ALGUMAS APLICAÇÕES DA PARAMETRIZAÇÃO DE GAUSS

Ivan Araujo Cordeiro de Albuquerque

Monografia submetida à coordenação do curso de Mestrado em Matemática, como requesito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Universidade Federal do Ceará.

Fortaleza, 15 de Julho de 1988

Aos meus pais

Inácio e Norma

A

Maria do Carmo e Danilo

AGRADECIMENTOS

A Universidade Federal de Alagoas, ao PICD, pelo suporte financeiro.

Ao professor José de Anchieta Delgado, meu orientador, sem ajuda do qual este trabalho não seria possível.

Aos colegas do Departamento de Matemática Básica da UFAL, pelo apoio, incentivo e compreensão a mim dispensada.

A todo o corpo Docente, Discente e Administrativo da Pós-Graduação em Matemática da UFC, que direta ou indiretamente contribuiram para realização deste trabalho.

SUMÁRIO

0 - INTRODUÇÃO

No estudo das hipersuperfícies em variedades Riemannianas o conceito de rigidez desempenha importante papel, a saber, o de classificar as hipersuperfícies a menos de movimentos rígidos do espaço ambiente.

Um resultado fundamental nesta direção é o teorema de Beez-Thomas[5,pag 11]: **Uma hipersuperfície, cujo posto da segunda forma fundamental, em cada ponto, for pelo menos três, é rígida.** A questão natural que surge, pode ser posta como segue: dada uma imersão isométrica $f: M^n \to \bar{M}_c^{n+1}$, onde $\bar{M}_c^{n+1}$ tem curvatura constante, em que condições uma outra imersão isométrica $g: M^n \to \bar{M}_c^{n+p}$, $p \geq 1$, difere de f por um movimentos rígido $T: \bar{M}_c^{n+p} \to \bar{M}_c^{n+p}$. Quando a resposta a esta questão for afirmativa, dizemos que f é **fortemente rígida**.

Em [1] encontra-se o seguinte resultado: **uma hipersuperfície mínima de dimensão maior ou igual a três, que tem posto da segunda forma fundamental maior ou igual a três em um dos seus pontos, é fortemente rígida.**

Neste trabalho estudamos um artigo de M. Dajczer e D. Gromoll [4], sobre a classificação de hipersuperfícies com nulidade relativa constante e problemas de rigidez, onde o resultado de [1] é estendido. O objeto em estudo são as hipersuperfícies com nulidade relativa constante em espaços de curvatura constante. Para as hipersuperfícies com esta propriedade podemos definir a "inversa" da aplicação normal de Gauss no fibrado normal de sua imagem, a qual chamaremos Parametrização de Gauss.

Como aplicação da parametrização de Gauss, obtem-se um teorema que classifica as hipersuperfícies com nulidade relativa constante em espaços de curvatura constante maior ou igual a zero e aborda-se alguns aspectos da rigidez, onde o principal resultado é: **Seja M^n, $n\geq 4$, uma varideade Riemanniana, completa, a qual não possui fatores Euclideanos do tipo $\mathbb{R}^{n-2}$ ou $\mathbb{R}^{n-3}$. Então, qualquer imersão isométrica mínima $f:M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é fortemente rígida.**

Além deste resultado estudamos as hipersuperfícies, M^n, com nulidade relativa constnte $n-2$. Neste caso, podemos definir em M^n uma forma bilinear simétrica $A_\theta = R_{\theta/2}\, A\, R_{-\theta/2}$, onde A é a segunda forma fundamental de M^n e θ é uma constante. Mostramos que A_θ satisfaz as equações de Gauss e Codazzi e pelo teorema fundamental das subvariedades existe uma imersão isométrica f_θ: $M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Ademais, qualquer imersão isométrica mínima $g:M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, com nulidade relativa $n-2$, é localmente isométrica a f_θ. Este resultado é uma generalização da bem conhecida deformação do catenoide no helicóide em $\mathbb{R}^3$.

Aplicamos, ainda, a parametrização de Gauss para concluir que toda hipersuperfície completa de dimensão maior ou igual a quatro e nulidade relativa constante n-2, cuja curvatura média não muda de sinal, se decompõe como um produto $L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ ou $L^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$.

O nosso trabalho se divide em três partes. Na primeira fixamos as notações e descrevemos alguns conceitos básicos necessários ao entendimento geral do trabalho. Na segunda parte, encontra-se a construção da parametrização de Gauss e mostramos que uma hipersuperfície possui parametrização de Gauss se, só se, tem nulidade relativa constante. Na terceira e última estudamos os teoremas de rigidez e entre estes encontram-se o resultado principal acima mencionado.

1 - PRELIMINARES

1.1 - Notação e Conceitos Básicos

Consideremos apenas variedades Riemannianas, as quais denotaremos por M^n, onde n indica sua dimensão. O espaço tangente a M^n no ponto $p \in M^n$ será denotado por T_pM. Usaremos a notação $\mathfrak{X}(M)$ para indicar o conjunto dos campos diferenciáveis em M^n. Se M^n e $\bar{M}^m$ são variedades diferenciáveis e $f: M^n \to \bar{M}^m$ é uma aplicação diferenciável, denotaremos sua diferencial por df. O símbolo ∇ representará a conexão Riemanniana de M^n cuja existência e unicidade se deve ao teorema de Levi-Civita[8,pag 47]. Associado a esta conexão existe um tensor R, chamado tensor de curvatura de M^n, definido por

$$(1.1.1) \qquad R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

onde X, Y e $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Sejam $p \in M^n$, $n \geq 2$, e σ_p um subespaço 2-dimensional de T_pM. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $\{X,Y\}_p$ é uma base para σ_p, o número

$$(1.1.2) \qquad k(\sigma_p) = k(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2},$$

chama-se curvatura seccional de M^n relativa ao subespaço σ_p. Usaremos a notação $\tilde{M}^n_C$, quando a variedade M^n tiver curvatura seccional constante C. Neste caso o tensor curvatura é dado por

$$(1.1.3) \qquad R(X,Y)Z = C\,(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

Se, $e_1,e_2,\ldots,e_n$ são campos diferenciáveis em M^n e em $p\varepsilon M^n$ formam uma base ortonormal de T_pM, definimos o tensor de Ricci em e_i por

$$(1.1.4) \qquad Ric(e_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \langle R(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle,$$

e a curvatura escalar de M^n em p por

$$(1.1.5) \qquad s(p) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1}^{n-1} \langle R(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle.$$

1.2 - Imersões Isométricas

Sejam M^n e $\overline{M}^{n+\ell}$, $\ell \geq 1$, variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f: M^n \to M^{n+\ell}$ é uma imersão isométrica se, para cada $p \in M^n$, $\langle x,y \rangle_p = \langle df_p x, df_p y \rangle_{f(p)}$ $\forall$ $x,y \in T_pM$. Quando f é uma imersão isométrica, identificamos um aberto $U \subset M^n$ com $f(U) \subset \overline{M}^{n+\ell}$ e T_pM com $df_p(T_pM)$. Nestas condições, podemos supor que $M^n \subset \overline{M}^{n+\ell}$ e $T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$, onde $(T_pM)^\perp$ é o complementar ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$, que será chamado espaço normal a M^n em p. Um campo N de vetores diferenciáveis em $\overline{M}$ tal que $N(p) \in (T_pM)^\perp$, $p \in M^n$, é chamado campo normal a M^n e $\mathfrak{X}(M)^\perp$ denotará o conjunto de todos os campos normais a M^n. Indicando a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ por $\overline{\nabla}$, tem-se

$$(1.2.1) \qquad \overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T + \alpha(X,Y),$$

$$(1.2.2) \qquad \overline{\nabla}_X N = - A_N X + (\nabla_X N)^\perp,$$

$\forall$ $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\forall$ $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. É fácil ver que $(\overline{\nabla})^T = \nabla$ é a conexão de M^n e que $\alpha: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ é bilinear e simétrica[8,pag 108]. A aplicação α é chamada segunda forma fundamental da imersão. Em (1.2.2), $- A_N$ é chamado operador de Weingarten e $\nabla^\perp = (\overline{\nabla})^\perp$ conexão normal da imersão.

Sejam $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Então

$$0=X\langle Y,N\rangle=\langle\overline{\nabla}_X Y,N\rangle+\langle Y,\overline{\nabla}_X N\rangle=\langle\alpha(X,Y),N\rangle-\langle A_N X,Y\rangle.$$

Assim, para cada $p\in M^n$, obtemos

$$(1.2.3)\qquad \langle A_N X,Y\rangle_p=\langle\alpha(X,Y),N\rangle_p.$$

Como aplicação de (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.3) segue-se

$$(1.2.4)\quad \overline{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z-A_{\alpha(Y,Z)}X+A_{\alpha(X,Z)}Y+$$

$$+\alpha(X,\nabla_Y Z)-\alpha(Y,\nabla_X Z)+\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z)-\nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z)-\alpha([X,Y],Z).$$

$$(1.2.5)\quad \overline{R}(X,Y)\xi=-\nabla_X(A_\xi Y)+A_{\nabla^{\perp}_X\xi}Y+\nabla_Y(A_\xi X)-A_{\nabla^{\perp}_Y\xi}X+$$

$$+A_\xi([X,Y])-\alpha(X,A_\xi Y)+\alpha(Y,A_\xi X)+[\nabla^{\perp}_X,\nabla^{\perp}_Y]\xi-\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,$$

onde $\overline{R}$ e R são os tensores de curvatura de $\overline{M}$ e M, respectivamente, $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ e $\xi\in\mathfrak{X}(M)^{\perp}$.

