00] O ponto médio: O Professor recapitula discussão sobre o ponto médio, e pede para que dois alunos vão apresentar suas soluções sobre o assunto. Alunos presentes: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed, Mem e Num. Equipe pesquisadores: Professor e 2 bolsistas PIBIC/CNPq.

Os alunos Chet e He vão à frente.

[He]: “A Chet vai ficar no computador e eu vou explicar p/ vocês o que fizemos”

Os alunos em silêncio esperam que He inicie sua discussão.

[He]: “Pessoal, a gente fez o seguinte: Chet faz um segmento de reta [...]”.

[Professor]: “Não é bom que este segmento tenha uma nomenclatura? Por exemplo, um ponto pode ser chamado por [A] ou [B], facilita nossa identificação”.

[Zayin]: “Como fazemos isso Professor?”.

[Professor]: “Por exemplo, os pontos usam letras maiúsculas e retas, circunferências usam letras minúsculas, Já os segmentos são identificados pelos seus pontos inicial e final”.

[Vav]: “Legal! Mas como fazemos no computador?”.

[Professor]: “No Cabri usamos o comando ‘Nomear Objetos’, já no GeoNext a nomeação é automática, mas continue He, nomeie o segmento”.

[He]: “Chet, procure o comando ‘Nomear Objetos’, isso agora clique num ponto e chame ele de [A] e clique no outro e chame por [B]”.

[Professor]: “Deu certo, tá vendo, vamos lá [...]”.

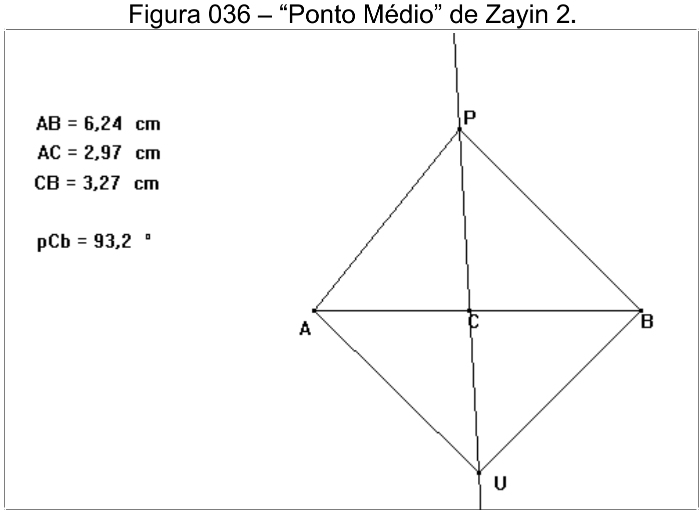
[He]: “Temos o segmento [AB], não é isso! Agora Chet vai medir o segmento usando comando de medidas do Cabri [...]”.

Alunos observam em silêncio. Guimel e Dalet parecem ter conseguido pelo arrasto o ponto médio de [AB], Vav e Zayin sentem dificuldades e Mem e Num também sentem dificuldades. Lamed e Caf se levantam e sentam em outra posição para visualizar melhor explicação sobre atividades de Chet e He. Chet e He sentem dificuldades em encontrar ponto médio de [AB] por manipulação.

<u>Situação surpresa 011 – Tentativa e erro: Ponto médio (2)</u>

Zayin a partir do segmento [AB] tenta fazer um quadrilátero em que é possível trabalhar a situação do arrasto. No entanto, Zayin tenta trabalhar com outros invariantes, a medida dos segmentos [AB], [AC] e [CB] e a medida do ângulo [PCB]. Trata-se de uma resolução “mais geométrica” menos “aritmética”.

Figura 036 – “Ponto Médio” de Zayin 2.



[He]: “Pronto! Agora vamos colocar um ponto [C] no segmento [AB] entre [A] e [B], vamos ter os segmentos [AC] e [CB], Chet vai medir eles e daí é só puxar o ponto [C] pra lá e pra cá daí uma hora teremos o ponto médio [...]”.

[Professor]: “Certo, mas tentem fazer isso na prática, não saiam agora do notebook”.

[He]: “Tá bom, a Chet vai tentar”.

Alunos conversam baixo e alguns alunos usam o computador em silêncio”.

[Chet]: “He não estou conseguindo, [AB] mede 3,210 os segmentos [AC] e [CB] devem medir 1,605, eu não consigo ajustar isso! Como a gente faz? Porque deu certo naquela hora?”.

[He]: “Professor, pode fazer pra gente?”.

[Professor]: “Não posso, pois se fizer como vocês vão aprender, será que não há outro modo de fazer?”.

[Zayin]: “Estamos com o mesmo problema Professor”.

[Mem]: “Nós aqui também [...]”.

Os alunos dizem ter a mesma dificuldade.

[Professor]: “Ótimo, tentem resolver este problema, vamos lá!”.

Os alunos interagem e conversam sobre atividade uns com os outros. O Professor fica em silêncio e observa suas ações. O sinal toca o Professor dá intervalo. Quase todos os alunos ficam em sala e tentam solucionar o problema em questão.

Comentários: Na estratégia do arrasto para o ponto médio He e Chet conseguem num primeiro momento, no entanto, em uma segunda situação sentem dificuldades em realizar atividade pelo arrasto. Zayin tenta uma estratégia que envolve as diagonais de um quadrilátero regular, no entanto, ao tentar construir a partir do segmento [AB] o quadrilátero recorre à manipulação conseguindo encontrar o ponto médio. O Professor não observou a situação deste aluno (situação surpresa 011); Professor faz mediação com He e Chet no sentido de não realizar as atividades por elas (postura mão-no-bolso). Como a solução de He e Chet não pode ser generalizada, alunos tentam encontrar um método definitivo. Neste aspecto, surge uma filogênese da ontogênese no pensar dos estudantes que recapitulam aspectos do desenvolvimento sobre idéias que envolvam a validação matemática. Os alunos estão participativos, e esta sessão está mais tranqüila que sessão anterior .

[01h00 – 02h00] Formação LOGO: Após o intervalo o Professor fala aos alunos que a atividade do ponto médio será finalizada na aula seguinte, e lhes diz que a Bolsista PIBIC/CNPq 1 (Bolsista 1) irá trabalhar com eles atividades com um *software* chamado LOGO.

O Professor passa palavra para Bolsista 1, e esta se apresenta e pede aos alunos que abram o SLOGO *for Windows*. Os alunos em silêncio fazem o que é pedido pela Bolsista 1.

A Bolsista 1 explica alguns comandos básicos do LOGO e a medida em que explica os alunos em voz baixa falam sobre o 'como executar' atividades. Tet e Caf se envolvem mais com o LOGO e aos poucos explicam alguns detalhes deste *software* aos outros alunos.

[Bolsista 1]: "Vamos agora fazer um quadrado? Vocês já sabem o comando ul, o comando pf e o comando pd, com estes três comandos podemos fazer um quadrado vamos ver como fazer? Querem pensar nisto?".

Após fala da Bolsista 1, alunos se organizam e interagem conversando entre si.

[Tet]: "Consegui! Bolsista 1 venha ver como eu fiz [...]".

[Vav]: "Pode me dizer o que você fez?"

[Tet]: "Posso, primeiro eu uso o lápis com o comando ul, depois mando pra frente 150 vezes com o comando pf, daí mando para a direita 90 que é o ângulo, agora é só repetir mais três vezes [...]"

[Tet]: "Tá bom, vou fazer [...]". Vav em silêncio volta ao computador e com Guimel tenta fazer.

[Vav]: "Vem cá Tet! Porque o meu deu diferente? Fiz o que me falou, onde falhei?".

[Tet]: "Como você fez?".

[Vav]: “usei ul, depois fiz pf 150, pd 90 e fiz 3 vezes como você me disse”.

[Tet]: “Mas faltou fazer uma vez mais, são 4 vezes é um quadrado”.

[Vav]: “Ah! Entendi agora”.

Tet volta ao computador e Vav e Guimel continuam tentando desenvolver atividades do LOGO.

Figura 037 – Logo: Quadrado de Tet.

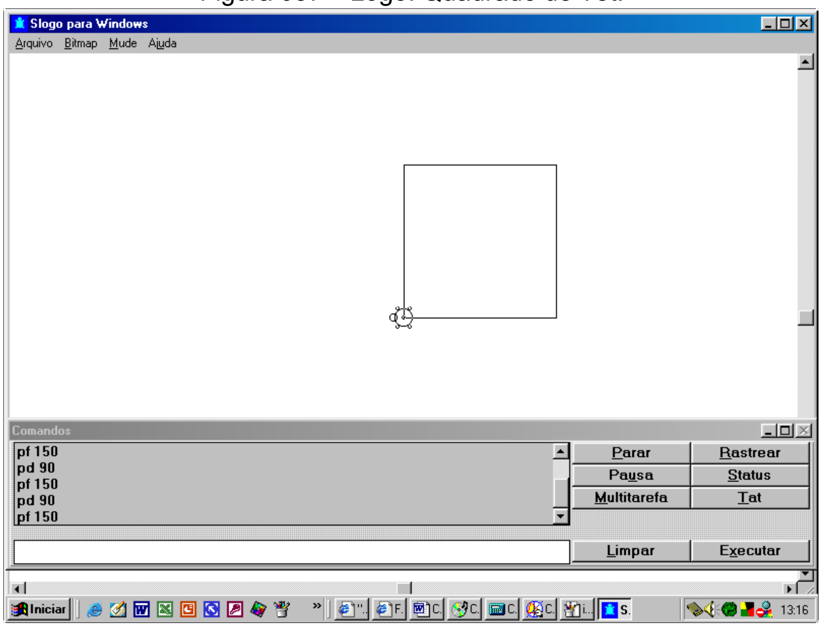
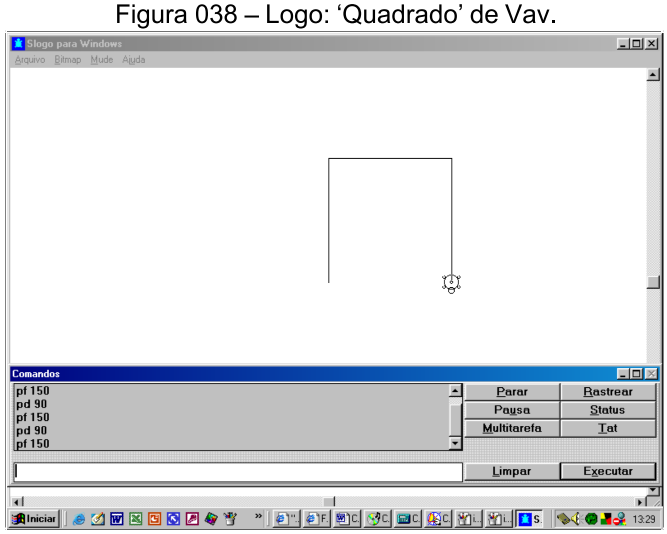


Figura 038 – Logo: ‘Quadrado’ de Vav.



[Guimel]: “Agora conseguimos! Vamos fazer de novo!”. Todos os alunos conseguem fazer esta atividade. A Bolsista 1 fala que na próxima sessão o primeiro tempo será com o LOGO de novo, alguns alunos comemoram. O sinal toca e a aula é finalizada.

Comentários Gerais: Familiarização LOGO foi bem realizada a partir da explicação da Bolsista 1. Alunos estão mais motivados e se destacam Tet e Caf. Situação envolvendo Tet, Vav e Guimel reproduzem situação de monitoria enquanto mediação colaborativa e envolve conceitos de reflexão-na-ação e metareflexão associado aos problemas comunicativos entre os alunos em suas explicações. O computador em que está Alef e Beth apresenta problemas de travamento, no entanto, o Professor consegue reinicializar a máquina e os alunos voltam para atividade LOGO. Atividade do ponto médio no Cabri deve ser discutida no segundo tempo da sessão seguinte com o Professor e alunos. A atividade LOGO foi desenvolvida para favorecer trabalho de pesquisa de bolsista PIBIC/CNPq. Atividades LOGO favorecem passagem do Velho PC ao Novo PC, não há discussão. Alunos realizam atividades e elas acabam .

Sessão 05 – Formação LOGO

[00h00 – 01h00] Familiarização LOGO: O Professor inicia aula brincando dizendo que é dia do professor e por isso todos deveriam dar parabéns ao grupo que ali estava. Os alunos dão risadas e parabenizam o Professor e os Bolsistas. Alunos presentes: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed, Mem e Num. Equipe pesquisadora: Professor e 2 bolsistas PIBIC/CNPq.

O Professor diz que Bolsista 1 continuará atividades com o LOGO e ele passa a palavra para Bolsista 1. Bolsista 1 retoma a atividade dos quadrados e lhes pede para fazer um quadrado. O aluno Zayin pergunta para a Bolsista 1 se existe um modo mais fácil para fazer o quadrado e ela aproveita para explicar o comando repita do LOGO. Chet pergunta que comando deve ser usado para apagar o “lápis” (ul é o use lápis no LOGO). Bolsista 1 explica comando ub (use borracha). Alunos desenvolvem atividade do quadrado em silêncio. O Professor propõem como desafio aos alunos construir triângulo eqüilátero, o Professor lhes dá alguns minutos para fazer atividade (10 minutos).

Os alunos se organizam e discutem muito a atividade. Bolsista 1 é chamada algumas vezes para explicar comandos e em outras vezes é para falar de dificuldades na atividade, no entanto, a Bolsista 1 diz que "não pode dar as coisas de mão beijada".

[Beth]: "Bolsista 1, vem cá um pouco!".

[Bolsista 1]: "Diz Beth".

[Beth]: "Um triângulo tem a soma dos ângulos como 180^o, não é?"

[Bolsista 1]: "Sim".

[Beth]: "Bem, se é assim e ele é o eqüilátero pego 180 e divido por 3, não é?".

[Bolsista 1]: "Certo! Mas o que tu quer dizer?".

[Beth]: "Eu tenho de fazer o comando repita é assim:

repita 3 [pf 130 pd 60], não é assim? Olha o que deu?".

Bolsista 1 chama o Professor, o Professor olha o que ela fez e ouve sua explicação.

[Professor]: "Beth, no triângulo você tem ângulos internos e externos não é?"

[Beth]: "É sim".

[Professor]: "O triângulo eqüilátero tem ângulos iguais?"

[Beth]: "Tem ângulos e lados Professor!".

[Professor]: "Imagine que você é a tartaruga".

[Beth]: "Sei".

[Professor]: "Dê 3 passos para frente, e depois vire a direita 90^o graus".

[Beth]: "Eu fiz".

[Professor]: "Faz isso mais 3 vezes, e vê o que acontece".

[Beth]: "Tenho um quadrado que nem no repita".

[Professor]: "Faz agora com o triângulo".

O Professor interveio junto a Beth que fez o papel da tartaruga enquanto Professor lhe dava ordens de execução. Os alunos ficam curiosos param o que estão fazendo e observam Beth. Após fala Professor pede para que Beth faça agora o triângulo. Ela fica em pé e faz os passos da tartaruga e volta para o computador.

[Beth]: "É diferente do que eu tinha pensado, vou ver se faço de outro modo".

Alunos interagem e vão até Beth para ver o que podem fazer. O Professor vai a frente e propõem aos alunos fazer um triângulo eqüilátero. Alunos sentem dificuldades, Iniciam testes no computador usando comandos pf e pd, usam pf 130 (sempre), mas variam pd com valores na seguinte ordem: 300, 270, 180, 120, 240. Após testes começam fazer triângulos eqüiláteros usando pf 130 e pd 240, e fazem também pf 130 e pd 120. O sinal do intervalo toca, mas somente dois alunos saem para o intervalo. Beth consegue realizar triângulo eqüilátero.

Comentários: Beth se depara com um obstáculo relativo ao 'ponto de vista' que têm sobre a atividade. Foi necessário colocar ela no 'ponto de vista' da tartaruga para ver o problema (meta-reflexão). O Bolsista 1 não sabia como solucionar a dificuldade da aluna. Chet, Zayin, He e Beth interagem mais nas atividades realizadas os demais alunos sempre se expõem menos. A proposta do LOGO, consiste em viabilizar ao estudante a compreensão da programação dos computadores, o que consiste em assumir o lugar do Novo PC, sendo assim, o recurso em trazer a aluna para o Velho PC, de modo que ela pudesse entender o Novo PC (neste caso a tartaruga LOGO), permitiu que Beth compreendesse que precisava ter um "novo olhar" sobre o Novo PC. Isso foi uma forma de meta-reflexão. Poderia ser considerada uma situação surpresa?

[01h00 – 02h00] Um conceito mal formado: A geração de uma situação surpresa para sessões futuras: A Bolsista 1 retoma atividade após intervalo e lhes dá alguns minutos para preparar apresentação dos resultados. Beth chama Bolsista 1.

[Beth]: "Conseguimos! Eu o Zayin, He e Chet fizemos juntos, conseguimos".

[Bolsista 1]: “Ótimo, se preparem para ir lá na frente mostrar para os outros”.

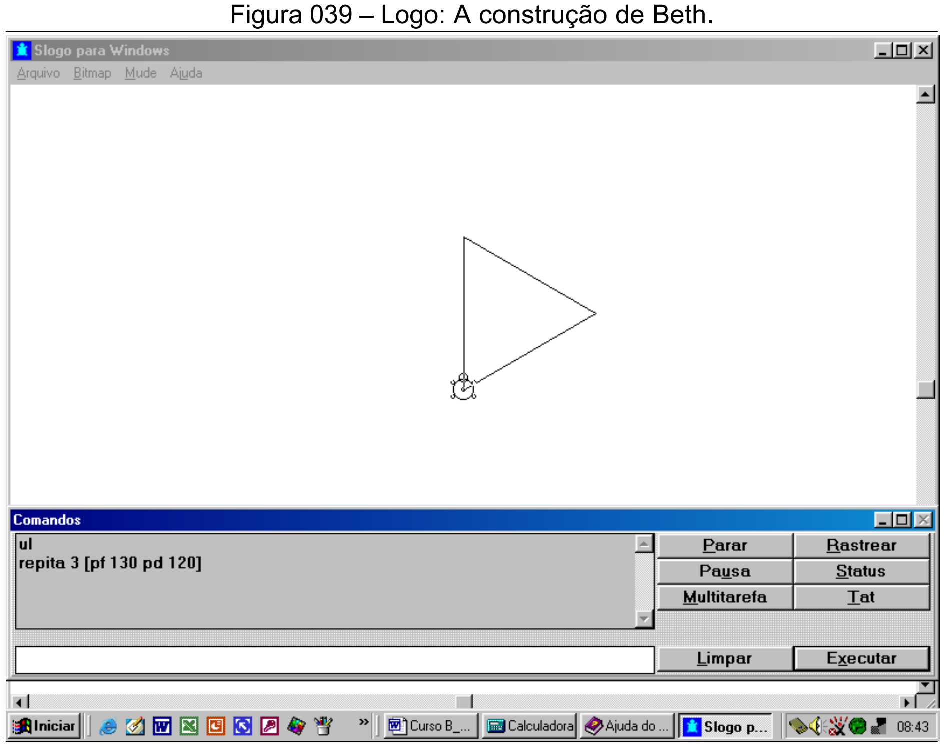
Os alunos He, Chet e Zayin vão explicar atividade aos outros o que fizeram. Bolsista 1 e o Professor observam ação dos alunos.

[Zayin]: “Professor! Olha só o que eu fiz? Eu vi o ângulo, peguei 360 e dividi por 8, deu 45. Aí fiz pf e pd 45. Achei essa figura de oito lados iguais, acho que entendi!”.

O Bolsista 1 dá um pouco mais de tempo. Alunos interagem muito entre si nesta construção. Bolsista 1 chama Beth, He, Chet e Zayin para explicar construção do triângulo [01h22].

[Beth]: “Bem, no inicio, eu achava que era só pegar 60 graus, pois a soma dos 3 ângulos é 180 que é 60+60+60. Mas aí não dava certo. Chamei a Bolsista 1 e o Professor e aí eles me mostraram que eu devia pensar como a tartaruga, e a tartaruga vê tudo em 360^{o}, foi daí que pensamos em fazer 360 e dividir por 3 deu 120, mas resolvemos testar, subtraímos 360 de 60, 360 de 30, 360 menos 120 deu certo, 240 funciona. Mas 240 -120 é 120 e dá certo. E é assim que He vai fazer para a gente ver”.

Figura 039 – Logo: A construção de Beth.



Após realizar atividade, Bolsista 1 propõem desafios para construção de polígonos regulares de 6, 7, 8, 10 e 16 lados o Professor vai conversar com a diretora sobre a continuidade do curso.

Os alunos sentem dificuldades com 7, mas resolvem facilmente.

[Zayin]: “Bolsista 1, quanto mais lados têm parece uma circunferência não é? Como faço a circunferência?”.

Bolsista 1 ensina que ao fazer repita 360 [pf 1 pd 1] alunos fazem a circunferência e alguns alunos dizem que é como se fosse um polígono com 360 lados. Os alunos fazem atividade a Bolsista 1 finaliza aula com o toque do sinal.

Comentários Gerais: Alunos compreendem construção repita 360 [pf 1 pd 1] como construção da circunferência, logo, os alunos deduzem que a circunferência é um polígono regular de 360 lados. Esse conceito mal formado a partir do LOGO será base para uma situação surpresa nas sessões posteriores. Alunos se sentem motivados com atividade, mas estão tristes e perguntam se o curso vai continuar na semana seguinte (os alunos querem ter o curso mais uma semana).

O Professor sai da sala para negociar com direção continuidade do curso, pois havia possibilidade do curso não ter continuidade, e neste tempo ocorreu a falha que constituiu uma situação surpresa futura (conceito mal formado). Alunos sentem dificuldades em realizar atividade que envolve polígonos com 5 e 7 lados. Alguns usam calculadora do Windows. Professor não consegue finalizar atividade do ponto médio e faltam concepções de geometria aos alunos.

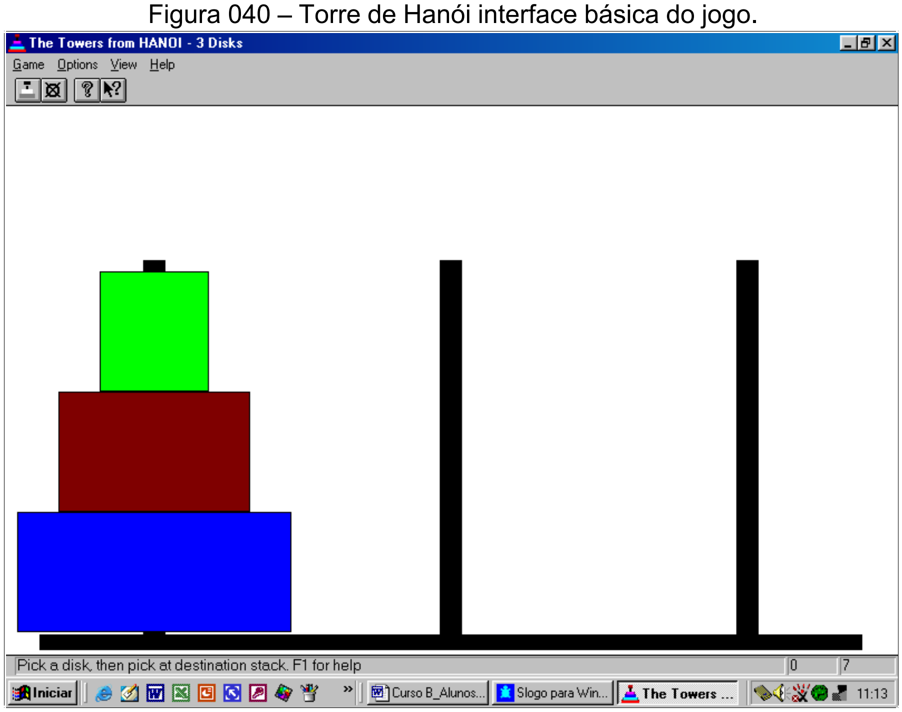
A mediação do Professor sobre a construção de Beth viabilizou que Beth finalizasse atividade e nos dialogo ela confirmou tal fato. Zayin, He e Chet são muito solicitados pelos outros alunos e conversam muito sobre atividade orientando a construção do triângulo .

Sessão 06 – Restabelecendo contrato didático

[00h00 – 01h00] Familiarização com Torre de Hanói: O Professor inicia aula dizendo estar contente pelo curso ter continuidade na semana presente. Os alunos mostram-se contentes e motivados. O Professor apresenta Professora 1 que efetuará atividade com eles hoje. O Professor diz que amanhã trabalhará com o *Cabri* retomando as atividades antigas e diz que fará uma discussão sobre conceitos básicos de geometria para poder avançar no curso. Alunos presentes: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed, Mem e Num. Equipe de pesquisa: Professor, Professora 1 e 2 bolsistas PIBIC/CNPq;

O Professor passa a palavra para a Professora 1 e ela pede para que os alunos abrirem o *software* Torre de Hanói. A Professora 1 abre o Torre de Hanói no *notebook* e explica as regras deste jogo.

Figura 040 – Torre de Hanói interface básica do jogo.



[Professora 1]: "O objetivo deste jogo é levar todas as peças da primeira coluna para a ultima coluna, no entanto, isto deve ser feito sem colocar uma peça maior sobre uma peça menor [...]".

Após sua explicação a Professora 1 pede aos alunos que façam a atividade com 3 peças e lhes dá um tempo para execução da atividade. Alunos interagem bastante e discutem atividade.

[Beth]: “Conseguimos!”

[Professora 1]: “Ótimo! espere um pouco, quer ir na lousa explicar como você fez?”.

[Beth]: “Tá bom vou com Caf”.

A Professora 1 espera os alunos terminarem atividade e chama Beth e Caf para apresentar sua solução para 3 peças na Torre de Hanói.

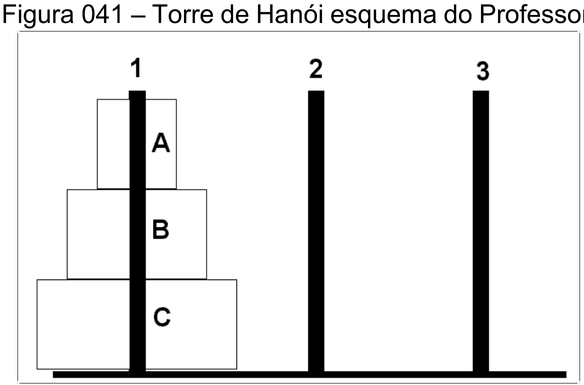
[Beth]: “Eu explico e Caf faz no computador, a equipe é formada por mim, Caf, Guimel, Vav e Zayin. Bem, eu fiz assim: A menor no meio, a do meio na última, a menor na última, a maior no meio, depois fiz, a menor no meio, a média na primeira, e a pequena na primeira, coloquei a maior na última, a menor no meio, a média na última, e a pequena na última”.

[Professor]: “Certo, você fez 11 movimentos, mas não poderia ser uma quantidade menor de movimentos? Qual a quantidade mínima? E não teria uma forma da gente simplificar a forma de explicar a atividade? Por exemplo, não poderia chamar as colunas como 1, 2 e 3 e não poderia dizer que existem peças A, B e C sendo A < B < C?”.

[Beth]: “Poderia sim”.

Os alunos apresentaram verbalmente, o Professor lhes pede para efetuarem anotações e para simplificar a linguagem. O Professor vai ao quadro-branco e propõem um esquema para que os alunos organizem suas idéias.

Figura 041 – Torre de Hanói esquema do Professor.



Professora 1 dá tempo para alunos reorganizarem suas idéias. Alunos interagem efetuam anotações sobre o assunto.

[Professora 1]: "Vamos dar um tempinho para vocês reorganizarem suas idéias". Os alunos retomam atividade e fazem anotações nas folhas de atividade, o sinal toca e inicia o intervalo.

Comentários: O Professor reformula o contrato didático com os alunos. Professora 1 inicia atividades com Torre de Hanói. Professor chama atenção da equipe de Beth com respeito ao número mínimo de movimentos e com respeito a elaboração de uma 'linguagem mais simples' para apresentação do problema em questão (Seqüência Fedathi). Alunos estão interessados em usar a Torre de Hanói. O desenvolvimento da Torre de Hanói, ao longo da sessão, visa orientar uma transposição didática para que alunos discutam princípio de indução finita, conhecido como PIF. O contrato didático para continuidade do curso foi restabelecido.

[01h00 – 02h00] Conjecturas e Validação: Atividades são retomadas pela Professora 1.

[Beth]: "Professora 1, nós mudamos um pouco e fizemos mais ou menos como vamos colocar no quadro-branco (Tabela B001)".

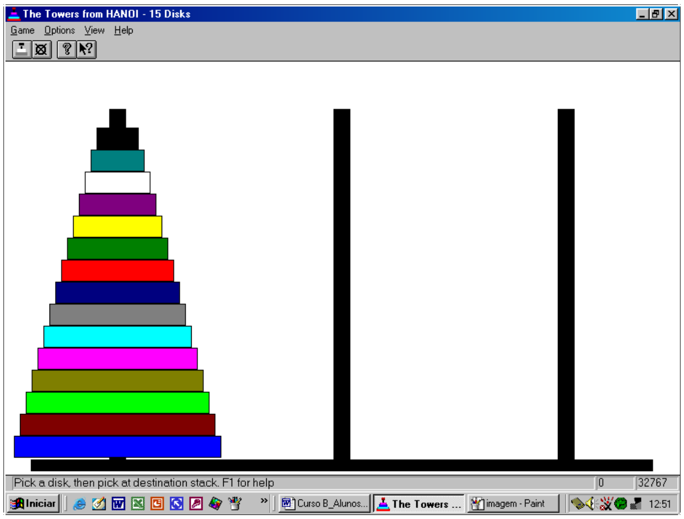
Ao fazer no quadro-branco atividade Beth lê seqüência desenvolvida. Professor vai ao computador e propõem desafio com 4 peças.

Alunos reorganizam idéias e efetuam o trabalho com 4 peças, Professor propõem que os alunos desenvolvam com 5. Professora lhes dá tempo para realizar atividade os alunos desenvolvem as ações e apresentam (01h25).

[Professora 1]: "E se tivermos infinitas peças? Como a gente faz?"

Alunos instigados pensam em fazer as coisas do mesmo modo. Professor abre Torre de Hanói com 15 peças.

Figura 042 – Torre de Hanói 15 discos.



[Professor]: “Certo, se fizer do mesmo modo vai demorar um cadinho? Não vai? Temos que encontrar uma solução que ultrapasse essas dificuldades? Será que tem como fazer isso?”.

Alunos pensam possibilidades.

[Zayin]: “Professor, no programa lá embaixo tem um numerozinho que indica o número mínimo de movimentos. Bem, com 3 peças temos 7 movimentos, com 4 temos 15, com 5 temos 31 e assim vai [...]”.

[He]: “Sempre temos o dobro do anterior mais um [...]”

[Professora 1]: “Como a gente escreve isso em termos matemáticos?”. Os alunos trabalham a estruturação destas idéias e com a Professora 1 e chegam na expressão:

$$\boxed{\text{Se n então o mov} = 2^n - 1}$$

No entanto, os alunos realizam questionamentos sobre a validade deste infinito.

[He]: “Mas a gente pode dizer que essas coisas são infinitas? Só pensar em n me garante isso?”.

Tabela 016 – Sugestão do Professor.

Mov.	1	2	3
0	ABC		
1	BC		A
2	C	B	A
3	C	AB	
4		AB	C
5	A	B	C
6	A		BC
7			ABC

[Professora 1]: “Nós contamos 1, 2, 3, 4, se bobear a gente passa todo tempo da vida contando, quando falamos de n estamos pensando lá na frente [...]”.

[Vav]: “Não me convenci ainda!”.

[Professor]: “Alguém pode me ajudar aqui? Zayin, fica no notebook. Se eu tivesse uma só peça, quantos movimentos teria de fazer?”.

[Alunos]: “Um movimento”.

[Professor]: “Mas se eu tiver 2 peças?”.

[Caf]: “Teríamos 3 movimentos [...]”

[Professor]: “Vejam, em princípio meus movimento seriam a seqüência A para uma peça, agora para duas peças seria como?”.

[He]: “A seqüência ia ser ABA”.

[Professor]: “Mas com 3 peças como seria a seqüência?”

[Caf]: “ABACABA, ABA é o que fizemos antes, agora como temos o C o ABA aparece duas vezes [...]”.

[Professor]: “Alguém imagina como seria com 4 peças?”

Após um tempo Zayin responde ao questionamento.

[Zayin]: “ABACABADABACABA” .

[Professor]: “Podem verificar?”.

[He]: “É isso o que fizemos antes ajuda no que estamos fazendo, dá certo, por isso o n da certo”.

[Professor]: "Isso é a recorrência em matemática, é disto que aprendemos o infinito, se faço com 2 faço com 3, se faço com 3 faço com 4, se faço com o antecessor faço com o sucessor, se faço com (n-1) faço com n".

Toca o sinal e a aula é finalizada. Não houve tempo para finalização desta atividade.

Comentários Gerais: Houve problemas na gestão de tempo, mas também alunos desenvolviam atividade com uma certa lentidão. Em certo sentido o questionamento é: Os alunos possuem estrutura cognitiva para avançar em atividades que exigem validação em tempo hábil? Por outro lado, seus questionamentos foram procedentes. Chama atenção a necessidade do Professor para discutir o PIF, e fazer mediações que permitam pensar sobre infinitude. O *software* em si, foi insuficiente para compreensão deste processo. Após aula He, Zayin e Chet continuam perguntando sobre o assunto recorrência matemática. Os alunos foram participativos e interessados.

Sessão 07 – Formação em geometria euclidiana e atividades

[00h00 – 01h00] Concepções básicas em geometria: O Professor inicia a aula e diz aos alunos que nesta sessão vai falar sobre as idéias fundamentais da geometria. Pede aos alunos que utilizem o caderno de atividades para anotar as idéias que serão discutidas. No segundo tempo da aula os alunos irão testar algumas destas idéias. Alunos presentes: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed, Mem e Num. Equipe pesquisadora: Professor e 2 bolsistas PIBIC/CNPq;

O Professor forma 3 equipes e diz que ao final do curso a equipe vencedora receberá uma premiação. As equipes são: Equipe 01: Alef, Beth, Guimel e Dalet; Equipe 02: He, Vav, Zayin, Chet e Tet; Equipe 03: Yud, Caf, Lamed, Mem e Num.

Após este momento de reformulação, o Professor fala sobre os axiomas básicos da geometria euclidiana e explica um pouco da história das origens da geometria na Grécia Antiga.

Os alunos estão em silêncio e fazem anotações sobre as falas do Professor.

[Professor]: "Vamos imaginar que a geometria é como se fosse um jogo. O que precisamos para ter um jogo de tabuleiro?"

[Yud]: "Precisamos das peças e das regras do jogo [...]".

[Professor]: "Ótimo Yud! No nosso caso as peças básicas são chamadas de noções primitivas ou intuitivas, por exemplo, sem as idéias de ponto, reta e plano não há como fazer nenhuma figura geométrica, por isso essas noções básicas a gente aceita e nem define. Por exemplo, no jogo da velha nós definimos o tabuleiro e as peças? Simplesmente as aceitamos pelo que elas são para que haja o jogo".

[Chet]: "Os axiomas são as regras?".

[Professor]: "São as regras básicas da geometria, já as definições permitem descrever objetos formados a partir dos objetos básicos das noções intuitivas, por exemplo, no jogo de damas a dama é peça dama é resulta significa que uma peça simples invadiu a última posição do lado adversário".

Toca o sinal o Professor dá intervalo todos saem.

Cometários: O Professor apresenta fundamentação teórica em geometria, pois sentiu nas sessões anteriores que seria necessário trabalhar estas idéias para poder executar atividades com os alunos nas sessões seguintes. A dificuldade maior de compreensão está em A5 da geometria euclidiana. Foi necessário desligar os monitores de vídeo dos computadores para que os alunos tivessem maior atenção ao Professor, pois devido a arquitetura da sala os alunos são obrigados a virar de costas para o Professor se quiserem averiguar alguma idéia. Houve a reformulação do contrato didático e a idéia em se usar a estratégia de equipes em jogos para averiguar se ocorre maior interação entre os alunos. A metáfora dos jogos foi usada na explicação dos conceitos sobre sistemas formais em geometria.

[01h00 – 02h00] Formação no *Cabri*: Professor pede aos alunos que verifiquem os axiomas usando o *Cabri Géomètre* e para tal atividade dá cerca de 15 minutos para que os alunos testem as atividades.

[Zayin]: “Professor é só usar os comandos não é isso?”

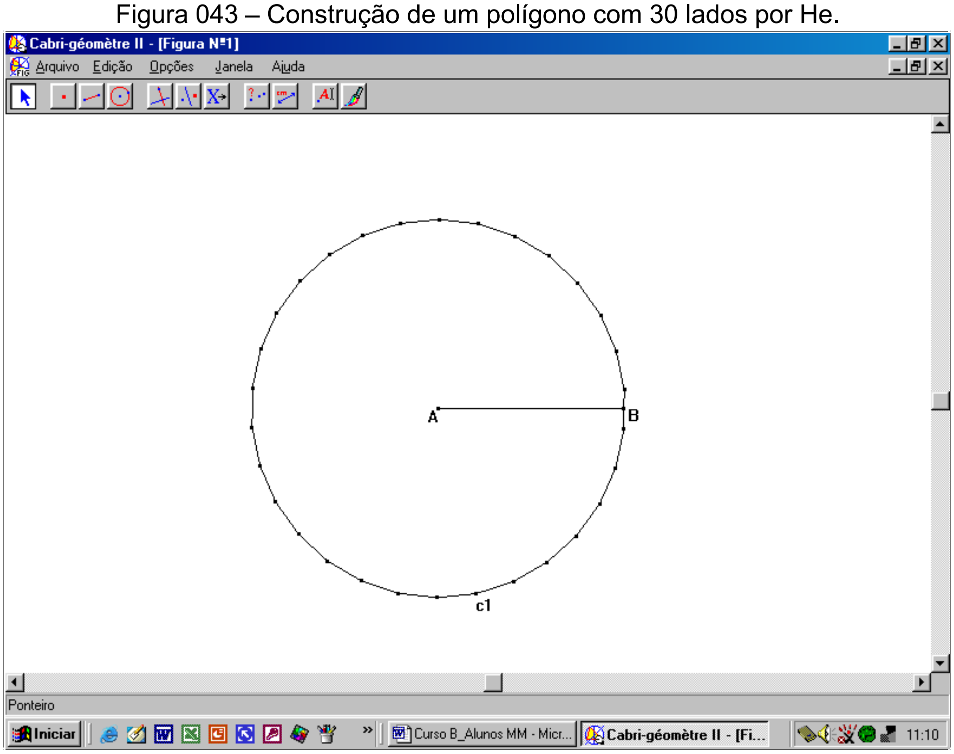
[Professor]: “Isso, use os comandos e teste cada axioma no Cabri”.

Os alunos interagem em suas equipes realizando suas atividades. O Professor fica mais afastado observando os alunos. O Professor apresenta explicações sobre circunferência com He e lhe diz que uma circunferência possui um raio que sempre terá a mesma medida. Mem pergunta ao Professor como ter certeza se o comando ‘retas paralelas’ do Cabri garante o paralelismo entre duas retas, visto que não é possível ver toda a reta no computador.

Professor diz que esta colocação deverá ser discutida posteriormente. Após os 15 minutos para desenvolver atividades de verificação dos axiomas, o Professor fala um pouco sobre as características da circunferência e fala sobre sua importância métrica em construções geométricas.

Na Tela no computador de He apresenta faz um polígono regular com 30 lados no computador e coloca um segmento [AB] de modo que [A] é o centro do polígono e nomeia um dos pontos do polígono como [c1].

Figura 043 – Construção de um polígono com 30 lados por He.



He salva esta atividade e depois vai ajudar sua equipe. Todos os alunos interagem bastante. Zayin faz circunferência, mede raio [AB] e após fazer tal medição faz com que [A] e [B] coincidam de tal modo que m[AB]=0,00.

Mem e Num usando comando retas paralelas fazem [a] paralelo a [b], e aproveitam para manipular a figura na zona-de-desenho. Ao apresentar atividades sobre ponto-médio a equipe 1 e 2 tentam desenvolver atividade a partir do 'arrasto', já a equipe 3 tenta usar circunferência para elaborar a construção mas não estão fazendo atividade adequadamente.

Após está discussão o Professor retoma interação e passa aos alunos atividade para estes encontrem o ponto médio [M] de um segmento de reta [AB]. Alunos interagem bastante nesta atividade.

O Professor diz que não haverá tempo para apresentação desta atividade nesta sessão, mas diz que na próxima sessão os alunos iniciarão sua discussão em equipe a partir desta atividade que valerá 7 pontos. O sinal toca e a sessão termina.

Comentários Gerais: A construção de He retoma a idéia do LOGO em que a circunferência é um polígono com n lados, ao realizar a figura 043 com 30 lados, ela faz transferência do conceito mal-formado aprendido no LOGO para o *Cabri Géomètre II*. Usa 30 lados pois este é o limite do *Cabri*. O Professor não viu tal atividade, no entanto, He salva este polígono e ao passar o Professor ela esconde a atividade e abre outra janela com atividade no *Cabri*.

Mem verifica que no comando 'retas paralelas' não há elementos suficientes para desenvolver a explicação dos motivos do paralelismo entre as retas [a] e [b]. O Professor promete discutir posteriormente esta questão. Equipes 1 e 2 persistem em realizar atividade do arrasto, no entanto, a Equipe 3 tenta usar circunferência para justificar metricamente o ponto médio. Será que o agrupamento em grandes equipes inviabiliza a diversificação de construções geométricas por parte dos alunos? Zayin ao fazer m[AB]=0,00 faz teste e usa idéias de verificação que envolve situações limites.

Sessão 08 – Situações surpresa no *Cabri*

[00h00 – 01h00] Ação instrumental – o ponto médio: Professor inicia a aula e propõem que a equipe 01 apresente atividade sobre ponto médio.

Alunos presentes: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed, Mem e Num. Equipe pesquisadora: Professor e 2 bolsistas PIBIC/CNPq.

Situação surpresa 012 – Tentativa e erro: Ponto médio (3)

[Alef]: “Bem, para encontrar o ponto médio, fizemos assim, colocamos um ponto sobre um segmento [AB] e depois colocamos um ponto [M] no segmento [AB] entre [A] e [B]. Bem, para fazer Guimel vai no computador (*notebook*)”.

As outras equipes estão em silêncio.

[Alef]: “Guimel fez [AB], e fez [M]. Agora vamos medir [AB] e vamos medir [AM] e [MB]. Agora Guimel vai esticar [AB] até m[AB] ser 10,00 cm. E agora Guimel vai ajustar [M] de tal modo que m[AM] = m[MB]. É isso!”.

[Professor]: “Tudo bem, Guimel, arraste o ponto [A], e agora arraste o [B]”.

[He]: “Deu certo, tá vendo”.

[Professor]: “Agora arraste o ponto [M]”.

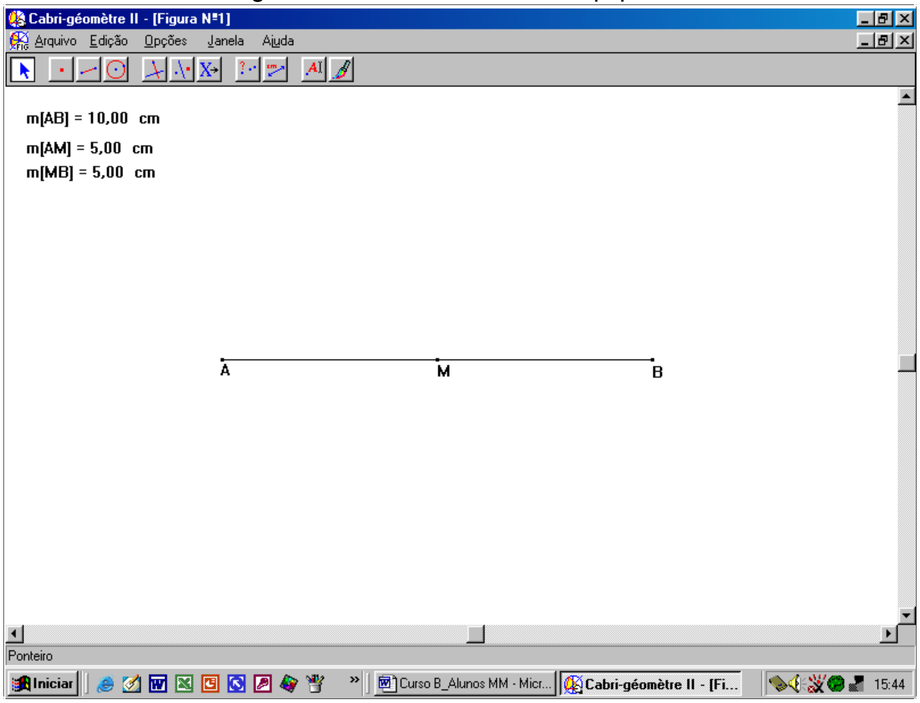
[Guimel]: “Professor assim vai desmanchar!”.

[Professor]: “Teste!”.

[Alef]: “Mexeu no [M], lascou tudo! E agora?”.

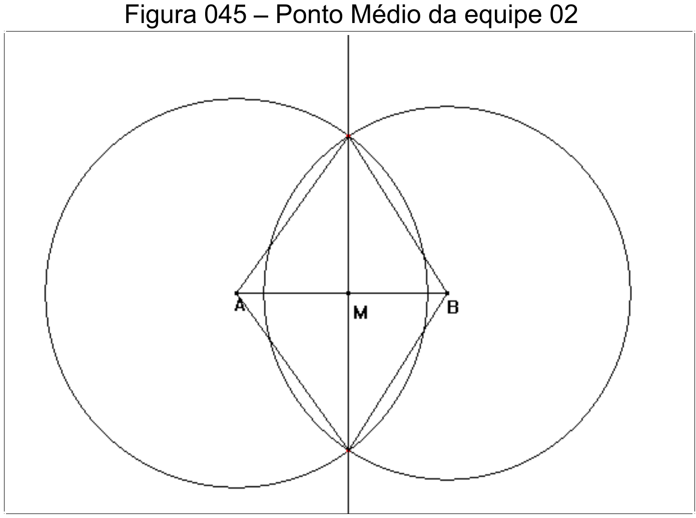
[Professor]: “Desafio – Encontrem uma forma que garanta que o ponto [M] é o ponto médio sempre, independente de mexer [A], [B] ou [M]. Vale 7 pontos”.

Figura 044 – Ponto Médio da equipe 01.



A equipe 03 faz atividade similar à equipe 01. Os alunos se reúnem em equipe e iniciam exploração nas equipes 01 e 03 os alunos discutem o conceito do ponto médio e tentam usar o comando de fixação do Cabri no ponto [M], mas eles reclamam que não dá certo quando se mexe [A] e [B]. A equipe 02 faz atividade no computador em que He está conforme a figura 045.

Figura 045 – Ponto Médio da equipe 02



A equipe 03 a partir de He discute como usar circunferência para fazer esta atividade. O sinal toca e o Professor dá o intervalo, mas todos os alunos presentes ficam no LIE.

Comentários: Situação Surpresa 012 do arrasto surge com equipe 01 e 03. No entanto, pela mediação do Professor ocorre a desconstrução do processo e é proposto um desafio.

A competição entre as equipes favorece interação apenas nas equipes. A equipe 02 a partir de He estuda possibilidades do uso da circunferência e das diagonais de um losango para efetuar a atividade.

No entanto, Professor não aproveitou está possibilidade (figura 045) para discussão da atividade em questão.

[01h00 – 02h00] Conceitos mal formados: Professor reinicia aula. Diz aos alunos que a equipe 02 está no caminho, no entanto, esta equipe ainda comete um erro quanto o uso da circunferência.

<u>Situação surpresa 013 – Circunferência com raios de medidas variáveis</u>

O Professor explica que o raio de uma circunferência é um segmento cuja medida não varia ao longo da circunferência.

[Professor]: “Se o raio de uma circunferência [k] for [AB] e a medida m[AB] = 5,00 cm então se fizer um outro segmento de raio com centro em [A] a medida dele só pode ser 5,00 cm também.”

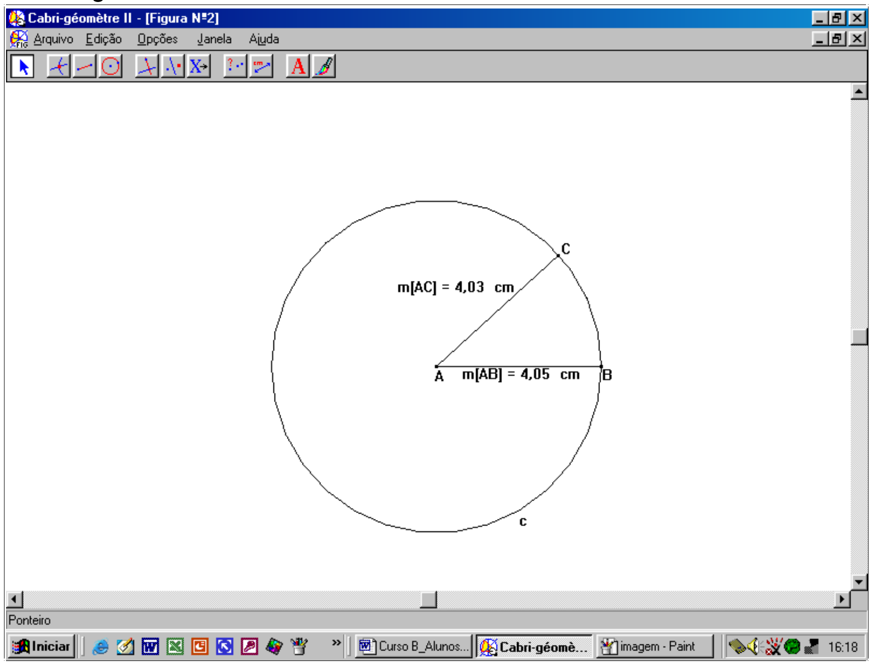
[He]: “Professor, me desculpe mas acho que não dá. Eu fiz aqui no computador quer ver?”.

[Professor]: “Mostre!”

[He]: “Vou por o ponto [C] na circunferência [c], agora vou medir. Veja o raio [AB] = 4,05 cm e o raio [AC] = 4,03 cm. Bem 4,05 é diferente de 4,03”.

[Professor]: “Como você fez?”.

Figura 046 – A "Circunferência" de raios diferentes de He.



[He]: "Fiz um polígono o maior polígono regular com 30 lados, daí ocultei os pontos e pronto!".

[Professor]: "Mas um polígono de 30 lados não é uma circunferência?".

[He]: "No LOGO a circunferência não têm 360 lados?".

[Professor]: "Mas isso ocorre no LOGO porque ele não pode trabalhar com n lados".

[Zayin]: "Então o computador não pode fazer coisas infinitas?".

[Professor]: "Não pode não! Ele é uma ferramenta como uma qualquer, trabalhamos com aproximações. O computador não é a matemática. Por isso, a situação que a equipe 01 está fazendo é limitada em termos matemáticos porque lida com aproximações, por isso preciso de uma situação que me garanta dedutivamente que [M] é ponto médio de [AB]".

Os alunos se voltam à atividade. He e Chet resolvem o problema e decidem apresentar. O Professor lhes chama a frente e elas apresentam. Em um determinado ponto Chet vai a frente e apresenta explicações no quadro branco deixando o computador de lado – ocorre literalmente a passagem do Novo PC ao Velho PC.

[Chet]: “Professor, fizemos sem usar medidas e foi assim. He vai ao computador fazer. He, faz o segmento [AB], isso! Agora faz uma circunferência [a] com centro em [A] e raio [AB], isso! Agora faz uma circunferência [b] com centro [B] e raio [BA]. Legal, agora faz a intersecção de [a] e [b]. Vamos nomear os pontos como [C] e [D]. Pronto, agora vamos fazer uma reta que passe por [C] e [D]. Daí fazemos intersecção entre a reta [CD] e o segmento [AB], e temos [M] como intersecção entre [CD] e [AB]”.

[Professor]: “Porque [M] é o ponto médio de [AB]?”.

[Chet]: “Bem [a] e [b] tem o mesmo raio e são iguais, então as intersecções entre elas estão a mesma distância. Como uma reta passa por dois pontos. Feito!”.

O sinal toca e a aula é finalizada.

Comentários Gerais: O Professor aponta que equipe 02 está no caminho para resolver atividade do ponto médio, e tenta apresentar explicações sobre a circunferência para mostrar como este recurso pode contribuir para realização de construções geométricas sem recorrer aos recursos de medição.

He apresenta uma “circunferência” com pontos não-eqüidistantes, trata-se de uma situação surpresa preparada pela aluna, decorrente de sua ação instrumental. No entanto, na argumentação da aluna está presente um conceito mal-formado na sessão LOGO. O problema conceptual da circunferência do LOGO frente limitações computacionais favoreceu a reprodução equivocada de um conceito para aluna, que o representa no *Cabri* (Trata-se de uma limitação computacional nova?). Equipe 02 realiza atividade após mediação do professor e após concepções das atividades anteriores, ou seja, faltava à maioria dos alunos campos conceptuais para compreender ações desenvolvidas. Quando Chet vai ao quadro ela faz, de fato, a passagem do Novo PC ao Velho PC, inclusive estabelecendo uma argumentação que constitui uma validação matemática. Equipe 03 está menos participativa nesta aula.

Sessão 09 – A soma dos ângulos internos

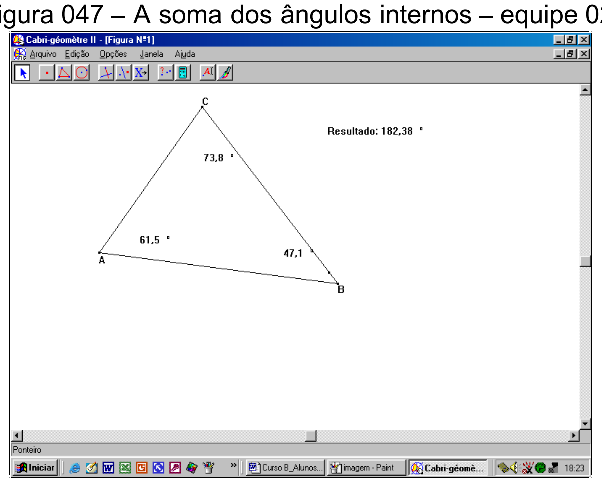
[00h00 – 01h00] Reflexão sobre sessões anteriores: Alunos presentes: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed, Mem. O aluno Num faltou por motivo de saúde, mas enviou parente para justificar ausência. Equipe pesquisadora: Professor e 2 bolsistas PIBIC/CNPq.

