



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DO PICI
CURSO DE FÍSICA-BACHARELADO

DANILO DA SILVA BORGES

A FÍSICA DA MATÉRIA GRANULAR

FORTALEZA

2014

DANILO DA SILVA BORGES

A FÍSICA DA MATÉRIA GRANULAR

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao curso de graduação em
Física-Bacharelado da Universidade
Federal do Ceará (UFC)-Campus do Pici,
como requisito para a obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias
Araújo

DANILO DA SILVA BORGES

A FÍSICA DA MATÉRIA GRANULAR

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao curso de graduação em
Física-Bacharelado da Universidade
Federal do Ceará (UFC)-Campus do Pici,
como requisito para a obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias
Araújo

Aprovado em ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo (UFC)

Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona (UFC)

Prof. Dr. André Auto Moreira (UFC)

A Deus, a minha futura esposa Palloma
e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq, pela ajuda com a bolsa de Iniciação Científica.

Ao professor Ascânio Dias Araújo, pela paciência e disposição a minha formação.

Aos professores André Auto Moreira e Humberto de Andrade Carmona por ter aceito fazer parte da banca examinadora.

A Aurilena Pereira Norberto, pela ajuda na minha transferência para a UFC.

A Paulo Roberto Barroso Teixeira e Luciana Gonçalves Barroso Teixeira pelo apoio e incentivo.

“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais volta ao seu tamanho original”
(Albert Einstein)

Resumo

O objetivo desse trabalho é mostrar uma pequena introdução sobre materiais granulares, suas aplicações e principais trabalhos publicados, como também apresentar um experimento e sua análise quantitativa através de mensurações por fotos digitais. Uma transição de fase será apresentada, baseada nas quantidades mensuradas pelo tratamento das fotos. Uma analogia com a termodinâmica será feita como fonte de elucidação.

Palavras-chave: Grãos. Empacotamento. Magnetismo.

Abstract

The aim of this work is to show a short introduction to granular materials, their applications and main published works, as well as an experiment and present its quantitative analysis through measurements by digital photos. A phase transition is presented, based on the quantities measured by the treatment of the photos. An analogy with thermodynamics will be taken as a source of elucidation.

Keywords: Grains. Packing. Magnetism.

Sumário

1.0 Introdução.....	10
1.1 O que são materiais granulares?.....	10
1.2 Materia granular como um estado distinto da materia.....	11
1.3 Propriedades da materia granular.....	11
1.4 Motivações.....	13
1.5 Tipos de interação entre os grãos.....	14
1.6 Trabalhos sobre os materiais granulares não coesivos e coesivos.....	15
1.7 Como abordar a materia granular.....	18
1.8 Grãos magnetizados.....	18
2.0 A análise fotográfica.....	19
2.1 Pixel, voxel e a imagem digital.....	19
2.2 O que podemos medir?.....	20
3.0 O empacotamento de imãs.....	24
3.1 Materiais magnéticos.....	24
3.2 O experimento.....	25
3.2.1 Imãs dentro da cavidade sem EVA.....	25
3.2.2 Imãs dentro da cavidade com EVA.....	36
3.2.3 Contas ligadas por um fio dentro da cavidade sem EVA.....	41
4.0 Conclusão.....	47
Referências Bibliográficas.....	48

1.0 Introdução

1.1 O que são materiais granulares?

Um material granular é caracterizada por uma perda de energia sempre que as partículas interagem entre si através de colisões (o exemplo mais comum seria o atrito quando os grãos colidem), é nada mais que um aglomerado de partículas sólidas, macroscópicas e discretas. Os constituintes que compõem o material granular devem ser grande o suficiente para que eles não estejam sujeitos a flutuações de movimento térmico. Assim, o limite de tamanho inferior para grãos de material granular é de cerca de $0.1\mu m$. No limite superior de tamanho, a física dos materiais granulares pode ser aplicada a blocos de gelo, como icebergs, ou até em asteróides [1].

Alguns exemplos de materiais granulares são os grãos, areia, neve e carvão. Esses são os materiais granulares não coesivos, onde só há interação de contato. Para grãos molhados, eletrizados ou magnetizados são chamados de coesivos, pois possuem interação de tensão superficial, interação elétrica e magnética, respectivamente. Os pós é uma classe especial de material granular devido ao seu tamanho de partícula muito pequena, o que os torna mais coesivos e facilmente podem ser posto em suspensão. Materiais granulares são comercialmente importantes em aplicações tão diversas como a indústria farmacêutica, agricultura e produção de energia. A lei de atrito foi inicialmente prevista para materiais granulares por Charles-Augustin de Coulomb. Apesar de uma aparente simplicidade, esses materiais se comportam de forma diferente de qualquer um dos outros estados da matéria como sólidos, líquidos ou gases, e deve, portanto, ser considerado um estado adicional da matéria em seu próprio direito. Talvez a propriedade mais interessante, que só pode ser observada nesses materiais, é o processo de avalanche, onde uma lei de potência já foi encontrada [8]. Na raiz desse novo estado, temos três aspectos importantes: a existência de atrito estático (nos líquidos é praticamente zero), o fato de que a temperatura não ter efetividade, no sentido de que a agitação termica é desprezível para a mecânica desses materiais, e para grãos em movimento, a natureza inelástica de suas colisões, pois se trata de um material que dissipa rapidamente sua energia. Um exemplo desse último aspecto, é que se derrarmos uma quantidade de areia sobre uma mesa, pouco tempo depois ela cessa o movimento.

1.2 Material granular como um estado distinto da matéria

A física classifica os estados da matéria em: plasma, gás, líquido, sólido e condensado de Bose-Einstein. Alguns materiais não podem ser colocados estritamente sob uma categoria, porque eles carregam as propriedades físicas de dois ou mais estados, como os cristais líquidos. A matéria granulada não pode ser colocado em qualquer um dos estados acima mencionados, pois ela apresenta algumas propriedades físico-mecânicas dos cinco estados citados acima.

Para a mecânica dos solos, esses materiais são encarados como um sólido contínuo. Vários problemas em engenharia requer o entendimento da mecânica dos solos, e uma abordagem elegante é encará-la como um contínuo. Uma boa teoria foi proposta por William John Macquorn Rankine [2].

Submetendo os grãos a um fluxo, como por exemplo em um funil, um arco pode ser formado na saída dos grãos e o fluxo cessa, nesse caso devemos tratá-lo como um líquido, para termos um design adequado do escoador [3] e evitar esse tipo de problema.

Sob uma vibração ele é visto como um gás, considerando as colisões inelásticas. O interesse nessa abordagem foi devido as observações como a formação de aglomerados [4], colapso inelástico [5] e a quebra na equipartição da energia [6].

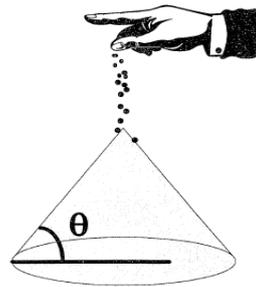
Aqui também podemos falar em transição de fase. Um material sólido, pode ser quebrado a ponto dele virar somente grãos. Termodinamicamente, também podemos chegar nessa fase granular, quando a água está em suspensão no ar, e ele resfria, produzindo neve, passamos da fase de vapor/líquido para a fase granular. A neve tem algumas propriedades similares a uma pilha de areia, pois sofre processo de avalanche e tem um ângulo de repouso bem definido. Um estudo mais detalhado da granulação da neve foi feita por John W. Barrett, Harald Garcke, Robert Nürnberg [4].

1.3 Propriedades da matéria granular

Aqui, iremos mostrar as propriedades que apenas aparecem nesses materiais e que são:

- A formação de pilhas e ângulo de repouso: Sabe-se que se despejarmos areia sobre uma mesa uma pilha cônica irá ser formada, até atingir um ângulo crítico. Caso mais areia seja colocada, o sistema colapsa (com uma avalanche) e o sistema volta ao seu ângulo crítico de repouso. O primeiro a explicar esse fenômeno foi Charles de Coulomb, ele se baseou na ideia simples de que uma camada de areia ficará estática caso seu ângulo seja $\theta = \tan^{-1}(\mu_e)$, onde μ_e é o coeficiente de atrito estático da areia. No caso se cavássemos um buraco no solo, o ângulo de repouso não

Figura 1 — A formação de uma pilha



Fonte: Duran, J., Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials (translated by A. Reisinger). November 1999, Springer-Verlag New York, Inc., New York, ISBN 0-387-98656-1

seria o mesmo, na verdade seria um pouco maior do que o ângulo no caso convexo. Os fatores que influenciam para o ângulo de repouso são: a forma geométrica dos grãos e o coeficiente de atrito entre eles.

- Segregação e mistura: Pode-se querer fazer uma mistura composta de grãos, mas dependendo do processo tem-se exatamente o contrário e as componentes que compoem a mistura começam a segregar. Na busca por ouro, o que se deseja é justamente o inverso, queremos separar a areia, argila e pedras do ouro. Entender como isso ocorre, sobre a calibragem de quais parâmetros podemos segregar ou misturar é essencial tanto do ponto de vista teórico como industrial. Um ponto interessante a ser falado, que é bastante contra intuitivo, é o chamado “Brazil-nut effect” [31]. Sabe-se que se você despejar uma pedra em um fluido menos denso ele afunda. Porém, se tivermos dois tipos de grãos misturados, com densidades diferentes, no caso de estarem sob uma vibração vertical, os grãos mais densos passam a subir. Basicamente a segregação ou mistura pode ser observada em grãos sobre vibração (vertical/horizontal) ou em tambores cilíndricos e esféricos sob rotação.
- Empacotamento: O transporte de grãos, carvão ou qualquer material granular é de suma importância na industria, conseguir compactar o máximo possível iria economizar tempo e dinheiro. Nas teorias que trabalham com essa propriedade, um parâmetro muito importante a ser medido é a fração de empacotamento $\phi = \frac{\sum_i v_i}{V_t}$, ou seja, o somatório dos volumes dos grãos, dividido pelo volume total da cavidade que matém os grãos. A técnica usual para empacotamento é através da vibração. Para grãos esféricos de mesmo raio o empacotamento fica em torno de um intervalo entre 55% e 64% [32]. Um trabalho muito bom, conseguiu mostrar uma relação entre a fração de empacotamento e o número de coordenação (número máximo de contatos que um grão faz com os demais) como também o papel do atrito no empacotamento [8].
- Jamming: Outra característica importante é quando um sistema granular está em fluxo e trava, como um funil que escoar grãos. Isso ocorre devido a formação de um arco que sustenta todo o peso. A solução que se tem, é construir um funil com uma geometria que não permita o fluxo emperrar ou usar

dispositivos, como o parafuso de Arquimedes, uma correia transportadora ou submeter o funil a uma vibração.

1.4 Motivações

A matéria granular tem diversas aplicações industriais. Como exemplo podemos citar na separação e mistura de matéria prima de fármacos na indústria farmacêutica, como também a moagem e esmagamento de grãos na indústria alimentícia, na construção de reservatórios para o armazenamento de grãos, no design em funis, silos, calhas e correias transportadoras e muito mais. Vale a pena destacar algumas utilizações interessantes:

- Como braço robótico: Na mecatrônica ter um braço robótico que consiga manipular objetos com eficiência é de extrema aplicabilidade. Muitos projetos são baseados nas mãos humanas, a desvantagem é que a construção de software e hardware são bastante complexos. Diante dessa dificuldade foi proposta uma ideia [9] que substituiria a mão por uma massa deformável, composta por um material granular, que quando pressionado sobre um objeto o material granular fluiria para o espaço deformado, submetendo o objeto a uma força muitas vezes maior que seu peso. O princípio por trás desse mecanismo está na habilidade do material granular transitar do chamado estado *unjammed* (deformável), para o estado *jammed*, na qual ela toma a rigidez de um sólido.
- Pó e a impressão digital: Em uma cena de um crime, a impressão digital é uma informação útil para o perito que queira desvendar o seu autor. Um pó que adere muito bem aos resíduos deixados pelos dedos, mãos ou pés ao tocar alguma superfície é o pó de *Lycopodium* [10]. Entretanto, nem toda superfície facilita a aderência do pó para realçar a digital, como por exemplo superfícies plásticas e superfícies com textura. Para preencher essa deficiência os pós magnéticos aderem muito bem em superfícies desse tipo[11].
- Poeira explosiva: Quando um pó está em suspensão no ar e com uma devida ignição, ela pode entrar em combustão violentamente, ocasionando uma explosão. Mesmo materiais, como o açúcar, pode ter esse comportamento explosivo. Isso aconteceu em 2008 na Geórgia, em uma refinaria de açúcar[12]. Essa propriedade é tão violenta que ela é aplicada pelos militares[13], nas chamadas armas termobáricas. Ao contrário dos explosivos comuns que tem o agente oxidante em sua maior composição (a pólvora tem cerca de 25% é o combustível composto por carvão e enxofre e 75% de oxidante composto por nitrato de potássio) os explosivos termobáricos tem 100% de combustível, tornando-os mais energéticos do que os explosivos convencionais. Basta um dispositivo que borrife o combustível no ar e outro para provocar uma centelha, o mesmo princípio que ocorreu na refinaria de açúcar.

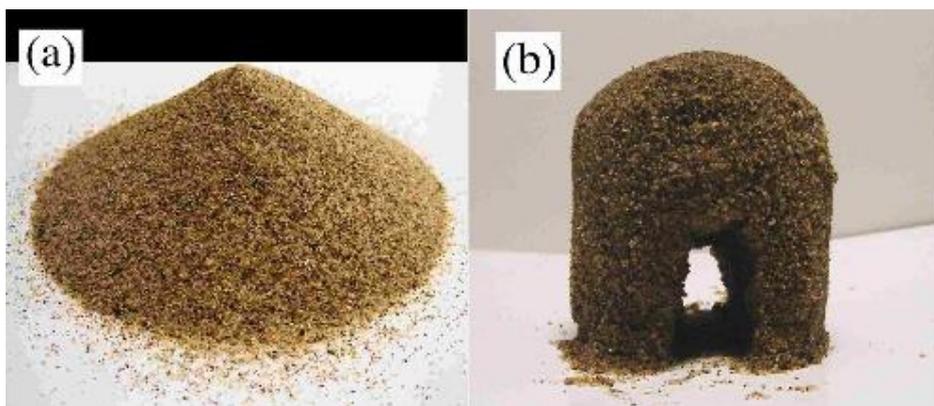
No mundo todo a produção anual de grãos e agregados de vários tipos é gigantesca, alcançando cerca de dez bilhões de toneladas. O processamento de materiais desse tipo consome cerca de 10% de toda a energia produzida no planeta e na escala de prioridades da atividade humana ela está em segundo lugar, imediatamente atrás do fornecimento de água [33]. Como tal, qualquer avanço na

compreensão da física desses materiais nos dará um grande impacto econômico. Há muita coisa a ser feita, a respeito dos métodos de transporte, armazenagem e mistura em todas as fases do processamento industrial desses materiais.

