

O TEOREMA DE RADÓ

FRANCISCO CESAR AIRES

MONOGRAFIA SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO  
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

FORTALEZA — 1981



U. F. C. Centro de Ciências  
Departamento de Matemática

*A meus pais  
Antonio e Rita  
com dedicação.*

*A minha esposa Mary e  
ao meu filho Gustavo.*

## AGRADECIMENTOS

---

Este trabalho constitui minha Monografia de Mestrado em Matemática realizada na Universidade Federal do Ceará, sob a orientação do Dr. Luquêsio Petrola de Melo Jorge, a quem expreso meus sinceros agradecimentos.

Quero também, externar meus agradecimentos aos colegas do Curso de Pós-Graduação, assim como aos professores do Departamento de Matemática, que contribuíram na realização deste trabalho.

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Norte ao PICD/CAPES e CNPq pelo apoio financeiro recebido.

Enfim, devo agradecer a Zélia Serrano Almeida, pelo esmero com que este trabalho foi datilografado.

*Francisco Cesar Aires*

Fortaleza, janeiro de 1981

ÍNDICE

---

DEDICATÓRIAS.....	i-ii
AGRADECIMENTOS.....	iii
0. INTRODUÇÃO.....	1
1. PROBLEMA DE PLATEAU.....	3
2. PRINCÍPIO DO MÁXIMO.....	8
3. TEOREMA DE EXISTÊNCIA DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL QUASE-LINEAR.....	19
4. O TEOREMA DE RADÓ.....	20
BIBLIOGRAFIA.....	33

## 10. INTRODUÇÃO

Com este trabalho temos a propósito de estudar o seguinte teorema de T. Radó.

### TEOREMA (Radó [19])

Seja  $\Gamma$  uma curva de Jordan de classe  $C^0$  contida no  $\mathbb{R}^3$  cuja projeção ortogonal injetiva sobre algum plano do  $\mathbb{R}^2$  é uma curva convexa. Então existe uma única superfície mínima que é imagem de um disco e tal que  $\partial M = \Gamma$ .

O teorema de Radó fornece exemplos de curvas de Jordan com uma única solução do problema de Plateu (veja §1). Os resultados sobre unicidade da solução do problema de Plateau são raros na literatura. Uma generalização do Teorema de Radó aparece em Meeks [13], Jorge [10] e Tromba [20]. Outro resultado de unicidade foi obtido por Nitsche [14] para curvas analíticas, e generalizado para curvas de classe  $C^{3,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , por Gulliver-Spruck [19]: "Se  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  é de classe  $C^{3,\alpha}$  e a curvatura total é menor que  $4\pi$  então  $\Gamma$  admite uma única solução do problema de Plateau, que é imagem de um disco".

Nosso propósito neste trabalho será provar o Teorema de Radó de uma maneira bem mais geral, como veremos no §4 desta monografia.

Este trabalho consiste de quatro parágrafos. O primeiro parágrafo é uma informação sobre o problema de Plateau.

No segundo parágrafo faremos uma demonstração do Teorema do Princípio do Máximo para operadores diferenciais parciais quase-lineares, mais especificamente, operadores da forma  $(1 + q^2)r - 2 pqs + (1 + p^2)t = 0$  (equação da superfície mínima).

No terceiro parágrafo trataremos de provar o Teorema de Existência para Operadores Diferenciais Parciais Quase-Lineares.

E por fim, no quarto parágrafo damos uma demonstração do Teorema de Radó.

## §1. PROBLEMA DE PLATEAU

A primeira dificuldade que encontramos em compreender o problema de Plateau está em encontrar uma formulação viável da questão.

Veja  $S^1$  como um círculo unitário, isto é,  $S^1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 = 1\}$  e seja  $\Gamma$  uma curva de Jordan em  $\mathbb{R}^3$  (curva homeomorfa a  $S^1$ ). O problema de Plateau para  $\Gamma$  pode ser enunciado da seguinte maneira: "encontrar uma superfície de menor área possível, dentro de uma classe topológica de superfícies cujo bordo é  $\Gamma$ ".

A existência de pelo menos uma solução do problema de Plateau para a curva  $\Gamma$  que é imagem de um disco, foi provado simultaneamente por J. Douglas [6] e T. Radó [18].

Contudo, uma pequena experiência mostra rapidamente que o tipo topológico de  $\Gamma$  pode ser bastante complicado. Por exemplo, se  $\Gamma$  é o bordo de uma faixa de Möbius, obtemos três superfícies — uma do tipo topológico do disco, outra que é a faixa de Möbius, e outra que possui um disco central, ver [1].

Nossa atenção está voltada especificamente para a classe das superfícies de tipo topológico bem simples, como o disco, isto é, superfícies simplesmente conexas.

Consideraremos então como solução do problema de Plateau para a curva de Jordan  $\Gamma$  uma superfície mínima  $M$  que seja imagem de um disco e tal que a fronteira de  $M$  seja  $\Gamma$ .

Dizemos que  $M$  é uma superfície mínima se a sua curvatura média é zero. Uma outra caracterização para superfícies mínimas pode ser vista da seguinte maneira

**Proposição 1:** Seja  $M$  uma superfície de classe  $C^2$  e  $\gamma \subset M$  uma curva fechada limitando um disco  $\Sigma$  em  $M$ . Seja  $\psi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma imersão tal que  $\psi(D) = \Sigma$ , onde  $D$  é um domínio do plano. Então  $M$  é mínima se e somente se  $\Sigma$  é um ponto crítico da função área.

