Universidade Federal do Ceará
Pós-Graduação em Matemática.

Subgrupos Permutáveis com Conjugados

Alessandro Wilk S Almeida
Orientador: José Robério Rogério

Fortaleza-2003

Dedico esta dissertação
as minhas mães, Maria do Carmo
Silva Almeida e Mirtes de Jesus
Silva Rodrigues e à minha noiva
Luzimar Mesquita da Silva

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por mais essa etapa de minha vida.

Agradeço em memória a minha avó Maria de Lourdes Silva Almeida.

Ao meu orientador, professor José Robério Rogério, pelo apoio incondicional, pela excelente orientação durante o trabalho, a infinita paciência e pela palavras e conselhos otimistas dados durante nossos estudos.

A todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará e em especial aos professores, Abdenâgo Alves de Barros, José Robério Rogério, Aldir Brasil, Antonio Gervasio Colares e João Lucas Marques Barbosa.

À Andrea Costa Dantas, pelo excelente trabalho desempenhado na secretaria da pós-graduação.

Aos meus professores da Universidade Federal do Piauí, em especial, Vicente de Paulo Lima, Luis Barbosa de Sousa, João Xavier de Cruz Neto e João Benício de Melo Neto.

Agradeço ao professor Vicente de Paulo Lima pelo apoio incondional em todos os momentos de minha vida acadêmica e pessoal.

À todos os colegas do mestrado, em especial a Ricardo Verotti pelo amigo que foi durante todo mestrado, a Luis Fernando do Amaral e Maria Silvana Alcântara.

Agradeço a Jeanne D'arc e Valdiane Sales Araujo pela amizade e o enorme apoio dado durante todos os momentos difíceis.

Agradeço em especial a Cecília Freitas, Cristiane Brandão a Francisco Ênio, pela amizade e toda ajuda dada no decorrer do trabalho.

Enfim, agradeço a todos os membros de minha família.

Introdução

Seja G um grupo. Dizemos que um subgrupo $H \leq G$ é subnormal, se existe uma cadeia finita $H_0 = H \subseteq H_1 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$ onde $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, $\forall i = 0, 1, ..., n-1$. Agora, se $HK = KH$ $\forall K \leq G$, diz-se que H é permutável.

É claro que todo subgrupo normal é permutável e subnormal. Também é fácil ver que $H = \langle y \rangle$ é subnormal e não é permutável em $D_8 = \langle x, y \,|\, x^4 = y^2 = 1\, e\, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$. Um teorema de **Ore** afirma que em um grupo finito, todo subgrupo permutável é subnormal. Vale resaltar que em grupos infintos, subgrupos permutáveis não são necessariamente subnormais(Veja [4]). É interessante observar que na prova desse teorema de **Ore**, apenas é necessário que tal subgrupo permute com os seus conjugados. A partir desta observação, **Turval Forguel**(Veja[9]) definiu os subgrupos permutáveis com conjugados em grupos não necessariamente finitos.

Esta monografia tem como objetivo apresentar em forma mais detalhada - e, quiça, um pouco mais didático, um estudo de tais grupos. Este trabalho será dividido em dois capítulos. O primeiro capítulo recordaremos alguns conceitos e resultados básicos na teoria de grupos, que serão usados no capitulo 2. Dentre os quais destacamos o teorema(W.Feit e J.Thompson)onde vale resaltar o teorema mais celebrado da teoria dos grupos finitos(Veja[2]). Os principais teoremas demonstrados neste capítulo são os seguintes:

Teorema de Wielandt
Seja H sn G, K sn G e assuma que $H \cap K = 1$. Se H é um grupo simples não-abeliano. Então $[H, K] = 1$.

Teorema de Ore
Se H é um subgrupo permutável maximal de um grupo G. Então $H \lhd G$.

Teorema de Ore
Se H é um subgrupo permutável de um grupo finito G. Então H é subnormal em G.

Teorema de Fitting
Sejam M e N subgrupos nilpotentes normais de um grupo G. Se c e d são as classes de nilpotência de M e N. Então $L = MN$ é nilpotente de classe de nilpotência no máximo $c + d$.

O segundo capítulo refere-se ao objetivo principal deste trabalho que é o estudo de subgrupo permutáveis com conjugados de um grupo. Um subgrupo H de um grupo G é permutável com conjugado ($H <_{C-P} (G)$), se $HH^g = H^gH$ para todo $g \in G$.

Na primeira secção provaremos que subgrupos permutáveis com conjugados de um grupo finito são subnormais, e algumas propriedades elementares de subgrupos permutáveis com conjugados. Daremos exemplos de subgrupos subnormais que não são subgrupos permutáveis com conjugados e de subgrupos permutáveis com conjugados que não são permutáveis. Na segunda secção mostremos os principais resultados de nossa monografia:

Teorema: Seja G um grupo finito e $P \in Syl_p(G)$. Se todo subgrupo de P é permutável com conjugados, então G é nilpotente.

Teorema: Se G é um grupo localmente finito e para algum primo p, todo subgrupo cíclico de ordem uma potência de p é permutável com conjugados, então qualquer $P \in Syl_p(G)$ é normal em G.

Teorema: Se G é um grupo contendo um subgrupo finito P tal que $P \in Syl_p(G)$ e $P <_{C-P} G$, então P é normal em G.

Teorema: Se G é um p-grupo localmente finito, p um primo ímpar e qualquer subgrupo cíclico é permutável com conjugado, então $T_i = \{x \in G \mid o(x) \leq p^i\}$ é um subgrupo normal de G.

Essa nova concepção de grupos nasce a partir da demonstração do teorema de Ore, graças a **Turval Foguel** (*Department of Mathematics, University of the West Indies)*

Sumário

Notação

$A \subseteq B$	A é um subconjunto de B.
$\|A\|$	Cardinalidade do conjunto A.
$H \leq G$	H é um subgrupo de G.
$H < G$	H é um subgrupo próprio de G.
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado por um conjunto X.
$H \trianglelefteq G$	H é um subgrupo normal de G.
$H \simeq G$	H é isormofo com G.
H^G	Fecho normal de H em G.
$[H, K]$	Subgrupo gerado por todos comutadores $[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk$.
H sn G	H é um subgrupo subnormal de G.
$Z(G)$	Centro do grupo G.
HK	$\{hk \mid h \in H e\, k \in K\}$.
$G' = [G, G]$	Subgrupo derivado de um grupo G.
x^G	Classe de conjugação do elemento x.
$N_G(H)$	Normalizador de H em G.
$C_G(x)$	Centralizador de x em G.
$H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$	Produto direto.
$\mathcal{O}(x)$	Órbita de um elemento x.
$E(x)$	Estabilizador de um elemento x.
x^g	Conjugado de x por g, $x^g = g^{-1}xg$.
$H^{G,i}$	O i-ésimo fecho normal de H em G.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo recordaremos alguns conceitos e teoremas da teoria de grupos, tais como normalidade; subnormalidade; permutabilidade; o teorema de Sylow; o teorema de Fitting; um teorema de Ore; e um teorema de Wielandt. Estes resultados serão fundamentais no desenvolvimento do capítulo 2.

1.1 Subgrupos Normais

Definição 1.1.1 : *Seja G um grupo, um subgrupo N de G é chamado um subgrupo normal de G, se $x^{-1}Nx \subseteq N, \forall\, x \in G$.*

notação: $N \trianglelefteq G$

Teorema 1.1.1 : *Sejam H e K subgrupos de G, se $(H \text{ ou } K)$ é subgrupo normal de G, então HK é subgrupo de G*

Demonstração:
Seja $\alpha \in HK$. Então existe $h \in H$, $k \in K$ tais que $\alpha = hk$. Considere $\beta = k^{-1}hk$. Como $H \trianglelefteq G$, temos que $\beta \in H$. Logo $\alpha = hk = k\beta \in KH$.
Portanto,

$$HK \subseteq KH.$$

Por outro lado, se $\gamma \in KH$, então existe $k \in K$, $h \in H$ tais que $\gamma = kh$. Consideremos $\gamma = khk^{-1}$ como $H \trianglelefteq G$ temos $\alpha \in H$. Logo, $\gamma = kh = \alpha k \in HK$. Sendo assim, $KH \subseteq HK$.
Portanto,

$$HK = KH.$$

□

Teorema 1.1.2 : *Sejam H e K subgrupos de G. Se $H \trianglelefteq G$ e $K \trianglelefteq G$, então $HK \trianglelefteq G$.*