A parte tangente de (1.2.4) é chamada equação de Gauss,

$$(1.2.6)\quad (\overline{R}(X,Y)Z)^T=R(X,Y)Z-A_{\alpha(X,Z)}X+A_{\alpha(X,Z)}Y$$

e a parte normal denomina-se equação de Codazzi,

$$(1.2.7)\quad (\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) + \nabla_X^{\perp}\alpha(Y,Z) -$$

$$- \nabla_Y^{\perp}\alpha(X,Z) - \alpha([X,Y],Z).$$

Define-se o tensor curvatura normal por

$$(1.2.8)\qquad R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}\xi - \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}\xi - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}\xi,$$

onde $X,Y \in X(M)$ e $\xi \in X(M)^{\perp}$. A componente normal de (1.2.5), denominada equação de Ricci, escreve-se

$$(1.2.9)\quad (\bar{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi - \alpha(X,A_{\xi}Y) - \alpha(Y,A_{\xi}X).$$

Se $\bar{M}^n$ tem curvatura seccional constante, podemos reescrever as equações de Gauss, Codazzi e Ricci como segue:

$$(1.2.6)'\quad C[\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y] = R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y,$$

$$(1.2.7)'\qquad (\nabla_X\alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y\alpha)(X,Z),$$

$$(1.2.9)'\qquad R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha(X,A_{\xi}Y) - A(Y,A_{\xi}X),$$

onde $(\nabla_X\alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)$.

Seja $f: M^n \to \bar{M}^m$ uma imersão isométrica e α sua segunda forma fundamental. Chamaremos núcleo de α o conjunto $\operatorname{Ker}_p \alpha = \{X \varepsilon T_pM \; ; \; \alpha(X,Y) = 0 \quad \forall\, Y \varepsilon T_pM\}$. Define-se o núcleo do tensor curvatura de M em p como sendo

$$\operatorname{Ker}_p R = \{X \varepsilon T_pM \; ; \; R(X,Y)\,. = \bar{R}(X,Y)\,. \quad \forall\, Y \varepsilon T_pM\}.$$

Diremos que uma imersão f é mínima se o traço de A_ξ for igual a zero para todo $\xi \varepsilon (T_pM)^{\perp}$ e que é totalmente geodésica se $\operatorname{Ker} \alpha = T_pM \;\; \forall\, p \varepsilon M$. O conjunto N_1 gerado pelos $\alpha(X,Y)$, $X,Y \varepsilon T_pM$ chama-se primeiro espaço normal a M. Mostra-se que $N_1 = \{\xi \varepsilon T_pM \; ; \; A_\xi = 0\}^{\perp}$. Para cada $p \varepsilon M^n$ seja N_p a escolha de um subespaço k-dimensional de $(T_pM)^{\perp}$. Se, para cada $p \varepsilon M^n$ existir uma vizinhança U de p e campos diferenciáveis $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ em U, tais que $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k\}_p$ é uma base para N_q, $q \varepsilon U$, então $(N_p,\; p \varepsilon U)$ é chamado subfibrado normal de dimensão k. Um subfibrado normal L é paralelo no fibrado normal, se para cada campo $\xi \varepsilon L \quad \nabla^{\perp}_X \xi \varepsilon L \quad \forall \;\; X \varepsilon \mathfrak{X}(M)$.

Diz-se que uma imersão isométrica $f: M^n \to \bar{M}^m$ é rígida se, dado uma imersão isométrica $g: M^n \to \bar{M}^m$, existe um movimento rígido $T: \bar{M}^m \to \bar{M}^m$ tal que $g = T \circ f$. Um exemplo deste fato ocorre, quando $\bar{M}^m = \mathbb{R}^3$ e $M^n = S^2$, cuja rigidez resulta do teorema de **Liberman[6,pag 317]**. **Um** resultado surpreendente sobre **rigidez è seguinte**

(1.2.10) Teorema [5] - Seja M^n **uma variedade** C^∞, **conexa,** orientável. Entao toda imersao **isomètrica** $f:M^n \to \overline{M}^{n+1}$, cujo **posto da segunda forma fundamental for maior ou igual a** três em **toda parte è rigida.**

Neste trabalho estamos **interessado no seguinte aspecto** de rigidez:

(1.2.11) Uma imersao isomètrica $f:M^n \to \overline{M}^{n+1}$ **è fortemente rigida se, para** qualquer que **seja a imersao isomètrica** $g:\overline{M} \to \overline{M}^{n+\ell}$, $\ell \geq 1$, existe um movimento **rigido** $T : \overline{M}^{N+\ell} \to \overline{M}^{n+\ell}$, tal que $g = T \circ f$.

1.3 - Distribuiçao de Nulidade Relativa

Seja M^n uma variedae **Riemanniana. Uma distribuiçao** k-dimensional em M^n è uma escolha **para cada** $p \in M^n$ **de um** subespaço k-dimensional de T_pM. **Diz-se, que uma** distribuiçao k-dimensional Δ **è diferenciável se existem** campos de vetores diferenciàveis $X_1, X_2, \ldots, X_k$ **linearmente** independentes em uma **vizinhança U, tais que**

$\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}_q$ é uma base de Δ_q, $q \in U$. Uma distribuição Δ em M^n é integrável se existe uma subvariedade conexa $N \subset M^n$ tal que $T_q N = \Delta_q$, $q \in N$. N chama-se variedade integral de Δ. Uma distribuição Δ é involutiva se quaisquer que sejam $X, Y \in \Delta$, tem-se $[X,Y] \in \Delta$.

(1.3.1) Teorema[7,pag 196] - Seja Δ uma distribuição k-dimensional, diferenciável, definida em M^n. Então Δ é integrável se, somente se, é involutiva. Ademais as subvariedades integrais de Δ são localmente únicas.

As subvariedades de uma distribuição integrável, chamaremos de folhas.

Sejam $f: M^n \to \overline{M}_C^{n+1}$ uma imersão isométrica e α a sua segunda forma fundamental. Como a codimensão de f é um, tem-se que $\underset{p}{\mathrm{Ker}}\ \alpha = \underset{p}{\mathrm{Ker}}\ A_\xi$, onde A_ξ é o operador de Weingarten. Observando que A_ξ é auto-adjunto, conclui-se que $(\underset{p}{\mathrm{Ker}}\ \alpha)^\perp = \underset{p}{\mathrm{Im}}\ A_\xi$.

Para cada $p \in M^n$ definimos a nulidade relativa $\nu(p)$ como sendo a dimensão de $\underset{p}{\mathrm{Ker}}\ \alpha$. Observe que a nulidade relativa satisfaz $0 \le \nu(p) \le n$ e portanto $M_o = \{p \in M^n \ ; \ \nu(p) = \nu_o, \ \nu_o = \min_p \nu(p)\}$ é não vazio. Chamaremos ν_o o índice de nulidade relativa. M_o é aberto em M. De fato, se $p \in M_o$, então segue de $\underset{p}{\mathrm{Ker}}\ \alpha = \underset{p}{\mathrm{Ker}}\ A_\xi$ que o posto de A_ξ é máximo em p. Como o posto é uma função semicontinua inferiormente, segue-se que M_o é aberto. É claro que $\mathrm{Ker}_p\,\alpha$ define uma distribuição ν_o-dimensional em M_o, a qual chamaremos de distribuição de nulidade relativa. É fácil ver que $(\mathrm{Ker}_p\,\alpha)^{\perp}$ é uma distribuição. Mostraremos que a distribuição determinada por $\mathrm{Ker}\,\alpha$ em M_o é diferenciável, integrável e suas folhas são totalmente geodésicas.

Consideremos $X_1,\ldots,X_n \subset \mathfrak{X}(M)$ gerando T_qM, $q\in U$, U vizinhança de p. $\{A_\xi X_i;\ i=1,\ldots,n\}$ gera $(\mathrm{Ker}\,\alpha)^{\perp}$. Escolha em $\{A_\xi X_i,\ i=1,\ldots,n\}$ uma base ortonormal $W_1,\ldots,W_s$, $s=n-\nu_o$, de $(\mathrm{Ker}\,\alpha)^{\perp}$. Sejam $Y_i=X_i - \sum_{j=1}^{s}\langle X_i,W_j\rangle W_j$. Y_i são diferenciáveis e $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ geram $\mathrm{Ker}\,\alpha$. É possível escolher em $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ campos $\overline{Y}_j$, $j=1,\ldots,\nu_o$, que geram $\mathrm{Ker}_q\,\alpha$, para cada $q\in U$. Para mostrar que $\mathrm{Ker}\,\alpha$ é integrável, basta mostar que $\nabla_Y X \in \mathrm{Ker}\,\alpha$ para quaisquer que sejam $X,Y\in\mathrm{Ker}\,\alpha$. Se $X,Y\in\mathrm{Ker}\,\alpha$ e $Z\in\mathfrak{X}(M)$, segue-se de (1.2.7)' que

$$0 = \nabla_Z^{\perp}\alpha(X,Y) - \alpha(\nabla_Z X,Y) - \alpha(X,\nabla_Z Y) =$$

$$= \nabla_Y^{\perp}\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z) = -\alpha(\nabla_Y X,Z),$$

donde $\nabla_Y X\in\mathrm{Ker}\,\alpha$. Isto mostra não só que $\mathrm{Ker}\,\alpha$ é integrável, mas também que as folhas são totalmente geodésicas.

Se M^n é completa, as folhas da distribuição de nulidade relativa também o são. Isto é consequência do seguinte

(1.3.2) Teorema[9,pag 40] - Sejam $f: M^n \to \bar{M}^m$ uma imersão isométrica e Δ a distribuição de nulidade relativa em M_o. Se $\tau:[a,b] \to M^n$ é um segmento de geodésica tal que que $\tau'(0) \varepsilon \Delta_{\tau(0)}$. Então a folha de Δ que contém $\tau(0)$, contém também a imagem de τ.

Observe que como as folhas são totalmente geodésicas então (1.2.6)' nos diz que elas são recobertas por esferas, espaços hiperbólicos ou espaços Euclideanos.