**Prova:** Seja  $N(u)$  o vetor normal a  $M$  em  $\psi(u)$ ,  $u = (u_1, u_2) \in D$ .

Considere uma função arbitrária  $h(u)$  de classe  $C^2$  em  $D$ . Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , seja  $M_\lambda$  a superfície que é a imagem de  $\tilde{\psi}_\lambda(u) = \psi(u) + \lambda h(u) N(u)$ ,  $u \in D$ . Temos:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_\lambda}{\partial u_i} = \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \lambda \cdot \left( h \frac{\partial N}{\partial u_i} + N \frac{\partial h}{\partial u_i} \right)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_\lambda}{\partial u_j} = \frac{\partial \psi}{\partial u_j} + \lambda \cdot \left( h \frac{\partial N}{\partial u_j} + N \frac{\partial h}{\partial u_j} \right) \quad \text{logo}$$

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi}_\lambda}{\partial u_i}, \frac{\partial \tilde{\psi}_\lambda}{\partial u_j} \right\rangle = g_{ij} - 2\lambda h b_{ij}(N) + \lambda^2 c_{ij} \quad \text{onde}$$

$$b_{ij}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j}, N \right\rangle \quad \text{e} \quad c_{ij} \quad \text{é uma função contínua de}$$

$u$  em  $D$ . Portanto  $\det(g_{ij}) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2$  onde  $a_0 = \det(g_{ij})$ ,

$a_1 = -2h((g_{11} b_{22}(N) - 2g_{12} b_{12}(N) + g_{22} b_{11}(N)))$  e  $a_2$  é

uma função contínua de  $u$  em  $D$ .

Sendo  $M$  regular segue-se que  $a_0$  é sempre positivo e como  $a_0, a_1, a_2$  são contínuas e não dependem de  $\lambda$  em  $D$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\det(\bar{g}_{ij}) > 0$  para  $|\lambda| < \varepsilon$ , ou seja, para  $|\lambda| < \varepsilon$ , a superfície  $M_\lambda = \bar{\psi}_\lambda(D)$  é regular.

$$\text{Seja } f = \sqrt{\det(\bar{g}_{ij})} = \sqrt{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2}$$

$$\text{Como } A(\lambda) = \int_D \sqrt{\det(\bar{g}_{ij})} \, du_1 \, du_2 \text{ e } f, \frac{\partial f}{\partial \lambda} \text{ são contínuas em } D,$$

temos que

$$A'(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_D \sqrt{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2} \, du_1 \, du_2$$

$$= \int_D \frac{a_1 + 2a_2\lambda}{\sqrt{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2}} \, du_1 \, du_2, \text{ isto é,}$$

$$A'(0) = \int_D \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \, du_1 \, du_2$$

$$= \int_D \frac{a_1}{2a_0} \sqrt{a_0} \, du_1 \, du_2$$

$$= \int_D \frac{-2h(g_{11}b_{22}^{(N)} - 2g_{12}b_{12}^{(N)} + g_{22}b_{11}^{(N)})\sqrt{\det(g_{ij})}}{2 \det(g_{ij})} \, du_1 \, du_2$$

$$= -2 \int_D h \langle H, N \rangle dM$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno em  $\mathbb{R}^3$  e  $dM$  é o elemento de área. Portanto,  $M$  é mínima se e só se  $A'(0) = 0$ , ou seja, superfícies mínimas são pontos críticos da função área.

**Proposição 2:** Se  $M$  é gráfico de uma função  $f$  então  $M$  é mínima se e só se

$$(1 + f_{u_1}^2) f_{u_2 u_2} - 2f_{u_1} f_{u_2} f_{u_1 u_2} + (1 + f_{u_2}^2) f_{u_1 u_1} = 0.$$

**Prova:** Seja  $\psi(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ . Então

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right\rangle = 1 + f_{u_1}^2$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right\rangle = 1 + f_{u_2}^2$$

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right\rangle = f_{u_1} f_{u_2}$$

$$N = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right|} = \frac{(-f_{u_1}, -f_{u_2}, 1)}{\sqrt{1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2}}$$

$$b_{11}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_1}, N \right\rangle = \frac{f_{u_1} u_1}{\sqrt{1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2}}$$

$$b_{22}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_2 \partial u_2}, N \right\rangle = \frac{f_{u_2} u_2}{\sqrt{1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2}}$$

$$b_{12}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2}, N \right\rangle = \frac{f_{u_1} u_2}{\sqrt{1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2}}$$

$$\det(g_{ij}) = \left| \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right|^2 = 1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2$$

Portanto,

$$\langle H, N \rangle = \frac{g_{11} b_{22}(N) - 2g_{12} b_{12}(N) + g_{22} b_{11}(N)}{2 \det(g_{ij})} =$$

$$= \frac{(1+f_{u_1}^2) \frac{f_{u_2} u_2}{\sqrt{1+f_{u_1}^2+f_{u_2}^2}} - (2f_{u_1} f_{u_2}) \frac{f_{u_1} u_2}{\sqrt{1+f_{u_1}^2+f_{u_2}^2}} + (1+f_{u_2}^2) \frac{f_{u_1} u_1}{\sqrt{1+f_{u_1}^2+f_{u_2}^2}}}{2(1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2)}$$

$$= \frac{(1 + f_{u_1}^2) f_{u_2} u_2 - 2f_{u_1} f_{u_2} f_{u_1} u_2 + (1 + f_{u_2}^2) f_{u_1} u_1}{2(1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2)^{3/2}}$$

o que conclui a nossa afirmação.

## §2. PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Uma equação diferencial parcial em  $n$  variáveis e de ordem  $m$  é uma relação da forma

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1^{k_1}} \dots x_n^{k_n}, \dots, u_{x_n^m}) = 0$$

onde  $u$  é uma função contínua de

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, u_{x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n}, u_{x_1^{k_1}} \dots x_n^{k_n} = \\ &= \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u}{(\partial x_1)^{k_1} \dots (\partial x_n)^{k_n}}, \dots, u_{x_n^m} = \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \end{aligned}$$

são as derivadas parciais de  $u$  de ordem  $m$ . A função  $F$  é sempre suposta contínua e está definida num subconjunto aberto conexo  $G$  de  $\mathbb{R}^n$ .

A função  $u(x_1, \dots, x_n)$  é chamada uma solução de (1).

Como exemplo, damos o Laplaciano da função  $u$ , definida em  $\mathbb{R}^n$  por  $\nabla_2^2 u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$  que é uma equação diferencial de ordem 2 e  $n$  variáveis.

Dizemos que a equação diferencial parcial (1) é linear se  $F$  é linear nas variáveis  $u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_n^m}$  com coeficientes dependendo somente das variáveis independentes

$x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Se  $F$  é linear nas derivadas de maior ordem com coeficientes dependendo de  $x_1, \dots, x_n$  e possivelmente de  $u$  e suas derivadas até a ordem  $n - 1$  então dizemos que (1) é uma equação diferencial parcial quase-linear.