O Professor retoma discussão sobre o ponto médio e responde algumas dúvidas sobre as questões numéricas relativas à aproximação em casas decimais. O Professor comenta que a matemática quando é realizada através de demonstrações matemáticas, apresenta regularidades que constituem leis que são verdades matemáticas chamadas por teoremas.

Os alunos He, Chet e Zayin fazem questionamentos sobre o uso de computadores e o saber matemático. O Professor retoma discussões sobre a atividade do ponto médio. Os alunos discutem aspectos desta atividade. Após realizar tal atividade o Professor propõem como atividade à soma dos ângulos internos de um triângulo no *Cabri* e dá tempo para que os alunos se preparem. Os alunos atuam em equipes. Cada equipe faz a soma dos ângulos, no entanto, ao chamar o Professor ele diz que só aceita uma resposta quando houver uma justificativa para esta atividade. Os alunos retomam a atividade.

[He]: “Veja! Aqui a soma dos ângulos é maior que 180^{o} ! Porque isso acontece? Vamos ver com o Professor”.

Figura 047 – A soma dos ângulos internos – equipe 02.



Comentários: Equipe 01: Alef, Beth, Guimel e Dalet; Equipe 02: He, Vav, Zayin, Chet e Tet; Equipe 03: Yud, Caf, Lamed, Mem e Num (ausente). Situação Surpresa da soma dos ângulos internos aparece para equipe 02. No intervalo todos os alunos saem.

Os alunos aparentam cansaço. Situação da soma dos ângulos internos (situação surpresa 005), foi usada no CMF e também em formação em Quixadá. Este caso evidencia que situações surpresa podem ser reprodutíveis em contextos distintos para geração da passagem do Novo PC ao Velho PC.

[01h00 – 02h00] Raciocínio crítico sobre a tecnologia: O Professor quer saber se alguma equipe quer apresentar atividades.

A equipe 01 apresenta simplesmente a soma dos ângulos internos Beth faz atividade e a explica no computador (*notebook*), mas não viabiliza a justificativa matemática.

Após a equipe 01, a equipe 02 apresenta sua atividade mas questionam os motivos que levariam a soma dos ângulos internos ser maior que 180^o nas ações de He.

[Zayin]: "Eu desconfio que seja um problema do computador ou alguma coisa que fizemos errado".

[Professor]: "Mas para saber isso, vocês precisam apresentar uma justificativa matemática consistente".

[He]: "Agora nós não temos, mas como estamos estudando ângulos nas aulas da professora da classe podemos pensar nisso".

A equipe 03 apresenta a soma dos ângulos internos pelo computador, mas dizem não ter conseguido uma argumentação suficiente. O Professor dá mais tempo aos alunos para que possa em equipe resolver este problema. Na equipe 02 Zayin e Chet fazem o prolongamento dos segmentos de reta do triângulo [ABC].

[Zayin]: "Se a gente mostrar pela congruência de triângulos que a soma dos ângulos internos é dois ângulos retos a gente conseguiu".

[Chet]: "Eu sei, mas porque no triângulo da He é menor que 180^o ?".

[He]: “Eu descobri o que aconteceu! Dei um clique errado aqui! E o Professor viu e não falou nada, é danado!”.

O sinal toca e a aula termina o Professor diz que o assunto será retomado na aula seguinte.

Comentários Gerais: Foi um turno de aula pouco produtivo, talvez pelo cansaço dos alunos. He descobre problemas na sua construção devidos problemas de manipulação. Chet e Zayin discutem a soma dos ângulos internos na perspectiva da congruência de triângulos. Prolongam os lados do triângulo [ABC]. Há uma atividade cultural para comemorar semana do professor. Alunos querem ir a festa que ocorre fora do LIE.

Sessão 10 – Finalizando curso

[00h00 – 01h00] Validando soma dos ângulos internos: Professor inicia aula e apresenta Bolsista 3 CNpq/PIBIC. Retoma atividade da soma dos ângulos internos e chama a equipe 02 para iniciar atividade. Alunos presentes: Alef, Beth, Guimel, Dalet, He, Vav, Zayin, Chet, Tet, Yud, Caf, Lamed, Mem e Num. Equipe pesquisadora: Professor e 3 bolsistas PIBIC/CNPq;

Os alunos Zayin, He e Chet vão a frente. Efetuam no computador a medição Zayin orienta Chet. Após fazer construção do triângulo [ABC] e depois de fazer medição Zayin orienta Chet”.

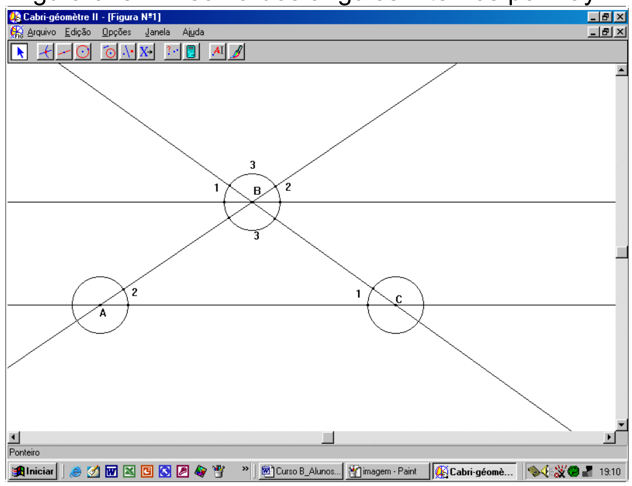
[Zayin]: “Chet, faz uma reta por [AB], agora faz por [BC] e agora faz por [CA]. Ótimo! Bem agora que fizemos assim, vamos fazer pelo ponto [B] uma reta paralela à reta [CA] usando o comando ‘reta paralela’. Pronto. Agora pela congruência de triângulos mostro que os ângulos podem ser juntados no ponto [B] (ver figura B022).

[Professor]: “Mas e a situação de He?”.

[Zayin]: “Ela clicou errado [...]”. [He]: “Foi sem querer, mas me fez ficar curiosa sobre a soma dos ângulos internos. Esse negócio de computador pode fazer a gente se enganar e faz com que a gente faça coisas absurdas”.

He fica ao lado de Chet os outros alunos da equipe ficam nos seus lugarres. Zayin e Chet desenvolvem justificativa e usam a figura 048 para justificar suas idéias.

Figura 048 – A soma dos ângulos internos por Zayin.



Os alunos prestam atenção a apresentação. He explica os motivos da situação surpresa da soma dos ângulos internos. O Professor discute mais esta questão e ao finalizar diz que as equipes vão ganhar os pontos, se somente se, dividirem os pontos ganhos em partes iguais e o Professor diz que se fizer isso todos ganham. Os alunos entram nesta brincadeira, conseguem dividir os pontos. O Professor menciona que todos ganharam. Após sua fala, o Professor agradece os alunos e passa a palavra para o Bolsista 3 que apresenta o *software* Modellus aos alunos para finalizar atividades. O Bolsista 3 mostra o software rapidamente e apresenta alguns questionamentos. O sinal toca e os alunos vão ao intervalo de aula.

Comentários: Equipe 02 apresenta solução, há problemas de gestão de tempo e os alunos aparentam ter cansaço. Os alunos He, Chet e Zayin se destacam no curso. He participou de olimpíadas de matemática no colégio, mas Chet e Zayin nunca haviam participado destas atividades. Bolsista 3 apresenta superficialmente o *software* Modellus devido problemas de tempo. Professor e equipe também aparentam cansaço.

[01h00 – 02h00] Finalizando o curso : Professor retoma a aula, junto com o Professor estão presentes duas professoras do Colégio os 3 Bolsistas PIBIC/CNPq. O Professor agradece aos alunos e fala sobre a importância da participação dos mesmos nesta pesquisa. Após sua fala as professoras fazem uma entrega de medalhas à todos os participantes. Após a entrega de medalhas há uma pequena confraternização com os alunos e as atividades deste curso terminam aqui.

Comentários Gerais: Despedida dos alunos do colégio, entrega de medalhas e agradecimento aos professores presentes. Alunos ficam um pouco tristes, mas após receber medalhas nos agradecem. O segundo tempo teve apenas 20 minutos (despedida). Os alunos do Monteiro de Moraes, formaram a equipe mais motivada e interessada no trabalho realizado, e apesar das dificuldades encontradas ao longo do curso.

02.3.2 – Situações Surpresa com alunos de 8ª série

Caracterização dos alunos do CMF:

Participaram deste curso no CMF 15 estudantes, sendo 11 do sexo masculino e 4 do feminino, todos os estudantes residem em Fortaleza-CE conforme dados da tabela 017 abaixo.

Tabela 017 – Caracterização dos estudantes do CMF em outubro de 2004.

Código Identificador	Sexo	Cidade	Instituição
Aluno 001a: Alfa	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 002a: Beta	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 003a: Gama	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 004a: Delta	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 005a: Epsilon	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 006a: Zeta	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 007a: Eta	Feminino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 008a: Teta	Feminino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 009a: Lambda	Feminino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 010a: Mi	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 011a: Ni	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 012a: Csi	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 013a: Pi	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 014a: Ro	Feminino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 015a: Sigma	Masculino	Fortaleza-CE	CMF

Fonte de dados: Sondagem junto ao professor, lista de freqüência, Diário de campo e folha de atividades.

Todos os alunos são da oitava série do Ensino Fundamental, e são alunos do aluno-professor Pascal da fase 02.

Segundo Pascal há 5 alunos com dificuldades, 5 alunos medianos, 4 alunos talentosos e 1 aluno criativo e imprevisível.

Tabela 018 –. Perfil sobre os estudantes do CMF segundo Pascal em Out/2004.

Código Identificador	Série / Ano	Concepção do Professor
Aluno 001a: Alfa	8ª série / 2004	“Aluno com dificuldades”
Aluno 002a: Beta	8ª série / 2004	“Aluno talentoso”
Aluno 003a: Gama	8ª série / 2004	“Aluno talentoso”
Aluno 004a: Delta	8ª série / 2004	“Aluno talentoso”
Aluno 005a: Epsilon	8ª série / 2004	“Aluno talentoso”
Aluno 006a: Zeta	8ª série / 2004	“Aluno com dificuldades”
Aluno 007a: Eta	8ª série / 2004	“Aluno com dificuldades”
Aluno 008a: Teta	8ª série / 2004	“Aluno com dificuldades”
Aluno 009a: Lambda	8ª série / 2004	“Aluno com dificuldades”
Aluno 010a: Mi	8ª série / 2004	“Aluno criativo e imprevisível”
Aluno 011a: Ni	8ª série / 2004	“Aluno mediano”
Aluno 012a: Csi	8ª série / 2004	“Aluno mediano”
Aluno 013a: Pi	8ª série / 2004	“Aluno mediano”
Aluno 014a: Ro	8ª série / 2004	“Aluno mediano”
Aluno 015a: Sigma	8ª série / 2004	“Aluno mediano”

Fonte de dados: Sondagem junto ao professor e lista de freqüência.

Quanto à freqüência média neste curso, foi de 65,33% durante 5 sessões conforme a tabelas 019.

Tabela 019 – Freqüência dos estudantes no decorrer do curso em Out/2004.

Código Identificador	Instituição	25.Out.04	26.Out.04	27.Out.04	28.Out.04	29.Out.04	Total
Aluno 001a: Alfa	CMF	01	00	00	00	00	01
Aluno 002a: Beta	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 003a: Gama	CMF	01	01	00	00	01	03
Aluno 004a: Delta	CMF	01	01	01	01	00	04
Aluno 005a: Epsilon	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 006a: Zeta	CMF	01	00	00	00	00	01
Aluno 007a: Eta	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 008a: Teta	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 009a: Lambda	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 010a: Mi	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 011a: Ni	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 012a: Csi	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 013a: Pi	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 014a: Ro	CMF	00	00	00	00	01	01
Aluno 015a: Sigma	CMF	00	00	00	00	01	01

Fonte de dados: Questionário – Lista de Freqüência.

A escolha dos alunos foi realizada pelo professor Pascal, as datas foram marcadas com um mês de antecedência, no entanto, houve atividades extraordinárias no CMF que dificultaram a pesquisa em curso.

Caracterização das sessões do curso: Nesta fase, foram 5 sessões realizadas nas seguintes datas: Sessão 01 – 25 de Outubro de 2004; Sessão 02 – 26 de Outubro de 2004; Sessão 03 – 27 de Outubro de 2004; Sessão 04 – 28 de Outubro 2004; Sessão 05 – 29 de Outubro de 2004.

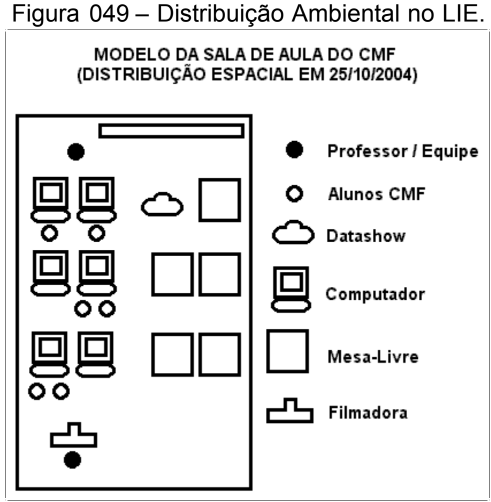
Procurarei descrever cada sessão, destacando situações em que passagem do Novo PC ao Velho PC, favoreceu investigações matemáticas na formação discente.

Sessão 01 – Estabelecendo contrato didático com discentes do CMF e a familiarização com *GeoNext*:

[00h00 – 01h00] Contrato didático: O Professor iniciou pela apresentação de si mesmo e da equipe de pesquisa que no dia é composta por uma bolsista IC/CNPq. Estão presentes seis alunos que são: Na sala há 6 alunos, o Professor e a bolsista IC/CNpq-UFC em ação de filmagem.

Os alunos formam equipe de estudo e respectivamente são: equipe 01 (E1): Alfa e Beta (frente); equipe 02 (E2): Gama e Delta (2ª fileira) e equipe 03 (E3): Epsilon e Zeta (fundo). Faltam os alunos: Eta, Teta, Lambda, Mi, Ni, Csi, Pi, Ro e Sigma.

Figura 049 – Distribuição Ambiental no LIE.



A frente, o *datashow* ligado ao *notebook* mostram o *software* *GeoNext* aberto. O layout do Laboratório de Informática do CMF em outubro de 2004 está disposto conforme a figura 049 apresentada acima.

Os alunos se apresentam, e após este momento, o Professor fala sobre folha de atividades mencionando que os alunos podem rasurar a mesma a vontade.

O Professor comenta a pesquisa do doutorado, e pede aos alunos para desenvolver atividade 01 de familiarização do GeoNext. Os alunos começam atividades. Surge um dialogo inicial entre o Professor e Alfa.

[Professor]: “Delta, não precisa fazer a imagem da atividade 001”.

[Alfa]: “Pq não consigo fechar o polígono Professor?”.

[Professor]: “Qual a definição que na matemática atribuímos aos polígonos?”.

[Alfa]: “Ah! tenho que clicar onde iniciei”.

Ao explorar atividades, que envolvem construção de funções no GeoNext, o Professor interage com Gama para que o mesmo saiba como usar os operadores matemáticos.

[Professor]: “Como podemos extrair a raiz quadrada?”

[Gama]: “Você pega um número, usa o acento circunflexo, e depois pega outro número como expoente”.

[Professor]: “Certo, mas como você faria, detalhe!”

[Gama]: “Faria, chapéu, 1 sobre dois e é isso.”

[Professor]: “Dá certo?”

[Zeta]: “Não dá certo, fica o número elevado a 1 e dividido por 2.”

[Professor]: “Por isso colocamos os parênteses”.

Professor vai ao quadro branco e desenha um esquema com os operadores matemáticos (figura 050).

Figura 050 – Notas do professor – operadores matemáticos.

$$a + b = c \longleftrightarrow a + b = c$$

$$a * b = c \longleftrightarrow a \times b = c$$

$$a / b = c \longleftrightarrow a \quad b = c$$

$$a \,^\wedge\, b = c \longleftrightarrow a^{b} = c$$

$$a \,^\wedge(1 / b) = c \longleftrightarrow \sqrt[b]{a} = c$$

Aos poucos a interação entre os alunos vai ocorrendo. Os alunos dominam comandos como circunferência, polígono, gráfico de função, retas entre tantos outros. Os alunos Gama, Zeta e Delta são mais interativos.

O computador em que Beta e a equipe E1 está apresenta travamento, o Professor desliga máquina e pede que o aluno se desloque para um computador que está ao lado.

O Professor inicia apresentação da atividade 01, e chama E1 para apresentar atividade no *notebook.*

[Alfa]: "Achei interessante o comando polígono, pois não conseguia fechar a figura, mas depois que o Professor falou entendi que o polígono termina onde inicia."

[Professor]: "Achou outro comando interessante?".

[Alfa]: "Achei interessante que posso construir o gráfico de função no GeoNext, nós fizemos a função quadrática."

O aluno Alfa explica como fez a construção da função. O aluno Gama fala sobre comandos circunferência e ponto médio e explica o que são: a folha de desenho, menu-de-comandos e a barra de ferramentas.

Professor faz intervalo de 15 minutos. Ao retornar equipe E2 é chamada para apresentação.

Devidas dificuldades de E2 em trabalhar comando “intersecção”, surge discussão sobre grau de liberdade.

[Professor]: “Epsilon, use os comandos objetos/retas/segmentos, e faça dois segmentos concorrentes e um separado[...]”.

[Delta]: “Estou fazendo [...].”

[Professor]: “Usando o comando intersecção, dê um clique nos segmentos [AB] e [CD] concorrentes, veja o que aparece [...].”

[Epsilon]: “Aparece um ponto G.”

[Professor]: “Agora, clique no comando ponto e clique sobre o segmento [EF].”

[Delta]: “Fiz! Apareceu o ponto H”

[Professor]: “Agora movimente os pontos A, B, C, D, E, F, G e H e me diga o que acontece [...]”.

Ocorre silêncio durante manipulação de E2.

[Professor]: “O que podemos concluir?”.

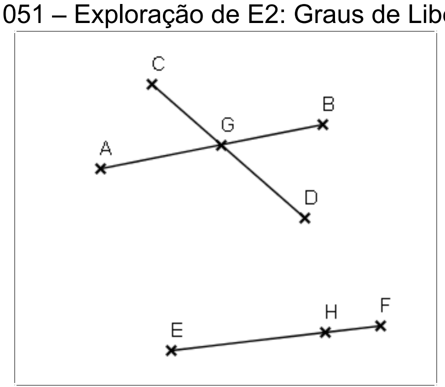
[Epsilon]: “Professor, A, B, C, D, E, F são livres, G não se mexe, e só se mexe se mexer A ou B ou C ou D [...] Já o ponto H só se mexe sobre [EF]”.

[Professor]: “O que está ocorrendo aqui?”.

[Gama]: “É que o G é uma intersecção entre [AB] e [CD], depende deles. Já o H pertence a reta [EF] porque ele clicou em [EF].”

[Professor]: “Esse é o problema dos graus de liberdade o computador não faz a intersecção, nós é que temos que fazer isso. O computador é ‘burro’ ele não faz diferença que fazemos visualmente ao ver os segmentos [AB] e [CD] concorrentes.”

Figura 051 – Exploração de E2: Graus de Liberdade.



A atividade é realizada a contento. Os alunos estão parecem ter facilidade na manipulação do *GeoNext*.

Comentários: O Professor estabelece o contrato didático com alunos, fala sobre a pesquisa, no entanto, há poucos estudantes. Posteriormente, ao conversar com Pascal, este menciona que não havia conversado com todos os alunos, no entanto, se compromete em falar com alunos para a próxima sessão.

O ar-condicionado e a iluminação dificultam filmagem no ambiente, além disto, no CMF, o Laboratório de Informática e todos os setores migram do sistema operacional *Windows* para *Linux* Tupiniquim. Este fato em si não foi prejudicial, pois o *GeoNext* é multiplataforma, no entanto, restringia as opções do curso para os softwares que já haviam sido testados.

Os alunos assimilam rapidamente a familiarização, mas de antemão se destacam Gama, Zeta e Delta no desenvolvimento das atividades.

Quando alunos falam sobre funções quadráticas, professor perde oportunidade para explorar situação régua e compasso para construção de parábolas (problemas na mediação e percepção meta-reflexiva). Entre 00h30 e 00h45 surgiu problemas entre alunos com respeito a possibilidade de confrontação, mediação do professor estabeleceu uma negociação no contrato didático. E a situação surpresa 007, o problema do polígono, aparece para o aluno Alfa (cf. 213). Problemas sobre grau de liberdade surgiram também e foi necessário ao Professor explicar o que constituem estes problemas [00h45 – 1h00].

As concepções sobre graus de liberdade, nos *software* de geometria dinâmica existentes são um fato que sempre pode ser trabalhado junto aos alunos.

[01h00 – 02h00] Contrato didático: As equipes se reorganizam, surgem as equipes: E1v2-Gama e Delta; E2v2-Beta e Alfa; E3v2-Epsilon e Zeta. O Professor pede que alunos façam atividade 03 do caderno de atividades do GeoNext. A atividade é sobre construção de retas paralelas, sem utilização do comando retas paralelas do *software*. Professor dá 30 minutos para execução da atividade.

Todas as equipes usam estratégias de manipulação que consistem em tentativa e erro. Ao intervir perguntando sobre condições suficientes para o paralelismo entre retas, o Professor permite que as equipes E1v2 e E3v2 mudem suas estratégias, no entanto, a equipe E2v2 insiste em tentativa e erro.

Professor pergunta para E1v2: “Tem certeza [AB] e [CD] são retas paralelas? Tentem justificar [...]”

[Gama]: “São paralelas, pois [AB] e [CD] são lados opostos de um paralelogramo [...]”.

[Professor]: “Mas pq o paralelogramo têm lados opostos paralelos?”

[Delta]: “Professor é uma propriedade matemática [...]”

[Professor]: “Concordo, mas o que justifica esta propriedade? É como se dissessem ‘Maria é bonita pq é loira e é loira pq é bonita’ tá entendendo que quero dizer?”.

[Gama]: “É realmente tá meio complicado, nós vamos tentar mais um pouco [...]”.

Alunos de E3v2 conversam entre si, e pensam em usar métodos de construções geométricas, e a idéia parte de Epsilon. Alunos dialogam entre si, mas pouco é possível ouvir devido ar-condicionado e devido alunos estar conversando em voz baixa.

[E3v2]: “Professor, vem cá um pouco [...]”.

[Professor]: “Sim, digam [...]”

[E3v2]: “Professor, as retas são paralelas, pois pertencem aos lados opostos deste retângulo”.

[Professor]: “Certo, manipule aquele ponto ali [...]”

[Zeta]: “Qual, o ponto C?”

[Professor]: “Isso!”

[Epsilon]: “Epa! O retângulo virou pentágono, as retas não são paralelas por esse comando [...]”.

O Professor os leva ao *notebook* para mostrar a sua construção.

[Professor]: “Minha construção funciona em todos os casos, pensem nisso [...]”.

[Zeta]: “Entendi!”.

O Professor retorna para estudantes E1v2 e lhes pergunta se sabem as condições básicas para existir paralelismo entre retas. Para tanto, o Professor faz uso da situação surpresa 004, desenvolvida no curso de professores do CMF, como contra-exemplo para questionamentos dos alunos.

[Gama]: “Os lados opostos têm a mesma distância entre si [...]”.

[Professor]: “Pode mostrar, isso?”.

Gama efetua manipulação em silêncio. Nas outras equipes E2v2 e E3v2 alunos efetuam algumas manipulações em silêncio e quando conversam o fazem em voz baixa.

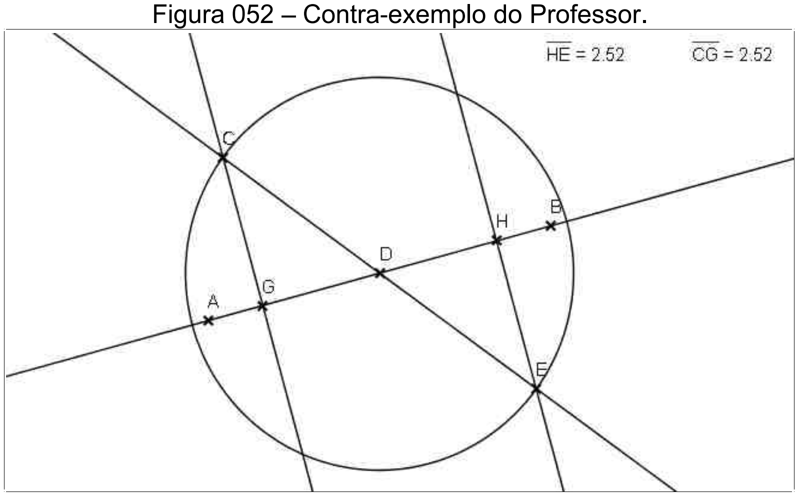
[Gama]: “As paralelas nunca se encontram, pois estão a mesma distância entre si Professor, não é?”. Professor permanece em silêncio e se afasta da equipe.

Após fala de Gama, alunos ficam em silêncio [01h37].

O Professor vai a frente, pergunta se alunos estão salvando arquivos, e lhes fala para ir finalizando atividade pois o tempo está correndo.

Professor vai ao *notebook* e apresenta um contra-exemplo, aos alunos, lhes permite ir ao computador e manipular a construção.

Figura 052 – Contra-exemplo do Professor.



Professor começa perguntar aos alunos quais os requisitos necessários para se obter retas paralelas [01h44]. Gama menciona que as retas paralelas, ao contrário das concorrentes nunca se encontram, e diz que isto se deve ao fato de se ter a mesma distância entre estas retas.

[Professor]: "Ótimo Gama, isso é um avanço". [Delta]: "Na nossa construção, as paralelas não possuem pontos comuns, pelas distâncias entre os pontos A e C, e também pela distância entre os pontos B e D, é possível ver que as retas são paralelas [...]".

Gama manipula pontos da construção em silêncio.

[Professor]: "Certo Delta, mas isso não mostra apenas uma série de casos particulares que dão certo? Isso é verdadeiro para todas as retas paralelas? Vamos ver se ter a mesma medida é suficiente".

Após manipular construção no *notebook* Delta menciona:

[Delta]: "Bem, é a mesma distância Gama, ele tem razão. O sr. está certo! a distância não é o único requisito para ter retas paralelas, mas é um deles".

[Professor]: "Mas qual é o outro requisito?"

[Gama]: "Nós vamos construir usando o comando retas paralelas, mas é só para a gente dar uma olhada".

[Alfa]: "Delta, Gama vamos juntar as equipes vamos tentar fazer a atividade juntos [...]".

[Gama]: "Podemos fazer juntos?".

[Professor]: "Fiquem a vontade".

[Zeta]: "Nós também vamos nos juntar com eles [...]".

[Professor]: "Sem problemas [...]". Alunos discutem atividade, Professor resolve dar um tempo aos alunos. Mas toca corneta indicando final do expediente no CMF [01h55].

[Professor]: "Vamos salvando as atividades de vocês, a gente continua amanhã. Vocês vão ter de descobrir os requisitos necessários para obter retas paralelas, é a lição de casa, sem problema pessoal?".

[Alunos]: "Sem problemas".

[Professor]: “A aula acabou até amanhã” [02h00].

Comentários Gerais: Os alunos avançam rapidamente na familiarização, no entanto, concepções como graus de liberdade, às idéias sobre validação e a argumentação em matemática deve ser trabalhada com estes alunos. O contra-exemplo do Professor gerou curiosidade para os estudantes, e a situação permitiu que Delta refletisse sobre os requisitos básicos sobre o paralelismo. O fato de haver poucos alunos dificulta o desenvolvimento da interação. No entanto, quando nas sessões seguintes chegam novos alunos, dependendo da quantidade, será necessário recapitular a familiarização, fato este, que constitui um atraso no desenvolvimento das ações docentes na pesquisa.

Sessão 02 – Familiarização e atividades de formação com *GeoNext*:

[00h00 – 01h00] Retomada da familiarização: estão presentes na sessão os alunos do CMF: Nesta sessão há 11 alunos. Respectivamente os alunos presentes na sessão são: Beta Gama, Delta, Epsilon, Eta, Teta, Lambda, Mi, Ni, Csi e Pi. Pascal, professor da turma, convocou em aula vários alunos considerando este curso atividade de classe, por isso houve aumento na presença dos alunos. Da equipe de pesquisa, presentes: O Professor e um Bolsista IC/CNPq responsável pela filmagem. Ausentes estão os seguintes alunos: Alfa, Zeta, Ro e Sigma. Sendo que Alfa e Zeta aparecem na primeira sessão e não participam mais do curso, e Ro e Sigma aparecem somente na última sessão.

Devido aparecimento de alunos novatos, surge como necessidade a reformulação do contrato didático e o reinicio do processo de familiarização. Para facilitar trabalho docente, o Professor colocou os alunos “veteranos” para orientar os “novatos” nas atividades, se trata do processo de monitoria. Logo, o Professor dá 30 minutos para familiarização. Os alunos se organizam nos computadores do seguinte modo:

Computador direita – frente: Teta, Lambda e Eta;

Computador esqueda – frente: Pi, Epsilon e Mi;

Computador direita – centro: Delta;

Computador esquerda – meio: Ni e Csi;

Computador esquerda – fundo: Gama e Beta.

Os alunos Epsilon, Gama e Beta interagem com o novato independente de suas posições, no entanto, Delta não interage com ninguém e tenta solucionar situação das retas paralelas. O problema de construção de polígonos reaparece novamente, com Mi e Epsilon orienta nesta atividade.

As meninas Teta, Lambda e Eta interagem com Epsilon, mas estão isoladas do grupo. Professor dá mais tempo, pois alunos solicitam alguns minutos para finalizar familiarização com GeoNext. E Teta se nega em ir apresentar atividade, e Eta comenta que age deste jeito em aula e não fala nada durante as aulas.

Epsilon e Beta passam de mesa-em-mesa interagindo e orientando os outros alunos, e aos poucos Delta responde alguns questionamentos de Csi e Ni. Ao final de 44 minutos de filmagem o Professor chama os alunos para apresentar atividades realizadas. Os alunos Eta, Lambda e Teta são chamados para socializar idéias.

[Teta]: “Não vou lá na frente não!”.

[Lambda]: “Vamos! Não é difícil”.

Lambda explica em voz baixa a construção de retas.

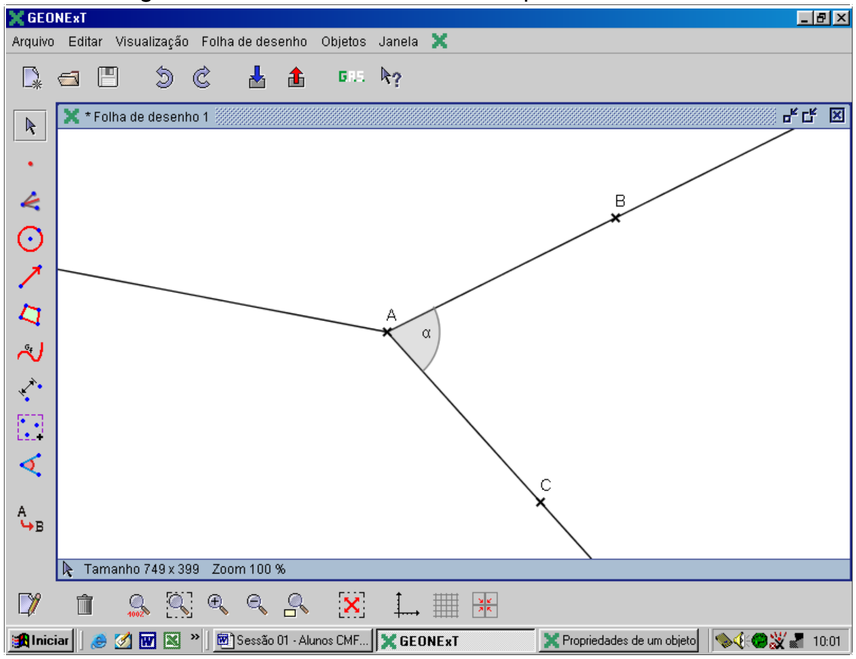
[Professor]: “Pessoal, vamos prestar atenção, Eta quer expor o que foi feito, e vocês devem se acostumar a ouvir uns aos outros [...]”.

<u>Situação surpresa 014 – Bissetriz “confusa”</u>

Alunos ficam em silêncio, Eta explica os comandos para construção de retas, semiretas e segmentos de reta. Eta mostra bissetriz, mas fica confusa.

[Eta]: “Uê! Porque a bissetriz aparece no ângulo oposto? Não era esse o ângulo que queria”.

Figura 053 – Atividade da bissetriz por Eta e Lambda.



[Professor]: "Pois é, vejam o questionamento de Eta, porque o está aparecendo a bissetriz do ângulo oposto?"

[Epsilon]: "Porque Lambda clicou no sentido anti-horário, ela clicou em B, A e C da direita para a esquerda, ela devia ter clicado primeiro em C, B e A, daí ficava da esquerda para a direita [...]".

[Professor]: "Quer dizer que temos ângulo horário e anti-horário?".

[Lambda]: "Não, é que no *GeoNext* ir rodando da esquerda para a direita é o ângulo interno e ir da direita para a esquerda é o ângulo interno [...]".

[Gama]: "É e depois dizem que o computador faz certinho (risos)".

Mi e Beta vão até o *Notebook*. Mi explica comandos retas paralelas e mostra a medição de ângulos. Ao explicar polígonos ocorrem problemas.

[Mi]: "Ora! O polígono não quer fechar!".

[Professor]: "Beta, que polígono vocês querem fazer?".

[Beta]: "Um quadrilátero, mas ele não termina!"

[Delta]: "Beta, lembre que um polígono é uma linha poligonal fechada formada por segmentos consecutivos, onde começa termina!".

Após finalização do polígono de Delta, o Professor faz intervalo.

Comentários: O aparecimento de alunos novatos, por um lado, atrasa e dificulta a pesquisa, mas por outro, viabilizou o teste de situações de mediação por meio de monitoria. Houve a retomada da familiarização que foi bem sucedida. A situação surpresa 014, remonta o problema de medição de ângulos em aspectos da ação instrumental, no entanto, Lambda compreende situação. A construção de polígonos reaparece com os novatos, mas Delta conceitua para Beta, a concepção presente neste comando. Teta apresenta-se relutante em ir ao *notebook*, mas o comentário de Eta revela problemas existentes na turma de estudantes do CMF.

[01h00 – 02h00] Atividades com *GeoNext:* Após intervalo, os alunos retornam, no entanto, o Professor percebe a ausência de Gama e questiona:

[Professor]: “Cadê o Gama?”

[Epsilon]: “Foi para o campeonato de vôlei aqui do colégio”.

O Professor propõe atividade para construção de retas perpendiculares (atividade 03). Os alunos fazem a leitura desta, e o Professor dá tempo para que os alunos desenvolvam suas estratégias de resolução. Delta e Beta chamam o Professor e tentam justificar a perpendicularidade entre retas através dos ângulos de 90^o.

[Professor]: “Mas o que garante que esses ângulos são retos? [01h07]”.

[Delta]: “Bem, faz o seguinte Professor, vamos tentar mais um pouco [...]”.

Alunos andam livremente pela sala discutindo atividade. Delta chama o Professor e diz:

[Delta]: “Provei que são perpendiculares, olha a medida dos ângulos? É 90^o tá vendo!”.

[Professor]: “Sim, mas quem me garante que estas medidas mostram que os ângulos são retos? Isso pode ser uma aproximação, 10 é a aproximação de 9,88, mas um número não é o outro”.

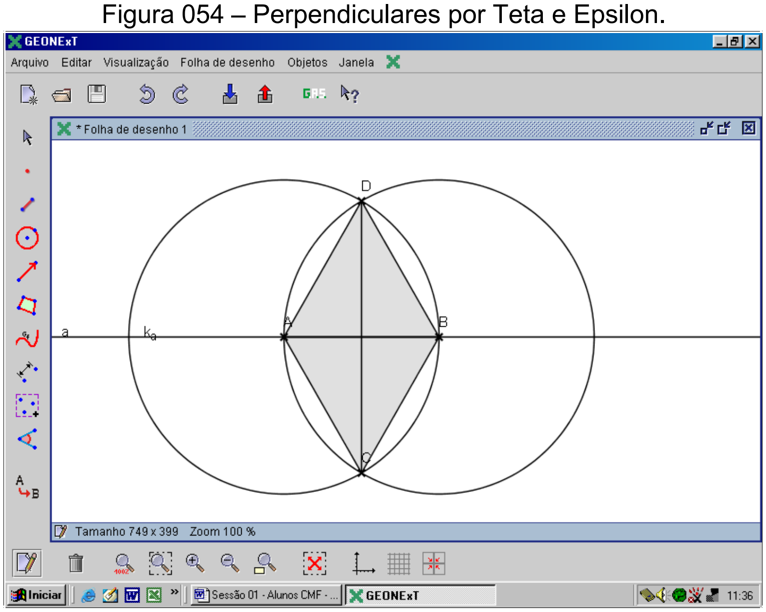
[Delta]: “Mas como faço isso? Não posso confiar na medida do computador?”.

Delta pergunta para Epsilon e Gama o que eles estão fazendo, os alunos interagem. Lambda e Eta discutem a atividade em voz baixa [01h12].

[Professor]: “Tenham cuidado com medidas pois não se pode confiar 100% nelas” [01h15].

Teta e Epsilon tentam trabalhar através da mediatriz, e destacam dois triângulos isósceles em sua construção, conforme a figura 054 a seguir.

Figura 054 – Perpendiculares por Teta e Epsilon.



O Professor liga *datashow* e deixa uma construção de retas paralelas a mostra e faz manipulações, alguns alunos ficam olhando, o Professor sai do *notebook*. Após o Professor sair, Delta se levanta e vai ao computador e manipula a construção do Professor depois volta ao computador [01h14].

[Professor]: “Vamos retomar a atividade de ontem (atividade das retas paralelas), e depois a gente vai para a atividade das perpendiculares [...]”.

O Professor pergunta aos alunos o que é necessário para se obter retas paralelas.

[Epsilon]: “As paralelas são aquelas que não são concorrentes [...]”.

[Professor]: “Mas o que significa não ser concorrentes?”

[Epsilon]: “É que elas não se encontram [...]”.

[Professor]: “Mas porque elas não se encontram?”.

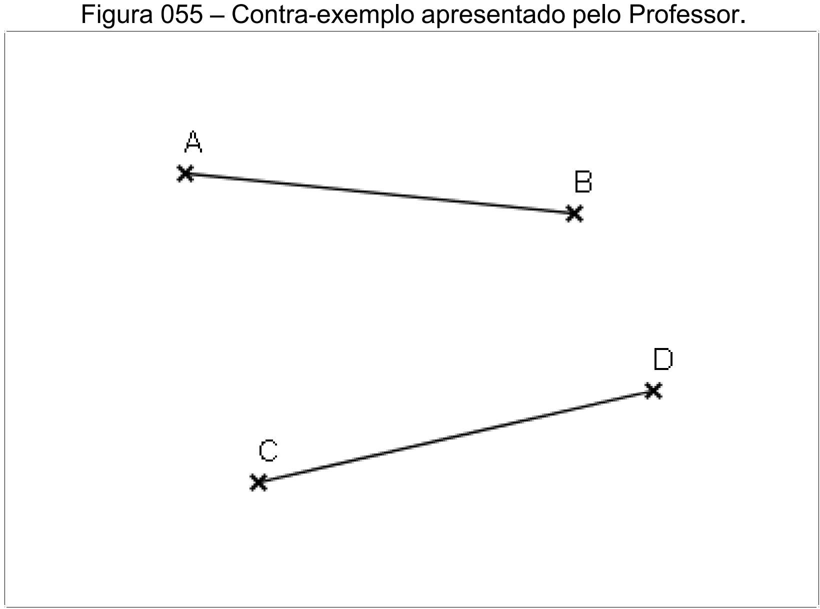
[Beta]: “Professor porque o senhor põe a gente pra pensar deste modo?”. Risos.

[Professor]: “Pensar é preciso, matemática de fato exige isto”.

[Epsilon]: “Retas concorrentes são aquelas que se encontram num ponto que faz intersecção entre elas [...]”.

[Professor]: “Certo, mas veja isto aqui [...]”.

Figura 055 – Contra-exemplo apresentado pelo Professor.



Silêncio enquanto Professor manipula o *notebook*.

[Professor]: “Tá vendo os segmentos [AB] e [CD], eles são paralelos?”

[Epsilon]: “Não”.

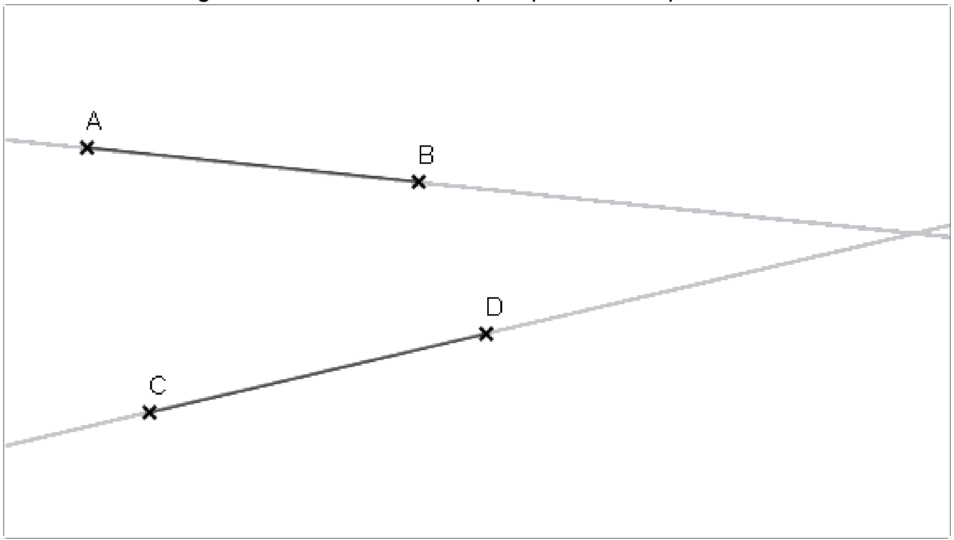
[Professor]: “Se encontram?”

[Epsilon]: “Não”.

[Professor]: “E aí como você me explica isto?”.

[Delta]: “Acontece que as retas suportes de [AB] e [CD] têm um ponto de intersecção.”

Figura 056 – Contra-exemplo apresentado por Delta.



[Professor]: “Mas o que é a reta suporte?”.

[Delta]: “É a reta que contem o segmento em questão”.

[Professor]: “Mas o que acontece quando retas são concorrentes?”

[Epsilon]: “Já sei, uma reta divide um plano em dois semiplanos, uma reta quando é paralela a outra fica dentro de um dos semiplanos”.

[Professor]: “Ou seja, você precisa ter a mesma distância entre as retas paralelas e deve ter uma reta contida completamente no semiplano da outra”.

[Epsilon]: “Eita negócio bonito! Não é só medida não é uma idéia legal”.

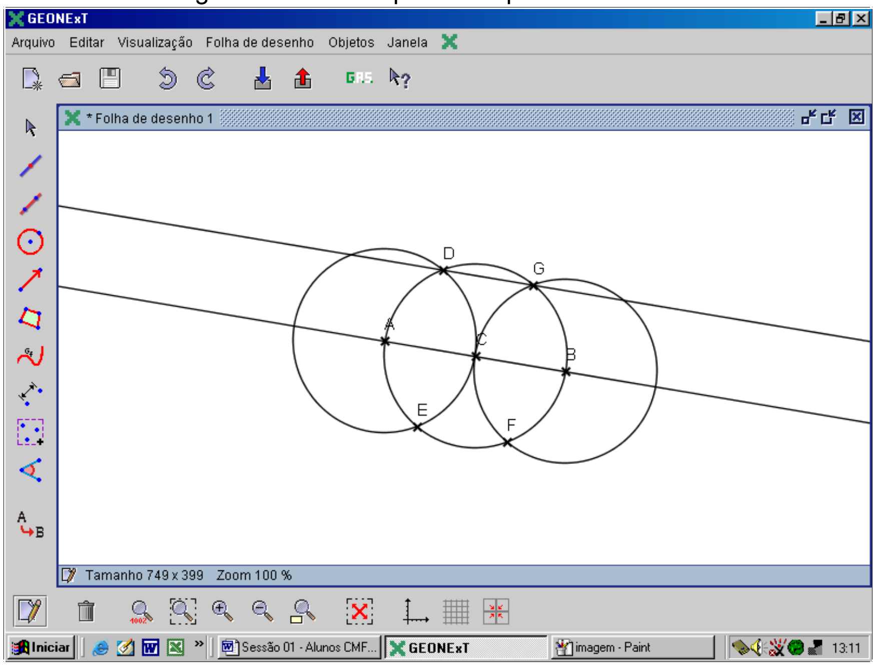
[Professor]: “Vamos dar um tempo para que vocês organizem suas idéias, ok?”.

[Alunos]: “Tudo bem”.

O Professor pede para que os alunos mostrem suas atividades. Delta e Beta dizem querer ir ao *notebook*. Eles explicam sua construção de retas paralelas.

[Beta]: “Com base em [C] o ponto médio de [AB], é construído a circunferência 1 com centro [C] e raio [CA]. Depois fizemos a circunferência 2 com centro em [A] e raio [AC]. Depois fizemos a circunferência c3, com centro [B] e raio [BC], daí passamos uma reta pelas intersecções entre a circunferência 1 e 2 e depois pelas circunferências 1 e 3 que estavam o mesmo semiplano. Surgiram os pontos [D] e [G]. Pronto! Temos uma reta paralela à outra é só mover os pontos [A] e [B]".

Figura 057 –Retas paralelas por Delta e Beta.



[Professor]: "A construção está correta, mas o que garante que as retas são paralelas?".

[Delta]: "As circunferências c1, c2 e c3 são congruentes, pois o raio CA = raio AC. Já os raios CB = raio BC. Como o raio CA = raio CB, então como conseqüência são congruentes. Como [AD] é raio de c2, [CD] raio de c1 e [CG] é raio de c1, [BG] é raio de c3, temos dois triângulos eqüiláteros [ADC] e [CGB] que têm a mesma altura, pois são congruentes". Como os pontos [D] e [G] estão no mesmo semiplano, e estão a mesma altura, as retas que passam por [AB] e [DG] são retas paralelas".

[Professor]: "Algum questionamento pessoal?".

[Epsilon]: "Nesta construção só o ponto A e o B mexem, não haveria algo mais geral?".

O Professor não ouve Epsilon e dá um breve tempo para que alunos organizam apresentações".

O Professor fala sobre exemplos e contra-exemplos globais e locais aos alunos. Epsilon diz que tem uma construção de retas paralelas mais geral que a construção de Delta e Beta. O Professor chama Epsilon ao *notebook*.

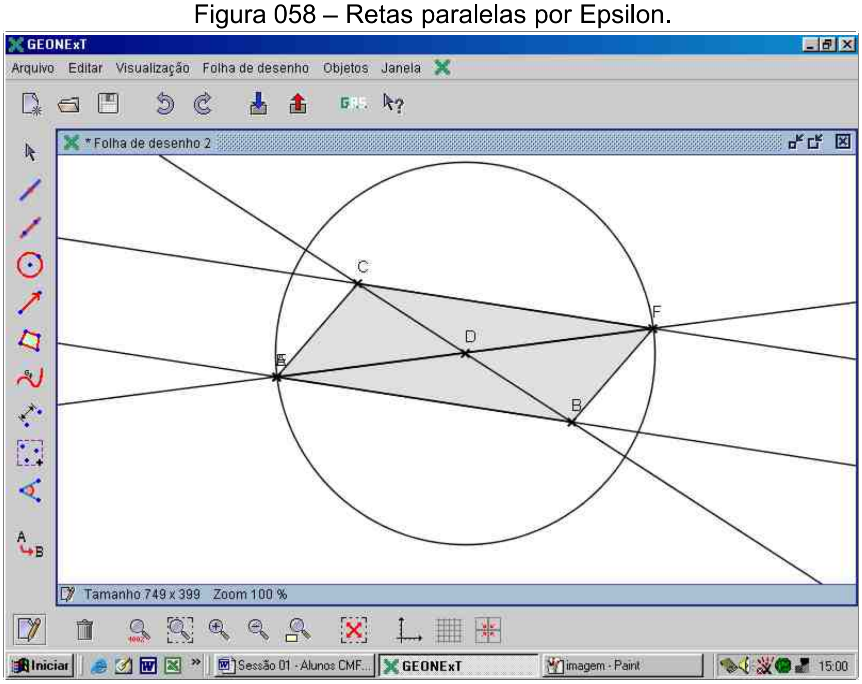
Beta vai ao computador e Epsilon lhe orienta no desenvolvimento da atividade.

[Epsilon]: "Fiz a partir da construção do Professor na aula passada. Beta, faz uma reta por [A] e [B]; Agora faz um ponto [C] fora da reta; Isso! Agora faz [D] o ponto médio do segmento [CB]; Faz uma circunferência 1 com centro [D] e raio [DA]; Trace uma reta por [DA].

[Beta]: "Tem outro ponto aqui [...]".

[Epsilon]: "Escolhe o ponto [A], isso! Vê a intersecção ali Beta? Faz uma reta que passe pelos pontos [C] e a intersecção livre (ponto [F]). Pronto, essas retas são paralelas Professor, Beta, mexe os pontos [A], [B] e [C]."

Figura 058 – Retas paralelas por Epsilon.



A turma fica em silêncio enquanto Beta manipula construção.

[Beta]: "É arretada a tua construção [...]".

[Professor]: "Sim Epsilon, parece tudo ok, mas justifique sua construção."

[Epsilon]: “Beta, vai em polígono e faz um triângulo [AFC] e outro [ABF], faz também uma reta por [C] e [B]”.

[Beta]: “O ponto [A] e o ponto [E] tão superpostos”.

[Epsilon]: “Professor, o ponto [D] não é ponto médio de [CB]? Sendo assim, d(CD)=d(DB); mas [D] também não é ponto médio de [AF], pois [AD] e [DF] são raios da circunferência 1, alem disto, o ângulo (CDA) = ângulo (FDB), pois são ângulos opostos pelo vértice. Logo, pelo caso LAL de congruência de triângulos podemos dizer que d(AC)=d(BF) e como a reta que passa por [CF] está no mesmo semiplano, podemos dizer que esta reta é paralela a reta que passa por [AB], a diferença da minha construção para a de Delta e Beta é que nela eu posso mover [A], [B] ou [C], na de vocês só movemos [A] ou [B]. Nesta posso mostrar mais situações de paralelas, é algo mais geral [...]”.

[Professor]: “Mas a sua mostraria todos os casos Epsilon?”.

[Epsilon]: “Acho que mostra só o que o computador mostra”.

[Professor]: “Por hoje é só pessoal, amanhã a gente discute mais”.

O Professor finaliza esta sessão devido problemas relativos à gestão de tempo no CMF.

Comentários Gerais: Os alunos Delta e Beta tentam solucionar problemas das perpendiculares por manipulação de ângulos, sua estratégia é a tentativa e erro. Delta desconhece a diferença entre validação por verificação e a demonstração. O Teta e Epsilon usam estratégias que exploram congruências entre triângulos, além disto se pode supor o uso de propriedades como a altura de triângulos isósceles, bem como, propriedades de diagonais de quadriláteros como paralelogramos e/ou losangos, ou seja, buscam no saber matemático argumentos para validar suas idéias – fato que consiste em procedimentos voltados à demonstração matemática.

O Professor quer que os alunos reflitam sobre as condições necessárias para a existência do paralelismo de retas, semi-retas e segmentos de retas.

Na argumentação surge o contra-exemplo do Professor, mas Delta apresenta um contra-exemplo ao contra-exemplo do Professor tomando como base a concepção sobre reta suporte. O Professor busca, a partir do contra-exemplo apresentado por Delta, uma outra linha de argumentação.

Epsilon conclui o que é necessário se obter para que seja dito que há paralelismo entre retas. Considera que [a] As retas devem estar a mesma distância uma da outra; [b] As retas devem estar contidas em um dos semiplanos formado pela outra reta. Epsilon observa que este tipo de argumentação possui uma "beleza".

Quanto à atividade das paralelas, Beta faz a construção e Delta apresenta sua justificativa. O Professor teve que intervir para que a explicação fosse realizada. O Professor não ouve o questionamento de Epsilon, que fala sobre a generalidade da construção dada. O Professor perde oportunidade em avançar nesta discussão. Existem problemas relativos a gestão de tempo. Os alunos que participaram da primeira sessão são mais participativos com os colegas e com o Professor. Epsilon tinha uma construção mais generalizada que a de Delta e Beta.

O contra-exemplo do Professor, sobre a atividade das perpendiculares, dá o tom do espírito do curso e leva alguns alunos à reflexão sobre a sistematização e justificação de idéias matemáticas, no entanto, mas tal fato levou duas sessões. A Seqüência Fedathi sobre as retas paralelas foi concluída a contento. O processo de interação foi bom, os "alunos antigos" atuaram como monitores junto aos novatos. O Professor quase perdeu oportunidade de interação por não ter ouvido Epsilon.

Os alunos estavam motivados em compreender a atividade em questão. Para que os alunos elaborem sua sistematização teve que ocorrer a intervenção do Professor.

