Universidade Federal do Ceará
Pós-Graduação em Matemática

Equação de Liouville e Superfícies Mínimas sem Pontos Umbílicos

Luís Fernando Coelho Amaral
Orientador: Levi Lopes de Lima

Fortaleza-2003

Agradecimento

Agradeço em primeiro lugar a Deus pela Graça da realização de mais uma etapa da minha vida;

A todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho;

Em especial a meu orientador Professor Levi Lopes de Lima pela orientação segura e seu conhecimento que proporcionaram a realização de um trabalho de pesquisa;

Ao Professor Vicente Francisco de Sousa Neto, da Universidade Católica de Pernambuco, pelos dias de estudo dedicados a tirar as dúvidas que existiam no conteúdo do trabalho;

Ao Professor Abdênago Alves de Barros por participar da Banca Examinadora;

A todos os colegas do Mestrado e Doutorado da Universidade Federal do Ceará;

A todos os Professores do Departamento de Matemática da UFC, em especial a Antônio Gervásio Colares e João Lucas Marques Barbosa, meus professores de geometria;

A todos os funcionários do Departamento de Matemática da UFC, em especial à Andrea Costa Dantas pela dedicação e responsabilidade com os alunos da pós-graduação;

A meus Pais que souberam compreender a ausência de suas Netas; e agradeço especialmente à minha Esposa Flávia de Cássia Cordeiro Amaral por compartilhar tantos momentos difíceis durante estes dois anos;

À Universidade Federal do Maranhão e à CAPES pelo incentivo e apoio financeiro.

Sumário

Introdução

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular sem pontos umbílicos. Sabemos que se M é mínima a aplicação de Gauss $N : M \longrightarrow S^2$ satisfaz,

$$\langle dN_p(v_1), dN_p(v_2)\rangle_{N(p)} = \lambda(p)\langle v_1, v_2\rangle,$$

para todo $p \in M$ e todos $v_1, v_2 \in T_pM$, onde $\lambda(p) \neq 0$ é um número real que só depende de p. Considere $x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ a parametrização da esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada pela inversa da projeção estereográfica. Tome uma vizinhança V de um ponto p da superfície mínima M tal que $N : M \longrightarrow S^2$ restrito a V seja um difeomorfismo (como $K(p) = det(dN_p) \neq 0$, uma tal V existe pelo teorema da função inversa). Então a parametrização $y = N^{-1} \circ x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ é isotérmica. Isto nos dá uma maneira de introduzir parâmetros isotérmicos em superfícies mínimas sem pontos umbílicos.

Considere a primeira forma fundamental nestes parâmetros, ou seja,

$$I = e^{2u}(dx^2 + dy^2).$$

Temos que $u : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação de Liouville

$$\Delta u = e^{-2u} \tag{1}$$

onde,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Provavelmente, o estudo mais antigo de construção de métricas de curvatura constante é devido a Monge, que propôs o seguinte problema local:

Sob quais circunstâncias a métrica $ds^2 = \lambda|dz|^2$ tem curvatura K constante.

Ele observou que a métrica conforme

$$ds^2 = e^{2v}(dx^2 + dy^2)$$

em $\mathbb{R}^2$ com curvatura constante K deve satisfazer $\Delta v = -Ke^{2v}$. A solução desse problema foi dada por Liouville, para $K = 1$, cuja fórmula local é dada por

$$e^{v(x,y)} = \frac{2|g'(z)|}{|g(z)|^2 + 1}, \qquad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

onde g é uma função meromorfa. A solucão u de (1) tem portanto uma representação local em termos da função meromorfa arbitrária g.

Esta dissertação é baseada no artigo *Revisiting the Connection between Minimal Surface and Solutions of the Liouville Equation*[1], onde uma abordagem moderna destas questões clássicas é apresentada. O capítulo 1 trata de algumas propriedades básicas de superfícies mínimas e aí é introduzida a noção de parâmetro de Liouville. No capítulo 2 faremos um breve estudo da representação de Enneper-Weierstrass. Esta representação possibilita descrever um grande número de exemplos de superfícies mínimas. Mostraremos que uma superfície mínima com uma representação de Weierstrass satisfazendo determinadas condições produz uma solução da equação de Liouville. Reciprocamente mostraremos que uma solução u da equação de Liouville definida numa região plana simplesmente conexa determina, a menos de um movimento rígido do $\mathbb{R}^3$, uma imersão mínima sem pontos umbílicos $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ descrita inteiramente em termos da função meromorfa g. O capítulo 3 é voltado para alguns exemplos clássicos de superfícies mínimas e suas parametrizações via representação de Weierstrass e ainda para uma análise das soluções simétricas da equação de Liouville.

Capítulo 1

Superfícies Mínimas em Parâmetros de Liouville

1.1 Preliminares

Seja M uma superfície de Riemann (ver, por exemplo, [8]) e $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma **imersão conforme**, ou seja,

$$||F_x||^2 = ||F_y||^2 \neq 0 \quad e \quad F_x \cdot F_y = 0. \tag{1.1}$$

Aqui, F_x e F_y são as derivadas de F relativamente a x e y, respectivamente e $z = x+iy \in \Omega \subset \mathbb{C}$ é uma coordenada complexa numa vizinhança de M. Consideremos a nomenclatura e notação abaixo. Em (1.1), $\cdot$ e $||,||$ representam, respectivamente, o produto interno e a norma usuais em $\mathbb{R}^3$.

1. **Métrica Induzida :** $ds^2 = E|dz|^2$, onde $E = ||F_x||^2 = ||F_y||^2$;
2. **Campo Normal :** $N = \frac{F_x \times F_y}{E}$, onde $\times$ é o produto vetorial;
3. **Segunda Forma Fundamental :** $II = ldx^2 + 2mdxdy + ndy^2$, onde $l = F_{xx} \cdot N, m = F_{xy} \cdot N, n = F_{yy} \cdot N$. Observe que II é uma forma quadrática cujos autovalores $k_1 \leq k_2$ são as curvaturas principais de F. Lembramos que $p \in M$ é por definição umbílico se $k_1(p) = k_2(p)$;
4. **Curvatura Média :** $H = (l+n)/2E$;
5. **Curvatura Gaussiana :** $K = (ln - m^2)/E^2$.

Em $\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3); z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3\}$, introduzimos o **Produto Hermitiano** $\langle , \rangle$, ou seja, dados $v = (v_1, v_2, v_3)$,$w = (w_1, w_2, w_3)$ vetores tangentes a $\mathbb{C}^3$ em $z \in \mathbb{C}^3$ temos

$$\langle v, w\rangle = \sum_{k=1}^{3} v_k \cdot \overline{w}_k = v \cdot \overline{w}.$$

Aqui, o ponto $\cdot$ denota a extensão bilinear do produto interno usual em $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{C}^3$. Numa coordenada complexa de M definimos os operadores

$$F_z = \frac{1}{2}(F_x - iF_y), \quad F_{\bar{z}} = \overline{F}_z = \frac{1}{2}(F_x + iF_y).$$

É fácil ver então que valem as seguintes fórmulas

$$F_z \cdot F_z = 0 = F_{\bar{z}} \cdot F_{\bar{z}}; \tag{1.2}$$

$$F_z \cdot F_{\bar{z}} = \frac{E}{2}; \tag{1.3}$$

$$|F_z|^2 = \frac{E}{2} = |F_{\bar{z}}|^2; \tag{1.4}$$

$$F_z \cdot N = 0 = F_{\bar{z}} \cdot N. \tag{1.5}$$

1.2 Algumas Propriedades

Com as considerações anteriores, provaremos agora alguns resultados que serão úteis nas próximas seções.