Demonstração:
Seja $x \in g^{-1}HKg$, onde $g \in G$. $x = g^{-1}hkg = g^{-1}hgg^{-1}kg = (g^{-1}hg)(g^{-1}kg)$. Como $K \trianglelefteq G$ e $H \trianglelefteq G$, temos que $x \in HK$. Logo $g^{-1}HKg \subseteq HK$.
Portanto,

$$HK \trianglelefteq G.$$

□

Teorema 1.1.3 : *Sejam $H \leq K \leq G$. Se $H \trianglelefteq K$ e $L \leq G$, então $H \cap L \trianglelefteq K \cap L$.*

Demonstração:
Dado $g \in K \cap L$ implica que $g \in K$ e $g \in L$. Suponhamos que $x \in g^{-1}(H \cap L)g$. Assim, $x = g^{-1}kg$ onde $k \in H \cap L$. Logo $x \in H \cap L$ e portanto:

$$H \cap L \trianglelefteq K \cap L.$$

□

Proposição 1.1.1 : *Seja $H \leq K \leq G$, se $H \trianglelefteq K$, então $H^g \trianglelefteq K^g$.*

Demontração:
Dado $m \in K^g$ implica $m = k^g$, onde $k \in K$ e $g \in G$. Suponhamos $x \in m^{-1}H^g m$, logo $x = m^{-1}h^g m$ para algum $h \in H$. Daí segue:

$$x = m^{-1}h^g m = (k^g)^{-1}h^g(k^g) = g^{-1}k^{-1}g(g^{-1}hg)g^{-1}kg = g^{-1}k^{-1}hkg.$$

Como $H \trianglelefteq K$, $k^{-1}hk \in H, \forall\, k \in K$. Logo $x = g^{-1}k^{-1}hkg = g^{-1}h^k g \in H^g$. Portanto,

$$H^g \trianglelefteq K^g \ \forall\, g \in G.$$

□

Definição 1.1.2 : *O fecho normal de um subgrupo H de G é o menor subgrupo normal de G que contém H.*

Notação: H^G fecho de H em G, onde $H^G = \bigcap\limits_{\substack{N \trianglelefteq G \\ N \supseteq H}} N$

Proposição 1.1.2 : *Seja $H \leq G$, então $H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle$.*

Demonstração:

Temos por definição $H^G = \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ N \supseteq H}} N$. Seja $N \supseteq H$, $N \trianglelefteq G$ e $g \in G$. Como $N \trianglelefteq G$, temos $N = N^g \supseteq H^g$. Portanto $\langle H^g \mid g \in G \rangle \subseteq N$. Por outro lado, temos que $\langle H^g \mid g \in G \rangle \trianglelefteq G$ e ainda $H \subseteq \langle H^g \mid g \in G \rangle$. Sendo assim,

$$\bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ H \subseteq N}} N \subseteq \langle H^g \mid g \in G \rangle$$

Portanto, $H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle$. □

1.2 Comutadores

Seja G um grupo e sejam $x_1, x_2, ..., x_m$ elementos de G. O comutador de x_1 e x_2 é definido como:

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$$

Mais geralmente, um simples comutador de comprimento $n \geq 2$ é definido recursivamente pela regra:

$$[x_1, x_2, ..., x_n] = [[x_1, ..., x_{n-1}], x_n]$$

Denotemos ainda um comutador formado por um único elemento de G, como sendo $[x_1] = x_1$. Usaremos ainda a seguinte notação:

$$[x\ ,\ _n y] = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{n}]$$

Teorema 1.2.1 : *Seja x, y, z elementos de um grupo. Então:*

(i)- $[x, y] = [y, x]^{-1}$
(ii)- $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ *e* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$
(iii)- $[x, y^{-1}] = (\ [x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ *e* $[x^{-1}, y] = (\ [x, y]^{x^{-1}})^{-1}$
(iv)- *Suponhamos $z = [x, y]$ comute com ambos x e y. Então* $[x^i, y^j] = z^{ij}, \forall\ i, j$
(v)- $[xy, w] = [x, w][x, w, y][y, w]$
(vi)- $[x, yw] = [x, w][x, y][x, y, w]$
(vii)- *(Identidade Hall-Witt)* $[x, y^{-1}, w]^y [y, w^{-1}, x]^w [w, x^{-1}, y]^x = 1$

Demonstração:
Segue das definições. Vejamos a demonstração de (iv).
Temos $z = x^{-1}y^{-1}xy$, donde $y^{-1}xy = xz$. Logo, $y^{-1}x^iy = (y^{-1}xy)^i = (xz)^i = x^iz^i$, pelo fato de z comutar com x. Sendo assim,

$$y^{-2}x^iy^2 = y^{-1}x^iz^iy = y^{-1}x^iyz^i = (x^iz^i)z^i = x^iz^{2i}$$

Repetindo esse processo j vezes, concluímos que:

$$y^{-j}x^iy^j = x^iz^{ij}$$

Logo, $x^{-i}y^{-j}x^iy^j = z^{ij}$ $\forall\ i, j$. Portanto:

$$[x^i, y^j] = z^{ij}\ \forall\ i, j.$$

Proposição 1.2.1 *: A identidade* $[u^m, v] = [u, v]^{u^{m-1}+u^{m-2}+\ldots+u+1}$ *é válida em qualquer grupo (onde,* $x^{y+z} = x^yx^z$*). Portanto, se* $[u, v]$ *pertence ao centro de* $\langle u, v\rangle$*, então* $[u^m, v] = [u, v]^m =$ $= [u, v^m]$.

A prova segue por indução sobre m.
Demonstração: (i)- O teorema é verdadeiro para $m = 1$.

(ii)- Suponhamos o teorema verdadeiro para m, isto é;

$$[u^m, v] = [u, v]^{u^{m-1}+u^{m-2}+\ldots+u+1}$$

(iii)- Mostremos que o teorema é verdadeiro para $m + 1$, ou seja;

$$[u^{m+1}, v] = [u, v]^{u^m+u^{m-1}+\ldots+u+1}$$

Prova: De fato,

$$\begin{aligned} [u^{m+1}, v] = [uu^m, v] &= [u, v]^{u^m}[u^m, v] \overset{\text{h.i}}{=} \\ &= [u, v]^{u^m}([u, v]^{u^{m-1}+u^{m-2}+\ldots+u+1}) \\ &= [u, v]^{u^m+u^{m-1}+\ldots+u+1} \end{aligned}$$

Logo: $[u^{m+1}, v] = [u, v]^{u^m+u^{m-1}+\ldots+u+1}$

Portanto,

$$[u^m, v] = [u, v]^{u^{m-1}+u^{m-2}+\ldots+u+1}.$$

Suponhamos $[u,v] \in Z(\langle u,v \rangle)$, isto é, que $[u,v]$ comuta com ambos u e v. Pelo item (iv) do teorema 1.2.1 temos que:

$$[u^m, v] = [u,v]^m = [u, v^m].$$

Proposição 1.2.2 : *Sejam H,K,L subgrupos de um grupo G. Então:*

(1) *Se $H \trianglelefteq G$ e $K \trianglelefteq G$. Então $[H,K] \trianglelefteq G$.*

(2) *Se $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ e $L \trianglelefteq G$. Então $[HK, L] = [H,L][K,L]$.*

Demonstração:
(1) Sejam $g \in G$, $h \in H$ e $k \in K$ temos $[h,k]^g = g^{-1}[h,k]g = g^{-1}h^{-1}gg^{-1}k^{-1}gg^{-1}hgg^{-1}kg =$ $= [h^g, k^g] = [h_1, k_1]$, para certos $h_1 \in H$ e $k_1 \in K$, pois $H \trianglelefteq G$ e $K \trianglelefteq G$. Portanto, $[H,K] \trianglelefteq G$.

(2) Como $[H,L] \leq [HK,L]$ e $[K,L] \leq [HK,L]$ temos que $[H,L][K,L] \leq [HK,L]$. Além disso, $[hk,l] = [h,l]^k[k,l] = [h^k, l^k][k,l] \in [H,L][K,L]$. Pois $H \trianglelefteq G$ e $L \trianglelefteq G$. Portanto, $[HK,L] \leq [H,L][K,L]$.

1.3 Subgrupos Subnormais

Definição 1.3.1 : *Um subgrupo H de um grupo G, é dito subnormal em G se existem subgrupos $H_0 = H, H_1, ..., H_n = G$ tal que:*

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_n = G.$$

Notação: H sn G.