Sessão 03 – Construções geométricas fundamentais com *GeoNext*:

[00h00 – 01h00] Reformulação do contrato didático e o desenvolvimento de atividades: Nesta sessão os alunos presentes são: Pi, Mi, Eta, Teta, Beta, Epsilon, Ni, Delta, Csi e Lambda. Ausentes estão: Alfa, Gama, Zeta, Ro e Sigma. A ausência destes alunos se deve ao campeonato que está ocorrendo nesta semana no CMF. Presente está o professor Pascal do CMF, e da equipe de pesquisa: o Professor e 2 Bolsistas PIBIC/UFC que se revesam nas filmagens.

O Professor reinicia aula mencionando pretender finalizar atividade das retas perpendiculares, mas aproveitará também para explorar atividades sobre bissetriz entre outros tópicos matemáticos.

Pascal e o Professor organizam os alunos em equipes que vão permanecer até o final do curso, e Pascal aproveita o momento para chamar atenção dos alunos sobre a relevância do curso.

As equipes formadas são respectivamente:

G1: Pi, Mi, Eta e Teta

G2: Beta, Epsilon e Ni

G3: Delta, Csi e Lambda.

O Professor menciona que se desenvolverá uma competição entre as equipes G1, G2 e G3 e que ao final haverá uma premiação para a equipe vencedora. O Professor dá 10 minutos para que os alunos finalizem atividade sobre retas perpendiculares, e os alunos reiniciam os trabalhos da sessão anterior. Quanto os alunos que finalizaram atividade sobre perpendicularismo, estes realizam atividades sobre bissetriz.

A sessão está sendo realizada em um horário diferente, pois no CMF foi marcado um curso para formação *Linux* no Laboratório de Informática, e o mesmo foi notificado ao grupo de pesquisa no dia anterior após o término da sessão.

Os Alunos trabalham silenciosamente. Os alunos de G2 vão conversar com G3 sobre propriedades para se obter bissetriz.

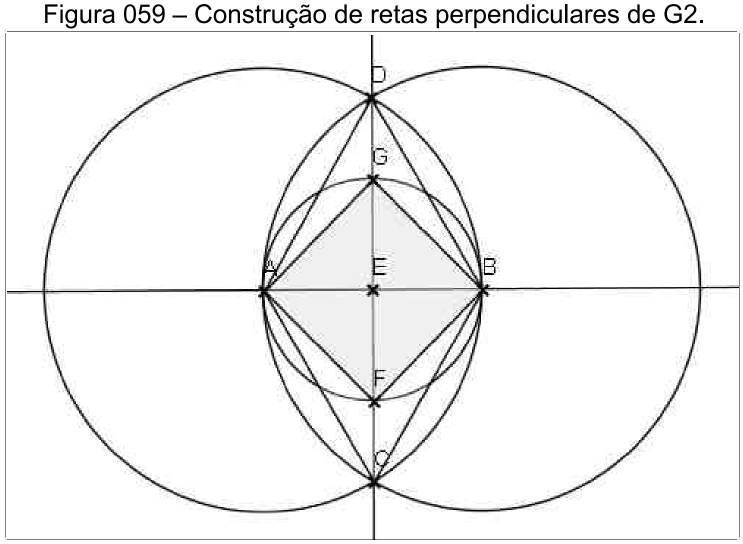
[Beta]: “Delta, vocês tão mostrando o que?”

[Delta]: “A idéia é a seguinte, tenho um ângulo, a bissetriz não divide um ângulo ao meio, e a mediatriz não faz a mesma coisa, então vou tentar mostrar que a altura da mediatriz que tenho é a bissetriz do ângulo que se opõem a base do triângulo, entendeu?”

[Beta]: “Pode ser legal, a gente fez vários triângulos semelhantes e vamos tentar ver alguma coisa a partir daí, vamos trabalhar juntos?” [Delta]: “Vamos tentar um pouco mais aqui, depois a gente vê”. Os alunos voltam para seus lugares e continuam trabalhando silenciosamente.

A equipe G2 fica no notebook. Beta está tendo problemas com *notebook* e *datashow,* pois a imagem não aparece nem no computador nem no quadro branco [00h37]. Professor vai a frente, verifica que está faltando cabo que liga o vídeo do *datashow* e chama com as mãos um dos alunos PIBIC/CNPq para resolver este problema. Após resolver problema a atividade é iniciada. Alunos de G2 se sentam ao *notebook*. Epsilon manipula computador, Beta vai a frente e Ni fica sentado ao lado de Epsilon.

Figura 059 – Construção de retas perpendiculares de G2.



Epsilon efetua construção primeiramente, após efetuada construção Beta vai a frente e apresenta sua explicação sobre a construção conversando com o Professor e os alunos. Os alunos prestam atenção a apresentação de G2.

[Professor]: “Bem, vejo que vocês estão avançando, vamos retomar a atividade anterior já, já, sem problemas?”.

Os alunos conversam entre si e se preparam para apresentar atividades. Professor retoma atividade 3 sobre retas perpendiculares para finalizar está discussão.

[Beta]: “Pessoal, para a atividade das retas perpendiculares fizemos a seguinte construção: Fiz uma reta pelos pontos [A] e [B], depois fiz uma circunferência c1 com centro em [A] e com raio [AB], fiz uma circunferência c2 com centro em [B] e raio [BA], e fiz uma reta pelos pontos de intersecção entre c1 e c2, esta reta passa pelos pontos [C] e [D]. Daí fiz também um losango pelos pontos [ADBC], e depois fiz também uma circunferência c3, com centro em [E], intersecção entre as retas que passam por [A] e [B] e [C] e [D], e raio [EA], depois usei o comando polígono de novo e fiz um quadrado [AGBF], sendo G e F intersecções entre c3 e a reta [CD]. Como vou justificar o fato da reta [CD] ser perpendicular a [AB], bem tenho 3 justificativas. A primeira, quando fiz o quadrilátero [ADBC] fiz um losango, no losango eu sei que os ângulos opostos são iguais e sei que as diagonais são perpendiculares, mas como mostro que tenho um losango? O raio de c1 e c2 são congruentes, pois raio c1 = raio c2, e raio c1 = d(AB) = d(AC) = d(AD), além disto, o raio c2 = d(BA) = d(BC) = d(BD). Sendo assim temos dois triângulos isósceles opostos pela base que é um lado comum aos dois triângulos, e a altura destes triângulos é a mediatriz do segmento [AB] e se é mediatriz e altura de triângulos isósceles é perpendicular. A segunda justificativa é pelo quadrado [ADBC] que tem duas diagonais perpendiculares, pois um quadrado também é losango, e a terceira explicação é que o quadrado está dentro da circunferência c3, e suas diagonais [FG] e [AB] são perpendiculares pois diagonais dos quadrados são perpendiculares, sendo assim, temos que a circunferência c3 que têm 360^{o} graus, foi dividida em 4 ângulos de 90^{o} graus, e isso é próprio das retas perpendiculares”.

[Professor]: “Pascal, quer fazer observações?”

[Pascal]: “Sem problemas”.

Situação surpresa 015 – O desaparecimento de uma reta

Alunos pedem intervalo, mas o Professor diz que não haverá intervalo devido o horário do curso nesta sessão. Mi pede para falar com Professor equipe G1 teria uma outra solução para atividades das retas perpendiculares.

[Mi]: "Nossa equipe fez essa atividade de modo diferente, nós fizemos de outro modo, podemos mostrar como fizemos?"

[Professor]: "Vamos lá, mostre para nós [...]".

[Mi]: "Nós queremos fazer uma reta que seja perpendicular a reta dada, bem vamos fazer o seguinte: Pi, faça uma reta pelos pontos [A] e [B], feito! agora faça um ponto [C] sobre a reta [AB], ótimo Pi, agora faz uma circunferência c1 com centro C e raio [CB], certo! Agora faz uma circunferência c2 com raio [BC], marque as intersecções entre c1 e c2, vão aparecer os pontos [E] e [D]. Agora Pi, faz uma reta que passe por [ED]. Isso! faz agora [F] intersecção entre as retas [AB] e [ED], ok? Agora Pi, faz uma circunferência c3 com centro em [C] e raio [CF]. Valeu Pi! Agora faz intersecção entre a reta [AB] e c3, vão aparecer os pontos [H] e [G]. Isso! E vamos fazer circunferência c4 com centro em [H] e raio [HG], agora façamos c5 com centro em [G] e raio [GH], façamos intersecção entre c4 e c5, vão aparecer os pontos [J] e [I], bem, agora faça uma reta que passe por [JI], veja que a reta passa pelo ponto [C] e pelas intersecções das circunferências c4 e c5, veja que os triângulos [HJG] e [HGI] são isósceles, e os segmentos [JC] e [CI] são pertencentes a reta [JI] que é mediatriz do segmento [HG]=[GH] certo?"

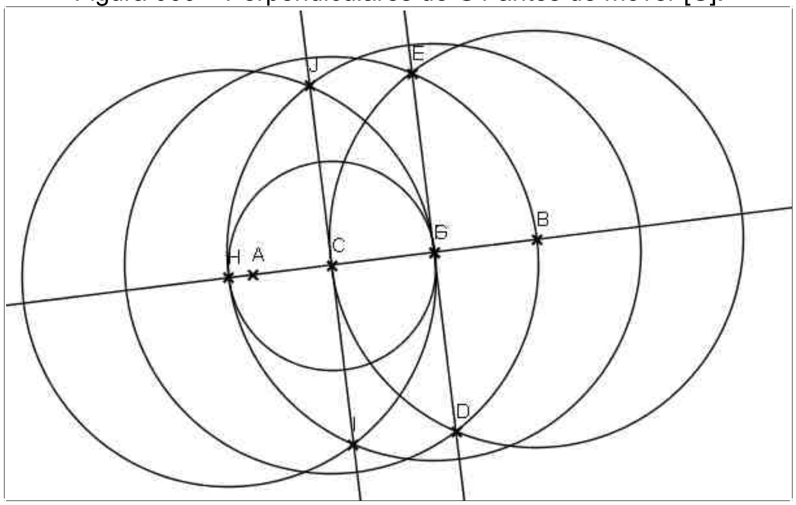
[Professor]: "Ótimo, mas faça a manipulação dos pontos, move o ponto [C]"

[Mi]: "Vai Pi, move o ponto [C]".

[Professor]: "Uê! Cadê a reta que passa pelo ponto [C]?"

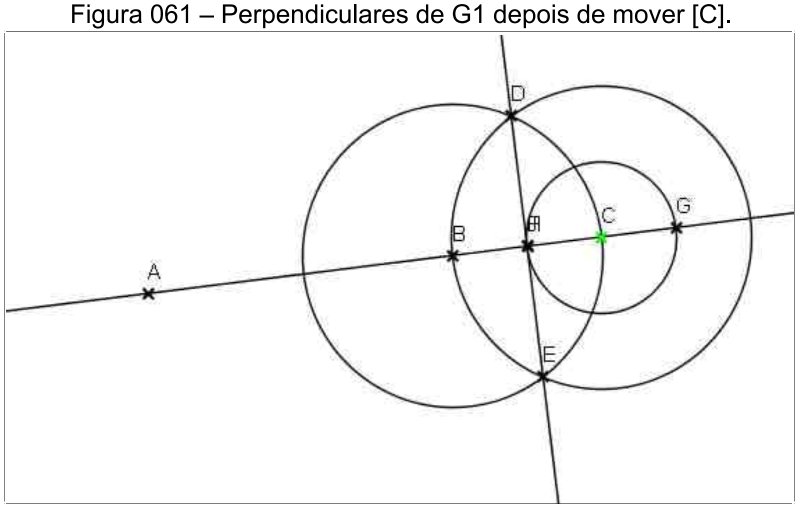
[Mi]: "Vixe! Tava tudo aí? E agora?".

Figura 060 – Perpendiculares de G1 antes de mover [C].



Alunos conversam entre si, alunos de G2 e G3 vão ao *notebook* ver a construção.

Figura 061 – Perpendiculares de G1 depois de mover [C].



[Professor]: "Pessoal, situação desafio! Quero que vocês expliquem os motivos que fazem com que essa reta que passa por [J] e [I] desapareçam, vai valer 5 pontos para a equipe que desenvolver melhor essas idéias [...]". Alunos voltam as equipes discutindo estratégias.

Comentários: Professor reformula o contrato didático propondo a divisão em equipes, o Professor fala com Pascal que é professor na sala-de-aula regular de Desenho Geométrico destes alunos, antes da aula para que o mesmo proponha uma divisão nas equipes entre alunos que sintam dificuldades e os alunos que estão indo bem na disciplina, o objetivo, consiste em colocar alunos com dificuldades com aqueles que possuem facilidade nesta disciplina para equilibrar os grupos em termos de interação e envolvimento nas atividades. Epsilon queria ficar junto a Delta, mas Pascal não achou adequado.

Os alunos se reorganizam e iniciam atividades interagindo bem. Respectivamente G1 está a frente; G2 está ao meio e G3 está ao fundo do Laboratório do CMF. Perspectiva competitiva pode ser um fator que inviabiliza interação entre alunos, é como se eles quisessem esconder “o jogo” uns dos outros.

Quanto atividade da bissetriz, estratégia de G3 é pela mediatriz, já a estratégia de G2 é através da “semelhança de triângulos”, no entanto, pode ser uma percepção disfarçada da mediatriz. Alunos de G1 preferem fazer atividade sobre polígonos, atividade com maior apelo visual. Os alunos interagem em voz baixa e parecem estar envolvidos.

Beta faz justificativa para atividade das retas perpendiculares sem intervenção do Professor, indica mudança de postura, assumindo uma postura mais matemática ao estruturar sua demonstração sem a utilização de medidas, na aula anterior Delta e Beta tentavam justificar somente pela medição, com intervenção do Professor e a colaboração de Epsilon e Gama na aula anterior, as idéias de G2, grupo recém formado, com Epsilon, Beta e Ni avançou. No entanto, vejo Ni meio apático e permido mediante Epsilon e Beta.

Construção de G1: De Mi e Pi apresentam uma situação surpresa que constitui um desafio. O Professor faz intervenção e propõem desafio. Os alunos estão motivados em reproduzir situação. Situação Surpresa decorre de erro de manipulação favorecido por *software*, sobreposição entre pontos [F] e [G] estão na chave do problema.

[01h00 – 02h00] Desenvolvendo atividades e uma nova situação surpresa: Professor dá tempo para que os alunos fundamentem suas idéias sobre perpendicularismo. G1, G2 e G3 interagem discutindo situação surpresa 015, Mi e Pi estão confusos quanto construção, mas chamam Epsilon e Beta para que os mesmos colaborem com eles.

Eta e Teta efetuam atividade sobre construção de hexágono regular, G3 reproduz situação surpresa 015, Pascal vai aos computadores das equipes visualizar o que está ocorrendo. Pascal fala com Mi, Pi, Epsilon e Beta.

[Pascal]: "É se o Professor disser que está certo, está certo! Eu não entendo muito sobre computadores, mas sei que é o futuro!".

Professor pouco interage com alunos. Corneta do CMF toca devido final do expediente.

[Professor]: "E aí, avançaram em algumas idéias?"

[Beta]: "Nossa equipe vai tentar, pode ser?"

[Professor]: "Vamos lá!".

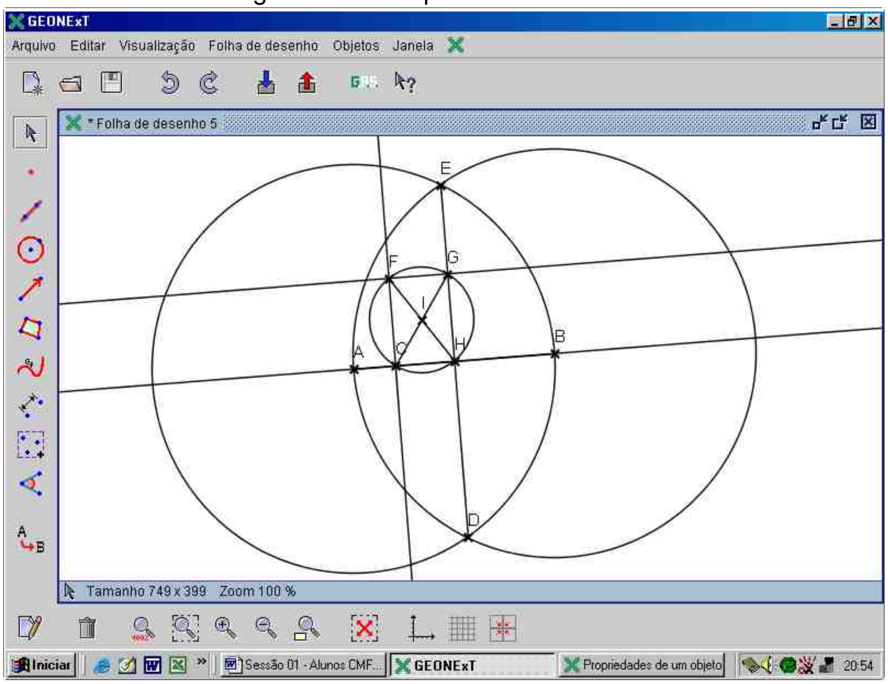
Equipe G2 apresenta uma outra solução para atividade sobre perpendicularismo. Beta fica no *notebook*, Epsilon e Ni ficam ao seu lado. Beta faz atividade e a apresenta.

[Beta]: "Bem, para construir fiz do seguinte modo: Fiz um segmento [AB], e depois coloquei o ponto [C] sobre este segmento. Daí fiz uma circunferência c1 com centro em [A] e raio [AB], e depois fiz uma circunferência c2 com centro em [B] e raio [AB]. Daí marquei [E] e [D] como intersecções entre c1 e c2, e fiz um segmento [ED], usei o comando 'retas paralelas' e fiz uma reta paralela ao segmento [ED] pelo ponto [C]. Para justificar o perpendicularismo entre a reta que passa pelo ponto [C] e o segmento [AB], fiz um ponto [F] que passa pela reta que passa pelo ponto [C], prolonguei o segmento [AB] traçando uma reta que passa por [AB], e usando comando 'retas paralelas' fiz uma reta paralela a reta [AB] que passa por [F], fiz [G] a intersecção entre a reta que passa por [F] e o segmento [ED], e fiz [H] a intersecção entre a reta [AB] e o segmento [ED]. Agora faço um segmento [FH], e depois faço outro segmento [CG], e marco [I] como intersecção entre [FH] e [CG], daí faço uma circunferência c3 com centro em [I] e raio [IG]. Tenho que d(CI) = d(FI) = d(GI) = d(HI). Além disto, [FIC] e [GIH] são isósceles, sei que [FGCH] é um retângulo inscrito em uma circunferência, e pronto!".

[Professor]: "Ok, mas Beta, sei que as retas que passam por [FC] e o segmento [ED] são paralelos, mas o que me garante que a reta que passa por [C] e a reta [AB] são perpendiculares?"

[Pascal]: "Pois é Beta, você mostrou o paralelismo mas não explicou o perpendicularismo você deve provar isso!"

Figura 062 – Perpendiculares de G2.



[Epsilon]: "Lascou! E a gente achava que tava bom!".

[Beta]: "Porque tenho de provar isso, na matemática sempre tenho de provar, provar, provar?".

[Pascal]: "Você tem de deixar tudo bem explicadinho Beta, até que o Professor diga que está bom, ele falou, tá falado".

[Professor]: "Não é bem isso, acontece Pascal que na matemática a gente valida nossas idéias pela argumentação dedutiva, na matemática usamos o processo que chamamos por demonstração, usamos as idéias matemáticas para fundamentar novas idéias matemáticas".

[Epsilon]: "É por isso que aprendemos as leis matemáticas?"

[Professor]: "Sim, e por este caminho".

[Beta]: "Tá certo, entendi, mas deixa eu pensar um pouquinho".

[Professor]: "Tá bom".

Após breve tempo, Epsilon volta a discussão.

[Epsilon]: “Bem, fiz dois triângulos, [FCH] e [FGH], ambos possuem um lado comum [FH], [I] é ponto médio de [FH] pois d(FI) = d(HI) por c3. Além disto, os ângulos [FIG] = [CIG] e como d(FI) = d(GI) = d(CI) = d(HI), logo, os triângulos [FIG] e [CIH] são congruentes pelo caso LAL e os segmentos [FG] e [CH] são congruentes por isso. Por motivo parecido [FIC] e [GIH] também são congruentes sendo [FC] e [GH] congruente também. Sabendo que d(FC) = d(GH) e sabendo que d(FG) = d(CH) e tendo que [FH] comum para [FCH] e [FGH], temos de fato que [FGHC] é um retângulo e sabemos que os ângulos [FCH] = [CHG] = [HGF] = [GFC]. Sendo assim, a reta que passa por [C] é perpendicular a reta que passa por [AB]”.

Após atividade apresentada por G2, Alunos de G3 dizem não ter finalizado atividades. Professor encerra atividade dizendo que os alunos têm por desafio descobrir o que ocorreu na situação problema apresentada por G1. Alunos salvam suas atividades e a aula é finalizada as 01h50 min.

Comentários Gerais: Alunos tentam reproduzir situação surpresa 015. Interação ocorre de modo espontâneo e Pascal vai aos alunos para interagir com os mesmos. Pascal expõem seus preconceitos sobre uso do computador, considerando que se o Professor disser que está certo tudo está correto, é uma espécie de “tecnocracia docente de um especialista”.

Eta e Teta estão isoladas desenvolvendo atividade sobre hexágonos, é como se aos poucos elas fossem sendo isoladas do grupo.

Beta, na solução de G2, apresenta uma argumentação boa, mas que responde somente ao paralelismo entre [FC] e [ED], mas não responde ao perpendicularismo entre as retas [AB] e [FC]. Professor faz intervenção para recontextualizar a situação em questão. Pascal fala sobre a necessidade em demonstrar o perpendicularismo entre [AB] e [FC]. Alunos de G2 por meio de Epsilon justificam suas idéias. Beta fica irritado questionando a necessidade em se trabalhar o processo de validação por demonstração.

Pascal considera autoridade do Professor superior a argumentação matemática quando o assunto envolve os computadores. Alunos começam compreender o significado do processo de validação por demonstração. Gestão de Tempo inviabiliza desenvolvimento do último quarto de aula desta sessão.

A mediação do Professor e de Pascal favoreceu na solução de G2 uma postura matemática mais significante por parte dos estudantes. O Professor propõem situação surpresa 015 como desafio. Os alunos estão instigados nesta atividade .

Sessão 04 – A passagem do Novo PC ao Velho PC com alunos do CMF:

[00h00 – 01h00] Retomando atividade e a validação: Os alunos presentes são: Pi, Mi, Eta, Teta, Beta, Epsilon, Ni, Delta, Csi e Lambda. Os alunos ausentes são: Alfa, Gama, Zeta, Ro e Sigma. Do grupo de pesquisa: O Professor mais um Bolsista PIBIC/CNPq, além deles há o professor Pascal do CMF. As equipes continuam sendo G1, G2 e G3.

Professor dá boa tarde aos alunos, e inicia a aula a partir do problema das perpendiculares de G1 que surgiu na aula anterior. Professor pede que G1 apresente a questão, E a equipe faz com alunos passo-a-passo a situação surpresa no *notebook*, usando comando do *GeoNext* que reproduz o algoritmo.

Após G1 colocar a questão para os alunos de G2 e G3 o Professor dá um tempo para que os alunos façam suas argumentações.

Os alunos de G1, G2 e G3 perguntam ao Professor se podem trabalhar juntos, o Professor não vê problemas nisso [00h09]. O Professor diz que o desafio vale 8 pontos. Os alunos interagem, muito barulho e conversa. Os alunos Eta, Teta e Lambda estão conversando sobre atividades extra sala-de-aula. O Professor vai até elas e Lambda explica o problema.

Alunos interagem entre si ao realizar construção no quadro branco o Professor escreve: “Porque a reta que passa pelo ponto [C] desaparece?”. Os alunos de G1 ficam no *notebook*, os alunos de G2 ficam nos computadores da frente-direita e do meio-esquerda e os alunos de G3 ficam nos computadores do fundo. O Professor anda pela sala-de-aula. Alunos se reorganizam. No *notebook* estão Epsilon, Ni e Delta. No computador frente-esquerda estão Mi e Pi. No computador meio-direita estão Beta e Csi. No computador fundo-esquerda estão Eta, Teta e Lambda. Alunos Mi e Pi interagem com Epsilon e Delta, uns vão aos computadores dos outros.

[Mi]: "Professor! Acho que descobri o que aconteceu [...]"

[Pi]: "Você vai lá falar!"

[Mi]: "Vou nada!" Deixa a equipe vir aqui".

Mi chama sua equipe e eles vão até Mi, ele explica o que ocorre na situação surpresa 015 há uma discussão entre os membros da equipe.

[Epsilon]: "Professor, tem alguma coisa errada com os pontos [G] e [F]".

[Professor]: "Legal, converse com a equipe do Mi [...]".

O Mi chama Professor novamente [00h19], e expõem argumentos para o Professor.

[Professor]: "Escreve esta argumentação, usem a linguagem de vocês [...]".

Os alunos Csi e Lambda discutem sobre atividade acerca do hexágono regulares inscrito em circunferência.

[Professor]: "Pessoal, escrevam usem os cadernos de atividade como rascunho, vou dar mais um breve tempo, depois vamos apresentar as atividades que vocês desenvolveram".

[Mi]: "Quero mostrar o que fiz, acho que resolvi o problema da reta que some".

[Professor]: "Ok, finalizem suas argumentações, vamos ver já, já o que vocês fizeram [...]".

Professor vai a frente e faz alguns comentários junto aos alunos. Os alunos interagem entre si e preparam suas respectivas atividades.

[Professor]: "Vamos iniciar, G1 a pedidos de Mi vai iniciar apresentação". G1 reconstrói no computador a situação surpresa 015, novamente, explicando passo-a-passo aos alunos ".

[Mi]: "O problema acontece quando movo o ponto [C], veja que ao estar deste lado, tudo Ok! Pi mexe no ponto [C] para o pessoal ver, mas vejam a reta some se [C] for movido para o outro lado".

[Epsilon]: "Sabia que era isso [...]".

[Professor]: "Tudo bem, vocês reproduziram a situação, vamos agora chamar G3 para ver o que fizeram" [00h40].

[Delta]: "Professor, [C] não faz parte da reta que passa por [JI], só faz parte da reta que passa por [AB], quando as intersecções [J] e [I] somem é pq as circunferências deixam de existir [...]".

[Professor]: "Mas porque as circunferências somem?".

[Mi]: "Os pontos [F] e [G] se confundem".

[Professor]: "O ponto [C] pertence a reta [AB] e não é uma intersecção, existem graus de liberdade entre os pontos [...]".

O Professor explica novamente o que são graus de liberdade, pois alguns alunos não estavam presentes nas sessões iniciais.

[Professor]: "Bem pessoal, vocês ainda possuem dificuldades, vamos dar mais um tempinho para reorganizar idéias".

Os alunos. Mi, Pi, Epsilon e Beta se unem para discutir atividade. Todos os alunos estão empenhados em atividade, G3 está no *notebook*.

Explicação é retomada por Professor que chama G1, mas G2 vai junto a G1 no *notebook*.

[Mi]: "O Problema é que os pontos [G] e [F] se confundem e ai as circunferências somem".

[Professor]: "Sim, mas porque somem as circunferências Mi? Que os pontos [G] e [F] se confundem eu sei, me dê uma explicação matemática sobre o assunto".

[Mi]: "Posso ir ao quadro-branco Professor?".

[Professor]: "Pode sim".

Mi se dirige ao quadro-branco para realizar atividade sobre situação surpresa 015.

[Mi]: "Vou acender a luz para explicar".

[Professor]: "Ok, pode fazer isso".

[Mi]: "Pessoal, quando fiz a construção das circunferências c4 e c5 queria clicar nos pontos [H] e [G], mas cliquei nos pontos [H] e [F], acontece que quando [H] é a intersecção 'a esquerda' da circunferência c3, e [G] é a intersecção 'a direita' da circunferência c3. Quando [H] vai para a direita e se aproxima de [F] o raio da circunferência c4 e c5 ficam com medida zero pois d(HF) quando [H] = [F] é zero. Neste caso as circunferências c4 e c5 viram um só ponto, e como preciso de dois pontos para ter a reta [JI], essa reta desaparece, já se tivesse feito o clique nos pontos [H] e [G], [G] ficava a direita de [H] sempre, e aí temos as circunferências c4 e c5, e também temos a reta [JI]".

[Csi]: "É mudei [F] por [G] e agora a construção funciona, legal!"

[Teta]: "É mesmo, o Mi acertou legal [...]".

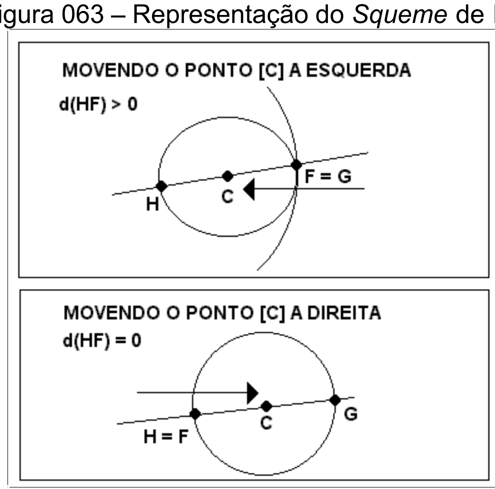
[Professor]: "Algum questionamento?"

[Epsilon]: "O Mi errou na atividade, e mostrou uma coisa mais interessante que o acerto que a gente teve, não dá prá confiar muito no computador, nê?".

[Professor]: "Pessoal, vamos fazer um breve intervalo, para avançar em outras atividades [...]".

No quadro-negro Mi construiu um esquema explicativo para suas idéias tentando explicar aos alunos que se o raio de uma circunferência tiver raio com medida zero, então não haveria como fazer dois pontos de intersecção entre as circunferências c4 e c5.

Figura 063 – Representação do *Squeme* de Mi.



Os alunos testam idéias de Mi modificando construção de c4 e c5 com base em [H] e [G] ao invés de [H] e [F]. Os alunos aparentam estar surpresos com resposta de Mi à situação surpresa 015.

Comentários: Os alunos interagem e pretendem transcender os grupos preestabelecidos pelo Professor. As alunas Eta, Teta e Lambda ficam isoladas pelos meninos, mas Professor tentar motivar estas para que participem das discussões. Mi, Pi, Epsilon e Delta são os alunos que mais interagem e discutem atividade.

Os alunos estão mais a vontade para discutir. Eta e Csi estão fazendo outra atividade, já os outros alunos discutem situação surpresa de G1. os grupos G1 e G2 percebem o problema de manipulação sobre os pontos [G] e [F] na construção.

Professor chama G3 para que eles fiquem mais envolvidos com atividade em questão. Mi mostra que os pontos [J] e [I] desaparecem, o problema está nas circunferências. Alunos estão envolvidos com a resolução deste problema. Professor precisa falar novamente sobre graus de liberdade, alguns alunos não sabiam sobre esta questão, devido ter iniciado curso em sessões posteriores a explicação inicial.

Mi faz passagem do Novo PC para Velho PC literalmete ao explicar solução do desafio proposto. Os alunos ficam surpresos com resposta de Mi ao problema. Pascal ao final da explicação de Mi e comenta para o Professor ter se surpreendido com Mi pois o considerava um aluno ‘meio pirado’ que não diz coisa com coisa.

Epsilon comenta que erro de Mi é mais interessante que o seu acerto. Mi teve mais clareza em explicação que o Professor. Trata-se de um erro de manipulação ou um erro de concepção na construção do comando intersecção? Aparentemente, é mais uma limitação de manipulação o motivo da situação surpresa 015.Ao construir atividade na aula anterior o ponto escolhido por Mi é [G], mas o ponto clicado foi [F]. Alunos fazem teste corretivo e averiguam a hipótese de Mi com sucesso.

[01h00 – 02h00] O problema da bissetriz: Após intervalo Professor fala sobre situação das equipes dizendo que G1 possui 11 pontos, G2 possui 5 pontos e G3 possui 7 pontos. Professor dá 20 min. para que as equipes preparem atividades sobre Bissetriz. Pascal se faz presente e fica em silêncio ao fundo observando ações dos alunos. Os alunos interagem.

Situação surpresa 016 – A bissetriz estranha

[Epsilon]: "Professor, você quer que a gente justifique porque temos a bissetriz, não é isso?".

[Professor]: "É isso que quero que vocês façam [...]".

[Epsilon]: "Tá vendo Beta, é isso que é nossa atividade!".

Equipes interagem há grande barulho entre os alunos.

[Pascal]: "Professor, não acha que a algazarra tá grande?".

[Professor]: "Se eles ficarem em silêncio como vão trocar idéias matemáticas? Observe que eles estão discutindo a atividade proposta [...]".

[Pascal]: "É mesmo, mas as vezes na sala-de-aula isso não é bem visto, vc sabe muito bem disto".

[Professor]: "Sei sim".

Os alunos interagem, andam por toda a sala, trocam informações. Alguns usam o *notebook* do Professor, outros usam os computadores, Mi chama Epsilon para trocar idéias, Beta e Csi trocam informações, Teta conversa com Mi sobre atividade, Pi e Delta trabalham juntos, há grande discussão entre os alunos.

Janelas da sala são abertas devido calor iluminação solar atrapalha filmagem. Pascal está presente ao fundo da sala. O Professor fica ao fundo, mas as vezes passa pelos alunos para ver o que os alunos realizam.

Diálogo entre os alunos Epsilon, Beta, Mi, Delta e Pi.

[Epsilon]: "Sabe qual o problema? No computador a gente tem muitas situações, mas para explicar as coisas certinhas, devemos ter todas as situações, daí porque usamos a prova para comprovar as coisas".

[Beta]: “Por isso temos que saber os teoremas e as idéias da matemática, não dá para confiar na máquina ela não faz infinitos casos, nê?”.

[Epsilon]: “É sim”.

[Mi]: “Tão viajando, vamos resolver essas coisas logo”.

[Delta]: “Eu sei que as circunferências têm o mesmo raio, não é?”

[Pi]: “Mas não sei se é isso não. Professor vem dar uma olhada aqui!”.

[Professor]: “Diga!”.

[Delta]: “Diz se estamos no caminho certo, fizemos as retas concorrentes não coincidentes [AB] e [AC], bem, temos agora o ângulo [CAB], sabendo isso, fizemos c1 com centro em [B] e raio [BC] e fizemos c2 com centro [C] e raio [CB]. Como d(BC) = d(CB), fizemos uma reta por [D] e [E] que passa por [A], essa reta não é a bissetriz?”

[Professor]: “Movimente o ponto [B] para a gente ver”.

[Delta]: “Não é isso! a reta [DE] não é mais bissetriz”.

[Professor]: “Mas o que é uma bissetriz?”.

[Pi]: “Pascal, o que é uma bissetriz?”.

[Pascal]: “É o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam dos pontos de duas semiretas unidas por um ponto comum, lembram?”.

Os alunos continuam interagindo, o Professor pede para que se preparem para apresentação de atividade.

Figura 064 – Bissetriz de Pi e Mi antes de mover [B].

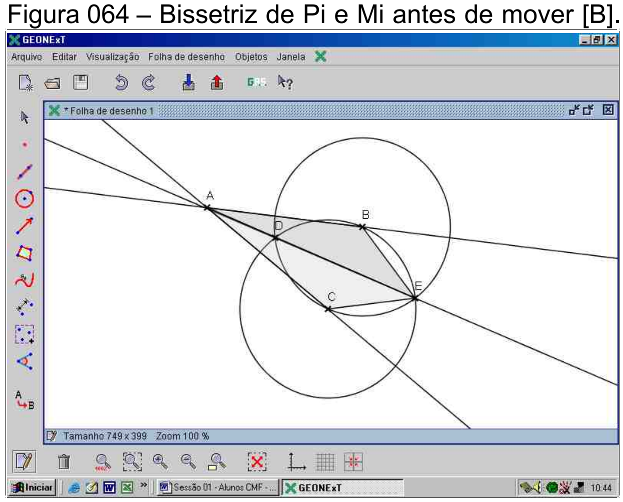
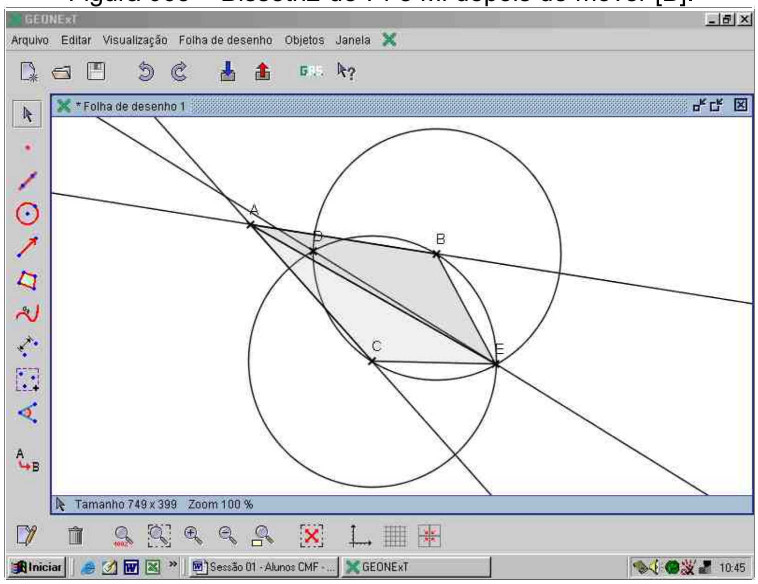


Figura 065 – Bissetriz de Pi e Mi depois de mover [B].

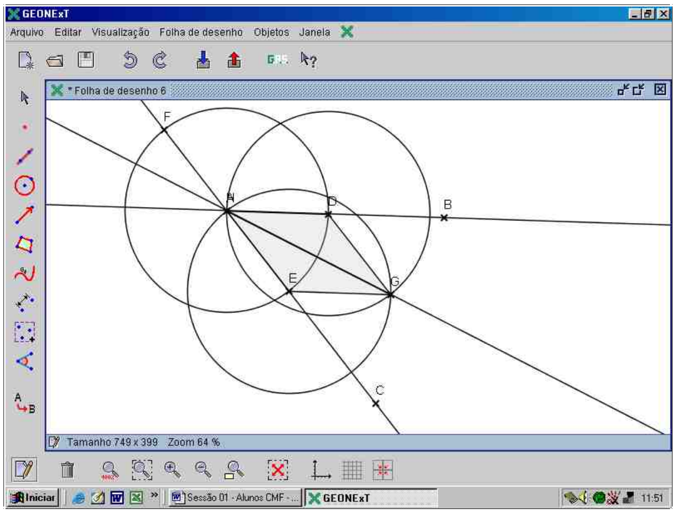


Professor pede que alunos se preparem para finalizar apresentação e chama alunos para socialização de soluções. G2 vai à frente.

[Epsilon]: “Professor, é o seguinte, fizemos uma reta [AB] e fizemos uma reta [AC], o ângulo que queremos explorar é [CAB], para não cometer o erro de G3, Lambda nos deu a idéia de fazer uma circunferência, marcamos um ponto [D] sobre a reta [AB] que não coincida com [A] ou com [B], e fizemos uma circunferência c1 com centro em [A] e raio [AD], marquei [E] como intersecção entre c1 e [AC], mas ignorei a outra intersecção [F] porque está fora do ângulo que quero explorar que é o ângulo [CAB] = [EAD]. Agora fiz uma circunferência c2 com centro em [E] e raio [ED], e faço uma circunferência c3 com centro em [D] e raio [DE]. Faço a intersecção entre c2 e c3, daí surge os pontos [H] e [G], sendo que [H] é coincidente com o ponto [A], e agora faço uma reta que passa por [HG]. Agora usando o comando polígono faço um triângulo [DHG] e depois faço outro triângulo [EHG]. Tenho agora um losango [EHDG] e os losangos se caracterizam por ter ângulos opostos iguais, se não amarrasse a circunferência c1, não teria como obter o losango, esse foi o erro de G3”.

[Professor]: “Certo, mas porque o losango tem ângulos opostos iguais? Essa é a questão de vocês”.

Figura 066 – Bissetriz de G2 explicada por Epsilon.



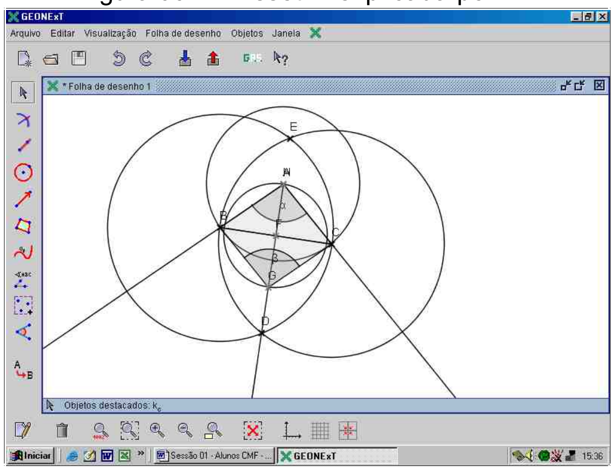
[Mi]: “Professor eu sei explicar isso, o Epsilon pode ficar no computador, eu explico”.

[Professor]: “Tudo bem, vamos lá Mi”.

[Mi]: “Epsilon, faz uma semireta com origem em [A] e continuação em [B], isso! Agora faz uma circunferência c1 com centro em [A] e raio [AB], faz um ponto [C] sobre c1 que não coincida com o ponto [B]. Agora faz uma circunferência c2 com centro em [B] e raio [BC], depois faz c3 com centro em [C] e raio [CB], de modo que d(BC) = d(CB), isso! Vamos mostrar o ângulo [BAC], faz intersecção entre c2 e c3, vão aparecer os pontos [E] e [D], agora faz uma semireta com origem em [A] que passe por [D], faz o segmento [BC], marca [F] intersecção do segmento [BD] com a semireta [AD], isso! Faz agora uma circunferência c4 com centro em [F] e raio [FA], pronto! Agora faz intersecção entre c4 e a semireta [AD], veja que o ponto [H] coincide com [A], mas vamos querer só o ponto [G] que tá livre. Usando polígono faz um triângulo [BAC], e agora faz um triângulo [CGB]. Veja que d(AF) = d(GF) por c4. Sabemos também que c2 e c3 são congruentes por d(BC) = d(CB), como d(BE) = d(BC), e d(CE) = d(CB), temos que [BEC] é eqüilátero, do mesmo modo, [CDB] é eqüilátero, se um triângulo eqüilátero é também isósceles, a sua altura forma dois triângulos retângulos, além disto os triângulos [BAC] e [CGB] são congruentes, pois suas alturas são iguais e como lado oposto altura [BC] é comum aos dois triângulos, d(AB) = d(AC) e d(GB) = d(GC). Como temos que as diagonais de um losango formam perpendicularismo, temos que as alturas dos triângulos isósceles [BAC] e [CGB] fazem parte da bissetriz [AD] que divide o ângulo [BAC] ao 'meio'. Certo?".

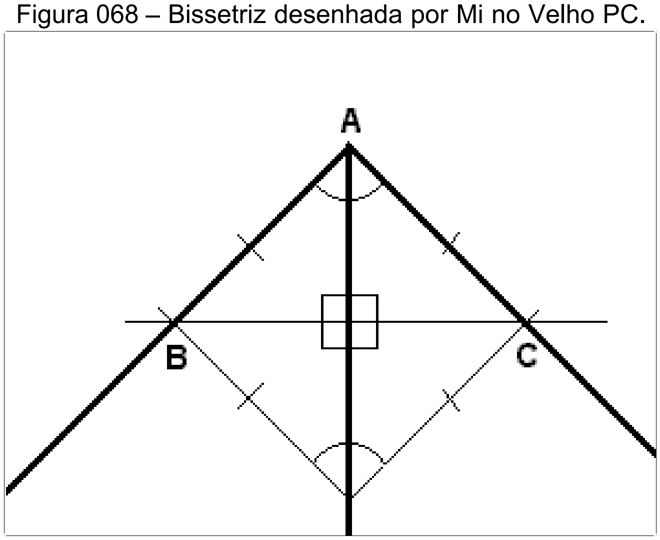
Militar avisa Professor que está na hora de finalizar aula. Professor pede para alunos salvar atividade e desligar computador.

Figura 067 – Bissetriz explicada por Mi.



Alunos questionam Mi, mas Mi apresentou seus argumentos. Pascal também questionou Mi. E Mi foi ao quadro branco e desenhou a figura 068 para apresentar explicação.

Figura 068 – Bissetriz desenhada por Mi no Velho PC.



Professor tem que finalizar aula devido gestão de tempo. Marcação de pontos fica assim: G1: 17 ptos; G2: 14 ptos; G3: 13 ptos.

Comentários Gerais: Alunos interagem com tranqüilidade, todos estão envolvidos nas atividades sobre bissetriz. Equipes ficam fragmentadas, alunos interagem sobre atividade uns ajudando os outros.

Pascal fica incomodado com barulho dos alunos, Professor lhe chama atenção sobre este fato justificando neles liberdade para desenvolver tarefas. Epsilon entende que a atividade implica na justificação matemática da construção e não somente na construção como resultado final. Professor interage pouco e alunos ajudam muito uns aos outros. Calor na sala incomoda as janelas são abertas e a iluminação atrapalha a filmagem. Alunos Pi e Delta preparam apresentação com fins de justificar-lhes com base em propriedades dos triângulos, no entanto, os pontos [B] e [C] podem ser manipulados livremente o que não lhes permite preservar a mesma distância em relação ao ponto [A], vértice do ângulo que se pretende 'dividir'. Intervenção do Professor faz com que Pi e Delta reformulem suas idéias.

Pascal interagem com Pi e Delta tentando definir bissetriz enquanto lugar geométrico. Professor poderia ter explorado mais esta atividade junto aos alunos Pi e Delta. Epsilon admite que G2 usou dica de Lambda que é de G3. Tentam argumentar sobre bissetriz com base nas idéias sobre losangos e suas propriedades. Alunos estão atentos a apresentação de G2. Professor faz intervenção no sentido de Epsilon e G2 conceitualizar sobre o fato que tornaria losangos quadriláteros com ângulos opostos com medidas iguais.

Mi surpreende Pascal, pois Pascal o percebia como um aluno sem muitas concepções definidas. Epsilon, Mi, Delta e Beta se destacam na realização de atividades. Mi fica tranqüilo ao ir ao quadro branco apresentar explicações. Gestão de tempo foi problema nesta aula.

Sessão 05 – Contextualização e sistematização:

[00h00 – 01h00] Atividades finais: Alunos Presentes: Beta, Gama, Epsilon, Eta, Teta, Lambda, Mi, Ni, Csi, Pi, Ro, Sigma. Ausentes: Alfa, Delta, Zeta. Ro e Sigma aparecem no último dia motivado por colegas. Equipe de pesquisadores: O Professor e um Bolsista PIBIC/CNPq. Está presente também Militar responsável pelo Laboratório de Informática do CMF.

O Professor comenta que pode ocorrer em aparecer poucas pessoas pois não há aula no CMF e é véspera de feriado.

É proposto pelo Professor que o pessoal pegue as atividades que estão por ser finalizadas para que as mesmas sejam solucionadas, mas não determina façam esta ou aquela atividade. Foi dado 30 minutos para fechamento de atividades.

[Gama]: “E aí Beta, será que consigo acompanhar as coisas hoje?”

[Beta]: “Teve muita coisa, mas acho que você tira de letra, mas o negócio de ter de provar que exige mesmo [...]”.

Os alunos interagem entre si com tranqüilidade.

[Professor]: “Vocês sabem o que é homotetia?”.

[Gama]: “É uma transformação geométrica!”.

[Professor]: “Mas o que ela faz?”.

[Epsilon]: “É semelhança!”.

[Professor]: “Uma semelhança pode ser homotética, mas nem sempre isso é verdadeiro, a homotetia transforma pontos colineares em pontos colineares a partir de um valor numérico que transforma [A] em [A’]”.

Professor faz relação entre homotetia e transferência de segmentos, alunos ficam em silêncio prestando muita atenção.

[Epsilon]: “Vixe, isso é legal, mas eu nunca pensei que poderíamos fazer operações com segmentos Beta!”

[Beta]: “É mesmo! É legal, mas eu nunca vi isto”.

A organização das equipes fica assim:

G1: Pi, Mi, Eta, Teta e Ro;

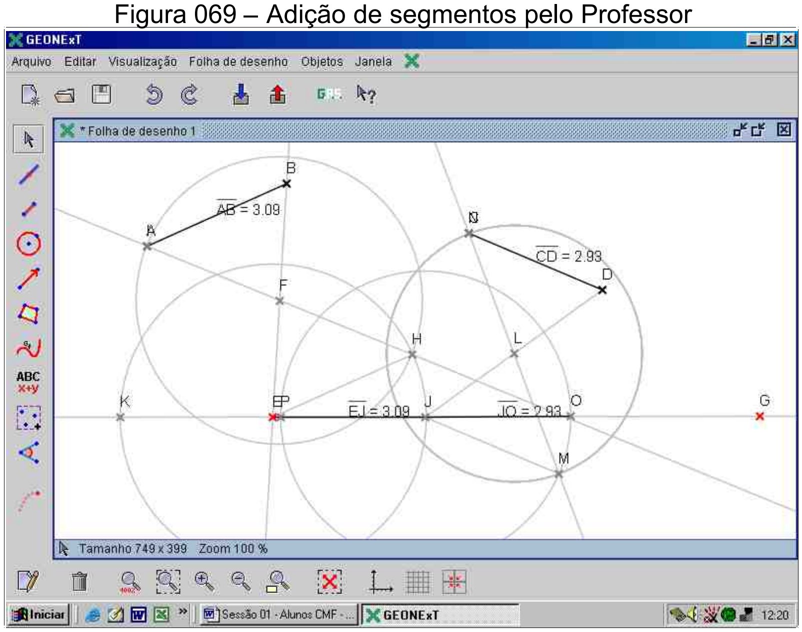
G2: Beta, Epsilon e Ni;

G3: Delta, Csi, Lambda e Gama.

Alunos de G1 ficam na fileira da frente, mas Eta, Teta e Ro ficam no computador frente-esquerda; Alunos de G2 ficam na fileira ao centro, sendo que Epsilon e Ni ficam juntos no computador centro-direita e Beta fica isolado no computador centro-esquerda. Ao fundo ficam Alunos G3: Delta, Csi, Lambda e Gama. Mas Gama vai trabalhar junto com Beta.

Professor vai ao quadro-branco e faz explicação breve sobre homotetia. Professor tenta mostrar que através das idéias sobre homotetia é possível que se efetue a ‘transferência de segmentos’ para que se faça a adição de segmentos distintos.

Figura 069 – Adição de segmentos pelo Professor



Professor fala sobre transformações geométricas. Menciona que um ponto [A] pode ser transformado em um ponto [A’], através de transformações como a translação e a rotação. Fala que homotetia também é uma transformação e diz que os alunos podem explorar estas idéias. Professor dá tempo para que alunos façam atividades.

[Professor]: “Quem já fez atividade 6? OK, vocês vão ter 20 min para preparar atividade, primeiro atividade 6, depois atividade 7”.

Mi faz leitura da atividade 7 (sobre polígonos regulares). Eta e Teta comemoram atividade que será realizada.

Professor comunica os alunos sobre erro presente no texto da atividade 6. O erro foi percebido pelo aluno Pi que chamou Professor para lhe avisar sobre a falha na escrita de uma frase.

Situação surpresa 017 – A soma dos ângulos internos de um triângulo superior a dois ângulos rasos

Mi e Pi desenvolvem atividade sobre soma dos ângulos internos de um triângulo. Fazem manipulação, usam calculadora do GeoNext e do Windows do *notebook* para efetuar a soma dos ângulos internos.

[Pi]: “Faz o seguinte, vamos pegar a calculadora e somar os ângulos”.

[Mi]: “Olhe, a soma dos ângulos internos deu 365,56 graus”.

[Pi]: “O que? Tá doido macho! Ou a gente errou ou esse computador é burro mesmo!”

[Mi]: “Vamos rever o que fizemos!”.

[Pi]: “Nem chama o Professor, esse negócio o povo tira o sarro [...]”.

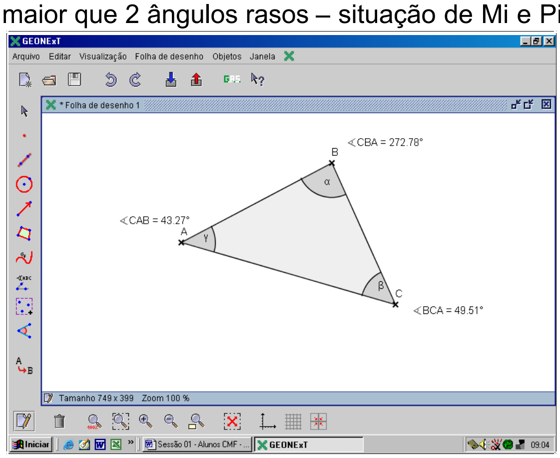
[Mi]: “Olha só! Lembra, se ir da direita para a esquerda é ângulo interno, da esquerda para a direita ângulo externo, eu errei neste ângulo aqui na hora de medir [...]”.

[Pi]: “Qual ângulo?”

[Mi]: “O do vértice [B], tá vendo!”

[Pi]: “Entendi!”.

Figura 070 – Soma dos ângulos internos de um triângulo maior que 2 ângulos rasos – situação de Mi e Pi.



Alunos realizam atividades e estão em silêncio. Há pouca interação entre os alunos. Os novatos e Gama ficam mais isolados. Mi e Pi discutem em voz baixa atividade que estão realizando. [

[Mi]: “A gente tem de provar, ele vai pedir isso! Vamos pensar mais nisso”.

Lambda e Ro discutem fatores relativos a soma dos ângulos internos de um triângulo. Epsilon vai atender Csi e Ni que lhe apresentam questionamentos sobre ângulos.

[Epsilon]: “Olha gente, temos que demonstrar mesmo, não podemos ficar confiando em medidas”.

O Professor orienta Gama sobre uso do comando “exibir ângulo” do GeoNext.

[Professor]: “Pessoal, um aviso. Nas equipes temos para G1: 17 ptos; G2: 14 ptos; G3: 13 ptos. Certo!”.

[Epsilon]: “Mas Professor temos 5 atividades ainda por fazer [...]”.

[Professor]: “Vamos fazer o que é possível ser feito”.

[Epsilon]: “Certo!”.