2 - Parametrização de Gauss e Classificação de Hipersuperfícies.

2.1 - Parametrização de Gauss.

Seja $f:M^n \to \overline{M}_C^{n+1}$, $C \geq 0$, uma imersão isométrica e α sua segunda forma fundamental. Assuma que $M_o = M$ e que a nulidade relativa é igual a $n-k$. Então $\Delta = \operatorname{Ker} \alpha$ define uma distribuição integrável, cujas folhas são totalmente geodésicas e além disso, completas se M o for. Definindo em M a relação de equivalência $\approx$ cujas classes são as folhas de M, mostra-se que se $U \subset M$ é um aberto conexo, então a aplicação $\Pi : U \to V$, $V = U/\approx$, é uma submersão. Logo, localmente, existe uma aplicação diferenciável $\xi : V \to U$, tal que $\Pi \circ \xi = id_V$, a qual chamaremos secção transversal. Observe que $d\xi$ é injetiva e $d\Pi\, w = 0$, $\forall\, w \in \Delta$. É também possível mostrar que $U/\approx\, = V$ é uma variedade k-dimensional, Hausdorff, nos casos em que U é o saturado de alguma secção transversal ou as folhas através de pontos de U são completas.

Sejam U como acima, $\overline{M}_C^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $\varphi : U \to S^n$ a aplicação normal de Gauss. Segue-se de $d\varphi\, X = -A_N X$, que φ

é constante ao longo das folhas ($\Delta = \ker A_N$). Defina a aplicação $\bar{\varphi} : V \to S^n$, pondo $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$, onde $\bar{x} = \Pi(x)$. Afirmamos que $\bar{\varphi}$ é uma imersão. De fato, observe que $\xi : V \to U$ satisfaz $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(\xi(\bar{x}))$ e $d\bar{\varphi}.v = d\varphi.d\xi.v$. Logo $d\bar{\varphi}.v = 0$ se, só se, $d\xi.v \in \ker d\varphi = \ker d\Pi$. Como $\Pi \circ \xi = id_V$, $d\xi.v \in \ker d\varphi$ se, só se, $v = 0$ e a afirmação segue. Note que $\bar{\varphi}$ definida acima faz com que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & & S^n \\ & V \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Considere V com a métrica induzida por $\bar{\varphi}$. Podemos identificar T_xM com $T_{\varphi(x)}S^n$. Assim sendo $T_{\bar{x}}V$ identifica-se naturalmente com $\mathrm{Im}\, A_N = \Delta_x^{\perp}$.

Seja Λ o fibrado normal a imersão $\bar{\varphi}$ em S^n, cuja fibra em $\varphi(x)$ é Δ_x. Um ponto em Λ é representado por $(\bar{x}, v)$, onde $\bar{x} \in V$ e $v \in \Delta_x$. No que segue identificaremos $f(x)$ com x e $\varphi(x)$ com $\bar{\varphi}(\bar{x})$ e $\bar{x}$.

Qualquer secção transversal $\xi : V \to U$ da submersão $\Pi : U \to V$, nos permite sempre estender a restrição $\varphi|_{\xi(V)}$ a um difeomorfismo de U sobre uma vizinhança da secção zero em Λ. De fato, se x pertence a folha de M que é aplicada por Π em $\bar{x}$, então $x - \xi(\bar{x})$ está na mesma folha, que por translação paralela no $\mathbb{R}^{n+1}$ é levada na fibra Δ_x. Portanto usando a secção transversal ξ, defina $\phi_\xi : U \to \Lambda$ pondo $\phi_\xi(x) = (\bar{x}, x - \xi(\bar{x}))$. E fácil ver que ϕ_ξ é diferenciável e sua inversa é dada por

$$(2.1.1) \qquad \Psi_\xi(\bar{x}, v) = \xi(\bar{x}) + v.$$

Note que Ψ_ξ é bem definida e diferenciável em todo fibrado normal sobre $\varphi \circ \xi(V)$, mas pode ser singular fora da imagem de U sobre ϕ_ξ. Fixe um ponto $x_o \varepsilon U$ e seja B_{x_o} uma bola fechada em $\mathbb{R}^{n+1}$, tal que as folhas que passam por pontos de B_{x_o} saem de B_{x_o}. Deste modo, existe em cada folha de B_{x_o} um ponto x' que realiza a menor distância entre a folha e x_o. Mais ainda, o segmento $x' - x_o$ é perpendicular a folha. De fato, seja β uma curva na folha com $\beta(0) = x'$ e $\beta'(0) = v$. Então

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \beta(t) - x_o, \beta(t) - x_o \rangle = 2 \langle v, x' - x_o \rangle.$$

Deste modo, podemos definir a aplicação $\eta : V \to U$, $\eta(x)$ é o único ponto de $\Pi^{-1}(x)$ mais próximo de x_o. No que segue deduziremos uma expressão para η. Usando a decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \varphi(x) + \Delta_x^{\perp} + \Delta_x$, tem-se que $x' - x_o = \gamma\,\bar{x} + v$, onde $v \varepsilon \Delta_x^{\perp}$ e $\gamma(\bar{x}) = \langle x - x_o, \bar{x} \rangle$. Observe que γ define uma função em V, uma vez que, $\langle x - x_o, \bar{x} \rangle$ é constante ao longo das folhas. Seja $w \in \Delta_x^{\perp}$ e considere a curva β em M tal que $\beta(0) = x'$ e $\beta'(0) = w$. Então, tem-se

$$w\langle x'-x_o, \varphi(x)\rangle = \frac{d}{dt}\langle \beta(t)-x_o, \varphi(\beta(t))\rangle \Big|_{t=0} = \langle x'-x_o, d\varphi.w\rangle.$$

Por outro lado, tem-se

$$w\langle x'-x_o, \varphi(x)\rangle = w(\gamma \circ \Pi)(x) = \langle \text{grad } \gamma, d\Pi.w\rangle = \langle d\overline{\varphi}.\text{grad } \gamma, d\overline{\varphi} \circ d\Pi.w\rangle =$$

$$= \langle d\overline{\varphi}.\text{grad } \gamma,\ d\varphi.w\rangle.$$

Logo a componente de $x' - x_o$ em $\Delta_x^{\perp}$ é o grad γ, isto é $v = \text{grad } \gamma$. Assim sendo

$$\eta(\overline{x}) = x_o + \langle x' - x_o, \overline{x}\rangle \overline{x} + \text{grad } \gamma(\overline{x}).$$

Observe que η é diferenciável e por construção é uma secção transversal, a qual é global quando M é completa. Em (2.1.1), fazendo $\xi = \eta$, obtem-se

$$(2.1\ 3)\quad \varphi_\eta(\overline{x}, v) = x_o + \langle x' - x_o, \overline{x}\rangle \overline{x} + \text{grad } \gamma(\overline{x}) + v,$$

a qual chamaremos Parametrização de Gauss. Podemos assumir, a menos de translação, que $x_o = 0$.

2.2 - Classificação de Hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}(S^{n+1})$ com Nulidade Constante

Iniciaremos com a classificação de hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ com nulidade constante.

2.2.1 - Proposição - Seja $g:V^k \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica e γ qualquer função em V^k. Considere a aplicação $\Psi:\Lambda \to \mathbb{R}^{n+1}$, dada por $\Psi(y,w)=\gamma(y)y + \text{grad }\gamma(y) + w$, onde Λ é o fibrado normal a g em S^n. Então

i) Ψ tem posto máximo em (y,w) se, sòmente se, o operador $P = \gamma(y)I + H_{\gamma(y)} - A_w$ é não singular em T_gV, onde $H_{\gamma(y)}$ é o hessiano de γ.

ii) Nos pontos em que Ψ tem posto máximo, g é um campo normal unitário de Ψ e a segunda forma fundamental $A=A_g$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ tem posto k e além disso $A = -P^{-1}$ em $\Delta^{\perp}$.

Demonstração - i) Escreva $T_{(g,w)}\Lambda = \Delta^{\perp} + \Delta$, onde $\Delta = (T_gV)^{\perp}$. Sejam $w\varepsilon\Delta$ e $\beta:(-\varepsilon,\varepsilon) \to \Lambda$ uma curva dada por $\beta(t) = (y,w+tv)$. Então

$$v\,\Psi = d\Psi.v=\frac{d}{dt}\Psi(\beta(t))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}(\gamma\, y + \text{grad }\gamma + w + tv)\Big|_{t=0}=v.$$

Logo o jacobiano de Ψ restrito a Δ é a identidade. Por outro lado se $b\varepsilon\Delta^{\perp}$, temos

$$d\Psi.b = \bar{\bar{\nabla}}_b(\gamma y + \text{grad } \gamma + w) = \bar{\bar{\nabla}}_b \gamma y + \bar{\bar{\nabla}}_b \text{grad } \gamma + \bar{\bar{\nabla}}_b w =$$

$$= \gamma\ \bar{\bar{\nabla}}_b y + b(\gamma)\ y + \bar{\nabla}_b \text{grad } \gamma + \bar{\alpha}(b, \text{grad } \gamma) + \bar{\nabla}_b w +$$

$$+ \bar{\alpha}(b,w) = \gamma\ \bar{\bar{\nabla}}_b y + b(\gamma)\ y + \nabla_b \text{grad } \gamma + \alpha(b, \text{grad } \gamma) +$$

$$+ \bar{\alpha}(b, \text{grad } \gamma) - A_w b + \nabla_b^{\perp} w + \bar{\alpha}(b,w) = \gamma\ \bar{\bar{\nabla}}_b y + b(\gamma)\ y +$$

$$\nabla_b \text{grad } \gamma + \alpha(b, \text{grad } \gamma) - \langle b, \text{grad } \gamma\rangle\ y - A_w b + \nabla_b^{\perp} w -$$

$$\langle b,w\rangle\ y = \langle \text{grad } \gamma, b\rangle\ y + \gamma\ \bar{\bar{\nabla}}_b y + \nabla_b \text{graad } \gamma - A_w b +$$

$$+ \alpha(b, \text{grad } \gamma) - \langle b, \text{grad } \gamma\rangle\ y + \nabla_b^{\perp} w = \gamma\ \bar{\bar{\nabla}}_b y + H_\gamma b -$$

$$- A_w b + \alpha(b, \text{grad } \gamma) + \nabla_b^{\perp} w = (\gamma\ I + H_\gamma - A_w) b +$$

$$+ \alpha(b, \text{grad } \gamma) + \nabla_b^{\perp} w,$$

onde $\bar{\bar{\nabla}}$, $\bar{\nabla}$, e ∇ são as conexões de $\mathbb{R}^{n+1}$, S^n, e V^k, respectivamente; $\nabla^{\perp}$ a conexão normal de V^k em S^n; A o operador de Weigarten de g; $\bar{\alpha}$ e α são as segundas formas fundamentais de S^n e V^k, respectivamente. Logo a matriz jacobiana de Ψ restrita a $\Delta^{\perp}$ é igual a $P + D$, onde $D:\Delta^{\perp} \to \Delta$ é um operador linear. Portanto o jacobiano,