1.5 Tipos de interações entre os grãos

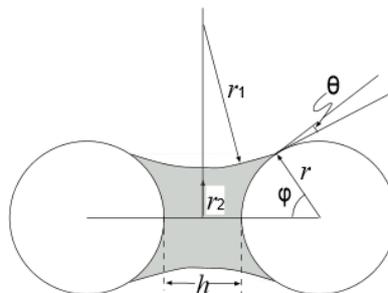
Materiais granulares, como areia e argila são materiais complexos que apresentam ambas as propriedades sólidas, fluidas e gasosas, elas são chamadas de materiais granulares coesivos. A coesividade pode ser quando um material granular estar imerso em um fluido viscoso, onde a tensão superficial predomina nas interações (como por exemplo argila ou areia de praia). Uma outra forma interessante de coesividade é encontrada nas tempestades de areia em desertos ou em núvens de erupção vulcânicas, onde a interação considerada aqui, entre os grãos é do tipo elétrica. Materiais magnetizados também são considerados coesivos, como por exemplos esferas magnetizadas de neodímio. Esse tipo de coesividade será explorada nesse trabalho. A figura abaixo nos ajuda a ter uma visualização dos tipos de coesividade.

Figura 2 — a) Areia seca em seu ângulo de repouso b) Areia molhada com uma forma impossível de ser construída caso fosse seca



Fonte: N Mitarai, F Nori - Advances in Physics, 2006 - Taylor & Francis

Figura 3 — Coesividade em grãos molhados



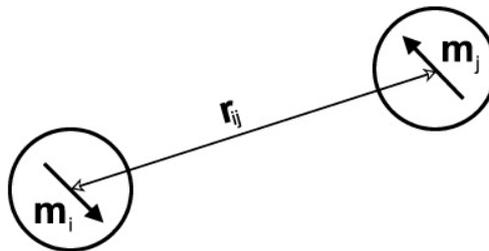
Fonte: N Mitarai, F Nori - Advances in Physics, 2006 - Taylor & Francis

Figura 4 — Ampla atividade elétrica na nuvem de cinzas do vulcão Chaitén, no Chile.



Fonte: Site scientificpsychic, imagem tirada em 2 de maio de 2008 por Carlos Gutierrez.

Figura 5 — O tipo de interação é conhecido na literatura $F_i = \nabla(m_i B_j)$



Fonte: Palm and V Korenivski, New J. Phys. 11 (2009) 023003, A ferrofluid-based neural network: design of an analogue associative memory

Há duas abordagens comuns para um tratamento teórico (analítico ou computacional) para materiais granulares: uma abordagem microscópica considerando uma estrutura totalmente discreta e uma abordagem baseada no macroscópico, ou seja, na mecânica do contínuo. No entanto, uma teoria completa para materiais granulares ainda não foi proposta. Além disso, é importante notar que estes dois tipos de abordagens são complementares e têm os seus respectivos papéis na modelagem do comportamento do material granular[2].

1.6 Trabalhos sobre os materiais granulares não coesivos e coesivos

É notável e admirável que alguns cientistas notáveis contribuíram com estudos sobre o comportamento destes tipos de materiais .

Na Roma antiga, Lucrécio foi o primeiro a estudar esses materiais ele escreveu: "Pode-se recolher as sementes de papoula com uma concha tão facilmente como se fossem água e, quando imergindo na panela , as sementes fluam numa corrente contínua." Ainda se usa a semente da papoula como ferramenta de estudo, pois ela contém muita água, o que facilita o uso da ressonância magnética para mapear as posições delas e estudar as distribuições de forças nas paredes.

No Renascimento temos Leonardo da Vinci que foi o primeiro a construir uma experiência simples e convincente sobre as leis do atrito seco, mas foi Coulomb que deu o tratamento quantitativo. Leonardo da Vinci também foi capaz de descobrir alguns comportamentos pertinentes sobre pilhas de areia. Charles de Coulomb escreveu um

artigo, que ainda é muito citado , chamado "Ensaio sobre as regras dos Máximos e Mínimos" aplicada a alguns problemas de equilíbrio relacionados à arquitetura. O artigo em questão , é interessante em vários aspectos, é baseado num número de observações experimentais sobre o equilíbrio de diques de terra e a estabilidade de estruturas de pedra. Ele coloca a física dos materiais granulares sobre uma base que é difícil de contestar, ainda hoje. Ele também levou as leis de Coulomb de atrito seco entre sólidos, para materiais granulares. Nesse sentido, o papel visionário de Coulomb pode ser visto como uma disciplina inteiramente nova.

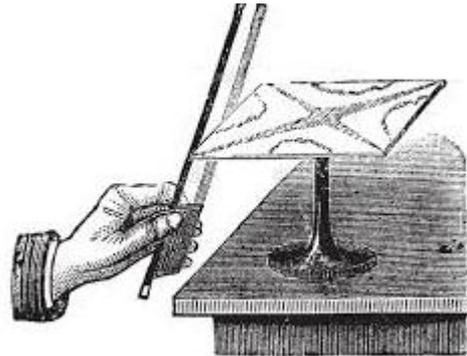
Em 1780, Ernst Chladni percebeu um fenômeno interessante (que continuam a ser bastante intrigante até hoje) no comportamento dos grãos sobre uma placa submetida a vibração. Ele observou o que veio a ser conhecido como figuras de Chladni. Seus experimentos foram reproduzidos por Christiaan Oerstedt, que usou lycopodium , um pó extremamente fino, que foi fundamental em muitas outras descobertas.

Michael Faraday foi outra figura ilustre que, em seu trabalho em como as vibrações induzem a formação de pilhas de areia . Esse fenômeno, intimamente relacionado com as experiências de Chladni , permaneceu um mistério até recentemente. O problema era descobrir o papel do ar, como a areia se acumula em padrões regulares .

William Rankine analisou as implicações teóricas do atrito em materiais granulares. A partir de idéias de Coulomb, ele estabeleceu uma série de princípios que permanecem plenamente válidos até hoje. Ele definiu o que hoje é chamado de estados passivos e ativos de Rankine. O problema da distribuição de equilíbrio de forças , em um meio granular armazenada em uma cavidade tem sido estudada por vários pesquisadores. Experimentalmente eles usaram tanto papel carbono[34] como uma folha plástica[28], sensível a pressão, para verificar a distribuição das forças.

Em materiais granulares molhados, podemos citar um trabalho muito interessante, onde padrões de dedos foram encontrados [15]. O autor preparou uma

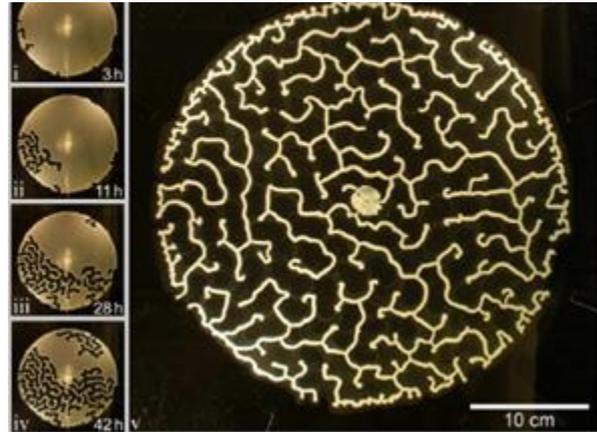
Figura 6 — Figuras de Chladni



*Fonte: William Henry Stone (1879)
Elementary Lessons on Sound,
Macmillan and Co., London, p. 26,
fig. 12*

solução com esferas de vidro polidisperso, de diâmetro de $50\sim 100\mu m$, misturados em 50% em volume em uma solução de água-glicerol. A solução é injetada na célula por um orifício central, localizada no topo de um aparato de cavidade cilíndrica. Depois da injeção, a mistura preenche a cavidade. Após a injeção, os grãos sedimentam no fundo da cavidade, depois a drenagem é feita lentamente a partir da abertura no centro do topo, em uma vazão constante de $0.01ml/min$; assim o experimento dura cerca de 3 dias para alcançar a estrutura final. A estrutura final, do aglomerado compactado, é simplesmente conectado e aleatório. O padrão é gerado devido a competição de forças capilares e atrito. A figura 6 mostra os resultados.

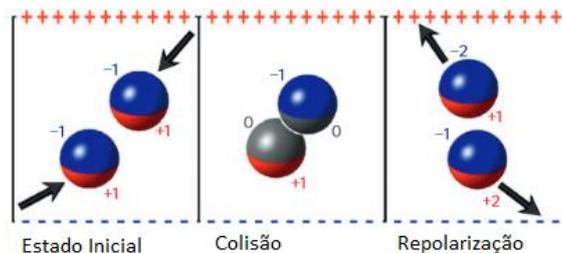
Figura 7 Experimento com materiais granulares molhados



Fonte: B. Sandnes, H. A. Knudsen, K. J. Maløy, E. G. Flekkøy, 2007, Labyrinth Patterns in Confined Granular-Fluid Systems

Para os materiais granulares carregados eletricamente há uma necessidade em sua compreensão, tanto do ponto de vista acadêmico como industrial. Explosões podem ocorrer, pois a eletricidade estática pode provocar uma ignição e assim uma reação em cadeia, como ocorreu em Glasgow em 10 de Novembro de 1911 em uma fábrica de farinha, matando 5 pessoas e ferindo 3 crianças. Geralmente, em fábricas de açúcar, carvão, farinha ou qualquer material granular submetido a um fluxo pode se eletrizar, provocando uma centelha e assim uma explosão. Isso não é fácil de se explicar, pois como grãos praticamente inertes passam a possuir carga elétrica? Um trabalho feito por Pähitz, H. J. Herrmann e T. Shinbrot [87] tenta explicar essa eletrização, considerando um fluxo granular com colisões entre os grãos eletricamente neutros, submetidos a um campo elétrico externo. A figura abaixo é exemplificativa do modelo proposto.

Figura 8 — Modelo para eletrização



Fonte: T Pähitz, HJ Herrmann, T Shinbrot - Nature Physics, 2010 - nature.com

Finalmente, para materiais granulares magnetizados podemos citar a tese de doutorado de Sándor Fazekas [16] onde o empacotamento, formação estável de

pilhas, ângulo de repouso, processos de avalanche, distribuição de forças e bandas de cisalhamento foram discutidos e mensurados, através de simulações para grãos esféricos magnetizados como um dipolo.

1.7 Como abordar a materia granular?

Em física, podemos usar três tipos de ferramentas: Experimentação, a análise matemática ou o uso de simulações. No problema em questão têm-se uma riqueza muito grande nessas nesses três caminhos. Há várias técnicas para fazer mensurações, como por exemplo, o tratamento de imagens, uso de ressonância magnética para o desenho de estruturas empacotadas em 3D, uso de fotoelasticidade para o mensuramentos de forças entre os grãos, o uso de películas sensíveis a pressão para verificação das distribuições das forças ou o uso reômetros e cilindros Coutte para o estudo do cisalhamento. Analiticamente há estudos que descrevem esses materiais como um contínuo, como a teoria de Rankine [2] ou tentam escrever uma termodinâmica, com o conceito de temperatura e entropia adaptada para esse meio [17]. Computacionalmente temos o modelamento através do Método de Monte Carlo [18], Dinâmica Molecular [19], Modelos de Rede (Boltzmann) [20] e o Evento Dirigido [21].

1.8 Grãos Magnetizados

Diante todas essas ferramentas, abordagens e a multiplicidade de materiais granulares iremos nos ater a materiais granulares magnetizados e iremos estudá-los através da análise de fotos, usando o software MATLAB. Como há várias formas de observar o comportamento de grãos, seja por vibração, fluxo ou empacotamento iremos estudar o empacotamento de grãos esféricos magnetizados dentro de uma cavidade cilíndrica.

O que motivou esse enfoque foram alguns trabalhos sobre o empacotamento de fios em uma cavidade cilíndrica [22,23,24,25,26] (um padrão de loops foi encontrado) e o empacotamento de contas ligadas por um fio [27]. Como até então não havia o empacotamento em cavidades com grãos coesivos nessa escala, uma lacuna ficou a ser preenchida, assim investimos nosso tempo nessa nova forma de aglutinar grãos. A escolha de imãs esféricos foi devido a facilidade que o material pode ser obtido, com diferentes tamanhos e intensidades de magnetização, além disso, a interação entre esses materiais já é conhecido na literatura, assim uma possível simulação desses materiais para averiguação e comparação de dados obtidos nos experimentos é de fácil aplicabilidade, usando principalmente a dinâmica molecular.

O que iremos expor nas próximas seções são os parâmetros que podem ser medidos através da análise de fotos, mensura-los para o empacotamento de uma cadeia de imãs esféricos e compara-los com o empacotamento de contas ligadas a um fio.

2.0 A análise fotográfica

2.1 Pixel, Voxel e a imagem digital

Uma imagem digital que vemos na tela do computador nada mais é do que um conjunto de pontos luminosos chamados de pixel. Uma tela é simplesmente uma rede retangular, composta por quadrados, sendo que cada quadrado é representado por um pixel. O pixel emana cor em uma determinada intensidade luminosa. Essa cor e intensidade luminosa é controlada por impulsos elétricos e podemos tratar essa informação física através de números binários. Essa abstração nos permite ter uma manipulação mais maleável das imagens, isso ajuda muito na codificação, modificação, transmissão, cópia e armazenamento. Essa representação retangular pode ser vista como uma matriz, $m \times n \times 3$, o m e n representa o número de pixels nas colunas e linhas da tela. Existem 3 camadas representando as intensidades do vermelho, verde e azul, as três cores primárias, cada valor vai de 0 a 256 (ou entre 0 e 1), do mais escuro ao mais claro. Isso tudo que foi dito é quando estamos fazendo uma coleta bidimensional de informação, como uma foto que se tira com uma máquina fotográfica, porém, se quisermos fazer uma varredura tridimensional de um objeto, seja por raio-x ou ressonância magnética, como iremos tratá-la computacionalmente? Neste caso, teremos um ponto luminoso no espaço tridimensional chamado voxel e computacionalmente iremos tratá-lo como uma matriz $o \times m \times n \times 3$. Várias quantidades podem ser medidas através de fotos, como por exemplo: O perímetro de uma figura, a sua área, calcular o centro de massa e outras quantidades. Caso tenhamos um vídeo, podemos calcular a velocidade e aceleração, pois um vídeo nada mais é do que um conjunto de fotos.

Na análise que iremos fazer, sempre fazemos uma preparação nas fotos: Destacamos a área de interesse e fazemos o tratamento binário da imagem. Quando fazemos o tratamento binário da imagem, tornando-a em preto e branco, facilitamos a programação e tiramos as redundâncias, assim ganhamos tempo e consistência na construção do código. Esse procedimento é bastante importante, pois mexe diretamente com a precisão das medidas, pois para tornar a imagem binária devemos adotar uma quantidade de referência, dessa maneira o programa compara cada pixel com esse valor, caso o valor do pixel seja maior substituímos por 1 (branco), caso contrário substituímos por 0 (preto). O problema é que existem sombras, ruídos e a potência da definição (em megapixels) do aparelho usado altera a precisão das medidas, então esse valor de referência deve ser ajustado manualmente até que a precisão desejada seja alcançada.