[Professor]: “Para que todos ganhem faremos assim, ao final todas as equipes devem ter a mesma quantidade de pontos, ou seja, todo mundo ganha, ou todo mundo perde, em outras palavras, a única forma de ganhar e todos ajudando todos. Cada atividade vai valer 13 pontos. Certo! Então vamos lá, daqui a pouco chamo uma das equipes para apresentar [...]”.

Os alunos realizam atividade, mas interagem pouco. A atividade em voga é sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Mi e Pi gesticulam bastante e parecem bem confortáveis em discutir atividades.

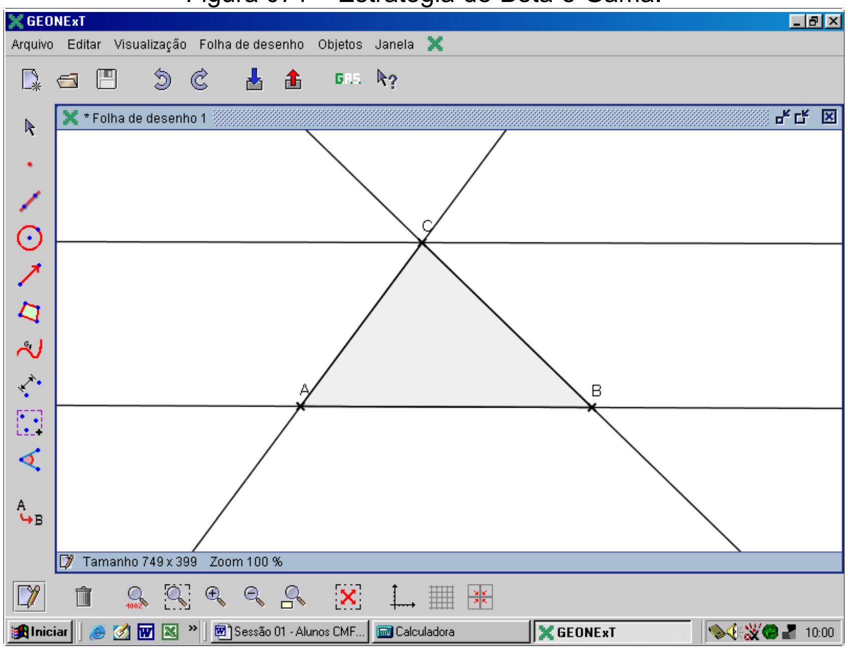
Professor quase não intervem [00h34].

Posição de alunos na sala está um pouco diferente. Notebook: (Mi e Pi); Computadores Frente: (Direita: Csi e Ni / Esquerda: Epsilon e Delta); Computadores Meio: (Direita: Beta e Gama / Esquerda: Eta e Teta); Computador Fundo (Esquerda: Lambda e Ro). Alunos interagem aos poucos entre si, Lambda orienta Ro e explica suas idéias para Ro sobre uma das atividades.

Eta e Teta conversam também sobre atividade.

Na tela de Beta e Gama é possível ver estratégia para averiguação da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Figura 071 – Estratégia de Beta e Gama.



[Professor]: "Pensem que agora ao invés de ser 3 equipes, vocês funcionam como uma equipe só".

Os alunos conversam entre si para ver como podem estabelecer estratégias novas.

[Pi]: "Pessoal, vamos ter de nos unir agora, o problema é se a pontuação que a gente tiver for fracionária ou uma dizima periódica, vamos tentar nos organizar para apresentar e conseguir os pontos corretos".

[Epsilon]: "É isso ai, vamos nos ajudar!".

[Professor]: "Vamos começar! [00h53]".

<u>**Situação surpresa 018 – A soma dos ângulos internos de um triângulo – Limitação numérica**</u>

[Mi]: "Pessoal, vamos falar sobre a atividade da soma dos ângulos internos de um triângulo, para iniciar, Pi vai mostrar o triângulo [ABC] que fizemos com os ângulos já medidos, se somarmos veremos que é 180° graus a soma dos ângulos internos [...]".

[Professor]: "Certo, vamos verificar. Pegue a medida destes ângulos e some, use a calculadora do Windows aí do *notebook* [...]".

[Mi]: "Mas Professor, não terminamos ainda [...]".

[Professor]: "Não custa conferir, vamos dar uma olhadinha [...]".

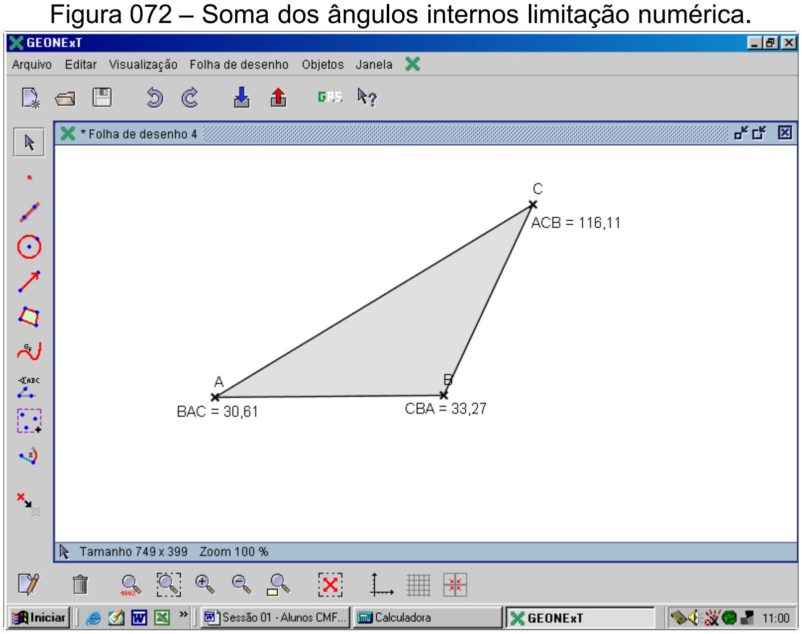
[Mi]: "Pi, vai lá vamos somar os ângulos". Silêncio durante verificação.

[Pi]: "O ângulo [A] = 30,61° , [B] = 116,11° e [C] = 33,27° somando temos: 179,99° . Epa!".

[Professor]: "Não é 179,99 graus não é 180 graus. Desafio pessoal: Porque a soma dos ângulos internos deste triângulo não é 180 graus?".

[Mi]: "No computador não dá pra ver os segundos, logo a medida que temos é que nem numa calculadora [...]".

Figura 072 – Soma dos ângulos internos limitação numérica.



[Professor]: "Você tá duvidando do computador?"

[Mi]: "Sim, é um problema do computador".

[Epsilon]: "É uma limitação!".

[Gama]: “Mi quer dizer que o computador não consegue mostrar as casas decimais todinhas, é uma aproximação!”.

[Professor]: “Certo, mas se não posso confiar nisso como vou saber se a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus?”

[Teta]: “É preciso demonstrar!”.

Comentários: Alunos tentam fazer atividades que envolvem construções algébricas, mas pouco se sabe sobre homotetia e a confundem com semelhança. Gama está meio perdido diante das atividades que foram desenvolvidas pela turma em sua ausência. Eta e Teta estão mais animadas no desenvolvimento de suas atividades. Professor acha que alunos compreendem perfeitamente a idéia de adição de segmentos, mas fala de Epsilon e Beta revela que isto não é bem deste modo. Professor apresenta explicação pq um dos alunos solicitou esta explicação, só não consegui identificar qual aluno fez essa solicitação. Professor fala sobre transformações geométricas ainda, alunos haviam o questionado sobre translação anteriormente. Pi e Mi ao tentar efetuar a soma dos ângulos internos de um triângulo se deparam com um problema conceitual e de manipulação e obtém como resultado 365,56 graus. Percebem o absurdo que há e fazem a averiguação sem chamar o Professor.

Pi e Mi sentem vergonha do erro e tem medo que as pessoas possam tirar o sarro desta situação. Falha do Professor em apresentar o erro como um processo inerente à matemática?

No GeoNext o ângulo interno é obtido pelo sentido horário, e o externo pelo anti-horário. Usar este recurso de manipulação introduz um invariante novo matemático ou não?

Estratégia de Beta e Gama é uma idéia comum para várias equipes. Medição de ângulo com ‘sentido horário e anti-horário’ gera confusão entre os alunos no GeoNext. Gama, Csi e Teta também perguntam sobre problemas de medição. Interação entre alunos aumenta. Teta, Eta, Lambda e Ro estão mais contextualizadas aos problemas propostos e discutem mais sobre atividades. Lambda ensina e orienta Ro no GeoNext. Teta e Eta sempre se dirigem a Epsilon para averiguar idéias, mas trabalham mais à vontade. Competição passa a ter viés cooperativo ao invés de competitivo.

Pi e Mi ao apresentar suas justificações sofrem intervenção do Professor que gera uma situação surpresa sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo – surge uma limitação numérica. Alunos chegam por conta própria a conclusão de que só saberão se a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus mediante demonstração. Alunos de várias equipes ficam mais a vontade para discutir situações. Pi , Mi e Epsilon se mostram mais familiarizados com atividades e questionamentos. Teta participa de uma discussão pela primeira vez no curso. Atividade da soma dos ângulos internos, adaptada para *GeoNext* já foi realizada no *Cabri Géomètre*.

[01h00 – 02h00] Finalizando o curso: Professor pede aos alunos que sejam mais precisos no uso da linguagem matemática, orienta alunos à chamar de lado as semiretas que formam um ângulo e fala algo sobre linha poligonal aberta e fechada. Professor fala aos alunos primeiro e depois lhe passa a fala. Pi vai a frente explicar atividade desenvolvida enquanto Mi fica ao computador efetuando manipulações.

[Pi]: “Temos este triângulo [ABC], com os ângulos [CAB], [ABC] e [BCA]. Estendendo os segmentos [AB], [BC] e [CA] deste triângulo obtemos retas que se prolongam, e fazendo por [B] uma reta paralela a [AC], bem como, fazendo por [A] uma reta paralela a [CB], teremos um paralelogramo [ADBC]. O ângulo [ABC] é correspondente ao ângulo [BAD], agora se colocar um ponto [E] na reta que passa por [AB], de tal modo que este ponto esteja à esquerda de [A], terei um ângulo [DAE] que é correspondente ao ângulo [BCA]. Bem já mostrei que os ângulos [ABC] = [BAD]; [DAE] = [BCA]. Considerando que:

[a] = [CAB];

[b] = [ABC] = [BAD];

[c] = [DAE] = [BCA].

Temos: [CAB]+[BAD]+[DAE]= 180 graus. Ou seja, [a]+[b]+[c] = 180 graus que é um ângulo raso ou ainda dois ângulos retos. Logo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é dois ângulos retos que é um ângulo raso que é 180 graus. É isso!”.

[Professor]: “Dúvidas?”.

[Beta]: “O que garantiria que [ADBC] é um paralelogramo?”.

[Mi]: “Passe uma reta pelo ponto médio de [AB] e pelo ponto [C], se esta reta conter uma diagonal [DC] temos um paralelogramo”.

[Epsilon]: “De onde você tirou isso?”.

[Professor]: “Lembre Epsilon que as diagonais de um paralelogramo se encontram no ponto médio [...]”.

Figura 073 – Soma dos ângulos internos (v2) G1.

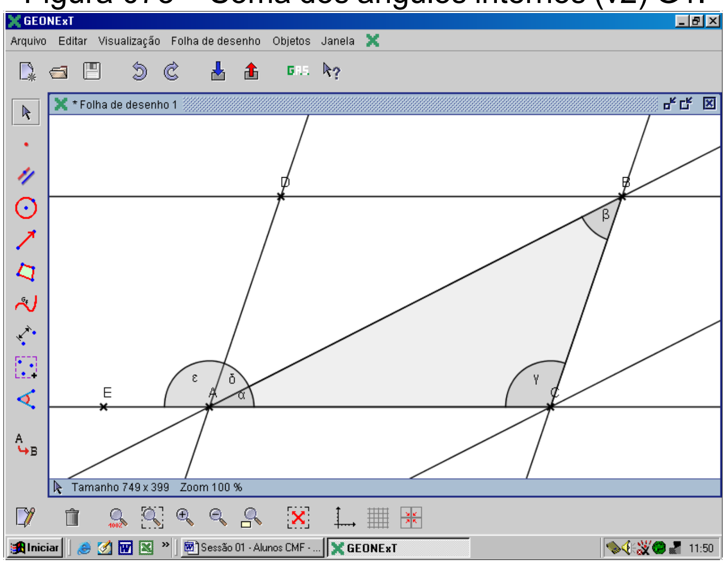
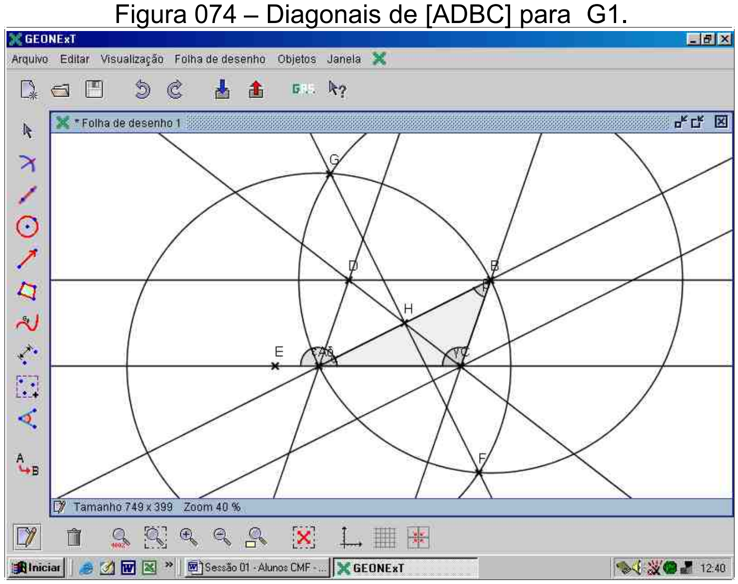


Figura 074 – Diagonais de [ADBC] para G1.



[Professor]: “Vamos para atividade que vocês desenvolveram sobre o hexágono inscrito em uma circunferência”.

[Teta]: “Eu fiz a atividade, mas queria que Mi falasse sobre ela [...]”.

[Mi]: “Bem, primeiro, vamos fizemos uma circunferência c1 com centro [A] e raio [AB], depois fazemos uma reta [AB], agora uma circunferência c2 com centro [B] e raio [BA], agora marco [D] e [C] como intersecções entre c1 e c2. Agora faço [E] a intersecção entre c1 e a reta [AB] que não é o ponto [B], faço agora circunferência c3 com centro em [E] e raio [EA], marco intersecção entre c1 e c3 e vão aparecer os pontos [G] e [H] e usando comando ‘Polígono’ do GeoNext, faço o hexágono [BDGEHC]”.

[Teta]: “É um hexágono regular”.

[Epsilon]: “Porque é um hexágono regular?”.

[Eta]: “Os lados e os ângulos são iguais [...]”.

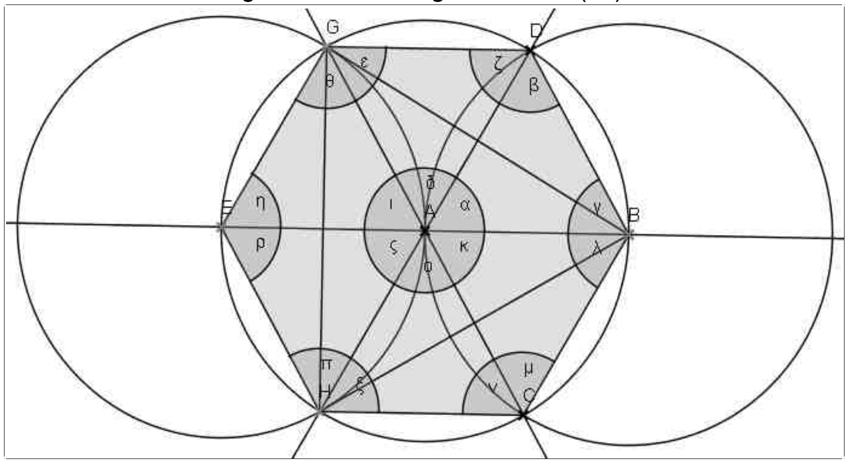
[Pi]: “Quer dizer congruentes”.

[Mi]: “Bem a gente consegue colocar ali um triângulo eqüilátero pelos pontos [C], [D] e [E] ”.

[Beta]: “Sim, e daí como você justifica o fato deste hexágono ser regular, vc tem de mostrar que os lados e os ângulos são congruentes”.

[Mi]: “Vamos fazer uma reta por [HD] e outra reta por [CG], bem temos agora seis triângulos eqüiláteros, por exemplo, temos que [ABD] e [ABC] foram obtidos pelas intersecções entre c1 e c2 e temos que raio c1 = raio c2, sendo assim, temos que [AB] = [AD] = [DB], pois todos são raios ou de c1 ou de c2. Pelo mesmo motivo, [ABC] é eqüilátero, e pelo mesmo motivo os outros triângulos: [DAG], [GAE], [EAH] e [HAC] são eqüiláteros. Como os triângulos eqüiláteros tem lados congruentes e ângulos congruentes, se a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus, cada ângulo de um eqüilátero é 60 graus, sendo assim, c2 e c3 que tem a mesma medida de raio de c1, dividem c1 em 6 partes iguais de 60 graus nas suas intersecções. E os ângulos internos deste hexágono, cada um deles tem 120 graus. Como os lados são raios são congruentes e é isso”.

Figura 075 – Hexágono de G1 (v3).



Professor dá um breve intervalo.

Após intervalo, Professor chama alunos para finalizar as atividades propostas.

[Gama]: “Não entendi naquela hora porque os triângulos são eqüiláteros, dava pra explicar Mi?”.

[Mi]: “Professor vou fazer no quadro negro [...]”.

Mi explica aos alunos que os triângulos são eqüiláteros pelo caso LLL de congruência de triângulos, pois por c1, c2 e c3 os raios são equivalentes. Pascal menciona estar surpreso com a participação dos alunos.

O Professor dá pontos para as equipes G1, G2 e G3 pelos questionamentos apresentados. [fita de vídeo termina – continua em outra fita].

Equipe G2 vai apresentar a construção de um quadrado inscrito em uma circunferência.

[Epsilon]: “Fiz uma circunferência c1 com centro em [A] e raio [AB], fizemos uma reta [AB], por [A] fizemos uma perpendicular. Agora usando comando ‘polígono’ fizemos um quadrado que passa por [B], [C], [F] e [D], sendo [B] e [F] intersecções entre a reta [BF] e c1, e [C] e [D] intersecção entre a reta [CD] e c1”. [Mi]: “Mas porque o quadrilátero [BCFD] é um quadrado?”.

[Epsilon]: “Boa pergunta! Isso acontece porque as diagonais de um quadrado formam um ângulo reto”.

[Professor]: “Mas aí recaímos sobre os velhos problemas é quadrado pq sua diagonal é assim e suas diagonais são assim pq é um quadrado, não é?”.

[Epsilon]: “Na realidade, como as distâncias d(AB) = d(AC) = d(AF) = d(AD), as diagonais [CD] e [FB] tem a mesma medida, portanto, d(CB) = d(CF) = d(FD) = d(DB), portanto é um quadrado pelos lados iguais e pelos ângulos iguais”.

[Professor]: “Infelizmente o tempo nosso acabou”.

Pascal chega ao final da sessão.

Ao final Professor dá pontos para equipe 2 e fala para que as equipes dividam de modo igualitário os respectivos pontos. Professor Militar do CMF finaliza aula fazendo um breve discurso sobre a relevância da pesquisa e do Convênio do CMF. Professor agradece aos alunos e ao Pascal, agradece também aos bolsistas IC/CNPq. Aula e filmagem terminam 01h55 min.

Alunos se reúnem para distribuir pontos, todas as equipes acabam com 32 pontos após divisão de pontos. Alunos agradecem ao Professor pelo curso, Professor Militar faz discurso final sobre atividade realizada. São entregues medalhas aos alunos das 3 equipes. Pascal comenta que se surpreendeu com a participação de alunos. Aula e Filmagem terminam 01h55min

Comentários Gerais: Equipe G1, por Mi e Pi, demonstra com argumentos matemáticos a soma dos ângulos internos. G1 resiste as refutações de G2 que foi feito por Epsilon e Beta. O tempo é um dos problemas para esta aula. As situações surpresa conseguiram evidenciar aos alunos necessidade em se trabalhar demonstrações matemáticas. Alunos adotam pensamento rigoroso, e se observa pequena discussão conceptual entre os alunos que estão assistindo apresentação. G1 apresenta atividade do hexágono que foi desenvolvido por Teta e Eta, mas apresentado por Mi. Teta e Eta participam e até discutem atividade fato que nunca havia ocorrido no curso. Epsilon, Beta, Mi e Pi são extremamente participativos e fazem questão da argumentação matemática.

Mi usa saídas criativas para suas justificativas. O tempo é o maior problema para o término desta sessão. As argumentações se tornam mais elaboradas a cada sessão. Alunos interagem como se fossem um único grupo.

Epsilon apresenta quadrado inscrito em circunferência, mas tempo é restrito para finalizar atividade. Alunos lamentam final do curso e perguntam sobre uma segunda versão do mesmo. Pascal ficou surpreendido com alunos Mi , Pi, Teta e Eta pelas suas apresentações. O tempo de aula foi um problema para finalização das atividades em curso. Atividades com situações surpresa podem motivar estudantes se houver mediação docente adequada.

Em algumas circunstâncias alunos sentem necessidade em, literalmente, sair do Novo PC para Velho PC. Em muitos casos Professor sente dificuldades em perceber situações surpresa que possam ser significativas. Metareflexão e reflexão-na-ação se relacionam diretamente com ação mediativa da passagem do Novo PC ao Velho PC. Trabalhar com demonstrações matemáticas exige estudo por parte do Professor e flexibilidade em pensamentos e ações. Alunos tidos como pouco competentes em aula podem se revelar 'excelentes matemáticos' devido capacidade criativa.

Modelo escolar tradicional exige conteúdos matemáticos e não as práticas investigativas matemáticas. Apresentação de demonstrações exige um modelo didaticamente explicável.

O Professor deve ter conhecimentos formados sobre o saber a ensinar, mas também sobre a negociação e o processo monitor.

Seqüências didáticas mal realizadas e materiais didáticos equivocados podem induzir invariantes novos através de criações didáticas novas com características lógico-dedutivas e/ou físicas de tal modo que se possa obter resultados indesejados.

Investigações matemáticas com uso de ferramentas computacionais pode ser algo significativo e rico em termos conceptuais e didáticos ao aluno e ao Professor.

Após a apresentação dos dados da pesquisa, pretendo a seguir discutir os dados apresentados.

Capítulo 03 – Discussão: Passagem do Novo PC ao Velho PC

As situações supresa, como foi visto anteriomente, constituem o núcleo das idéias sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC, e estas por sua vez se originam das limitações computacionais e/ou das ações instrumentais (cf. 97 – 117).

No transcorrer desta pesquisa, tanto no mestrado quanto no doutorado, tive oportunidade em catalogar diversas situações surpresa, no entanto, os casos que interessam para investigação, ocorreram durante a formação nas fases 02, 03 e 04, e estas foram apresentadas na transcrição dos dados das respectivas sessões (cf. 151 – 283).

Ao todo surgiram 18 situações surpresa espontaneamente durante o curso, algumas delas para responder questionamentos dos alunos: tratam-se de exemplos e contra-exemplos do Professor. E outras situações surgiram a partir dos alunos.

As situações surpresa que ocorreram nas formações em “sala-de-aula computadorizada”, pressupõem possibilidades na metodologia didática da passagem do Novo PC ao Velho PC, em um contexto real de ensino-aprendizagem tanto na formação docente como discente, e a partir das reflexões iniciais presentes nesta tese, pretendo abrir caminho para que outros investigadores averiguem e detalhem outros fenômenos didáticos que possam surgir com base na aplicação das idéias presentes.

No quadro 003 a seguir, procurei tabular algumas informações sobre as situações surpresa coletas em formação docente e discente em 2004. E a partir destas, e dos dados apresentados acima, farei uma discussão sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC.

Quadro 003 – Analise sobre situações surpresa em seus aspectos.

Situação Surpresa	Formação (Sessão)	Ação Instrumental		Limitação			Outros Casos	Origem	Socialização	*Software* em uso
		A	B	x	y	z				
SS001	CMF01-P	1	0	0	0	0	0	Professor	1	Cabri
SS002	CMF02-P	1	0	0	0	1	0	Professor	1	Cabri
SS003	CMF02-P	0	1	0	1	0	0	Aluno	1	Cabri
SS004	CMF03-P	0	1	0	0	1	0	Aluno	1	Cabri
SS005	CMF04-P	1	0	1	0	0	0	Professor	1	Cabri
SS006	CMM01	0	1	0	0	0	0	Aluno	0	GeoNext
SS007	CMM02	0	1	0	1	0	0	Aluno	1	GeoNext
SS008	CMM03	0	1	0	1	0	0	Aluno	0	GeoNext/Cabri
SS009	CMM03	0	1	0	0	0	0	Aluno	0	GeoNext
SS010	CMM03	1	0	0	0	0	0	Aluno	1	GeoNext
SS011	CMM04	1	0	0	1	0	0	Aluno	0	GeoNext
SS012	CMM08	1	0	0	0	1	0	Aluno	1	GeoNext
SS013	CMM08	1	0	0	1	0	0	Aluno	1	Logo/Cabri
SS014	CMF01-A	0	1	0	1	0	0	Aluno	1	GeoNext
SS015	CMF03-A	0	0	1	0	0	0	Aluno	1	GeoNext
SS016	CMF04-A	0	1	0	1	0	0	Aluno	1	GeoNext
SS017	CMF05-A	0	1	0	1	0	0	Aluno	0	GeoNext
SS018	CMF05-A	0	0	0	0	1	0	Aluno	1	GeoNext
Totais		7	9	2	8	4	0		13	

Codificação	
SS000 – Situação surpresa 000 CMF00-P – Formação de Professores do CMF - 00 CMF00-A – Formação de alunos do CMF – 00 CMM00 – Formação de alunos do Monteiro Moraes 00 1 – Sim 0 – Não **A** – Ação intrumental intencional **B** – Ação instrumental não-intencional **x** – Limitação de manipulação **y** – Limitação por divergências conceituais **z** – Limitação computacional ou *Bug* (hard/soft)	Origem das situações surpresa: 3 Professor , 15 Aluno. Em qual Software ocorreram as situações surpresa: 13 GeoNext, 6 Cabri, 1 Logo Quantidade de situações surpresa por curso: 05 Formação professores CMF; 08 Formação alunos MMoraes; 05 Formação alunos CMF.

Durante o processo de formação docente e discente foram catalogadas 18 situações surpresa. Sendo 05 situações oriundas na formação docente e 13 na formação discente. Respectivamente, se obteve:

i) Fase 02: Formação docente no CMF – 05 situações surpresa;

ii) Fase 03: Formação discente no Monteiro de Moraes – 08 situações surpresa;

iii) Fase 04: Formação discente no CMF – 05 situações surpresa.

Destas situações surpresa, 03 tiveram suas origens nas ações do Professor (SS001, SS002 e SS004) e 15 são decorrentes das realizações dos estudantes.

Sobre as situações surpresa oriundas das ações do professor, todas foram realizadas para apresentação de exemplos e contra-exemplos juntos aos alunos-professores, enquanto ação-instrumental intencional docente na fase 02. Duas situações surpresa tiveram como origem ação-instrumental e também em limitações correspondentes a problemas de manipulação e *bugs* computacionais e uma delas foi baseada somente na ação-instrumental.

Quanto às situações surpresa com origem nas ações dos alunos, 4 são ações-intrumentais intencionais, mas 9 são ações-instrumentais não intencionais.

Ao todo são 16 ações-instrumentais, sendo que 12 delas estão associados à algum tipo de limitação:

I – Uma ação-instrumental intencional se relaciona com uma limitação em manipulação (SS005);

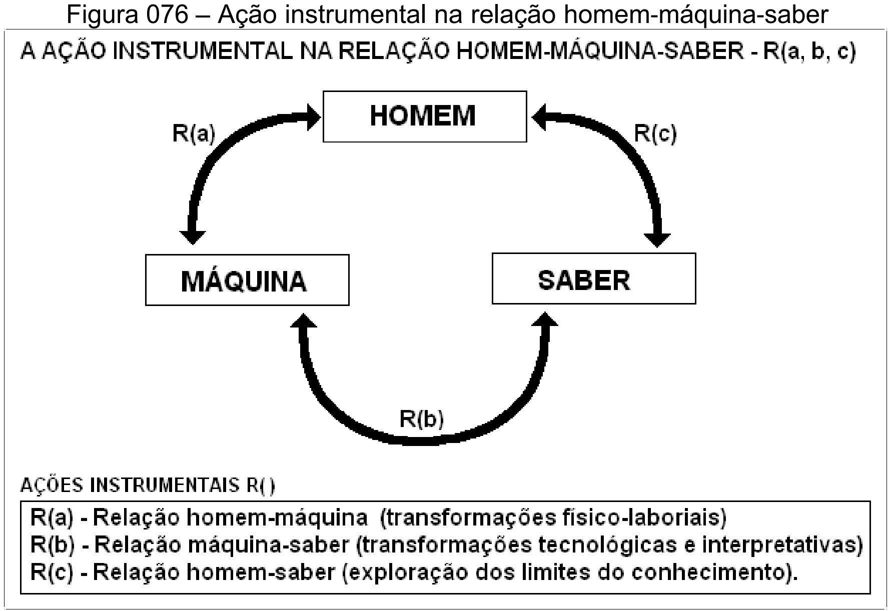
II – Oito ações-instrumentais se relacionam com limitações relativas à divergências conceptuais em *software* educativo, sendo 2 ações-instrumentais intencionais (SS011, SS013), e 6 ações-instrumentais não-intencionais (SS003, SS007, SS008, SS014, SS016, SS017);

III – Três ações-instrumentais se relacionam com limitações computacionais de *hardware* ou *software* (*Bug*), sendo destas duas ações-instrumentais intencionais (SS002, SS012), e uma constitui uma ação-instrumental não-intencional (SS004).

Ao todo, foram 16 situações que tiveram em sua geração elementos de ação-instrumental e 14 tiveram em sua geração as limitações já mencionadas. E 12 destas situações envolvem em sua gênese a ação-instrumental e as limitações descritas.

Nesta relação entre ação-instrumental, intencional ou não, e as limitações sejam elas sobre problemas de manipulação, divergências conceptuais ou problemas computacionais. Pode-se compreender que na interação homem-máquina-saber, se produz a construção de significações novas que reconstrõem a relação epistemológica do saber que se quer aprender e ou ensinar. Diante de manipulações, animações e das possibilidades de simulação, os usuários docentes ou discentes, através da ação-instrumental recriam conhecimentos e saberes que ao longo do tempo podem constituir novos saberes.

Figura 076 – Ação instrumental na relação homem-máquina-saber



No entanto, diante das limitações humanas, tecnológicas e epistemológicas a ação-instrumental, pode viabilizar mediações culturais que podem resultar no aprimoramento da relação homem-máquina-saber, ou ainda, podem criar novos problemas que podem inviabilizar mais ainda tal relação. Neste sentido, ao se tratar do ensino de matemática, é preciso considerar a natureza desta ciência o seu método de investigação, bem como, considerar o profissional-pesquisador que faz uso deste método. Logo, ensinar matemática não consiste somente em exercer o domínio ferramental desta ciência sobre o aluno, mas sim, lhe mostrar possibilidades novas através da postura de um pesquisador.

Por exemplo, na situação surpresa 013 (SS013), houve a má-formação das concepções sobre a circunferência no LOGO, e a partir disto, intencionalmente, a aluna He desenvolveu no *Cabri Géomètre II* sua pseudocircunferência, enquanto, contra-exemplo para definção sobre a concepção matemática sobre a circunferência.

Nesta situação surpresa, pela mediação do Professor, foi possível retomar as concepções mal trabalhadas, questionando, inclusive os limites da tecnologia com vários alunos. No entanto, na postura docente o Professor e o aluno já tinham incorporado a passagem do Novo PC ao Velho PC, e o processo de validação por demonstração e as justificativas matemáticas não permitiram que essa construção errônea passasse despercebido, de tal modo, que a mesma foi útil para discutir a relação entre tecnologia e saber matemático com os alunos.

Em suma, na intencionalidade em elaborar um mecânismo que fosse contra-exemplo para à concepção sobre circunferência, He fez uma transposição instrumental entre *softwares* distintos, cujas propostas epistemológicas e didáticas diferem, fez uma recontextualização do saber enunciado no *software* e na formação LOGO, para criar seu contra-exemplo no *Cabri Géomètre II*. Ou seja, na relação homem-máquina-conhecimento, He usou as limitações relativas as divergências conceptuais em *software* educativo, gerando uma ação instrumental que criou um novo conhecimento com perspectivas matemáticas e didáticas, no entanto, a questão está compreender como isto pode ser usado e em qual perspectiva pedagógico-didático. Pois mesmo ao se tratar de um contra-exemplo errôneo, este conhecimento pôde ser usado no ensino assistido por computador, e poderia vir a ser uma nova situação desafio, ou ainda, um elemento problematizador em aula.

Um outro aspecto que foi observado, de 18 situações surpresa, somente 13 foram socializadas. Ou seja, 5 situações surpresa, por algum motivo, não chegam à ser objeto de estudo do grupo, e seriam elementos potenciais para se gerar a passagem do Novo PC ao Velho PC. Mas além deste aspecto, uma reflexão sobre este fator deve ser levada em conta. Destas 5 situações surpresa, faltou a percepção docente, sobre a potencialidade didático-epistemológico das situações no processo de formação.

Ou seja, às vezes ao professor cabe manter uma espécie de vigilância meta-reflexiva e metacognitva para compreender a relação homem-máquina-saber no ensino assistido por computador. No entanto, problemas como gestão de tempo, cumprimento da programação escolar e até mesmo a postura de "professor-gerente" ao invés do professor-pesquisador. Faz com que o docente deixe de olhar o processo de formação da perspectiva do estudante e do saber a ensinar. E na passagem do Novo PC ao Velho PC, ao deixar de lado esse modo de olhar, se pode estar pendendo oportunidades didáticas.

Outro dado relevante, foi que *GeoNext* foi utilizado em 13 das 18 situações surpresa, o *Cabri Géomètre* foi usado em 6 das 18 situações, e o LOGO foi usado em uma situação. No entanto, somente o *Cabri* foi usado em uma situação com o LOGO, e em outra com *GeoNext*. O uso do *GeoNext* em várias sessões se deve ao fato deste recurso ser multiplataforma, e na fase 04, como no CMF houve migração *Windows* para *Linux*, ele permitiu que o grupo de pesquisa e os alunos do curso trabalhassem com tranqüilidade.

Tendo uma prévia sobre os dados relativos a situações surpresa coletadas, procurarei discutir resultados e aplicações da passagem do Novo PC ao Velho PC nas relações de ensino-aprendizagem com uso de tecnologias computacionais no ensino de matemática (ver quadro 003).

03.1 – Sobre os *softwares* educativos no ensino de matemática

Uma definição que está sendo desenvolvida sobre *software* educativo, no Laboratório Multimeios FACED/UFC, consiste em dizer que estes são programas de computador que devem oferecem condições e possibilidades aos professores para o desenvolvimento de atividades didáticas, junto aos estudantes em situações de estudo e formação. Ou seja, em um *software* considerado educativo estaria implícito:

a) <u>Uma proposta pedagógica de formação</u>: Que constituem os referenciais teórico-metodológicos da área educacional;
b) <u>Um saber a ensinar</u>: Que constitui conteúdos do saber acadêmico, selecionados com objetivos curriculares específicos;

c) Estruturas de mediação: São formas de mediação cognitiva e cultural através de artefatos que visam contextualizar, e realizar a transposição didática das idéias essenciais sobre o saber a ensinar.

Neste aspecto, um professor experiente e bem formado, que conhece bem os saberes acadêmicos e curriculares, bem como, os recursos de que dispõe em tecnologias computacionais, pode se apropriar de um *software* que não seja necessariamente educativo, e assim desenvolver uma proposta para realização de uma seqüência de ensino devidamente adequada às necessidades dos seus alunos frente o saber a ensinar, considerando a recontextualização de certos artefatos para adequação didática dos objetivos docentes.

Por outro lado, um engenheiro pode usar um *software* educativo que lhe permita trabalhar com formas geométricas, para elaboração de desenhos de peças automotivas. Portanto, entender o que é um *software* educativo depende de uma análise que considere o ponto de vista daqueles que trabalham na elaboração destes programas, bem como, compreender a dinâmica do desenvolvimento de atividades didáticas por parte dos professores, no momento da formação docente-discente no ambiente escolar.

O que ocorre de fato, é que alguns dos *softwares* educativos de qualidade, que hoje estão no mercado, foram desenvolvidos por grupos de pesquisadores engajados na construção de técnicas de programação avançadas, com base no processo de experimentação e observação das ações de professores e estudantes em aula, nos diversos ambientes escolares de formação docente-discente. Mas nem sempre foi deste modo, visto que muitos dos *softwares* educativos antigos foram desenvolvidos por programadores que desconsideravam os aspectos educacionais, valorizando os aspectos técnicos e estéticos.

Devido à falta de formação educacional, os programadores antigos tendiam a apresentar suas crenças sobre a relação ensino-aprendizagem com base em noções do senso-comum sobre o comportamento humano. Neste sentido, se pode compreender que o conjunto de concepções educacionais das pessoas que desenvolvem um *software* educativo, em relação ao ensino-aprendizagem, constitui fatores que determinam o caráter do produto, com respeito à manipulação e interação, no entanto, as ações e o uso que os docentes fazem de um *software* no processo de formação, é o que confere uma caracterização educacional deste recurso enquanto *software* educativo.

Tomando como base a definição apresentada sobre *software* educativo, atualmente, no Laboratório Multimeios/FACED-UFC, se considera o questionamento sobre os aspectos relevantes na construção de *software* educativo de qualidade. Neste sentido, algumas concepções com base em autores como Silva (2002: p.153-195) que discute e propõem critérios ergopedagógicos para avaliação de produtos educacionais informatizados, e a experiência que se têm obtido no desenvolvimento de cursos de formação assistida por computador em áreas como matemática, biologia e física, e com base nas experiências de elaboração de *software* educativo, principalmente, nos projetos GeoMeios, BioMeios e Tele-Ambiente[32], considero cinco aspectos essenciais para compreender o que pode caracterizar o *software* educativo de qualidade:

i) <u>Aspectos epistemológicos:</u> São fatores relacionados ao saber acadêmico, e os conteúdos que se pretende ensinar. Neste campo de estudos, em relação ao *software* educativo, são considerados fatores como: o saber a ensinar, a história do saber a ensinar, a transposição didática e computacional, possibilidades de validação do saber, linguagem acadêmico-científica entre outros;

ii) <u>Aspectos pedagógicos:</u> São fatores educacionais, relativos ao favorecimento do processo de ensino-aprendizagem, com base, principalmente, em concepções de áreas como: formação docente-discente, didática e psicologia da

[32] Projetos financiados pelo CNPq.

aprendizagem. Campos de estudo nestes aspectos são: motivação, participação, interação, colaboração entre outros fatores (*in* SILVA 2002: p. 165-188);

iii) Aspectos ergonômicos: São fatores que envolvem concepções sobre a adequação homem-máquina-trabalho. Como em termos educacionais, o trabalho, em certo sentido, corresponde ao estudo, ou seja, trata-se de uma ação sobre conhecimentos e saberes, se pode conceber aspectos ergonômicos em *software* educativo como adequação entre homem-computador-conhecimento. Neste caso, questões consideradas são: usabilidade, utilidade, carga de trabalho, gestão de erros entre outros fatores (*in* SILVA 2002: p. 153-164);

iv) Aspectos comunicacionais: São fatores que visam o bom aproveitamento das estruturas de mídia para favorecer a comunicação adequada das idéias implícitas ao *software* educativo. Os elementos principais de estudo desta área são: Documentação, material de apóio, navegação, organização de informação, grafismo (*in* SILVA 2002: p. 187-195);

v) Aspectos logístico-tecnológicos: São os fatores que consideram problemas de gestão e desenvolvimento do *software* educativo. Alguns dos elementos desta discussão são: recursos humanos e materiais, atendimento público, processo de distribuição, atualização, formação de usuários para o uso do recurso, documentação do código fonte, patentes, licensas entre outros fatores.

Destes aspectos para compreensão do desenvolvimento de *software* educativo, as questões ergonômicas, pedagógicas e comunicacionais, são baseadas em Silva (2002), no entanto, quanto os critérios epistemológicos e logístico-tecnológicos estão sendo construídos no Laboratório Multimeios FACED/UFC, para atender necessidades do desenvolvimento em *software* educativo considerando um saber a ensinar.

Uma das necesssidades que percebo, na atualidade, é que há uma falta de compreensão dos desenvolvedores sobre os aspectos logísticos e epistemológicos principalmente.

No desenvolvimento do GeoMeios, um *software* de geometria dinâmica, percebi que um dos maiores problemas estava em adequar as concepções matemáticas que se pretendia ensinar, mediante limitações computacionais existentes. Para tanto, se tornava um questionamento permanente procurar compreender em termos epistemológicos o saber a ensinar que o programa procurava favorecer.

Um outro questionamento, consistia em favorecer através da manipulação, uma ação instrumental que permitisse ao estudante compreender, em termos intuitivos, algumas concepções matemáticas através de mediações que viabilizassem o conhecer-na-ação enquanto construções mentais que levam este à uma estruturação prévia do saber a ensinar. No entanto, ao desenvolver o GeoMeios, foi possível compreender que se tornava cada vez mais necessário a fundamentação em construções geométricas, mas considerando a gênese histórica deste tipo de saber ao longo dos séculos. E ao compreender mais o saber a ensinar do *software*, mais se percebia sobre as próprias limitações computacionais existentes na passagem do Novo PC ao Velho PC.

Quanto os aspectos logísticos, estes visam garantir que exista uma cultura sobre o *software* educativo, que lhe garanta não só um tempo de vida maior, mas a formação de uma comunidade de usuários que toquem experiências, atividades e formações. *Softwares* educativos como *Cabri Géomètre II*, LOGO, possuem uma grande comunidade de usuário ao redor do mundo. Isto garante novas atividades, experiências novas, abordagens novas sobre o mesmo programa. Ou seja, um *software* educativo, para ter visibilidade e projeção nacional e internacional, exige investimentos em distribuição, atendimento ao usuário, materiais disponíveis na Internet entre outros fatores.

Trata-se de uma engenharia de gestão do produto. Mas um dos fatores que podem ter um maior peso neste processo, trata-se da formação dos professores para utilização do *software* educativo desenvolvido.

No entanto, ao sair do ponto de vista do desenvolvedor, e considerando um olhar investigativo, as limitações por divergências conceituais decorrentes das escolhas das equipes de desenvolvimento de *software* educativo, visto em várias situações surpresa nesta pesquisa, expõem como objetivo na formação docente, por parte das instituições de ensino, levar os professores a compreender e experimentar o que são *softwares* educativos, entender sua relação com o saber, ver tipos diferentes de *software* e reconhecer os limites e possibilidades dos mesmos, em termos formativos, isso seria uma das bases de uma formação crítica e reflexiva do professor que vai utilizar as tecnologias computacionais como recurso didático mediante seus alunos.

Quanto o uso de *software* educativo no ensino de matemática, apresento uma topologia que desenvolvi com base nas abordagens que podem ser feitas sobre o saber matemático propriamente dito.

03.1.1 – Tipologia de *software* educativo no ensino de matemática

Desde 1997, ao iniciar minhas investigações, observei que os *software*s educativos voltados ao ensino de matemática podem ser classificados em 4 tipologias quanto à forma como permitem abordar o saber matemático na atualidade:

a) *Software* de geometria dinâmica: Este tipo de programa, já apresentado anteriormente (cf. 37-58), apresenta aos usuários réguas e compassos virtuais permitindo o usuário trabalhar como estrutura de programação os métodos das construções geométricas. Basicamente apresentam os recursos de desenvolvimento de 3 modos: Menu de comandos, barra de ferramentas e a zona de desenho (cf. 47-48). Na atualidade, há vários destes softwares disponiveis para uso como: *Dr. Geo*, *Dr. Genius*, *GeoNext*, *Ruler and Compasses*, *ScheatPad* e *Cabri Géomètre II*. Neste tipo de *software* educativo de matemática, eu me especializei mais aprofundadamente ao longo da pesquisa.

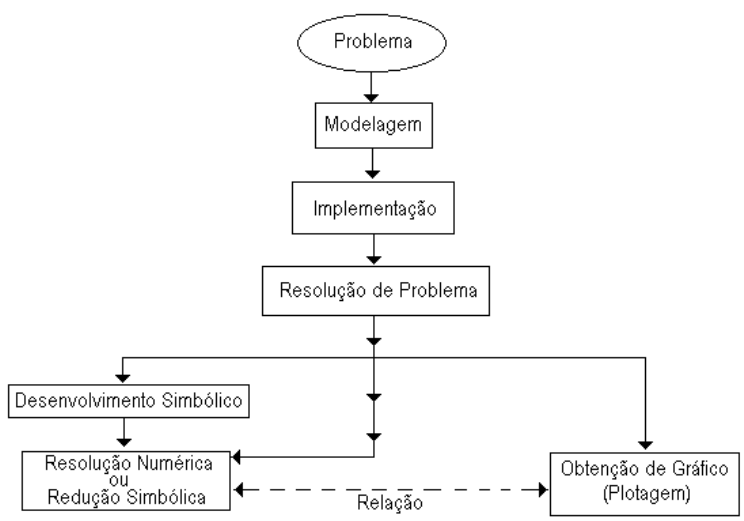
b) *Software* de manipulação simbólica: Os programas que usam a manipulação simbólica focalizam suas ações no desenvolvimento de estruturas aritméticas ou algébricas e foram desenvolvido com fins de automatização do trabalho-matemático e científico, assim como, para implementação de simulações.

Na atualidade, são ferramentas utilizadas na pesquisa e no ensino de matemática em graduações e pós-graduações.

Muitos destes programas se popularizaram ao final dos anos 1980, com a disseminação do Novo PC, e através da Internet na década de 1990, houve a construção de uma rede de comunicação para discutir o uso destes recursos através de listas de discussão e correio eletrônico por parte de estudantes, professores e pesquisadores.

Os *software*s de manipulação simbólica, fazem uso de estrutura procedimental, de modo que, programas como *Derive*, *Mathematica*, *MatLab* entre outros, permitam o desenvolvimento de trabalhos de forma interativa ou programada.

Figura 077 – Resolução de problemas em manipulação simbólica.



Nestes programas é comum o desenvolvimento da simulação por meio da implementação de algoritmos e por meio do processo conhecido como "*plotagem*". Este se refere à obtenção de gráficos através de fórmulas bem-estruturadas, conforme a sintaxe existente no conjunto de comandos de cada programa. Portanto, programas como o *Mathematica* e o *Matlab*, funcionam como linguagens de programação apropriadas à simulação de modelos matemáticos.

Por outro lado, programas como o *Derive*, apresentam seus comandos estruturados em menu-de-opções, de modo que cada função computacional esteja dividido em termos temáticos, por exemplo, no *Derive for Windows 4.01* a sessão *Calculus*, referente ao Cálculo Diferencial e Integral, envolve os comandos: *Differentiate*, *integrate*, *limit*, *product*, *sum* e *Taylor series*.

Entretanto, em termos estruturais, tanto o *Mathematica, Matlab*, e o *Derive*, seguem os mesmos princípios para manipulação simbólica, que podem ser resumidos segundo o organograma apresentado acima pela figura 077.

Outro aspecto deste tipo de programa está relacionado à apresentação dos resultados, estes podem ser exibidos em termos numéricos, ou podem ser expressos através da forma simbólica mais simples, que expressa a redução simbólica.

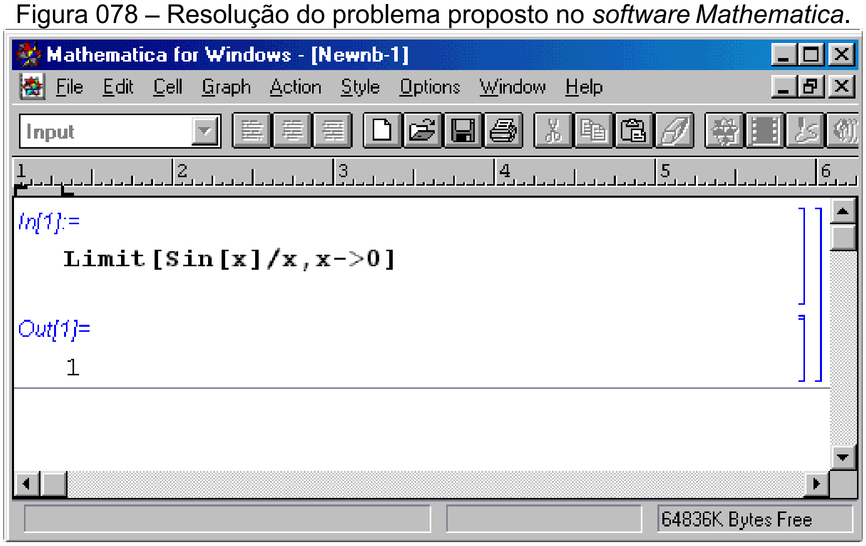
Um modo distinto de apresentação de resultados ocorre através da obtenção de gráficos resultantes da plotagem. Em termos computacionais, os valores numéricos possuem entrada de dados em funções pré-estabelecidas, de modo que por procedimentos de prova automática de teorema, os mesmos são solucionados.

No ensino de matemática, as vantagens deste tipo de *software* estão relacionados à possibilidade de modelização de estruturas algébricas e aritméticas, para o desenvolvimento da simulação, aspecto difícil de ser desenvolvido no Velho PC (papel-caneta), devido suas restrições. Por outro lado, se o uso do *software* de manipulação simbólica estiver desvinculado de um projeto matemático e científico, a exploração por meio de simulação, pode se resumir aos procedimentos de cálculo usados em sala-de-aula, que consistem em dizer que o acerto é mais relevante que o erro e as idéias desenvolvidas ao longo dos estudos são menosprezadas pelo professor. Neste aspecto, é possível confundir problemas matemáticos com o domínio do *software*, de modo que, ao fim de uma jornada de estudos, o aluno acabe por ser um especialista no uso de um *software* de matemática simbólica. No entanto, o objetivo é formar no estudante a capacidade de pensar matematicamente, considerando que o mesmo adquira um espírito crítico e reflexivo sobre o uso de tecnologias na produção do saber matemático. Por exemplo, ao se trabalhar com um programa de manipulação simbólica é comum propor ao estudante a verificação de um enunciado no computador, por exemplo, sabendo utilizar o comando *Limit* do *software Mathematica* verifica-se a expressão:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Sabendo que a sintaxe da expressão apresentada no programa *Mathematica for Windows* deve constituir a expressão Limit [expressão, x —> L], se procede como é apresentado na figura 078.

Figura 078 – Resolução do problema proposto no *software Mathematica*.



O que é possível saber sobre o limite do seno de x dividido por x, quando x se aproxima de zero é que este limite é igual a um, ou seja, se confirmou que a expressão é verdadeira conforme a figura 078, no entanto, isso acaba por constituir um procedimento de validação por verificação.

No entanto, o que pode garantir a veracidade da expressão exposta na figura 078? O problema proposto apenas pede que o estudante faça a verificação de algo já conhecido e devidamente modelizado pelo professor.

Neste contexto, coube ao estudante apenas a implementação de um comando do *software*. Porém, implementar um comando em um computador, não é uma atividade de exploração matemática, trata-se de algo que envolve apenas o domínio de um *software*. Entretanto, como seria possível ao professor abordar o mesmo problema de forma mais instigante ao usuário-aluno?

Um procedimento válido pode ser, em uma seqüência didática, a exploração de um gráfico obtido por meio de uma expressão que envolva f(x)=[sen(x)/x], de modo que seja possível ao usuário aluno, efetuar algumas variações experimentais a partir da expressão dada no *Mathematica*.

Por exemplo, o que ocorreria em termos gráficos, se ao invés de escrever f(x)=[sen(x)/x] fosse escrito f(x)=[x/sen(x)], ou ainda, o que ocorreria se o gráfico mostrasse a expressão f(x)=[cos(x)/x]?

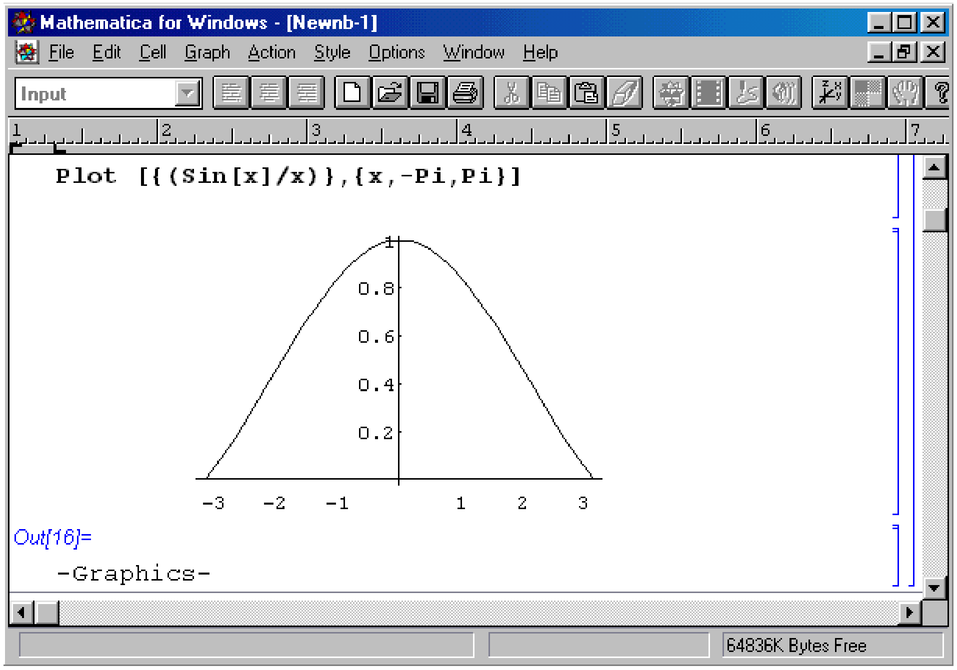
Neste aspecto, cabe ao professor não ajudar o estudante resolvendo os seus problemas, mas sim, propor novos questionamentos, que relacionem as noções sobre limite à idéia de função conforme os gráficos que o programa permite exibir.