Proposição 1.2.1 *Em termos de uma coordenada complexa z, a imersão $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaz as seguintes propriedades :*

1) $\Delta F = 4F_{z\bar{z}} = (2HE)N$. Em particular, F é harmônica (isto é, $\Delta F \equiv 0$) se e somente se F é mínima (isto é, $H = 0$);

2) (Equação de Gauss): $K = -\Delta(\log\sqrt{E})/E$;

3) $F_{zz} \cdot N = \alpha/2, \qquad$ onde $\alpha = (l - n)/2 - im$;

4) $F_{zz} = (E_z/E) \cdot F_z + (\alpha/2) \cdot N$;

5) $F_{\bar{z}} \cdot N_z = -EH/2$;

6) $N_z = -H \cdot F_z - (\alpha/E) \cdot F_{\bar{z}}$;

7) (Equação de Codazzi): $\alpha_{\bar{z}} = E \cdot H_z$;

8) $|\alpha|^2 = E^2(k_1 - k_2)^2/4$, *onde* $k_1 \leq k_2$ *denotam as curvaturas principais;*

9) Se H *é* **constante**, *então a* **diferencial de Hopf** $h = \alpha(z)dz^2$ *é uma diferencial quadrática holomorfa globalmente definida em* M. *Além disso, os zeros isolados de* h *coincidem com os pontos umbílicos da imersão.*

Demonstração. 1) É imediato que $\Delta F = 4F_{z\bar{z}}$, pois

$$\begin{aligned} 4F_{z\bar{z}} &= (F_x - iF_y)_x + i(F_x - iF_y)_y \\ &= F_{xx} - iF_{yx} + iF_{xy} + F_{yy} \\ &= F_{xx} + F_{yy} = \Delta F. \end{aligned}$$

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned} 4F_{z\bar{z}} \cdot N &= (F_{xx} + F_{yy}) \cdot N \\ &= F_{xx} \cdot N + F_{yy} \cdot N \\ &= l + n = 2E \cdot H. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta F = 4F_{z\bar{z}} = (4F_{z\bar{z}}N) \cdot N = (2EH) \cdot N.$$

2) Sabemos que

$$K = \frac{-1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\};$$

então

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{E} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{E}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{E})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\} \\ &= \frac{-1}{E} \left\{ (\log(\sqrt{E}))_{vv} + (\log(\sqrt{E}))_{uu} \right\} \\ &= \frac{-\Delta \log \sqrt{E}}{E}. \end{aligned}$$

3) Temos

$$\begin{aligned}
4F_{zz}\cdot N &= ((F_x - iF_y)_x - i(F_x - iF_y)_y)\cdot N\\
&= (F_{xx} - F_{yy} - 2iF_{xy})\cdot N\\
&= F_{xx}\cdot N - F_{yy}\cdot N - 2iF_{xy}\cdot N\\
&= l - n - 2im.
\end{aligned}$$

Logo,

$$F_{zz}\cdot N = \frac{l-n-2im}{4} = \frac{\alpha}{2},$$

onde

$$\alpha = \frac{l-n}{2} - im.$$

4) Note que $F_{zz}\cdot F_z = 0$ (por diferenciação de $F_z \cdot F_z$) e que

$$F_{zz}\cdot F_{\bar{z}} = \frac{E_z}{2},$$

pois,

$$(F_z\cdot F_{\bar{z}})_z = F_{zz}\cdot F_{\bar{z}} + \underbrace{F_z\cdot F_{\bar{z}z}}_{=0}.$$

Agora escrevemos o vetor F_{zz} na base $\{F_z, F_{\bar{z}}, N\}$ de $\mathbb{C}^3$ como

$$F_{zz} = aF_z + bF_{\bar{z}} + cN.$$

Fazendo sucessivamente o produto hermitiano desta expressão com os vetores F_z, $F_{\bar{z}}$ e N, o resultado segue facilmente.

5) Segue de $0 = (F_{\bar{z}}\cdot N)_z = F_{\bar{z}z}\cdot N + F_{\bar{z}}\cdot N_z$ que $F_{\bar{z}}\cdot N_z = -F_{\bar{z}z}\cdot N$. Logo,

$$\begin{aligned}
F_{\bar{z}}\cdot N_z &= \frac{-1}{4}(F_{xx}+F_{yy})\cdot N\\
&= \frac{-1}{4}(F_{xx}\cdot N + F_{yy}\cdot N)\\
&= \frac{-1}{4}(l+n) = \frac{-1}{4}\cdot 2EH\\
&= \frac{-EH}{2}.
\end{aligned}$$

6) Escreva

$$N_z = aF_z + bF_{\bar{z}} + cN.$$

Fazendo sucessivamente o produto hermitiano dessa expressão com os vetores $F_z, F_{\bar{z}}$ e N, respectivamente, chega-se ao resultado desejado.

7) Por (3),

$$\frac{\alpha}{2} = F_{zz} \cdot N.$$

Diferenciando, temos

$$\frac{\alpha_{\bar{z}}}{2} = \underbrace{F_{zz\bar{z}} \cdot N}_{(a)} + \underbrace{F_{zz} \cdot N_{\bar{z}}}_{(b)}.$$

Veja que (a) pode ser reescrito como

$$F_{zz\bar{z}} \cdot N = F_{z\bar{z}z} \cdot N = (F_{z\bar{z}} \cdot N)_z - F_{z\bar{z}} \cdot N_z,$$

pois,

$$(F_{z\bar{z}} \cdot N)_z - F_{z\bar{z}} \cdot N_z = F_{z\bar{z}z} \cdot N + F_{z\bar{z}} \cdot N_z - F_{z\bar{z}} \cdot N_z,$$

$$F_{z\bar{z}} \cdot N_z = \frac{EH}{2} N \cdot N_z$$

e

$$(F_{z\bar{z}} \cdot N)_z = \frac{(EH)_z}{2}.$$

Logo,

$$F_{zz\bar{z}} \cdot N = \frac{(EH)_z}{2} - \frac{EHN}{2} N_z = \frac{1}{2}(EH)_z.$$

Do mesmo modo, (b) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
F_{zz} \cdot N_{\bar{z}} &= \left[\left(\frac{E_z}{E}\right) \cdot F_z + \frac{\alpha}{2} \cdot N\right] \cdot N_{\bar{z}} \\
&= \left(\frac{E_z}{E}\right) \cdot F_z \cdot N_{\bar{z}} + \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot N \cdot N_{\bar{z}} \\
&= \left(\frac{E_z}{E}\right) \cdot \overline{F_{\bar{z}} N_z} = \left(\frac{E_z}{E}\right) \cdot \left(\frac{-EH}{2}\right) = \frac{-HE_z}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\alpha_{\bar{z}}}{2} = \frac{1}{2}(E_z H + EH_z) - \frac{E_z H}{2} = \frac{1}{2} EH_z,$$

donde,

$$\alpha_{\bar{z}} = EH_z.$$

8) De (3) temos,

$$\alpha = \frac{l-n}{2} - im \Longrightarrow |\alpha|^2 = \frac{(l-n)^2}{4} + m^2,$$

que pode ser escrito como

$$|\alpha|^2 = \left(\frac{l+n}{2}\right)^2 - (ln - m^2) = (EH)^2 - E^2K = E^2(H^2 - K).$$