O programa que usaremos, para tratar a imagem como uma matriz e fazer todas as medidas desejáveis é o MATLAB, pois já existem muitas sub-rotinas que permitem fazer inúmeras manipulações, desde a leitura e escrita da imagem como um vetor(matriz), como manipulação pixel-a-pixel.

2.2 O que podemos medir?

Quando estudamos um empacotamento, umas das primeiras quantidades que queremos saber é a fração de empacotamento. No caso de um experimento, em que sabemos a quantidade de objetos, o volume(área) dos objetos empacotados e o volume(área) da cavidade, uma análise fotográfica é desnecessária, mas quantidades como o número de contatos, dimensão fractal, centro de massa de alguma parte de estrutura, a contagem de algum padrão repetitivo na estrutura, o perímetro, a entropia, a distribuição radial, a densidade local e a inclinação de eixos de simetria ficam impossíveis de se medirem sem o uso dessa ferramenta computacional.

Para termos uma melhor clareza das quantidades citadas acima, vamos fazer uma pequena abordagem sobre cada uma, como também dizer sua importância.

Fração de empacotamento: Um dos primeiros trabalhos sobre empacotamento foi sobre esferas de mesmo raio e foi proposto por Carl Friedrich Gauss. Arranjando-as em de forma regular, a maior fração de empacotamento obtida é $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. Essa quantidade corresponde a uma estrutura hexagonal, ou cúbica de face centrada, ambas as formas de empacotar resultam a mesma fração. Esse resultado, significa dizer que o espaço tridimensional não pode ser totalmente preenchido com esferas, considerando que não há sobreposição. A quantidade que está relacionada com a fração de empacotamento é o número de coordenação, o número de primeiros vizinhos ou número de esferas que tocam uma esfera. Para esferas e suas diferentes estruturas de agregação tem-se que: $N_c = \frac{\pi}{1-\phi_s}$, onde ϕ_s é a fração de empacotamento para esferas [35]. Desde que foi descoberta essa relação para a esfera, os físicos que trabalham nessa área tentam encontrar ela para os seus respectivos problemas.

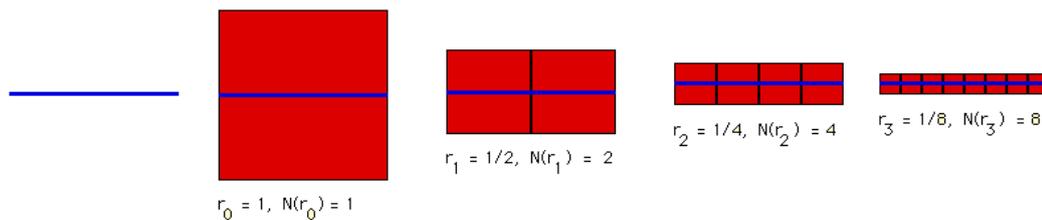
Perímetro e Área: Para figuras Euclidianas bidimensionais, a relação entre o perímetro e a área é dada por: $P = kA^{\frac{1}{2}}$, onde P é o perímetro, A é a Área e k é uma constante que depende da forma particular da figura. Para empacotamentos que apresentam alguma característica peculiar em sua estrutura é interessante se saiba se o expoente 0.5 se mantém. Dessa forma podemos saber se alguma propriedade importante pode emergir, como space-filling e invariâncias de escala.

Centro de massa: Saber o centro de massa de uma estrutura é poder estudá-la de uma forma simplificada, pois estamos tratando o todo como um único ponto, além disso, usa-la como referência para medição distâncias, velocidades ou qualquer outra grandeza que se queira pode nos abrir uma nova perspectiva com mais simetrias, como já é conhecido na mecânica. Caso escolhermos deixar o centro de massa do todo e considerar o centro de massa das partes, podemos fazer uma análise através de grafos, considerando os nódulos como os centros e as ligações como os contatos ou uma outra regra conveniente.

Dimensão fractal: Não precisamos abstrair a intuição para conceber a ideia de dimensão, pois sabemos que uma linha tem apenas uma, um disco tem duas e uma esfera tem três. Mas seria possível uma dimensão fracionária ou irracional? Ou o caso mais exótico, uma dimensão complexa como o número imaginário i ? Saindo da intuição e indo para a matemática podemos calcular uma dimensão usando a dimensão de homotetia ou a dimensão de Hausdorff-Besecovitch. A primeira só é possível para estruturas regulares, já a segunda pode ser usada para qualquer estrutura.

A dimensão de Hausdorff-Besecovitch é um número obtido através de um procedimento bem fácil de ser realizado. A ideia é cobrir o objeto com caixas, aumentando cada vez o seu número, mas reduzindo o seu tamanho, depois contar o número de partes que estão dentro dessas caixas e guardar esses valores. A seguinte relação será obtida: $N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^d$, onde N é o número de caixas, r é seu tamanho e d será a dimensão do nosso objeto. Vamos analisar o caso de uma linha reta ($d = 1$).

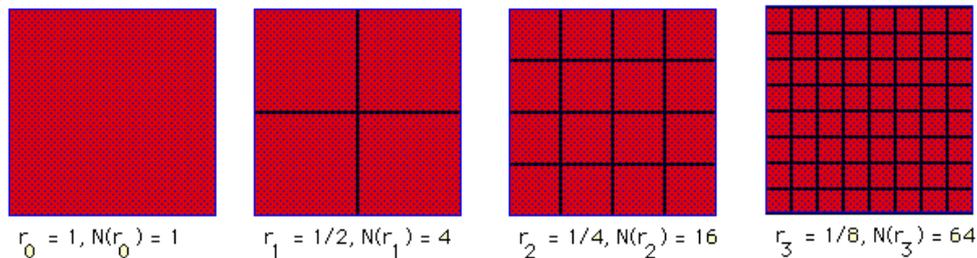
Figura 9 — Demonstração do método para uma reta



Fonte: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico7.php>

Para o caso de um quadrado: $d = 2$

Figura 10 — Demonstração do método para um quadrado



Fonte:

<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico7.php>

Computacionalmente esse método é conhecido como box-counting e ele pode ser usado para imagens binárias. Com essa técnica podemos calcular a dimensão de estruturas como o pulmão, nuvens, raios ou qualquer outra coisa que se possa fotografar. Com ela podemos saber como a fração de empacotamento está associada com a dimensão, com isso temos uma forma alternativa de caracterizar um determinado sistema.

Entropia: A entropia foi originalmente fundamentada na termodinâmica, ela nos diz de quantas formas possíveis um sistema termodinâmico pode ser arrumado, ou seja, mede a desordem do sistema. Para sistemas granulares não podemos usar o conceito construído na termodinâmica, pois se trata de um sistema que dissipa energia, dessa forma não conservam energia, porém existem outras interpretações. Para sistemas granulares submetidos a pressão, dentro de uma caixa, a entropia representa o logaritmo do número de réplicas do empacotamento granular que pode ser gerado pela posse da mesma distribuição de forças[28], aqui a entropia é calculada usando conceitos da mecânica estatística. Uma outra abordagem permite escrever a entropia em função da densidade local, obtida pelo diagrama de Voronoi. Para construir esse diagrama temos que saber as posições (coordenadas) dos grãos e é aqui que entra a análise das fotos pelo programa.

Função de Distribuição Radial: Essa quantidade é muito usada quando se deseja saber em que estado da matéria se encontra um composto. Geralmente, em dinâmica molecular, calcula-se esse parâmetro como caracterização de um sistema, além disso, podemos associar essa quantidade ao número de coordenação. Sabe-se, que para os três estados físicos, sólido, líquido e gasoso, essa função apresenta três padrões, dessa forma podemos reconhecer um estado analisando o gráfico $g(r) \times r$.

Para materiais granulares, elas nos fornecem uma informação de correlação de longo alcance e sua organização[16]. Para calcular esse parâmetro adotamos primeiramente uma partícula de referência. A distribuição radial será:

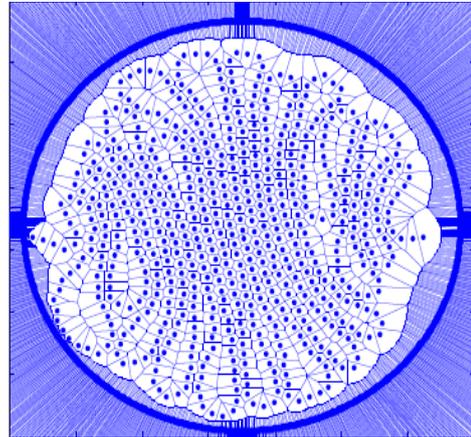
$$g_{ij} = \frac{N_{ij}(r, r + \Delta r)}{4\pi r^2 \Delta r \rho}$$
, r é a separação entre os átomos, $N_{ij}(r, r + \Delta r)$ é o número médio de átomos j encontrados na camada esférica entre r e $r + \Delta r$, centrada no átomo i , $4\pi r^2 \Delta r$ é o elemento de volume da camada esférica e ρ é a densidade de átomos na caixa.

Experimentalmente, as funções de distribuição radial podem ser determinadas a partir de técnicas de difração de raios-X, espalhamento de nêutrons e difração de elétrons[29]. Em uma simulação computacional, o cálculo de g_{ij} envolve, basicamente, o cálculo das distâncias r entre os átomos i e j . O número de vezes que ocorre o par de átomos em função da distância r é armazenado em um histograma. Esse histograma é incrementado ao longo da simulação, e por fim, é normalizado para o

número N de moléculas utilizadas na caixa de simulação e para o número de passos usados no cálculo de g_{ij} .

Densidade local: Enquanto que a fração de empacotamento é uma informação global, ela carece de informação local sobre a nossa amostra. A densidade local está associada com uma fração do volume ocupado pelos grãos em volumes particionados no espaço. Uma partição será feita usando as células de Voronoi, construída em volta dos centros dos grãos, dessa forma, para cada grão dentro da célula temos uma fração de volume local (densidade local). A informação gráfica que podemos obter é a distribuição dessas densidades. A figura acima mostra como seria a partição para o empacotamento de esferas em 3D.

Figura 11 — Tesselação usando o diagrama de voronoi



Fonte: Elaborada pelo autor

3.0 O empacotamento de ímãs

3.1 Materiais magnéticos

A matéria pode possuir magnetismo de forma natural ou artificial. Um exemplo encontrado na natureza é a magnetita (Fe_3O_4), um ímã natural bastante conhecido. Esses tipos de óxidos são muito usados para criar dispositivos para armazenar informação, como o disco rígido e cartões de crédito. Artificialmente podemos construir um ímã de duas formas. Uma é usando uma bobina, que é um fio enrolado de forma cilíndrica, esse é o chamado solenoide. Se uma corrente elétrica passar por ela, um campo magnético uniforme é formado no interior do solenoide e sua intensidade será $B = \frac{\mu_0 NI}{L}$, onde L é o comprimento do solenoide N é o número de espiras (ou voltas) e I é a corrente que passa através dela. A outra forma de construir um ímã é imantando certos materiais com um campo magnético externo, dessa forma podemos ter 3 respostas.

- Paramagnética: Os dipolos atômicos que estão no interior do material se alinham na mesma direção e sentido com o campo magnético externo, dessa forma são atraídos pelo campo magnético, porém quando o campo é desligado ele não retém o campo que foi aplicado.
- Diamagnética: Os dipolos atômicos que estão no interior do material se alinham na mesma direção mas em sentido contrário com o campo magnético externo, dessa forma são repelidos pelo campo magnético, contudo, da mesma forma que os materiais paramagnéticos, os materiais diamagnéticos perdem a magnetização quando o campo externo é desligado.
- Ferromagnética: Ao contrário dos materiais paramagnéticos e diamagnéticos os materiais ferromagnéticos sustentam a magnetização quando o campo externo é desligado. Há duas propriedades interessantes aqui: Uma é que existe um limite (há uma saturação) para a magnetização. A curva do gráfico $M \times B$ (magnetização do material pelo campo magnético externo) possui um loop histérico. E a outra informação importante é que para certas temperaturas o material perde completamente a sua magnetização, chamado ponto Curie.

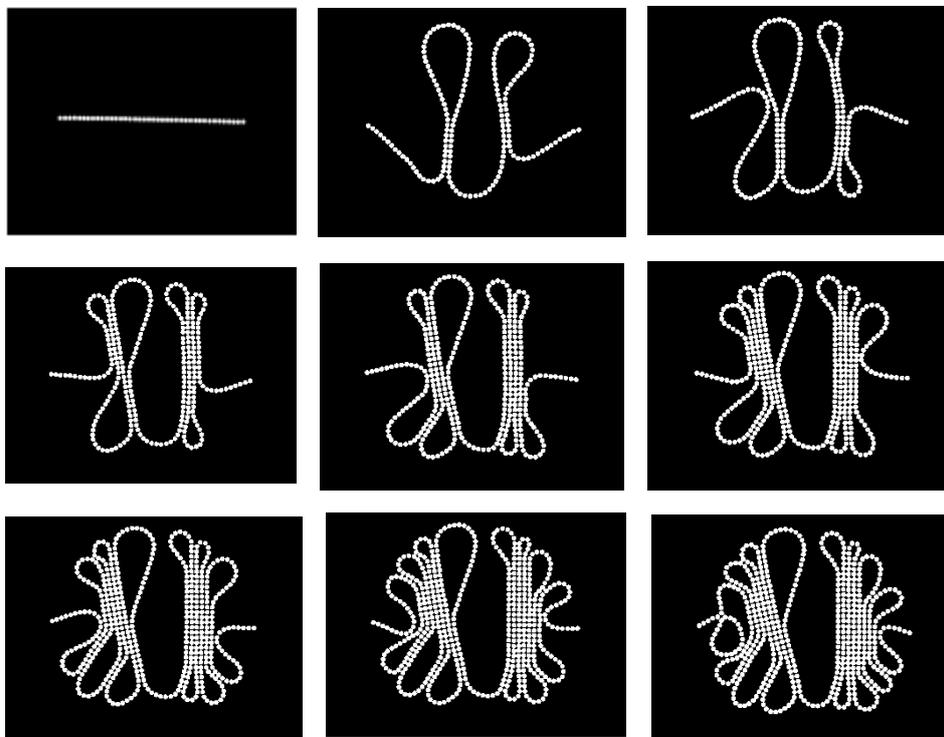
3.2 O Experimento

Baseado em alguns trabalhos sobre empacotamento dentro de cavidades cilíndricas, um experimento foi construído, a fim de explorar uma nova forma de empacotamento, este tem característica de ser discreto e coesivo. O experimento consiste em uma injeção de ímãs de neodímio com 5 mm de diâmetro, organizados em cadeia, dentro de uma cavidade cilíndrica de acrílico, com altura de 6 mm e 20 cm de raio. Dois orifícios são feitos nas laterais do cilindro, sob a diagonal do círculo que limita a cavidade. Uma câmera Nikon 4MegaPixel foi usada para captura das fotos, a uma altura de 32 cm. Inicialmente os ímãs são colocados dentro da cavidade atravessando a cavidade na linha da diagonal. Em um regime quase-estático injetamos manualmente os ímãs e sempre que um loop é formado tiramos uma foto. Paramos o procedimento quando não é possível construir mais loops. Há vários parâmetros que poderíamos alterar para estudar o seu comportamento, como o valor da magnetização, o tipo de magnetização (dipolo, quadrupolo, ...), o atrito entre a cavidade e os ímãs, o tamanho da cavidade e o diâmetro dos ímãs. No experimento iremos alterar apenas a força de atrito e em seguida iremos fazer um empacotamento com contas ligadas por uma linha, apenas por comparação. As fotos mostradas abaixo foram binarizadas (tornando a foto preto e branco).