Por outro lado, é papel do professor evitar que outras variáveis situacionais dificultem a aprendizagem do estudante.

Neste aspecto, o contexto da pesquisa matemática e científica permitem ao usuário-aluno desenvolver novas hipóteses, comparando dados através dos resultados experimentais de simulação.

Portanto, ao apresentar o gráfico da função f(x)=[sen(x)/x] no *Mathematica*, conforme é exibido acima, e ao propor para um grupo de estudantes a interpretação dos dados que o gráfico apresenta, considerando concepções sobre funções, e o limite fundamental, é possível com a mediação adequada e material didático de apoio, que corresponde ao Velho PC, permitir que os estudantes construam suas hipóteses e modelos, de modo que ao usuário-aluno deve caber a exploração do *software* para testar novas idéias.

Figura 079 – Gráfico de [Sem(x)/x] no intervalo entre $-\pi$ e π.



Provavelmente, serão apresentadas hipóteses absurdas, no entanto, todas as concepções devem ser compartilhadas e testadas até que se compreenda o significado da expressão:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1}$$

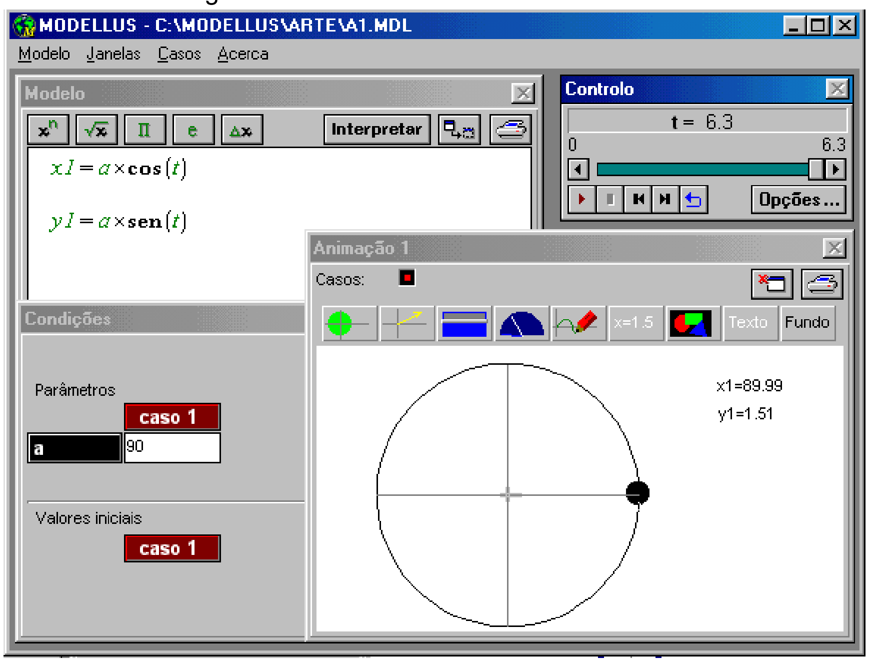
Bem como, sua relação com o gráfico da figura 016 que expressa a função f(x)=[(sen(x)/x)] no intervalo que vai de $-\pi$ até π, de modo que, ao estudante seja perceptível que à medida em que os valores de x se aproximam de zero, os valores de y=f(x) se aproximam de 1, entretanto, cabe ao professor contextualizar o papel do teorema do confronto na explicação do limite fundamental.

Atualmente, os *softwares* de manipulação simbólica como *Derive*, *MatLab* e *Mathematica*, estão voltados mais ao Ensino Superior que à Educação Básica que envolve os Ensinos Fundamental e Médio no Brasil.

Um *software* de manipulação simbólica que permite o desenvolvimento de atividades com estudantes dos Ensinos Fundamental e Médio é o programa *Modellus* desenvolvido pelo pesquisador português Vitor Duarte Teodoro.

No programa *Modellus* é possível ao usuário-aluno, construir expressões matemáticas com uma sintaxe simples, e os comandos são apresentados no menu-de-opções. Neste programa, o objetivo consiste em apresentar uma animação resultante de um modelo matemático desenvolvido pelo usuário-aluno.

Figura 080 – Interface do *software* Modellus



No *Modellus* a realização de uma atividade depende de uma seqüência de janelas que são, respectivamente, pré-requisitos umas das outras, de modo que cada janela seja correspondente à uma sessão dada, como é apresentado a seguir:

a) Sessão Controle: Representa uma variável independente que vai de uma faixa x_1 até x_n, de modo que seja possível efetuar a equação em função da mesma, e é equivalente ao modo de execução do modelo, no exemplo da figura 017, [t] é a variável independente;

b) Sessão Modelo: É a janela em que são implementadas e interpretadas às equações matemáticas que serão utilizadas no modelo desenvolvido, de modo que os valores variáveis devem adotar a variável independente da sessão controle como base de execução das equações propostas;

c) Sessão de Condições: Após a interpretação, que ocorre após a implementação das equações, é aberta uma janela com as constantes apresentadas para que estas posteriormente possam ser modificadas, por exemplo, na figura 017, na janela condições aparecem como parâmetro a constante [a], de modo que, ao modificar o valor de a, que no caso é 90, seja possível efetuar mudanças nos parâmetros do modelo proposto;

d) Sessão Animação: É uma janela com recursos gráficos, que podem ser relacionados com variáveis e constantes obtidas pela sessão modelo. No caso da figura 017, a circunferência é construída com base nas expressões dadas x1=[a. sen(t)] e y1=[a.cos(t)], de modo que, [t] é a variável independente de x1 e y1, e [a] é um valor constante que permite modificar o tamanho da circunferência resultante.

No *Modellus* não é possível efetuar simulações complexas como no *Derive*, *Mathematica* e *MatLab*, por outro lado, em termos didáticos é mais adequado aos estudantes que estão nas séries finais do Ensino Fundamental, bem como, para os que estão no Ensino Médio. No entanto, independente da série em que o estudante esteja, é necessário que o ambiente de aprendizagem deste seja estimulado pela pesquisa matemática e científica por parte do professor. Ou seja, é necessário ao professor ter uma postura de pesquisador, caso contrário, ao se usar o computador com base em *software* de manipulação simbólica, o que pode ocorrer é a reprodução das atividades do livro texto com uso do computador, de modo que, se subestime as potencialidades da máquina e a capacidade do estudante. Fazendo-se assim ocorre, somente, a passagem do Velho PC ao Novo PC.

c) *Software* de manipulação procedimental: Os programas que usam a manipulação procedimental, com finalidades educacionais, centram suas ações no desenvolvimento de estruturas lógicas relacionada à aprendizagem da programação de computadores. O exemplo mais conhecido deste tipo de *software* é o LOGO desenvolvido por Seymour Papert ao final dos anos 1970 no MIT[33]. Na atualidade, este recurso possui diversas versões.

Segundo Guedes (1998: p.23-24), as idéias presentes no LOGO tinham como objetivo favorecer a aprendizagem de programação de computadores para que as crianças conseguissem compreender vários contextos situacionais.

> O programa de pesquisa de Papert tinha como objetivos principais mostrar que as crianças podem aprender a programar computadores e que essa aprendizagem melhora a maneira como elas pensam e aprendem outras coisas. Ou seja, aprender a programar computadores faz com que as crianças se apropriem de uma ferramenta muito poderosa para pensar, aprender e resolvel problemas: a ferramenta computacional. Tornar concreto o pensamento procedimental é o objetivo. Mas as linguagens de programação que existiam na época foram desenvolvidas para, e apenas para, aquelas pessoas que já tinham concretizados os conceitos matemáticos mais difíceis. As portas estavam fechadas para pessoas comuns. Somente os matemáticos tinham acesso fácil a elas. Papert sentiu necessidade de mudar esta situação [...]

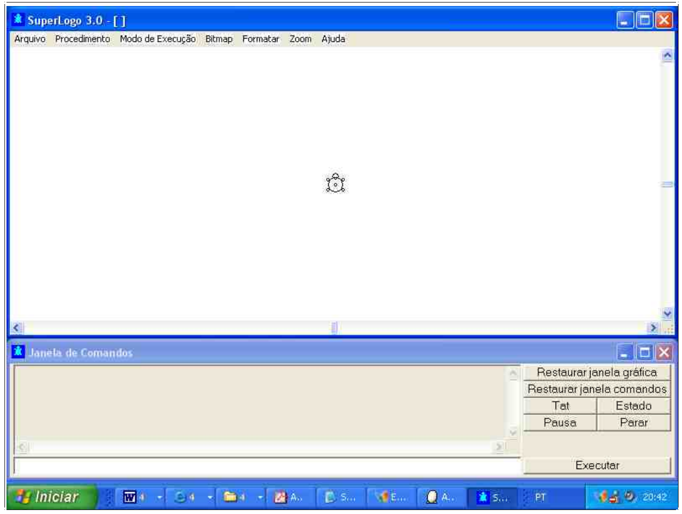
Como se pode notar, os programas de manipulação simbólica e procedimental usam estruturas que remontam idéias sobre programação de computadores, no entanto, suas diferenças estão nas abordagens de ensino.

Um outro aspecto da abordagem procedimental, enquanto estrutura de ensino-aprendizagem, consiste em colocar o estudante sob o ponto de vista do computador, por exemplo, na sessão 05 da formação com os alunos do Monteiro de Moraes (cf. 181 – 211), ao tentar efetuar a construção de um triângulo eqüilátero, no diálogo entre a aluna Beth e o Professor, se percebe que ela sente dificuldades em realizar esta construção, no entanto, em um determinado momento, o Professor pede que essa aluna se coloque no lugar da "tartaruga" do LOGO, mas o que é a "tartaruga"?

---

[33] MIT: Massachussets Institute of Tecnology

Figura 081 – Interface do LOGO: O cursor como tartaruga.



Trata-se da representação do cursor do LOGO. No LOGO se utiliza um cursor em forma de tartaruga para realização das atividades, e em certo sentido, o usuário deve "comandar a tartaruga", ou seja, se colocar no lugar dela para realização da ação. Trata-se de um racicínio complexo, no entanto, estão sendo valorizados os pensares com base na lógica procedimental dos computadores, o foco de discussão não está no saber matemático em si, mas no desenvolvimento de heurísticas para resolução de problemas de determinação.

Ou seja, o objetivo consiste na passagem do Novo PC ao Velho PC de uma perspectiva reflexiva, pois o estudante deve planejar as ações que deve executar antecipadamente, caso contrário, ao executar os comandos o programa não apresentará os resultados esperados. Em suma, são valorizados raciocínios do tipo hipotético-dedutivo mais que uma abstração reflexionante. No caso dos *softwares* de manipulação simbólica, em termos investigativos, o que está sendo priorizado é o computador enquanto elemento de simulação e visualização de problemas matemáticos com respeito aos procedimentos repetitivos.

Um exemplo da discrepância que a forma de pensar LOGO pode gerar em relação ao saber matemático está na sessão 08 de formação discente realizada no Monteiro de Moraes. Na situação surpresa 013, a aluna He, no *Cabri Geómètre II*, desenvolve um polígono regular com 30 lados, oculta os pontos, fato que constitui uma ação instrumental intencional, e coloca segmento entre o tracejado do polígono e o ponto central da construção. Usa esta situação como contra-exemplo para a definição de polígono apresentada pelo Professor, e em seu diálogo com o Professor, questiona:

[He]: “No LOGO a circunferência não têm 360 lados”?

A fala de He revela a discrepância conceitual produzida pelo raciocínio lógico-procedimental e o raciocínio matemático propriamente dito, no entanto, não se pode negar que as concepções LOGO se prestam muito bem à apresendizagem da lógica situacional, algo essencial para resolução de problemas do cotidiano e que, inclusive, pode ser útil para organização do pensar matematicamente, no entanto, sem uma mediação interventiva docente adequada, a proposta LOGO pode, em termos de formação matemática, ser inadequada (cf. 223-224).

d) *Software* temático para formação matemática: São programas voltados a temáticas específicas do saber matemático. Um exemplo apresentado nesta pesquisa, está na sessão 06 da formação discente no Monteiro de Moraes, ao usar o *software* Torre de Hanói (cf. 212-214), ele apresenta uma série de campos conceituais bem definidos e objetivos claros. Este tipo de programa geralmente corresponde à uma seqüência didática específica. Neste sentido, este tipo de programa é restrito ao desenvolvimento de várias atividades matemáticas, no entanto, são recursos que tendem surtir bons resultados quando apresentam as concepções matemáticas e transposições didáticas adequadamente. No entanto, no caso da sessão 06 no Monteiro de Moraes, a Professora 1 e o Professor tiveram que realizar várias intervenções para contextualizar a os problemas propostos.

Um ponto relevante sobre este tipo de *software* educativo de matemática, consiste em mencionar que as transposições propostas são diversas, podem ser fichas de atividades, jogos, situações desafio entre tantos outros, no entanto, visam trabalhar campos conceituais específicos.

e) *Software* Aplicativo com fins educacionais: Uma outra forma para se trabalhar ensino de matemática assistido por computador, consiste no uso de *software* aplicativo com fins educacionais.

Não significa levar o aluno à realização de tabelas estatísticas em uma planilha de cálculo, mas sim, apresentar seqüências didáticas, com abordagens específicas que explorem os comandos de um aplicativo para realização de atividades que explorem um saber matemático a ensinar com base em estruturas de currículo. Este tipo de situação foi possível averiguar em 2000 no Laboratório Multimeios FACED/UFC. A Professora Maria José Araújo e Souza, desenvolveu uma série de atividades de exploração aritmética com o *MS-Excel* em um curso de formação de professores de matemática da Rede Estadual do Estado do Ceará.

Ao usar o *Excel*, ela fez uso dos recursos do programa para explorar as propriedades aritiméticas dos números inteiros,bem como, para que os estudantes criassem fórmulas para geração de seqüências numéricas com números pares, ímpares, bem como, para criação de outras seqüências matemáticas conhecidas.

Neste contexto, percebi a presença constante do papel e da caneta na elaboração das construções dos alunos. Os problemas eram propostos como situações desafio, e ao longo do trabalho, Maria José Araújo, constantemente realizava mediações interventivas para contextualizar as ações dos alunos.

Uma ferramenta crucial para trabalhar nesta perspectiva, foi o conhecimento desta professora sobre o significado da informática educativa.

No cotidiano escolar, é comum a confusão entre o ensino de informática com o uso didático do computador, de modo que tais tecnologias acabam sendo subtilizadas por professores e administradores da escola.

Neste sentido, Borges Neto (1999: p.135-138) apresenta uma definição de informática educativa, com base em uma classificação sobre a natureza do trabalho escolar com o uso do computador.

Segundo Borges Neto (1999), a natureza do trabalho com uso do computador na escola, se classifica em: Informática aplicada à educação, informática na educação, informática educacional e informática educativa.

i) Informática aplicada à educação: Visa o uso do computador, para o desenvolvimento de trabalhos burocráticos necessários ao andamento administrativo da escola, e a maioria das ações corresponde à digitação de ofícios, avisos, cartazes, emissão de boletim, fluxo de caixa entre outras funções.

Neste contexto, os recursos utilizados são: os pacotes de trabalho que são programas como: editor de texto e imagem, planilha de cálculo, apresentação de *slides* e os recursos de diagramação.

Além disto, a informática aplicada à educação, pode ser usada com fins de pesquisa educacional. Por exemplo, quando se faz uso de um *software* de análise estatística ou qualitativa, o computador está sendo usado como um recurso de análise de dados coletados, mas este uso não corresponde aos fins didáticos do computador para o ensino de um saber a ensinar.

ii) A informática na educação: Consiste no uso do computador por meio de *software* de suporte ao trabalho educacional, por exemplo, ao efetuar buscas na Internet, o computador não está sendo usado com finalidade didática, mas pode se tratar de um recurso que contribui para o desenvolvimento de uma atividade de apoio didático.

De modo geral, a aprendizagem de aplicativos, contribui para o manuseio do computador, no entanto, tal fato não garante que o estudante esteja tendo acesso ao computador para o desenvolvimento de idéias científicas com base em disciplinas escolares.

Muitos professores confundem informática na educação com informática educativa. Neste caso, os recursos utilizados são: mecanismos de busca, tutoriais, livros multimídia, editores de texto entre outros.

iii) Informática educacional: O corre quando o computador é ferramenta auxiliar na resolução de problemas. Na escola, as atividades desenvolvidas correspondem ao trabalho de um aluno ou grupo de alunos frente o computador, de modo que, o mesmo pode recorrer ao auxílio de um professor não especialista ou um monitor.

O que caracteriza, a informática educacional, é que neste processo um professor especialista não faz intervenções junto aos alunos.

Na informática educacional, o estudante faz uso dos recursos disponíveis, para solucionar seus problemas e na escola, estes problemas correspondem à “lição-de-casa” proposta em sala-de-aula.

Em vários casos, pode existir um projeto escolar para o uso do computador, no entanto, tais práticas não são correspondentes à informática educativa.

iv) Informática educativa: É o uso dos recursos computacionais como ferramenta de apoio ao ensino-aprendizagem por parte dos professores com respeito aos seus alunos para o ensino de disciplinas escolares.

Neste contexto, há a presença do professor especialista que explora os limites e possibilidades do computador para o ensino dos saberes científicos propostos em termos escolares. Borges *apud* Souza (2001: p.54), ao definir informática educativa considera que:

> A Informática Educativa se caracteriza pelo uso pleno da informática como um instrumento a mais para o professor utilizar em suas aulas. Aqui o professor especialista deve utilizar os recursos informáticos disponíveis, explorando as potencialidades oferecidas pelo computador e pelos softwares, aproveitando o máximo possível suas capacidades para simular, praticar ou evidenciar situações, geralmente, não possíveis de serem apreendidas desta maneira por outras mídias. Neste modelo, a informática exerce o papel de agente colaborador e meio didático na propagação do conhecimento, colocada à disposição da educação, através do qual o professor interage com seus alunos no processo de construção do conhecimento objetivado.

Na informática educativa, o computador é um recurso disponível ao professor, e o trabalho didático está centrado nas concepções do professor especialista.

Neste caso, os recursos utilizados pelo professor, correspondem à sua necessidade didática em ensinar algum conteúdo escolar, e neste aspecto até mesmo um *software* propriamente não educativo, pode ser usado como um recurso educacional, pois tudo dependeria da abordagem do professor com respeito à formação que se pretende trabalhar com os respectivos alunos.

Na situação em que a Professora Maria José Araújo Souza trabalhou, ela transformou o *MS-Excel* em um *software* educativo, havia uma proposta pedagógica, com base na Seqüência Fedathi, haviam atividades planejadas *apriori*, e havia uma postura investigativa sobre formação matemática. No entanto, a realização deste tipo de ação, exige formação matemática adequada. Por outro lado, pode ser uma opção para escolas que possuem dificuldades financeiras na aquisição de *softwares* educativos.

03.1.2 – A Internet no ensino de matemática

Projeto Tele-Cabri-Multimeios: No Estado do Ceará, os primeiros estudos com uso do *Cabri Géomètre II* ocorreram no Laboratório Multimeios-FACED/UFC coordenado pelo professor Hermínio Borges Neto desde 1997.

Durante este período, foram realizadas análises sobre diversos programas de geometria dinâmica e sobre alguns programas de manipulação simbólica, que me permitiu compreender, em parte, a dinâmica destes recursos.

Ao final de 1999 foi iniciado no Laboratório Multimeios FACED/UFC, o projeto Tele-Ambiente, e neste projeto foi desenvolvido um subprojeto financiado pelo CNPq para desenvolvimento de um curso de construções geométricas com uso do *Cabri-Géomètre II* a distância através da Internet. O projeto ficou conhecido como Tele-Cabri/Tele-Ambiente, e recebeu este nome para homenagear o projeto TeleCabri desenvolvido em Grenoble, para atender crianças internadas no Hospital Michallon como é mencionado por Campos (1998: p.134-135).

O objetivo do Tele-Cabri/Tele-Ambiente foi a elaboração de um curso a distância com recursos de comunicação a distância via Internet, para trabalhar a formação de professores do Ensino Fundamental de quinta à oitava séries.

Para a implementação destes recursos foi formada uma equipe que trabalhou o desenvolvimento de atividades matemáticas.

Uma equipe para implementação destas atividades em recursos computacionais e outra equipe que fez experimentos para validação das atividades desenvolvidas.

Para desenvolver os experimentos, foi utilizado entre 1999 e 2001 o *software NetMeeting* da *Microsoft* que permite comunicação à distância o objetivo destes grupos consistia em averiguar aspectos de mediação pedagógica em formação a distância em tempo real, com objetivos de obter como produto um recurso de comunicação a distância adequado às questões educacionais que denominamos por Tele que permitiria realizar: compartilhamento de aplicação, aúdio, vídeo e bate-papo.

A relevância da passagem do Novo PC ao Velho PC dentro do Projeto TeleCabri, se relaciona ao desenvolvimento de estruturas de mediação para favorecer o ensino de geometria em cursos a distância em tempo real.

A maioria das situações surpresa encontradas, se relacionavam ao processo de construção de atividades matemáticas no projeto.

Projeto GeoMeios - Geometria dinâmica em *Java*: Ao desenvolver atividades para o curso a distância de construções geométricas no projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente, surgiu como necessidade compreender os recursos de programação em linguagem Java, para construção de *applets*[34], que permitiriam a elaboração de animações que seriam mescladas aos textos de assistência ao estudante.

Em princípio, o objetivo foi utilizar recursos *applets* do projeto *Cabri-Java* desenvolvido pelos construtores do *Cabri-Géomètre*. No entanto, um dos problemas deste recurso está associado à constante necessidade de renovação do arquivo “cabrijava.jar”, que funciona como um recurso que torna primitivas do *Cabri-Géomètre* executáveis em *applets* na *Internet*.

Considerando estas dificuldades, por volta de maio de 2001, se iniciou no Laboratório Multimeios FACED/UFC, o desenvolvimento de *software* de geometria dinâmica para resolver estes problemas. Este recurso foi denominado como GeoMeios.

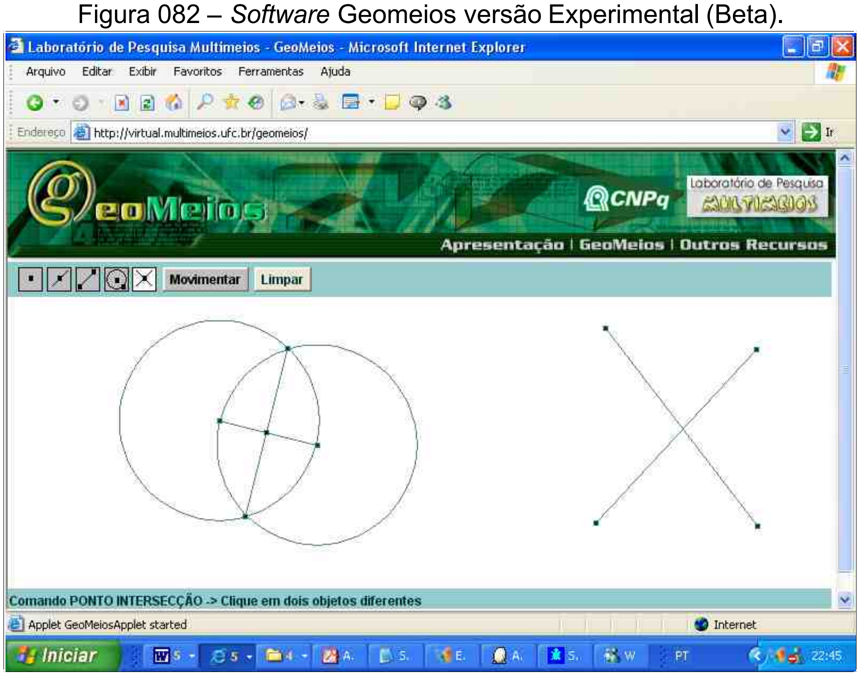
[34] São mini-aplicativos desenvolvidos em Java que funcionam em um ambiente de navegação pela Internet.

O projeto GeoMeios, na atualidade, está sendo coordenado por Hermínio Borges Neto e por minha pessoa, e dele faz parte uma equipe formada por estudantes de graduação em pedagogia, computação e matemática da Universidade Federal do Ceará.

Na atualidade temos uma versão experimental, que funciona bem com o navegador *Internet Explorer*, mas precisa de adequações para trabalhar com o navegador *Mozila*. Atualmente esta versão, se encontra na página do Laboratório Multimeios FACED/UFC[35].

O *software* GeoMeios é um *applet* que reproduz um ambiente de geometria dinâmica que permite ao usuário-aluno trabalhar com construções geométricas por meio da Internet.

Figura 082 – *Software* Geomeios versão Experimental (Beta).



O fato de estar desenvolvendo um ambiente de geometria dinâmica com uso da linguagem de programação Java, é uma realidade explorada à algum tempo, e um dos programas que foi adotado como exemplo, foi o Ruler and Compasses for Java, desenvolvido por René Grothmann entre 1999 e 2000.

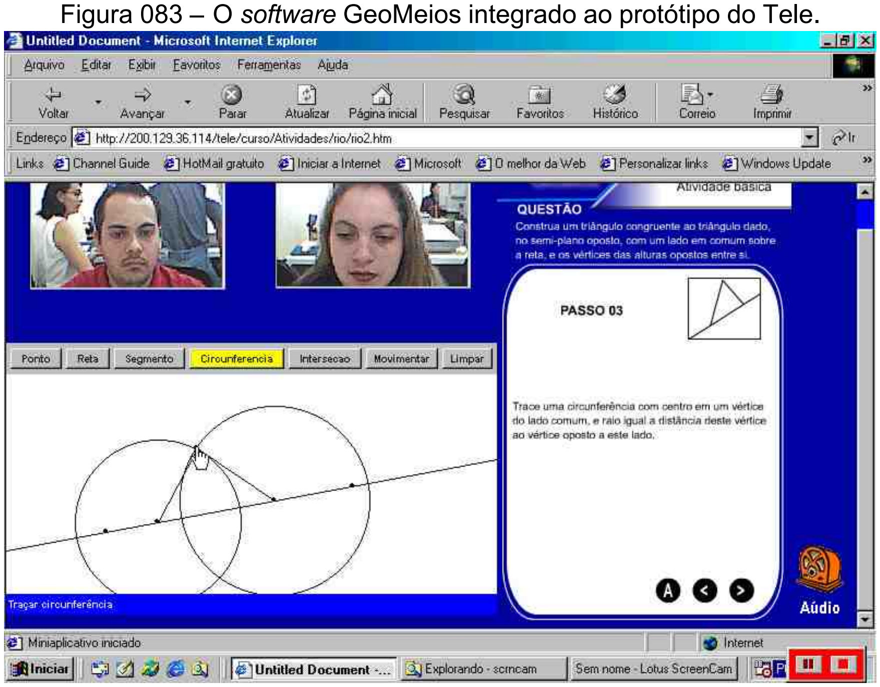
---

35 *Home page* do GeoMeios: http://tele.multimeios.ufc.br/geomeios/

As vantagens do uso de applets está na possibilidade em poder utilizar um recurso computacional em várias plataformas pela Internet, pois na linguagem Java é utilizado o conceito de “máquina virtual” que na realidade é uma camada de programação sobre a estrutura do sistema operacional.

Por outro lado, o problema de uma máquina virtual está nas dificuldades em acessar o sistema de arquivos de uma plataforma como *Windows, Machintosh, Linux, Unix*. Este problema implica, em dificuldades em leitura e gravação de primitivas de um software de geometria dinâmica.

Figura 083 – O *software* GeoMeios integrado ao protótipo do Tele.

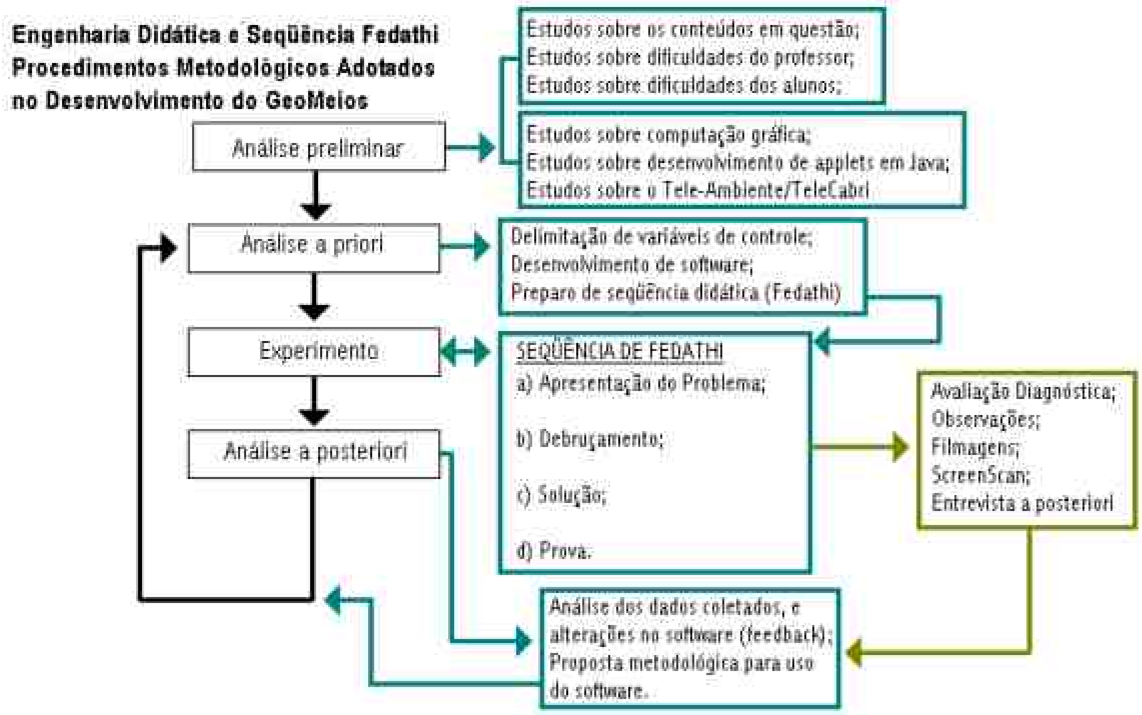


Uma solução proposta para o problema pode ser a elaboração de um portal em que o usuário-aluno, a semelhança dos portais que oferecem o serviço de correio eletrônico na Internet, tenham a sua disposição um login[36] e uma senha que permita acessar uma área de trabalho personalizável em um servidor que esteja conectado 24 horas na Internet. Deste modo, as atividades sejam salvas como arquivos com extensão “html” ou “htm”, podendo ser lidas e recuperados através de um interpretador do GeoMeios.

[36] *Login:* Um código identificador de acesso.

Para realização das primeiras etapas do GeoMeios, adotamos a engenharia didática enquanto engenharia pedagógica, e na atualidade um dos objetivos da equipe de pesquisa, consiste em aperfeiçoar, testar e finalizar este recurso.

Figura 084 – Esquema metodológico GeoMeios: Engenharia didático enquanto engenharia pedagógica.



O desenvolvimento do *software* GeoMeios com uso de canais que viabilizem compartilhamento de aplicação, áudio, vídeo e bate-papo, consiste em uma das possibilidades para formação a distância em construções geométricas.

03.1.3 – Software Livre no ensino de matemática

Uma das questões atuais presentes na atual conjuntura sobre a informática no mundo, se relaciona com as idéias sobre *software* livre. Diferente do pensamento usual, o problem do *software* livre está mais relacionado com a liberdade de expressão que com questões relativas ao valor financeiro deste tipo de produto.

Segundo Silveira (2004: p. 9), as quatro liberdades que definem um *software* livre são as liberdades de: uso, cópia, modificações e redistribuição. Para Silveira (2004: p.5 – 15), o que está em jogo é a possibilidade de sistemas cooporativos empresariais obterem, ao longo do tempo, o controle sobre o conhecimentos informáticos e computacionais, entretanto, se pressupõe que o ato de poder conhecer seja um bem comum à humanidade.

Neste aspecto, ao se compreender as linguagens de programação, base para elaborar códigos-fonte que geram os programas, enquanto uma forma de expressão da cultura humana. A consessão para uso de programas computacionais, ato que configura o *copyright*[37], corresponderia à um tipo de restrição à liberdade de expressão.

A revolução do *software* livre, teve origens em 1983 através de Richard Stallman, pesquisador do Laboratório de Inteligência Artificial do MIT. Stallman tinha por objetivo desenvolver um sistema operacional[38] livre que seria equivalente ao *Unix*, ou seja, um sistema sem licenças proprietárias de uso. As concepções de Stallman ganharam impulso, e em 1984 foi criada a *Free Software Foundation*[39] coordenada por Stallman.

Em 1991 Linus Torvalds anuncia em listas de discussão a criação do *Linux*, como um sistema operacional livre de código-fonte aberto. E deste modo, muitas idéias sobre *software* livre iam tomando forma.

Uma das contribuições de Stallman, foi a criação de um tipo de licença que recebeu o nome de *copyleft*[40], partir do Projeto GNU, um anacrônimo recursivo que significa "*GNU is Not Unix*"[41], mas que ao mesmo tempo faz menção ao animal africano de mesmo nome (*in* Silveira 2004: 16-23).

O *copyleft*, é uma licença em que o autor é protegido, no sentido de garantir que as pessoas tenham direito as quatro liberdades mencionadas acima,

---

[37] Copyright: É o nome dado ao direito autoral.

[38] Sistema operacional: É o programa de computador que viabiliza operações elementares entre hardware e software, bem como, permite manipulação e operacionalização dos sistemas de arquivo.

[39] Free *Software* Foundation: Fundação do Software Livre.

[40] *Copyleft*: Proteção que garante ao autor que nenhuma barreira será posta para restringir a liberdade de uso, cópia, modificações e redistribuição.

[41] GNU: GNU Não é Unix.

ou seja, a idéia consiste em permitir que os programas de computador, sejam disponibilizados enquanto bem comum para humanidade. Segundo Silveira (2004: p. 11):

> [...] a licença do software livre é uma licença não-proprietário de uso. O software livre possui um autor ou vários autores, mas não possui donos. Dessa forma, o usuário do software livre também tem o direito de ser desenvolvedor, caso queira. Quem o adquire pode usá-lo para todo e qualquer fim, inclusive tem a permissão de alterá-lo completamente. Assim, para um software ser efetivamente livre deve necessariamente disponibilizar seu código-fonte. A única proibição feita aos seus usuários é a de torná-lo um software proprietário.

Na perspectiva dos *softwares* educativos, o movimento pelo *software* livre, com ações como o Projeto *FreeEduc*, coordenado pela OFSET[42], que desenvolveu uma distribuição *Linux* com vários *softwares* educativos voltado à diversas áreas. No ensino de matemática, esta distribuição conta com os programas: *Dr. Genius, Dr. Geo, FreeEduc-primary*.

Além de iniciativas como *FreeEduc*, há vários autores que estão dispobilizando *software* livre na Internet, e no Laboratório Multimeios FACED/UFC, desde 2001 se procura trabalhar nesta perspectiva.

No desenvolvimento de *software* educativo voltado ao ensino de matemática, se pode citar:

i) Geometria dinâmica: GeoMeios, Dr.Genius, Ruler and Compasses, GeoNext;
ii) Manipulação simbólica: *MuPad, Octave*;
iii) Manipulação Procedimental: wxLOGO;
iv) *Software* Temático: FreeEduc-primary;
v) *Software* Aplicativo: OpenOffice.

[42] OFSET: "*Organization for Free Software in Education and Teaching*" – Organização para *Software* Livre na Educação e no Ensino. < http://ofset.sourceforge.net/>

Além do GeoMeios, foi realizado pelo Professor Hermínio Borges Neto e por minha pessoa, no Laboratório Multimeios FACED/UFC, a tradução para o português brasileiro do *software* educativo GNU *GeoNext*, utilizado na pesquisa[43].

As vantagens em obter *software* educativo desenvolvido em *Java* como o GeoMeios e o *GeoNext*, está na possibilidade de uso com ou sem Internet e em multiplataformas. Um outro aspecto, que tenho observado, é que a licensa para uso dos software educativos proprietários em matemática, para laboratório de informática, têm custo superior à R$ 1.000,00, se considerar principalmente os recursos de geometria dinâmica e manipulação simbólica presentes no mercado atualmente. Neste sentido, se torna menos viável para escolas públicas e privadas de pequeno porte, a aquisição destes recursos computacionais. Deste modo, se torna cada vez mais comuns iniciativas de pesquisa, desenvolvimento e utilização de *software* educativo livre para o ensino de matemática. No entanto, uma das barreiras para tais possibilidades está na falta de infraestrutura para distribuição e manutenção destes recursos. Daí surge como questionamento: Quem financia os recursos humanos para o desenvolvimento, manutenção e distribuição destes recursos para favorecer a democratização da educação pública e de qualidade?

Os questionamentos acima apresentados e discutidos, resultam dos dados coletados, principalmente, nas fases 01 e 05 desta pesquisa.

03.2 – Formação docente na passagem do Novo PC ao Velho PC

Na caracterização dos docentes participantes da fase 02, se pode observar que estes possuem boa formação docente, se considerar as dificuldades existentes no Brasil atualmente, quanto à formação de professores de matemática (cf. 153-154). No entanto, algumas questões chamam atenção.

Observei durante a formação docente que os professores sempre se mostravam interessados, as poucas faltas que houve no curso tinham origens em

[43] Página do GeoNext: http://geonext.de

questões institucionais, digo isso sobre o a semana de planejamento no CMF, no entanto, se comparado com os estudantes das fases 03 e 04, se observam os seguintes aspectos em relação à passagem do Novo PC ao Velho PC:

a) Os professores interagiram, no entanto, tinham mais receios em se lançar em discussões matemáticas que os estudantes das fases 03 e 04;

b) Ao se deparar com situações surpresa iniciais, não se percebe uma postura investigativa por parte dos professores, em certo aspecto, eles estão mais relacionados ao saber escolar que o científico, no entanto, a medida em que surgem situações surpresa, e as mediações buscam favorecer o processo de validação por demonstração, os professores tendem ter mais liberdade de ação para investigação;

c) Houve a passagem do Novo PC ao Velho PC na situação surpresa 004 que ocorreu sessão 03 (cf. 172 – 177), no entanto, as interações entre os professores são menos participativas que a dos alunos nas fases 03 e 04;

d) Ao discutir a situação surpresa 015, na fase 04, na terceira sessão (cf. 250 - 260) em que o professor Pascal se fazia presente, se pode notar, que este não conferia autoridade no uso do computador no ensino de matemática, ao saber matemático pelo processo de validação por demonstração. Antes ao ser questionado pelos alunos Mi, Pi, Epsilon e Beta, Pascal responde dizendo: “É se o Professor disser que está certo, está certo! Eu não entendo muito sobre computadores, mas sei que é o futuro! (cf. 257).” Esta resposta revela que apesar de

> reconhecer a importância dos computadores, ele carrega consigo o mito da tecnologia, no entanto, não transfere a autoridade sobre o saber matemático ao computador, mas sim, ao Professor pesquisador, pois ele supõe que este possui domínio técnico sobre o *software*. Neste sentido, trata-se de uma concepção tecnicista sobre quem possui autoridade sobre o saber matemático, ao usar ferramentas computacionais no ensino;

Mediante as considerações acima apresentadas, se pode notar que a passagem do Novo PC ao Velho PC ocorreu, mediante intervenções com base na Seqüência Fedathi, no entanto, entre os professores não é tão simples a flexibilização de posturas que se exige neste tipo de metodologia, até mesmo por poder existir receios sobre os mesmos se sentirem em certos momentos, expostos ao ridículo mediante outros docentes.

No entanto, tais problemas não decorrem, em minha compreensão da falta de formação, mais sim em relação à formação escolar, colocando estes diante de uma rotina escolar, que lhes faz perder a compreensão sobre as ações de um pesquisador em matemática, fato este, que se exige na passagem do Novo PC ao Velho PC.

03.2.1 – A reflexão e metareflexão no ensino de matemática

Com respeito à reflexão e a metareflexão nas ações docentes, observei ao assistir as fitas de vídeo, que em vários contextos e situações, não conseguia compreender o ponto de vista do estudante e pensar sobre o pensamento dele.

Em vários momentos, minhas preocupações enquanto pesquisador formador, estava mais centrados na realização das seqüências didáticas, em problemas de gestão de tempo que em compreender suas ações enquanto formas de apresentar novos questionamentos. De 18 situações surpresa coletadas, se pôde averiguar que 5 delas só não foram socializadas (cf. 285). Na situação surpresa 006 houve um início de socialização motivado pela mediação do professor, no entanto, por ser final de aula, os problemas de gestão de tempo assumiram primeiro plano e acabei por não retomar a mesma (cf. 191 – 206).

No caso da situação surpresa 008, a mesma só foi perceptível através da filmagem, neste caso, não havia percebido o contexto e o aluno não comentou esta situação (cf. 197 – 198). Em um certo sentido, há uma tendência por parte dos estudantes, em princípio, em se apresentar às respectivas situações surpresa, no entanto, uma ação metareflexiva exige que o docente procure estar mais atento às ações silenciosas dos estudantes, pois nestes casos, surgem contextos significativos.

Por outro lado, nos momentos em que consegui agir de modo meta-reflexivo, observei ser bem sucedido, inclusive na passagem do Novo PC ao Velho PC. Um exemplo deste fato, está na sessão 08 do Monteiro de Moraes (cf. 221-226), após uma formação teórica, em sessões anteriores, para nivelar estudantes mediante as dificuldades para compreender pelo processo de construções geométricas, a construção do ponto médio de um segmento [AB], foi possível observar (cf. 223 – 224), que a argumentação do Professor, aliado à postura mão-no-bolso, viabilizaram literalmente a passagem do Novo PC ao Velho PC quando Chet vai ao quadro branco explicar por meios argumentativos sua construção. Neste mesmo aspecto, na sessão 004, realizada na fase 04, a resolução da situação surpresa 015 que apareceu na sessão 003 (cf. 250 – 264), teve como desfecho de um diálogo entre vários alunos a solução de Mi, que fez questão em ir ao quadro-branco argumentar sobre a atividade (cf. 260 – 270). Ou seja, as mediações do Professor favoreceram a interação entre estudantes, a capacidade metareflexiva em certos instantes, viabilizou a reflexão dos estudantes sobre as atividades.

Em suma, foi possível averiguar as possibilidades didáticas da passagem do Novo PC ao Velho PC tanto na formação docente como discente, no entanto, questões como a preocupação excessiva com a gestão da sessão, a dificuldade em os alunos não querer se expor, bem como, a falta de sensibilidade para observar e melhor ouvir os estudantes, pode dificultar a passagem do Novo PC ao Velho PC.

03.2.2 – Cuidados ao usar a passagem do Novo PC ao Velho PC

Na passagem do Novo PC ao Velho PC, pude averiguar que ao final das formações docentes e discentes nas fases 02, 03 e 04. As posturas dos formandos sempre se tornaram crítica em relação à tecnologia, no entanto, houve dois fatores que chamaram minha atenção neste aspecto:

i) Caso o professor não dimensione, adequadamente, o o papel do computador na formação matemática, os estudantes podem desenvolver um ceticismo exacerbado que lhes pode levar à rejeição tecnológica;

ii) Por outro lado, a postura de Pascal, na formação dos estudantes do CMF (fase 04), quando este considera o posicionamento do Professor, que utiliza a tecnologia, como a palavra final, me fez considerar os seguintes questionamentos: a) A formação teria sido insuficiente para Pascal, pois poderia ter valorizado estudantes mais participativos desconsiderando suas dificuldades; b) Pascal poderia ter concluído que a tecnologia é limitada, no entanto, teria transferido o mito do computador infalível para o pesquisador; c) Devido ter faltado na última sessão, não se tenha conseguido com ele realizar uma sistematização das idéias sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC de modo adequado.

Mediante tais reflexões fica como advertência os cuidados no dimensionamento sobre o papel das tecnologias no ensino de matemática como um dos cuidados que os docentes devem ter.

Outro questionamento, diz respeito à formação matemática, pedagógica e tecnológica. Pode-se considerar, que a formação matemática na perspectiva investigativa, possui um peso maior nesta metodologia. No entanto, a compreensão sobre os aspectos da mediação pedagógica, bem como, o entendimento sobre tecnologias computacionais, em dados momentos, permitem compreender um contexto extremamente sútil, como se pôde observar na situação surpresa 013. Um conceito mal construído na formação LOGO, levou a estudante à uma ação instrumental intencional para falsear uma definição matemática, no entanto, através da compreensão situacional em termos computacionais e midiáticos foi possível estabelecer uma intervenção que revertesse o quadro que estava sendo formado. Considerando este contexto, se pode levar em conta que a formação matemática, pedagógica e tecnológica devem andar conjuntamente na perspectiva docente da passagem do Novo PC ao Velho PC.

Por fim, cabe ao professor que use esta metodologia, policiar a si mesmo, pois na passagem do Novo PC ao Velho PC, se corre o risco em se estar forçando situações surpresa naturais. No entanto, não estou dizendo que um dado contexto não possa ser favorecido, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo no *Cabri Géomètre II*, tanto em Quixadá, como com professores e alunos nas formações 02, 03 e 04 é reprodutível, no entanto, ao apresentar certas dicas e falas, se corre o risco em estar plantando intencionalmente uma solução, ao invés de se colocar um problema que possa até ser reproduzido em outras circunstâncias.

03.3 – Formação discente na passagem do Novo PC ao Velho PC

Na formação discente nas fases 03 e 04, foi possível averiguar que os estudantes do Monteiro de Moraes foram mais participativos e interativos que os alunos do CMF. No entanto, comparando-os com os professores na fase 02, os estudantes, de modo geral, se envolveram mais nas atividades apresentadas.

É provável que este comportamento mais ousado dos estudantes, tenha haver com uma impregnação menor da cultura escolar que no caso dos professores, em outros termos, isso consiste em considerar que a escolarização em certo aspecto “mata” o espírito investigativo com respeito ao saber matemático, e como os professores estão no “topo” da escolarização, estes acabam se adaptando cada vez mais aos rituais escolares, sem se preocupar com suas posturas enquanto investigadores com respeito ao saber matemático.

Um outro aspecto observado, é que os alunos tidos como “imaginativos” e “dispersos”, na passagem dom Novo PC ao Velho PC, apresentam desempenho similar aos estudantes tidos como alunos “excelentes”. Por exemplo, Mi na fase 04, surpreendeu inclusive seu professor, Pascal, que o percebia como “uma aluno criativo e imprevisível”, por outroi lado, Epsilon tido como um “aluno talentoso” também manteve seu desempenho, mas houve casos como Gama, também considerado “talentoso”, que por motivos extraformação optou por não participar de todas as sessões. Tendo uma participação inicial boa, mas ao final da formação sendo pouco participativo.

No CMF, as alunas Eta, Teta e Lambda, em várias discussões ficavam isoladas do grupo masculino, no entanto, ao final do curso interagiam com mais facilidades.

No Monteiro de Moraes, He tinha recebido congratulações nas Olimpíadas Estaduais de Matemática, no entanto, Chet e Yud tiveram um desempenho à altura de He. No entanto, no Monteiro de Moraes, não houve problemas na fragmentação de grupos, todos os alunos foram muito participativos, no entanto, a sua formação matemática estava aquém à formação se que esperava observar.

Além disto, a relação falta-presença, mostra que os alunos do Monteiro de Moraes estavam mais interessados que os do CMF.

Um fato que se observa nas sessões finais, é que em ambos grupos, os alunos mais participativos, tendem a apresentar demonstrações com base em argumentações matemáticas sólidas. E neste sentido, a formação dos estudantes do CMF, quanto o domínio ferramental da matemática, os colocam bem à frente dos alunos do Monteiro de Moraes.

Em suma, se pôde averiguar, com respeito aos estudantes tanto do Monteiro de Moraes como do CMF, que a passagem do Novo PC ao Velho PC, articulado à Seqüência Fedathi e a postura mão-no-bolso, podem favorecer a imersão matemática de tal modo que os alunos possam ter uma experiência matemática significativa.

03.3.1 – A "postura mão-no-bolso" e suas dificuldades

Na passagem do Novo PC ao Velho PC, a "postura mão-no-bolso" é fundamental, no entanto, existem dificuldades que podem surgir ao exercer esta estratégia. Observei que em alguns contextos os estudantes tendem à confrontação, pois esperam que o docente realize as atividades no computador por eles. No entanto, cabe ao professor, saber como mediar as possibilidades de confrontação.

Outro aspecto destas dificuldades está em exercer orientações verbalmente, com respeito ao uso de *software* educativo. Este tipo de ação exige muita atenção e concentração por parte do professor. Além disto, se o professor não for usuário do programa em uso sentirá dificuldades ao orientar os estudantes em determinadas ações.

Favorecer a participação de estudantes no computador do docente, e poder andar entre estudantes averiguando suas ações é parte da postura mão-no-bolso.

No entanto, postura mão-no-bolso não significa deixar de intervir junto aos estudantes, é possível realizar questionamentos, no entanto, deve se evitar solucionar os problemas dos alunos, porém nada empede o docente em apresentar caminhos através de algumas contextualizações.

Capítulo 04 – Considerações Finais

Tomando os objetivos de investigação apresentados inicialmente (cf. 2 – 3), constatei que as situações surpresas podem surgir de problemas relativos a ação-instrumental, bem como, das limitações decorrentes do computador.

Ao todo, a ação–instrumental ocorre em 16 das 18 situações surpresa, sendo que 9 delas foram não-intencionais, e 7 foram ações premeditadas pelos usuários. Além disto, Nas situações surpresa 002, 003, 004, 005, 007, 008, 011, 012, 013, 014, 016 e 017, ou seja, em 12 de 18 delas, a ação instrumental agiu conjuntamente com as limitações computacionais, sejam em problemas de manipulação, por divergência conceitual em *software* educativo ou em limitações computacionais que caracterizam *bugs* de *hardware* ou *software*.

Ou seja, a ação instrumental intencional ou não, possui um peso significativo na formação de situações surpresa e tal contexto expõe como fato que na interação homem-máquina-saber, ao se tentar solucionar problemas, usando recursos tecnológicos, ocorrem dificuldades de mediação instrumental que afetam a representação de conhecimentos em ferramentas computacionais.

Além disto, as limitações computacionais relativas as divergências conceituais em *software* educativo apresentaram 8 ocorrências, que consiste em dize que há falta de clareza epistemológica e conceitual, em termos matemáticos, para os desenvolvedores.

Recursos que apresentam propostas de conteúdo similares, exibem resultados distintos em construções geométricas. Neste sentido, os *softwares* educativos matemáticos investigados, na maioria de geometria dinâmica, exibem percepções diferentes sobre o saber matemático em grupos de construtores distintos, bem como, falhas internas na integração de funções que são vistas como concepções distintas, mas que estão diretamente associadas em termos matemáticos.

Quanto às limitações sobre *bugs* computacionais, essas aparecem em 4 ocorrências, exibindo erros de desenvolvimento, bem como, os erros decorrentes de limitações numéricas comuns aos instrumentos computacionais.

Sobre as limitações em manipulação, ocorrem em 2 situações surpresa. Fato este que supunha prevalecer sobre os outros tipos de limitação.

Em suma, se pode considerar que as situações surpresa ocorrem, na maioria das vezes, em decorrência do uso instrumental inadequado que os estudantes-usuários fazem das ferramentas que são disponibilizadas nestes *softwares* ao se tentar solucionar uma atividade.

Quanto os procedimentos heurísticos e dedutivos no processo de validação matemática, quanto à passagem do Novo PC ao Velho PC, se observou que podem favorecer a compreensão do saber matemático que se pretende ensinar, de fato, pode ocorrer a geração de conjecturas, mas é mais freqüente discussão conceitual com argumentação matemática mais suscinta que o processo de validação por demonstração. Nas fases 02, 03 e 04 a passagem do Novo PC ao Velho PC ocorreu, se mostrando viável para favorecer invetigações matemáticas junto aos docentes e discentes. No entantos, os estudantes se arriscam mais que os professores nestas atividades e nas fases 03 e 04, correspondentes à formação discente, a passagem do Novo PC ao Velho PC ocorreram literalmente. Além disto, a mediação pegagógica do professor-pesquisador favoreceu em vários momentos a postura investigativa de alunos e professores no uso dos recursos computacionais voltados ao ensino de matemática. E neste sentido, tanto a reflexão, como a metareflexão ocorreram quando o professor-pesquisador conseguiu trabalhar integralmente a Seqüência Fedathi agregado à postura mão-no-bolso.

Outro fato observado, é que as situações surpresas surgem ao longo de várias sessões, e pode se dizer, inclusive, que elas são “germinadas” ao longo de um curso. Quando apresentadas em forma conjectural, naturalmente, as estratégias para demonstrar conjecturas são heurísticas baseadas na manipulação e simulação, no entanto, com base nas mediações docentes que os estudantes conseguem de fato estabelecer a passagem do Novo PC ao Velho PC, assumindo uma postura matemática investigativa. Sendo que em raras situações conjecturas matemáticas inéditas acabam surgindo.

Com respeito aos desenvolvedores de *software* educativo, voltado ao ensino de matemática, as situações surpresa exibem o peso da ação-instrumental e das divergências conceituais na produção de contextos inesperados em termos matemáticos. Neste aspecto, não basta considerar somente questões técnicas no desenvolvimento, mas cabe aos desenvolvedores compreender mais sobre os processos epistemológicos quanto o saber a ensinar para diminuir divergencias conceptuais, bem como, compreender os processos de mediação envolvidos na relação-homem-máquina-saber nas ações instrumentais.

No mais, espero que o leitor possa colaborar com as idéias presentes, desenvolvendo investigações posteriores que aprofundem este assunto.

De fato, gostaria de ter aprofundado a discussão ao considerar software de manipulação simbólica, no entanto, esta temática será abordada em investigações posteriores.