Como

$$H^2 - K = \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)^2 - k_1k_2 = \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2 - 4k_1k_2}{4} = \frac{(k_1-k_2)^2}{4},$$

temos

$$|\alpha|^2 = \frac{E^2(k_1-k_2)^2}{4}.$$

9) Sabemos que uma função complexa $\phi = u + iv$ tem derivada com respeito a $\bar{z}$ dada por

$$\phi_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\right]$$

e que ϕ é holomorfa se e somente se $\phi_{\bar{z}} = 0$ (pelas equações de Cauchy-Riemann). Então se H é constante, tem-se que $H_z = 0$. Mas por (7), $\alpha_{\bar{z}} = EH_z = 0$ e portanto α é holomorfa. Além disso, uma mudança de coordenadas complexas $z \longrightarrow w$ muda

$$\alpha(z) = 2F_{zz} \cdot N$$

em

$$\widetilde{\alpha}(z) = 2(F(z))_{ww} \cdot N(z),$$

onde

$$(F(z))_w = \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dw} = F_z\frac{dz}{dw}$$

e

$$\begin{aligned}(F(z))_{ww} = \left(F_z\frac{dz}{dw}\right)_w &= F_z\frac{d^2z}{dw^2} + (F_z)_w \cdot \frac{dz}{dw}\\ &= F_z\frac{d^2z}{dw^2} + \left(\frac{dF_z}{dz}\cdot\frac{dz}{dw}\right)\cdot\frac{dz}{dw}\\ &= F_z\frac{d^2z}{dw^2} + F_{zz}\left(\frac{dz}{dw}\right)^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
2(F(z))_{ww} \cdot N(z) &= 2\left[F_{zz}\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 + F_z\frac{d^2z}{dw^2}\right]N(z) \\
&= 2F_{zz}\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 N(z) + 2\frac{d^2z}{dw^2}\underbrace{F_z \cdot N(z)}_{=0} \\
&= \alpha(z(w))\left(\frac{dz}{dw}\right)^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\widetilde{\alpha}(z) = \alpha(z(w))\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$$

ou equivalentemente,

$$\widetilde{\alpha}(z)dw^2 = \alpha(z(w))dz^2.$$

Portanto, $h = \alpha(z)dz^2$ é uma diferencial quadrática holomorfa globalmente definida em M. Do item (8) acima resulta que os zeros isolados de h coincidem com os pontos onde $m = 0$ e $l = n$ (de fato, $h = 0$ implica $\alpha(z) = 0$ e vale $\alpha = (l-n)/2 - im = 0$). Nestes pontos, evidentemente vale $k_1 = k_2$. ■

Corolário 1.2.1 *Se a imersão tem curvatura média H* **constante** *e* **não possui pontos umbílicos** *em uma região Ω simplesmente conexa, então existe uma mudança de coordenadas $z \longrightarrow w$ tal que a diferencial de Hopf torna-se $h = -dw^2$. O parâmetro complexo w é determinado a menos de um sinal e uma constante aditiva.*

Demonstração. Como h é uma diferencial quadrática holomorfa, temos que

$$h(z) = \alpha(z)\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 dw^2$$

onde $w = w(z)$ é um novo parâmetro complexo. Portanto, devemos escolher w de tal modo que $\alpha(z)\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = -1$, isto é, $w(z)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = -\alpha(z).$$

Na ausência de pontos umbílicos, segue do item (9) da Proposição 1.2.1 que $\alpha(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. A hipótese de que Ω é simplesmente conexa garantirá a existência de uma raiz quadrada holomorfa de $-\alpha(z)$ em Ω, que pode ser integrada para produzir o $w(z)$ desejado, determinado a menos de uma constante aditiva. Claramente, $-w(z)$ é também uma solução. ■

Definição 1.2.1 *Dada uma superfície mínima sem pontos umbílicos, um parâmetro conforme z para o qual a diferencial de Hopf h tem coeficiente local $\alpha(z) = -1$ será chamado um* **Parâmetro de Liouville.**

Proposição 1.2.2 *Seja $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima sem pontos umbílicos. Suponha que $z \in \Omega$ é um parâmetro de Liouville numa vizinhança de M e que a métrica conforme satisfaz $ds = e^u|dz|$, para uma função $u \in C^2(\Omega)$. Então :*

i) As linhas coordenadas são linhas de curvaturas e o fator conforme e^u corresponde à solução u da equação de Liouville $\Delta u = e^{-2u}$;

ii) A segunda forma fundamental é dada por $II = -dx^2 + dy^2$;

iii) As curvaturas principais são $-k_1 = k_2 = e^{-2u}$ e a curvatura gaussiana é

$$K = k_1 k_2 = -e^{-4u}.$$

Demonstração. Por definição de um parâmetro de Liouville em uma superfície mínima, tem-se

$$\frac{l-n}{2} - im = \alpha(z) = -1, \quad l + n = 0,$$

o que implica $l - n = -2$, $m = 0$, $l + n = 0$. Daí temos que

$$l = -1, m = 0, n = 1.$$

Segue que a segunda forma fundamental se escreve como

$$II = -dx^2 + dy^2$$

e as linhas coordenadas são portanto linhas de curvatura. Como

$$k_1 \cdot k_2 = K = \frac{ln - m^2}{E^2} = \frac{-1.1 - 0}{E^2}$$

segue que

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{-1}{E^2},$$

onde $E = e^{2u}$ e

$$1 = |\alpha| = \frac{E(k_1 - k_2)}{2}.$$

Daí,

$$k_1 = \frac{-1}{E} = -k_2.$$

Assim, $K = -e^{-4u}$ e substituindo isso na expressão (2) da Proposição 1.2.1 chegamos a

$$\Delta u = e^{-2u}.$$

■

Capítulo 2

A Representação de Weierstrass e a Correspondência entre Superfícies Mínimas e Soluções da Equação de Liouville

2.1 A Representação de Weierstrass

Em 1866, Weierstrass obteve uma solução geral da equação das superfície mínimas, permitindo construir exemplos de superfícies mínimas a partir de um par de funções holomorfas. O propósito deste capítulo é reinterpretar a abordagem em termos de parâmetro de Liouville.

Seja M uma superfície de Riemann e considere diferenciais holomorfas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ definidas em M por $\alpha_k = \phi_k dz, k = 1, 2, 3$, tais que:

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \|\alpha_k\|^2 > 0$;

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \alpha_k^2 = 0$;

iii) Cada α_k não possui períodos reais em M, ou seja, quando a parte real da integral de α_k ao longo de um caminho fechado sempre se anula.

Neste caso, a função $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(z) = \left(\mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \alpha_1, \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \alpha_2, \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \alpha_3\right)$$

é uma imersão mínima conforme, (ver, por exemplo, [8]), satisfazendo $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 2F_z$.

Podemos escrever F como

$$F(z) = \left(\mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}(1-g^2)\omega, \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \frac{i}{2}(1+g^2)\omega, \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} g\omega\right), \tag{2.1}$$

onde g é uma função meromorfa e ω uma diferencial holomorfa sobre M. Com efeito, se

$$\omega = \alpha_1 - i\alpha_2, \quad g\omega = \alpha_3$$

então,

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \tag{2.2}$$

onde localmente escrevemos $\alpha_k = \phi_k dz, k = 1, 2, 3$ e $\omega = f dz$, sendo f é uma função holomorfa. Segue que podemos reobter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ em termos de g e ω como

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1/2)(1 - g^2)\omega; \\ \alpha_2 &= (i/2)(1 + g^2)\omega; \\ \alpha_3 &= g\omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

A representação (2.1), é chamada de **representação de Weierstrass** das superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$. O par $\{\omega = f dz, g\}$ é chamado **par de Weierstrass**.

Mostraremos agora uma proposição que será fundamental para demonstrarmos o Teorema 2.2.2, que é o teorema central desta dissertação.