3.2.1 Ímãs dentro da cavidade sem EVA

Os resultados para o empacotamento dos ímãs com baixo atrito foram:

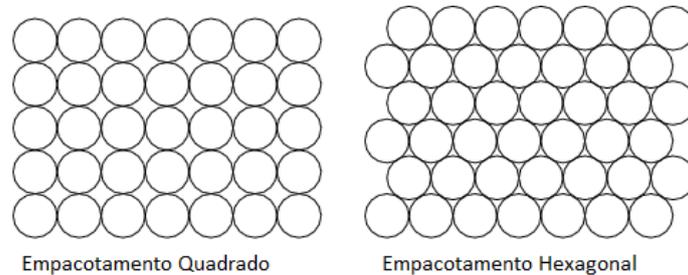
Figura 12 — Empacotamento dos ímãs



Fonte: Elaborada pelo autor

A primeira característica visível aqui é a formação de loops de vários tamanhos, o mesmo padrão é observado no empacotamento de fios[22,23,24] e em contas ligadas por um fio. A segunda observação importante é a formação de um núcleo cristalizado, que para o nosso caso é um empacotamento quadrado e não observamos um empacotamento hexagonal.

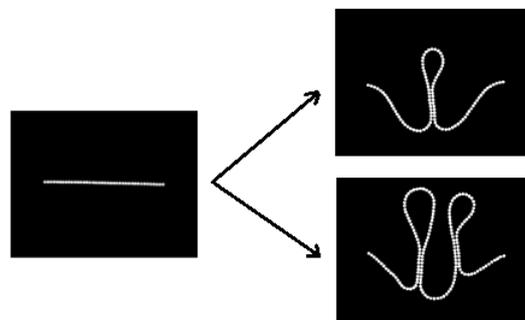
Figura 13 — Empacotamentos de círculos



Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/CirclePacking.html>

A terceira observação importante é que a partir da condição inicial de linha reta, tínhamos depois disso, dois tipos de configurações: Apenas um laço aparecia e os loops cresciam em números ímpares. Dois laços apareciam e os loops cresciam em números pares.

Figura 14 — Crescimento par ou ímpar



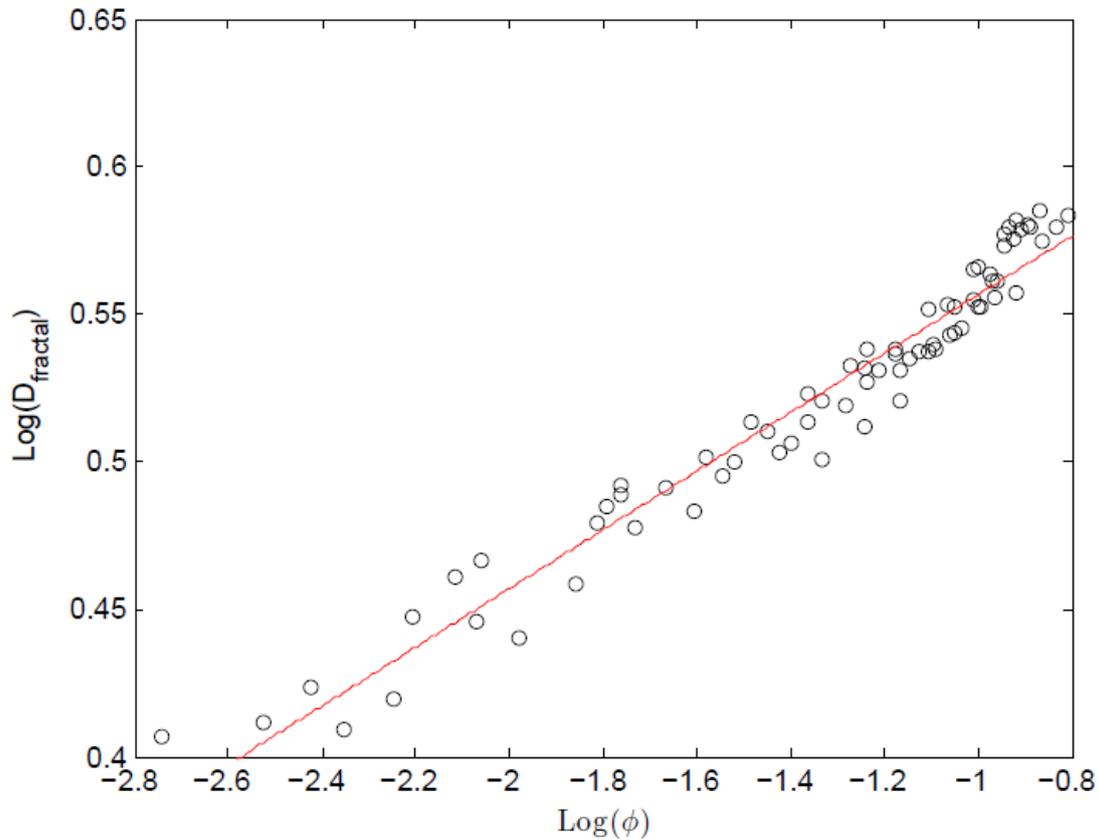
Fonte: Elaborada pelo autor

O experimento foi realizado sete vezes, as imagens foram trabalhadas e os seguintes resultados foram obtidos a partir da análise dela.

Dimensão Fractal e Fração de Empacotamento:

No nosso experimento, chegamos a uma situação que não é possível injetar massa no sistema, assi chegamos a uma quantidade crítica de 1133 imãs, na média, com uma estrutura final com dimensão fractal de 1.84 ± 0.32 e o fitting no gráfico sugere que $\phi \propto D_{fractal}^{0.09962}$, onde ϕ é a fração de empacotamento e $D_{fractal}$ é a dimensão fractal. O erro advém dq precisão do método usado. Para o tapete de Sierpiński a dimensão fractal foi de 1.8 ± 0.48 .

Gráfico 15— Gráfico na escala logarítmica D_{fractal} vs Fração de Empacotamento



Fonte: Elaborada pelo autor

O space-filling nessa situação é desafiador, pois mesmo se colocássemos os ímãs na mesma configuração do empacotamento Apolloniano não temos garantia que a estrutura se equilibraria. É possível preencher todo o espaço com um dipolo magnético esférico? Esse seria um bom problema a ser resolvido. O outro caso, considerando o raio tendendo a zero e construindo de fato um cordão magnético para tentarmos colocar o sistema na mesma configuração que a curva de Peano, provavelmente não teríamos equilíbrio, pois a interação magnética é repulsiva e atrativa, nessa situação a estrutura mais estável seria uma cascata de loops, com uma certa distribuição de áreas.

Número de Loops e Fração de Empacotamento:

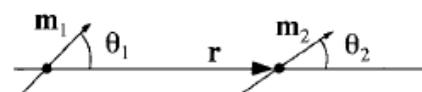
Dado dois dipolos, livres para girar mas presos para transladar queremos saber qual a posição de menor energia:

O trabalho para fazer um dipolo magnético girar é :

$$W = \int \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

Onde $\boldsymbol{\tau}$ é o torque. $\boldsymbol{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$

Figura 16 — Dipolos magnéticos



Fonte: David J. Griffiths
Introduction to Electrodynamics
(3rd Edition)

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m \cdot B \cdot \sin \theta \cdot d\theta = m \cdot B \cdot (-\cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_2} = -m \cdot B \cdot \cos \theta$$

$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, energia de um dipolo em um campo magnético

Para os momentos livres para girar e presos para transladar, temos:

$$W = -\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_2 \text{ e } \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}_2]$$

$$W = -\vec{m}_1 \cdot \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}_2] \right\}$$

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})] \quad (1.0)$$

Vamos abrir os produtos escalares:

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = m_1 m_2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) \therefore \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1$$

$$\vec{m}_1 \cdot \hat{r} = m_1 \cos \theta_1$$

$$\vec{m}_2 \cdot \hat{r} = m_2 \cos \theta_2$$

Substituindo os valores na equação (1.0):

$$U = W = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [m_1 m_2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) - 3m_1 m_2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1)]$$

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} m_1 m_2 [\cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1 - 3\cos \theta_2 \cos \theta_1]$$

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} m_1 m_2 [\sin \theta_2 \sin \theta_1 - 2\cos \theta_2 \cos \theta_1]$$

Encontrando os mínimos:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} m_1 m_2 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + 2\sin \theta_1 \cos \theta_2) = 0 \therefore$$

$$2\sin \theta_1 \cos \theta_2 = -\cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} m_1 m_2 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + 2\cos \theta_1 \sin \theta_2) \therefore$$

$$2\sin \theta_1 \cos \theta_2 = -4\cos \theta_1 \sin \theta_2$$

Desta forma:

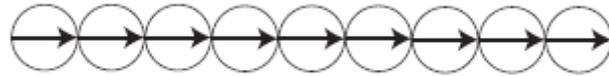
$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 = \cos \theta_1 \sin \theta_2 = 0 \therefore \begin{cases} \sin \theta_1 = \sin \theta_2 = 0 : \rightarrow \rightarrow \text{ ou } \rightarrow \leftarrow \\ \cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 0 : \uparrow \uparrow \text{ ou } \uparrow \downarrow \end{cases}$$

Os casos $\rightarrow \leftarrow$ e $\uparrow \uparrow$ não são paralelos a \vec{B}_1 , na qual \vec{m}_2 deverá ficar alinhado com

\vec{B}_1 . Para os casos $\rightarrow \rightarrow$ e $\uparrow \downarrow$ temos $U = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (-2)$ e $U = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (-1)$, assim o caso $\rightarrow \rightarrow$ é o mais estável.

Para uma cadeia de dipolos termos a seguinte configuração:

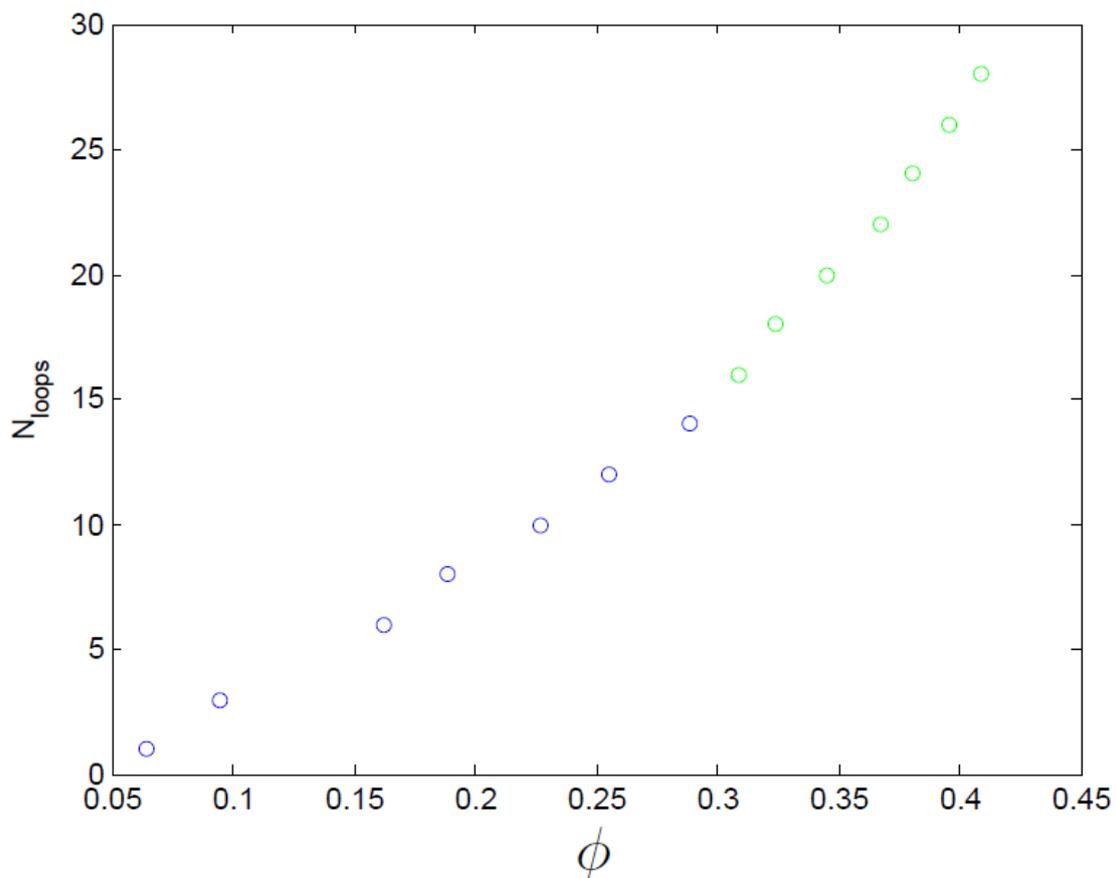
Figura 17 Dipolos magnéticos encadeados



Fonte: D Vella, E du Pontavice, CL Hall, A Goriely - royalsocietypublishing.org

Isso explica o tipo de empacotamento encontrado. Outra característica interessante é que, na média, temos dois regimes, o que seria uma pista para uma transição de fase. Observa-se, que de uma fase para outra, a inclinação aumenta sugerindo uma velocidade maior de formação de loops.