Bibliografia Referencial

BALACHEFF, N. The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In: BISHOP, A. J. et al. (org). **Mathematical Knowledge: Its growth through teaching.** London-England: Kluwer Academic, 1991. Cap.8, p.189; p. 175-192.

BARBOSA, J.L.M. **Geometria euclidiana plana.** 4 ª ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM/IMPA, 1999. 161 p. 21 cm. (Coleção do Professor de Matemática – SBM) p. 1-2, p. 10-11, p. 22, p. 72-76. ISBN 85-85818-02-6.

BORGES NETO, H. Notas de aula: Ensino de Matemática. Fortaleza-CE, FACED/UFC, 2000. *pré-print*.

BORGES NETO, Hermínio. Uma classificação sobre a utilização do computador pela escola. Fortaleza-CE: **Educação em Debate**, Ano 21, n.37.1999. p.135-138.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo-SP: Edgard Blücher, 1978. 488 p. 21cm. p.143.

CHANG, C. & LEE, R.C. **Symbolic logic and mechanical theorem proving**. New York: Academic Press, 1973. p.45; p.45-46; p.46-47;p.54-68;p.55

COLE, M. Desenvolvimento cognitivo e escolarização formal: a evidência da pesquisa transcultural. Em L.C. Moll (Org.) **Vygotsky e a educação: implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica.** Porto Alegre-RS: Artmed, p. 86-87; p. 86-88; p.87, p.85-105, 1996.

DA COSTA, N. **Sistemas formais inconsistentes.** Curitiba-PR: Ed. UFPR, 1993. (Clássicos n. 03), 21 cm. p. ix – x.

DAVIS. P & HERSH. D. **A experiência matemática.** Tradução: João Bosco Pitombeira. 3ª. ed. Rio de Janeiro-RJ: Francisco Alves, 1985. 21cm. p. 328-335; p. 386; p. 386-387; 388-389; p.423-430.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa.** 6. ed. São Paulo-SP: Paz e Terra, 1997. p. 24.

GRANGER, G.G. **A ciência e as ciências.** São Paulo-SP: Editora UNESP, p.25, 1994.

GRAVINA, M.A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS. 2002. 260 f. p. 23-24; p. 36; p.40; p.42-43; p.99-100.

GUEDES, Ricardo B.M. **Inteligência computacional: Métodos procedimentais para pensar, aprender e resolver problemas.** Dissertação de Mestrado) Pós-graduação em Ciência da Computação/UFPE, Recife-PE. 1998, 198 f. p. 23-24.

HAAK, Suzana. **Filosofia das lógicas.** Tradução: César Augusto Mortari. São Paulo-SP: Editora Unesp, 2002, 329 p. 21 cm. p. 282.

HENRI, F. L´ingenierie pedagogique. France: Universite et Ecole de Tecnologie Superieure, 1997. p.1; p. 3-17.

HOFSTADTER, Douglas R. **Gödel, Escher, Bach: Um entrelaçamento de gênios brilhantes.** São Paulo-SP: Imprensa Oficial do Estado, 2001. 21 cm. p. 213.

LABORDE, J.M. **Um developpement algebrique de l'algorithme d' exclusion et quelques problemes geometriques en algebre de Boole.** (These) Université Scientifique et Médicale de Grenoble. Grenoble-France, 1977. 197p. 21cm.

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações.** Tradução: Nathanael C. Caixeiro, Rio de Janeiro-RJ: Zahar, 1978. 212p. 21cm. p. 15-16; p.17; p.25; p.188.

LÉVY, P. **A máquina universo.** Tradução: Bruno C. Magne. Porto Alegre-RS: ArtMed, 1998. p. 81

LÉVY, P. **O que é o virtual?** São Paulo-SP: Editora 34, 1996, 160 p.

LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em Geometria: Comprimento, área, volume e semelhança.** Rio de Janeiro: IMPA, 1991. p.1-4.

MACHADO, N.J. **Matemática e realidade: Análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino de matemática.** 4 ª ed. São Paulo-SP: Cortez, 1997. p. 29, p.30, p.31 – 32, p.33, p.34, p.36, p.43-44.

MACHADO, S.D.A. *et al.* **Educação matemática: Uma introdução.** 1 ª ed. São Paulo-SP: EDUC, 1999. 208 p. 18 cm. p. 15; p. 67; p. 198-199.

MENEGHETTI, R.C.G. Logicismo, formalismo e intuicionismo: analise de seus pressupostos. SBEM: Rio de Janeiro-RJ: **Anais do VII ENEM** (VII Encontro Nacional de Educação Matemática). Disponível em: < http://www.sbem.com.br/ANAIS/VII%20ENEM/ARQUIVOS/GT_13.pdf>. Acesso em: 12 mar 2005. p.1, p.2, p.3, p.5-6, p. 7-8.

OLIVEIRA, Augusto F. **Lógica e Aritmética: Uma introdução informal aos métodos formais.** 2ª ed. Portugal – Lisboa: Gradiva, 1996. p. 54.

PAIS, Luiz C. **Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa.** 2ª ed. Belo Horizonte-BH: Autêntica, 2001. 128p. p. 17; p. 17-18; 18-19; p.19; p.65-67; p.68-69; 78; p. 99-100.

POINCARÉ. Henri. **O valor da ciência.** Tradução: Maria H. F. Martins. 2ª ed. Rio de Janeiro-RJ: Contraponto, 1985. p. 13.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático.** Tradução: Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 1978. 196 p. 21cm. p. 86; p.104; p. 106; p.125 – 129; p.132-133.

PONTE, J.P**. Investigações matemáticas na sala de aula.**1ª ed. Belo Horizonte-BH, Autêntica Editora, 2003. 152p. 21cm, p.13; p.21; p.22; p.22-23;p.25;p25-53.

SANTANA, J.R. & BORGES NETO, H. A construção de um lugar geométrico que seja uma elipse, com uso do software Cabri Géomètre. Será que é? In: **VI ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática.** 1998, São Leopoldo-RS. Anais...São Leopoldo: UNISINOS, 1998. p. 723 – 725.

SANTANA, J.R. **Do Novo PC ao Velho PC: A prova no ensino de Matemática a partir do uso de recursos computacionais.** 2002. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE. p.09, p.10, p.11, p. 30 – 31, p.90, p. 104-135, p. 121-123, p. 137-138.

SCHÖN, Donald A. **Educando o profissional reflexivo: Um novo design para o ensino e a aprendizagem.** Porto Alegre-RS: Artes Médicas Sul, 2000. p.31. p.32-.33; p.37; p.99-100; p.109; p.101-110; p.111.

SILVA, Cassandra R. O. **MAEP: Um método ergopedagógico interativo de avaliação para produtos educacionais informatizados.** (Tese de doutorado), Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção/ Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC: 2002. 224 f. p. 153-164; 153-195; 165-188; 187-195.

SILVEIRA, Sérgio A. **Software Livre: A luta pela liberdade do conhecimento.** 1ª ed. São Paulo-SP: Fundação Perseu Abramo, 2004, 77 f. p.9; p.11; p.15; p. 16-23.

SOUZA, Maria José **A. Informática educativa na educação matemática: Um estudo sobre a Geometria no ambiente do software *Cabri-Géomètre*.** Fortaleza-CE: FACED/UFC, 2001. (Dissertação de Mestrado). p. 54; p. 83-84.

VELHO, L. & GOMES, J. **Sistemas gráficos 3D**. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2001 (Série de Computação e Matemática), p. 16-18.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. .Porto Alegre-RS: **Revista do GEMPA**, 1996, nº4. p. 9-19.

VIGOTSKI, L.S. **Pensamento e Linguagem.** 2 ª ed. São Paulo-SP: Martins Fontes, (Psicologia e Pedagogia). p. 1; p. 5, p.7-8, p. 10 1998.
WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas.** 2 ª ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM/IMPA, 1998. (Coleção o professor de matemática). p.1-2

Bibliografia Consultada

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Frederico Commandino, Coimbra-Portugal: Imprensa da Universidade, 1855.

FILHO, Edgard de A. **Operações Binárias**. São Paulo-SP: Edgard Blücher, 1984.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 1999. (Projeto Euclides). p. 15.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Plano**. 2ª ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM/IMPA, 1992. (Coleção o professor de matemática).

MACHADO, Nilson J. **Matemática e língua materna: Análise de uma impregnação mútua.** São Paulo-SP: Cortez, 1990. p.36-39.

PLATÃO. **Timeu**. São Paulo-SP: Nova Cultural, 1987. (Coleção os Pensadores).

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas.** 2 ª ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM/IMPA, 1998. (Coleção o professor de matemática).

Software Educativo

AGAMIA, Mohamed. Towers from HANOI. (Torre de Hanoi), *Shareware*, 1993.

FERNANDES, Hilaire. *Dr. Geo* version 0.60b. 1998.

GROTHMANN R. *Compasses and Ruler*. Version 1.9, Disquete 3 ½ Windows 95.

LABORNE, J.M. & BELLEMAIN, F. *Cabri Géomètre II*, version 1.0 MS Windows: Texas Instruments, 1998. Disquete 3 ½ Windows 95.

MICROSOFT, *NetMeeting* version 3.0: Microsoft Corporation, 1997, Conjunto de programas CD-ROM. Windows 95.

MÜLLER, Carsten, GeoNext, 2004. Departamento de Didática da Matemática/Universidade de Bayheut, Alemanha (tradução: Hermínio Borges Neto e José Rogério Santana).

PAPPERT, S. SWLOGO/Windows 95. *Freeware*, 1997.

SANTANA, J.R.; BORGES NETO, H.; AMARAL, E. S. MENESES, I. A. *GeoMeios* versão piloto 1.0. Laboratório Multimeios-FACED/UFC, Applet em Java 2000.

SHERLOCK, Tomas W. *Mathematica Standard* Version 2.2. Wolfram Research, 1993. CD-ROM, Windows 3.1.

TEODORO, V. D. et al. *Modellus* versão 1.11. 1996. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova Lisboa, Disquete 3 ½ Windows 95.

ANEXOS 01: RELATÓRIO DOS DADOS COLETADOS DURANTE A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES DAS INSTITUIÇÕES: COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA E TECLA FERREIRA PARA USO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

MODELO DO QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO: EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Leia atentamente as questões apresentadas a seguir. Quaisquer dúvidas solicite questionamentos do professor ou de algum de seus monitores.

QUESTIONÁRIO

I – Identificação:

01. Nome completo: ____

02. Idade: __________ 03. Endereço: ____

04. Bairro: ________________________________ 05. Cidade: __________________________

06. Telefone para contato: (0xx85):____

II – Formação:

07. Formação Acadêmica (graduação): ____

08. Ano de conclusão da primeira graduação: ___________________________________

09. Possui curso de pós-graduação? Sim [ ] Não [ ]

09.1. Caso tenha respondido “Não”, continue o questionário a partir da questão dez (10). Se você respondeu “Sim”, selecione uma das opções abaixo:

[ ] Especialização;
[ ] Mestrado Profissionalizante;
[ ] Mestrado Acadêmico;
[ ] Doutorado;
[ ] Pós-doutorado.

09.2. Sua pós-graduação foi em qual área de conhecimento? ______________________

III – Docência

10.1 Em que colégio trabalha atualmente? ___________________________________

10.2 Quando iniciou seu trabalho docente no colégio em que trabalha? _______________

11. Qual a disciplina leciona na atualidade no colégio em que trabalha?

12. Já lecionou outras disciplinas neste colégio? Quais?

13. Em qual série você trabalhará no colégio em 2004?

14. Quantos alunos você possui em suas turmas? ______________________________

IV – Sobre o curso:

15. Faça uma avaliação do trabalho desenvolvido no curso realizado, relatando os conceitos mais relevantes para sua prática como professor em sala-de-aula. Apresente também sugestões para melhoria e aprimoramento deste curso.

TABULAÇÃO DE DADOS DO QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO: EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TABULAÇÃO DOS DADOS DO QUESTIONÁRIO DE CARACTERIZAÇÃO DOCENTE E PERCEPÇÃO SOBRE O CURSO APLICADO AOS PROFESSORES DO COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA

I – IDENTIFICAÇÃO

Tabela CMF-Professores 001 – Identificação dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Idade	Bairro	Cidade	Instituição
Aluno 001: Descartes	47	C. Esperança	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 002: Euler	34	Aldeota	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 003: Gauss	55	Dionísio Torres	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 004: Poincaré	48	Esplanada	Maracanaú-CE	CMF
Aluno 005: Hilbert	36	Itaperi	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 006: Willes	50	Aldeota	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 007: Da Costa	38	Aldeota	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 008: Ada	31	Damas	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 009: Fibonacci	38	Cambeba	Fortaleza-CE	Tecla Ferreira
Aluno 010: Pascal	50	Praia do Futuro	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 011: Boole	40	Passaré	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 012: E.Noether	35	C. Funcionários	Fortaleza-CE	Tecla Ferreira
Aluno 013: Pitagoras	42	Montese	Fortaleza-CE	Tecla Ferreira
Aluno 014: Talles	38	Montese	Fortaleza-CE	Tecla Ferreira

Fonte de dados: Questionário - Perguntas 01, 02, 03, 04 e 05.

II – FORMAÇÃO

Tabela CMF-Professores 002 – Formação dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Graduação	Conclusão	Pós-graduação				
			Lato Sensu		Strito Sensu		
			Esp.	Ms.Prof.	Ms.	Dr.	Pós Dr.
Aluno 001: Descartes	L.P.Matem.	1982					
Aluno 002: Euler	L.P.Matem.	1992	X				
Aluno 003: Gauss	L.P.Matem.	1982	X				
Aluno 004: Poincaré	L.P.Matem.	1981		X			
Aluno 005: Hilbert	L.Ciências	1991	X				
Aluno 006: Willes	Matem/Eng1.	1977	X				
Aluno 007: Da Costa	L.P.Matem.	1985					
Aluno 008: Ada	L.P.Matem.	1999	X				
Aluno 009: Fibonacci	Matem./Eng2.	1988	X				
Aluno 010: Pascal	Matem./Eng1.	1976	X				
Aluno 011: Boole	Matemática	1985	X		X		
Aluno 012: E.Noether	L.P.Matem	1996					
Aluno 013: Pitagoras	L.P.Matem	1992					
Aluno 014: Talles	Geografia	1999					

L.P. Matem. : Licenciatura Plena em Matemática	Matemática.: Bacharelado em Matemática
L.Ciências.: Licenciatura Plena em Ciências	Matem/Eng1: Bacharel em Matemática e Eng. Cívil
	Matem/Eng2: Bacharel em Matemática e Eng. Mecânico

Fonte de dados: Questionário – Perguntas 07, 08, 09 e 09.1.

Tabela CMF-Professores 003 – Área de pós-graduação dos participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Área Específica	Pós-graduação		
		Lato Sensu		Strito Sensu
		Esp.	Ms.Prof.	Ms.
Aluno 002: Euler	Informática Educativa	X		
Aluno 003: Gauss	Atualização Pedagógica	X		
Aluno 004: Poincaré	Álgebra e Teoria dos Corpos		X	
Aluno 005: Hilbert	Educação	X		
Aluno 006: Willes	Educação	X		
Aluno 007: Da Costa	Educação			
Aluno 008: Ada	Educação	X		
Aluno 009: Fibonacci	Planejamento Educacional	X		
Aluno 010: Pascal	Técnico de Ensino	X		
Aluno 011: Boole	Análise / Teoria dos Códigos	X		X

Fonte de dados: Questionário – Perguntas 09, 09.1 e 09.2.

III – DOCÊNCIA

Tabela CMF-Professores 004 – Dados sobre atividades docentes dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Instituição	Inicio dos Trabalhos na Instituição	Disciplinas Ministradas			
			Disciplina	Nível de Ensino	Disciplina	Nível de Ensino
Aluno 001: Descartes	CMF	1984	Matemática	Ens.Médio	Física	Ens. Médio
Aluno 002: Euler	CMF	1993	Matemática	Ens.Médio	Ciências	Ens. Fund.(2)
Aluno 003: Gauss	CMF	1983	Geometria	Ens.Fund.(2)	Física	Ens. Fund.(2)
Aluno 004: Poincaré	CMF	1982	Matemática	Ens.Médio	-	-
Aluno 005: Hilbert	CMF	1997	Matemática	Ens. Fund.(2)	Des. Geom.	Ens. Fund.(2)
Aluno 006: Willes	CMF	1990	Matemática	Ens. Fund.(2)	Des. Geom.	Ens. Fund.(2)
Aluno 007: Da Costa	CMF	1985	Matemática	Ens. Fund.(2)	Des. Geom.	Ens. Fund.(2)
Aluno 008: Ada	CMF	2002	Matemática	Ens. Fund.(2)	Física	Ens. Fund.(2)
Aluno 009: Fibonacci	T. Ferreira	2002	Matemática	Ens.Médio	-	-
Aluno 010: Pascal	CMF	1998	Des.Geom.	Ens. Fund.(2)	-	-
Aluno 011: Boole	CMF	1995	Matemática	Ens.Médio	Matemática	Ens. Fund.(2)
Aluno 012: E.Noether	T. Ferreira	1998	Matemática	Ens.Médio	Matemática	Ens. Fund.(2)
Aluno 013: Pitagoras	T. Ferreira	1997	Matemática	Ens.Médio	-	-
Aluno 014: Talles	T. Ferreira	2000	Matemática	Ens.Médio	Geografia	Ens. Fund.(2)

Fonte de dados: Questionário – Perguntas 10.1, 10.2, 11, 12 e 13.

Tabela CMF-Professores 005(a) – Estimativa da quantidade de alunos dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Instituição	Quantidade de Alunos estimada pelos respectivos professores
Aluno 001: Descartes	CMF	70 alunos
Aluno 002: Euler	CMF	75 alunos
Aluno 003: Gauss	CMF	80 alunos
Aluno 004: Poincaré	CMF	35 alunos
Aluno 005: Hilbert	CMF	90 alunos
Aluno 006: Willes	CMF	26 alunos
Aluno 007: Da Costa	CMF	28 alunos
Aluno 008: Ada	CMF	100 alunos
Aluno 009: Fibonacci	T. Ferreira	60 alunos
Aluno 010: Pascal	CMF	40 alunos
Aluno 011: Boole	CMF	100 alunos
Aluno 012: E.Noether	T. Ferreira	112 alunos
Aluno 013: Pitagoras	T. Ferreira	50 alunos
Aluno 014: Talles	T. Ferreira	115 alunos

Fonte de dados: Questionário – Pergunta 14.

IV – PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE O CURSO

Quadro CMF-Professores 001(a) – Tabulação das respostas sobre a avaliação que os mesmos fizeram sobre o curso realizado em Fev/2004 .

Aluno 001: Descartes	CMF
"O curso foi altamente motivador e muito interessante por tratar de temas de grande importância e aplicabilidade no nosso dia-a-dia na sala-de-aula. Dentre os temas tratados e que tornaram este curso tão importante e motivador vou citar alguns: 1. Uso do computador na sala-de-aula; 2. A passagem do novo para o velho PC; 3. A aplicação de muitos softwares educativos no estudo da geometria. Acho que a carga horária de um curso deste nível e com tamanha importância como foi este, deveria ser maior, vejo também que deveríamos ter um segundo momento para discutir e aprofundar conceitos e situações apresentadas, e que merecem uma maior atenção. Destaco a grande competência do professor e sua equipe e agradeço a oportunidade de ter estado lá."	
Aluno 002: Euler	CMF
"Os conceitos, definições e abordagens mais relevantes foram de contrato didático, engenharia didática e seqüência didática. Como explicitado em contrato um dos objetivos do curso seria migrar do novo PC para o velho PC em decorrência de fatores como 'bugs' e a validação (no velho PC) de questionamentos surgidos quando da utilização do computador. No entanto, mesmo após solicitar material (lápis, borracha e compasso) o mesmo material não fora utilizado em momento algum. O que gerou um descontentamento e desânimo principalmente aos professores de desenho. No mais o curso foi extremamente proveitoso para os que desconheciam o potencial pedagógico da ferramenta computador (dentro de uma postura adequada do professor). Sendo também, o espaço do laboratório um palco de discussões histórico-filosófico-educacionais muito bem conduzidas pelo ministrante do curso. Ao meu ver quando da construção realizada pelo professor do colégio Tecla Ferreira o ministrante tentou mostrar, insistindo, que não devemos "confiar" no computador. O que para alguns foi uma oportunidade muito bem aproveeitada e desenvolvida para outros foi desmotivadora sendo a argumentação do ministrante do curso pouco compreendida e/ou aceita. Infelizmente o tempo fora insuficiente para 'lapidar' os conceitos, definições e objetivos apresentados".	
Aluno 003: Gauss	CMF
"Muito bom. O tempo de duração deveria ser maior. O passar do novo PC para o velho PC revela a reflexão necessária que o professor teria como ferramenta no ensinar a matemática visando criar os 'discípulos' no que diz respeito a evolução sadia da matemática trabalhada melhor cientificamente como ciência e conduz o cidadão para a conscientização política mais saudável, um cidadão melhor para a vida em comunidade e temente a Deus. Esperamos que o curso seja um elo forte entre os professores do CMF e sua formação profissional requintada por especializações, mestrados e quem sabe, até doutorado, A tecnologia do curso foi de alto-nível."	
Aluno 004: Poincaré	CMF
"Gostei das palestras, principalmente sobre o tema 'uso do computador na sala-de-aula".	
Aluno 005: Hilbert	CMF
"Excelente. Os conceitos mais relevantes foram os de 'engenharia didática' e 'seqüência didática', em especial a 'seqüência Fedathi'. A única sugestão é o aumento da carga-horária do curso."	
Aluno 006: Willes	CMF
"Engenharia didática e seqüência didática foram os conceitos mais relevantes. Numa segunda fase sugiro e gostaria de aprofundamento nas modelagens específicas para geometria e física."	
Aluno 007: Da Costa	CMF
"Eu acredito que o trabalho desenvolvido apresentou uma importante perspectiva para a reciclagem de professores, não só pela apresentação do software Cabri, que é uma excelente ferramenta para ser utilizada em laboratório, mas principalmente pela apresentação de uma linha metodológica que o professor pode utilizar durante o processo ensino-aprendizagem. Dentre os conceitos apresentados considero o 'contrato didático' o mais relevante para o processo, pois faz um delineamento de todas as passagens a serem cumpridas. A presença do profissional em Matemática quando se utilizam meios multimídia como auxiliares no processo ensino-aprendizagem é fundamental, pois é necessário que fique claro para o aluno que esses meios são desenvolvidos a partir do conhecimento já consolidado."	

Aluno 008: Ada	CMF
"O curso foi muito proveitoso. Pena que não tive a oportunidade de acompanhar todas as aulas. Dos conceitos mais importantes, destaco a engenharia didática. Uma sugestão para melhorar o curso é aumentar a carga horária."	

Quadro CMF-Professores 001(b) – Tabulação das respostas sobre a avaliação que os mesmos fizeram sobre o curso realizado em Fev/2004 .

Aluno 009: Fibonacci	CMF
"O curso foi uma excelente oportunidade dada pelo professor RS que o conduziu de forma clara, simples e objetiva mostrando as vantagens e os cuidados da passagem do 'novo PC' ao 'velho PC'. Utilizando a engenharia didática e tendo como base a seqüência Fedathi o professor poderá aplicar de forma eficiente essa nova tecnologia na educação. Com recursos que o novo PC dispõe é possível através dos conceitos e propriedades matemáticas, estudar situações inusitadas que no velho PC não existem praticamente. É preciso mais tempo para que os professores se familiarizem com os programas de aplicação matemática para depois utilizá-las complementando os estudos dos conceitos e definições matemáticas. Espero outras oportunidades. Obrigado!"	
Aluno 010: Pascal	CMF
"Eu achei o curso muito bom, a pesar de não ter muito domínio naqueles programas, gostaria de sentir mais o sabor destas coisas sobre o uso do computador."	
Aluno 011: Boole	CMF
"Gostei, principalmente da integração dos professores".	
Aluno 012: E.Noether	T. Ferreira
Aluno 013: Pitagoras	T. Ferreira
Aluno 014: Talles	T. Ferreira

Fonte de dados: Questionário – Pergunta 15.

V – FREQÜÊNCIA NO DECORRER DO CURSO

Tabela CMF-Professores 006 – Freqüência dos professores participantes da pesquisa em Fev/2004.

Código Identificador	Instituição	02.Fev.04	03.Fev.04	04.Fev.04	05.Fev.04	06.Fev.04	Total
Aluno 001: Descartes	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 002: Euler	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 003: Gauss	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 004: Poincaré	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 005: Hilbert	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 006: Willes	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 007: Da Costa	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 008: Ada	CMF	00	01	01	00	01	03
Aluno 009: Fibonacci	T. Ferreira	01	01	01	01	01	05
Aluno 010: Pascal	CMF	01	01	01	01	00	04
Aluno 011: Boole	CMF	01	00	00	01	00	02
Aluno 012: E. Noether	T. Ferreira	01	01	01	01	01	05
Aluno 013: Pitagoras	T. Ferreira	01	01	01	01	01	05
Aluno 014: Talles	T. Ferreira	01	01	01	01	01	05

Fonte de dados: Questionário – Lista de Freqüência.

FOLHAS DE ATIVIDADES APLICADA AOS PROFESSORES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO: EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CURSO ENSINO DE MATEMÁTICA ASSISTIDO POR COMPUTADOR 2004/1

LOCAL: COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA (CMF)
PÚBLICO ALVO: PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

I – ATIVIDADES INICIAIS:

A – FAMILIARIZAÇÃO (40 – 50 minutos):

01. Junto com um ou mais colegas, conforme determine o professor, realize as ações seguintes:

    a) Pela simples observação do software determine o que é o menu de comandos, a barra de ferramentas e a zona-de-desenho, justificando suas respostas;

    b) Descreva o papel que cada grupo de comandos determina na barra de ferramentas;

    c) Apresente os resultados de observação da sua equipe, questionando os comandos do software que desconheça.

B – CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS ELEMENTARES (180 minutos):

02. Dada uma reta **r**, e um ponto **P** que não pertença a **r**, trace uma reta **s** pelo ponto **P** que seja paralela a reta **r**. Movimente os elementos desta construção no software e verifique suas propriedades.

03. Dada uma reta **r**, e um ponto **P** pertencente a **r**, trace uma reta **s** pelo ponto **P** que seja paralela a reta **r**. Movimente os elementos desta construção no software e verifique suas propriedades.

04. Dada uma reta **r**, e um ponto **P** que não pertença a **r**, trace uma reta **s** pelo ponto **P** que seja perpendicular a reta **r**. Movimente os elementos desta construção no software e verifique suas propriedades.

05. Dada uma reta **r**, e um ponto **P** que pertença a **r**, trace uma reta **s** pelo ponto **P** que seja perpendicular a reta **r**. Movimente os elementos desta construção no software e verifique suas propriedades.

06. Dada uma reta **r**, determine um segmento de reta **AB** paralelo a reta **r**, que não pertença a **r**. Movimente os elementos desta construção no software e verifique suas propriedades.

07. Dada uma reta **r**, determine um segmento de reta **AB** perpendicular a reta **r**, que não pertença a **r**. Movimente os elementos desta construção no software e verifique suas propriedades.

08. **Desafio 01:** É possível que exista alguma condição em que uma reta, semireta ou segmento de reta sejam paralelos e perpendiculares a uma reta r dada simultaneamente?

09. Dados os pontos **A** e **B**, determine:

a) Determine a distância entre os pontos **A** e **B** através dos recursos do software;
b) Determine um segmento pelos pontos **A** e **B**;
c) Marque o ponto médio **M** no segmento **AB**;
d) Determine a reta **s** como mediatriz do segmento **AB**;
e) Que propriedades caracterizam o segmento **AB**?
f) Que propriedades caracterizam o ponto médio do segmento **AB**?
g) Que propriedades caracterizam a reta **s** mediatriz do segmento **AB**?

10. Dados os pontos **A**, **B** e **C** determine:

a) Determine os segmentos **AB** e **BC** pelos pontos **A**, **B** e **C**;
b) Determine o ângulo **ABC** através dos recursos do software;
c) Determine a reta **t** como bissetriz do ângulo **ABC**;
d) Que propriedades caracterizam o ângulo **ABC**?
e) Que propriedades caracterizam a reta **t** bissetriz do ângulo **ABC**?
f) O que ocorre com o ângulo **ABC** quando os pontos **A**, **B** e **C** são colineares?
g) O que ocorre com o ângulo **ABC** quando os pontos **A**, **B** e **C** não são colineares?
h) Pelos pontos **A**, **B** e **C** faça um triângulo **ABC** e meça todos os seus ângulos usando ferramentas do software. Verifique:
   i) A soma dos ângulos internos do triângulo **ABC**;
   ii) A soma dos ângulos externos do triângulo **ABC**;
   iii) A soma dos ângulos do triângulo **ABC**.

11. Construa uma circunferência qualquer e analise suas propriedades com os recursos disponíveis no software.

ANEXOS 02: RELATÓRIO DOS DADOS COLETADOS DURANTE A FORMAÇÃO DOS ALUNOS DE SEXTA SÉRIE DA ESCOLA MUNICIPAL DE ENSINO FUNDAMENTAL MONTEIROS DE MORAES

CARACTERIZAÇÃO DOS DISCENTES E ANOTAÇÕES DE AULA DOS DISCENTES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO: EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TABULAÇÃO DOS DADOS COLETADOS PARA CARACTERIZAÇÃO DISCENTE E AS ANOTAÇÕES DOS ESTUDANTES DO COLÉGIO MUNICIPAL MONTEIRO DE MORAES

I – IDENTIFICAÇÃO

Tabela MM - alunos 001 – Caracterização dos estudantes do MM[44] que participaram do Curso de Geometria assistido por computador em 2004.

Código Identificador	Sexo	Cidade	Instituição
Aluno 001b: Alef	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 002b: Beth	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 003b: Guimel	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 004b: Dalet	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 005b: He	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 006b: Vav	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 007b: Zayin	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 008b: Chet	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 009b: Tet	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 010b: Yud	Feminino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 011b: Caf	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 012b: Lamed	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 013b: Mem	Masculino	Fortaleza-CE	MM
Aluno 014b: Num	Masculino	Fortaleza-CE	MM

Fonte de dados: Sondagem junto ao professor, lista de freqüência, Diário de campo e folha de atividades.

II – DADOS DE FORMAÇÃO DISCENTE

Tabela MM - alunos 002 –. Caracterização discente.

Código Identificador	Série / Ano	Idade em anos	Observações
Aluno 001b: Alef	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 002b: Beth	6ª série / 2004	13	"sem considerações"
Aluno 003b: Guimel	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 004b: Dalet	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 005b: He	6ª série / 2004	12	"Congratulada na OEM[45]/CE"
Aluno 006b: Vav	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 007b: Zayin	6ª série / 2004	13	"sem considerações"
Aluno 008b: Chet	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 009b: Tet	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 010b: Yud	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 011b: Caf	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 012b: Lamed	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 013b: Mem	6ª série / 2004	12	"sem considerações"
Aluno 014b: Num	6ª série / 2004	12	"sem considerações"

Fonte de dados: Sondagem junto ao professor e lista de freqüência.

[44] Escola Municipal Monteiro de Moraes.
[45] Olimpíadas Estaduais de Matemática – CE.

III – ANOTAÇÕES DOS ALUNOS NO CADERNO DE ATIVIDADES

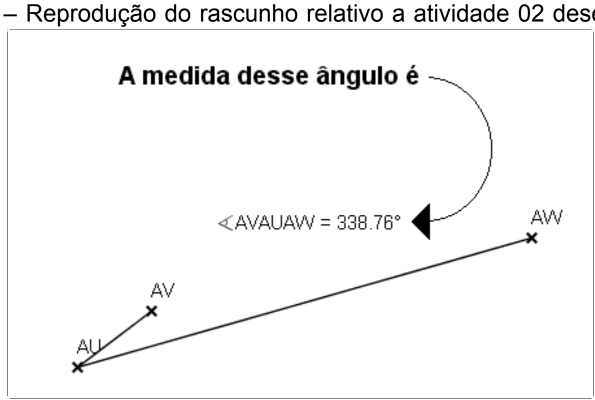
Quadro MM - alunos 001(a) – Tabulação das anotações dos alunos

Aluno 001b: Alef	MM

Atividade 01 <página 03 - verso>: "O menu de comandos nos leva a ter várias opções para ajudar-nos no trabalho. A folha de desenho, é o local onde podemos fazer vários desenhos, como o desenho geométrico. A barra de ferramentas tem várias figuras que dar a ação que pretendemos realizar. Observações: Eu entrei em várioas janelas, e desenhei gráficos, eu sei apagar desenhos, eu sei entrar em alguns sistemas, eu aprendi a arrastar os desenhos, eu espero na proxima aula aprender mais sobre o assunto."

Atividade 02 <página 04 – verso>: "Eu observei que se você for fazer uma circunferência cada vez que você se distânciar do ponto inicial mais ela fica maior. Se você desenhar um polígono no lugar errado, é só você clicar no ícone com esse desenho <ícone do GeoNext: Mover> significa mover. E se você apagar algum desenho é só você clicar no ícone com esse desenho <ícone do GeoNext: Restaurar>. E se você quiser parar de desenho é só clicar nesse ícone <ícone do GeoNext: Congelar>. E se eu quíser salvar um polígono, ângulo é só ir no ícone com esse desenho <ícone do GeoNext:Salvar> salvar. Se você desenhar um ângulo você pode abrir ele até você quiser, basta clicar no ícone mover.

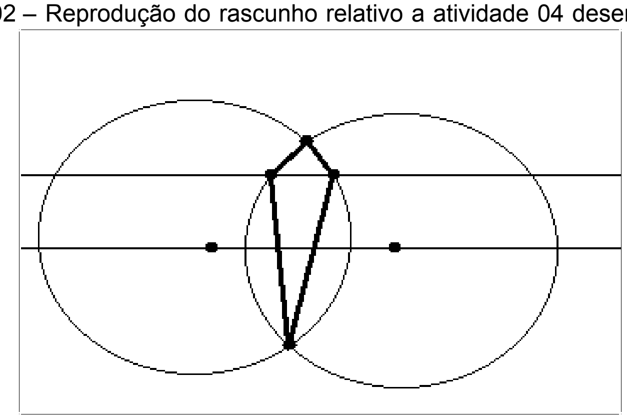
Figura RMM-Alunos 001 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 02 desenvolvido pelo aluno Alef.



Atividade 03 <página 07 – frente>: "Observação da atividade 3: Eu entendi que toda reta paralela se minimizam ela não é mais a reta paralela."

Atividade 04 <página 09 – frente>: "Observação da atividade 4: Eu entendi que você faz esse polígono."

Figura RMM-Alunos 002 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 04 desenvolvido pelo aluno Alef.



"Ela não é paralela é só mover e elas se cruzam."

Quadro MM - alunos 001(b) – Tabulação das anotações dos alunos

Aluno 001b: Alef	MM

Atividade 05 <página 11 – frente>: “Para fazer: Aprenda => Quadrado”.

Atividade 06 <página 13 – frente>: “Eu vi que quantos mais peças tem, mas dificil é construir a torre eu vi com 3 discos, 4, 5, 6, 7, 8 e agora vou fazer com nove. 1 peça => 1 movimento; 2 peças => 3 movimentos; 3 peças => 7 movimentos; 4 peças => 15 movimentos; 5 peças => 31 movimentos.”

Atividade 07 <página 16 frente>: “Hanoi foi inventado por um homem que era capacho do rei, ele mandou fazer um jogo que desafia-se o rei, então ele fez. Hanoi 4 discos: ABACABADABACABA.”

Folha Anexa: “Equipe 03: Alef, Lamed, He e Dalet,

19/10/04. Sistema Cabri Géomètre II: Desenho Geométrico: É a figura que eu vejo; Construção Geométrica: É a lógica da Geometria; Geometria: É um ramo da Matemática que estuda relações entre objetos geométricos. Objetos geométricos: Noções intuitivas => ponto, reta, plano. Axiomas => As regras básicas do jogo geométrico; Definições => Desenvolver objetos geométricos.

20/10/04. Sistema: Cabri Géomètre II: Axioma: Dados duas retas e uma outra transversal as duas retas já mencionadas, se os ângulos internos formados pela interseção interna entre as retas com a transversal, for menor que dois ângulos retos, ou maior então as duas retas apresentadas inicialmente serão concorrentes.”

Aluno 002b: Beth	MM

Atividade 01 <página 03 - frente>: “Folha de desenho: É o local onde realizamos os ‘desenhos’ e suas construções geométricas”.

Atividade 01 <página 03 - verso>: “Barra de ferramentas: Reune vários ‘botões’ na forma de figuras que representam a ação que pretendemos realizar.”

Atividade 02 <página 05 – verso>: “Eu entendi que cada semi-reta tem o tamanho diferente uma delas vai até o fim a outra falta pouco e a outra vai até o tamanho que a gente quer.”

Folha Anexa: Equipe 2: Beth, Guimel, Vav, Zayin, Caf

“Desenho geométrico: É a figura que eu vejo; Construção geométrica: É a lógica da Geometria; Geometria: É o ramo da Matemática que estuda relações entre objetos geométricos. Objetos geométricos; Objetos gráficos. Noções intuitivas: ponto, reta, plano. Axiomas: As regras mais simples do ‘jogo’; Definição: Serve para descrever objetos geométricos. Axiomas: Dados 2 pontos existe uma única reta que passa por estes pontos. Axiomas: Por um ponto passam infinitas retas. Axiomas: Tendo 3 pontos[...]. Axiomas: Dados duas retas e outra transversal as duas retas já mencionadas, se os ângulos internos formado pela intersecção interna entre as duas retas iniciais for maior ou menor que dois ângulos retos (nota: cada ‘ângulo reto = 90^{o}’) então as retas apresentadas serão com correntes”.

Aluno 003b: Guimel	MM
Atividade 01 <página 01 - frente>: Representação por figura da Torre de Hanoi acompanhada dos seguintes escritos: "1 1 mov; 2 3 mov; 3 [...]" Atividade 01 <página 03 - verso>: "Eu observei mexando nos botões que se você errar, você pode fazer uma coisa bem simples para apagar. É só você ficar clicando no botão desfazer que fica na barra de ferramentas do arquivo. Se você quiser apaga somente o que precisa. 13/10/2004: Hoje eu aprendi a fazer um polígono de medições de raios iguais e paralelos no começo foi dificil mais depois que eu aprendi num instante eu fazia. Atividade 02 <página 05 - verso>: "Eu observei que cada vez que aumenta o quantidade de peças aumenta também o número de vezes que você pode movimentar as peças da Torre de Hanoi. Eu observei também que se você multiplicar [...]" Atividade 02 <página 06 – verso>: "Hoje na aula 2 eu aprendi a somar as distâncias de um ponto a outro. Para você medir a distância de um ponto a outro é só você clicar no ícone chamado medir distância na barra de ferramenta de geometria. E depois clicar nos pontos (Ex: AB, BC, CD, ...). 1 A; 2 ABA; 3 ABACABA; 4 ABACABADABACABA". Atividade 07 <página 11 – verso>: Na figura 01 (Hexágono regular) Guimel anotou entre os segmentos do polígono números: DE com 1; EG com 2; GB com 3; BH com 1; HF com 2; FD com 3. UL REPITA 8 (PF 100 PD 45)". Folha Anexa: Equipe 02: Foram realizadas as mesmas anotações de Beth.	

Quadro MM - alunos 001(c) – Tabulação das anotações dos alunos

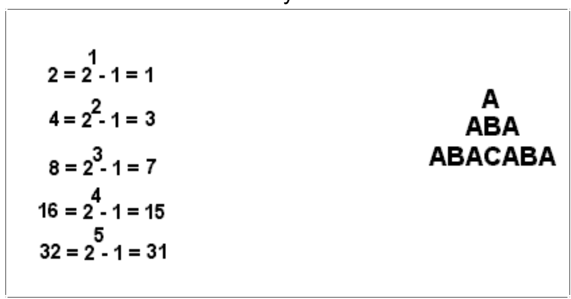
Aluno 004b: Dalet	MM
Atividade 02 <página 04 – verso>: "Eu aprendi que cada objeto, reta, semiretas e segmentos tem suas próprias funções: Exemplo: Vai do segmento que a gente quer ao outro. Na minha opinião reta perpendicular é um tipo de ponto que não tem listras. Nós fizemos uma estrela com polígonos: é depois nos medimos. Arco de circunferência ele não se fexa." Atividade 07 <página 11 – verso>: "Repita 3 [pf 100 pd 120]; Repita 4 [pf 100 pd 90]; Repita 200 [pf 18 pd 2] (Ao lado está anotado: "360 180"). Tem 3 torres: ABACABA; DABACABA." Folha Anexa: Equipe 03: Alef, Lamed, He e Dalet. As anotações são as mesmas de Alef. "João = T; Pedro = Dobro de João; Ana = Dobro de Pedro. X = T + 2 x T + 4 x T."	
Aluno 005b: He	MM
Atividade 01 <página 01 – verso>: "Esse jogo é muito bom para a gente pensar, e eu tento pensar de todas as formas e a maioria das vezes a gente tem que trazer todas as peças pro meio para trazer a maior para o final e que quanto mais a gente aumenta o nível mais aumenta as chances e dificuldades. 1-A; 2-ABA; 3-ABACABA." Atividade 01 <página 02 – verso>: "Eu entendi que cada uma das barras de ferramentas serve para coisas diferentes como por exemplo a barra de geometria que serve só para desenhos geométricos e a barra de visualização para visualizarmos melhor as coisas que fazemos no computador. Eu gostei muito das ferramentas uma delas é a de fazer ângulos porque nos ajuda a fazer ângulos e medidas. Aula 02: Hoje eu explorando o menu de comandos conheci outro botão que apaga, o desfazer e se eu apagar mas quiser reconstruir é só eu clicar no botão refazer que eu tenho aquela figura novamente." Atividade 02 <página 04 – verso>: "1-Para fazer retas no Geonext fazemos dois pontos e a reta aparece. Para fazer um segmento de reta é preciso ir em objetos, retas e por último segmento. Vamos para a folha de desenho clico e aparece um ponto, deixamos um espaço e fazemos outro ponto, esses pontos recebem o nome de letras do alfabeto." Folha Anexa: Equipe 03: Alef, Lamed, He e Dalet. As anotações são as mesmas de Alef. "João = T; Pedro = Dobro => João; Ana = Dobro => Pedro."	
Aluno 006b: Vav	MM
Atividade 01 <página 01 – verso>: Desenho da Torre de Hanoi com duas peças na primeira coluna. Atividade 01 <página 03 – verso>: "Entendi que cada uma das ferramentas têm várias funções sobre ângulos, e clicando o seguimento podemos fazer retas e clicar em, objetos. Eu gostei muito de fazer ângulos e retas. Eu entendi que cada uma das ferramentas tem uma função que serve para vários tipos de ângulos." Atividade 07 <página 11 – verso>: "1º Aprenda Quadrado (Quadrado Fazer => Triângulo: Repita 4 [pf 100 pd 90]; Circulo 4 [pf 100 pd 90]; Quadrado: Repi 4 [pf 100 pd 90]." Folha Anexa: Equipe 02: Foram realizadas as mesmas anotações de Beth.	

Aluno 007b: Zayin	MM

Atividade 01 <página 01 – verso>: “Anotações: Nesses tipos de jogos nos mesmos programas o que nós queremos como medida de ângulos tanto como a abertura e nós podemos saber o valor da abertura e criar o núcleo tanto do lado de fora como o de dentro. Isso é muito recreativo porque eu pude criar vários tipos e variadas formas isso é muito bom. PF 90”.

Atividade 01 <página 02 – verso>: “Eu observei que uma pessoa maior não pode fica em cima de outra menor e também as vezes nós só damos um movimento bem rápido com a pessoa maior, e que devemos mecher poucas vezes para deter o menor número de medidas e que esse jogo tem um tipo de arrumação. Observação quais são os comandos.

Figura RMM-Alunos 003 – Reprodução do rascunho relativo a atividade Torre de Hanoi desenvolvido pelo aluno Zayin.

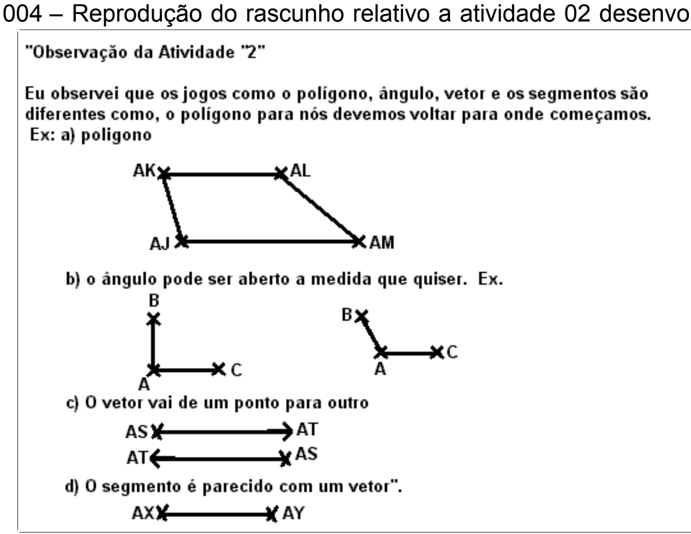


Quadro MM - alunos 001(d) – Tabulação das anotações dos alunos

Aluno 007b: Zayin	MM

Atividade 02 <página 04 – verso>: Zayin fez as seguintes anotações:

Figura RMM-Alunos 004 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 02 desenvolvido pelo aluno Zayin.



Atividade 02 <página 05 – verso>: “Para poder fazer um circulo é preciso fazer o seguinte – digito UL repita 200 [PD1.8PF2] = 360[PF1PD1]. Um quadrado é feito de quatro lados como ex: UL repito [PF90 PD90] = UL Repita 4 [PF90 PD90]. Um hexagono é feito da seguinte maneira ex: UL repito 8[PF100PD45]”.

Atividade 03 <página 07 – frente>: “Observação: O possível disso é que nós podemos fazer uma circunferência mas o que mais mim [...]”.

Folha Anexa: Equipe 02: Foram realizadas as mesmas anotações de Beth.

<table>
<tr><td>Aluno 008b: Chet</td><td>MM</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 01 <página 01 – verso>: “Eu pude observar que em objetos podemos encontrar vários comandos para poder fazer vários tipos de coisas como polígonos, retas, circunferências e que também podemos fazer várias coisas. Também pude observar que podemos fazer qualquer desenho com a barra de ferramentas.”
Atividade 02 <página 05 – verso>: “O que são? ... retas: É uma reta que tem começo e não fim são marcados por dois pontos. Segmento de reta é: [...]. Setor circular pode fazer vários tipos de objeto como uma metade de um circulo, etc... e que se fecha. Arco de circunferência é um semi circulo que não se fecha.
Atividade 06 <página 06 – frente>: “1,6139583333 x 2 = 3,229166666”.
Atividade 07 <página 09 – frente>: “3,6777083334 x 2 = 7,355416666; 1,9711902260 x 2 = 3,9423804520”.
Observação os itens Atividade 06 e Atividade 07 se referem à atividade em equipe sobre ponto médio.</td></tr>
<tr><td>Aluno 009b: Tet</td><td>MM</td></tr>
<tr><td colspan="2">Folha Anexa: Equipe 01: Tet, Yud, Num e Mem.
“Desenho geométrico = é a figura que vejo; Construção geométrica = é a lógica da Geometria; Geometria = é um ramo da Matemática que estuda relações entre objetos geométricos. Objetos geométricos: - noções intuitivas: ponto, reta, plano; - axiomas => as regras básicas do jogo; - definições: descrever objetos geométricos.”</td></tr>
<tr><td>Aluno 010b: Yud</td><td>MM</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 01 <página 01 – verso>: “Relatório 07/10/04: O menu de comandos é muito importante porque a gente precisa dele o tempo todo. 08/10/04: eu entendi que serve para a gente construir várias coisas. Para construir uma reta é necessário apertar no vetor e para fazer segmento ou segmento de reta é necessário ir lá no objetos e apertar. Para formar o polígono tem de ser o mesmo ponto (referente ao fato de no Geonext um polígono somente ser finalizado em seu ponto inicial).”</td></tr>
</table>

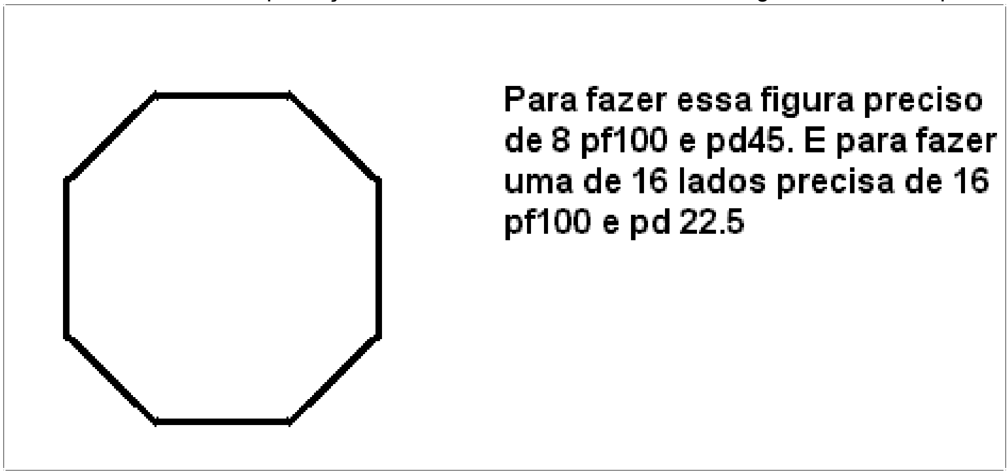
Quadro MM - alunos 001(e) – Tabulação das anotações dos alunos

<table>
<tr><td>Aluno 010b: Yud</td><td>MM</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 01 <página 03 – verso>: “Fazer: Triângulo: Repita 3[pf100 pd120]; Retângulo: Repita 4[pf100 pd90]; Circulo: Repita 200 [pf 1.8 pd2]. 18/10/04: 1 peça – 1movimento; 2 peça – 3movimentos; 3 peça – 7movimentos.”
Atividade 02 <página 05 – verso>: “Eu não aprendi tudo que vocês passaram mais o básico que era p/ mim aprender aprendi. X = T + 2xT + 4xT.”
Atividade 03 <página 07 – frente>: “desenhar 2 retas paralelogramas”.
Atividade 07 <página 09 – frente>: “Nós usamos reta, ponto, distância, nomear objetos, calculadora (relativo a atividade do ponto médio).”
Folha Anexa: Equipe 01: Tet, Yud, Num e Mem. Mesmas notas que Tet.</td></tr>
<tr><td>Aluno 011b: Caf</td><td>MM</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 01 <página 01 – verso>: “No programa Hanoi podemos ou que com quanto mais peças mais dificil fica. E nós podemos observar que também no jeito que as pedras se movimentam. Ex: A; ABA; ABACABA. Sempre nós temos que observar por onde jogamos para obter o menor número de jogadas. Cabri Géomètre II: Opções: Menu, Zona de Desenho e os Menus de construção.”
Atividade 01 <página 03 – verso>: “O menu de comandos serve para dar apoio e opções como arquivos, editar, visualizar, folha de desenho e outros. A folha de desenho serve para fazer figuras geométricas, a barra de ferramentas serve para nos dar auxilios para formas geométricas que quisermos formar.”
Atividade 02 <página 05 – verso>: “Hoje nós vimos ee aprendemos há utilizar vários tipos de retas, segmentos e semiretas, reta paralela e outros e também aprendemos a fazer retas paralelas.”
Folha Anexa: Equipe 02: Foram realizadas as mesmas anotações de Beth.</td></tr>
</table>

Aluno 012b: Lamed	MM

Atividade 01 <página 03 – verso>: Lamed fez a seguinte anotação:

Figura RMM-Alunos 005 – Reprodução do rascunho relativo a atividade Logo desenvolvido por Lamed.



Folha Anexa: Equipe 03: Alef, Lamed, He e Dalet. As anotações são as mesmas de Alef.

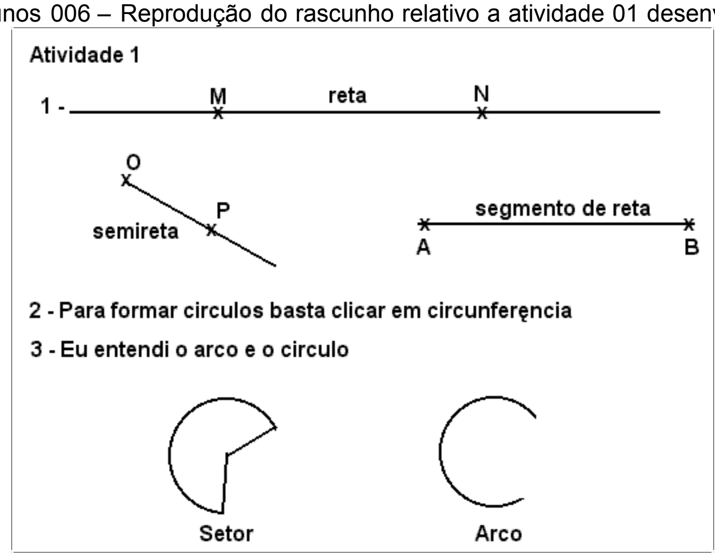
Quadro MM - alunos 001(f) – Tabulação das anotações dos alunos.

Aluno 013b: Mem	MM

Atividade 01 <página 01 – verso>: "Nós vamos mostrar retas, polígonos e circulos. O polígono ele pode ter vários lados e formas. A reta não tem fim, mas ela pode ser cheia de pontos. O circulo ele tem fim e pode ter fim."

Atividade 02 <página 04 – verso>: Anotações de Mem.

Figura RMM-Alunos 006 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 01 desenvolvido por Mem.



Folha Anexa: Equipe 01: Tet, Yud, Num e Mem. Mesmas notas que Tet.

Aluno 014b: Num	MM
Sem anotações.	

Fonte de dados: Folha de atividades aplicada aos alunos do CMES Monteiro de Moraes em Out/2004.

IV – FREQÜÊNCIA NO DECORRER DO CURSO

Tabela MM- alunos 003a – Freqüência dos estudantes no decorrer do curso em Out/2004 (1ª semana).