Um exemplo clássico de equação diferencial parcial quase-linear é a equação da superfície mínima  $M \subset \mathbb{R}^3$  dada por  $(1 + q^2)r - 2 pqs + (1 + p^2)t = 0$ , onde  $p = u_{x_1}$ ,  $q = u_{x_2}$ ,  $r = u_{x_1}^2$ ,  $s = u_{x_1 x_2}$  e  $t = u_{x_2}^2$ .

Consideremos a equação diferencial parcial

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^m b_i(x) u_i(x) + c(x) u(x) = 0 \text{ onde}$$

$a_{ij}, b_i$  são de classe  $C^0$ ,  $u_{ij} = u_{x_i x_j}$  e  $u_i = u_{x_i}$ . Chamaremos  $L$  de operador.

Alguns tipos clássicos de operadores para a função  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  são os seguintes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad (\text{tipo elíptico})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad (\text{tipo hiperbólico})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{tipo parabólico})$$

Dêesses operadores clássicos, apenas nos interessa o do tipo elíptico.

Dizemos que o operador  $L[u]$  é elíptico no ponto  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se existe uma constante positiva  $m$  tal

que  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq m \sum_{i=1}^n \xi_i^2$  para todo  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ .

O nosso objetivo agora, será demonstrar o princípio do máximo para operadores elípticos, (Teorema 1, pág. 13). A prova desse princípio é baseada no seguinte:

**Lema:** Seja  $S$  uma esfera aberta contida em  $G$  e  $P_0$  um ponto em sua fronteira. Tomemos o operador elíptico

$$L_0[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_i(x)$$

com os seus

coeficiente limitados em  $S$ . Além disso, seja  $u$  continua em

$S \cup \{P_0\}$  satisfazendo  $L_0[u] \geq 0$  e  $u < u(P_0)$  em  $S$ . Então

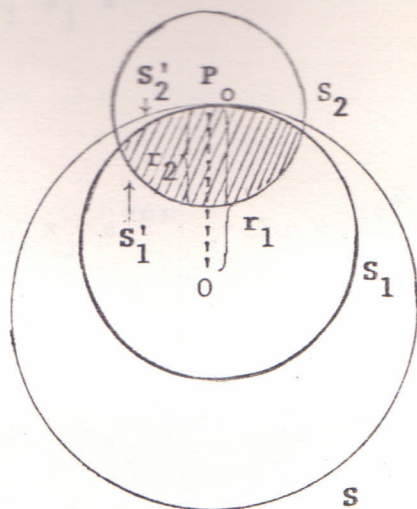
a derivada normal exterior  $\frac{\partial u}{\partial n}(P_0)$  é positiva.

**Prova:** Seja  $S_1$  uma esfera interna tangente a  $S$  em  $P_0$ , de

centro em  $O$  e raio  $r_1 < R$ , onde  $R$  é o raio de  $S$

e seja

$$r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad \text{Veja figura na próxima página.}$$



Note que  $u < u(P_0)$  em  $S_1$ . Considere uma esfera  $S_2$  fechada de centro  $P_0$  e raio  $r_2 = \frac{r_1}{2}$ . Seja  $S'$  a interseção de  $S_1$  e  $S_2$  com fronteiras  $S'_1$  e  $S'_2$  respectivamente.

Desde que  $u < u(P_0)$  sobre o conjunto fechado  $S'_1$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $u \leq u(P_0) - \delta$  sobre  $S'_1$ . Isto segue-se do fato que uma função contínua sobre um conjunto fechado e limitado assume seu máximo.

Vamos introduzir a função auxiliar  $h(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r_1^2}$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva. É evidente que

$$h > 0 \text{ em } S_1$$

$$h < 0 \text{ fora de } S_1$$

$$h = 0 \text{ sobre a fronteira de } S_1$$

$$\text{Mas, } \frac{\partial h}{\partial x_i} = -2\alpha x_i e^{-\alpha r^2} \quad e$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 4\alpha^2 x_i x_j e^{-\alpha r^2}, & i \neq j \\ 4\alpha^2 x_i x_j e^{-\alpha r^2} - 2\alpha e^{-\alpha r^2}, & i = j, \text{ logo} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_0 [h] &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial h}{\partial u_i} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} 4\alpha^2 x_i x_j e^{-\alpha r^2} - \sum_{i,j=1}^n 2\alpha a_{ii} e^{-\alpha r^2} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n 2\alpha b_i x_i e^{-\alpha r^2} = \\ &= e^{-\alpha r^2} \left[ 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - 2\alpha \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i x_i) \right]. \end{aligned}$$

Sendo  $L_0 [u]$  elíptico, isto é,

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j \geq m \sum_{i=1}^n x_i^2 > \frac{mr_1^2}{4} = mr_2^2, \quad \text{segue-se que}$$

$$L_0 [h] \geq \alpha e^{-\alpha r^2} \left[ m\alpha r_1^2 - 2 \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i x_i) \right].$$

Como  $a_{ij}$  e  $b_i$  são limitados e  $x = (x_1, \dots, x_n) \in S'$ , podemos controlar  $x_i$  e assim para  $\alpha$  suficientemente grande  $L_0 [h] > 0$  para  $x \in S'$ .

Considere a função  $v = u + \epsilon h$  onde  $0 < \epsilon < \frac{\delta}{1 - e^{-\alpha r_1^2}}$ .

Assim sendo  $v$  tem as seguintes propriedades:

**P.1**  $v < u(P_0)$  sobre  $S'_1$ . Para vermos isto, note primeiro que  $0 \leq h < 1 - e^{-\alpha r_1^2}$ , logo

$$\epsilon h < \delta \text{ e } v < u(P_0) - \delta + \delta = u(P_0).$$

**P.2**  $v < u(P_0)$  sobre  $S'_2 - \{P_0\}$

**P.3**  $v(P_0) \equiv u(P_0)$ , pois  $h = 0$  em  $P_0$ .

Pelas propriedades **P.1**, **P.2** e **P.3**  $v$  tem um máximo sobre a fronteira de  $S'$  e este ocorre em  $P_0$ . Disto segue-se então que em  $P_0$ ,

$$0 \leq \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + \epsilon \frac{\partial h}{\partial n}$$

Sendo  $\frac{\partial h}{\partial n} < 0$  temos que  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} - \epsilon \frac{\partial h}{\partial n} > 0$  o que conclui a demonstração.