Gráfico 18 — Número de Loops vs Fração de Empacotamento



Fonte: Autor da Monografia

Cada uma dessas fases escala de forma linear, assim podemos atribuir o valor da tangente desses gráficos como uma variação do número de loops com respeito a fração de empacotamento, ou seja, como uma “velocidade”, dessa forma:

$$v_{loop} = \frac{N_{loop}}{\phi}$$

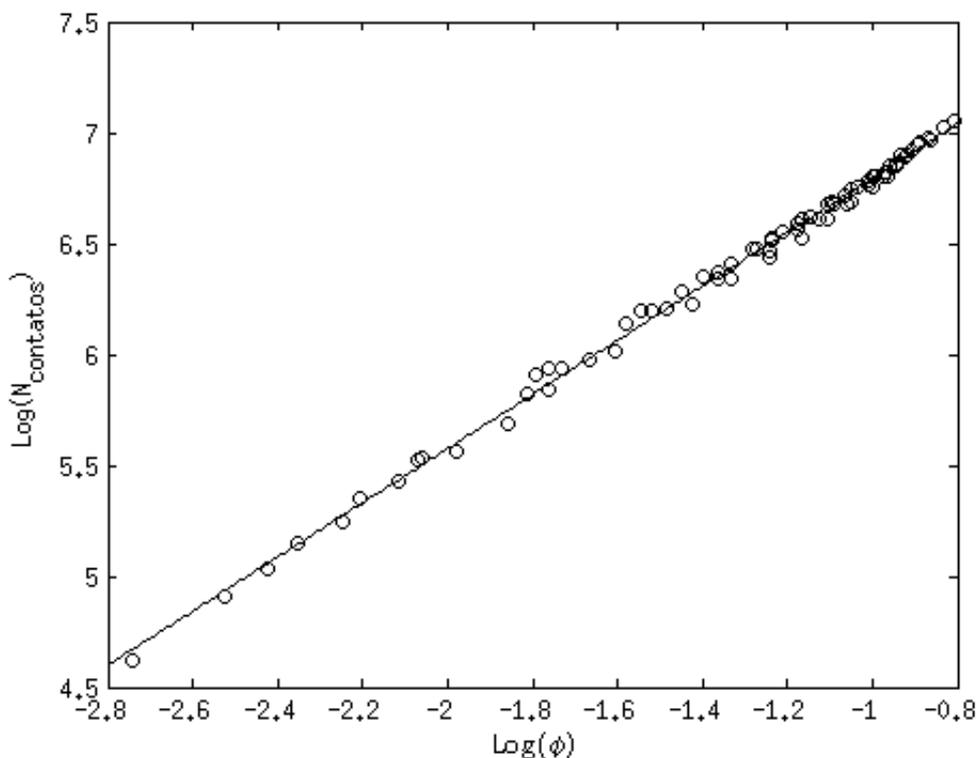
A velocidade vai de $v_{loop}^1 = 57.064 \rightarrow v_{loop}^2 = 130.1$. O ponto de transição é $\phi_t = 0.3122$, onde ϕ é a fração de empacotamento.

Acreditamos que o formato do loop está associado com o atrito, a intensidade de magnetização e o tamanho da sua calda.

Número de Contatos e Fração de Empacotamento:

Um número de contatos em um empacotamento é muito importante estatisticamente, pois podemos associar com a densidade local, quanto mais contatos, mais denso localmente.

Gráfico 19 — Escala LogLog do Número de contatos vs Fração de empacotamento



Fonte: Elaborada pelo autor

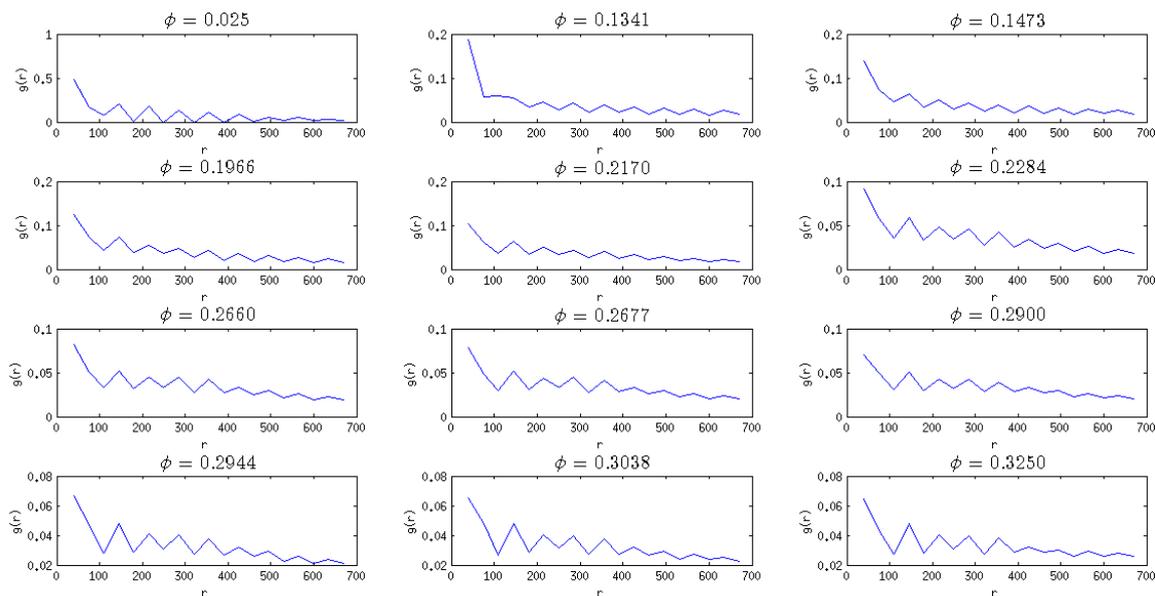
Os resultados mostraram que a fração de empacotamento escala de forma não linear com o número de contatos, $\phi \propto N_c^{1.2209}$. No caso do empacotamento de fios dentro de uma cavidade a fração de empacotamento escala com o quadrado.

Distribuição Radial:

A figura abaixo mostra as distribuições radiais na medida que injetamos os ímãs na cavidade, ou seja, em ordem crescente de fração de empacotamento. Observa-se que há inicialmente picos em ziguezague, indicando uma interação de curto alcance, a razão para isso é que a força entre dois dipolos magnéticos é tal que

$F \propto 1/r^3$, dessa forma ela decai rapidamente com a distância. Os picos são quase igualmente espaçados, isso significa que a distância entre dois vizinhos quaisquer tem quase a mesma distância. Na medida que a fração de empacotamento aumenta o $g(r)$ vai para um valor constante, característica presente em redes cristalinas quadradas ou hexagonais.

Gráfico 20 Distribuição radial



Fonte: Elaborada pelo autor

Densidade Local:

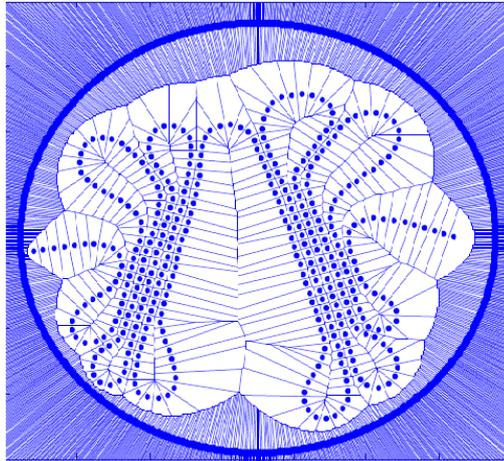
O diagrama de Voronoi é uma ferramenta matemática que subdivide o espaço, assim, fazemos uma tecelagem que depende da distribuição de pontos no espaço em questão, formado células que circundam os pontos distribuídos. Como motivação para compreender o uso desse diagrama vamos supor uma situação. Você recebe o mapa de uma cidade plana. Nele está mapeado os postos de correios da cidade. Existe uma distribuição de casas na cidade. O objetivo agora é determinar qual a área de cobertura de cada um dos postos de correio, ou qual o conjunto de casas que será atendido por cada posto. O que deve ser feito é descobrir os conjuntos de casas que estão mais próximos de cada posto, assim obteríamos a solução para o problema.

A definição formal é a seguinte: Dado um conjunto R de n pontos no plano, queremos determinar para cada ponto p de R qual é a região $V(p)$ dos pontos do plano que estão mais próximos de p do que de qualquer outro ponto em R . Neste caso o conjunto R seria o conjunto dos postos de correio, o plano seria a cidade e as regiões $V(p)$ seria o conjunto de casas da cidade que seriam atendidos pelo posto p . As regiões determinadas por cada ponto formam uma partição do plano chamada de Diagrama

de Voronoi. Para o nosso caso queremos os detalhes da densidade local da *i*-ésima partícula:

$$\phi_{local} = \frac{V_{partícula}}{V_{célula}}$$

Gráfico 21 — Tesselação de Voronoi



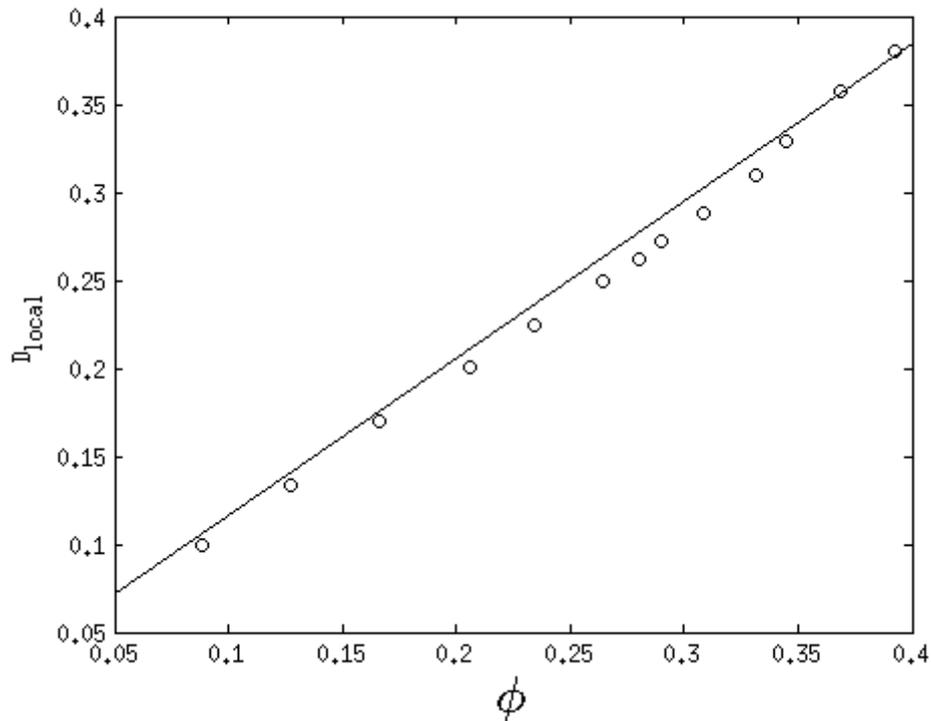
Fonte: Elaborada pelo autor

Construímos o diagrama considerando uma condição de contorno circular, devido a forma da cavidade e considerando o centro de massa dos ímãs. A vantagem dessa subdivisão é que ela nos diz quão longe estão as partículas da fronteira e o tamanho da área da células está relacionada com o grau de compactação local, quanto mais compacto, menor a área da célula.

Densidade Local e Fração de Empacotamento:

Aqui encontramos uma dependência linear da densidade local D_{local} e a fração de empacotamento ϕ , mostrando que na medida que injetamos mais ímãs temos uma resposta direta localmente na compactação, ou seja, a estrutura se aglutina.

Gráfico 22 — Densidade Local vs Fração de Empacotamento

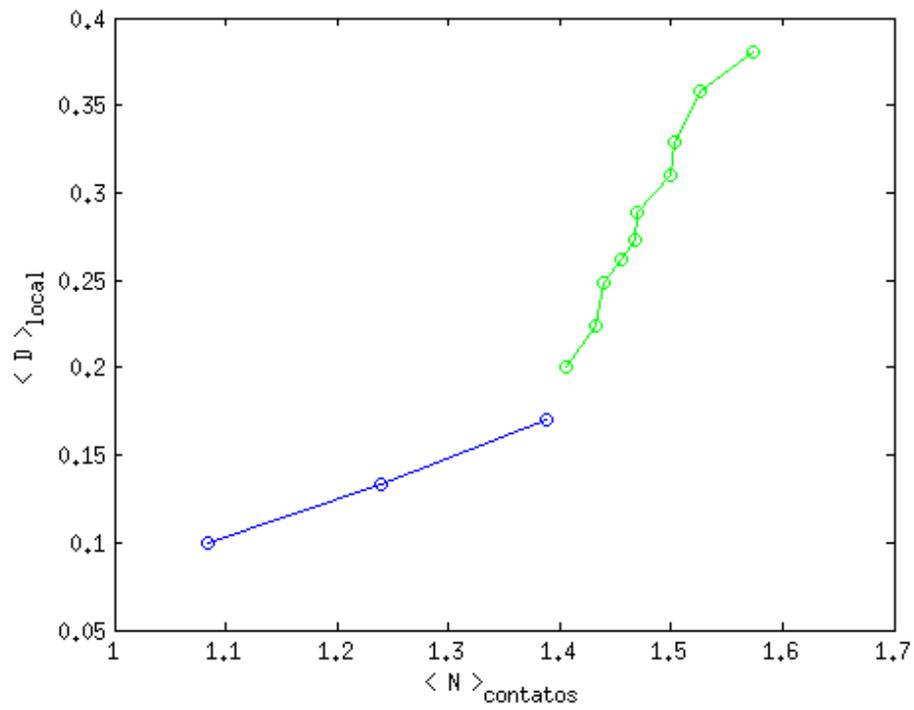


Fonte: Elaborada pelo autor

Densidade Local e Número de Contatos:

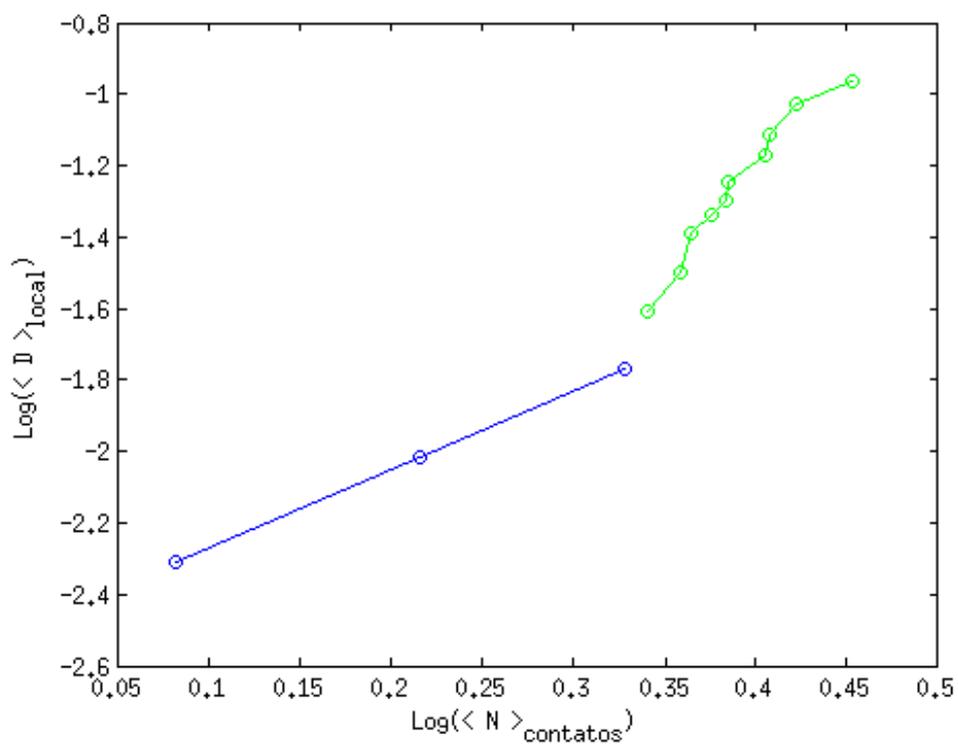
Esse seria mais uma pista para uma transição de fase. A primeira pista foi quando plotamos o gráfico do número de loops pela fração de empacotamento, lá, vimos que os loops cresciam em dois regimes. Aqui vemos também esse comportamento. O gráfico na escala logarítmica enfatiza essa transição. A fração de empacotamento que corresponde a transição desse gráfico é $\phi_t = 0.1834$, que é diferente no gráfico para os loops, que foi de $\phi_t = 0.3122$. Isso parece ser um resultado inconsistente, mas devemos levar em consideração que quando aplicamos a condição de contorno para construir o diagrama de Voronoi, a soma das células não corresponde ao volume total da cavidade, por isso obtemos um valor de transição menor. A condição de contorno foi construída levando em consideração a existência de n pontos no círculo que delimita a cavidade, fizemos assim pois, queríamos colocar a informação de quão longe as partículas estão da sua fronteira.