Exemplo 1.3.1 : *Seja o grupo Diedral $D_4 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1 \text{ e } yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ e considere $K = \langle y \rangle$. Note que $\langle y \rangle$ sn D_4 e $\langle y \rangle$ não é normal em D_4*

Proposição 1.3.1 : *Se $H \, sn \, G$, então $H^g \, sn \, G \ \forall \, g \in G$.*

Demonstração:
Se $H \, sn \, G$, existem subgrupos $H_0, H_1, \ldots, H_n$ tais que $H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_n = G$. Pela proposição 1.1.1 temos:

$$H^g = H_0^g \trianglelefteq H_1^g \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_n^g = G.$$

Tomemos $K_i = H_i^g \ \forall \, i \in \{0, 1, ..., n\}$. Logo $H^g = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq K_n = G$. Portanto H^g sn G.

Proposição 1.3.2 : *Seja H sn $K \leq G$ e $L \leq G$. Então $H \cap L$ sn $K \cap L$.*

Demonstração:
Como H sn K, temos por definição que existem $G_0, G_1, ..., G_n$ tais que:

$$H = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = K.$$

Pelo teorema 1.1.3, temos:

$$H \cap L = G_0 \cap L \trianglelefteq G_1 \cap L \trianglelefteq G_2 \cap L \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n \cap L = K \cap L.$$

Denotemos $H_i = G_i \cap L \, \forall \, 0 \leq i \leq n$. Sendo assim, temos:

$$H \cap L = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_n = K \cap L.$$

Portanto $H \cap L$ sn $K \cap L$. $\square$

Uma ferramenta importante no estudo de subnormalidade é a série de sucessivos fechos normais. Se X é um subconjunto não-vazio de um grupo G, uma sequência de subgrupos $X^{G,i}$ $i = 0, 1, 2, ...$ é definido pela regra:

$$X^{G,0} = G \text{ e } X^{G,i+1} = X^{X^{G,i}}$$

onde:

$$X^{X^{G,i-1}} = \langle x^y \mid x \in X, y \in X^{G,i-1} \rangle.$$

Portanto X está contido em todo $X^{G,i}$ e

$$... \trianglelefteq X^{G,2} \trianglelefteq X^{G,1} \trianglelefteq X^{G,0} = G.$$

Observação:

(1) $X^{G,1} = X^{X^{G,0}} = X^G$.

(2) Se $H \trianglelefteq G$. Então $H^{G,0} = G, H^{G,1} = H^G = H, ..., H^{G,i} = H \; \forall i$.

Exemplo 1.3.2 : *Seja $G = S_3$ e $H = \langle (12) \rangle$. Temos que H não é subnormal em G.*

Solução: Com efeito, $N_G(H) = H$.

Proposição 1.3.3 : *Seja H sn G e $H = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_{n-2} \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_0 = G$. Então $H^{G,i} \leq H_i$ e portanto $H^{G,n} = H$.*

Demonstração:
A prova segue por indução sobre i.
Com efeito, $H^{G,0} = G = H_0$. Suponhamos que $H^{G,i} \leq H_i$. Como $H \leq H_{i+1}$ e $H_{i+1} \trianglelefteq H_i$, temos $H^{G,i+1} = H^{H^{G,i}} \leq H_{i+1}^{H_i} = H_i$. Portanto, $H^{G,i} \leq H_i \ \forall i = 0, 1, 2, ..., n$. Em particular, $H = H^n \supseteq H^{G,n} \supseteq H$. Logo $H = H^{G,n}$. □

Corolário 1.3.1 : *H sn G se, somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H^{G,n} = H$*

Definição 1.3.2 : *Seja H um subgrupo subnormal de G. Definimos o índice de subnormalidade de H em G, como o menor inteiro $n \geq 0$ tal que $H = H^{G,n}$.*

Notação: $s(G : H) = n$

Observação:
(1)- $s(G; H) = 0$, quando $H = G$.
(2)- $s(G : H) = 1$ se, e somente se, $H \trianglelefteq G$ e $H \neq G$.

Proposição 1.3.4 : *Se $H \leq G$. Então $H^{G,i} = H[G, {}_iH] \ \forall i \geq o$*

Demonstração: A prova segue por indução sobre i.

(1) Para $i = 1$, temos $H^{G,1} = H^G = \langle H, [G, H] \rangle = H[G, H]$. Pois $[G, H] \trianglelefteq G$.

(2) Suponhamos o teorema verdadeiro para i, isto é,

$$H^{G,i} = H[G, {}_iH]$$

(3) Provaremos verdadeiro para $i + 1$, ou seja, $H^{G,i+1} = H[G, {}_{i+1}H]$

Prova: $H^{G,i+1} = H^{H^{G,i}} = H^{H[G,{}_iH]} = \langle H, [H, [G, {}_iH]\ ] \rangle = \langle H, [\ [G, {}_iH], H] \rangle =$
$= \langle H, [G, {}_{i+1}H] \rangle = H[G, {}_{i+1}H]$. Portanto, $H^{G,i} = H[G, {}_iH]$ para todo i. □

Teorema 1.3.1 : *Seja $\{H_\lambda \mid \lambda \in I\}$ um conjunto de subgrupos subnormais de um grupo G, tal que $s(G : H_\lambda) \leq n$ para todo $\lambda \in I$. Então $H = \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$ sn G.*

Demonstração:
Por definição $H \subseteq H^{G,n}$. Como H_λ é um subgrupo subnormal de G, temos $H_\lambda^{G,n} = H_\lambda$ para todo $\lambda \in I$. Temos ainda que $H \subseteq H_\lambda$ para todo λ. Sendo assim $H^{G,n} \subseteq H_\lambda^{G,n} = H_\lambda$. Logo,

$H^{G,n} \subseteq H_\lambda$ para todo $\lambda \in I$. Assim:

$$H^{G,n} \subseteq \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda.$$

Portanto,

$$H^{G,n} = H.$$

□

Observação: Entretanto a interseção de uma coleção arbitrária de subgrupos subnormais pode não ser subnormal.

Exemplo 1.3.3 : *Considere o grupo diedral infinito* $D_\infty = \langle x, a \mid a^x = a^{-1}, x^2 = 1\rangle$ *e o conjunto* $H = \{H_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, *onde* $H_i = \langle x, a^{2^i}\rangle$.

Solução: Com efeito, note que $H_{i+1} \trianglelefteq H_i$. Afirmamos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = \langle x\rangle$ e que $N_G(\langle x\rangle) = \langle x\rangle$. Observe que os elementos de H_i são da forma $x^l a^{2^i m}$ com $l \in \{0, 1\}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Mas, $\forall i \in \mathbb{N}$ e $\forall m \in \mathbb{Z}^*$, $a^{2^i m} \notin H_j$, se $j > 2^i m$. Como, $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$, temos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = \langle x\rangle$. Agora, como $N_G(\langle x\rangle) = \langle x\rangle.C_{\langle a\rangle}(\langle x\rangle)$ e $C_{\langle a\rangle}(\langle x\rangle) = 1$, segue-se que $N_G(\langle x\rangle) = \langle x\rangle$. □

Definição 1.3.3 : *Um subgrupo subnormal* H *de* G *é dito subnormal minimal se* $H \neq 1$, *e não existe* $1 \neq N$ *sn* G *tal que* $N < H$.

Notação: H min-sn G.

Proposição 1.3.5 : *Seja* H *um subgrupo subnormal simples de* G. *Então* H *é subgrupo subnormal minimal de* G.

Demonstração:
Suponhamos que H não seja subgrupo subnormal minimal de G. Logo existe um subgrupo $1 \neq N$ sn G tal que $N < H$. Como N sn G, implica N sn H. Seja $s(H : N) = m \geq 1$, isto é, $N = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft ... \triangleleft H_m = H$. Sendo H simples temos que:

$$H_{m-1} = 1 \text{ ou } H_{m-1} = H.$$

é um absurdo. □

Teorema 1.3.2 (Wielandt) : *Seja* H *sn* G, K *sn* G *e assuma que* $H \cap K = 1$. *Se* H *é um grupo simples não abeliano, então* $[H, K] = 1$.

Demonstração:
Seja $J = \langle H, K\rangle$ e $s = s(J : H)$. Analisemos os seguintes casos:
Caso 1: Se $s \leq 1$. Então $H \trianglelefteq J$. Afirmamos ainda que $N_J([H,K]) = J$. De fato, temos $[H,K]^H = [H,K]$ e $[H,K]^K = [H,K]$. Portanto $N_J([H,K]) = J$.
Como $H \trianglelefteq J$, temos $[H,K] \leq H$. Sendo assim, como $[H,K] \trianglelefteq J$, segue $[H,K] \trianglelefteq H$. Pela simplicidade de H temos:

$$[H,K] = 1 \, ou \, [H,K] = H.$$

Afirmação: $[H,K] = 1$.
Suponhamos que $[H,K] = H$, então $H \leq K^J$. Como $H \leq K^J$ e $K \leq K^J$, $\langle H, K\rangle \subseteq K^J$. Assim, $J \subseteq K^J$ e portanto, $K^J = J$. Consequentemente, pela subnormalidade de K, temos que $K = J$.
Sendo assim, $H \leq K$. Logo $H \cap K = H$. Mas, por hipótese $H \cap K = 1$, então $[H,K] = 1$.