### **TEOREMA 1:** (Princípio do Máximo)

Se a função  $u$  satisfaz  $L_0[u] \geq 0$  e tem um máximo em um ponto interior de  $G \subset \mathbb{R}^n$  então  $u = \text{const.}$

**Prova:** Seja  $u$  satisfazendo  $L_0[u] \geq 0$  em  $G$ . Se  $u \neq \text{const.}$

e tem um máximo em um ponto interior de  $G$ , então pode

mos achar uma esfera fechada em  $G$  tal que  $u$  tem um ponto máximo em sua fronteira mas nenhum máximo em seu interior. Assim, pelo **Lema**, neste ponto,  $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$  o que contradiz o fato de que as primeiras derivadas de  $u$  se anulam em um ponto de máximo interior, c.q.d.

Pretendemos agora estender o princípio do máximo para equações diferenciais parciais quase-lineares. Mais precisamen provaremos o seguinte

**TEOREMA 2:** Seja

$$(2) \quad L[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i u_i + cu \quad (c \leq 0) \quad \text{uma equação}$$

diferencial parcial quase-linear onde os coeficientes  $a_{ij}, b_i, c$  são função de  $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_{nn}$ , isto é, independem de  $u$ . Seja  $u, v$  soluções de  $L[u] = 0$  com  $u \equiv v$  na fronteira de  $G$ . Então  $u = v$  em  $G$ .

**Prova:** Vamos usar a seguinte notação:

$$a_{ij}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) = a_{ij}[u]$$

Sendo  $u$  e  $v$  solução de  $L[u] = 0$  segue-se que

$$(3) \quad L[u] - L[v] = \sum_{ij=1}^n a_{ij}[u] u_{ij} - \sum_{ij=1}^n a_{ij}[v] v_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i [u] w_i - \sum_{i=1}^n b_i [v] v_i + c [u] u - c [v] v = 0$$

Seja  $w = u - v$  e  $w$  restrito à fronteira de  $G$  é identicamente nula. A identidade (3) pode ser escrita na forma

$$(4) \quad \sum_{ij=1}^n a_{ij} [u] w_{ij} + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} [u] - a_{ij} [v]) v_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i w_i + \\ + \sum_{i=1}^n (b_i [u] - b_i [v]) v_i + c [u] w + c [u] - c [v] v = 0.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para a segunda soma e de maneira análoga as somas seguintes obtemos:

$$a_{ij} [u] - a_{ij} [v] = a_{ij} [v+w] - a_{ij} [v] = \\ = a_{ij} (x_1, \dots, x_n, v_1+w_1, \dots, v_n+w_n) - a_{ij} (x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = \\ = \frac{\partial a_{ij}}{\partial v_1} (t(v_1+w_1) + (1-t)v_1)w_1 + \dots + \frac{\partial a_{ij}}{\partial v_n} (t(v_n+w_n) + \\ + (1-t)v_n)w_n, \quad \text{isto é}$$

$$a_{ij} [u] - a_{ij} [v] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial v_k} (t(v_k+w_k) + (1-t)v_k)w_k = a_{ij}.$$

Assim (4) tem a forma

$$(5) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} [u] w_{ij} + \sum_{i=1}^n a_i w_i = 0, \quad \text{onde os } a_i = a_i [u,v]$$

são funções de  $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ .

Como (5) é elíptico o Princípio do Máximo diz que  $w \leq 0$  em  $G$ . Substituindo  $w$  por  $-w$  temos que  $L[-w] = 0$ , pois  $L$  é linear em  $w$ , logo  $-w \leq 0$  e assim concluímos que  $w = 0$ . Portanto  $u = v$  em  $G$  o que conclui a demonstração.

**Corolário:** Seja  $u$  solução da equação da superfície mínima  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Se  $u$  tem um máximo no interior então  $u = \text{const.}$

**Prova:** Considere a equação

$$L[w] = (1 + u_y^2) w_{xx} - 2u_x u_y w_{xy} + (1 + u_x^2) w_{yy}$$

**Afirmação:**  $L[w]$  é elíptico

**Com efeito:** Basta mostrar que a matriz  $(a_{ij})$  associada a  $L[w]$  é definida positiva.

Mas,

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1 + u_x^2 \end{pmatrix} \quad \text{logo, } \det(1 + u_y^2) > 0 \quad \text{e}$$

$$\det(a_{ij}) = (1 + u_y^2)(1 + u_x^2) - u_x^2 u_y^2 = 1 + u_x^2 + u_y^2 > 0.$$

Isto prova a afirmação

Note que  $w = u$  é solução de  $L[u] = 0$  e se  $u$  tem um máximo no interior, pelo Teorema 2,  $u = \text{const.}$  c.q.d.

TEOREMA 3: Sejam  $u$  e  $v$  soluções de (2), tais que

$u(P_0) = v(P_0)$ ,  $P_0 \in G$  e  $u \geq v$  em uma vizinhança de  $P_0$ . Então  $u = v$  numa vizinhança de  $P_0$ .

**Prova:** A demonstração é análoga a prova do Teorema 2. Seja

$w = u - v$ , logo  $w(P_0) = 0$ ,  $P_0 \in G$  e  $w \geq 0$  numa vi-

zinhanaça de  $P_0 \in G$ . Portanto,  $w$  é solução de (5) e pelo

Princípio do Máximo  $w = \text{const.}$  Como  $w(P_0) = 0$  segue-se que

$w = 0$  numa vizinhança de  $P_0$ . Isto prova o Teorema.

As seguintes afirmações a respeito de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  são imediatas.

**Proposição A:** Se duas superfícies mínimas  $M$  e  $M'$  se tangenciam em um ponto e se o  $\text{int}(M \cap M')$  é vazio em uma delas, então elas se interceptam ao longo de curvas, ou seja,  $M \cap M'$  não contém pontos isolados.

**Prova:** Suponha que  $M$  e  $M'$  se interceptam, que  $\text{int}(M \cap M') = \emptyset$  e que  $M \cap M'$  possui pontos isolados. Seja  $P_0 \in M \cap M'$  um ponto isolado

Considere um aberto  $U$  de  $T_{P_0}(M) = T_{P_0}(M')$  e as funções  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  tais que os gráficos de  $u$  e  $v$  são respectivamente, vizinhança de  $(x_0, u(x_0)) = P_0 = (x_0, v(x_0))$  em  $M$  e em  $M'$ .