Gráfico 23 — Média da Densidade Local ($\langle D \rangle_{local}$) vs Média do Número de Contatos ($\langle N \rangle_{contatos}$)



Fonte: Elaborada pelo autor

Gráfico 24— Escala LogLog da Média da Densidade Local vs Média do Número de Contatos

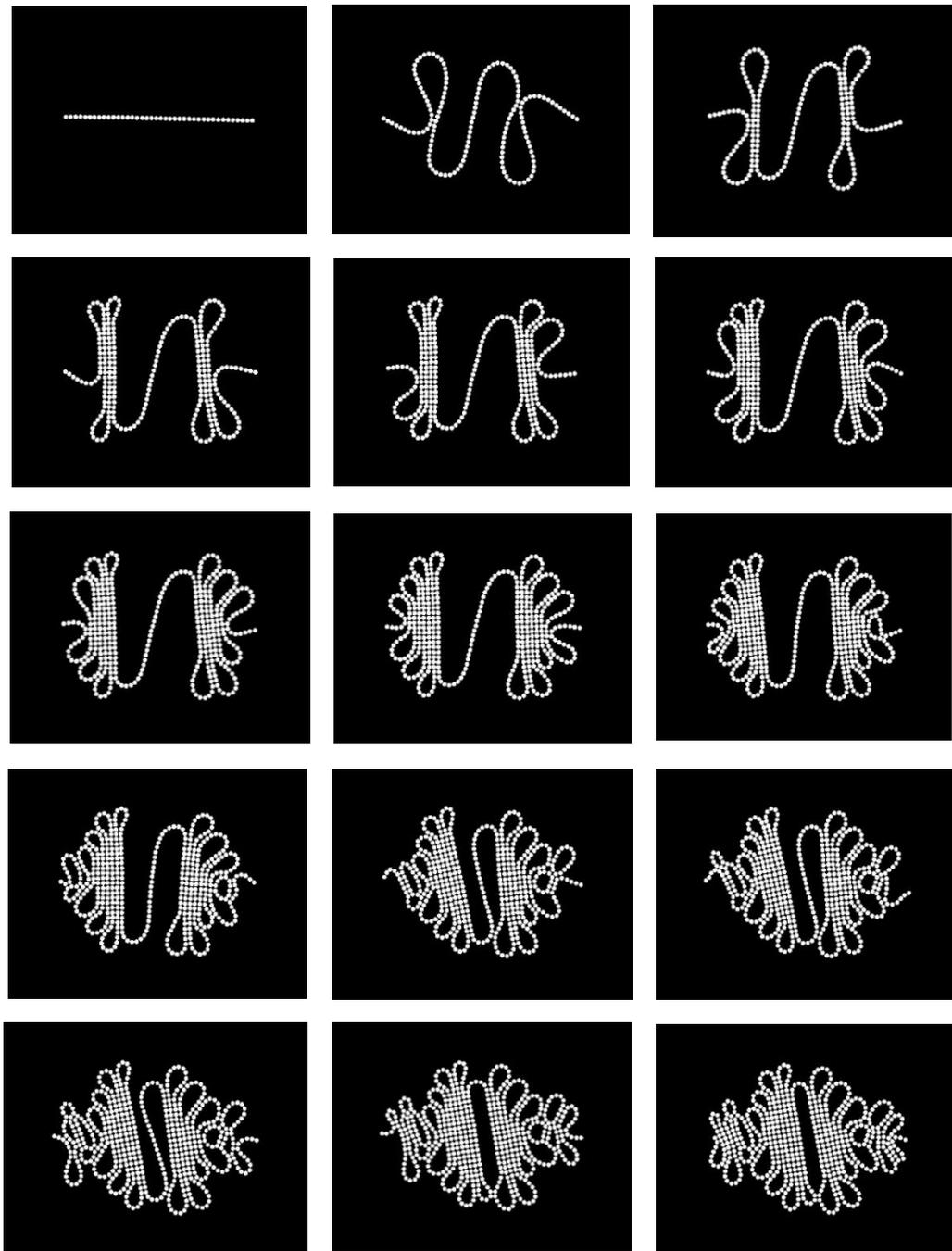


Fonte: Elaborada pelo autor

3.2.2 Imãs dentro da cavidade com EVA

O próximo passo foi alterar o valor do atrito na cavidade. Colocamos uma camada de EVA no fundo da cavidade, pois ela é mais abrasiva do que o acrílico, os resultados que obtemos estão ilustrados abaixo:

Figura 25 — Empacotamento com imãs



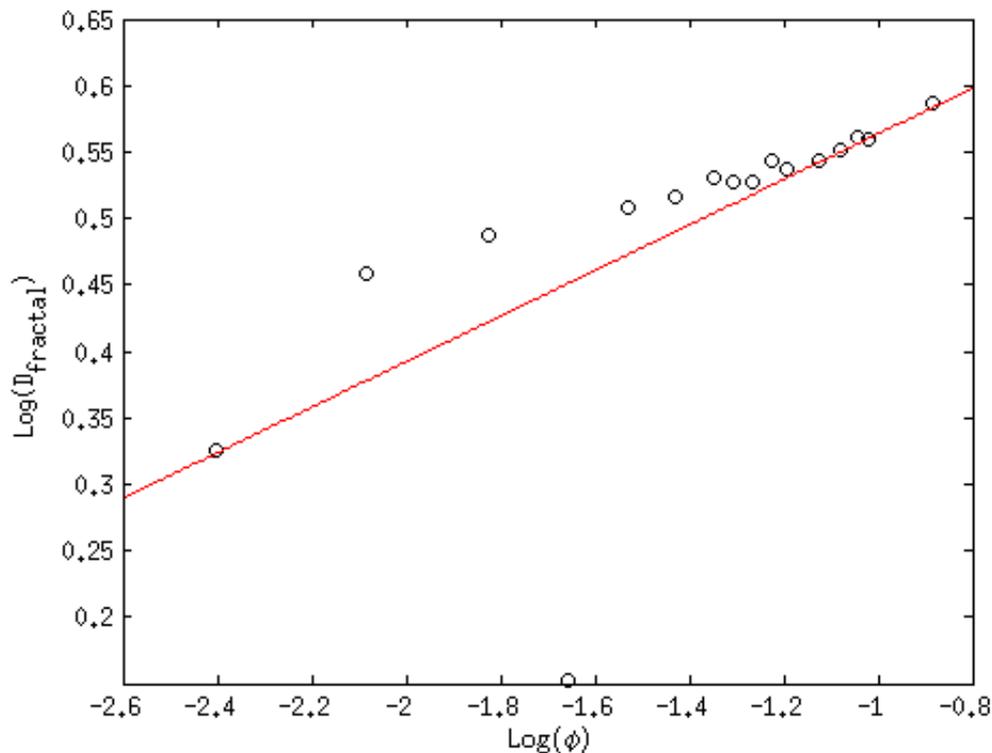
Fonte: Elaborada pelo autor

Dimensão fractal e Fração de empacotamento:

Uma das principais diferenças, em relação ao caso sem EVA é a formação de dois núcleos ligados por um “caminho” e no final do processo encontramos a formação de três núcleos, um no centro e dois nas laterais, mostrando que o atrito tem o papel fundamental no nível de aglutinação.

O fitting para o gráfico abaixo mostrou que $\phi \propto D_f^{0.17133}$, um expoente um pouco maior que o caso anterior, isso significa que o atrito é essencial para a formação do tipo de estrutura.

Gráfico 26 — Escala LogLog Dimensão fractal vs Fração de empacotamento

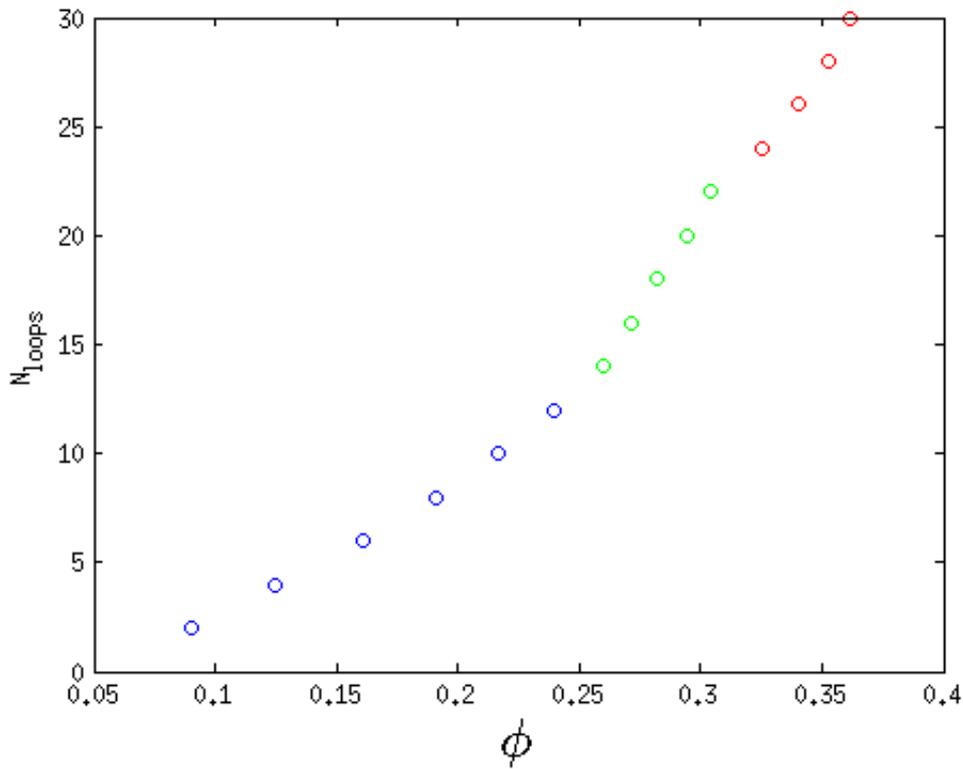


Fonte: Autor da Monografia

A dimensão fractal final para esse caso foi de $D_f = 1.7989$, não muito diferente do caso anterior, como também o valor da fração de empacotamento.

Número de loops e Fração de empacotamento:
 Outra característica interessante no aumento do atrito foi que os loops crescem em números pares e a velocidade com que aparecem apresenta uma aparente transição.

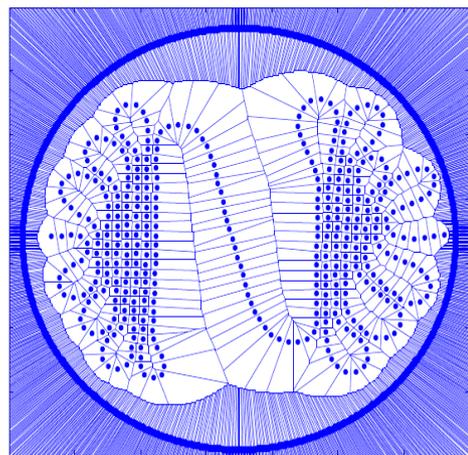
Gráfico 27 — Número de Loops vs Fração de Empacotamento



Fonte: Autor da Monografia

Densidade local e Fração de Empacotamento:
 Novamente foi encontrado o que acreditamos ser uma transição. O uso da escala logarítmica ajuda a enxergar esse comportamento. No gráfico do número de loops pela fração de empacotamento vimos que o gráfico atua em três regimes. Para o gráfico da média da densidade local pela média do número de contatos, as transições ocorreram em $\phi_{t1} = 0,1759$ e $\phi_{t2} = 0,31437$. Em comparação com o gráfico dos loops as transições ocorreram em $\phi_{t1} = 0,250599$ e $\phi_{t2} = 0,338$, valores muito mais próximos, pois nesse caso, os ímãs estão mais espalhados, ou seja, a soma das áreas das suas células estão mais próximas da área da cavidade, o que reforça o que foi dito antes, caso usássemos uma condição de

Figura 28 — Tesselação de Voronoi

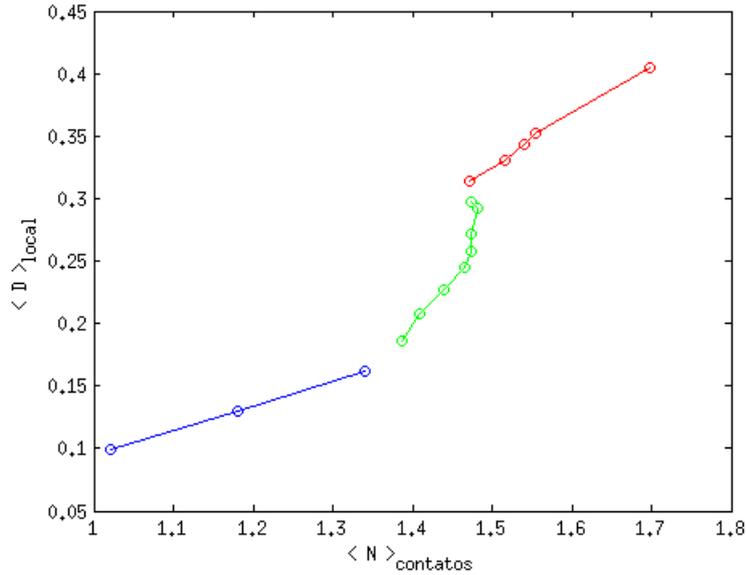


Fonte: Elaborada pelo autor

contorno em que a soma das áreas das células dos ímãs se igualem a área da cavidade, obteríamos os mesmos valores de transição.