$J\Psi$ tem determinante não nulo se, somente se, P é não singular. Ademais,

(2.2.2) $$d\Psi.b = (P + D).b \ , \quad b\varepsilon\Delta^{1}.$$

ii) Observe que nos pontos, onde Ψ tem posto máximo, Ψ é uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^{n+1}$. Ademais $T\Psi = \mathrm{Im}\, P + \Delta$, y é perpendicular a $T\Psi$ e $|y| = 1$. $G\ (\gamma\ y + \mathrm{grad}\ \gamma + w) = w$ define uma aplicação de $\Psi(\Lambda)$ em S^n, que é constante ao longo da imagem de $\{\ (y_o, w);\ w\varepsilon\Delta\ \}$. Portanto $dG.w = 0$ se, $w\ \varepsilon\ \Delta$. Assim sendo a aplicação normal de Gauss de Ψ é G, e $dG = -A_g$. É fácil ver que o posto de A_g é k. Seja $u\ \varepsilon\ T\Psi$. Então $u = d\Psi.b$ e $A_g u = -dG.u = -dG\ d\Psi.b = -\ b$. Usando (2.2.2) tem-se $A_g u = A_g[(P+D)b)] = AP.b$. Logo $A = -\ P^{-1}$.

(2.2.3) Teorema - Seja $g{:}V^k \to S^n$ uma imersão isométrica e γ qualquer função em V^k. Denote por Λ o fibrado normal ao longo de g e considere a aplicação $\Psi{:}\ \Lambda \to \mathbb{R}^{n+1}$, dada por $\Psi(y,w) = \gamma\ y + \mathrm{grad}\ \gamma + w$. Então, no subconjunto aberto dos pontos regulares, Ψ é uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, com nulidade relativa constante $n-k$. Reciprocamente, qualquer hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, com nulidade relativa constante é localmente parametrizada por Ψ.

Demonstração - Consequência imediata de (2.1.3) e (2.2.1).

(2.2.4) Corolário - Seja $g:V^k \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica. No fibrado normal unitário, Λ^1, ao longo de g, considere a aplicação $\Psi:\Lambda^1 \to S^{n+1}$ definida por $\Psi(y,w) = \exp_y(\frac{\pi}{2})w = w$, onde exp significa aplicação exponencial da esfera S^{n+1}. Então

i) No subconjunto aberto dos pontos regulares, Ψ é uma hipersuperfície imersa em S^{n+1}, com nulidade relativa constante $n-k$.

ii) Reciprocamente, qualquer hipersuperfície de S^{n+1}, com nulidade relativa constante, pode ser parametrizada por Ψ.

iii) Ψ tem posto máximo em (y,w) se, sòmente se, a segunda forma fundamental de g na direção w é não singular. Em tais casos, a segunda forma fundamental $A = A_g$ de Ψ em S^{n+1} tem posto k e $A = A_w^{-1}$ em $\Delta^1 = TV^k$.

Demonstração - i) Seja $S^{n-k}_{g(y)}$ a fibra de Λ^1 sobre $g(y)$. A aplicação exponencial aplica cada $w \in S^{n-k}_{g(y)}$ ortogonalmente a $g(y)$. Assim sendo $\exp_{g(y)}$ $(\frac{\pi}{2}(S^{n-k}_{g(y)})$ é a interseção de um subespaço $(n-k+1)$-dimensional do $\mathbb{R}^{n+2}$ com S^{n+1}. Isto mostra que $\Psi(y,w) = \exp_{g(y)}(\frac{\pi}{2}\, w)$, nos pontos em que $d\Psi$ é injetiva, é uma subvariedae de dimensão n com nulidade relativa $n-k$.

ii) Seja $\varphi: M^n \to S^{n+1}$ uma hipersuperfície com nulidade relativa $n-k$. Considere $\tilde{\varphi}: \tilde{M} = M^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^{n+2}$, dada por $\tilde{\varphi}(p,t) = t\,\varphi(p)$. $\tilde{\varphi}$ é uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^{n+2}$ com nulidade relativa $n-k+1$. Seja $\xi: V \to \tilde{M}$ uma seção transversal da submersão $\Pi: \tilde{M} \to V$, onde $V = \tilde{M}/\tilde{\approx}$ e $\tilde{\approx}$ é a relação de equivalência definida no capítulo I. Como $\tilde{M}$ é um cone sobre uma hipersuperfície de S^{n+1}, segue que $\xi(\bar{x})$ é ortogonal a $N(\xi(\bar{x}))$, onde N é a aplicação normal de Gauss.

Portanto $\psi_\xi(\bar{x},w) = \xi(\bar{x}) + w$ é uma parametrização de $\tilde{\varphi}$. Assim sendo $\tilde{\psi}(\bar{x}, w-\xi(\bar{x})) = w$ é uma reparametrização do cone que restrita a Λ^1 é ψ.

iii) Observemos, inicialmente, que o posto de ψ é pelo menos $n-k$, pois a fibra $S^{n-k}_{g(y)}$ é levada por ψ sobre uma subvariedade $(n-k)$-dimensional totalmente geodésica de S^{n+1}. Por outro lado, se restrigirmos ψ a uma secção η horizontal do fibrado Λ^1 tem-se que $d\psi\, d\eta\, v = \tilde{\nabla}_{d\eta\, v} w$, $\forall\; v \in TV$, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão da esfera S^{n+1} e por uma secção horizontal entende-se uma aplicação $\eta: V \to \Lambda^1$, tal que $d\eta\, v$ é ortogonal a fibra em cada ponto. Assim sendo $d\Psi$ é regular em (y,w) se, só se, a segunda forma fundamental de g na direção w é não singular. Ademais, nos pontos em que Ψ é regular, segue de ii) e de (2.2.1-i) que a segunda forma fundamental, A da hipersuperfície Ψ, tem posto k e que $A = - A_w^{-1}$ em $\Delta^1 = TV^k$.

3 - Parametrização de Gauss e Problemas de Rigidez.

3.1 - Rigidez Forte.

A seguir usaremos a parametrização de Gauss para tratar do problema de rigidez para hipersuperfícies mínimas em espaços de curvatura constante $C \geq 0$. O resultado principal trata da rigidez definida em (1.2.11).

(3.1.1) - Teorema - Seja M^n, $n \geq 4$, uma variedade Riemanniana completa, a qual não possui espaços Euclideanos $\mathbb{R}^{n-2}$ ou $\mathbb{R}^{n-3}$ como fator. Então, qualquer imersão isométrica mínima $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é fortemente rígida.

Para demonstrarmos o Teorema (3.1.1), necessitamos de alguns resultados, os quais passaremos a estudar.

(3.1.2) Lema [1] - Seja $f: M^n \to \tilde{M}^m$ uma imersão isométrica mínima e α sua segunda forma fundamental. Então para todo $p \in M^n$ tem-se $\operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{Ker} R$.

Demostração - De (1.2.6)' tem-se que se, $X \in \operatorname{Ker}_p \alpha$, então $X \in \operatorname{Ker}_p R$, donde $\operatorname{Ker}_p \alpha \subset \operatorname{Ker}_p R$. Reciprocamente, Seja $\{x, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_p\tilde{M}$, então

$$Ric(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i^{n-1} \langle R(x,e_i)e_i, x\rangle =$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_i^{n-1} [C + \langle \alpha(x,x), \alpha(e_i,e_i)\rangle - |\alpha(x,e_i)|^2] =$$

$$= C + \frac{1}{n-1} [\langle \alpha(x,x), \alpha(e_1,e_1) + \ldots + \alpha(x,x)\rangle - |\alpha(x,x)|^2 -$$

$$- \sum_i^{n-1} |\alpha(x,e_i)|^2].$$

Como f é mínima,

$$tr\ A_{\alpha(x,x)} = \langle \alpha(x,x), \alpha(e_1,e_1) + \ldots + \alpha(x,x)\rangle = 0$$

e

$$(3.1.3)\quad Ric(x) = C - \frac{1}{n-1} \{ |\alpha(x,x)|^2 + \sum_i^{n-1} |\alpha(x,e_i)|^2 \}.$$

Suponha que $x \in Ker_p\ \alpha$, então

$$Ric(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i^{n-1} \langle R(x,e_i)e_i, x\rangle = C.$$

Substituindo em (3.1.3) obtemos

$$|\alpha(x,x)|^2 + \sum_{i}^{n-1} |\alpha(x,e_i)|^2 = 0.$$

Logo $\alpha(x,y) = 0 \quad \forall\ y \in T_pM$, isto é, $x \in Ker\ \alpha$ e portanto $\underset{p}{Ker}\ R \subset \underset{p}{Ker}\ \alpha$.