Caso 2: Assuma agora que $s > 1$. Neste caso, temos que H não é normal em J. Logo existe $k \in K$ tal que $H^k \neq H$. Como $H \, sn \, G$ e $H^k \, sn \, G$, $H \cap H^k \, sn \, G$; sendo assim $H \cap H^k sn \, H$. Pela simplicidade de H, temos que $H \cap H^k = 1$. Agora $s(H^K : H) = s - 1$. Por indução sobre s, temos $[H^k, H] = 1$.
Afirmação: $H' \leq [H,K]$.
De fato, se $h_1, h_2 \in H$, temos que:

$$\begin{aligned} 1 = [h_1, h_2^k] &= [h_1, k^{-1}h_2k] \\ &= [h_1, h_2k][h_1, k^{-1}]^{h_2k} \\ &= [h_1, k][h_1, h_2]^k[h_1, k^{-1}]^{h_2k} \end{aligned}$$

Sendo assim, $[h_1, k][h_1, h_2]^k[h_1, k^{-1}]^{h_2k} = 1$. Logo, $[h_1, h_2]^k = [h_1, k]^{-1}([h_1, k^{-1}]^{h_2k})^{-1}$, isto é, $[h_1, h_2]^k \in [H,K] \trianglelefteq J$. Portanto, $[h_1, h_2] \in [H,K]$.

Temos ainda $H = H'$, pois H é simples não-abeliano. Como $H' \leq [H,K]$ e $H' = H$, $H \leq [H,K]$. Logo, $H \leq K^J$ o que implica $J = K^J$. Pela subnormalidade de K, temos $K = J$. Portanto, $H \leq K$ e $H \cap K = H$. Logo, $H = 1$, pois $H \cap K = 1$. Isso mostra que $[H,K] = 1$. □

1.4 Subgrupos Permutáveis

Nesta parte veremos os subgrupos de um grupo, que permutam com todos os subgrupos do grupo. De longe, o exemplo mais importante de subgrupos permutáveis são os subgrupos normais.

Definição 1.4.1 : *Seja H um subgrupo de um grupo G, dizemos que H é permutável no grupo G, se $HK = KH$ para todo $K \leq G$.*

Notação: H per G.

Proposição 1.4.1 : *Seja H subgrupo de um grupo G. Se $H \trianglelefteq G$, então H per G.*

Demonstração:
Como $H \trianglelefteq G$, temos que $g^{-1}Hg = H$ para todo $g \in G$. Em particular, para todo subgrupo K de G, $k^{-1}Hk = H\ \forall k \in K$. Portanto, $kH = Hk$ para todo $k \in K$. Assim, concluímos que $KH = HK$ para todo $K \leq G$. □

Observação:
(i) Sejam $H \leq K \leq G$, se H per G. Então H per K.
(ii) O exemplo a seguir mostra subnormalidade não implica permutabilidade.

Exemplo 1.4.1 : *Considere o grupo diedral $D_4 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1$ e $y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$ e os subgrupos $H = \langle y\rangle$ e $K = \langle xy\rangle$. Note que H e K são subnormais. Mas H e K não são subgrupos permutáveis de G.*

De um ponto de vista oposto, pergunta-se : subgrupos permutáveis são subnormais? Isso é verdade para grupos finitos, como veremos.

Proposição 1.4.2 : *Seja H subgrupo permutável de um grupo G. Então H^g é permutável em G, para todo $g \in G$.*

Demonstração:
Temos $H^gK = (HK^{g^{-1}})^g = (K^{g^{-1}}H)^g = KH^g\ \forall\ g \in G$ e $\forall\ K \leq G$. □

Proposição 1.4.3 : *Seja H um subgrupo maximal permutável de um grupo G. Então H^g é um subgrupo maximal permutável de G, $\forall g \in G$.*

Demonstração:
Suponhamos que exista um subgrupo permutável N de G tais que $H^g < N < G$. Isso implica que $H < gNg^{-1} < G$, isto é, $H < K < G$ onde $K = gNg^{-1}$ é subgrupo permutável de G. Portanto, existe um subgrupo permutável de G e que $H < K < G$ (absurdo). Pois H é subgrupo maximal permutável de G. □

Teorema 1.4.1 (Ore) : *Se H é um subgrupo permutável maximal de um grupo G. Então $H \trianglelefteq G$.*

Demonstração:
Suponhamos por absurdo que H não seja normal em G. Então existe $g \in G$, tal que $g^{-1}Hg \neq H$, ou seja, existe um conjugado K de H tal que $K \neq H$, onde $K = g^{-1}Hg$. Temos ainda que $HK \leq G$, pois H subgrupo permutável de G.
Afirmação 1: HK per G.

De fato, $(HK)M = (KH)M = K(HM) = K(MH) = (KM)H = (MK)H = M(KH)$. Logo, $(HK)M = M(HK), \forall M \leq G$. Portanto, HK per G.

Pela maximalidade de H, temos:

$$H = HK \text{ ou } G = HK.$$

Afirmação 2: $H \neq HK$.

De fato, suponhamos que $H = HK$. Logo, $K \subseteq H$. Como K é permutável maximal em G, implica que $K = H$ ou $H = G$. Sendo $H \neq G$, temos $K = H$ (absurdo).
Sendo assim, concluímos $G = HK$. Seja $g = hk$ para algum $h \in H$ e $k \in K$. Portanto, $K = H^{hk}$. Daí segue-se:
$K = H^{hk} = (hk)^{-1}H(hk) = k^{-1}h^{-1}Hhk = k^{-1}Hk$. Logo $K = H$ (absurdo).
Portanto, $H \trianglelefteq G$. □

Teorema 1.4.2 (Ore) : *Se H é um subgrupo permutável de um grupo finito G. Então H é subnormal em G.*

Demonstração: Refinemos a série $1 \leq H \leq G$, sendo assim segue-se:
É claro que podemos supor $H < G$. Sendo H per G e G finito, existe um subgrupo H_1 maximal permutável em G contendo H. Se $H = H_1$, já teremos $H \lhd G$, pelo teorema1.4.1. Caso contrário, obtemos H_2 maximal permutável em H_1 contendo H. Se $H_2 = H$, teremos $H \lhd H_1 \lhd G$. Caso contrário, continuamos o processo para obtemos uma cadeia

$$H = H_n < H_{n-1} < \ldots H_1 < H_0 = G,$$

onde H_i é maximal permutável em H_{i-1} $\forall\ i = n, n-1, \ldots, 1$. Portanto, pelo teorema1.4.1, H sn G. □

1.5 Subgrupos de Sylow

Seja G um grupo finito e p um primo. Se $|G| = p^a m$, onde $(p, m) = 1$ então um p-subgrupo de G não pode ter ordem maior que p^a pelo teorema de Lagrange. Os subgrupos de G que têm ordem p^a são chamados p-subgrupos de Sylow de G. Um dos principais teoremas da teoria dos grupos afirma que p-subgrupos de Sylow sempre existe, dois quaisquer são conjugados, e que o número deles é congruente a 1 módulo p.

$$\textit{Denotemos}: Syl_p(G) = \{P \leq G \mid |P| = p^a\}.$$

Teorema 1.5.1 (Sylow-1872) : *Seja G um grupo finito e p um primo tal que $|G| = p^a m$, onde $(p, m) = 1$. Então:*

(i) *Todo p-subgrupo de G está contido em um subgrupo de ordem p^a, chamado p-subgrupo de Sylow.*
(ii) *Se n_p é o número de p-subgrupo de Sylow, $n_p \equiv 1 (mod\ p)$.*
(iii) *Todos os p-subgrupos de Sylow são conjugados em G.*

Demonstração:
Seja X o conjunto de todos subconjuntos de G com exatamente p^a elementos, isto é;

$$X = \{S \subseteq G \mid |S| = p^a\}$$

Considere a seguinte ação

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi: & G & \longrightarrow & S_X & & & \\ & g & \longmapsto & \varphi(g): & X & \longrightarrow & X \\ & & & & S & \longmapsto & gS \end{array}$$

Sendo assim φ é uma representação permutacional de G em X, com

$$|X| = \binom{p^a m}{p^a} = \frac{p^a m!}{p^a!\ (p^a m - p^a\ )!} = \frac{m\ (p^a m - 1\ )\ (p^a m - 2).....(p^a m - p^a + 1)}{(p^a - 1)(p^a - 2).....3.2.1}.$$

Mostremos agora que p não divide $|X|$.