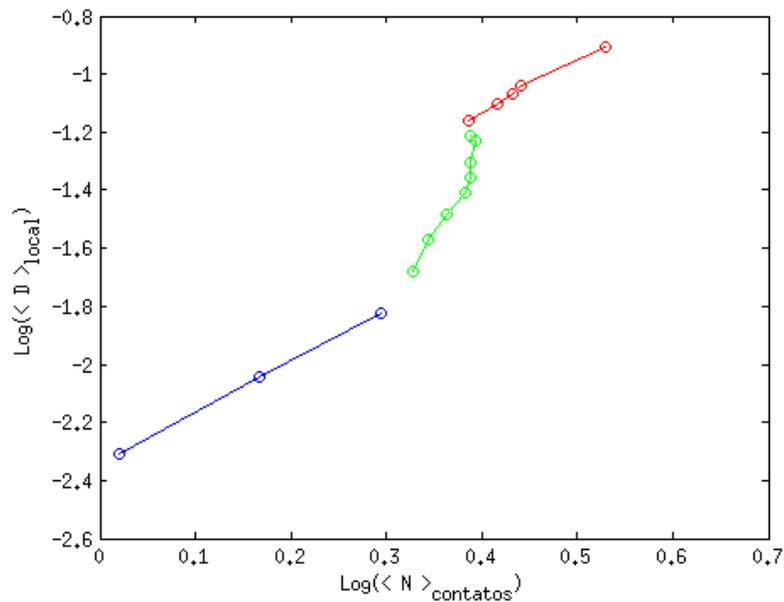
Aqui temos $v_{loop}^1 = 66.061 \rightarrow v_{loop}^2 = 180 \rightarrow v_{loop}^3 = 161.33$, e os pontos de transição são: $\phi_{t1} = 0.250599$ e $\phi_{t2} = 0.338$

Gráfico 29 — Média da Densidade Local vs Média do número de contatos



Fonte: Elaborada pelo autor

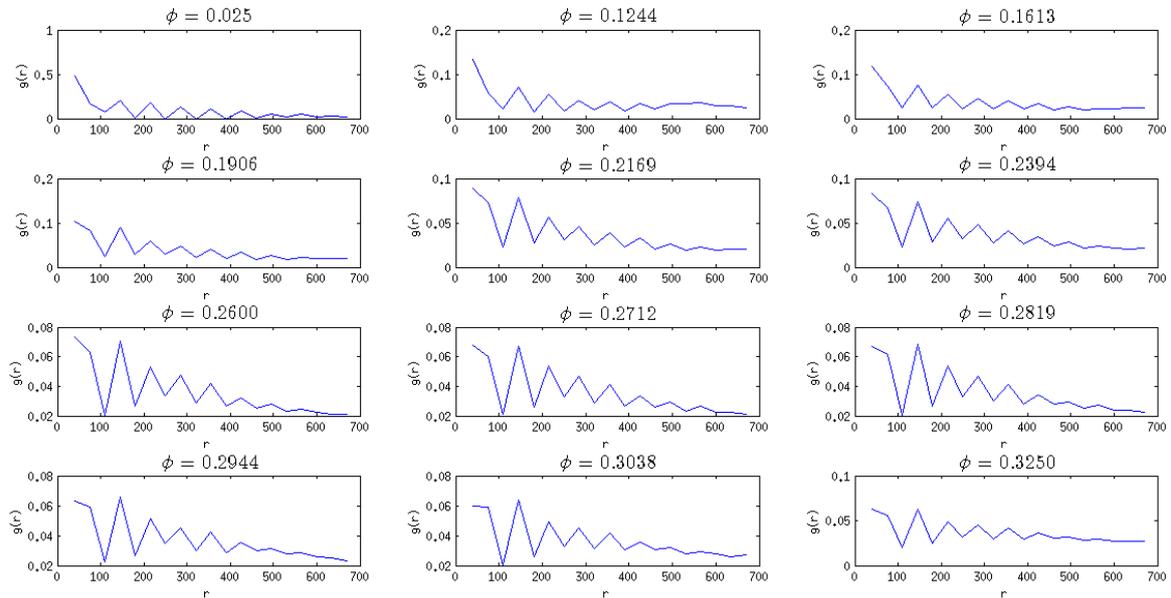
Gráfico 30 — Escala LogLog Média da Densidade Local vs Média do número de contatos



Fonte: Elaborada pelo autor

Distribuição Radial:

Gráfico 31 — Distribuição Radial



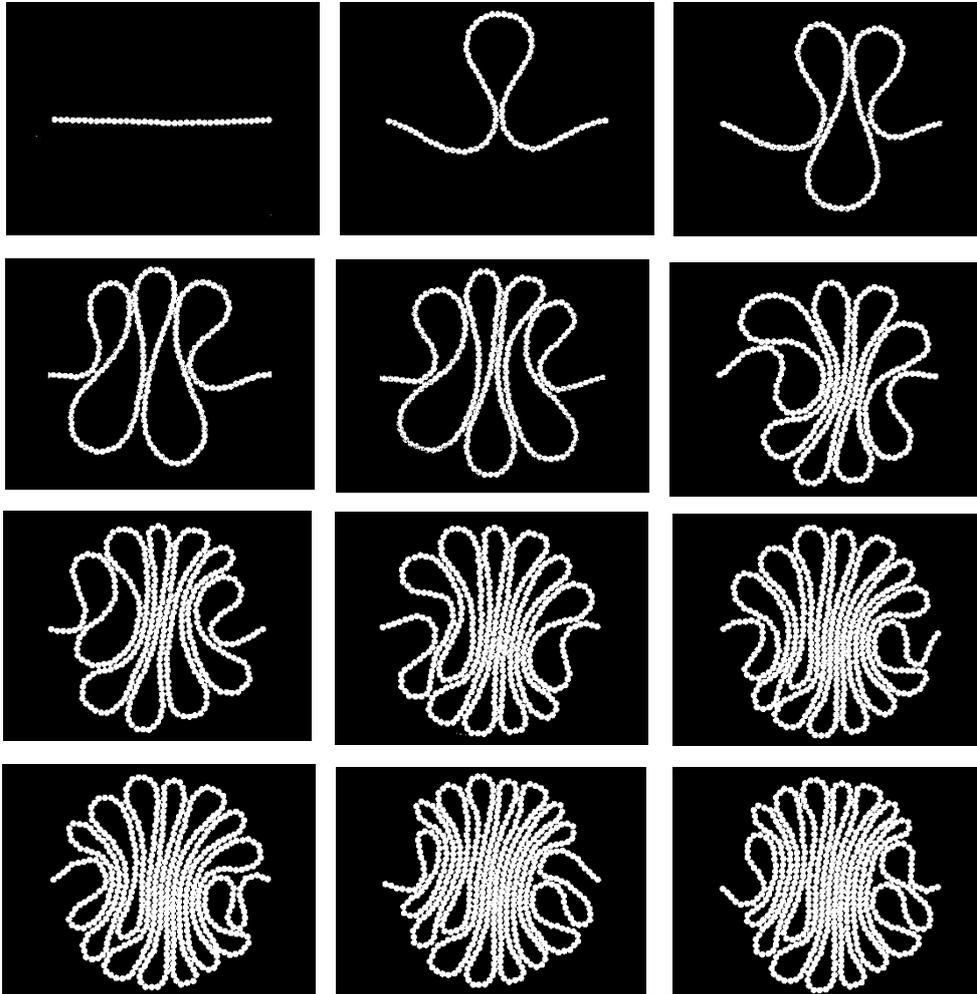
Fonte: Elaborada pelo autor

O mesmo comportamento foi observado, com relação ao caso anterior. Inicialmente manteve-se o zig-zague de picos espaçados quase com a mesma distância. A diferença é que com o atrito maior o $g(r)$ tende a um valor constante para r maiores, com relação ao caso dos ímãs com baixo atrito. Isso faz sentido com o que foi mostrado na figura 25, pois longe do centro da cavidade duas estruturas cristalinas quadradas são formadas e no meio temos um “caminho” de ímãs ligando essas estruturas, para $\phi < 0.25$. Para $\phi > 0.25$ temos uma única estrutura, boa parte dela aglutinada de forma quadrada.

3.2.3 Contas ligadas por um fio na cavidade sem EVA

O resultado para o empacotamento de contas está logo abaixo.

Figura 32 — Empacotamento das contas



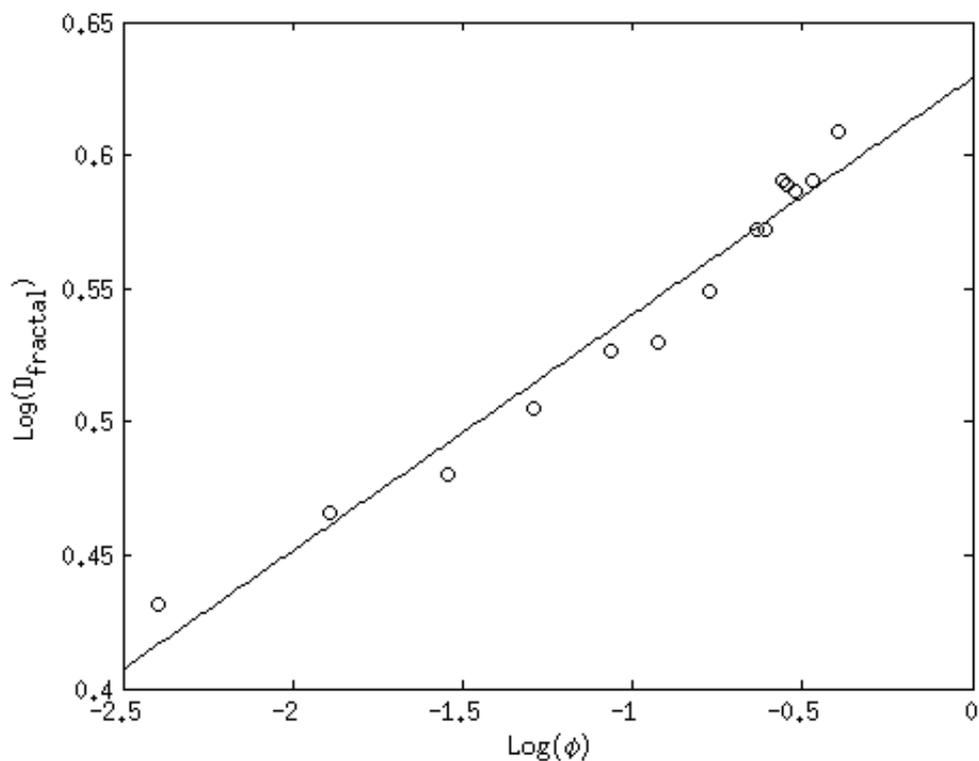
Fonte: Elaborada pelo autor

A primeira característica que difere do caso dos imãs é que rapidamente a estrutura se espalha na cavidade, isso porque não a interação atrativa entre as contas e como estão submetidos a tensão do fio as contas tendem a ir para as laterais da cavidade. O crescimento dos loops aqui é ímpar, que também é diferente dos imãs. A aglutinação das contas não se estrutura de forma quadrada, mas sim triangular ou hexagonal.

Dimensão Fractal e Fração de Empacotamento:

A dimensão fractal no caso das contas escala como: $\phi \propto D_f^{0.088672}$, o que não é muito diferente no caso dos imãs na cavidade sem EVA ($\phi \propto D_f^{0.09962}$), porém esses dois são menores no caso dos imãs na cavidade com EVA ($\phi \propto D_f^{0.17133}$). Isso sugere que de fato, o atrito tem um peso muito grande sobre o tipo de estrutura formada. A dimensão final do agregado é $D_f = 1.8382$, um valor um pouco maior em comparação com os dois casos. O que podemos interpretar disso é que para o caso das contas, a estrutura formada por elas é menos fragmentada e mais aglutinada em relação aos outros casos.

Gráfico 33 — Escala LogLog Dimensão Fractal vs Fração de Empacotamento

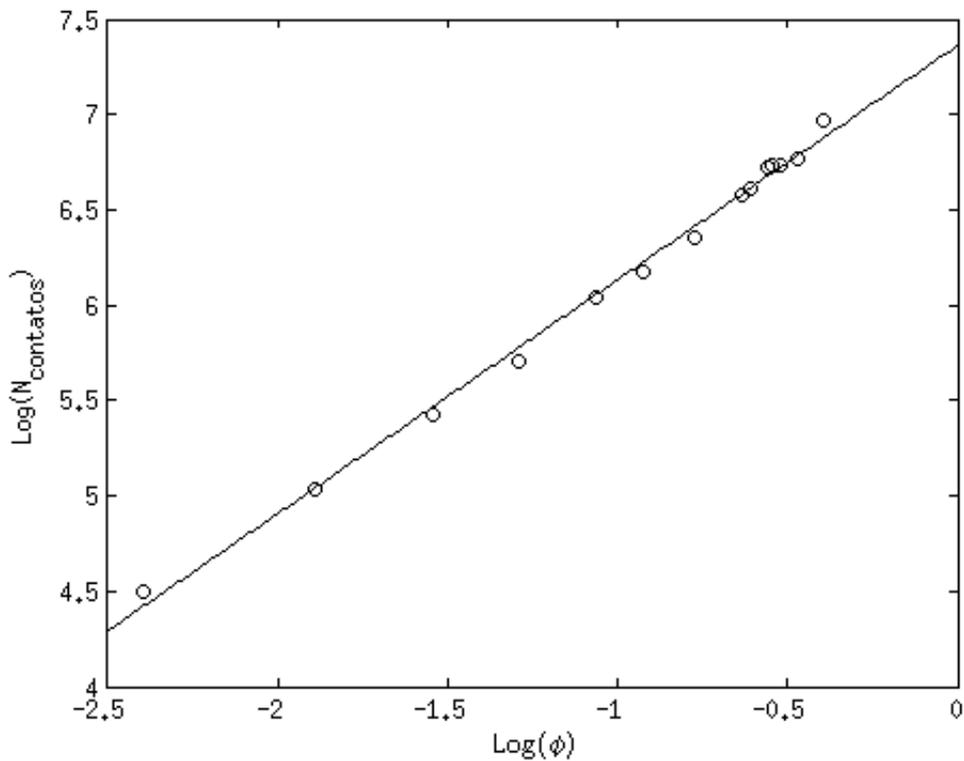


Fonte: Elaborada pelo autor

Número de Contatos e Fração de Empacotamento:

O número de contatos escala com : $\phi \propto N_c^{1.2278}$, resultado muito parecido com os imãs. Tal resultado vem provavelmente do tipo de menor constituinte do cordão que são as esferas, que para o empacotamento na cavidade vista de forma bidimensional, tem um número de coordenação igual a 6, mas devido ao vínculo para formar o cordão, o número de coordenação não passa de 4, ou seja, tanto para os imãs como para as contas, o número de contatos que um constituinte do cordão faz é menor ou igual a 4.