(3.1.4) Proposição [1] - Sejam $f:M^n \to \overline{M}_C^{n+1}$ e $g:M^n \to \overline{M}_C^{n+p}$, $p \geq 1$, imersões isométricas minimas, com segunda forma fundamental α e β, respectivamente. Suponha que $\dim (Ker\ \alpha) \leq n-3$. Se $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM que diagonaliza α, então B diagonaliza β.

Demonstração - Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de T_pM que diagonaliza α, $\alpha_{ij} = \langle \alpha(e_i,e_j), N \rangle$, N normal a f e $\beta_{ij} = \beta(e_i,e_j)$. Como $f(M^n)$ e $g(M^n)$ são localmente isométricas, tem-se de (3.1.2) que $Ker\ \alpha = Ker\ \beta$. Sem perda de generalidade podemos supor que $Ker\ \alpha = Ker\ \beta = \{0\}$. De (3.1.3), obtem-se

$$(3.1.5) \qquad Ric(e_i) = C - \frac{1}{n-1} |\alpha_{ii}|^2$$

e

$$(3.1.6) \qquad Ric(e_i) = C - \frac{1}{n-1}[|\beta_{ii}|^2 + \sum_{j \neq i} |\beta_{ij}|^2 =$$

$$= C - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}|^2.$$

Logo

$$(3.1.7) \qquad |\alpha_{ii}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}|^2.$$

Se, K_{ij}^{f} e K_{ij}^{g} representam as curvaturas seccionais de f e g, respectivamente, relativas ao plano gerado por $\{e_i, e_j\}$, então usando (1.2.6)' obtemos

$$(3.1.8) \qquad K_{ij}^{f} - C = \alpha_{ii}\, \alpha_{jj}$$

$$i \neq j$$

$$(3.1.9) \qquad K_{ij}^{g} - C = \langle \beta_{ii}, \beta_{jj} \rangle - |\beta_{ij}|^2$$

Logo

$$(3.1.10) \qquad \alpha_{ii}\alpha_{jj} = \langle \beta_{ii}, \beta_{jj} \rangle - |\beta_{ij}|^2,$$

Elevando-se ao quadrado os membros de (3.1.10) tem-se

$$(3.1.11) \qquad |\alpha_{ii}|^2 |\alpha_{jj}|^2 = [\langle \beta_{ii}, \beta_{jj} \rangle - |\beta_{ij}|^2]^2.$$

Usando (3.1.7) segue

$$(3.1.12) \qquad |\alpha_{ii}|^2 |\alpha_{jj}|^2 = \sum_{k}^{n} |\beta_{ik}|^2 \sum_{k}^{n} |\beta_{jk}|^2.$$

De (3.1.11) e (3.1.12) obtem-se

$$(3.1.13)\quad [\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle-|\beta_{ij}|^2]^2=\sum_k^n|\beta_{ki}|^2\sum_k^n|\beta_{kj}|^2.$$

E fácil ver que

$$(3.1.14)\quad [\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle-|\beta_{ij}|^2]^2\geq(|\beta_{ii}|^2+|\beta_{ij}|^2)(|\beta_{jj}|^2+|\beta_{ij}|^2).$$

Então

$$[\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle-|\beta_{ij}|^2]^2\geq|\beta_{ii}|^2|\beta_{jj}|^2+|\beta_{ij}|^2(|\beta_{ii}|^2+|\beta_{jj}|^2)+$$

$$+|\beta_{ij}|^4\geq\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle^2+|\beta_{ij}|^2(|\beta_{ii}|^2+|\beta_{jj}|^2)+|\beta_{ij}|^4=$$

$$=\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle^2+|\beta_{ii}-\beta_{jj}|^2|\beta_{ij}|^2+2\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle|\beta_{ij}|^2+|\beta_{ij}|^4\geq$$

$$\geq\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle^2+2\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle|\beta_{ij}|^2+|\beta_{ij}|^4=$$

$$=[\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle+|\beta_{ij}|^2]^2,\qquad i\neq j.$$

Assim sendo $\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle\leq 0$ se, $\beta_{ij}\neq 0$ e $i\neq j$. **Usando** (3.1.10) obtem-se

$$(3.1.15)\qquad \alpha_{ii}\alpha_{jj}\leq-|\beta_{ij}|^2.$$

Como $\dim(\mathrm{Ker}_p\,\alpha)\leq n-3$ tem-se que $\alpha_{ii}\alpha_{jj}$ **não podem ser** negativos $\forall$ i,j. Logo existem índices i,j, $i\neq j$, para os quais $\beta_{ij}=0$. Para estes índices, segue de (3.1.14) que $\langle\beta_{ii},\beta_{jj}\rangle^2 \geq |\beta_{ii}|^2|\beta_{jj}|^2$ e (3.1.13) nos diz que a igualdade ocorre se, somente se, $\beta_{ik}=\beta_{kj}=0$ $\forall$ k, $k\neq i$, $k\neq j$. Repetindo o argumento para cada conjunto de índices i,k, como acima, conclui-se que $\beta_{ki}=0$ $k\neq i$. Portanto β é diagonalizável.

(3.1.16) Observação - Os argumentos acima nos permite concluir que $\beta_{ii}=\lambda\ \beta_{jj}$ $\forall$ i, o que significa dizer que o primeiro espaço normal de $\tilde{g}$ tem dimensão no máximo igual a 1. Como estamos supondo Ker α = Ker β = $\{0\}$, segue-se que existe j tal que $\beta_{jj}\neq 0$ e portanto o primeiro espaço normal tem dimensão constante igual a 1.

(3.1.17) Teorema [1] - Seja M^n, $n\geq 3$, uma variedade Riemanniana, conexa e $f:M^n \to \bar{M}_C^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima. Suponha que existe $p\in M^n$ tal que dim $(\mathrm{Ker}_p\ R)\leq n-3$. Então se, $\tilde{g}:M^n \to \bar{M}_C^{n+q}$, $q\geq 1$, é qualquer imersão isométrica mínima, tem-se que $\tilde{g}=T\circ f$, onde $T:\bar{M}_C^{n+q} \to \bar{M}_C^{n+q}$ é um movimento rígido.

Demosntração - Observemos que existe uma vizinhança U de p para a qual dim $(\mathrm{Ker}_r\ R)\leq n-3$, $\forall$ $r\in U$. Segue de (3.1.16) que o primeiro espaço normal da imersão $\tilde{g}$ na vizinhança U tem dimensão constante e igual a 1. Assim, se $\xi\in TM^{\perp}$ gera o primeiro espaço normal de g, tem-se $\beta(x,A_\xi y)=\langle A_\xi x, A_\xi y\rangle = \langle A_\xi A_\xi x, y\rangle \xi = \langle \beta(A_\xi x,y),\xi\rangle\xi = \beta(A_\xi x,y)$, onde β é a segunda forma fundamental de g e A_ξ e o operador de Weingarten na direção ξ. Conclui-se que $R^1=\emptyset$. [ver (1.2.9)'] Usando o teorema 1 de [2] obtem-se uma subvariedade totalmente geodésica $\bar{M}_C^{n+1} \subset \bar{M}_C^{n+q}$ tal que $g(U)\subset\bar{M}_C^{n+1}$. De (1.2.10) existe um movimento rígido $T:\bar{M}_C^{n+1} \to \bar{M}_C^{n+1}$ tal que $g = T\circ f$ em U. Como M é conexa e f e g são analíticas reais obtem-se $g = T\circ f$ em M.

(3.1.18) Lema - Seja $f:M^n \to \mathbb{R}^{n+1}(S^{n+1})$ uma imersão isométrica com nulidade relativa constante $\emptyset \le \nu_o \le n$. Então f é mínima se, sòmente se, a parametrização de Gauss satisfaz

i) $tr(\, \gamma I + H_\gamma - A_w)^{-1} = \emptyset$ em $\mathbb{R}^{n+1}$,

ii) $tr\, A_w^{-1} = \emptyset$ em S^{n+1},

para todo ponto (y,w). Em particular se $\nu_o=n-2$, f será mínima se, sòmente se, a imagem de Gauss V^2 é uma superfície mínima na esfera e $\Delta\gamma + 2\gamma = \emptyset$ em V^2.

Demonstração - i) A propriedade de f ser mínima independe da parametrização. Logo (2.1.3) nos diz que f é mínima se, somente se, $tr\, A_g = tr\, -P^{-1} = \emptyset$, onde $P = \gamma I + H_\gamma - A_w$.

ii) Segue imediatamente de (2.2.4).

Se $\nu_o=n-2$, então $\operatorname{tr} -P^{-1} = -\operatorname{tr}(\frac{1}{\det P} P)=-\frac{1}{\det P}\operatorname{tr} P$. f é mínima se, só se, $\operatorname{tr} P = 2\gamma + \Delta\gamma + \operatorname{tr} A_w = 0 \ \forall\ (y,w)$. Então $0 = 2\gamma + \Delta\gamma - \operatorname{tr} A_{-w} = 2\gamma + \Delta\gamma + \operatorname{tr} A_w$. Portanto $2\gamma + \Delta\gamma = 0 \ \forall\ y$ e consequentemente $\operatorname{tr} A_w = 0 \ \forall\ w$. Donde segue que V^2 é mínima. Se, V^2 é mínima e $2\gamma + \Delta\gamma = 0$ em V^2, é imediato que f é mínima.

(3.1.19) - Lema - Seja $f:M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica com nulidade relativa constante $\nu_o=n-2$. Se, as folhas são completas e a curvatura média não muda de sinal ao longo das folhas, então a imagem de Gauss é mínima.