Afirmação 1: Para todo $1 \leq i \leq p^a - 1$, p^j divide i se, e somente se, p^j divide $p^a m - i$.
De fato, suponhamos que $p^j|i$. Neste caso, $j < a$. Pois caso contrário, $p^a|i$ (absurdo). Pois $1 \leq i \leq p^a - 1$. Sendo $j < a$ teríamos $p^j|p^a$ e $p^j|p^a m$. Logo $p^j|p^a m$ e $p^j|i$. Portanto $p^j|p^a m - i$.

Reciprocamente, se $p^j|p^a m - i$. Então $j < a$ e $p^j|i$. De fato, se $j \geq a$ teríamos $p^a|i$ (absurdo). Pois $1 \leq i \leq p^a - 1$. Sendo $j < a$, $p^j|p^a m$ e como por hipótese $p^j|p^a m - i$, temos $p^j|i$.
Logo, pela afirmação acima, $p^a m - i$ e i têm as mesmas potências de p. Assim toda potência de p no numerador é cancelada com toda potência de p do denominador. Consequentemente $|X|$ não tem nenhuma potência de p. Portanto p não divide $|X|$. Como φ é uma representação permutacional de G em X temos então $X = \mathcal{O}(S_1) \dot{\bigcup} \mathcal{O}(S_2) \dot{\bigcup} ... \dot{\bigcup} \mathcal{O}(S_r)$ onde $\mathcal{O}(S_i) = \{gS_i \mid g \in G\}$.

Portanto p não divide $|\mathcal{O}(S_i)|$ para algum $1 \leq i \leq r$. Seja $P = E(S_i) = \{g \in G \mid gS_i = S_i\}$. Como $|\mathcal{O}(S_i)| = |G : E(S_i)|\ \forall\, S_i \in X$. Assim, p não divide $|G : E(S_i)| = |G : P|$, ou seja, p não divide $|G : P|$.
E mais, como $|G| = |G : P|.|P|$, p^a divide $|P|$. Portanto $p^a \leq |P|$. Por outro lado, para cada $x \in S_i$, $Px \subseteq S_i$. Sendo assim, $|Px| \leq |S_i|$, o que implica $|Px| \leq |S_i| = p^a$. Como

$|Px| = |P|$, $p^a \geq |P|$. Portanto, $|P| = p^a$ e P é um p-subgrupo de Sylow de G. Consequentemente $Syl_p(G) \neq \emptyset$.

Seja $P \in Syl_p(G)$, $Y = \{P^g \mid g \in G\}$. Consideremos a ação de G sobre Y.

$$\begin{array}{rcl} \varphi : P & \longrightarrow & S_Y \\ x & \longmapsto & \varphi(x) : \begin{array}{rcl} Y & \longrightarrow & Y \\ P^g & \longmapsto & P^{gx^{-1}} \end{array} \end{array}$$

Afirmação 2: $\mathcal{O}(P_1) = \{P_1\}$ se, e somente se, $P_1 = P$ $\forall P_1 \in Y$.
De fato, suponha que $\mathcal{O}(P_1) = \{P_1\}$. Assim, $P_1^g = P_1$ $\forall g \in P$. Logo, $PP_1 = P_1P$ e $PP_1 \leq G$. Temos ainda que:

$$|PP_1| = \frac{|P||P_1|}{|P \cap P_1|} = p^\alpha.$$

Como $P \leq P_1P$, $P = P_1P$ (pela ordem de P). Portanto $P_1 = P$. Reciprocamente, $\mathcal{O}(P) =$
$= \{\varphi(g)(P) \mid g \in P\} = \{P^g \mid g \in P\} = \{P\}$. □

Temos ainda, $Y = \mathcal{O}(P_1)\dot{\bigcup}\, \mathcal{O}(P_2)\dot{\bigcup} \dots \dot{\bigcup}\mathcal{O}(P_s)$. Logo,

$$|Y| = 1 + |\mathcal{O}(P_2)| + |\mathcal{O}(P_3)| + \dots + |\mathcal{O}(P_s)|.$$

Como $|\mathcal{O}(P_i)| = |P : E(P_i)|$, $|\mathcal{O}(P_i)|$ divide $|P|$ e ainda $|\mathcal{O}(P_i)| > 1$ $\forall i = 2, 3, \dots, s$. Portanto,

$$|Y| = 1 + p^{n_2} + p^{n_3} + \dots + p^{n_s}$$

onde $n_i > 0$, $\forall i = 2, \dots, s$. Logo, $|Y| \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$.

Mostremos que para todo p-subgrupo H de G, H está contido num conjugado de P em G. De fato, suponhamos que $|H| = p^b$ e $H \nsubseteq P^g$ para todo $g \in G$. Consideremos agora a seguinte ação:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : H & \longrightarrow & S_Y \\ h & \longmapsto & \varphi(h) : \begin{array}{rcl} Y & \longrightarrow & Y \\ P^g & \longmapsto & P^{gh^{-1}} \end{array} \end{array}$$

Isto é, H age por conjugação em Y.

Afirmação 3: Toda órbita tem mais que um elemento, isto é, $|\mathcal{O}(P_i)| > 1$.
Com efeito, suponhamos que $\mathcal{O}(P_i) = \{\varphi(h)(P_i) \mid h \in H\} = \{P_i^h \mid h \in H\} = \{P_i\}$. Logo, $P_i^h = P_i$ $\forall h \in H$ e $P_iH = HP_i$. Portanto, $P_iH \leq G$, com

$$|P_iH| = \frac{|P_i||H|}{|P_i \cap H|} = p^\beta$$

Como $P_i \leq HP_i$, $HP_i = P_i$ (pela ordem de P_i). Portanto, $H \leq P_i$ (absurdo). Pois estamos supondo $H \not\subseteq P^g \; \forall \, g \in G$.
Logo, toda órbita tem mais que um elemento, ou seja, $|\mathcal{O}(P_i)| > 1$. Sendo assim $|Y| \equiv 0 \,(mod\, p)$ (absurdo). Portanto, para todo $H \leq G$, H é um p-subgrupo de G e H está contido num conjugado de P em G.

Com isso, mostramos ainda que quaisquer dois p-subgrupo de Sylow de G são conjugados. De fato, dados $P, Q \subseteq Syl_p(G)$. Como $|Q| = p^a$, $Q \subseteq P^g$. Portanto, $Q = P^g$ para algum $g \in G$. Pois $|P^g| = |P| = P^a$.
Isso mostra também que $Y = Syl_p(G)$. Portanto, $n_p \equiv 1 \,(modp)$. □

Proposição 1.5.1 : *Seja P um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito G. Se $N_G(P) \leq H \leq G$, então $N_G(H) = H$.*

Basta mostrar que $N_G(H) \subseteq H$

Demonstração:
De fato, temos por hipótese que P é um p-subgrupo de Sylow de H. Seja $x \in N_G(H)$, logo $P^x \leq H$. Como G é finito temos que P e P^x são conjugados, isto é, existe $h \in H$ tal que:

$$P = (P^x)^h = P^{xh}.$$

Sendo assim, $xh \in N_G(P)$. Logo, $xh \in H$ já que $N_G(P) \leq H$. Portanto, $x \in H$ e $N_G(H) \subseteq H$.

1.6 Grupos Nilpotentes

Seja G um grupo, existe um modo natural de generelizar uma série descendente de comutadores. Por repetido comutadores de G. Definimos a série da seguinte forma :

$$\gamma_1(G) = G, \; \gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G] = G', \; \gamma_3(G) = [\gamma_2(G), G], ..., \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \; \forall \; i \in \mathbb{N}.$$

Note que :

$$G = \gamma_1(G) \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq ... \trianglerighteq \gamma_i(G) \trianglerighteq ...$$

A série acima definida é chamada série central descendente.

Observação: Existe uma série ascendente de subgrupos de G. Definida indutivamente por:

$$1 = Z_0(G) \trianglelefteq Z_1(G) = Z(G) \trianglelefteq Z_2(G) \trianglelefteq ...$$

onde, $\dfrac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z\left(\dfrac{G}{Z_i(G)}\right)$.

Definição 1.6.1 : *Um grupo G é nilpotente, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_{n+1}(G) = 1$. O menor inteiro que satisfaz esta propriedade é chamado de classe de nilpotência de G.*

Observação: G é nilpotente se, e somente se, $Z_n(G) = G$.