Proposição 2.1.1 *Em termos de um par de Weierstrass $\{f, g\}$, os invariantes geométricos de uma superfície mínima são expressos como segue:*

i) O fator conforme é $\sqrt{E} = e^u = |f|(1 + |g|^2)/2$;

ii) A normal orientada N satisfaz $\Pi \circ N = g$, onde Π denota a projeção estereográfica da esfera unitária centrada na origem, com pólo norte removido, no plano equador;

iii) A diferencial de Hopf é $h = -fg'dz^2$. Além disso, se g tem um pólo de ordem $m \geq 1$ em z_0, então h não se anula em z_0 quando $m = 1$, ou tem um zero de ordem $m - 1 > 0$ em z_0.

Demonstração. i) Sabemos que

$$F_z = \frac{1}{2}(F_x - iF_y)$$

e

$$4|F_z|^2 = (F_x F_x + F_y F_y) = 2E,$$

donde,

$$2E|dz|^2 = \sum_{k=1}^{3} |\alpha_k|^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
E|dz|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}|\alpha_k|^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}|1-g^2|^2|\omega|^2+\frac{1}{4}|1+g^2|^2|\omega|^2+|g|^2|\omega|^2\right)\\
&= \frac{1}{8}(|1-g^2|^2+|1+g^2|^2+4|g|^2)|\omega|^2\\
&= \frac{1}{8}\left[(1-g^2)(1+\bar{g}^2)+(1+g^2)(1+\bar{g}^2)+4g\bar{g}\right]|\omega|^2\\
&= \frac{1}{8}\left[(1-\bar{g}^2-g^2+g^2\bar{g}^2)+(1+\bar{g}^2+g^2+g^2\bar{g}^2)+4g\bar{g}\right]|\omega|^2\\
&= \frac{1}{8}|\omega|^2(2+4g\bar{g}+2g^2\bar{g}^2)=\frac{1}{4}|\omega|^2(g^2\bar{g}^2+2g\bar{g}+1)\\
&= \frac{1}{4}\left(|g|^2+1\right)^2|\omega|^2.
\end{aligned}$$

Como $\omega = fdz$, segue que

$$E = \frac{|f|^2}{4}(1+|g|^2)^2,$$

ou seja,

$$\sqrt{E} = e^u = \frac{|f|(1+|g|^2)}{2}.$$

ii) Temos $\Phi = 2F_z = (\phi_1,\phi_2,\phi_3)$, onde $\phi_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x} - i\frac{\partial F_k}{\partial y}\right)$, $k=1,2,3$. Então

$$\begin{aligned}
F_x \times F_y &= -(\text{Re }\phi_1,\text{Re }\phi_2,\text{Re }\phi_3)\times(\text{Im }\phi_1,\text{Im }\phi_2,\text{Im }\phi_3)\\
&= -(\text{Re }\phi_2\text{Im }\phi_3-\text{Im }\phi_2\text{Re }\phi_3,\text{Im }\phi_1\text{Re }\phi_3-\text{Re }\phi_1\text{Im }\phi_3,\text{Re }\phi_1\text{Im }\phi_2-\text{Im }\phi_1\text{Re }\phi_2).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se calcularmos Im $\phi_2\bar{\phi}_3$, teremos

$$\begin{aligned}
\phi_2\bar{\phi}_3 &= (\text{Re }\phi_2+i\text{Im }\phi_2)(\text{Re }\phi_3-i\text{Im }\phi_3)\\
&= \text{Re }\phi_2\text{Re }\phi_3-i\text{Re }\phi_2\text{Im }\phi_3+i\text{Im }\phi_2\text{Re }\phi_3+\text{Im }\phi_2\text{Im }\phi_3\\
&= (\text{Re }\phi_2\text{Re }\phi_3+\text{Im }\phi_2\text{Im }\phi_3)+i(\text{Im }\phi_2\text{Re }\phi_3-\text{Re }\phi_3\text{Im }\phi_3).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Im }(\phi_2\bar{\phi}_3) = \text{Im }\phi_2\text{Re }\phi_3-\text{Re }\phi_2\text{Im }\phi_3 = -(\text{Re }\phi_2\text{Im }\phi_3-\text{Im }\phi_2\text{Re }\phi_3).$$

Concluímos então que Im $\phi_2\bar{\phi}_3$ coincide com à primeira coordenada de $F_x\times F_y$. Com cálculos semelhantes, temos que Im $\phi_3\bar{\phi}_1$ é igual à segunda coordenada de $F_x\times F_y$ e Im $\phi_1\bar{\phi}_2$ é igual à terceira coordenada de $F_x\times F_y$. Portanto podemos escrever

$$F_x\times F_y = (\text{Im }\phi_2\bar{\phi}_3,\text{Im }\phi_3\bar{\phi}_1,\text{Im }\phi_1\bar{\phi}_2).$$

Sabemos que,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= (1/2)(1-g^2)f,\\ \phi_2 &= (i/2)(1+g^2)f,\\ \phi_3 &= gf,\end{aligned}\tag{2.4}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1 &= (1/2)(1-\bar{g}^2)\bar{f},\\ \bar{\phi}_2 &= (-i/2)(1+\bar{g}^2)\bar{f},\\ \bar{\phi}_3 &= \bar{g}\bar{f}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Além disso, $g\bar{g} = |g|^2$ e Im $(ig) =$ Re g. Veja que se $g = a + bi$ então

$$1 + g^2 = (1 + a^2 - b^2) + 2abi.$$

Logo,

$$(1 + g^2)\bar{g} = a + a^3 + ab^2 + i(a^2b - b + b^3),$$

daí,

$$(1 + |g|^2)\mathrm{Re}\ g = (1 + a^2 + b^2)a = a + a^3 + ab^2 = \mathrm{Re}\ [(1 + g^2)\bar{g}].\tag{2.6}$$

Utilizando as igualdades (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\ \phi_2\bar{\phi}_3 &= \mathrm{Im}\ \left\{\frac{i}{2}(1+g^2)f\cdot\overline{gf}\right\} = Re\left\{\frac{1}{2}(1+g^2)|f|^2\cdot\bar{g}\right\}\\ &= \frac{1}{2}|f|^2\mathrm{Re}\ (1+g^2)\bar{g} = \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)\mathrm{Re}\ g,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{Im}\ \phi_2\bar{\phi}_3 = \frac{1}{2}(|f|^2(1 + |g|^2)\mathrm{Re}\ g.\tag{2.7}$$

Temos também

$$(1 - \bar{g}^2)g = (1 - a^2 + b^2 + 2abi)(a + bi) = a - a^3 + ab^2 + i(b + a^2b + b^3),$$

e que

$$(1 + |g|^2)\mathrm{Im}\ g = (1 + a^2 + b^2)b = b + a^2b + b^3. = \mathrm{Im}\ [(1 - \bar{g}^2)g].$$

Segue que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\ \phi_3\bar{\phi}_1 &= \mathrm{Im}\ \left\{\frac{1}{2}f\bar{g}(1-\bar{g}^2)\bar{f}\right\}\\ &= \frac{1}{2}|f|^2\mathrm{Im}\ (1-g^2)\bar{g} = \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)\mathrm{Im}\ g,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{Im } \phi_3\bar{\phi}_1 = \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)\text{Im } g. \tag{2.8}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned}(1-g^2)(1+\bar{g}^2) &= (1-a^2+b^2-2abi)(1+a^2-b^2-2abi)\\ &= 1-a^4-2a^2b^2-b^4-4abi\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(1+|g|^2)(|g|^2-1) &= (1+a^2+b^2)(a^2+b^2-1) = a^4+2a^2b^2+b^4-1\\ &= -Re\{(1-g^2)(1+\bar{g}^2)\},\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\text{Im } \phi_1\bar{\phi}_2 &= \text{Im } \left\{\frac{1}{2}(1-g^2)f\frac{\bar{i}}{2}(1+\bar{g}^2)\bar{f}\right\} = \text{Im } \left\{\frac{-i}{4}|f|^2(1-g^2)(1+\bar{g}^2)\right\}\\ &= \frac{-1}{4}|f|^2\text{Re }\{(1-g^2)(1+\bar{g}^2)\} = \frac{|f|^2}{4}(1+|g|^2)(|g|^2-1),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{Im } \phi_1\bar{\phi}_2 = \frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)(|g|^2-1). \tag{2.9}$$