Portanto,  $u$  e  $v$  satisfazem a equação da superfície mínima. Temos  $u(x_0) = v(x_0)$  e  $u \geq v$  numa vizinhança de  $x_0$ . Pelo Teorema 3,  $u = v$  numa vizinhança de  $P_0$ , que é uma contradição, pois  $P_0$  é isolado.

**Proposição B:** Se  $\pi$  é um plano tangente a uma superfície mínima  $M$  então existem pontos de  $M$  em ambos os lados de  $\pi$ .

**Prova:** Suponha que os pontos de  $M$  em uma vizinhança de  $P_0 \in M$  estão de um mesmo lado do plano  $\pi$  tangente a  $M$  em  $P_0$ . Escrevamos esta vizinhança de  $P_0$  como um gráfico de uma função  $u$  definida em um aberto de  $\pi$ . Se  $P_0 = (x_0, u(x_0))$  então  $u$  atinge um máximo ou um mínimo em  $x_0$ . Como  $u$  satisfaz a equação da superfície mínima, o Corolário do Teorema 2 diz que  $u = \text{const.}$  que é uma contradição, pois  $M$  não é um plano.

**Proposição C:** Se  $M$  e  $M'$  são superfícies mínimas que são gráficos sobre uma mesma região  $\Omega$  e  $\partial M = \partial M'$  então  $M = M'$ .

**Prova:** Sejam  $u$  e  $v$  soluções da equação da superfície mínima tais que  $M$  é o gráfico de  $u$  e  $M'$  é o gráfico de  $v$ . Como  $u = v$  na fronteira, pelo Teorema 2, segue-se o resultado.

### §3. TEOREMA DE EXISTÊNCIA DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL QUASE-LINEAR

Provaremos o Teorema de Existência de Soluções para Equações Diferenciais Parciais Quase-Lineares utilizando as estimativas a priori de J. Schauder para soluções de equações elípticas lineares da forma.

$$(1) \quad a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = 0 \quad \text{com}$$

$$u \Big|_{\partial G} = \phi.$$

Estas estimativas servem para solucionar diretamente o problema de valores fronteira para (1) no domínio limitado  $G$  com fronteira  $\Gamma$ , sem construir no entanto uma solução fundamental da mesma.

Essas estimativas são válidas para (1) desde que os coeficientes sejam Hölder contínuas e limitadas, isto é, existam constantes positivas  $m$ ,  $C$ ,  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) tais que, em  $G$  temos:

$$(a) \quad a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \geq m(\xi^2 + \eta^2)$$

$$(b) \quad |a|, |b|, |c| \leq C$$

(c) os coeficientes  $a, b, c$  satisfazem a condição de Hölder com expoente  $\alpha$  e constante  $C$ .

Descreveremos mais tarde estas estimativas sem uma prova, mas para o leitor curioso basta verificar [3].

Entendemos por  $C_m$  ( $m$  inteiro não-negativo) a classe das funções  $u(x_1, \dots, x_n)$  tendo derivadas parciais de ordem  $m$  contínuas em  $G \cup \Gamma$  e  $C_{m+\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) a classe das funções  $u$  em  $C_m$  onde as derivadas parciais de ordem  $m$  satisfazem a condição de Hölder em  $G \cup \Gamma$  com expoente  $\alpha$  e constante  $C$ . Chamaremos  $C_0$  a classe das funções contínuas em  $G \cup \Gamma$ .

Denotamos por  $D_u^m$  a derivada de ordem  $m$  de  $u$  e vamos introduzir uma norma em  $C_m$  por

$$\|u\|_m = \sum_{i=0}^n \max_{P \in G} |D^i u(P)|.$$

$$\text{Seja } H_\alpha \left[ D_u^m \right] = \sup_{\substack{P, P_0 \in G \\ P \neq P_0}} \frac{|D_u^m(P) - D_u^m(P_0)|}{|P - P_0|^\alpha}$$

e assim define-se  $\|u\|_{m+\alpha} = \|u\|_m + H_\alpha \left[ D_u^m \right]$  como sendo a norma em  $C_{m+\alpha}$ .

A classe  $C_a$  fica agora definida para todo número  $a \geq 0$  e  $\|u\|_a$  satisfaz:

$$\|u\|_a \geq 0 \quad \text{e} \quad \|u\|_a = 0 \iff u = 0$$

$$\|\beta u\|_a = |\beta| \|u\|_a, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$$\|u+v\|_a \leq \|u\|_a + \|v\|_a$$

Assim,  $C_a$  é um espaço vetorial normado. Na realidade,  $C_a$  com a norma  $\|u\|_a$  é um espaço de Banach. Para verificação dessa afirmação, veja [3].

Cabe aqui uma observação com respeito à convergência na norma  $\| \cdot \|_m$ . É que a convergência nesta norma é equivalente à convergência uniforme da função  $u$  e suas derivadas de ordem  $m$  em  $G \cup \Gamma$ .

Agora passaremos a descrever as estimativas de J. Schauder. Para tanto, queremos que o domínio  $G$  e os valores fronteira  $\phi$  de  $u$  sejam suaves. Dizemos que  $G$  é suave se sua fronteira  $\partial G$  é, ou seja, podemos cobrir  $\Gamma$  com um número finito de esferas com a propriedade: a interseção de uma destas esferas com  $\partial G$  é um gráfico de uma função de classe  $C_{2+\alpha}$ .

Portanto, existem esferas  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , tais que  $\partial G \subset \bigcup_{i=1}^k S_i$  e  $\partial G \cap S_i$  é um gráfico de  $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ .

Seja  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = \phi(x_1, \dots, x_{n-1}, g_i(x_1, \dots, x_{n-1})) \quad e$$

assim  $\|\phi\|_{2+\alpha} = \max \|\phi_i\|_{2+\alpha}$ . Agora, temos:

**TEOREMA 1:** Se  $u$  é solução em  $C_{2+\alpha}$  de (1) num domínio  $G$  suave com valores fronteira também suaves então

$\|u\|_{2+\alpha} \leq K_1 (\|u\|_0 + \|g\|_{2+\alpha})$  onde  $K_1$  é uma constante dependendo somente de  $m, \alpha, C$  e do domínio  $G$ .