Demonstração - Seja V a imagem de Gauss. Como $\nu_o=n-2$, tem-se que $2H = -\frac{1}{\det P}\operatorname{tr} P$, $P = \gamma I + H_\gamma - \operatorname{tr} A_w$. Fixe (y,w) e considere $t \to (y,w-tv)$, $v\neq 0$ e $v\in TV^{\perp}$. Então $2H = \operatorname{tr}(\gamma I + H_\gamma - A_{w-tv}) = 2\gamma + \Delta\gamma - \operatorname{tr} A_w + t \operatorname{tr} A_v$. Portanto H muda de sinal, a menos que $\operatorname{tr} A_v = 0$. Segue-se da hipótese que $\operatorname{tr} A_w = 0 \ \forall\ w\in TV^{\perp}$.

(3.1.20) Proposição - Se $f: M^n \to S^{n+1}$, $n\geq 4$, é uma imersão isométrica, onde M^n é completa, cuja curvatura média H não muda de sinal, então não existe aberto $U\subset M^n$, onde a nulidade relativa seja $n-2$.

Demonstração - Suponha que existe um aberto $U\subset M^n$ no qual a nulidade relativa $\nu_o=n-2$. Como M^n é completa a parametrização de Gauss de $f(U)$ é regular e pelo corolário (2.2.4) A_w é inversível. Como $H(w)=\mathrm{tr}A_w^{-1}= -\mathrm{tr}A_{-w}^{-1}= -H(-w)$, segue da hipótese de H não mudar de sinal que $\mathrm{tr}\,A_w=0$ $\forall$ w. Como o espaço das matrizes simétricas 2x2 com traço nulo tem dimensão dois e a codimensão da imagem da aplicação normal de Gauss é no mínimo três, conclui-se que A_w é singular para algum w, $|w|=1$, em qualquer ponto $y\varepsilon V$. Portanto f não pode possuir nulidade relativa igual a $n-2$ em um aberto U.

(3.1.21) Teorema - Seja $f:M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n\geq 4$, uma imersão isométrica de uma variedade completa com nulidade relativa $\nu_o=n-2$. Suponha que a curvatura média H, não muda de sinal, mesmo localmente. Então $f(M^n)$ decompõe-se num produto Euclideano $L^2 x\ \mathbb{R}^{n-2}$ ou $L^3 x\ \mathbb{R}^{n-3}$, onde $L^2 \subset \mathbb{R}^3$ e $L^3 \subset \mathbb{R}^4$ com nulidade relativa um.

Demonstração - Como M^n é completa, suas folhas também são. Segue do Lema (3.1.19) que a imagem da aplicação normal de Gauss, V^2, é mínima. Seja ψ a parametrização de Gauss, a qual é regular em todo ponto (y,w) do fibrado normal de V^2. Suponha que para algum y, $(T_yV^2)^{\perp}$ contenha um subespaço bidimensional E, tal que a aplicação $w \to A_w$ é um isomorfismo entre E e o espaço dos operadores auto-adjuntos de traço nulo. Considere a aplicação $w \to \gamma(y)I + H_{\gamma(y)} - A_w$, a qual aplica E sobre o subespaço afim das matrizes simétricas de traço constante. Como o subespaço das matrizes simétricas de traço constante contém um elemento não singular, segue-se que a parametrização de Gauss é não regular em algum ponto (y,w). Deste modo, não existe E nas condições acima e portanto para todo $y \in V^2$ o núcleo da aplicação $T:(T_yV)^{\perp} \to F$, $T(w) = A_w$, onde F é o espaço das matrizes simétricas de traço constante, tem dimensão maior ou igual a $n-1$. Segue-se que o primeiro espaço normal a V^2 tem dimensão no máximo 1 em cada ponto e portanto V^2 é uma subvariedade da esfera com o tensor curvatura $R^{\perp}=0$. Se existir um ponto $p \in V^2$, tal que a dimensão do primeiro espaço normal tem dimensão um, segue de [3, pag 275] que existe uma aberto denso A, cujas componentes conexas estão contidas em esferas tridimensionais, totalmente geodésicas de S^n. Por analiticidade segue que V^2 está contida em uma subvariedade totalmente geodésica de dimensão três. Portanto temos dois casos a considerar. i) V^2 é uma superfície em S^3 ii) V^2 é totalmente geodésica em S^n. No segundo caso as fibras do fibrado normal são paralelas e por (2.1.3) a hipersuperfície é o produto de um $L^2 \subset \mathbb{R}^3$ por um fator Euclideano $\mathbb{R}^{n-2}$. No primeiro caso, cada folha do fibrado normal se decompõe na forma $\Lambda_1 \oplus \Lambda_{n-3}$, onde Λ_1 é a folha do fibrado normal de V^2 em S^3 e Λ_{n-3} é o complementar ortogonal de Λ_1 em S^n. Neste caso Λ_{n-3} é também paralelo. Segue-se de (2.1.3) que a hipersuperfície é o produto de $L^3 \subset \mathbb{R}^4$, cuja nulidade relativa é um, por um fator Euclideano $\mathbb{R}^{n-3}$.

Observação - O Teorema (3.1.21) não vale em geral para $n=3$. De fato, considere o toro de Clifford $T^2 \subset S^3$, parametrizado por

$$x(u,v)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\cos\sqrt{2}\ u,\ \operatorname{sen}\sqrt{2}\ u,\ \cos\sqrt{2}\ v,\ \operatorname{sen}\sqrt{2}\ v\ ).$$

Seja $\gamma : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, W aberto, satisfazendo $(\Delta\gamma + 2\gamma)^2 < 4\gamma_{uv}^2$. Considere $\Psi = \gamma x + \operatorname{grad} \gamma + w$, w é normal a T^2. Ψ é regular e a imagem da aplicação normal de Gauss de Ψ é T^2. Portanto se $\Delta\gamma + 2\gamma = 0$, Ψ é mínima e regular. Como T^2 é completa Ψ é completa. Ademais admitindo o teorema (3.1.21) e usando (2.1.3) teriamos que T^2 seria uma variedade totalmente geodésica do S^3. Por conseguinte Ψ é um contra-exemplo do Teorema (3.1.21)

Demonstração de (3.1.1) - Se existir um ponto $p \in M^n$ no qual a nulidade relativa é menor ou igual a $n-3$, a conclusão segue de (3.1.17). Caso contrário, existem pontos cuja nulidade relativa é n ou $n-2$. Seja U um aberto, cuja nulidade relativa é n. Então $f(U)$ é totalmente geodésica e portanto $f|_U$ é rígida. Assim, podemos supor que existe um aberto denso A, cuja a nulidade relativa é $n-2$. Usando as tècnicas da demonstração do Teorema (3.1.21) obtemos que cada componente de A se decompõe como um produto do tipo $L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ ou $L^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$, situações que estão excluidas por hipóteses.

(3.1.22) - Teorema - Seja $f: M^n \to S^{n+1}$, $n \geq 4$, M completa, uma imersão isomètrica mlnima. Então f è fortemente rlgida.

Demonstração - E imediato de (3.1.20) e (3.1.17).

Seja $f: M^n \to \bar{M}_c^{n+1}$ uma imersão isomètrica mlnima com nulidade relativa constante $n-2$ e A seu operador de Weingarten. Sejam $\Delta = \operatorname{Ker} A$ e $\theta: M^n \to S^1$ uma função diferenciàvel. Considere o tensor R_θ, o qual è a identidade em Δ e a rotação de um ângulo θ em uma orientação fixada em $\Delta^\perp$. Defina $A_\theta = R_{\theta/2} A R_{-\theta/2}$. E claro que $\operatorname{tr} A_\theta = 0$, $A_\theta(X_1) = \cos\theta\, AX_1 - \operatorname{sen}\theta\, AX_2$ e $AX_2 = \operatorname{sen}\theta\, AX_1 + \cos\theta\, AX_2$, onde $\{X_1, X_2\}$ è uma base compatlvel com a orientação de $\Delta^\perp$.

(3.1.23) - Proposição - A_θ satisfaz a equação de Gauss.

Demonstração - Sejam $\{x, y\}$ uma base ortonormal de T_pM. Então

$$\langle R(x,y)y, x\rangle = \langle R(R_{-\theta/2}x, R_{-\theta/2}y)R_{-\theta/2}y, R_{-\theta/2}x\rangle =$$

$$=\langle AR_{-\theta/2}x,R_{-\theta/2}x\rangle\langle AR_{-\theta/2}y,R_{-\theta/2}y\rangle-\langle AR_{-\theta/2}x,R_{-\theta/2}y\rangle^2=$$

$$=\langle A_\theta x,x\rangle\langle A_\theta y,y\rangle-\langle A_\theta x,y\rangle^2.$$

(3.1.24) **Proposição** - A_θ satisfaz a equação de Codazzi se, somente se, θ é constante.