Das equações (2.7), (2.8) e (2.9) concluímos que um campo normal a M é

$$F_x \times F_y = \left(\frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)\text{Re } g, \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)\text{Im } g, \frac{|f|^2}{4}(1+|g|^2)(|g|^2-1)\right),$$

ou, de outra maneira,

$$F_x \times F_y = \frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)(2\text{Re } g, 2\text{Im } g, |g|^2-1).$$

Daí

$$\begin{aligned}|F_x \times F_y| &= \frac{|f|^2(1+|g|^2)}{4}\sqrt{4(\text{Re } g)^2+4(\text{Im } g)^2+(|g|^2-1)^2}\\ &= \frac{|f|^2(1+|g|^2)}{4}\sqrt{4|g|^2+|g|^4-2|g|^2+1}\\ &= \frac{|f|^2(1+|g|^2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Então a aplicação Normal de Gauss de M é

$$N = \left(\frac{2\text{Re } g}{1+|g|^2}, \frac{2\text{Im } g}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}\right).$$

Considere agora $\Pi : S^2(1) - \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica e identifiquemos $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$. Podemos estender Π a uma função $\overline{\Pi} : S^2(1) \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, definindo $\overline{\Pi}((0,0,1)) = \infty$. Desse modo,

$$\overline{\Pi}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right), & \text{se} \quad (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,1) \\ \infty, & \text{se} \quad (x_1, x_2, x_3) = (0,0,1) \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pi \circ N &= \Pi\left(\frac{2\text{Re } g}{1+|g|^2}, \frac{2\text{Im } g}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}\right) \\ &= \left(\frac{2\text{Re } g/(1+|g|^2)}{1-\frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}}, \frac{2\text{Im } g/(1+|g|^2)}{1-\frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}}\right) \\ &= (\text{Re } g, \text{Im } g) = g. \end{aligned}$$

iii) De (ii) vimos que $N = \frac{1}{|g|^2+1}(2\text{Re } g, 2\text{Im } g, |g|^2-1)$ e sabemos que

$$F(z) = \text{Re} \int_{z_0}^{z} \Phi dz, \qquad 2F_z = \Phi = \left(\frac{1}{2}f(1-g^2), \frac{i}{2}f(1+g^2), fg\right),$$

donde

$$4F_{zz} = \left(f'(1-g^2) - 2fgg', if'(1+g^2) + 2ifgg', 2f'g + 2fg'\right).$$

Do item (3) da Proposição 1.2.1 (ou seja, $\alpha = 2F_{zz} \cdot N$), fazendo o produto interno $F_{zz} \cdot N$, temos

$$\begin{aligned} 4(|g|^2+1)F_{zz} \cdot N &= (f'(1-g^2) - 2fgg')2\text{Re } g + (if'(1+g^2) + 2ifgg')2\text{Im } g \\ &+ (2f'g + 2fg')(|g|^2-1) \\ &= 2f'\text{Re } g - 2f'g^2\text{Re } g - 4fgg'\text{Re } g + 2if'\text{Im } g + 2if'g^2\text{Im } g \\ &+ 4ifgg'\text{Im } g + 2f'g(|g|^2-1) + 2fg'(|g|^2-1) \\ &= 2f'(\text{Re } g + i\text{Im } g) - 4fgg'(\text{Re } g - i\text{Im } g) - 2f'g^2(\text{Re } g - i\text{Im } g) \\ &+ 2f'g(|g|^2-1) + 2fg'(|g|^2-1) \\ &= 2f'g - 4fgg'\bar{g} - 2f'g^2\bar{g} + 2f'g(|g|^2-1) + 2fg'(|g|^2-1) \\ &= 2f'g - 4fg'|g|^2 - 2f'g|g|^2 + 2f'g(|g|^2-1) + 2fg'(|g|^2-1) \\ &= 2f'g(1-|g|^2) + 2f'g(|g|^2-1) - 4fg'|g|^2 + 2fg'(|g|^2-1) \\ &= 2f'g \cdot 0 - 2fg'(2|g|^2 - |g|^2 + 1) = -2fg'(|g|^2+1), \end{aligned}$$

ou seja,

$4(|g|^2+1)F_{zz}\cdot N = -2fg'(|g|^2+1) \Longrightarrow 2(|g|^2+1)\cdot 2F_{zz}\cdot N = -2fg'(|g|^2+1)$. Isto implica

$$\alpha = -fg',$$

donde

$$h = -fg'dz^2.$$

■

2.2 Correspondência entre Superfícies Mínimas e Soluções da Equação de Liouville

Na próxima Proposição, serão úteis o Teorema da Uniformização de Riemann (ver, por exemplo, [6]) e as Proposições 1.2.2 e 2.1.1.

Teorema 2.2.1 (da Uniformização de Riemann) *Uma superfície de Riemann simplesmente conexa ou é conformemente equivalente a esfera S^2, ou ao plano complexo $\mathbb{C}$ ou ao disco unitário $D(0,1) \subset \mathbb{C}$.*

Proposição 2.2.1 *Uma superfície mínima simplesmente conexa em $\mathbb{R}^3$ sem pontos umbílicos admite coordenadas de Liouville globais $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$ tais que:*

i) As curvas coordenadas são linhas de curvatura;

ii) A projeção estereográfica da normal orientada N é uma função meromorfa g satisfazendo $g' \neq 0$, em todo ponto $z \in \Omega$;

iii) O fator conforme e^u determina uma solução u da equação de Liouville $\Delta u = e^{-2u}$, ou seja,

$$e^u = \frac{1+|g|^2}{2|g'|}, z \in \Omega.$$

Demonstração. Como uma superfície mínima não pode ser um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^3$, pelo Teorema da Uniformização de Riemann , M ou é conformemente equivalente a um disco $\mathcal{D}$ ou a todo o plano complexo. Segue do Corolário 1.2.1 que existem coordenadas de Liouville $z \in \Omega$ em todo M, daí a diferencial de Hopf é dada por $-dz^2$ por toda parte. Consideremos a imersão mínima em coordenadas de Liouville, digamos $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, e usamos (2.2) onde $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 2F_z$, para definir f e g em Ω. Tem-se da prova da Proposição 2.1.1(iii) que

$fg' = -\alpha = 1$ em Ω. Tomando $|f| = 1/|g'|$ na expressão de e^u na Proposição 2.1.1 (i), chegamos a

$$e^u = \frac{1 + |g|^2}{2|g'|}.$$

Segue agora das Proposições 1.2.2 e 2.1.1, os resultados de (i), (ii) e (iii) da Proposição. ■

O resultado inverso da Proposição 2.2.1, está contido no seguinte Teorema, que pode ser encontrado em [1]