Esta estimativa é conhecida como "estimativa sobre a fronteira".

Acrescentemos agora ao domínio  $G$  a seguinte propriedade:

- (d) existe um número positivo  $r$  tal que para todo ponto  $Q$  na fronteira  $\Gamma$ , o círculo de raio  $r$  está contido em  $G \cup \Gamma$  e intercepta  $\Gamma$  somente no ponto  $Q$ .

**TEOREMA 2:** Seja  $G$  um domínio suave com a propriedade (d), e seja  $u$  de classe  $C^1$  solução de (1)  $G \cup \Gamma$ . Suponha que existe uma função  $f$  de classe  $C^2$  em  $G \cup \Gamma$  e igual a  $u$  em  $\Gamma$  e que as derivadas de primeira e segunda ordem de  $f$  sejam limitadas por uma constante  $K$ . Então, existe  $k$  que depende somente de  $m, C$  (definidas em (a), (b) e (c)) e do domínio  $G$  tal que

$$(2) \quad |u_x|, |u_y|, \leq k K.$$

Descritas as estimativas de J. Schauder, usaremos dois resultados especiais cuja demonstração é feita em [3].

**Teorema A:** (Ponto Fixo de Schauder)

Seja  $\chi$  um conjunto compacto e convexo de um espaço de Banach. Se  $T: \chi \rightarrow \chi$  é uma aplicação contínua então T possui um ponto fixo.

**Teorema B:** Existe uma única solução  $u$  da equação (1) em  $C_{2+\alpha}$  com valores fronteira  $g$ .

Nosso objetivo será aplicar as estimativas de Schauder e os Teoremas A, B para obter uma solução da equação diferencial parcial quase-linear

$$(3) \quad A(x,y,z)z_{xx} + 2B(x,y,z)z_{xy} + C(x,y,z)z_{yy} = 0$$

Observe que, se consideramos a solução  $z$  de (3) como uma solução de (1) com

$$a(x,y) = A(x,y,z(x,y)), \text{ etc, a estimativa (2) produz}$$

$$(4) \quad |z_x|, |z_y| \leq k \bar{K}.$$

Observemos ainda que, se uma função  $z$  tem as primeiras derivadas contínuas em  $G \cup \Gamma$  limitadas por  $k \bar{K}$  e  $G$  satisfaz (d), então pela estimativa (2) elas satisfazem a condição de Lipchitz  $|z(P) - z(Q)| < \kappa k \bar{K} |P - Q|$  para todos  $P, Q \in G \cup \Gamma$ . Para vermos isto, seja  $\gamma$  uma curva com comprimento finito ligando  $P$  e  $Q$ . Temos que

$$|z(P) - z(Q)| \leq \int_0^1 |z'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt <$$

$$\leq k \bar{K} \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = k \bar{K} l(\gamma). \quad \text{Variando } \gamma \text{ obtemos}$$

$$d_G(P, Q) = \inf_{\gamma} l > \frac{|z(P) - z(Q)|}{k \bar{K}}. \quad \text{Como } \Gamma \text{ é de classe}$$

$C^1$  existe  $c_0 > 0$  tal que  $d_G(P, Q) \leq c_0 |P - Q|$  e assim temos que  $|z(P) - z(Q)| \leq \kappa k \bar{K} |P - Q|$ , o que prova a nossa afirmação.

Agora provaremos o teorema da existência.

**TEOREMA:** Suponha que a equação (3) seja elíptica, seus coeficientes limitados por uma constante  $C$  e além disso satisfaçam a condição de Hölder com expoente  $\alpha$  e constante  $C$  em  $G$ . Então existe uma solução  $z$  da equação (3) que é igual a  $\phi$  em  $\Gamma$  e  $z \in C_{2+\alpha}$ .

**Prova:** Considere o espaço de Banach  $C_0$  das funções contínuas  $z$  em  $G \cup \Gamma$  com norma  $\|z\|_0$ . Seja  $\chi$  o conjunto das funções  $z$  em  $C_0$  que satisfazem:

$$(5) \quad \begin{cases} \text{i)} & \|z\|_0 \leq \max |\phi| \\ \text{ii)} & |z(P) - z(Q)| < \kappa k \bar{K} |P - Q| \quad \text{para todo } P, Q \in G \cup \Gamma. \end{cases}$$

Então  $\chi$  é um conjunto convexo e compacto. Para ver

mos isto, dados  $z_0, z_1 \in \chi, 0 \leq t \leq 1$  segue-se que

$$\begin{aligned} \|tz_0 + (1-t)z_1\|_0 &\leq t\|z_0\|_0 + (1-t)\|z_1\|_0 \\ &\leq t \max |\phi| + (1-t) \max |\phi| = \\ &= \max |\phi| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| [tz_0(P) + (1-t)z_1(P)] - [tz_0(Q) + (1-t)z_1(Q)] \right| &= |t[z_0(P) - \\ - z_0(Q)] + (1-t)[z_1(P) - z_1(Q)]| &\leq t|z_0(P) - z_0(Q)| + \\ + (1-t)|z_1(P) - z_1(Q)| &\leq \kappa k \bar{K} |P - Q|. \end{aligned}$$

Portanto  $\chi$  é con

vexo. Pelo Teorema de Arzelá,  $\chi$  é compacto na topologia da convergência uniforme, o que prova a nossa afirmação.

Para cada  $z \in \chi$  consideremos a equação linear elíptica.

$$(6) \quad A(x,y,z(x,y))u_{xx} + 2B(x,y,z(x,y))u_{xy} + C(x,y,z(x,y))u_{yy} = 0.$$

Pelo Teorema B existe uma única solução  $u \in C_{2+\alpha}$  com valores fronteira  $\phi$ . Pelo Princípio do Máximo  $u$  satisfaz  $|u| \leq \max |\phi|$ .

Portanto, pela estimativa de J. Schauder  $u$  satisfaz (4), (5) e temos que  $u \in \chi$ . Logo, a transformação  $u = T[z]$  está bem definida como uma transformação de  $\chi$  nele mesmo. Assim, se mostrarmos que  $T$  é contínua, pelo Teorema A,  $T$  tem um ponto fixo  $z \in \chi$ .