Teorema 1.6.1 :
(i)- *Todo p-grupo finito é nilpotente.*
(ii)- *Se H,K são nilpotentes, então $H \times K$ é nilpotente.*

Demonstração:
(i)- Todo p-grupo finito tem $Z(G) \neq 1$. Se para algum i, $Z_i(G) \neq G$ então $\dfrac{G}{Z_i(G)} \neq 1$. Sendo assim,

$$\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_i(G)}\right) \neq 1.$$

Temos então, $\dfrac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} \neq 1 \therefore Z_i(G) < Z_{i+1}(G)$. Como G é finito, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $Z_i(G) = G$. Portanto, G é nilpotente.

(ii)- Afirmamos primeiro que $\gamma_i(H \times K) \leq \gamma_i(H) \times \gamma_i(K)$ $\forall\, i$. A prova segue por indução sobre i. De fato,
1- Para $i = 1$, $\gamma_1(H \times K) = H \times K = \gamma_1(H) \times \gamma_1(K)$.

2- Suponhamos o teorema verdadeiro para i, isto é,

$$\gamma_i(H \times K) \leq \gamma_i(H) \times \gamma_i(K).$$

3- O teorema é verdadeiro para $i+1$, ou seja;

$$\gamma_{i+1}(H \times K) = [\gamma_i(H \times K), H \times K] \leq [\gamma_i(H) \times \gamma_i(K), H \times K] \leq [\gamma_i(H), H] \times [\gamma_i(K), K] =$$
$= \gamma_{i+1}(H) \times \gamma_{i+1}(K)$.
Finalmente, suponhamos que $\gamma_{c+1}(H) = 1 = \gamma_{d+1}(K)$. Seja $l = \text{máx}\,\{c, d\}$, então $\gamma_l(H \times K) \leq$ $\leq \gamma_l(H) \times \gamma_l(K) = 1 \therefore \gamma_l(H \times K) = 1$ e $H \times K$ é nilpotente.

Caracterização de Grupos Nilpotentes Finitos

Teorema 1.6.2 :*Seja G um grupo finito. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *G é nilpotente.*
(ii) *Todo subgrupo de G é subnormal.*
(iii) *G satisfaz a condição do normalizador.*
(iv) *Todo subgrupo maximal de G é normal.*
(v) *G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.*

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Seja G um grupo nilpotente de classe c, logo $Z_c(G) = G$.

Afirmação: Se $H \leq G$, então $HZ_i(G) \trianglelefteq HZ_{i+1}(G)$ $\forall$ i.

De fato, dado $g \in HZ_{i+1}(G)$, $g = hx$ onde $h \in H$ e $x \in Z_{i+1}(G)$. Logo,

$$g^{-1}(HZ_i(G))g = (HZ_i(G))^g = H^g Z_i(G)^g = H^x Z_i(G).$$

Pois, $Z_i(G) \trianglelefteq G$ e $Z_i(G) \trianglelefteq Z_{i+1}(G)$. Afirmamos ainda que $H^x \subseteq HZ_i(G)$. Com efeito, suponhamos $y \in H^x = \{h_1^x \,|\, h_1 \in H\}$ $\therefore$ $y = h_1^x = x^{-1}h_1x = h_1[h_1, x] \in HZ_i(G)$. Pois, $\dfrac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z\left(\dfrac{G}{Z_i(G)}\right) \Longrightarrow [Z_{i+1}(G), G] \leq Z_i(G)$. Logo, $H^x \subseteq HZ_i(G)$.

Finalmente, como $H^x \subseteq HZ_i(G)$ temos $H^x Z_i(G) \subseteq HZ_i(G)$. Portanto, $HZ_i(G) \trianglelefteq HZ_{i+1}(G)$. Logo, pela definição da série central ascendente, temos:

$$H = HZ_0(G) \trianglelefteq HZ_1(G) \trianglelefteq ... \trianglelefteq HZ_c(G) = G.$$

Logo, H subnormal em G.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Seja $H \leq G$, como H sn G, existem subgrupos $H_0 = H, H_1, ..., H_n = G$, tais que:

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft ... \triangleleft H_n = G.$$

seja i o menor inteiro positivo tal que $H \neq H_i$. Assim $H = H_{i-1} \triangleleft H_i$, então $H_i \leq N_G(H)$. Portanto $H < N_G(H)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Seja H um subgrupo maximal de G. Como G satisfaz a condição do normalizador, $H < N_G(H)$. Logo pela maximalidade de H, temos $N_G(H) = G$. Portanto $H \triangleleft G$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Mostremos primeiro, se $P \in Syl_p(G)$, então $P \trianglelefteq G$.

De fato, suponhamos que P não seja normal em G, então $N_G(P) < G$. Como G é finito, temos que $N_G(P) \leq H$ para algum H subgrupo maximal de G. Pela maximalidade de H, temos que $N_G(H) = G$ (absurdo). Pois contradiz a proposição 1.5.1 Portanto, dado $P \in Syl_(G)$, temos $P \trianglelefteq G$. Logo para cada P_i os p_i-subgrupos de Sylow são normais em G e portanto, $G = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$.

(v) $\Rightarrow$ (i): Se G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow, então G é nilpotente, pelo teorema 1.6.1. $\square$

Teorema 1.6.3 (Fitting) : *Sejam M e N subgrupos nilpotentes normais de um grupo G. Se c e d são as classes de nilpotência de M e N. Então $L = MN$ é nilpotente de classe de nilpotência no máximo $c + d$.*

Demonstração:
Calculando os termos da série central descendente de L. Temos por indução, que $\gamma_i(L)$ é o produto de todos $[X_1, X_2, X_3, ..., X_n]$ com $X_j = M$ ou $X_j = N$. Afirmamos que L é nilpotente. De fato, seja M subgrupo normal nilpotente de classe c e N subgrupo normal nilpotente de classe d, isto é, $\gamma_{c+1}(M) = 1$ e $\gamma_{d+1}(N) = 1$. Como M e N são normais em G temos que $\gamma_j(M)$ e $\gamma_j(N)$ são normais em G $\forall j$ e portanto $[\gamma_j(M), G] \leq \gamma_j(M)$ e $[\gamma_j(N), N] \leq \gamma_j(N)$. Seja agora $i = c + d + 1$, então em cada $[\ X_1, X_2, ..., X_i\ ]$, M ocorre pelo menos $c + 1$ vezes ou N ocorre pelo menos $d + 1$ vezes.

Sendo assim, $[X_1, X_2, ..., X_i]$ está contido em $\gamma_{c+1}(M)$ ou em $\gamma_{d+1}(N)$. Logo $[X_1, X_2, ..., X_i] =$ $= 1$ o que implica $\gamma_i(L) = 1$. Portanto, $\gamma_{c+d+1}(L) = 1$ e assim L é nilpotente com classe de nilpotência no máximo $c + d$. $\square$

Proposição 1.6.1 : *Em um grupo nilpotente de classe no máximo 2, a identidade* $(xy)^m =$ $= x^m y^m [y, x]^{\binom{m}{2}}$ *é sempre válida.*

A demonstração segue por indução sobre m.

Demonstração:
Como G tem classe de nilpotência no máximo igual a 2, $[x, y] \in Z(G)$. Sendo assim, temos:

(1) O teorema é verdadeiro para $m = 2$. Pois $(xy)^2 = xyxy = xyx[x, y]y[y, x] = x^2y^2[y, x]$. Portanto $(xy)^2 = x^2y^2[y, x]$.

(2) Suponhamos o teorema verdadeiro para m, isto é:

$$(xy)^m = x^m y^m [y, x]^{\binom{m}{2}}.$$

(3) O teorema é verdadeiro para $m + 1$, ou seja;

$$(xy)^{m+1} = x^{m+1} y^{m+1} [y, x]^{\binom{m+1}{2}}.$$

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}(xy)^{m+1} = (xy)^m(xy) &\overset{h.i}{=} x^m y^m [y, x]^{\binom{m}{2}} xy \\ &= x^m y^m x [y, x]^{\binom{m}{2}} y \\ &= x^m y^m xy [y, x]^{\binom{m}{2}}\end{aligned}$$

Logo,

$$(xy)^{m+1} = x^m (y^m x) y [y, x]^{\binom{m}{2}} \qquad (*)$$

Como $[x,y]$ comuta com x e y. Temos, $[y^m,x]=[y,x^m]$, implicando $(y^m)^{-1}x^{-1}y^mx=[y,x]^m$. Portanto,

$$y^mx = xy^m[y,x]^m. \quad (**)$$

Substituindo $(**)$ em $(*)$, temos:

$$\begin{aligned}(xy)^{m+1} = x^m(y^mx)y[y,x]^{\binom{m}{2}} &= x^mxy^m[y,x]^my[y,x]^{\binom{m}{2}}\\ &= x^{m+1}y^my[y,x]^m[y,x]^{\binom{m}{2}}\\ &= x^{m+1}y^{m+1}[y,x]^{\binom{m}{2}+m}\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que:

$$(xy)^{m+1} = x^{m+1}y^{m+1}[y,x]^{\binom{m+1}{2}}$$

Portanto,

$$(xy)^m = x^my^m[y,x]^{\binom{m}{2}}.$$

□

Enunciaremos agora o resultado mais famoso na teoria dos grupos finitos, data do ínicio da década de 1960, por W.Feit e J.Thompson.