Gráfico 34 — Escala LogLog Número de contatos vs Fração de empacotamento



Fonte: Elaborada pelo autor

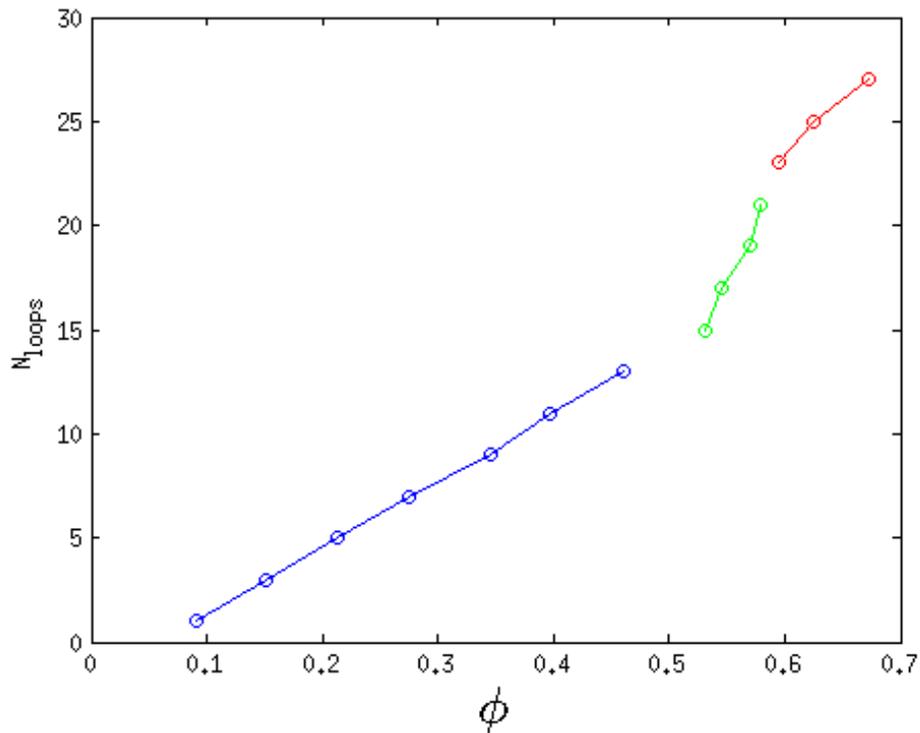
Número de Loops e Fração de Empacotamento:
Quanto a velocidade dos loops temos três regimes:

$$v_{loop}^1 = 32.3 \rightarrow v_{loop}^2 = 113.03 \rightarrow v_{loop}^3 = 50.216$$

Cuja as transições ocorrem em:

$$\phi_{t1} = 0.4959 \text{ e } \phi_{t2} = 0.5868$$

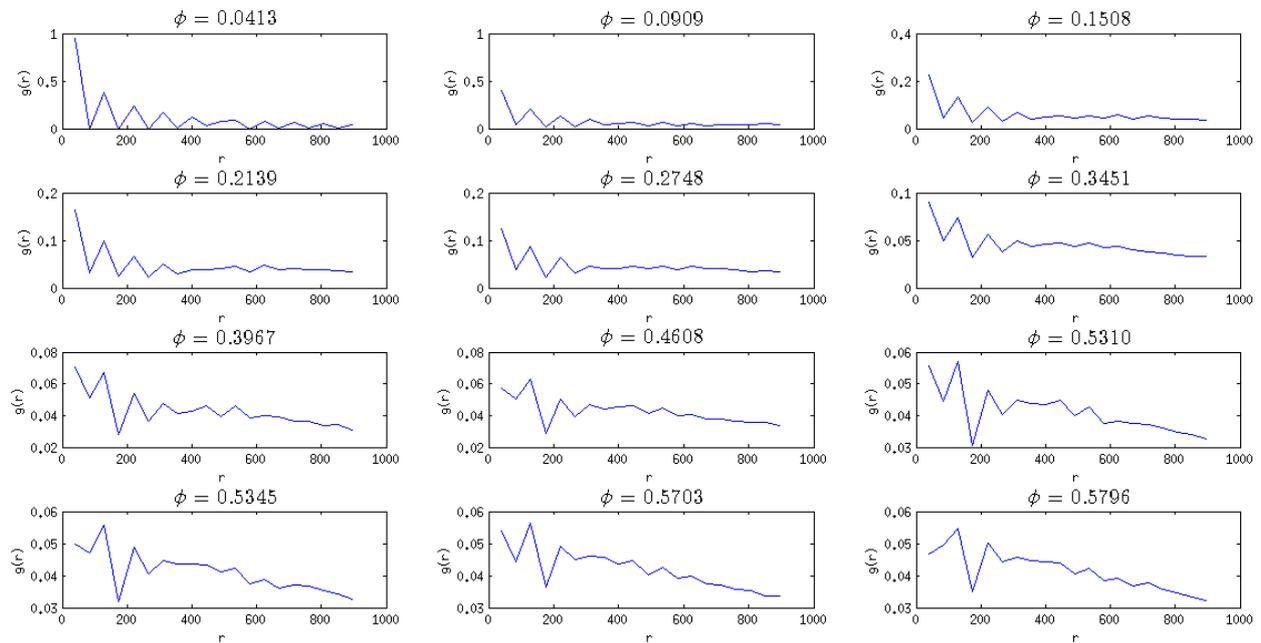
Gráfico 35 — Número de loops vs Fração de empacotamento



Fonte: Elaborada pelo autor

Distribuição Radial:

Gráfico 36 — Distribuição Radial



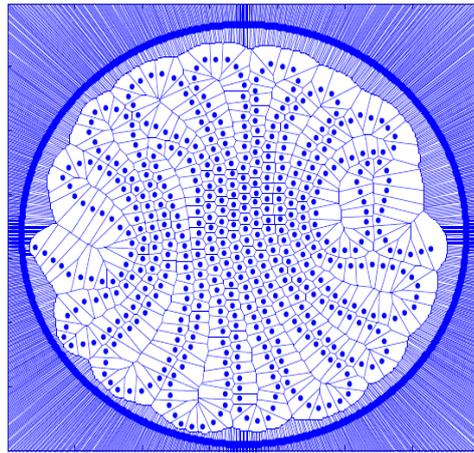
Fonte: Elaborada pelo autor

O comportamento é muito semelhante com o caso dos imãs e isso é consistente com o que foi observado, como o padrão de loops e um núcleo no centro. A diferença principal, em comparação com os imãs é que para $\phi > 0.27$ há um decaimento na função $g(r)$, isso é devido à forte aglutinação, do tipo hexagonal.

Diagrama de Voronoi:

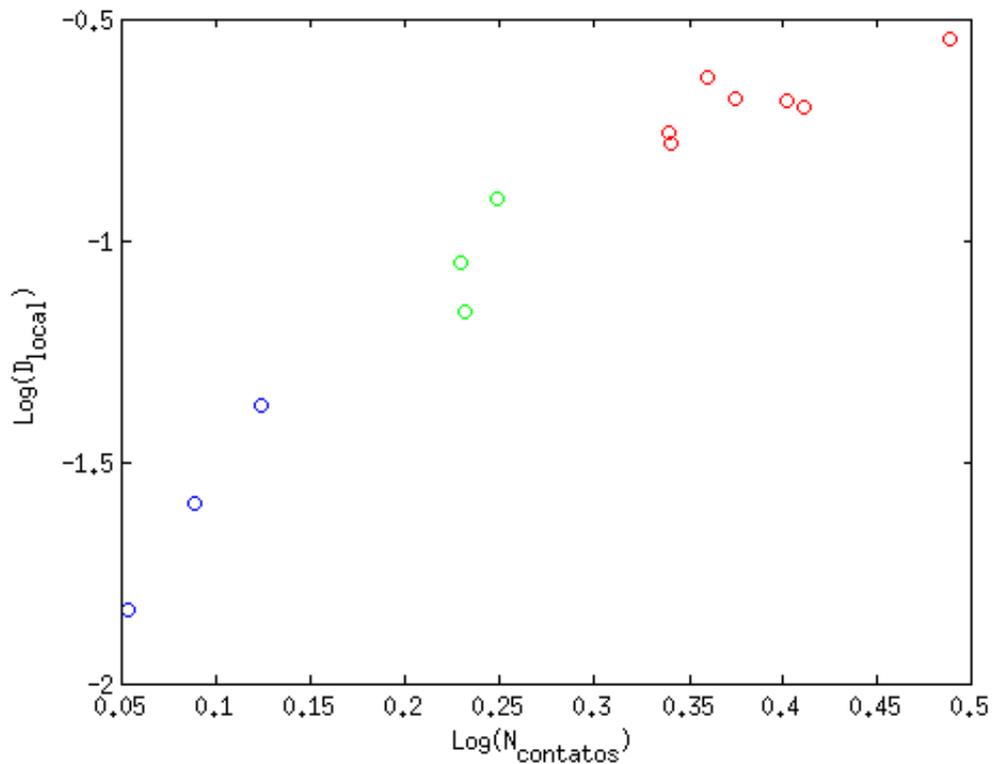
Mais uma vez os resultados mostraram que há uma transição. Aqui apresentamos somente o gráfico na escala logarítmica e apesar de não haver uma boa correlação linear, acreditamos que ainda exista um regime transitório. A falta de correlação linear se deve ao fato de que poucas realizações no experimento foram feitas, provavelmente com um volume maior de dados possamos ver melhor a transição.

Figura 37 — Tesselação de Voronoi



Fonte: Autor da Monografia

Gráfico 38 — Escala LogLog Densidade local vs Número de contatos



Fonte: Autor da Monografia

4.0 Conclusão

Tentamos estudar um ramo de uma árvore que só cresce a cada dia, a física dos materiais granulares. Mostramos uma nova forma de construir um padrão de loops dentro de uma cavidade cilíndrica por injeção na diagonal, usando grãos com coesividade magnética e grãos ligados por um fio. Além da cascata de loops que foi encontrado para ambos os casos (com e sem coesividade), vimos que há uma aparente transição de fase, a motivação para acreditarmos nisso vem através de dois tipos de gráficos, um é o número de loops pela fração de empacotamento e a média da densidade local pela média do número de contatos. Para as duas situações as frações de empacotamento correspondentes as transições diferem dos seus valores, acreditamos que três fatores contribuíram para que isso ocorresse: Um foi o método usado para fazer a tesselação da cavidade, juntamente com a condição de contorno usada, a injeção dos ímãs e das contas foram feitas de forma manual, perdendo assim um pouco da simetria axial da cavidade e por fim, o processo de binarização das fotos contribui para a perda de precisão, mas ela é necessária para a praticidade da programação envolvida.

O processo de injetar contas ou ímãs, juntamente com suas transições de fase, pode ser comparada com as transições de fase da matéria. Para a água, quando partimos do estado sólido e chegamos ao estado de vapor, pelo acréscimo de calor ao sistema a energia injetada ou é usada para aumentar a energia interna (calor sensível) ou para reordenar a estrutura do composto (calor latente), dessa forma, o gráfico da temperatura pelo calor tem o seguinte esboço:

No caso da transição de fase que estamos propondo que exista, a transição é abrupta, assim, não há uma “energia” a ser paga para passar de fase para outra.

Em um artigo sobre o empacotamento de fios foi encontrada transições de fase morfológicas, ou seja, transições nos padrões de empacotamento, porém essa transição só foi alcançada pela alteração do atrito e da plasticidade do material[30]. No nosso caso a transição veio espontaneamente, pelo simples incremento de massa dentro do sistema. Voltando para a termodinâmica, é como se injetássemos gás dentro de um cilindro e uma transição na estrutura do gás ocorresse.

Uma lacuna que só pode ser preenchida através de simulações, é estudar o caso limite, fazendo com que os raios dos ímãs tendam a zero, construindo de fato um cordão magnético, como também explorar os diversos tipos de magnetização.

Referências

- [1] A. Baldassarri, U. M. B. Marconi, and A. Puglisi. Models of freely evolving granular gases.
- [2] Rankine, W. (1857) On the stability of loose earth. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 147.
- [3] Mester, L., The new physical-mechanical theory of granular materials. 2009, Homonnai, ISBN 96383-43-87
- [4] I. Goldhirsch and G. Zanetti. Clustering instability in dissipative gases. Phys. Rev. Lett., 70(11):1619-1622, 1993.
- [5] S. McNamara and W. R. Young. Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium. Phys. Fluids A, 4(3):496, 1992.
- [6] Y. Du, H. Li, and L. P. Kadanoff. Breakdown of hydrodynamics in a one-dimensional system of inelastic particles. Phys. Rev. Lett., 74(8):1268-1271, 1995.
- [7] JW Barrett, H Garcke, R Nürnberg - Physical Review E, 2012 – APS, Numerical computations of faceted pattern formation in snow crystal growth.
- [8] F.A.L. Dullien, "Porous Media. Fluid Transport and Pore Structure", 2nd edition, Academic Press Inc., 1992.
- [9] Brown, E., Rodenberg, N., Amend, J., Mozeika, A., Steltz, E., Zakin, M., Lipson, H., Jaeger, H. (2010) "Universal robotic gripper based on the jamming of granular material," Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS), Vol. 107, no. 44, pp.18809-18814.
- [10] Z. Živcová, E. Gregorová, W. Pabst; Porous alumina ceramics produced with lycopodium spores as pore-forming agents; Journal of Materials Science (2007), v 42, i 20, p 8760-8764. doi:10.1007/s10853-007-1852-y
- [11] <http://crimeandclues.com/2013/04/12/magnetic-powder/>
- [12] Shaila Dewan, "Report Cites Lack of Precautions in 2008 Sugar Plant Fire", New York Times, 24 September 2009, accessed 14 October 2013
- [13] See Nanofuel/Oxidizers For Energetic Compositions – John D. Sullivan and Charles N. Kingery (1994) High explosive disseminator for a high explosive air bomb
- [14] Duran, J., Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials (translated by A. Reisinger). November 1999, Springer-Verlag New York, Inc., New York, ISBN 0-387-98656-1.
- [15] B. Sandnes, H. A. Knudsen, K. J. Ma^oløy, and E. G. Flekkøy, 2007, Labyrinth Patterns in Confined Granular-Fluid Systems
- [16] Distinct Element Simulations of Granular Materials, Sandor Fazekas, 2007

- [17] HA Makse, J Kurchan - Nature, 2002 - nature.com
- [18] A Rosato, KJ Strandburg, F Prinz, RH Swendsen - Physical Review Letters, 1987 – APS
- [19] T Pöschel - Journal de Physique II, 1993 - jp2.journaldephysique.org
- [20] GA D'Addetta, F Kun, E Ramm - Granular matter, 2002 – Springer
- [21] M Alam, S Luding - Journal of Fluid Mechanics, 2003 - Cambridge Univ Press
- [22] CC Donato, MAF Gomes, RE de Souza - Physical Review E, 2003 – APS
- [23] CC Donato, MAF Gomes, RE de Souza - Physical Review E, 2002 - APS
- [24] CC Donato, FA Oliveira, MAF Gomes - Physica A: Statistical Mechanics and ..., 2006 – Elsevier
- [25] VP Brito, ASO Coelho, CC Donato - Journal of Physics D: ..., 2008 - iopscience.iop.org
- [26] N Stoop, FK Wittel, HJ Herrmann - Physical review letters, 2008 – APS
- [27] V. P. Brito, W. S. Castro. A. S. O. Coelho, M. A. F. Gomes- Physical Review A ,Breads-on-a-string packing in two dimensions, 2004
- [28] S.H. Chan, A.H.W., 2004, Statistical distribution of contact forces in packings of deformable spheres
- [29] Evans M. W.; Dynamical Process in Condensed Matter, Wiley, New York 1985
- [30] N Stoop, FK Wittel, HJ Herrmann - Physical review letters, 2008 – APS
- [31] ME Möbius, BE Lauderdale, SR Nagel, HM Jaeger - Nature, 2001 - nature.com
- [32] F.A.L. Dullien, "Porous Media. Fluid Transport and Pore Structure", 2nd edition, Academic Press Inc., 1992.
- [33] Duran, J., *Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials* (translated by A. Reisinger). November 1999, Springer-Verlag New York, Inc., New York, ISBN 0-387-98656-1.
- [34] HM Jaeger, SR Nagel, RP Behringer - Reviews of Modern Physics, 1996 - jfi.uchicago.edu.
- [35] W Pabst, E Gregorova - ICT Prague, 2007 - vscht.cz