Mostraremos agora a continuidade de  $T$ .

Sejam  $\{z^n\}$  uma seqüência de funções em  $\chi$  convergindo uniformemente para uma função  $z \in \chi$  e  $u^n = T[z^n]$ . Pelas estimativas de J. Schauder segue-se que as normas  $\|u^n\|_{2+\alpha}$  são uniformemente limitadas. Portanto, existe uma subsequência  $u^{n_j}$  de  $u^n$  que converge em  $C_2$  para uma função  $u \in C_2$ .

Fazendo  $j \rightarrow \infty$  na igualdade

$$A(x,y,z_{n_j}(x,y))u_{xx}^{n_j} + 2B(x,y,z_{n_j}(x,y))u_{xy}^{n_j} + C(x,y,z_{n_j}(x,y))u_{yy}^{n_j} = 0.$$

encontramos que  $u$  é solução de  $A(x,y,z)u_{xx} + 2B(x,y,z)u_{xy} +$

$$+ C(x,y,z)u_{yy} = 0 \quad \text{com} \quad u|_{\Gamma} = \phi. \quad \text{Pelo}$$

Teorema B, temos  $u = T[z]$ .

Se  $u^n$  não converge para  $u$  então existe uma subsequência  $u^{n_j}$  de  $u^n$  e  $\epsilon > 0$  tal que  $\|u^{n_j} - u\|_{C_2} > \epsilon$ . Aplicando o raciocínio anterior à subsequência  $u^{n_{j_k}}$  de  $u^{n_j}$  que converge juntamente com as suas derivadas de primeira e segunda ordem para  $T[z] = u$ , o que é uma contradição, pois  $\|u^{n_{j_k}} - u\|_{C_2} > \epsilon$ . Portanto,  $T: \chi \rightarrow \chi$  é contínua, o que prova nossa afirmação.

Pelo Teorema A, existe  $z \in \chi$  tal que  $z = T[z]$ .

Como  $T[z] \in C_{2+\alpha}$  segue-se que  $z \in C_{2+\alpha}$  o que estabelece a prova do Teorema.

O teorema que acabamos de demonstrar estende-se a equação da superfície mínima que é uma equação diferencial parcial quase-linear. A mesma técnica que usamos para provar o Teorema deste parágrafo serve para esta extensão, se impusermos as seguintes condições: os valores fronteira  $\phi$  tem declividade limitada, isto é, para cada  $p \in \Gamma$  existem dois planos  $z_1 = \pi_p^+(x)$  e  $z_2 = \pi_p^-(x)$  passando por  $p$  tais que

$$(e) \quad \pi_p^-(x) \leq \phi(x) \leq \pi_p^+(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

(f) as declividades desses planos são uniformemente limitadas, independente de  $p$ , ou seja,

$$\| |D\pi_p^\pm| \| \leq C, \quad \forall p \in \Gamma.$$

Mais precisamente temos o Teorema C (veja demonstração em [8]).

**Teorema C:** Seja  $\Omega$  um domínio limitado do  $\mathbb{R}^2$  e suponha que a equação

$$(4) \quad A(x, y, z, z_x, z_y) z_{yy} + 2B(x, y, z, z_x, z_y) z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y) z_{xx} = 0$$

seja elíptica em  $\Omega$ , seus coeficientes limitados por uma constante  $C$  e além disso satisfaçam a condição de Hölder com expoente  $\alpha$  e constante  $C$ . Seja  $\phi$  uma função definida sobre  $\partial\Omega$  satisfazendo a condição de declividade limitada (e), (f) com constante  $C$ .

Então existe uma solução  $z$  da equação (4) que é

igual a  $\phi$  sobre  $\partial\Omega$  e  $u \in C_{loc}^2(\Omega)$ .

Observemos que o problema de Dirichlet para a equação da superfície mínima tem solução em condições mais gerais, a saber:

**Teorema D ([8]):** A equação diferencial parcial quase linear

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_{xy}z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 0$$

tem solução com  $z|_{\partial\Omega} = \phi$ , para toda  $\phi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  contínua se e somente se  $\Omega$  é um domínio convexo do plano.

#### §4. O TEOREMA DE T. RADÓ

O Teorema a seguir foi provado por Radó [19] no caso em que a superfície está restrita à classe topológica do disco.

Daremos uma demonstração do mesmo Teorema de uma maneira bem mais geral, ou seja, no caso de uma superfície conexa e compacta arbitrária.

**TEOREMA:** Seja  $\Gamma$  uma curva de Jordan em  $\mathbb{R}^3$  com projeção ortogonal injetiva sobre uma curva plana convexa. Então, existe uma única superfície mínima compacta  $M$  com  $\partial M = \Gamma$ . Esta superfície  $M$  é um gráfico sobre um aberto convexo do plano. Em particular,  $\Gamma$  possui uma única solução do problema de Plateau do tipo do disco.

**Prova:** Seja  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação projeção ortogonal. Desde que  $\pi(\Gamma) = \gamma$  é uma curva plana,  $\gamma$  é a fronteira de um domínio convexo  $\Omega$  no  $\mathbb{R}^2$ . Assim,  $\Gamma$  é um gráfico sobre  $\partial\Omega$ .

Geomêtricamente,  $\Gamma \subset \pi^{-1}(\gamma)$ , ou seja,  $\Gamma$  está contido num cilindro o qual é obtido deslizando uma reta ortogonal ao plano  $(x,y)$  ao longo da curva  $\gamma$ .

Sendo  $\Gamma$  gráfico sobre  $\partial\Omega$ , existe  $\phi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que o gráfico de  $\phi$  é  $\Gamma$ . Então, formulamos o seguinte problema de Dirichlet: "encontrar uma solução  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

da equação

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_{xy}u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

com  $u|_{\partial\Omega} = \phi$ . Mas, isto segue-se facilmente pelo Teorema de

Existência do parágrafo 3.

Portanto, existe um gráfico sobre  $\Omega$  que é uma superfície mínima compacta  $M$  cuja fronteira é  $\Gamma$ .

Para mostrar a unicidade, seja  $M'$  uma superfície mínima compacta com fronteira  $\Gamma$ .