Os matemáticos W.Feit e J.Thompson, no trabalho mais celebrado da teoria dos grupos finitos, responderam na afirmativa tal conjectura num trabalho de mais de 200 páginas publicado no Pacific Journal of Mathematics em 1963.

Teorema 1.6.4 (W.Feit e J.Thompson): *Todo grupo de ordem ímpar é solúvel.*

Capítulo 2

Subgrupos Permutáveis com Conjugados (C-P Subgrupos)

Neste capítulo estudaremos em que condições subgrupos permutáveis com conjugados são subnormais e provaremos algumas propriedades de subgrupos permutáveis com conjugados. Daremos exemplos de subgrupos subnormais que não são subgrupos permutáveis com conjugados, e de subgrupos permutáveis com conjugados que não são permutáveis.

Definição 2.0.2 *Um subgrupo H de um grupo G é dito subgrupo permutável com conjugados se, $HH^g = H^gH\,\forall\, g \in G$.*

$$\text{Notação: } H <_{C-P} G.$$

Proposição 2.0.2 *Qualquer subgrupo permutável é um subgrupo permutável com conjugados.*

Demonstração:
Seja H um subgrupo permutável de G, isto é,

$$HK = KH\ \forall K \leq G.$$

Como,

$$H^g \leq G\ \forall g \in G.$$

Portanto,

$$HH^g = H^gH\ \forall g \in G.$$

Logo,

$$H <_{C-P} G$$

Observação: Seja H um subgrupo permutável com conjugados de G, então não é necessário que H seja permutável em G.

Exemplo 2.0.1 *Seja $G = S_4$ e $H = \langle (12)(34) \rangle$. H é um subgrupo permutável com conjugado de S_4, mas H não é subgrupo permutável de S_4.*

De fato, temos $|G : N_G(H)| = 3$ onde os conjugados de H são H, $H_1 = \{1, (14)(23)\}$ e $H_2 = \{1, (13)(24)\}$. Note ainda que $HH_1 = K = HH_2$, onde K é o grupo de Klein, portanto H é subgrupo permutável com conjugado de G. Seja $N = \langle (13) \rangle$ sendo assim,

$$HN = \{1, (13), (12)(34), (1432)\} \text{ e } NH = \{1, (12)(34), (13), (1234)\}.$$

Note ainda que HN e NH não são subgrupos de G. Portanto, $HN \neq NH$.

Proposição 2.0.3 *Se $H <_{C-P} G$. Então $H^g <_{C-P} G$ $\forall g \in G$.*

De fato,

$$\begin{aligned} H^g H^x = H^g (H^x)^{g^{-1}g} = H^g (H^{xg^{-1}})^g &= (HH^{xg^{-1}})^g \overset{h.i}{=} \\ &= (H^{xg^{-1}} H)^g \\ &= (H^{xg^{-1}})^g H^g \\ &= (H^{xg^{-1}})^g H^g \\ &= (H^x)^{g^{-1}g} H^g = H^x H^g. \end{aligned}$$

$$H^g H^x = H^x H^g \;\forall x \in G.$$

□

Lema 2.0.1 : *Se $H <_{C-P} G$ e $x_1, x_2, ..., x_n \in G$, então $H^{x_1} H^{x_2} ... H^{x_n}$ é permutável com qualquer produto finito de conjugados de H.*

Demonstração:
Seja $H^{g_1} H^{g_2} ... H^{g_s}$ um produto finito de conjugados de H. Mostremos agora que $H^{x_1} H^{x_2} ... H^{x_n}$ é permutável com tal produto. De fato,

$$\begin{aligned} (H^{x_1} H^{x_2} ... H^{x_n})(H^{g_1} H^{g_2} ... H^{g_s}) &= \\ &\overset{*}{=} H^{x_1} H^{x_2} ... H^{g_1} H^{x_n} H^{g_2} H^{g_3} ... H^{g_s} \\ &\overset{**}{=} (H^{g_1} H^{g_2} ... H^{g_s})(H^{x_1} H^{x_2} ... H^{x_n}) \end{aligned}$$

$(*)$ usando a proposição 2.0.3 e $(**)$ usando a proposição 2.0.3, várias vezes até obtermos o resultado.

Lema 2.0.2 : *Se $H <_{C-P} G$ e $H \leq K \leq G$, então $H <_{C-P} K$.*

Demonstração:
Seja H um subgrupo permutável com conjugado de G ($H <_{C-P} G$), isto é,

$$HH^g = H^gH \ \forall g \in G.$$

Como por hipótese $H \leq K \leq G$, temos em particular que

$$HH^k = H^kH \quad \forall k \in K.$$

Portanto,

$$H <_{C-P} K.$$

□

Observação: Se $H <_{C-P} K <_{C-P} G$, então H não é necessariamente subgrupo permutável com conjugado de G. (isto é, não vale a transitividade).

Exemplo 2.0.2 *Seja* $G = D_8 = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1 \, e \, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$, $H = \langle y \rangle$ *e* $K =$ $= \{1, x^2, x^4, x^6, y, x^2y, x^4y, x^6y\}$. *Temos* $H <_{C-P} K$, $K <_{C-P} G$, *mas* H *não é permutável com conjugado de* G.

De fato, temos $|K : N_K(H)| = 2$ onde os conjugados de H são: H, $H_1 = \{1, x^4y\}$. Note ainda que $HH_1 = \{1, x^4, y, x^4y\} \leq K$, portanto $H <_{C-P} K$ como $K \trianglelefteq G$ segue-se então $H <_{C-P} K <_{C-P} G$. Seja $H^x = \{1, x^6y\}$ sendo assim,

$$HH^x = \{1, x^2, y, x^6y\} \text{ e } H^xH = \{1, x^6, y, x^4y\}.$$

Note ainda que HH^x e H^xH não são subgrupos de G. Portanto, H não é subgrupo permutável com conjugados de G.

Lema 2.0.3 *: Se* $H <_{C-P} G$, G *um grupo finito e* $\{g_1, g_2, ...g_n\}$ *um transversal do* $N_G(H)$, *então* $H^G = H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_n}$. *(Note que se* H *é um p-grupo,* H^G *também é)*

Demonstração:
Seja $T = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ um transversal do $N_G(H)$, sendo assim, $G = \dot{\bigcup\limits_{g_i \in T}} N_H(G)g_i$. Logo, todo $g \in G$ se escreve de modo único, $g = t_ig_i$ onde $t_i \in N_G(H)$ e $g_i \in T$. Assim, para todo $g \in G$, temos:

$$H^g = H^{t_ig_i} = (H^{t_i})^{g_i} = H^{g_i}$$

Portanto,

$$H^g = H^{g_i} \, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Logo, $H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle = \langle H^{g_i} \mid i = 1, 2, ..., n \rangle$. Mas, como $H^{g_i}H^{g_j} = H^{g_j}H^{g_i} \ \forall \ i, j$ $\langle H^{g_i} \mid i = 1, 2, ..., n \rangle = H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_n}$. Assim,

$$H^G = H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_n}.$$

Finalmente, suponha que $|H| = p^\alpha$ onde p é primo. Vamos provar que $|H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_n}| = p^\beta$, por indução sobre n.
Com efeito, se $n = 1$, temos $|H^{g_1}| = |H| = p^\alpha$. Suponhamos que $|H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_{n-1}}| = p^\gamma$. Então,

$$|H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_{n-1}}H^{g_n}| = \frac{|H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_{n-1}}|.|H^{g_n}|}{|H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_{n-1}} \cap H^{g_n}|} = \frac{p^{\gamma+\alpha}}{p^{\alpha'}} = p^\beta$$

□

Lema 2.0.4 : *Se $H \leq_{C-P} G$ e $\varphi : G \longrightarrow G$ um homomorfismo. Então $\varphi(H) \leq_{C-P} \varphi(G)$*

Devemos mostrar que $\varphi(H)\varphi(H)^{\varphi(g)} = \varphi(H)^{\varphi(g)}\varphi(H)$, para todo $\varphi(g) \in G$ e $g \in G$.

1-Mostremos $\varphi(H)\varphi(H)^{\varphi(g)} \subseteq \varphi(H)^{\varphi(g)}\varphi(H)$.