Teorema 2.2.2 *Uma solução u da equação de Liouville definida em uma região plana simplesmente conexa Ω, determina a menos de um movimento rígido do $\mathbb{R}^3$, uma imersão mínima sem pontos umbílicos $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, satisfazendo:*

i) A primeira forma fundamental é dada por $ds^2 = e^{2u}|dz|^2$, onde z é um parâmetro conforme;

ii) As linhas coordenadas são linhas de curvatura; as curvaturas principais são $k_2 = -k_1 = e^{-2u}$ e a curvatura gaussiana é $K = k_1 \cdot k_2 = -e^{-4u}$;

iii) O par de Weierstrass determinado por F é dado por $\{dz/g', g\}$, onde g é uma função meromorfa que admite somente pólos simples e $g'(z) \neq 0$ em todo $z \in \Omega$;

iv) A solução u e a função meromorfa g estão relacionadas por

$$e^u = \frac{|g|^2 + 1}{2|g'|}.$$

Demonstração. Seja $u(x, y)$ uma solução de $\Delta u = e^{-2u}$ definida em Ω. Definimos

$$I = e^{2u}(dx^2 + dy^2)$$

e

$$II = -dx^2 + dy^2,$$

como candidatas à primeira e segunda formas fundamentais em parâmetros conformes (x, y). Usando a definição dos símbolos de Christoffel (ver, por exemplo, [10]) teremos

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_x}{2E}, \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{-E_y}{2G},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_y}{2E}, \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_x}{2G},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{-G_x}{2E}, \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_y}{2G},$$

onde

$$E = e^{2u} = G, \quad F = 0.$$

Queremos encontrar $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfazendo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
F_{xx} &= \Gamma_{11}^1 \cdot F_x + \Gamma_{11}^2 \cdot F_y + l \cdot N = u_x \cdot F_x - u_y \cdot F_y - N, \\
F_{xy} &= \Gamma_{12}^1 \cdot F_x + \Gamma_{12}^2 \cdot F_y + m \cdot N = u_y \cdot F_x + u_x \cdot F_y, \\
F_{yy} &= \Gamma_{22}^1 \cdot F_x + \Gamma_{22}^2 \cdot F_y + n \cdot N = -u_x \cdot F_x + u_y \cdot F_y + N, \\
N_x &= e^{-2u} \cdot F_x, \\
N_y &= -e^{-2u} \cdot F_y,
\end{aligned}$$

onde N é a aplicação normal de Gauss. Pelo item (2) da Proposição 2.2.1 , sabemos que

$$K = \frac{-\Delta(\log \sqrt{E})}{E},$$

ou equivalentemente,

$$E \cdot K = -(u_{xx} + u_{yy}),$$

ou seja ,

$$u_{xx} + u_{yy} = -E \cdot K = -e^{2u} \cdot K. \tag{2.10}$$

A equação de Gauss é

$$\left(\Gamma_{12}^2\right)_x - \left(\Gamma_{11}^2\right)_y + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -E \cdot K. \tag{2.11}$$

Veja que o lado esquerdo de (2.11) é igual a $u_{xx} + u_{yy}$, portanto (2.10) satisfaz a equação de Gauss e como u é uma solução de $\Delta u = e^{-2u}$, segue que $k_2 = -k_1 = e^{-2u}$ e portanto,

$$K = -e^{-4u}.$$

Consideremos agora as equações de Codazzi-Mainardi

$$l_y - m_x = l \cdot \Gamma_{12}^1 + m \cdot (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - n \cdot \Gamma_{11}^2,$$

$$m_y - n_x = l \cdot \Gamma_{22}^1 + m \cdot (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - n \cdot \Gamma_{12}^2,$$

onde l, m e n são os coeficientes da segunda forma fundamental. Como $l = -1, m = 0$ e $n = 1$, segue que estas equações são reduzidas a

$$\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^2 = 0, \tag{2.12}$$

as quais são automaticamente satisfeitas. Portanto, o **Teorema Fundamental das Superfícies** (ver, por exemplo, [10]) garante a existência de uma imersão diferenciável $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a métrica induzida é dada por $ds = e^u|dz|$ e a segunda forma fundamental é II. Segue da nossa construção que a imersão é mínima, pois $l+n=0$, e sem pontos umbílicos, pois $K<0$. A prova dos itens (iii) e (iv) é análoga ao da Proposição 2.2.1. ■

Corolário 2.2.1 *Uma solução inteira $u(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2$, da equação de Liouville é expressa por*

$$e^{u(x,y)} = \frac{1+|g(z)|^2}{2|g'(z)|}, \qquad z = x+iy \in \mathbb{C}, \tag{2.13}$$

onde g é uma função meromorfa global tal que $g'(z)\neq 0, z\in\mathbb{C}$, e somente admite pólos simples. Além disso, g e suas transformações

$$\frac{ag-b}{\bar{b}g+\bar{a}}, \quad |a|^2+|b|^2>0,$$

fornecem todas as possibilidades para (2.13) acontecer.

Demonstração. Como mostrado na prova do Teorema 2.2.2, uma solução u da equação de Liouville determina uma única imersão mínima F, a menos de um movimento rígido de $\mathbb{R}^3$. Seja $G = R\circ F + P_0$, onde R é uma tranformação linear ortogonal de $\mathbb{R}^3$ e P_0 é um vetor constante. Se z é um parâmetro de Liouville para F, então a diferencial de Hopf para G satisfaz

$$\alpha = 2(R\circ F_{zz})\cdot(R\circ N) = 2F_{zz}\cdot N = -1,$$

o que significa que z é um parâmetro de Liouville para G. A função meromorfa $g=\Pi(N)$, dada pelo Teorema 2.2.2, é transformada em $\Pi\circ R\circ\Pi^{-1}(g) = T(g)$. Por outro lado, é um fato clássico que

$$T(z) = \frac{az-b}{\bar{b}z+\bar{a}}, |a|^2+|b|^2>0$$

produz todas as rotações da esfera de Riemann. A prova está agora completa. ■

Capítulo 3

Alguns Exemplos e Soluções Radialmente Simétricas da Equação de Liouville

3.1 Alguns Exemplos Clássicos

Listamos algumas superfícies mínimas clássicas sem pontos umbílicos e as correspondentes soluções de $\Delta u = e^{-2u}$.

As parametrizações são em coordenadas de Liouville, daí $f = 1/g'$ na fórmula $2F_z = \Phi = \left(\frac{1}{2}f(1-g^2), \frac{i}{2}f(1+g^2), fg\right)$ para a imersão. Do Teorema 2.2.2, segue que

i) $ds^2 = e^{2u}|dz|^2, z$ um parâmetro conforme;

ii) $k_2 = -k_1 = e^{-2u}$ e $K = k_1 \cdot k_2 = -e^{-4u}$.

Portanto, a curvatura total da imersão em coordenadas de Liouville é dada por

$$\int\int_{\Omega} KdA = \int\int_{\Omega} -e^{-4u}dA = -\int\int_{\Omega} e^{-2u}dxdy.$$

1) SUPERFÍCIE DE ENNEPER

Tome $g(z) = z, z = x + iy \in \mathbb{C}$. Então $e^{u(z)} = (1 + x^2 + y^2)/2, f = 1/g'$ e

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{2}f(1-g^2), \frac{i}{2}f(1+g^2), fg\right).$$

Como $f = 1/g'$ e $g'(z) \equiv 1$, segue que $f \equiv 1$. Logo

$$\Phi(z) = \left(\frac{1-z^2}{2}, \frac{i(1+z^2)}{2}, z\right)$$

e

$$F(z) = \mathrm{Re}\left(\int_0^z \Phi dz\right) = \left(\mathrm{Re}\int_0^z \phi_1 dz, \mathrm{Re}\int_0^z \phi_2 dz, \mathrm{Re}\int_0^z \phi_3 dz\right).$$