Demonstração - Seja $\{X_1,X_2,e_3,\dots,e_n\}$ um referencial geodésico em $p\in M^n$, tal que $\{X_1,X_2\}$ é uma base de $\Delta^\perp$ e $\{e_3,\dots,e_n\}$ é uma base de Δ. Para verificar que A_θ satisfaz Codazzi é suficiente mostrarmos que as equações de Codazzi são verificadas no referencial acima. No referencial acima as equações de Codazzi são

(3.1.25) $$\nabla_z A_\theta w - \nabla_w A_\theta z = 0,$$

onde $z,w \in \{X_1,X_2,e_3,\dots,e_n\}$. Assuma, por um momento, que

i) $\nabla_{e_j} AX_i = 0, \quad \forall\ j\geq 3$ e $i=1,2$

ii) $\nabla_{X_1} AX_1 + \nabla_{X_2} AX_2 = 0.$

Como $A_\theta e_j=0 \quad \forall\ j\geq 3$, (3.1.25) é satisfeita para $z,w \in \{e_3,\dots,e_n\}$. Seja $w = X_1$ e $z = e_j$. usando que

$A_\theta\, e_j = 0 \quad \forall\ j \geq 3$ e i) obtemos

$$\nabla_z A_\theta w - \nabla_w A_\theta z = \nabla_{e_j} A_\theta X_1 = \nabla_{e_j}(\cos\theta\, AX_1 - \operatorname{sen}\theta\, AX_2) =$$

$$= \cos\theta\, \nabla_{e_j} AX_1 + e_j(\cos\theta) AX_1 - \operatorname{sen}\theta\, \nabla_{e_j} AX_2 - e_j(\operatorname{sen}\theta) AX_2 =$$

$$= - A\,(\operatorname{sen}\theta\, e_j(\theta)\, X_1 + \cos\theta\, e_j(\theta)\, X_2).$$

Desde que A restrito a $\Delta^{\perp}$ é injetiva tem-se que $\nabla_z A_\theta w - \nabla_w A_\theta z = 0$ se, somente se, $e_j(\theta) = 0$. Considere $w = X_1$ e $z = X_2$. Então

$$\nabla_{X_2} A_\theta X_1 - \nabla_{X_1} A_\theta X_2 = \nabla_{X_2}(\cos\theta\, AX_1 - \operatorname{sen}\theta\, AX_2) -$$

$$- \nabla_{X_1}(\operatorname{sen}\theta\, AX_1 + \cos\theta\, AX_2) = \cos\theta\, (\nabla_{X_2} AX_1 - \nabla_{X_1} AX_2) -$$

$$- \operatorname{sen}\theta\, (\nabla_{X_2} AX_2 + \nabla_{X_1} AX_1) -$$

$$- A((\operatorname{sen}\theta X_2(\theta) + \cos\theta X_1(\theta)) X_1 + (\cos\theta X_2(\theta) - \operatorname{sen}\theta X_1(\theta)) X_2).$$

Usando que A satisfaz codazzi, ii) e que A é injetiva em $\Delta^{\perp}$ obtem-se que A_θ satisfaz Codazzi se, somente se, $X_1(\theta) = X_2(\theta) = 0$. Portanto admitindo i) e ii) tem-se que A_θ satisfaz Codazzi se, somente se, θ é constante.

Observação - a) A hipótese adicional i) utilizada na demonstração de (3.1.25) segue diretamente do fato do referencial ser geodésico e de A satisfazer Codazzi.

b) A hipótese ii) utilizada para verificar (3.1.25) pode ser obtida mostrando as seguintes afirmações:

Afirmação 1 - Desde que $\langle AX_i, e_j\rangle = 0$ para $i = 1,2$ e $j = 3,\ldots,n$, tem-se $\langle \nabla_{X_i} AX_i, e_j\rangle = 0$.

Afirmação 2 - Desde que $\operatorname{tr} A = 0$ e A satisfaz Codazzi então

(3.1.26) $$\langle \nabla_{X_1} AX_1, X_1\rangle = -\langle \nabla_{X_2} AX_1, X_2\rangle,$$

(3.1.27) $$\langle \nabla_{X_2} AX_2, X_2\rangle = -\langle \nabla_{X_1} AX_2, X_1\rangle.$$

Afirmação 3 - Usando que A é auto-adjunta tem-se

(3.1.28) $$\langle \nabla_{X_1} AX_1, X_2\rangle = \langle \nabla_{X_1} AX_2, X_1\rangle,$$

(3.1.29) $$\langle \nabla_{X_2} AX_1, X_2\rangle = \langle \nabla_{X_2} AX_2, X_1\rangle.$$

Aplicando o Teorema fundamental das subvariedades [11,vol 4, pag 70] obtem-se uma família de imersões isométricas $f_\theta : M^n \to \overline{M}^{n+}$, associada a um parâmetro θ, onde $f_\emptyset = f$ e f_θ não são duas a duas congruentes.

(3.1.30) Teorema - Seja $f: M^n \to \overline{M}_C^{n+1}$, M^n simplesmente conexa, uma imersão isométrica mínima com nulidade relativa constante n-2. Então qualquer outra imersão isométrica mínima $\tilde{f}: M^n \to \overline{M}_C^{n+1}$ é congruente a alguma f_θ.

Demonstração - Seja $\tilde{A}$ o operador de Weingarten de $\tilde{f}$. Pelo Lema (3.1.2) segue-se que $\Delta = \mathrm{Ker}\,\tilde{A} = \mathrm{Ker}\,A$. Como f e $\tilde{f}$ são imersões isométricas mínimas tem-se que $A|_{\Delta^\perp}$ e $\tilde{A}|_{\Delta^\perp}$ são aplicações auto-adjuntas com o mesmo traço e o mesmo determinante. Portanto $A|_{\Delta^\perp}$ e $\tilde{A}|_{\Delta^\perp}$ difere por umarotação R_θ de um ângulo θ. Mas pela Proprosição (3.1.24) θ é constante.

Para concluir esta seção vamos dar um contra-exemplo para o teorema (3.1.22), quando n=3. Seja $V^2 \subset S^4$ uma subvariedade mínima com curvatura normal k_N não nula em todos os pontos, por exemplo a superfície de Veronese. Desde que $K_N(\xi,\eta) = \langle R^\perp(x,y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]x,y\rangle$ tem que A_w é não nula para todo w normal a V^2. Por outro lado tr $A_w = \emptyset$ $\forall$ w normal a V^2. Assim sendo $\Psi(y,w) = w$ definida no fibrado normal unitário de V^2 é uma hipersuperfície do S^4 completa. Aplicando o Teorema (3.1.30) obtem-se que Ψ não é rígida.

(3.2) **Rigidez de Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$.**

Nesta seção discutiremos rigidez para imersões de M^n em $\mathbb{R}^{n+1}$.

(3.2.1) Teorema - Seja $f:M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade completa sem pontos planares. Suponha que a curvatura média H não muda de sinal, mesmo localmente. Então f é rígida num subconjunto aberto ou $f(M)$ se decompõe-se como produto do tipo $L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ ou $L^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$.

Demonstração - Como f não possui pontos planares, tem-se que a nulidade relativa é menor ou igual a $n-2$ em todos os pontos de M^n. Seja $p \in M^n$ tal que a nulidade relativa $\nu(p) < n-2$, então existe um aberto U, onde $\nu(q) < n-2$ para todo $q \in U$. Aplica-se (1.2.10) para concluir que $f(U)$ é rígida. Caso contrário $\nu(p) = n-2$ $\forall\, p \in M^n$ e $f(M^n)$ se decompõe de acordo com (3.1.21).

(3.2.2) Teorema - Seja M^n completa com curvatura escalar s satisfazendo $0 < \delta \leq s$. Se $f:M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão isométrica tal que a curvatura média H é limitada, então f é rígida em algum aberto de M^n.

Demonstração - Como $s\neq 0$ segue-se que a nulidade relativa $\nu(p)\le n-2$ $\forall\ p\in M^n$. Se existir um ponto $p\in M^n$ tal que $\nu(p) < n-2$, então f é rígida num subconjunto aberto de M^n. Resta analizarmos o caso em que $\nu(p)=n-2$ $\forall\ p\in M^n$. Neste caso mostraremos que a imagem de Gauss V^2 é totalmente geodésica e portanto $f(M^n)$ se decompõe como um produto de $L^2\times \mathbb{R}^{n-2}$. Sejam ψ a parametrização de Gauss para f e w normal a V^2. Considere $P_t = \gamma I + H_\gamma - tA_w$. Seja $\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_n\}$ uma base de T_pM tal que $\{e_1,e_2\}$ é uma base de $\operatorname{Im} A = \Delta^\perp$ e $\{e_3,\dots,e_n\}$ é uma base de $\operatorname{Ker} A = \Delta$, onde A é o operador de Weingarten de f. É fácil verificar que

$$s=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\ j}\langle R(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle=$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}(\langle Ae_1,e_1\rangle\langle Ae_2,e_2\rangle-\langle Ae_1,e_2\rangle^2)=\frac{1}{n(n-1)}\det(A|_{\Delta^\perp})=$$

$$\frac{1}{n(n-1)}\det(-P_t^{-1}).$$

Logo $\frac{n(n-1)}{s}=\det P_t$, onde $\det(P_t)$ é um polinômio do segundo grau em t. Como $0\le\delta\le|s|$ tem-se que $\det P_t$ é constante. Por outro lado $H=-\operatorname{tr} P_t^{-1}=-\frac{1}{\det P_t}\operatorname{tr} P_t=\frac{1}{\det P_t}(\Delta\gamma+2\gamma-t\operatorname{tr} A_w)$, que é um polinômio do primeiro grau em t. Portanto $\operatorname{tr} A_w = 0$. Logo $\operatorname{tr} P_t$ é constante. Assim sendo P_t é constante, donde se conclui que $A_w = 0$. Como w é arbitrário segue-se que a imagem da aplicação normal de Gauss é totalmente geodésica. Logo $f(M^n)=L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$. Ademais L^2 é completa com curvatura Gaussiana s, $|s| \geq \delta > 0$. Do teorema de Efimov [10] s é positiva. Usando o teorema de Bonnet [6, pag 352] tem-se que L^2 é compacta. Aplicando-se o teorema de Hadamard [11, vol 3, pag 90] obtemos que L^2 é convexa. Assim sendo, L^2 é rígida pelo teorema de Chon-Vossen [11, vol 5, pag 250] e consequentemente f é rígida.

(3.2.6) Teorema - Qualquer imersão isométrica $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, M^n conexa, com curvatura média constante $H \neq 0$ é rígida a menos que $f(M) \subset L^2 \times \mathbb{R}^n$ ou $f(M^n) \subset S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde $L^2 \subset \mathbb{R}^3$ tem curvatura média constante H.