Código Identificador	Instituição	07.Out.04	08.Out.04	13.Out.04	14.Out.04	15.Out.04	Total
Aluno 001b: Alef	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 002b: Beth	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 003b: Guimel	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 004b: Dalet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 005b: He	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 006b: Vav	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 007b: Zayin	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 008b: Chet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 009b: Tet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 010b: Yud	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 011b: Caf	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 012b: Lamed	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 013b: Mem	MM	00	01	01	01	01	04
Aluno 014b: Num	MM	00	01	01	01	01	04

Fonte de dados: Questionário – Lista de Freqüência.

Tabela MM- alunos 003b – Freqüência dos estudantes no decorrer do curso em Out/2004 (2ª semana).

Código Identificador	Instituição	18.Out.04	19.Out.04	20.Out.04	21.Out.04	22.Out.04	Total
Aluno 001b: Alef	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 002b: Beth	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 003b: Guimel	MM	01	01	00	01	01	04
Aluno 004b: Dalet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 005b: He	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 006b: Vav	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 007b: Zayin	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 008b: Chet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 009b: Tet	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 010b: Yud	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 011b: Caf	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 012b: Lamed	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 013b: Mem	MM	01	01	01	01	01	05
Aluno 014b: Num	MM	01	01	01	00	01	04

Fonte de dados: Questionário – Lista de Freqüência.

ANEXOS 03: RELATÓRIO DOS DADOS COLETADOS DURANTE A FORMAÇÃO DOS ALUNOS DE OITAVA SÉRIE DO COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA

CARACTERIZAÇÃO DOS DISCENTES E ANOTAÇÕES DE AULA DOS DISCENTES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO: EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TABULAÇÃO DOS DADOS COLETADOS PARA CARACTERIZAÇÃO DISCENTE E AS ANOTAÇÕES DOS ESTUDANTES DO COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA

I – IDENTIFICAÇÃO

Tabela CMF-alunos 001 – Caracterização dos estudantes do CMF que participaram do Curso de Geometria assistido por computador em 2004.

Código Identificador	Sexo	Cidade	Instituição
Aluno 001a: Alfa	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 002a: Beta	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 003a: Gama	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 004a: Delta	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 005a: Epsilon	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 006a: Zeta	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 007a: Eta	Feminino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 008a: Teta	Feminino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 009a: Lambda	Feminino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 010a: Mi	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 011a: Ni	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 012a: Csi	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 013a: Pi	Masculino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 014a: Ro	Feminino	Fortaleza-CE	CMF
Aluno 015a: Sigma	Masculino	Fortaleza-CE	CMF

Fonte de dados: Sondagem junto ao professor, lista de freqüência, Diário de campo e folha de atividades.

II – DADOS DE FORMAÇÃO DISCENTE

Tabela CMF-Professores 002 –. Perfil elaborado pelo professor sobre os estudantes do CMF que participaram do Curso de Geometria assistido por computador em 2004.

Código Identificador	Série / Ano	Concepção do Professor
Aluno 001a: Alfa	8ª série / 2004	"Aluno com dificuldades"
Aluno 002a: Beta	8ª série / 2004	"Aluno talentoso"
Aluno 003a: Gama	8ª série / 2004	"Aluno talentoso"
Aluno 004a: Delta	8ª série / 2004	"Aluno talentoso"
Aluno 005a: Epsilon	8ª série / 2004	"Aluno talentoso"
Aluno 006a: Zeta	8ª série / 2004	"Aluno com dificuldades"
Aluno 007a: Eta	8ª série / 2004	"Aluno com dificuldades"
Aluno 008a: Teta	8ª série / 2004	"Aluno com dificuldades"
Aluno 009a: Lambda	8ª série / 2004	"Aluno com dificuldades"
Aluno 010a: Mi	8ª série / 2004	"Aluno criativo e imprevisível"
Aluno 011a: Ni	8ª série / 2004	"Aluno mediano"
Aluno 012a: Csi	8ª série / 2004	"Aluno mediano"
Aluno 013a: Pi	8ª série / 2004	"Aluno mediano"
Aluno 014a: Ro	8ª série / 2004	"Aluno mediano"
Aluno 015a: Sigma	8ª série / 2004	"Aluno mediano"

Fonte de dados: Sondagem junto ao professor e lista de freqüência.

IV – ANOTAÇÕES DOS ALUNOS NO CADERNO DE ATIVIDADES

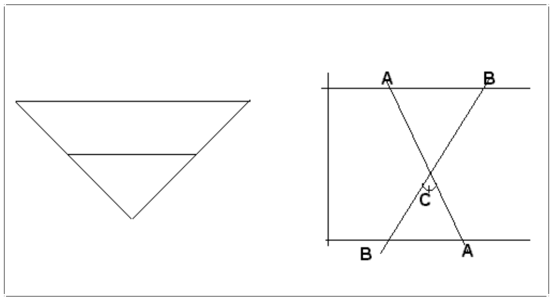
Quadro CMF-Alunos 001(a) – Tabulação das anotações dos alunos

Aluno 001a: Alfa	CMF

Atividade 01 <página 03 - frente>: (Referente aos itens 1 e 2). “Menu de comandos: salvar e editar arquivos, alterar a visualização da tela, alterar a folha de desenho”

Atividade 03 <página 06 - frente>: Rascunho desenvolvido pelos alunos conforme a figura RCMF-Alunos 001 abaixo.

Figura RCMF-Alunos 001 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 03 desenvolvido pelo aluno Alfa.



Quadro CMF-Alunos 001(b) – Tabulação das anotações dos alunos

Aluno 002a: Beta	CMF

Atividade 01 <página 03 – frente>: (referente aos itens 1 e 2)

“* No ‘menu de comandos’ podemos realizar tarefas referentes as seções:

- Arquivo, em que podemos abrir, salvar ou imprimir a folha de desenho;
- Editar, em que podemos apagar, desfazer ou refazer uma ação;
- Visualização, seção na qual podemos aumentar ou diminuir o zoom da folha;
- Folha de desenho, onde realizamos tarefas como mover o campo visual;
- Objetos, onde criamos pontos, retas, polígonos e outros objetos;
- Janela, onde podemos escolher o modo de distribuição das folhas

* A folha de desenho é o local onde criamos e resolvemos problemas, visualizar nossos estudos ou simplesmente desenhar;

* As barras de ferramentas são 3, nas quais estão expostas as funções do ‘menu de comandos’ de uma maneira mais simples e prática (e com ilustrações).”

Atividade 02 <página 05 – verso>

“=> Precisamos sempre de pontos para construir uma reta, um segmento de reta ou uma semi-reta para isso, marcamos os pontos A e B e na seção ‘objetos’, fazemos a reta, o segmento e a semireta, passando por A e B.

=> São retas não coincidentes nem concorrentes, ou seja, terão um ponto em comum. Além disso, as distâncias entre as retas é constante, ou seja, sempre igual.

=> São retas concorrentes (cortam-se em um único ponto) que formam entre elas ângulos de 90^{o}.

=> Bissetriz é uma semi-reta que divide um ângulo em dois outros ângulos da mesma medida que somados, resultam no ângulo inicial.

=> Circunferência é um conjunto de pontos que distam sempre a mesma distância do ponto central.

=> Um centro (ponto) é uma distância pela qual todos os outros pontos vão distar desse centro, o raio (segmento de reta).

=> Arco é um ‘pedaço’ da circunferência, é uma curva delimitada por dois pontos (A, B), marcados na circunferência. Setor é a ligação dos dois pontos (A, B) de um arco ao centro (O) da circunferência.

=> 3. Os conceitos vão desde o ponto, a reta e o plano até funções como simetria central e axial são conceitos úteis na identificação e resolução dos problemas que envolvem geometria e desenho.”

Atividade 05 <página 11 – verso>

“A reta bissetriz divide um ângulo formado por duas retas em dois ângulos iguais que somados resultam no ângulo inicial. Além disso, a distância da reta bissetriz às 2 retas que formam o ângulo é igual, ou seja, a bissetriz funciona como eixo de simetria axial as 2 retas”.

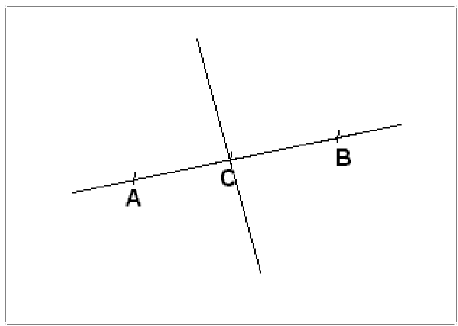
Quadro CMF-Alunos 001(c) – Tabulação das anotações dos alunos

Aluno 003a: Gama	CMF

Atividade 01 <página 03 – frente>: "No menu de comandos se encontram os ícones os quais se dividem em subitens com diversas funções que necessitaremos ao longo do curso como: Arquivos: salvar, abrir, abrir uma nova tela e imprimir. Editar: desfazer, refazer e atribuir preferências. Visualização: Aumentar e reduzir o zoom. Folha de desenho: congelar e restaurar telas, criar um sistema de coordenadas. Objetos: Os instrumentos da Geometria como ponto, plano, figuras geométricas. Janela: Onde podemos escolher o modo de distribuição das folhas. A folha de desenho é o local onde é feito o trabalho geométrico e a barra de ferramentas é um atalho para os comandos do 'menu' de comandos"

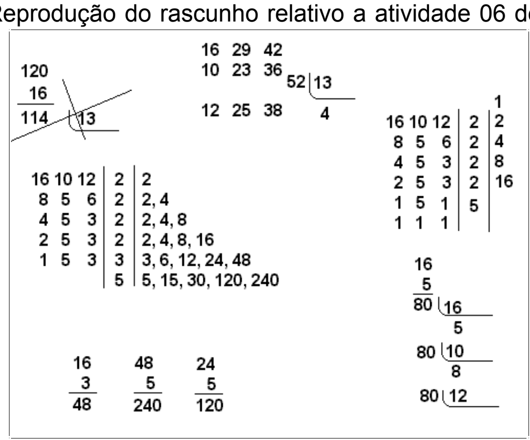
Atividade 04 <página 09 – frente> : O aluno desenvolveu a seguinte figura:

Figura RCMF-Alunos 002 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 04 desenvolvido pelo aluno Gama.



Atividade 06 <página 12 – verso>: Na folha o aluno Gama fez as anotações de rascunho seguintes:

Figura RCMF-Alunos 003 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 06 desenvolvido pelo aluno Gama.



Quadro CMF-Alunos 001(d) – Tabulação das anotações dos alunos.

Aluno 004a: Delta	CMF

Atividade 01 <página 02 – verso>: O aluno Delta fez a seguintes anotações:

Figura RCMF-Alunos 004 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 01 desenvolvido pelo aluno Delta.

$$a + b = e \longleftrightarrow a + b = e$$

$$a * b = e \longleftrightarrow a \times b = e$$

$$a / b = e \longleftrightarrow a \quad b = e$$

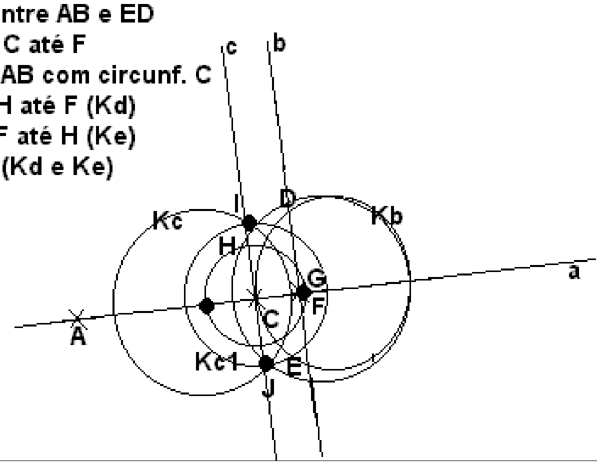
$$a \text{^} b = e \longleftrightarrow a^{b} = e$$

$$a \text{^}(1/b) = e \longleftrightarrow \sqrt[b]{a} = e$$

Atividade 03 <página 07 – verso>: O aluno Delta fez a seguintes anotações:

Figura RCMF-Alunos 005 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 03 desenvolvido pelo aluno Delta.

Traçar reta de A a B
Por um ponto na reta
Circunf. Centro em C até A
|| || || B até C
Intersecção entre essas circunf.
Reta de E até D
Ponto comum entre AB e ED
Circunf. centro C até F
Intersecção de AB com circunf. C
CircunfCentro H até F (Kd)
CircunfCentro F até H (Ke)
Intersecção de (Kd e Ke)
Reta JI



Atividade 04 <página 08 – verso>: “Ponto C não é comum a reta b, C não faz parte das circunf. que desapareceram. G continua aparecendo pois (anotação relativa a atividade 03 feita na folha da atividade 04).”

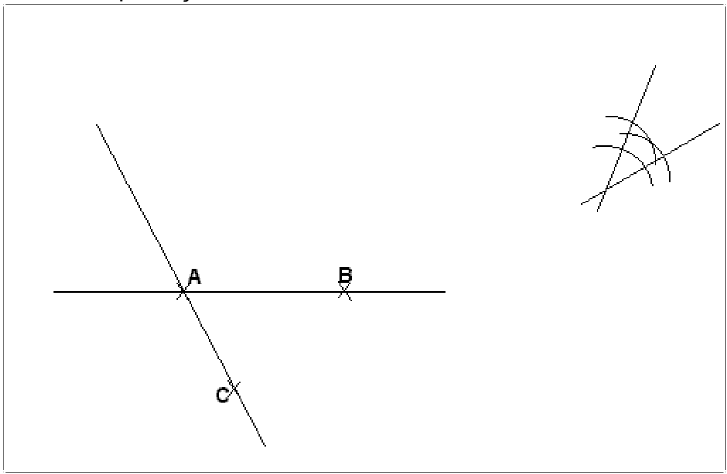
Quadro CMF-Alunos 001(e) – Tabulação das anotações dos alunos.

Aluno 004a: Delta	CMF

Atividade 04 <página 09 – frente>: “ABC é equilátero. DE é a altura. A reta b perpendicular reta ª As diagonais de um losango formam um ângulo de 90^o entre si.”

Atividade 05 <página 11 – frente>: O aluno Delta fez a seguintes anotações:

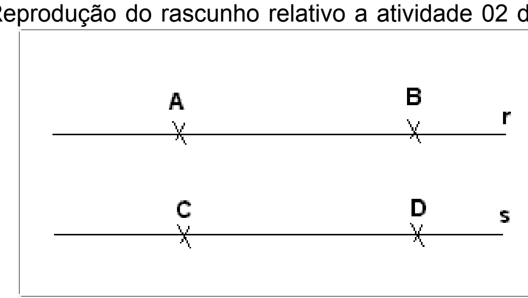
Figura RCMF-Alunos 005 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 05 desenvolvido pelo aluno Delta.



Aluno 005a: Epsilon	CMF

Atividade 01 <página 03 – frente> (Referente aos itens 1 e 2): “O programa GEONEXT nos permite construir os mais diversos tipos de figuras geométricas, gráficos de funções e ângulos nos ajudando, deste modo, a resolver problemas matemáticos.”
Atividade 02 <página 05 – verso>: “1. Na construção de retas, segmentos de reta e semi-reta é necessário que o usuário vá no menu de objetos selecione a opção e defina dois pontos no plano para que seja efetuada a tal construção. Retas paralelas são retas que nunca se encontram e as distâncias entre elas entre qualquer dois pontos nelas não mudam. Nunca muda a distância entre A e C; B e D (observação relativa a Figura RCMF-Alunos 006 apresentada a seguir).

Figura RCMF-Alunos 006 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 02 desenvolvido pelo aluno Epsilon.



Para se fazer a bissetriz o usuário precisa ir em objetos; Retas e opção bissetriz – Bissetriz é uma semi-reta que divide um ângulo ao meio. Reta perpendicular é uma reta que corta outra reta formando um ângulo de 90^o. É um conjunto de pontos que formam uma forma circular perfeita. Um ponto central e um raio. Arco é uma curva da circunferência. Setor é uma área da circunferência.”
Atividade 03 <página 07 – frente>: “Se moveram, porém as distâncias permaneceram equivalentes.”
Atividade 04 <página 09 – frente>: “Com o movimento dos pontos A e B houve mudança de colocação e tamanho. Já no ponto C foi mudado somente o tamanho”.
Atividade 05 <página 11 – frente>: “A reta bissetriz não perdeu seu valor ao mudar os pontos A, B, C. (referente ao item ‘Ação 04’). Divide o ângulo entre duas retas, segmentos ou semiretas ao meio.”

Quadro CMF-Alunos 001(f) – Tabulação das anotações dos alunos.

Aluno 005a: Epsilon	CMF
Atividade 05 <página 11 – verso>: “Construimos as retas AB e AC concorrentes, e sem usar o comando ‘Bissetriz’, achamos a bissetriz de um dos ângulos que essas retas formam. Para isso, construímos uma circunferência de centro A e raio AB, achamos então um ponto D na reta AC. Depois, construímos 2 circunferências com o mesmo raio AB com centros em B e D. Marcamos os pontos de interseção das 2 circunferências construídas, um ponto é o E e o outro o próprio A. Finalizamos construindo a reta AE, bissetriz de AB e AC. Para provar isso construímos o triângulo equilátero de lados AB, BD, DA. Assim, a altura desse triângulo equilátero é além de altura, mediatriz, mediana e bissetriz. Portanto, a reta suporte da altura que é **AC**, é bissetriz do ângulo formado por AB e AC.” Atividade 06 <página 13 – frente>: “a + b + y = 180^o” em baixo, na mesma folha, alguns rabiscos pontilhados de uma árvore. Atividade 07 <página 15 – verso>: “Justificativa para o desafio 01: Marcamos os pontos A e B e traçamos a reta por eles. Marcamos então o ponto C na reta a. Construímos uma circunferência de centro C e raio CB, depois traçamos outras circunferências de centro em B e raio BC. Portanto, essas circunferências são iguais por terem o mesmo raio. Marcamos então os pontos de intersecção das duas circunferências construídas e os denominamos de D e E. Logo após traçamos uma reta b pelos pontos D e E. Logo perpendicular a reta a. Chamamos o ponto de intersecção das duas retas de F. Como as duas circunferências são simétricas, assim também é simétrico o ponto B e C, com eixo de simetria central em F. Então concluímos que o ponto F é o ponto médio do segmento BC. Agora devemos construir uma perpendicular a reta pelo ponto C. Para isso construímos uma circunferência de centro C e raio CF, achando o ponto H, simétrico de F em relação a C. Essa mesma circunferência marcou na reta a o ponto G, coincidente a F. Como C é ponto médio de HG, construímos 2 circunferências de raio HG, uma com centro em H e outra com centro em F. A intersecção dessas. Finalmente, traçamos uma reta c, passando pelos pontos J e C, perpendicular a reta a. Como construimos a circunferência de raio CG, ao movimentarmos o ponto C a figura mudava de forma errada.” Atividade 10 <página 18 – frente>: “ Marque o ponto A, marque o ponto B, trace a reta a pelos pontos A e B, O ponto C é uma translação que está ligada à a , construir circunferência Ka com centro em C e ponto B sobre seu arco, construir circunferência Kb com centro B e ponto C sobre seu arco. Interceptar Ka com Kb. Os pontos de intercessão D e E, Trace uma reta b que passe pelos pontos E e D”.	
Aluno 006a: Zeta	**CMF**
Atividade 01 <página 03 – frente>: “O menu de comandos nos permite abrir ou salvar arquivos, editar os desenhos na folha de desenho e ajustar formato na janela. A folha de desenho serve para colocarmos todas as nossas idéias a respeito de formas geométricas na tela do computador. Na barra de ferramentas podemos criar, abrir ou salvar arquivos, permitindo também retroceder em algumas ações. Criar vários tipos de formas geométricas e vir a editar estas. Além de podermos ter outros tipos de visualização da folha de desenho.”	
Aluno 007a: Eta	**CMF**
Atividade 01 <página 03 – frente>: “Menu de comandos é o menu que dá os comandos. É onde se começa o trabalho e onde é salvado o trabalho. Folha de desenho é onde se faz os desenhos geométricos e a barra de ferramentas é o lugar onde estão as opções para uso do programa”. Atividade 02 <página 05 – frente>: “1 – a) Clicar no menu objetos, no submenu, escolher as opções adequadas. b) Retas perpendiculares – são retas que fazem 90^o . Bissetriz é a mediatriz do ângulo. 2 – a) Circunferência – uma corda simples. b) Um centro e um raio. c) Arco – é um pedaço de circunferência. Setor é a área entre 2 arcos”.	

Quadro CMF-Alunos 001(g) – Tabulação das anotações dos alunos.

Aluno 008a: Teta	CMF

Atividade 01 <página 01 – verso>: O aluno Teta fez a seguintes anotações:

Figura RCMF-Alunos 007 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 01 desenvolvido pelo aluno Teta.

$$a + b = c \longleftrightarrow a + b = c$$

$$a * b = c \longleftrightarrow a \times b = c$$

$$a / b = c \longleftrightarrow a \quad b = c$$

$$a \,\hat{}\, b = c \longleftrightarrow a^{b} = c$$

$$a \,\hat{}(1/b) = x \longleftrightarrow \sqrt[b]{a = c}$$

Atividade 01 <página 03 – frente>: "Menu de comandos => é o menu mais importante pois de que dá o comando é onde tudo começa é onde escolhemos o que queremos comandar. Folha de desenho => É o espaço onde são treinadas as atividades que aprendemos durante a aula. Barra de ferramentas => É o lugar onde podemos escolher o que usar durante a atividade trabalhada".

Atividade 02 <página 05 – frente>: "1. clicar no menu objeto depois ir no submenu e clicar em retas, semiretas e segmento de reta. Paralelas são retas que nunca se cruzam. Perpendiculares são retas que formam ângulo de 90^{o} graus. A bissetriz é a metade de um ângulo ou é a mediatriz de um ângulo".

Atividade 02 <página 05 – verso>: "2. Uma circunferência é uma corda simples fechada. A circunferência têm um centro e um raio. O setor é a área de dois arcos. O arco é um pedaço de circunferência."

Atividade 04 <página 09 frente>: "ABC é equilátero. DE é a altura. Reto a reta a. As diagonais de um losango formam um ângulo de 90^{o} entre si. Não é comum a reta b. => E não faz parte da circunferência que desapareceram. => g continua aparecendo."

Atividade 05 <página 11 frente>: "Bissetriz é uma reta que divide o ângulo em duas partes iguais".

Atividade 06 <página 13 verso>: "Passo a Passo: Traçar reta de A a B; Por um ponto na reta; Circunferência centro em C até B; Circunferência centro em B até C; Intersecção entre essas circunferências; Reta de E até D; Ponto comum entre AB e ED; Circunferência centro E até F; Intersecção de AB com circunferência C; Circunferência centro H até F (kd); Circunferência centro I **até H (Ke); Intersecção de (Kd e Ke); Reta** J2**".**

Atividade 07 <página 15 frente>: Teta usando lápis faz segmentos de reta no hexagono da Figura 01 da atividade 07, de tal modo que ficam ligados os pontos EA, GA, HÁ, FA. Além disto, ao canto superior direito da folha esboça ao lápis uma circunferência com um quadrado inscrito, no entanto, apaga o que estava fazendo de lápis."

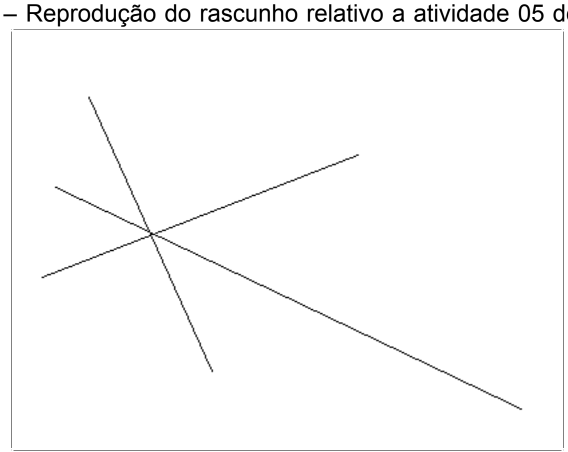
*OBS: Lambda e Teta trabalharam juntas, e fizeram anotações em folhas distintas. No entanto, as notas de Teta são de ambas.

Aluno 009a: Lambda	CMF

Atividade 01 <página 03 – frente>: "Menu de comandos => É onde tudo começa e termina, ou seja, o passo inicial. Folha de Desenho => Onde faço atividades. Barra de Ferramentas => É o lugar onde estão as opções para descoberta do programa."

*OBS: Lambda e Teta trabalharam juntas, e fizeram anotações em folhas distintas. No entanto, as notas de Teta são de ambas.

Quadro CMF-Alunos 001(h) – Tabulação das anotações dos alunos.

Aluno 010a: Mi	CMF
Atividade 01 <página 03 – frente>: “A barra de ferramentas é composta por alguns botões de função, os botões que estão na barra de ferramentas são os mais usados e de menos complexidade. Você pode encontrar outras funções no menu de comandos. A folha de desenho nos permite realizar as funções que estão na barra de ferramenta e no menu de comandos”. Atividade 02 <página 05 – frente>: Uma seta aponta para o item dois para as questões sobre arco e setor e o aluno Mi escreve dizendo: “Corda simples fechada, um centro e um raio uma parte da circunferência determinada”. Atividade 05 <página 11 – frente>: O aluno Mi fez o seguinte rascunho nesta página: Figura RCMF-Alunos 007 – Reprodução do rascunho relativo a atividade 05 desenvolvido pelo aluno Mi. 	
Aluno 011a: Ni	CMF
Atividade 01 <página 03 – frente>: “Folha de desenho => É onde se realiza os desenhos; Barra de ferramentas => São figuras que representam o que pretendemos realizar; => Menu de comandos => É onde tem os comandos mais importantes”. Atividade 02 <página 04 – verso>: Explicação de Mi sobre retas perpendiculares no item 01: “Secante que formam um ângulo de 90^{O} .” Explicação de Mi sobre retas paralelas no item 01 “São duas retas que nunca se cruzam.” Explicação de Mi sobre a Bissetriz no item 01: “1 reta que corta o ângulo no meio”. Explicação de Mi sobre circunferência no item 02: “Corda simples e fechada”. Mi Explicando os requisitos de uma circunferência no item 02: “é preciso ter ponto e um raio”. Mi explicando sobre arcos e setores no item 02: “arco é uma parte da circunferência. Já o setor é uma parte da área da circunferência”. Atividade 05 <página 11 – frente>: “Quando move os pontos a bissetriz não existe mais”.	
Aluno 012a: Csi	CMF
Atividade 01 <página 03 – verso>: Identico a Figura RCMF-Alunos 007.	
Aluno 013:	CMF
Atividade 01 <página 03 – frente>: “Menu de comandos: Nos permite visualizar a folha de desenho de diversas maneiras, aplicar o sistema cartesiano para melhor trabalharmos, desenhar pontos, retas, etc; Folha de desenho: Nela visualizamos os cálculos e os gráficos ao mesmo tempo que os fazemos. É onde trabalhamos; Barra de ferramentas: Os comandos de B. de Ferramentas são em forma de ícones e com eles nós construímos os gráficos na folha de desenhos utilizando retas, pontos, vetores, etc.” Atividade 02 <página 05 – frente>: “1 – Uma reta é um conjunto de pontos traçados em uma mesma direção, com comprimento infinito: Segmento de reta é a distância entre dois pontos, é uma reta que liga dois pontos; Semireta é uma parte de uma reta entre dois pontos dessa. 2 – Retas paralelas são retas que possuem pontos em comum tanto dentro como fora do plano usados para trabalho. 3 – Retas perpendiculares formam 90^{o} graus quando sobrepostas. 4 – Bissetriz é uma reta que divide ao meio um ângulo. 4 – Uma circunferência é um conjunto de pontos equidistantes de um mesmo ponto”.	

Quadro CMF-Alunos 001(i) – Tabulação das anotações dos alunos.

Aluno 014a: Ro	CMF
Nenhuma anotação realizada.	
Aluno 015a: Sigma	CMF
Nenhuma anotação realizada.	

Fonte de dados: Folha de atividades aplicada aos alunos do CMF em Out/2004.

V – FREQÜÊNCIA NO DECORRER DO CURSO

Tabela CMF- Alunos 000 – Freqüência dos estudantes no decorrer do curso em Out/2004.

Código Identificador	Instituição	25.Out.04	26.Out.04	27.Out.04	28.Out.04	29.Out.04	Total
Aluno 001a: Alfa	CMF	01	00	00	00	00	01
Aluno 002a: Beta	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 003a: Gama	CMF	01	01	00	00	01	03
Aluno 004a: Delta	CMF	01	01	01	01	00	04
Aluno 005a: Epsilon	CMF	01	01	01	01	01	05
Aluno 006a: Zeta	CMF	01	00	00	00	00	01
Aluno 007a: Eta	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 008a: Teta	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 009a: Lambda	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 010a: Mi	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 011a: Ni	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 012a: Csi	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 013a: Pi	CMF	00	01	01	01	01	04
Aluno 014a: Ro	CMF	00	00	00	00	01	01
Aluno 015a: Sigma	CMF	00	00	00	00	01	01

Fonte de dados: Questionário – Lista de Freqüência.

ANEXOS 04: APOSTILA UTILIZADA PARA FORMAÇÃO DISCENTE NO COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA E NA ESCOLA MUNICIPAL MONTEIRO DE MORAIS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATIVIDADE 01

FAMILIARIZAÇÃO DO SOFTWARE GEONEXT

José Rogério Santana
Orientador: Hermínio Borges Neto

Fortaleza

Outubro
2004
ATIVIDADE 01

As atividades a seguir possuem como objetivo tornar o programa GeoNext mais amigável ao nosso colega aluno usuário. Na imagem abaixo (Figura 01) podemos ver como a tela do GeoNext está distribuida. Para compreender melhor este programa vamos reconhecer alguns detalhes e realizaremos algumas atividades juntos. Por isso leia com atenção os dados sobre este programa.

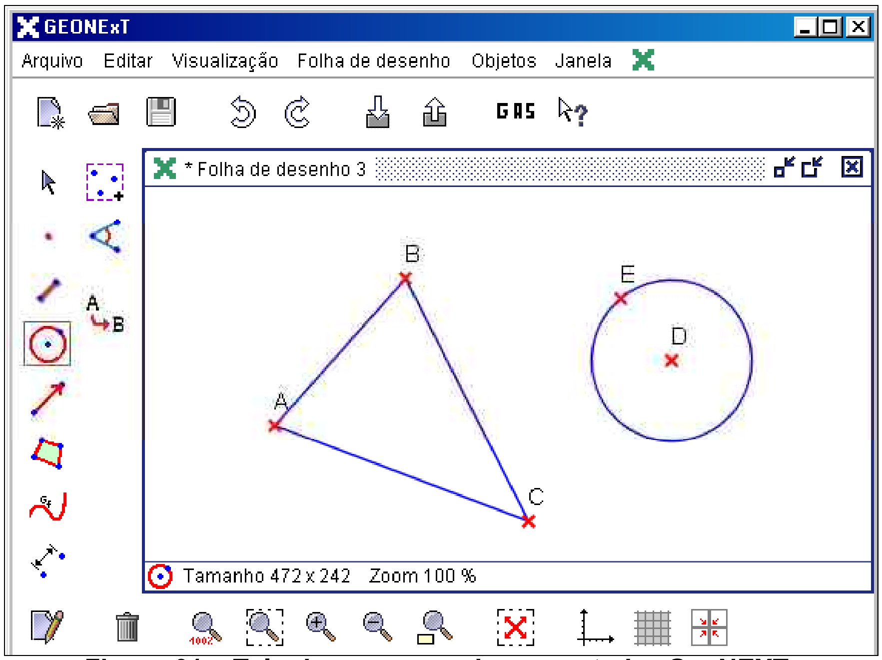
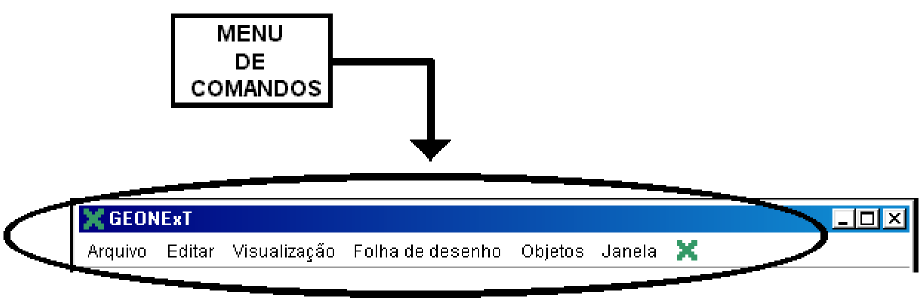


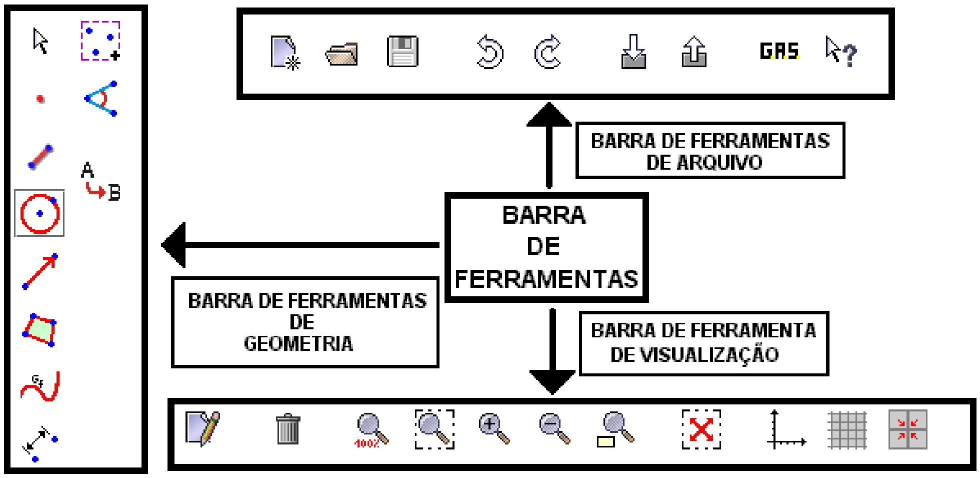
Figura 01 – Tela do programa de computador GeoNEXT.



MENU DE COMANDOS: É UMA ESTRUTURA DE COMANDOS QUE SE ASSEMELHA AO CARDÁPIO DE UM RESTAURANTE.

NO CASO DO GEONEXT, AS OPÇÕES DO CARDÁPIO SÃO: "ARQUIVO", "EDITAR", VISUALIZAÇÃO", "FOLHA DE DESENHO", "OBJETOS", "JANELA" E O "X".

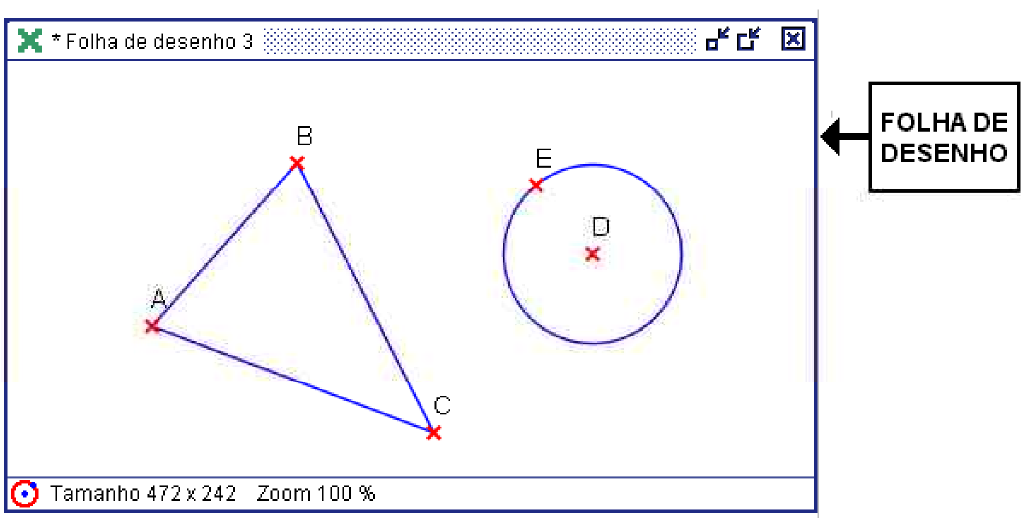
AO CLICAR EM UMA DAS OPÇÕES DO CARDÁPIO A GENTE PODE ABRIR UM OUTRO MENU (QUE CHAMAREMOS POR SUB-MENU) COM OPÇÕES RELACIONADAS À OPÇÃO ANTERIOR. POR EXEMPLO, AO CLICAR EM "ARQUIVO" AS OPÇÕES QUE DEVO TER ESTARÃO RELACIONADAS AO TEMA "ARQUIVO".



BARRA DE FERRAMENTAS: REÚNE VÁRIOS "BOTÕES" NA FORMA DE FIGURAS QUE REPRESENTAM A AÇÃO QUE PRETENDEMOS REALIZAR (ÍCONES).

AO CLICAR SOBRE UM "BOTÃO" NA BARRA DE FERRAMENTAS REALIZAMOS UMA DETERMINADA AÇÃO.

NO GEONEXT EXISTEM 3 TIPOS DE BARRA DE FERRAMENTAS.



FOLHA DE DESENHO: É O LOCAL ONDE REALIZAMOS OS "DESENHOS" E SUAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS.

NO CASO DO GEONEXT PODEMOS TER VÁRIAS FOLHAS DE DESENHO ABERTAS SIMULTANEAMENTE.

COM BASE NAS EXPLICAÇÕES APRESENTADAS ACIMA, REALIZEM AS SEGUINTES ATIVIDADES EM EQUIPE:

- **EXPLOREM O “MENU DE COMANDOS”, A “FOLHA DE DESENHO” E AS “BARRAS DE FERRAMENTAS” DO GEONEX;**

- **FAÇA UM “RELATÓRIO BREVE” EXPLICANDO O QUE PERMITE REALIZAR OS COMANDOS DO “MENU DE COMANDOS”, A “FOLHA DE DESENHO” E AS “BARRAS DE FERRAMENTAS”.**

OBSERVAÇÃO: AS FIGURAS PRESENTES “DENTRO” DA “FOLHA DE DESENHO” SERVEM PARA ILUSTRAR O QUE PODE SER REALIZADO NO GEONEXT, NÃO SE TRATA DE UMA ATIVIDADE PARA SER REALIZADA.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATIVIDADE 02

FAMILIARIZAÇÃO DO SOFTWARE GEONEXT

José Rogério Santana
Orientador: Hermínio Borges Neto

Fortaleza

Outubro
2004

ATIVIDADE 02

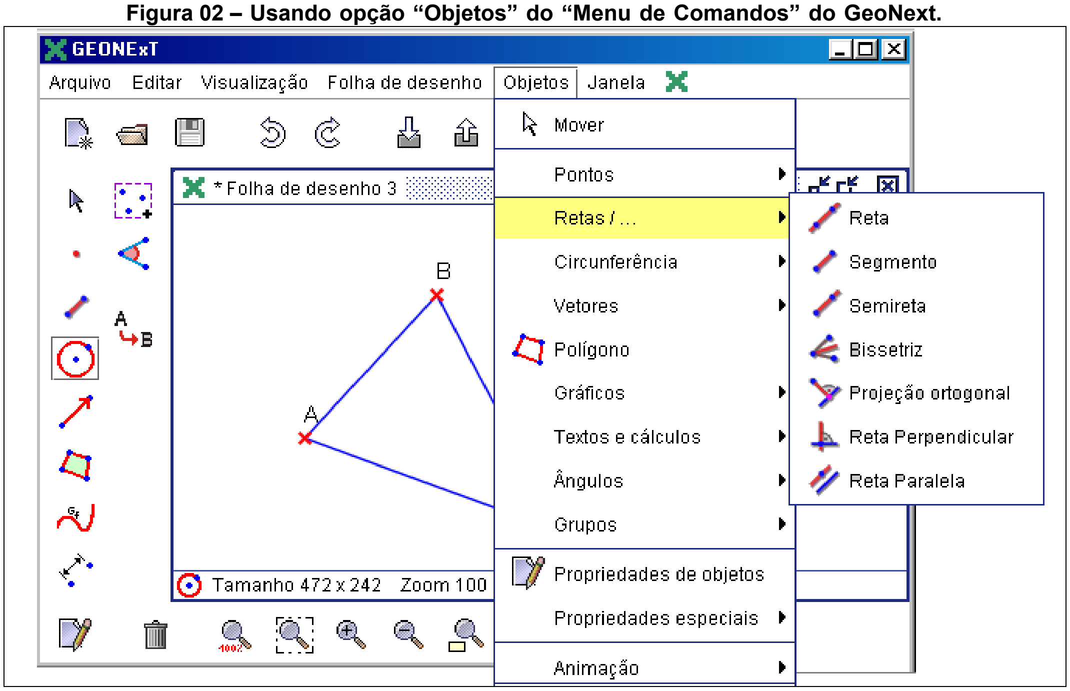
- Considerando a Figura 02 apresentada abaixo, vemos que ao usar a opção "Objetos" do "Menu de Comandos", aparecem vários comandos relacionados aos conteúdos de Geometria.

- Também sabemos que ao clicar sobre o comando "Objetos" se abre um sub-menu dividido em 4 partes com várias opções em cada divisão.

- Ainda sabemos que ao clicar em um comando do sub-menu "Objetos" (como por exemplo, o comando "Retas/..."), pode surgir outro sub-menu com comandos mais específicos que estão relacionados à exploração dos conteúdos sobre retas.

- Também sabemos que a "Barra de Ferramentas de Geometria" modifica-se a medida que usamos o comando "Objetos" do "Menu de Comandos".

Figura 02 – Usando opção "Objetos" do "Menu de Comandos" do GeoNext.



Com base nas explicações apresentadas acima realize as seguintes atividades:

1. **Construa retas, semiretas e segmentos de reta. Manipule estes objetos na "Folha de Desenho", e depois tente explicar (por escrito) o que você entendeu sobre estes objetos;**
    - **Verifique o que é necessário para construir reta, semireta e segmento de reta no GeoNext;**
    - **Construa retas paralelas pelo comando "Reta Paralela", e tente explicar o que são retas paralelas;**
    - **Construa retas perpendiculares pelo comando "Reta Perpendicular" e tente explicar o que são retas perpendiculares;**
    - **Tente descobrir como funciona o comando "Bissetriz". Após usar o comando e manipular a figura construída, tente dizer (com suas palavras) o que você entendeu por bissetriz.**
2. **Explore a opção "Circunferência" do sub-menu "Opções". E após construir e manipular a circunferência tente dizer:**
    - **O que você acha que é uma circunferência?**

- **O que é preciso para ter uma circunferência?**
- **O que você compreende por arco e setor ?**

3. **Explore outros comandos do sub-menu “Opções” do “Menu de Comandos”, e a partir da manipulação e exploração dos comandos, tente dizer com suas palavras o que você compreende pelos conceitos envolvidos nos comandos usados no GeoNext.**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATIVIDADE 03

ATIVIDADES DE GEOMETRIA(GeoNext)

José Rogério Santana
Orientador: Hermínio Borges Neto

Fortaleza

Outubro
2004

ATIVIDADE 03

01 – Usando o software GeoNext desenvolva as seguintes ações sem usar os comandos "Reta Paralela".

AÇÃO 01:

Trace uma reta [a] que passe pelos pontos [A] e [B],

e marque um ponto [C] que não pertença a reta [a].

AÇÃO 02:

Tendo [C] e [a] (que passa por [A] e [B]), trace uma

reta paralela à reta [a] pelo ponto [C].

AÇÃO 03:

Após realizar as ações 01 e 02, movimente os pontos

[A], [B] e [C] e descrevam o que ocorreu.

AÇÃO 04:

O que pode, em termos matemáticos, garatir que a reta

que passa pelo ponto [C] seja paralela a reta [a] que

passa pelos pontos [A] e [B]?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATIVIDADE 04

ATIVIDADES DE GEOMETRIA(GeoNext)

José Rogério Santana
Orientador: Hermínio Borges Neto

Fortaleza

Outubro
2004

ATIVIDADE 04

01 – Usando o software GeoNext desenvolva as seguintes ações sem usar os comandos “Reta Perpendicular”.

AÇÃO 01:

Trace uma reta [a] que passe pelos pontos [A] e [B],

e marque um ponto [C] que pertença a reta [a].

AÇÃO 02:

Tendo [C] e [a] (que passa por [A] e [B]), trace uma

reta perpendicular à reta [a] pelo ponto [C].

AÇÃO 03:

Após realizar as ações 01 e 02, movimente os pontos

[A], [B] e [C] e descrevam o que ocorreu.

AÇÃO 04:

O que pode, em termos matemáticos, garatir que a reta

que passa pelo ponto [C] seja perpendicular a reta [a] que

passa pelos pontos [A] e [B]?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATIVIDADE 05

ATIVIDADES DE GEOMETRIA(GeoNext)

José Rogério Santana
Orientador: Hermínio Borges Neto

Fortaleza

Outubro
2004

ATIVIDADE 05

01 – Usando o software GeoNext desenvolva as seguintes ações sem usar os comandos "Bissetriz".

AÇÃO 01:

Marque na "Folha de Desenho" os pontos [A], [B] e [C] distintos.

AÇÃO 02:

Trace duas retas [AB] e [AC] que sejam concorrentes e distintas, e que passem pelo ponto [A].

AÇÃO 03:

Tendo as retas concorrentes [AB] e [AC], trace uma reta bissetriz [x] que passe pelo ponto [A].

AÇÃO 04:

Após realizar as ações 01 e 02, movimente [A], [B] e [C] descrevendo o que ocorreu com a reta bissetriz.

AÇÃO 05:

Diga com suas palavras o que caracteriza a reta construída como bissetriz.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATIVIDADE 06

ATIVIDADES DE GEOMETRIA(GeoNext)

José Rogério Santana
Orientador: Hermínio Borges Neto

Fortaleza

Outubro
2004

ATIVIDADE 06

01 – Usando o software GeoNext desenvolva as seguintes ações:

AÇÃO 01:

Usando comando "Polígono" construa um triângulo [ABC].

AÇÃO 02:

Após construir o triângulo [ABC], utilize o sub-menu "Ângulos" do menu "Objetos" para exibir os ângulos internos do triângulo [ABC] e aproveite para medir o valor dos ângulos internos.

AÇÃO 03:

Encontre uma forma de realizar a soma dos ângulos internos do triângulo [ABC].

AÇÃO 04:

Por qual motivo a soma dos ângulos internos de um triângulo é dois equivalente à dois ângulos retos (ou seja, 180°) ?

E qual a relação entre soma dos ângulos internos de um triângulo com a idéia de ângulo raso. Justifique suas idéias.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATIVIDADE 07

ATIVIDADES DE GEOMETRIA(GeoNext)

José Rogério Santana
Orientador: Hermínio Borges Neto

Fortaleza

Outubro
2004

ATIVIDADE 07

Observe a figura 01 apresentada a seguir:

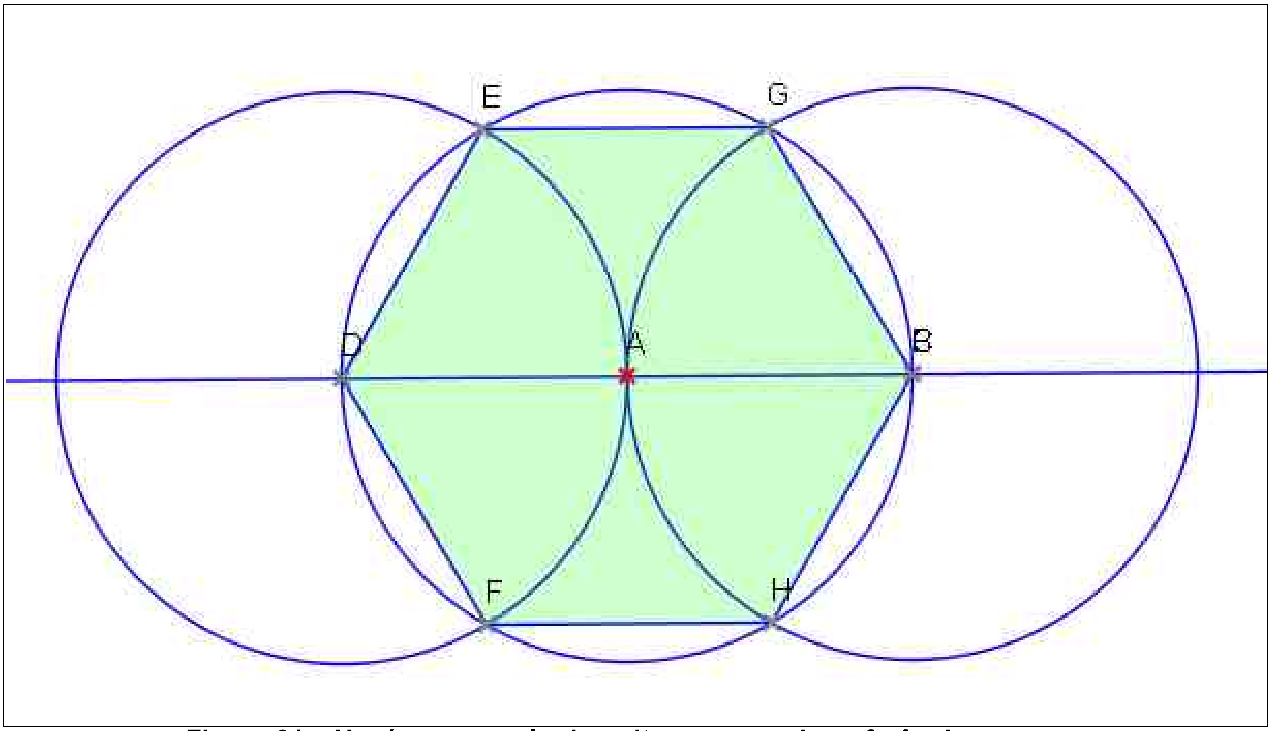


Figura 01 – Hexágono regular inscrito em uma circunferência.

AÇÃO 01: Faça na "Folha de Desenho" do GeoNext a construção geométrica de um

hexágono regular inscrito em uma circunferência.

AÇÃO 02: Tomando como base a ação 01, faça na "Folha de Desenho" do GeoNext um quadrado inscrito em uma circunferência.

AÇÃO 03: Tomando como base as ações 01 e 02, faça na "Folha de Desenho" do GeoNext um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

AÇÃO 04: Com base nas ações 01, 02 e 03, descreva o processo para inscrever um polígono regular em uma circunferência.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
NÚCLEO EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ENSINO
ÁREA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATIVIDADE 08

ATIVIDADES DE GEOMETRIA(GeoNext)

José Rogério Santana
Orientador: Hermínio Borges Neto

Fortaleza
Outubro
2004

ATIVIDADE 08

01 – Usando o software GeoNext desenvolva a atividade seguinte:

AÇÃO 01:

Trace um segmento [AB] com medida qualquer, e marque um ponto [C] que não pertença ao segmento [AB].

AÇÃO 02:

Encontre um modo de traçar um segmento [CD] pelo ponto [C], tal que, o segmento [CD] sempre seja congruente ao segmento [AB].

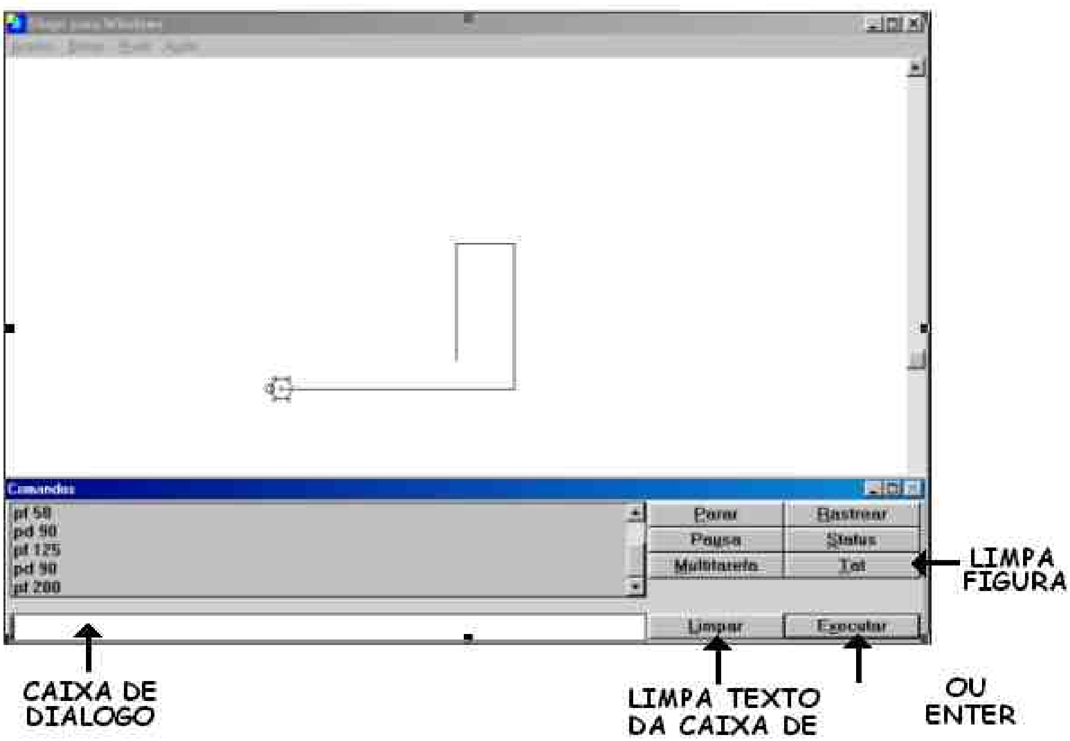
AÇÃO 03:

Justifique, com suas palavras, os motivos que permitem que o segmento [CD] seja congruente ao segmento [AB].