Com cálculos simples, teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\int_0^z \phi_1 dz &= \frac{3x - x^3 + 3xy^2}{6}, \\
\mathrm{Re}\int_0^z \phi_2 dz &= \frac{-3y - 3x^2y + y^3}{6}, \\
\mathrm{Re}\int_0^z \phi_3 dz &= \frac{x^2 - y^2}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$F(z) = \left(\frac{3x - x^3 + 3xy^2}{6}, \frac{-3y - 3x^2y + y^3}{6}, \frac{x^2 - y^2}{2}\right).$$

A solução inteira $u(z) = \log\left((1 + x^2 + y^2)/2\right)$ é radialmente simétrica e sua curvatura total é

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{-4dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = -4\pi.$$

2) CATENÓIDE

Tome $g(z) = -e^z, z = x + iy \in \mathbb{C}$. Então

$$e^u(z) = \cosh x$$

e

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{2}f(1 - g^2), \frac{i}{2}f(1 + g^2), fg\right).$$

Como $f = 1/g'$ e $g'(z) = -e^z$, segue que $f = -1/e^z$ e temos que

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}f(1 - g^2) = \frac{1}{2}(-1/e^z)(1 - e^{2z}) = \frac{-1}{2}e^{-z}(1 - e^{2z}) = \frac{-1}{2}e^{-z} + \frac{1}{2}e^z = \mathrm{senh}\ z, \\
\frac{i}{2}f(1 + g^2) = \frac{i}{2}(-1/e^z)(1 + e^{2z}) = \frac{-i}{2}e^{-z}(1 + e^{2z}) = \frac{-i}{2}e^{-z} - \frac{i}{2}e^z = -i\cosh\ z, \\
fg = \frac{-1}{e^z} \cdot (-e^z) = 1.
\end{gathered}$$

Logo,

$$\Phi(z) = (\mathrm{senh}\, z, -i\cosh z, 1)$$

e

$$F(z) = \text{Re}\left(\int_0^z \Phi dz\right) = \left(\text{Re}\int_0^z \phi_1 dz, \text{Re}\int_0^z \phi_2 dz, \text{Re}\int_0^z \phi_3 dz\right),$$

onde

$$\int_0^z \phi_1 dz = \cosh\, z - 1 = \cosh\,(x+iy) = \cosh x \cos y - i \text{senh}\, x \text{senh}\, y - 1,$$

$$\int_0^z \phi_2 dz = -i\text{senh}\ z = -i\text{senh}\ (x+iy) = \text{sen}\, y \cosh x - i\text{senh}\, x \cos\, y,$$

$$\int_0^z \phi_3 dz = z = x + iy.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{Re}\int_0^z \phi_1 dz &= \cosh x \cos y - 1,\\
\text{Re}\int_0^z \phi_2 dz &= \text{sen}\, y \cosh x,\\
\text{Re}\int_0^z \phi_3 dz &= x.
\end{aligned}$$

Assim

$$F(z) = (\cosh x \cos y - 1, \cosh x \text{sen}\, y, x).$$

A solução inteira $u(x, y) = \log(\cosh\, x)$ depende somente de uma variável. Na verdade, F é a imersão de recobrimento Universal. O catenóide é coberto infinitas vezes, o que implica

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} K dA = \int\int_{\mathbb{R}^2} -(\cosh x)^{-2} dx dy = -\infty.$$

Integrando sobre a faixa $\mathbb{R} + i[0, 2\pi]$, obtem-se -4π, que é a curvatura total do Catenóide mergulhado.

3) HELICÓIDE

Tome $g(z) = -ie^{\sqrt{i}z}$, onde $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$ e $\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4}$. Então

$$e^{u(z)} = \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right), z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Como $g'(z) = \sqrt{i}g(z)$, segue que $f(z) = \sqrt{i}g(z)$. Com cálculos semelhantes, teremos

$$F(z) = \left(\text{senh}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right), \text{senh}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\text{sen}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right), \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right).$$

O helicóide é a superfície conjugada do catenóide, daí a parametrização por suas linhas assintóticas, não por linhas de curvatura, é a família

$$F(\sqrt{-i}z) = (\operatorname{senh} x \cos y, \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y, y).$$

4) SUPERFÍCIE MÍNIMA DE BONNET

Tome $g(z) = -ae^z - b, z \in \mathbb{C}$, onde $1 \leq a \in \mathbb{R}, b = \pm\sqrt{a^2 - 1}$. Segue que $g'(z) = -ae^z$ e $f = -1/ae^z$. Daí teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f(1-g^2) &= \frac{a}{2}e^z + \frac{b^2-1}{2a}e^{-z} + b, \\
\frac{i}{2}f(1+g^2) &= \frac{-ia}{2}e^z - ib - i\left(\frac{1+b^2}{2a}\right)e^{-z}, \\
fg &= 1 + \frac{b}{a}e^{-z}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Phi(z) = \left(\frac{a}{2}e^z + \frac{b^2-1}{2a}e^{-z} + b, \frac{-ia}{2}e^z - ib - i\left(\frac{1+b^2}{2a}\right)e^{-z}, 1 + \frac{b}{a}e^{-z}\right)$$

e

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \int_0^z \phi_1 dz &= \frac{a}{2}e^z + \frac{1-b^2}{2a}e^{-z} + bz + k \\
&= \frac{a}{2}e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) + \frac{1-b^2}{2a}e^{-x}(\cos y - i\operatorname{sen} y) + bx + iby + k \\
&= \frac{a}{2}e^x\cos y + \frac{ia}{2}e^x\operatorname{sen} y + \frac{1-b^2}{2a}e^{-x}\cos y - i\frac{1-b^2}{2a}e^{-x}\operatorname{sen} y + bx + iby - \frac{a}{2} + k \\
&= \left(\frac{a}{2}e^x\cos y + \frac{1-b^2}{2a}e^{-x}\cos y + bx + k\right) + i\left(\frac{a}{2}e^x\operatorname{sen} y - \frac{1-b^2}{2a}e^{-x}\operatorname{sen} y + by\right),
\end{aligned}$$

onde

$$k = \frac{-a}{2} + \frac{b^2-1}{2a}.$$

Logo,

$$\operatorname{Re}\int_0^z \phi_1 dz = \frac{a}{2}e^x\cos y + \frac{1-b^2}{2a}e^{-x}\cos y + bx + k.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2}e^x\cos y + \frac{1-b^2}{2a}e^{-x} + bx &= \left(\frac{a}{2}e^x + \frac{1-b^2}{2a}e^{-x}\right)\cos y + bx \\
&= \left(\frac{a}{2}e^x + \frac{a}{2}e^{-x} - \frac{a}{2}e^{-x} + \frac{1-b^2}{2a}e^{-x}\right)\cos y + bx \\
&= \left[a\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{1-b^2-a^2}{2a}\right)e^{-x}\right]\cos y + bx \\
&= \left[a\cosh x - \left(a - \frac{1}{a}\right)e^{-x}\right]\cos y + bx,
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\mathrm{Re}\int_0^z \phi_1 dz = \left[a\cosh x - \left(a - \frac{1}{a}\right)e^{-x}\right]\cos y + bx + k.$$