Demonstração - Se existir um ponto $p \in M^n$, tal que a nulidade relativa $\nu(p) \leq n-3$, a rigidez segue de (1.2.10) e da analiticidade de f. Caso contrário $n > \nu(p) \geq n-2$ e $\nu_o = n-2$ num aberto $U \subset M^n$ ou $\nu(p) = n-1$ para todo $p \in M^n$. No primeiro caso a imagem da aplicação normal de Gauss V^2 é totalmente geodésica e $f(U) \subset L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$. De fato, seja $\psi = \gamma y + \operatorname{grad} \gamma - w$ a parametrização de Gauss. Então

$$H = -\operatorname{tr} P_t^{-1} = -\operatorname{tr} P_t \det P_t^{-1},$$

onde $P_t = \gamma I + H_\gamma + tA_w = (P - tQ)$, onde P e Q são matrizes auto-adjuntas dois por dois. Portanto

$$\text{(3.2.7)} \qquad \det P_t\, H = -\operatorname{tr} P_t,$$

onde $\det P_t = \det P - t\operatorname{tr}(P\operatorname{Adj}(Q)) + t^2 \det Q$, e $\operatorname{tr} P_t = \operatorname{tr} P - t\operatorname{tr} Q$, e $\operatorname{Adj}(Q)$ significa a matriz adjunta de Q. Portanto

$$\text{(3.2.8)} \qquad H \det P = -\operatorname{tr} P,$$

$$\text{(3.2.9)} \qquad H\operatorname{tr}(P\operatorname{Adj}(Q)) = -\operatorname{tr} Q,$$

$$\text{(3.2.10)} \qquad \det Q = 0.$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ que diagonaliza Q. Então de (3.2.10) obtemos

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando (3.2.9) e $\operatorname{tr} Q \neq 0$ conclui-se que $Hc = -1$, que ao substituirmos em (3.2.8) obtemos $H^2 b^2 = -1$. Portanto $\operatorname{Tr} A_w$ é nulo e como w é arbitrário e $\det A_w = 0$ tem-se que V^2 é totalmente geodésica. No segundo caso

$H = -\det P_t \operatorname{tr} P_t$, onde $P_t = (\gamma I + H_\gamma - tA_w)$ é uma matriz um por um. Logo $A_w = 0$ e a imagem da aplicação normal de Gauss é totalmente geodésica e portanto usando a parametrização de Gauss tem-se que $f(M^n) = S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

(3.2.11) Teorema - Seja M^n conexa com curvatura escalar constante $s \neq 0$. Então qualquer imersão isométrica $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é rígida num subconjunto aberto ou $f(M^n) \subset L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$. Se, M^n é completa e $f(M^n) \subset L^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, então $f(M^n) = S^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$.

Demonstração - Como a curvatura escalar $s \neq 0$ tem-se que a nulidade relativa ν é maior ou igual a $n-2$. Se existe $p \in M^n$ tal que $\nu(p) \leq n-3$, então obtem-se de (1.2.10) que f é rígida em algum aberto. Portanto, podemos supor que $\nu(p) = n-2$ para todo $p \in M^n$. Seja $\Psi = \gamma y + \operatorname{grad} \gamma + w$ a parametrização de Gauss de M^n. Então

$$\frac{n(n-1)}{s} = \det P_t,$$

onde $P_t = (\gamma I + H_\gamma - tA_w)$. Assim sendo

$$\frac{n(n-1)}{s} = \det(\gamma I + H_\gamma) - t \operatorname{tr}((\gamma I + H_\gamma)(\operatorname{Adj}(A_w))) + t^2 \det A_w,$$

onde Adj A_w significa a matriz adjunta de A_w. Como s é constante, tem-se

$$(3.2.12) \qquad \det(\gamma I + H_\gamma) = \frac{n(n-1)}{s},$$

$$(3.2.13) \qquad tr((\gamma I + H_\gamma)(Adj(A_w)) = 0,$$

$$(3.2.14) \qquad \det A_w = 0,$$

para todo w normal a imagem da aplicação normal de Gauss. De (3.2.14) e da equação de Gauss tem-se

$$K_{V^2} = 1 + \sum_{i=1}^{\ell} \det A_{w_i} = 1,$$

onde $w_1, \ldots, w_\ell\}$ é uma base de $(TV^2)^\perp$ e V^2 a imagem da aplicação normal de Gauss. Se a codimensão de V^2 é um, segue de (3.2.7) que a nulidade relativa é maior ou igual a um em todo ponto. Se, $p \varepsilon V^2$ é um ponto de nulidade relativa nula, então existem ξ_1, ξ_2, tais que $[v_1] \oplus [v_2] = T_pV^2$, $[v_1] = \ker A_{\xi_1}$ e $v_2 = \operatorname{Ker} A_\xi$ Seja $v = a\, v_1 + b\, v_2$. Então

$$A_{\xi_1+\xi_2}(v) = a\, A_{\xi_2}(v_1) + b\, A_{\xi_1}(v_2).$$

Como A_{ξ_1} e A_{ξ_2} são auto-adjuntas segue-se que

$A_{\xi_1+\xi_2}(v) = \emptyset$ se, só se, $a = b = \emptyset$. Assim sendo a nulidade relativa de V^2 é maior ou igual a um em todo ponto. Se $\operatorname{tr} A_w \neq \emptyset$, seja $\{X_1, Y_2\}$ gerando TV^2 diagonalizando A_w numa vizinhança U de $p \in V^2$ e $A_w X_2 = \emptyset$. Observe que $\nabla_{X_2} X_1 = \nabla_{X_1} X_1 = \emptyset$, onde ∇ é a derivada covariante de V^2. Como

$$\gamma I + H_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma + X_1 X_1(\gamma), & X_2 X_1(\gamma) \\ X_1 X_2(\gamma), & \gamma + X_2 X_2(\gamma) \end{bmatrix},$$

usando $\operatorname{Tr} A_w \neq \emptyset$ e (3.2.13) conclui-se que

$$\gamma + X_2 X_2(\gamma) = \gamma + \langle \nabla_{X_2} \operatorname{grad} \gamma, X_2 \rangle = \emptyset.$$

Logo

$$(3.2.15) \quad - X_1(\gamma) = X_1 \langle \nabla_{X_2} \operatorname{grad} \gamma, X_2 \rangle = \langle \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} \operatorname{grad} \gamma, X_2 \rangle +$$

$$+ \langle \nabla_{X_2} \operatorname{grad} \gamma, \nabla_{X_1} X_2 \rangle = \langle R(X_1, X_2) \operatorname{grad} \gamma, X_2 \rangle + \langle \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} \operatorname{grad} \gamma, X_2 \rangle +$$

$$2 \langle \nabla_{X_2} \operatorname{grad} \gamma, \nabla_{X_1} X_2 \rangle$$

Segue de (3.2.12) e de $\operatorname{tr} A_w \neq \emptyset$ que $-[X_1 X_2(\gamma)]^2 = \frac{n(n-1)}{s}$. Portanto, $\emptyset = X_2 \langle \nabla_{X_1} \operatorname{grad} \gamma, X_2 \rangle = \langle \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} \operatorname{grad} \gamma, X_2 \rangle$. Como

V^2 tem curvatura seccional igual a um, obtem-se $\langle R(X_1,X_2)\text{grad}\ \gamma, X_2\rangle = -\langle X_1, \text{grad}\ \gamma\rangle = -X_1(\gamma)$. Segue de (3.2.8) que

$$0 = \langle \nabla_{X_2}\text{grad}\ \gamma, \nabla_{X_1}X_2\rangle \geq = \langle \nabla_{X_1}X_2, X_1\rangle\langle \nabla_{X_2}\text{grad}\ \gamma, X_1\rangle,$$

que nos leva a uma contradiçao. Portanto $\text{tr}\ A_w = 0$ para todo w normal a imagem da aplicaçao normal de Gauss e V^2 è totalmente geodèsica. Assim sendo se, $\nu(p)=n-2$, $\forall\ p\in M^n$, segue da parametrizaçao de Gauss que $f(M^n)\subset L^2\times \mathbb{R}^{n-2}$. Por outro lado se M^n è completa, segue-se que L^2 è completa com curvatura constante igual a $s\neq 0$. Por conseguinte L^2 è compacta e portanto isomètrica a esfera Euclideana S^2.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Barbosa, J. L. M.; Dajczer, M.; Jorge, L. P. M. - Rigidity of Minimal Submanifold in Space Forms. - **Math. Ann.** 267(1984), 433-437.

[2] Colares, A. G.; Do Carmo, M. P. - **On Minimal Immersions With Parallel Normal Curvature Tensor - Lecture** Notes in Math. 597(1976), 104-113.

[3] Dajczer, M. - Reduction of the **Codimension of Regular** Isometric Immersions - Math. Z. **179(1982), 264-286.**

[4] Dajczer, M.; Gromoll, D. - **Gauss Parametrizations and** Rigidity Aspects of Submanifolds. - **J. Diff. Geometry,** 22(1985), 1-12.

[5] Delgado, J. A.- Rigidez de **Hipersuperfícies - Escola** de Geometria Diferencial, (1978).

[6] Do Carmo, M. P. - Differential **Geometry of Curves and** Surfaces - Prentice-Hall, (1976).

[7] Do Carmo, M. P. - Formas **Diferenciais** e Aplicações - Monografia de Matemática, 37, IMPA.

[8] Do Carmo, M. P. - Geometria **Riemanniana - Projeto** Euclides.

[9] Filho, H. B. R. - Imersões **Isométricas - Escola de** Geometria Diferencial, (1978).

[10] Klotz, T. - Efimov's Theorem About Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature - Advances in Math. 8(1972) 475-543.

[11] Spivak, M. - A Comprehensive Introduction to Differential Geometry - Publish or Perish (1979), vol III, Vol IV e Vol V.