APOSTILA – CURSO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA

INFORMÁTICA EDUCATIVA: MANUAL (SLogo)

COMANDOS BÁSICOS



Para fazermos a Tartaruga andar é preciso escrever na “caixa de dialogo” as ordens que desejamos que sejam cumpridas. Para isto é preciso aprendermos alguns comandos básicos:

PF nº (anda para frente nº passos)

PT nº (anda para trás nº passos)

PD nº (gira nº graus para a direita)

PE nº (gira nº graus para a esquerda)

UL (Use lápis – deixa rastro)

UN (Use nada – não deixa rastro)

ARCO X Y (Desenha um arco de X graus e de raio igual a Y)

APOSTILA – CURSO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA

1 – Procure realizar cada uma das figuras abaixo:

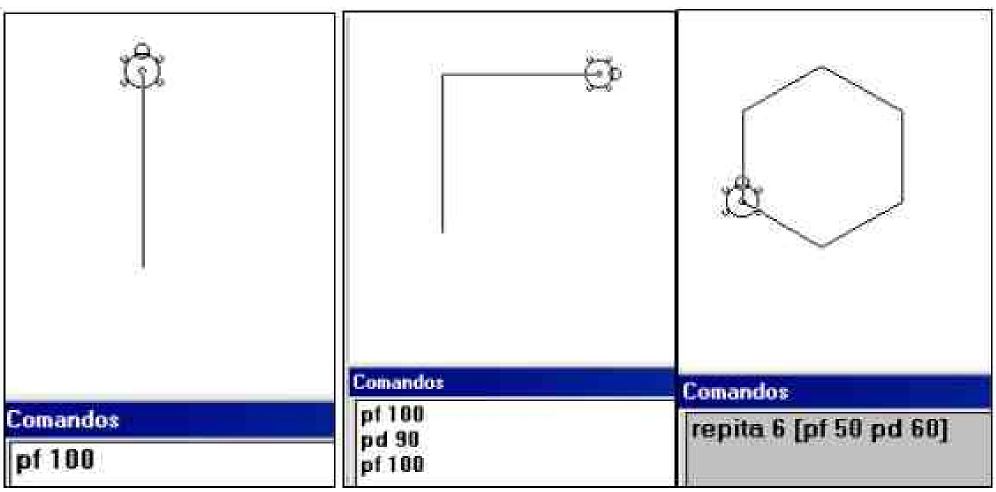


Figura 1 – Comandos primitivos.

2 – Construa a figura abaixo. A seguir descreva o que você vê de especial nessa figura, com relação aos seus lados e aos seus ângulos. Você saberia dizer porque o quadrado é chamado de polígono regular?

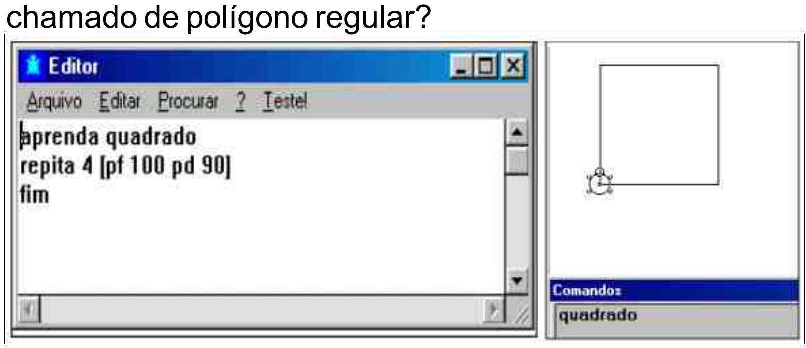


Figura 2 – Procedimentos.

APOSTILA – CURSO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA

3 – Construa uma circunferência utilizando o programa e explique todo o processo de construção, os comandos e as características da figura solicitada.

4 – Construa a figura abaixo. Você acha que ela é um polígono? Por quê?

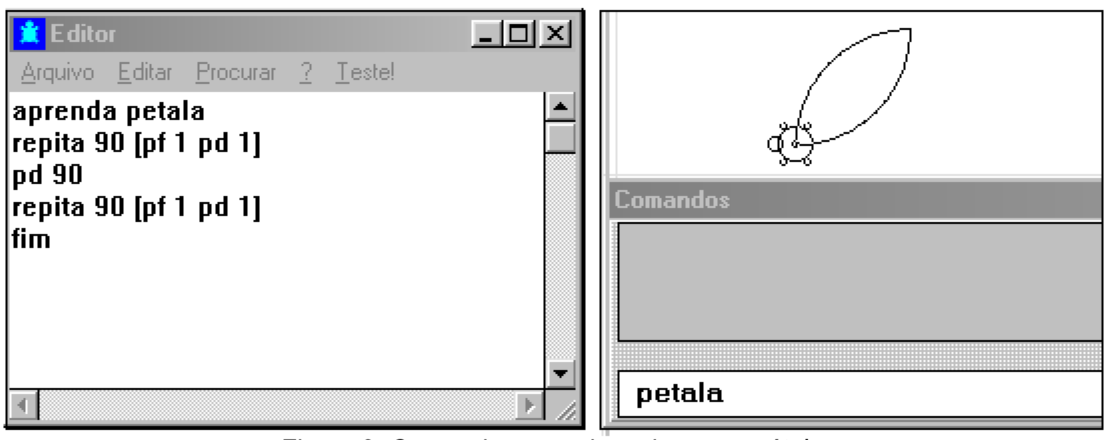


Figura 3- Comandos para desenhar uma pétala.

5 – Construa a figura abaixo.

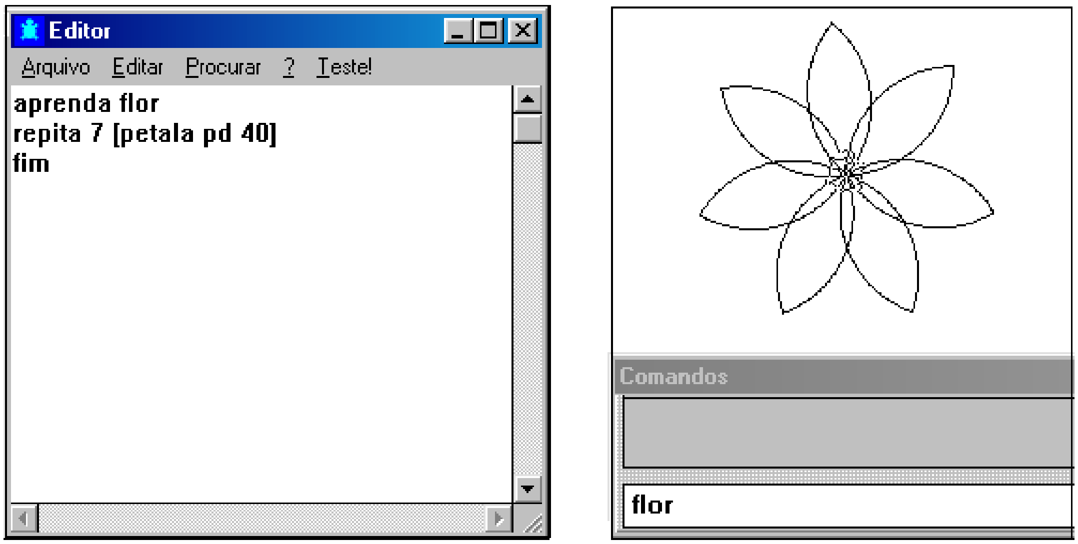


Figura 4 – Comandos para desenhar uma flor.

ANEXO 05 - RELATÓRIO PARCIAL DE SITUAÇÕES SURPRESA E MATERIAIS USADOS NA PESQUISA

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÀO SURPRESA

SITUAÇÃO 01	Mal entendidos em geometria dinâmica: Situação relativa às transformações isométricas no *Cabri-Géomètre II*.		
Data	Maio de 2001	Ocorrência averiguada no desenvolvimento de atividades no projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente Laboratório Multimeios – FACED/UFC.	
Contexto	Preparação de atividade sobre retas paralelas a partir do comando “Compasso” do software *Cabri-Géomètre II*.		
Software(s)	*Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0*	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain
Coleta de Dados	Arquivo do *software* Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades.	Quantidade de Pessoas	05 pessoas

Figura S1-01 – Apresentação da Atividade: Construir uma reta paralela s, à reta r, pelo ponto P.

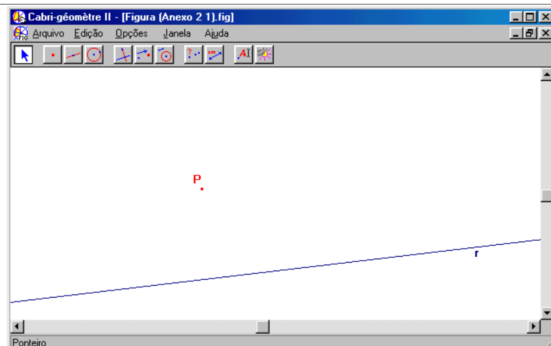


Figura S1- 02 - Construção Geométrica usando comandos compasso e reta perpendicular do Cabri.

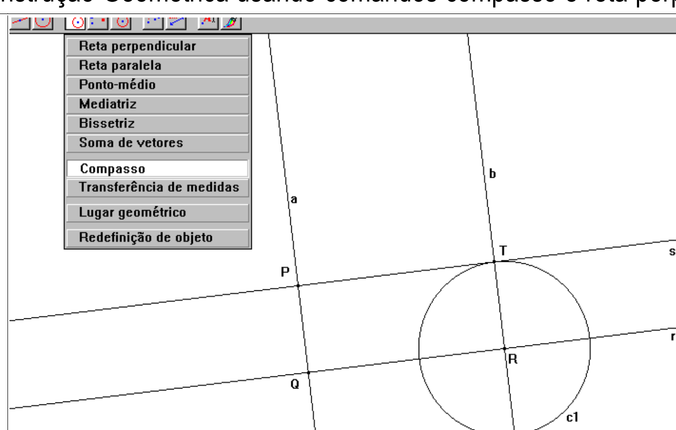
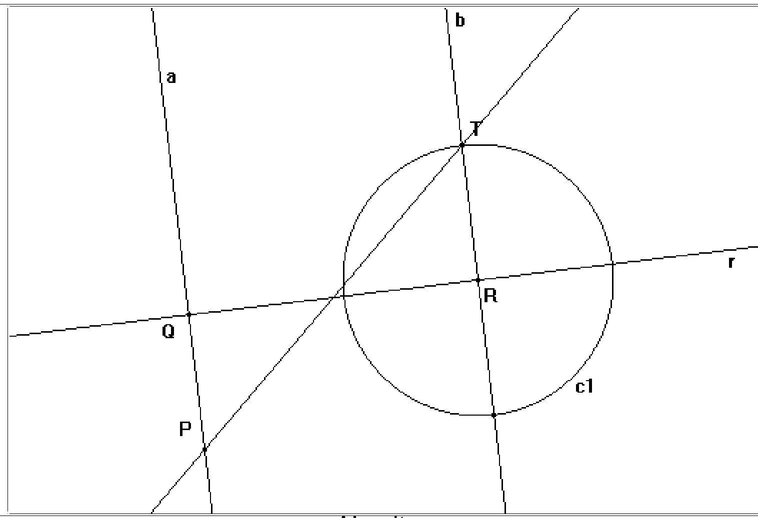
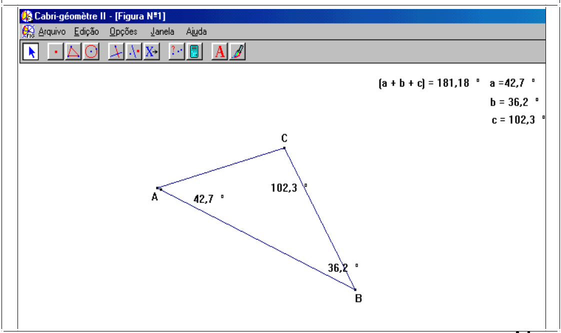
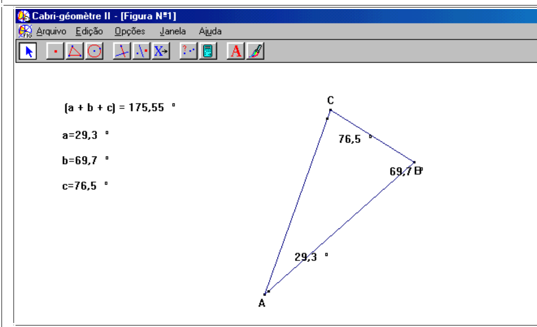


Figura S1-03- Manipulação da construção e a situação apresentada em semiplanos opostos.



Algoritmo

Passos	Ações realizadas
Dados do Problema	É apresentado ao abrir o arquivo a reta r e o ponto P, não pertencente a reta r.
01	Traçar uma reta a pelo ponto P que seja perpendicular à reta r, usando comando “Reta Perpendicular”.
02	Marcar Q como ponto de intersecção entre as retas a e r.
03	Marcar R como um ponto pertencente à reta r que não seja coincidente com Q.
04	Traçar uma reta b pelo ponto R que seja perpendicular à reta r, usando comando “Reta Perpendicular”.
05	Usando comando “Compasso” transferir a medida do segmento PQ para R.
06	Nomear como c1 a circunferência com centro em R, e medida PQ obtida pelo comando “Compasso”.
07	Marcar T como um dos pontos de intersecção entre c1 e b, considerando que T deve estar no mesmo semiplano de P conforme a figura 023.
08	Traçar uma reta s que passe pelos pontos P e T.

<table>
<tr><td colspan="6">IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÀO SURPRESA</td></tr>
<tr><td colspan="2">SITUAÇÃO 02</td><td colspan="4">A soma dos ângulos internos de um triângulo não é 180º graus.</td></tr>
<tr><td>Data</td><td>01 a 04 de Agosto de 2000</td><td colspan="4">Ocorrência apresentada em um curso de formação de professores de matemática do Ensino Médio, sobre o uso de novas tecnologias na didática da matemática no NTE/CREDE 12 em Quixadá-CE.</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="5">Desenvolvimento de uma atividade no software Cabri Géomètre II sobre a medição da soma dos ângulos internos de um triângulo ABC.</td></tr>
<tr><td>Software(s)</td><td colspan="2">Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0</td><td>Instituição</td><td colspan="2">Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td>Autor(es)</td><td colspan="2">Jean Marie Laborde & Franck Bellamain</td></tr>
<tr><td>Coleta de Dados</td><td colspan="2">Arquivo do software Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades. E dados de observação no diário de campo.</td><td>Quantidade de Pessoas</td><td colspan="2">23 pessoas</td></tr>
<tr><td colspan="3">Figura S2-01 – Situação 01: A soma dos ângulos internos é maior ou igual a 180º.</td><td colspan="3">Figura S2-02 – Situação 02: A soma dos ângulos internos é menor ou igual a 180º.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

Algoritmo	
Passos	Ações realizadas
01	Construir triângulo ABC qualquer, ou por meio do comando de construção “Triângulo” que exige 3 *clicks*. Ou construir o triângulo ABC com o comando “Segmento de Reta”.
02	Medir o ângulo do vértice A, através de um dos seguintes processos: Processo 01: (1) Dar o primeiro *click* em B; (2) Dar o segundo *click* em A; (3) Dar o terceiro *click* em C. Processo 02: (1) Dar o primeiro click em C; (2) Dar o segundo click em A; (3) Dar o terceiro click em B. O que importa é que o ângulo que deve ser medido, neste caso o ângulo do vértice A, deve sempre corresponder ao segundo click, ou o click intermediário.
03	Medir o ângulo do vértice B, através de um dos seguintes processos: Processo 01: (1) Dar o primeiro *click* em A; (2) Dar o segundo *click* em B; (3) Dar o terceiro *click* em C. Processo 02: (1) Dar o primeiro click em C; (2) Dar o segundo click em B; (3) Dar o terceiro click em A.

04	Medir o ângulo do vértice C, através de um dos seguintes processos: Processo 01: (1) Dar o primeiro *click* em A; (2) Dar o segundo *click* em C; (3) Dar o terceiro *click* em B. Processo 02: (1) Dar o primeiro click em B; (2) Dar o segundo click em C; (3) Dar o terceiro click em A.
05	Usando comando “Calculadora”, selecione através dos clicks, os três resultados numéricos correspondentes aos ângulos medidos, formando a expressão: (a + b + c), após ter feito isso aperte o botão com símbolo “=” para obter o resultado, e arraste o resultado para a zona-de-desenho do *Cabri-Géomètre*.
06	Manipular e mover cada um dos três ângulos pela zona-de-desenho.
OBS: Os resultados destas medições podem resultar em: $(a+b+c)=180,00^{o}$; $(a+b+c)\geq 180,00^{o}$; $(a+b+c)\leq 180,00^{o}$	

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÀO SURPRESA			
SITUAÇÃO 03	O caso do segmento elástico na divisão de um segmento em partes iguais.		
Data	24/Maio/2000	Ocorrência apresentada na oitava sessão do curso piloto de construções geométricas do projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente, realizado entre Abril e Julho de 2000 no Laboratório Multimeios FACED/UFC.	
Contexto	Desenvolvimento de uma atividade no software *Cabri Géomètre* II sobre a divisão de um segmento de reta AB em três partes iguais com base no teorema de Talles.		
Software(s)	*Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0*	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain
	The Geometer's SketchPad for Windows Version 1.10	Instituição	Key Curriculum Press
		Autor(es)	Nicholas Jackwin (EUA)
	Compasses and Ruler Version 1.9	Autor(es)	Copyright René Grothmann (EUA)
	Dr GEO version 0.60b	Autor(es)	Copyright Hilaire Fernandes

Coleta de Dados	Arquivo do *software* Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades. E dados de observação gravado em vídeo e transcrito em texto.	Quantidade de Pessoas	11 pessoas

Figura S3-01 – Situação 01: A construção que se desejava obter.

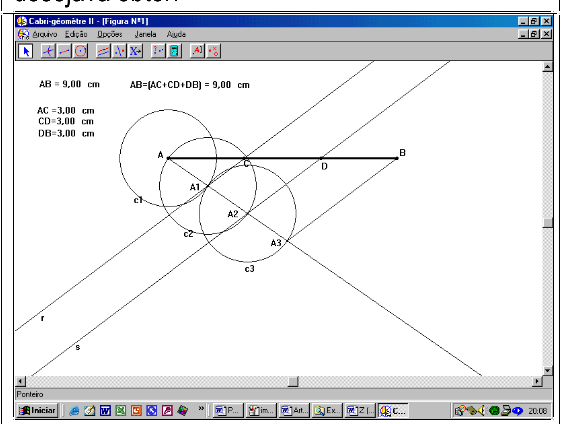
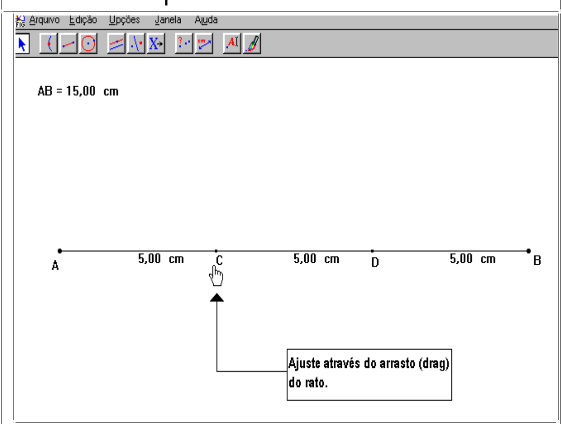


Figura S3-02 – Situação 02: A construção desenvolvida pela aluna.



Algoritmo	
Passos	Ações realizadas
01	Construir um segmento de reta AB.
02	Usando comando "ponto sobre objeto", marcar dois pontos no o segmento AB, não permitindo que os mesmos coincidam entre si, e coincidam com os pontos A e B.

03	Nomear estes pontos respectivamente como C e D
04	Usando o comando “Distância e Comprimento”, medir o segmento AB.
05	Usando o rato, arraste o ponto A ou B, até que se obtenha um segmento que seja múltiplo de três.
06	Usando comando “Distância e Comprimento”, medir os segmentos AC, CD e DB, formados pela marcação dos pontos C e D.
07	Ajustar os pontos C e D pelo arrasto do rato até que se obtenha AC=5 cm, CD=5 cm e DB=5 cm.

PROCEDIMENTOS DE EM FILMAGEM: CURSO PILOTO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS OITAVA SESSÃO REALIZADA EM 24 DE MAIO DE 2000.

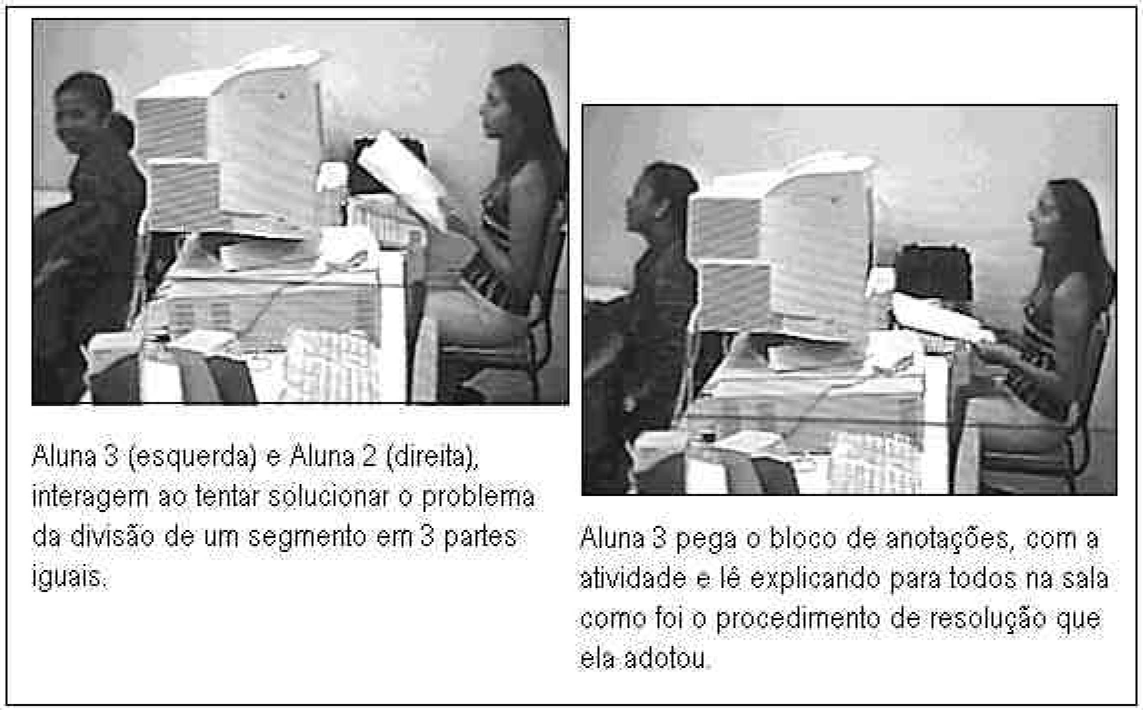


Figura S3-03 – Momento da apresentação da situação surpresa por parte da Aluna 2 ao interagir com a Aluna 3.

(a) Como foram organizadas as filmagens transcritas

O processo de coleta de dados no Projeto Piloto consiste em organizar as transcrições de filmagem em unidades de análise de texto que são subdivididas em:

a) Tempo da fita VCR (00h00min00seg ou 00:00:00): Trata-se da marcação temporal do tempo de filmagem, não é necessariamente o tempo de cada sessão mas permite ter uma noção deste. Com tal marcação se busca fazer corresponder áudio e vídeo com partes do texto transcrito;

b) [Aud] : Corresponde à acústica na fita de vídeo e sua finalidade é descrever os diálogos, bem como apresentar de modo resumido algumas das explicações apresentadas por professores e monitores;

c) [Vid] : Corresponde com as imagens observadas na fita de vídeo e seu objetivo é permitir ao telespectador observar ações, e momentos de interação que posteriormente podem ser descritos com o *ScreenCam*;

d) [Com] : São comentários do observador que expressam hipóteses e conclusões que devem ser discutidas diante da equipe de pesquisadores, e/ou confirmadas com os alunos por meio de entrevistas.

Após a transcrição de tais atividades o texto resultante e suas unidades de análise foram gravadas no formato de texto para computador (TXT), e estes foram incorporados para análise por meio do software *Q.S.R. NUD*IST*, onde é possível desenvolver categorias de análise que podem expressar trechos da transcrição.

(b) Trecho transcrito de filmagem: O caso do segmento elástico na divisão de um segmento em partes iguais (24 / 05 / 2001) – Sessão 08 < 8:00 até 10:00 horas >

1h43m53s (trecho inicial da fita)
[Aud] Professor: Agora sobre a outra atividade que vocês tão desenvolvendo agora, atividade de divisão de segmento. qual a dificuldade que vocês estão percebendo agora ?
Aluna1: Dividir o segmento em três partes iguais.
Professor: A dificuldade tua é dividir em três partes, tem mais alguém fazendo essa atividade ?
Aluna 2 levanta a mão.
Professor: Qual a dificuldade ? A mesma ?
Aluna 3: A mesma..
Aluna 1: Consigo dividir 4 e 8 sempre 2, 4, 8...
Aluna 2: Acabei de fazer dividido por três...
Professor: Conseguiu ?
Aluna 1: Como foi que tu fez ?
Aluna 2: Eu fiz com que a reta tivesse um número ímpar, o comprimento tinha que ser um número ímpar, aliais, um número que dá prá dividir por 3
Aluna 3: Aí ?
Aluna 2: Eu botei, o comprimento dela 15 e dividi por três e ficou 5 num segmento, 5 no outro e 5 no outro.
Aluna 3: Mas como foi que tu colocou 5, 5 e 5 ?
Aluna 2: Arrastando os pontinhos.
Aluna 3: Ah, ah eu também, só que eu botei o primeiro, depois botei o ponto médio...
Professor: Então vamos continuar trabalhando nesta atividade...

[Vid] Professor pergunta aos alunos sobre o andamento da atividade sobre divisão de segmento em partes iguais, a Aluna 1 coloca suas dificuldades, depois a Aluna 3 levanta as mãos falando sobre suas dificuldades também, já a Aluna 2 explica como fez para fazer a divisão de segmento em três partes iguais. E a Aluna 3 pede explicações sobre o como a Aluna 2 fez a atividade.
[Com] Na fala da Aluna 2 percebemos que ela usa de um artifício simples, faz com que o segmento meça um número que dividido por 3 dê como resultado três medidas inteiras, daí ao arrastar o mouse, a Aluna 2 fez três segmentos de medida n/3 (se consideramos que o segmento mede n), bem se ao movimentar o segmento as medidas mantiverem sua proporcionalidade, temos que a Aluna 2 encontrou uma solução pelas características do software, afinal foi possível chegar a uma solução sem elaborar uma construção geométrica propriamente, ou seja, o raciocínio usado para solucionar o problema é mais de característica lógica que propriamente matemática. Por outro lado, a interação entre a Aluna 1, Aluna 3 e Aluna 2, ocorreu devido as dificuldades que a situação colocou diante das alunas, ou seja, quando se têm um problema que exige mais dos alunos eles tendem a se unir para solucionar tal problema. Também se pode dizer que o fato do Professor não ter aproveitado o problema proposto pela Aluna 2 é uma falha de argumentação por parte do professor, pois em alguns casos é muito comum ignorar a forma pela qual os alunos resolvem seus problemas, ou seja, era necessária uma mediação para que tal problema transparecesse diante de todos os alunos.

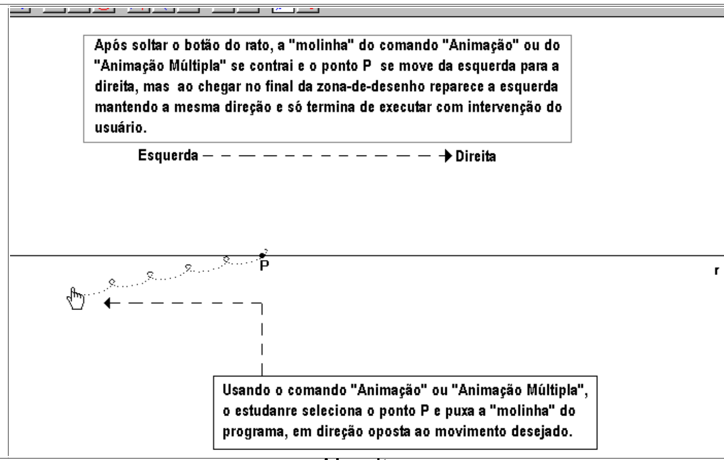
(c) Trecho de atividade apresentada em 24 / 05 / 2001 – Sessão 08
< 8:00 até 10:00 horas >

	Considere um segmento AB.  1. Divida o segmento em duas partes iguais. 2. Divida o segmento em três partes iguais. 3. Divida o segmento em cinco partes iguais. 4. Divida o segmento em seis partes iguais.
	5. O que garante que os segmentos divididos têm a mesma medida ? Que conhecimentos de geometria você usou para fazer a atividade ?

Figura S3-04 – Atividade desenvolvida por Aluna 1, Aluna 2 e Aluna 3.

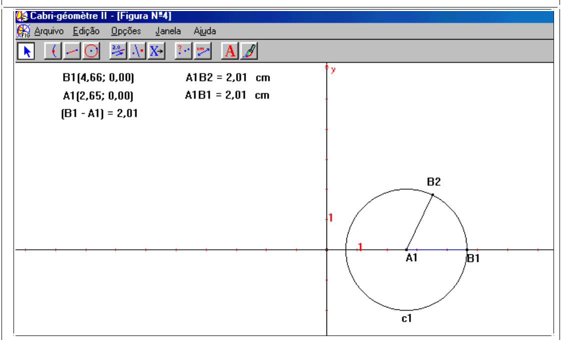
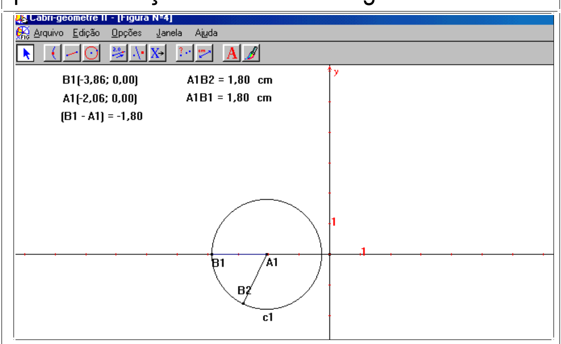
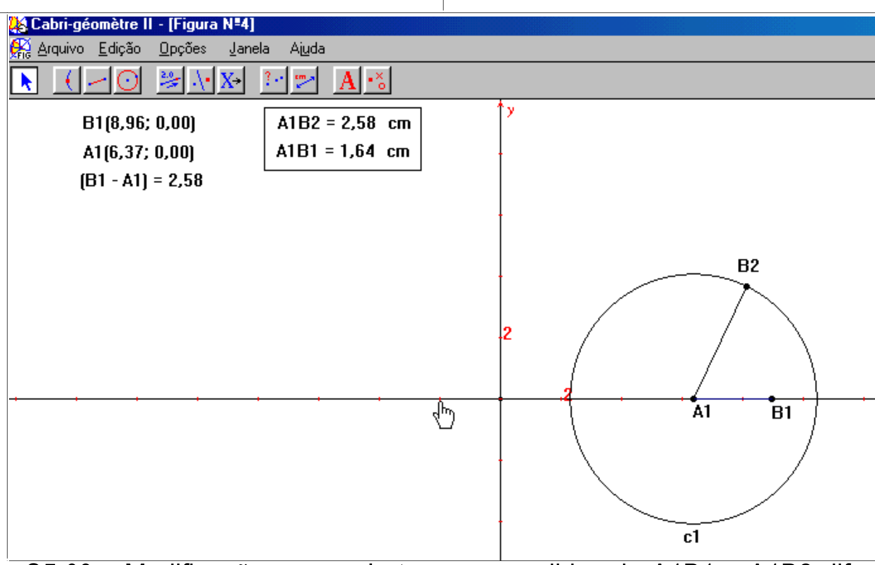
IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA				
SITUAÇÃO 04	Uma reta é infinita quando há um *looping*.			
Data	Maio de 1999	Contexto		
Ocorrência apresentada em uma manipulação exploratória dos comandos do Cabri Géomètre no Laboratório Multimeios FACED/UFC.				
Software(s)	*Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0*	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos	
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain	
Coleta de Dados	Arquivo do *software* Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades.	Quantidade de Pessoas	1 pessoas	

Figura S4-01 – Usando recurso de animação no *Cabri Géomètre II*.



Algoritmo

Passos	Ações realizadas
01	Construir uma reta r na zona-de-desenho do *Cabri-Géomètre II*.
02	Marcar um ponto sobre a reta r, nomeando-o como P.
03	Usando comando “Animação” ou “Animação Múltipla” sobre o ponto P, de modo que o mesmo se desloque em uma direção observando os acontecimentos.

<table>
<tr><td colspan="6">IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA</td></tr>
<tr><td>SITUAÇÃO 05</td><td colspan="5">A soma dos ângulos internos de um triângulo não é 180º graus.</td></tr>
<tr><td>Data</td><td>05 de Dezembro de 2001</td><td colspan="4">Situação baseada em ocorrência enviada ao fórum de discussão sobre o Cabri Géomètre II na França, apresentado por Genevieve Tulloue, e remetido à este trabalho por Hermínio Borges Neto. <cabri-forum@imag.fr></td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="5">Estudo sobre situações em software educativo para ensino de matemática, que em termos potenciais pode remeter à uma situação surpresa em atividade didática.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Software(s)</td><td rowspan="2">Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0</td><td>Instituição</td><td colspan="3">Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos</td></tr>
<tr><td>Autor(es)</td><td colspan="3">Jean Marie Laborde & Franck Bellamain</td></tr>
<tr><td>Coleta de Dados</td><td colspan="2">Arquivo do software Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades. E dados obtidos através de correio eletrônico.</td><td>Quantidade de Pessoas</td><td colspan="2">1 pessoas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Figura S5-01 – Construção inicialmente proposta.</td><td colspan="4">Figura S5-02 – Manipulação dos pontos A1 e B1 para verificação com inteiros negativos.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="6">
Figura S5-03 – Modificação na escala torna as medidas de A1B1 e A1B2 diferentes.</td></tr>
</table>

Algoritmo	
Passos	Ações realizadas
01	Acionar o comando “Mostrar Eixos” para exibição de eixos cartesianos.
02	Marcar um ponto sobre o eixo das abcissas nomeando-o como A1.
03	Marcar outro ponto sobre o eixo das abcissas que não seja coincidente a A1, nomeando-o como B1.
04	Usando comando “Equações e Coordenadas”, exibir as coordenadas de A1 e B1.
05	Traçar um segmento pelos pontos A1 e B1.
06	Usando comando “Calculadora” obter (B1 – A1) através das coordenadas destes pontos, e arraste o resultado sobre a zona-de-desenho.
07	Pelo comando “Transferência de Medidas”, selecione o resultado de (B1 – A1) que está na zona-de-desenho, expresso em termos numéricos, e selecione o ponto A1, de modo que o ponto resultante da transferência não pertença ao eixo cartesiano, e nomeie este ponto como B2.
08	Trace um segmento pelos pontos A1 e B2.
09	Meça os segmentos A1B1 e A1B2 pelo comando “Distância e Comprimento”.
10	Construir uma circunferência c1 com centro em A1 e raio B2.
11	Movimente os pontos A1 e B1 pelo plano e verifique os valores métricos dos segmentos A1B1 e A1B2.
12	Modifique a escala do eixo das abcissas, arrastando a marca de unidade da escala, e observe se A1B1 e A1B2 possuem os mesmos valores métricos, ou se são segmentos congruentes.

Correio Eletrônico de Tulloue enviado por Hermínio Borges

De: Hermínio Borges Neto
Data: terça-feira, 4 de dezembro de 2001 07:12
Para: José Rogério Santana
Assunto: Fw: d(AB) pás égal à abs(A) – abs(B).

----- Original Message -----
From: "Genevieve Tulloue" <gtulloue@ac-grenoble.fr>
To: <cabri-forum@imag.fr>
Sent: Tuesday, December 04, 2001 4:46 AM
Subject: Re: d(AB) pas égal à abs(A) - abs(B).

> > > Question : comment reporte t - on une abscisse (résultat de la
> > > calculatrice) et non une mesure de distance ?
> > > et inversement.
> > > Quelque soit le repère choisi.

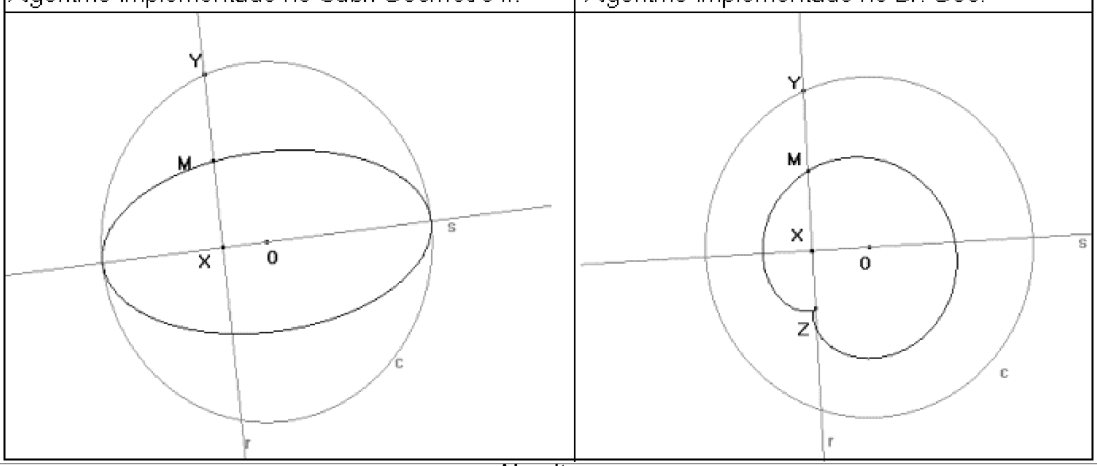
>
> Le "report de mesure" sur une demi-droite, un cercle, un vecteur ou un
point
> reporte un nombre de cm égal à la mesure, que celle-ci soit en cm, en
radians ou
> en rien du tout.
> Le report de mesure sur un axe reporte une abscisse, quelle que soit
l'unité de
> cette mesure (même en cm² !).
> Une autre méthode consiste à faire une homothétie du vecteur de base (ou
de son
> extrémité) en prenant comme rapport cette mesure. Elle perd alors son
unité.
>
> Geneviève Tulloue
>
> PS Il me semble que d(AB) n'est égal que la moitié du temps à abs(A) - abs
(B) !
>
>

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA

SITUAÇÃO 06	O caso do segmento elástico na divisão de um segmento em partes iguais.			
Data	Maio de 1999	Situação obtida a partir da comparação de um algoritmo em dois programas diferentes no Laboratório Multimeios FACED/UFC.		
Contexto	Experimento desenvolvido para averiguar se uma mesma atividade era correspondente em dois *softwares* de geometria dinâmica com propostas semelhantes.			
Software(s)	*Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0*	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos	
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain	
	Dr GEO version 0.60b	Autor(es)	Copyright Hilaire Fernandes	
Coleta de Dados	Arquivo dos *softwares Cabri-Géomètre II for Windows* e *Dr. Geo version* 0.60b.	Quantidade de Pessoas	1 pessoa	

Figura S6-01 – A implementação do mesmo algoritmo dois resultados distintos.

Algoritmo implementado no *Cabri Géomètre II*.	Algoritmo implementado no *Dr. Geo*.

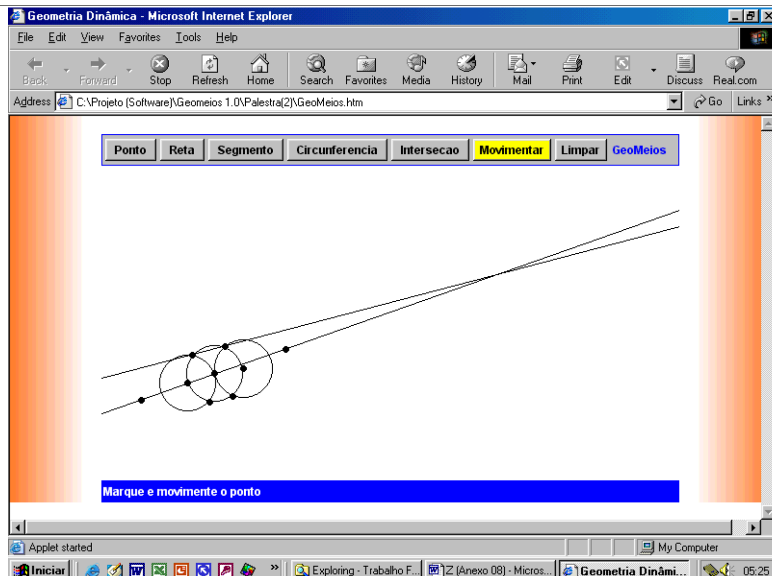


Algoritmo

Passos	Ações realizadas
01	Construir uma circunferência c com centro no ponto O e raio arbitrário.
02	*Marcar um ponto Y sobre a circunferência c.*
03	Traçar uma reta r pelo ponto Y.
04	Traçar uma reta s perpendicular a reta r pelo ponto O.
05	Marcar X como o ponto de intersecção entre r e s.
06	Encontrar o ponto médio do segmento XY nomeando-o como M.
07	Construir o lugar geométrico de M quando Y é movimentado sobre c.

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA			
SITUAÇÃO 07	Quando retas paralelas se encontram no plano euclidiano.		
Data	Agosto de 2001	Contexto	
Desenvolvimento de software de geometria dinâmica no Laboratório Multimeios/FACED/UFC			
Software(s)	*GeoMeios em Java versão piloto 0.1*	Instituição	Universidade Federal do Ceará Faculdade de Educação.
		Autor(es)	José Rogério Santana, Hermínio Borges Neto, Eduardo Silva Amaral, Izabel A. Meneses.
Coleta de Dados	Registro de observação e experimento e código fonte.	Quantidade de Pessoas	2 pessoas

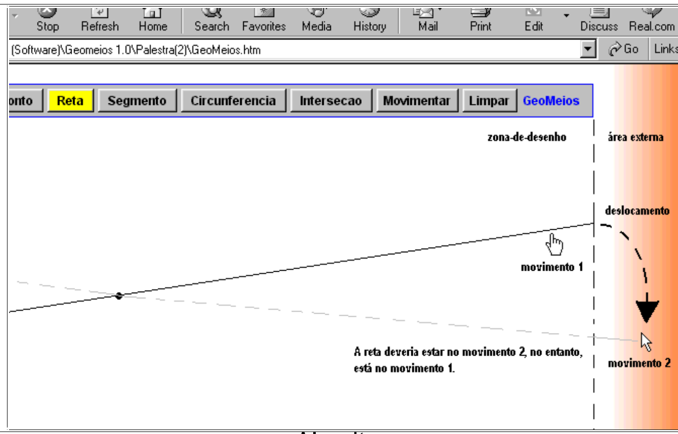
Figura S7-01 – As retas paralelas que se encontram no plano euclidiano.



Algoritmo

Passos	Ações realizadas
01	Traçar uma reta r a partir de dois pontos.
02	Colocar um ponto P sobre a reta r.
03	Construa uma circunferência c1 com centro em P e raio arbitrário.
04	Marcar Q como ponto de intersecção entre r e c1.
05	Construir uma circunferência c2 com centro em Q e raio QP.
06	Marcar R como ponto de intercessão entre r e c2.
07	Construir uma circunferência c3 com centro em R e raio RQ.
08	Marcar S como ponto de intersecção entre c1 e c2.
09	Marcar T como ponto de intersecção entre c2 e c3, no mesmo semiplano de S.
10	Traçar uma reta z pelos pontos S e T.

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA			
SITUAÇÃO 08	Manipulação de reta restrita à zona-de-desenho.		
Data	Agosto de 2001	Contexto	
Desenvolvimento de software de geometria dinâmica no Laboratório Multimeios/FACED/UFC			
Software(s)	*GeoMeios em Java versão piloto 0.1*	Instituição	Universidade Federal do Ceará Faculdade de Educação.
		Autor(es)	José Rogério Santana, Hermínio Borges Neto, Eduardo Silva Amaral, Izabel A. Meneses.
Coleta de Dados	Registro de observação do experimento e código fonte.	Quantidade de Pessoas	1 pessoas
Figura S8-01 – Uma restrição na manipulação da reta e a ruptura intuitiva			



Algoritmo	
Passos	Ações realizadas
01	Usando comando “Reta” do GeoMeios, trace uma reta.
02	Selecione e arraste um dos pontos da reta, até sair da zona-de-desenho.
03	Movimente o rato de modo que o mesmo não esteja na zona-de-desenho.
04	Retorne a zona-de-desenho em outra posição, observando o que ocorre a reta que estava sendo manipulada.

ESTAÇÕES GRÁFICAS E TRANSFORMAÇÃO DE VISUALIZAÇÃO

Segundo VELHO & GOMES (2001: p. 16–17), as estações gráficas interativas são o tipo mais comum de sistema gráfico. E um sistema gráfico padrão pode ser compreendido como uma estrutura que incorpora ao menos um dispositivo de entrada de dados vetoriais (rato e/ou teclado), um processador de uso geral com memória e um dispositivo de saída matricial (monitor de vídeo e/ou impressora), esquematicamente se obtêm:

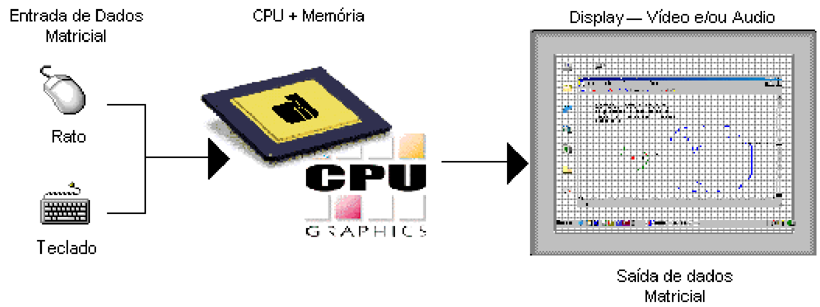


Figura S8-02 – Estação gráfica interativa segundo VELHO & GOMES.

Na atualidade, o com o desenvolvimento de sistemas de janela que é um sub-sistema gráfico que controla uma estação gráfica interativa, é possível ter a visão de uma "mesa de trabalho" com múltiplos aplicativos abertos de modo que em cada janela há um processo computacional em separado. Deste modo, basta usar teclas de atalho ou o arrasto (*drag*) e um *click* em uma determinada área do vídeo para alterar a ação de processamento que se deseja executar em um dado momento (*desktop*). No caso da situação 08, o que se deseja que o GeoMeios faça, é executar uma determinada ação (o arrasto da reta) fora da área de janela do programa.

Além disto, no GeoMeios há um problema a mais, na linguagem de programação *Java.* Um programa feito em Java é conhecido como mini-aplicativo ou *applet*, pois o *Java* funciona como uma máquina virtual, em que se executa um programa que está em um servidor em qualquer parte do mundo através de navegadores como *Netscape* ou *Internet Explorer*. Ocorre que a máquina virtual do *Java* é uma camada de programação que funciona sobre o sistema operacional, mas não acessa o sistema de arquivos dos sistemas operacionais, e o sistema gráfico de janelas está incorporado aos sistemas operacionais.

Portanto, uma ação simples como movimentar uma reta com o rato na área correspondente à uma saída de dados matricial de vídeo, é um desafio em termos de programação, pois no *Java* um mini-aplicativo está restrito ao "*display* de uma máquina-virtual", e não há uma janela de um sistema de janelas há que seja possível recorrer a princípio, afinal a maioria dos programas em Java foram projetados para funcionar dentro da área de trabalho de um mini-aplicativo. Por outro lado, uma versão em *Java* do *Ruler and Compasses* solucionou este problema, fato que mostra que há possibilidades em se efetuar o mesmo.

VELHO & GOMES (2001: p. 17- 18) também destacam que transformações na visualização de um objeto gráfico planar em uma janela nos sistemas de coordenadas do objeto ("*world coordenate system*", WC) devem ser mapeados em uma moldura ("*viewport*") definida no espaço de exibição de um dispositivo de saída de dados matriciais. E para aumentar a independência do dispositivo se utiliza um sistema de coordenadas normalizadas ("*normalized device coordenates*", NDC), que é um sistema definido por um retângulo cuja medida é [0,1] x [0,1]. Portanto é necessário definir o *viewport* em coordenadas normalizadas e é nesta moldura que é mapeado uma janela que representa o espaço dos objetos. Este processo de mapeamento é conhecido como transformação de visualização em 2D[46].

Portanto, se a janela é definida pelas coordenadas (xmin, ymin) que representam os valores mínimos e por (xmax, ymax) que representam os valores máximos, e a *viewport* é definida em coordenadas (rmax, smax) (rmax, smax) a transformação de visualização é dada por:

$$r = \frac{r\max - r\min}{x\max - x\min}(x - x\min) + r\min$$

$$s = \frac{s\max - s\min}{y\max - y\min}(y - y\min) + s\min$$

Não se deve esquecer que a transformação apresentada está sendo colocada com respeito à uma janela, entretanto, o Java é uma plataforma que deve sofrer uma transformação de visualização para janela, depois para o NDC até chegar as estruturas básicas de vídeo.

[46] VELHO, L. & GOMES, J. **Sistemas gráficos 3D.** Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2001. (Série de Computação e Matemática). p. 16-18.

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA				
SITUAÇÃO 09	A conjectura da elipse a partir do Novo PC			
Data	Maio de 1998	Esta situação ocorreu em uma situação experimental de manipulação em que o software *Cabri Géomètre II* estava sendo explorado.		
Contexto	Desenvolvimento de material didático para construções geométricas com uso do *Cabri Géomètre II* no Laboratório Multimeios FACED/UFC.			
Software(s)	*Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0*	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos	
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain	
Coleta de Dados	Arquivo do *software* Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades. E dados obtidos através de correio eletrônico.	Quantidade de Pessoas	5 pessoas	

Figura S9-01 – A construção: O lugar geométrico P apresentado é uma elipse?

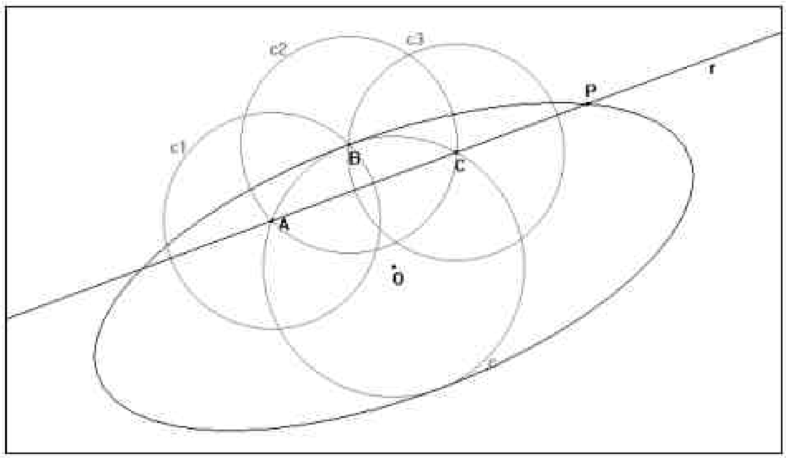
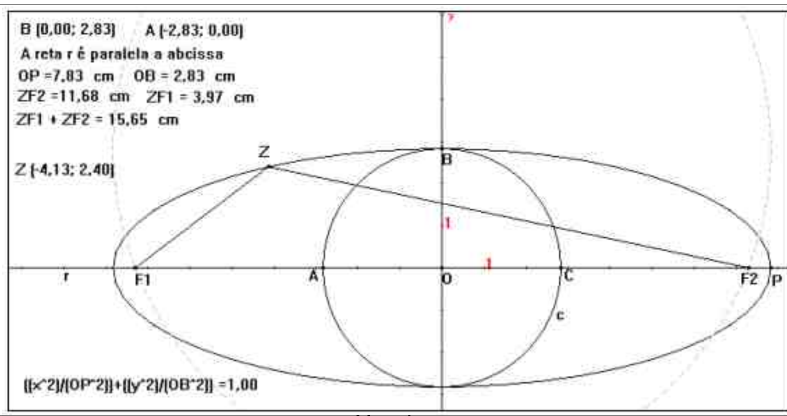


Figura S9-02 – Contextualização do problema



Algoritmo

Passos	Ações realizadas
01	Construir uma circunferência c com centro no ponto O;
02	Marcar um ponto A sobre a circunferência c;
03	Construir uma circunferência c1 com centro no ponto A, de modo que c1 seja menor que c;
04	Marcar um ponto B em uma das intersecções entre c e c1;
05	Construir uma circunferência c2 com centro em B e raio AB;

06	Marcar C ponto de intersecção entre c e c2;
07	Construir uma circunferência c3 com centro em C e raio BC;
08	Traçar uma reta r pelos pontos A e C;
09	Marcar P um ponto sobre a reta r;
10	Usando o comando “Lugar Geométrico” do Cabri Géomètre II, construir o lugar geométrico do ponto P quando o ponto A é deslocado sobre a circunferência c.

MATERIAIS USADOS

ANEXO 05 – B : LISTAGEM DOS MATERIAIS USADOS NA PESQUISA

Quanto os materiais usados na pesquisa o local de trabalho para desenvolvimento da maioria dos procedimentos metodológicos foi o Laboratório Multimeios FACED/UFC que dispõe de:

- 17 Computadores;
- 02 Impressoras;
- 01 Filmadora;
- 01 Telão com TV Colder.

E os software utilizados para a pesquisa são:

- Cabri Géomètre II for Windows
- GeoNext
- Dr Geo
- Compasses and Ruler
- WinGeo
- Mathematica 2.2
- MatLab 3.0

Já os materiais usados no procedimento metodológico 2 foi o Laboratório de Informática do CREDE 12/NTE Quixadá-CE que dispõe de:

- 13 computadores
- 02 Impressoras
- 01 Televisão 20” com TV Colder

E os software utilizados para o curso foram:

- Cabri Géomètre II for Windows
- GEONEXT
- Dr Geo
- WinGeo
- Modellus
- NetMeeting 2.0
- Microsoft Excel 97
- Jogos Educativos (sem procedência)