- $$\begin{aligned}
\int_0^z \phi_2 dz &= \frac{-ia}{2}e^z - ibz + i\left(\frac{1+b^2}{2a}\right)e^{-z} + r \\
&= \frac{-ia}{2}e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) - ib(x+iy) + i\left(\frac{1+b^2}{2a}\right)e^{-x}(\cos x - i\operatorname{sen} y) + r \\
&= \left(\frac{a}{2}e^x\operatorname{sen} y + by + \frac{1+b^2}{2a}e^{-x}\operatorname{sen} y\right) + i\left(\frac{-a}{2}e^x\cos y - bx + \frac{1+b^2}{2a}e^{-x}\cos x\right) + r,
\end{aligned}$$

onde

$$r = \frac{ia}{2} - i\left(\frac{b^2+1}{2a}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\int_0^z \phi_2 dz &= \frac{a}{2}e^x\operatorname{sen} y + by + \frac{1+b^2}{2a}e^{-x}\operatorname{sen} y \\
&= \left(\frac{a}{2}e^x + \frac{1+b^2}{2a}e^{-x}\right)\operatorname{sen} y + by \\
&= \left(\frac{a}{2}e^x + \frac{a}{2}e^{-x} - \frac{a}{2}e^{-x} + \frac{1+b^2}{2a}e^{-x}\right)\operatorname{sen} y + by \\
&= \left(a\cosh x + \frac{1+b^2-a^2}{2a}e^{-x}\right)\operatorname{sen} y + by \\
&= a\cosh x\operatorname{sen} y + by,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{Re}\int_0^z \phi_2 dz = a\cosh x\operatorname{sen} y + by.$$

$$\bullet \quad \int_0^z \phi_3 dz = z - \frac{b}{a}e^{-z} - \frac{b}{a} = x + iy - \frac{b}{a}e^{-x}(\cos y - i\operatorname{sen} y) - \frac{b}{a}$$
$$= \left(x - \frac{b}{a}e^{-x}\cos y - \frac{b}{a}\right) + i\left(y + \frac{b}{a}e^{-x}\operatorname{sen} y\right)$$

Daí,

$$\operatorname{Re} \int_0^z \phi_3 dz = x - \frac{b}{a}e^{-x}\cos y - \frac{b}{a}.$$

Assim,

$$F(z) = \left(\left[a\cosh x - \left(a - \frac{1}{a}\right)e^{-x}\right]\cos y + k, a\cosh x \operatorname{sen} y, x\right) - b\left(-x, -y, \frac{e^{-x}\cos y + 1}{a}\right).$$

5) SUPERFÍCIE DE THOMSEN

Tome $g(z) = -i\left(ae^{\sqrt{i}z} + b\right), z \in \mathbb{C}$, pois estas são conjugadas à superfície de Bonnet. Analogamente ao exemplo do helicóide, suas parametrizações por linhas assintóticas são

$$\begin{aligned} F(\sqrt{-i}z) &= \left(a\operatorname{senh} x\cos y + bx, \left(a\operatorname{senh} x + \frac{b^2}{a}e^{-x}\right)\operatorname{sen} y + by, \frac{b}{a}e^{-x}\operatorname{sen} y + y\right) \\ &= (a\operatorname{senh} x\cos y + bx)v_1 + (\operatorname{senh} x\operatorname{sen} y)v_2 + (ay + b\cosh x\operatorname{sen} y)v_3, \end{aligned}$$

onde $v_1 = (1,0,0), v_2 = \left(0, \frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right), v_3 = \left(0, \frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$. Claramente, $a = 1$ produz o helicóide.

3.2 Superfície de Enneper e soluções simétricas da equação de Liouville

A equação de Liouville $\Delta u = e^{-2u}$ é bastante estudada sob um ponto de vista puramente analítico, ver por exemplo, [1] e [2]. Um resultado importante sobre a unicidade desta equação está contido no seguinte Teorema, cuja prova é dada em [2].

Teorema 3.2.1 (de Simetria [2]) *Toda solução inteira $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ de $\Delta u = e^{-2u}$ satisfazendo a condição de decaimento $\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2u}dxdy < \infty$ é radialmente simétrica com respeito a algum ponto em $\mathbb{R}^2$. Portanto, a menos de uma* **translação** *e uma* **homotetia**, *$e^{u(x,y)} = (1 + x^2 + y^2)/2$.*

Sabemos que toda solução da equação de Liouville corresponde a uma superfície mínima sem pontos umbílicos $M \subset \mathbb{R}^3$. Por outro lado, a curvatura total desta superfície é dada por

$$\int\int_{\Omega} K dA = - \int\int_{\Omega} e^{-2u} dx dy,$$

ou seja, a condição de decaimento imposta por [2] é equivalente à condição da superfície ter curvatura total finita.

Teorema 3.2.2 (Caracterização da Superfície de Enneper) *Uma imersão mínima F : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (não necessariamente completa) sem pontos umbílicos com curvatura total finita é a Superfície de Enneper.*

Demonstração. Seja $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima sem pontos umbílicos. Segue do Corolário 1.2.1 que existe um parâmetro de Liouville global $z \in \mathbb{C}$ para a imersão, cujo par de Weierstrass é $\{dz/g', g\}$. Como $K = \det dN < 0$, a fórmula da mudança de variáveis para integrais duplas nos diz que a hipótese de curvatura total finita implica que a área esférica (contada com multiplicidade) $N(\mathbb{C})$ é finita. Se a imersão fosse completa, segue de resultados conhecidos [3] que o ponto no infinito ou é uma singularidade removível ou um pólo de $g = \Pi \circ N$. Mas no nosso caso, precisamos de um argumento complementar. Com efeito, não é possível que todo ponto na esfera S^2 possa ser coberto um número infinito de vezes por N, pois se assim o fosse, a área esférica seria infinita. Portanto, podemos girar a esfera, se necessário, e admitir que $P = N^{-1}(0,0,1) = g^{-1}(\infty)$ é finito (veja que do Corolário 2.2.1 que a solução u é invariante sob rotações esféricas). Como P é precisamente o conjunto dos pólos de g, tem-se que o ponto no infinito é uma singularidade isolada de $g : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Podemos então aplicar o *Grande Teorema de Picard* (ver, por exemplo, [5]) para a função holomorfa $g(1/z), |z| > r$, com r suficientemente grande para isolar ∞ de P e concluir que ∞ não é uma singularidade essencial de g. Logo, ou g é holomorfa ou tem um pólo no ∞. A menos de uma rotação esférica, podemos assumir que g tem um pólo no infinito e como $g'(z) \neq 0, z \in \mathbb{C}$, segue que g é globalmente holomorfa. Mais ainda, g se estende a uma função holomorfa $g : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, com $g(\infty) = \infty$. Logo, $g(z) = P(z)/Q(z), z \in \mathbb{C}$, onde P e Q são polinômios primos entre si. É claro que os pólos de g coincidem com os zeros de Q. Como g é holomorfa, podemos escolher $Q \equiv 1$ e portanto $g \equiv P$. Mas $g'(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, e isto obviamente implica que $g(z) = a(z - z_0), a \neq 0$, donde segue que $F((z - z_0)/a)$ fornece uma parametrização da superfície de Enneper. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Brito,F., Leite, M. L. and Souza-Neto, V.,*Revisiting the connection between minimal surfaces and solutions of the Liouville equation*, Preprint (2001).

[2] Chen, W. and Li, C.,*Classification of solution of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **63**, 615-622 (1991).

[3] Osserman, R.,*A Survey of Minimal Surfaces*,Dover Publications,1986.

[4] Spivak, M.,*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*,vol III, second edition, Publish or Perish, Inc. Berkeley, 1979.

[5] Conway, J.,*Functions of one Complex Variable I*, third edition, springer-verlag, 1991.

[6] Farkas, H. M. and Kra, I.,*Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[7] Lang, S.,*Complex Analysis*, third edition, springer,1993.

[8] Barbosa, J. L. M. and Colares A. G.,*Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3$, monografias de matemática n° 40.

[9] Carmo, M. P. do,*Superfícies Minimas*, 16° colóquio brasileiro de matemática, 1987.

[10] Tenenblat, K.,*Transformações de Superfícies e Aplicações*, 13° colóquio brasileiro de matemática,1981.