Considere o cilindro

$$C = \{(x, y, z); z \in \mathbb{R} \text{ e } (x, y) \in \Omega\}. \quad \text{Temos que}$$

$\partial M = \partial M' = \Gamma \subset C$ . Como  $C$  é convexo e  $M'$  está contido no fecho convexo de  $\Gamma$ , que está contido em  $C$ , segue-se que  $M' \subset C$ .

Seja  $M_t = (0, 0, t) + M = \{(x_1, x_2, x_3 + t); (x_1, x_2, x_3) \in M\}$  ou seja,  $M_t$  é o deslocamento da superfície  $M$  ao longo do eixo- $z$  do cilindro. Portanto, a fronteira de  $M_t$  está acima ou abaixo da fronteira de  $M'$  conforme seja  $t > 0$  ou  $t < 0$  e se  $t = 0$ ,  $\partial M_0 = \partial M = \partial M'$ .

Suponha que  $M_t \cap M' \neq \emptyset$  para algum  $t > 0$ . Seja  $t_0 = \sup \{t; M_t \cap M' \neq \emptyset\}$ . Pela compacidade de  $M'$  segue-se que  $t_0$  existe e é positivo.

Então,  $M_{t_0}$  está acima de  $M'$  e  $M_{t_0} \cap M' \neq \emptyset$ , isto é, existe  $P_0 \in M_{t_0} \cap M'$ .

Com efeito, considere  $\{t_n\}$  tal que  $t_n$  converge a  $t_0$  e  $M_{t_n} \cap M' \neq \emptyset$ . Seja  $\{x_n\}$  uma sequência em  $M'$  onde  $x_n \in M_{t_n} \cap M'$ . Sendo  $M'$  compacta existe uma subsequência  $\{x'_n\}$  de  $\{x_n\}$  tal que  $x'_n$  converge para  $x \in M'$ . Como  $x'_n$  está também em  $M_{t'_n}$ , então  $x'_n = (0, 0, t'_n) + x''_n$ ,  $x''_n \in M'$ . Como  $x'_n$  e  $t'_n$  são convergentes, segue-se que  $x''_n$  também converge a um ponto  $x' \in M'$ . Tomando  $P_0 = x = (0, 0, t_0) + x'$ , segue-se a nova afirmação.

Considere um aberto  $U$  de  $T_{P_0} M_{t_0} = T_{P_0} M'$  e as funções  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  tais que os gráficos de  $u$  e  $v$  são respectivamente vizinhanças de  $(x_0, u(x_0)) = P_0 = (x_0, v(x_0))$  em  $M_{t_0}$  e em  $M'$ . Temos  $u(x_0) = v(x_0)$  e  $u \geq v$  numa vizinhança de  $x_0$ . Pelo Teorema 3 do parágrafo 2,  $u = v$  numa vizinhança de  $P_0$ , logo  $M_{t_0} \cap M'$  é fechado em  $M_{t_0}$  e em  $M'$ . Sendo  $M_{t_0}$  e  $M'$  compactas segue-se que  $M_{t_0} \cap M'$  é fechado em  $M_{t_0}$  e em  $M'$ . Como  $M_{t_0}$  e  $M'$  são conexas temos  $M_{t_0} \cap M' = M_{t_0} \cap M' = M'$ , o que

É uma contradição, pois  $\partial M = \partial M'$  e  $\partial M \neq \partial M_t$ .

Portanto  $M_t \cap M' = \emptyset$  para  $t > 0$  e analogamente  $M_t \cap M' = \emptyset$  para  $t < 0$ . Logo,  $M_0 = M = M'$  pela Proposição C *fl*  
e isto prova o Teorema.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] ALMGREN, F.J. - *Plateau's Problem; An invitation to vari-  
fold geometry*, W. A. Benjamin, New York, 1966.
- [ 2 ] COURANT, R. - *Dirichlet's Principal Conformal Mappings  
and Minimal Surfaces*, New York, Interscience, 1960.
- [ 3 ] COURANT, R. and HILBERT, D. - *Methods of Mathematical  
Physics*, Vol. II, New York, Interscience, 1962.
- [ 4 ] COURANT, R. - Plateau's problem and Dirichlet's Principle,  
*Ann. of Math*, 1937, 38: 679-725.
- [ 5 ] CARTAN, H. - *Thorie élémentaire des fonctions analytiques  
d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961.
- [ 6 ] DOUGLAS, J. - Solutions on the problem of Plateau, *Tran.  
Amer. Math. Soc.* 1931, 33: 263-321.
- [ 7 ] GIGLIOLI, A. - *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*,  
109 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1975.

- [ 8 ] GILBARG, D. and TRUDINGER, N.S. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, New York, Springer-Verlag, 1977.
- [ 9 ] GULLIVER, R. and SPRUCK, J. - On Embedded Minimal Surfaces, *Ann. Math.* 103 (1976) 331-347.
- [10] JORGE, L.P.M. - *Estabilidade  $C^2$  das Curvas com Solução não Degenerada do Problema de Plateau*, Tese, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.
- [11] LAWSON, H.B. - *Lectures on minimal submanifolds*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 1973.
- [12] MEEKS III, W.H. - *Lectures on Plateau Problem*, Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal do Ceará, 1978.
- [13] MEEKS III, W.H. - Uniqueness Theorems for Minimal Surfaces, preprint
- [14] NITSCHÉ, J.C.C. - A new uniqueness theorem for minimal surfaces, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1973, 52: 319-329.
- [15] NITSCHÉ; J.C.C. - Non Uniqueness for Plateau's Problem,

Ann. Acadm. Scientiarum Fennicae, Series I, Mathemati  
ca, 1976, 2: 361-373.

[16] OSSERMAN, R. - *A survey of minimal surfaces* New York,  
Nostrand - Reinhold, 1969.

[17] PROTER, M. - *Hans Weinberger, Maximum Principles in  
Differential Equations*, Prentice, Hall, 1967.

[18] RADÓ, T. - On Plateau's Problem, *Ann Math*, 1930, 31: 457-  
469.

[19] RADÓ, T. - *On the Problem of Plateau*, *Ergebn. d. Math. u.  
ihrer Grenzgebiete*, Springer-Verlag (1933) reeditado  
(1971).

[20] TROMBA, A. - *On the Number of Minimal Surface Spanning a  
wire*. *Mem. Amer. Soc.* 198 (1977).