De fato, suponhamos que $x \in \varphi(H)\varphi(H)^{\varphi(g)}$. Sendo assim, $x = \varphi(h)\varphi(h_1)^{\varphi(g)}$ onde $h, h_1 \in$ $\in H$ e $g \in G$. Logo:

$$\begin{aligned} x = \varphi(h)\varphi(h_1)^{\varphi(g)} = \varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h_1)\varphi(g) &= \varphi(h)\varphi(g^{-1})\varphi(h_1)\varphi(g) \\ &= \varphi(h)\varphi(g^{-1}h_1g) \\ &= \varphi(hh_1^g) = \varphi(h_2^g h_3),\ h_2, h_3 \in H \\ &= \varphi(h_2^g)\varphi(h_3) \\ &= \varphi(g)^{-1}\varphi(h_2)\varphi(g)\varphi(h_3) \\ &= \varphi(h_2)^{\varphi(g)}\varphi(h_3) \in \varphi(H)^{\varphi(g)}\varphi(H). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi(H)\varphi(H)^{\varphi(g)} \subseteq \varphi(H)^{\varphi(g)}\varphi(H).$$

2-Mostremos $\varphi(H)^{\varphi(g)}\varphi(H) \subseteq \varphi(H)\varphi(H)^{\varphi(g)}$.

De fato, suponhamos que $x \in \varphi(H)^{\varphi(g)}\varphi(H)$. Sendo assim, $x = \varphi(h)^{\varphi(g)}\varphi(h_1)$ onde $h, h_1 \in$ $\in H$ e $g \in G$. Logo,

$$\begin{aligned} x = \varphi(h)^{\varphi(g)}\varphi(h_1) = \varphi(g)^{-1}\varphi(h)\varphi(g)\varphi(h_1) &= \varphi(g^{-1})\varphi(h)\varphi(g)\varphi(h_1) \\ &= \varphi(g^{-1}hg)\varphi(h_1) \\ &= \varphi(h^g)\varphi(h_1) \\ &= \varphi(h^g h_1) = \varphi(h_2 h_3^g), h_2, h_3 \in H \\ &= \varphi(h_2)\varphi(h_3^g) \\ &= \varphi(h_2)\varphi(h_3)^{\varphi(g)} \in \varphi(H)\varphi(H)^{\varphi(g)}. \end{aligned}$$

Assim, $\varphi(H)^{\varphi(g)}\varphi(H) \subseteq \varphi(H)\varphi(H)^{\varphi(g)}$.

Logo,

$$\varphi(H)^{\varphi(g)}\varphi(H) = \varphi(H)\varphi(H)^{\varphi(g)}.$$

Portanto,

$$\varphi(H) <_{C-P} \varphi(G).$$

$\square$

Lema 2.0.5 : *Se H é um subgrupo maximal permutável com conjugados de G. Então $H \trianglelefteq G$.*

Demonstração:
Suponhamos por absurdo que H não seja normal em G. Então existe $g \in G$ tal que $g^{-1}Hg \neq H$, isto é, existe um conjugado K de H tal que $K \neq H$, onde $K = g^{-1}Hg$. Pelo lema 2.0.1, temos $HH^g <_{C-P} G$ e pela maximalidade de H, $G = HH^g$ ou $HH^g = H$. Mas, se $HH^g = H$, teríamos $H^g \leq H$. Portanto, $H^g = H$(absurdo). Já que H^g também é maximal permutável com conjugados. Logo, $HH^g = G$. Seja $g = hk$ para algum $h \in H$ e $k \in K$. Portanto, $K = H^{hk}$, daí segue:

$$K = H^{hk} = (hk)^{-1}H(hk) = k^{-1}h^{-1}Hhk = k^{-1}Hk.$$

Logo, $K = k^{-1}Hk$, sendo assim, $K = H$(absurdo). Portanto,

$$H \trianglelefteq G.$$

Corolário 2.0.1 : *Se $H <_{C-P} G$ e G um grupo finito, então H é subnormal em G.*

Demonstração: A prova do teorema segue como na demonstração do teorema 1.4.2, onde aqui substituimos a hipótese de subgrupo permutável por subgrupo permutável com conjugados.

Observação: Seja G um grupo finito. Se H é subgrupo subnormal de G, então H não é necessariamente subgrupo permutável com conjugado de G.

Exemplo 2.0.3 : *Seja $D_8 = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1}\rangle$, $H = \langle y \rangle$ e $K = \langle yx^6 \rangle$. Então H é subnormal em D_8 (Visto que D_8 é nilpotente). Mas,*

$$HK = \{1, yx^6, y, x^6\} \neq \{1, yx^6, y, x^2\} = KH.$$

Note ainda que, $K = H^g$ onde $g = x^3$. Então H não é subgrupo permutável com conjugados de G.

Corolário 2.0.2 : *Se G é um grupo finito, no qual todos subgrupos maximais são subgrupos permutáveis com conjugados, então G é nilpotente.*

Demonstração:
Seja H subgrupo maximal de G. Como por hipótese $H <_{C-P} G$, temos pelo lema 2.0.5 que $H \trianglelefteq G$. Portanto, todo subgrupo maximal de G é normal. Logo pelo teorema da caracterização dos grupos nilpotentes, temos que G é nilpotente. □

Lema 2.0.6 : *Se $H <_{C-P} G$ e H é um grupo simples finito, então para qualquer $g \in G$, $H = H^g$ ou $[H, H^g] = 1$*

Demonstração:
Seja $g \in G$. Como $H <_{C-P} G$ pelo lema 2.0.2, temos que $H <_{C-P} HH^g$. Além disso, HH^g é um grupo (Pois, $HH^g = H^gH$) finito. Portanto, pelo corolário 2.0.1, H sn HH^g.
Afirmação: $H \cap H^g$ sn H
De fato, como $H^g \, sn \, HH^g$, temos por definição que existem subgrupos $G_0, G_1, ..., G_n$ tais que,

$$H^g = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = HH^g.$$

Intersectando a série por H, temos:

$$H^g \cap H = G_0 \cap H \trianglelefteq G_1 \cap H \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n \cap H = HH^g \cap H = H.$$

Logo,

$$H^g \cap H = G_0 \cap H \trianglelefteq G_1 \cap H \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n \cap H = H.$$

Denotemos $G_i \cap H = H_i \ \forall \ 0 \leq i \leq n$.

Portanto,

$$H^g \cap H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_n = H.$$

Logo, $H^g \cap H \, sn \, H$.

Seja $K = H \cap H^g$ subnormal em H. Como H grupo simples, temos que $K = H$ ou $K = 1$. (Note que $K = H$ se, somente se $g \in N_G(H)$).

Analisemos agora as seguintes possibilidades:

1- H é um grupo simples não-abeliano e $g \notin N_G(H)$, isto é, $K = 1$. Portanto, pelo teorema de Wielandt, temos: $[H, H^g] = 1$

2- H é um grupo abeliano simples e $g \notin N_G(H)$. Então HH^g é um grupo abeliano de ordem p^2. De fato, como $g \notin N_G(H)$, temos que $H \cap H^g = 1$. E ainda como H é abeliano simples, temos $|H| = p$, portanto $|H^g| = p$. Sendo assim, temos,

$$|HH^g| = \frac{|H||H^g|}{|H \cap H^g|} = p.p = p^2$$

Logo,

$$|HH^g| = p^2$$

Portanto, como HH^g é finito de ordem p^2, segue que HH^g é abeliano. Assim, $[H, H^g] = 1$.

3- $H = K$. Nesse caso, $H \cap H^g = H \therefore H \leq H^g \therefore H = H^g$, pois H é finito. □

Observação: Seja H um subgrupo permutável com conjugado de um grupo G, H um grupo finito, então não é necessário que $H = H^g$ ou $[H, H^g] = 1$ para todo $g \in G$.

Exemplo 2.0.4 *Seja* $G = D_8 = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1 \, e \, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ *e* $H = \{1, x^4, y, x^4y\}$. *H é permutável com conjugado de* D_{16}, *mas* $H \neq H^g$ *e* $[H, H^g] \neq 1$ *para algum* $g \in G$.

De fato, temos $|G : N_G(H)| = 2$ onde os conjugados de H são: H,$H_1 = \{1, x^4, x^2y, x^6y\}$. Note ainda que $HH_1 = N = H_1H$, onde $N = N_G(H) = \{1, x^2, x^4, x^6, y, x^2y, x^4y, x^6y\}$, portanto H é subgrupo permutável com conjugados de G. Temos ainda que:
(i)- $H \neq H^g \; \forall \; g \in D_8 - N$.
(ii)-$[H, H^g] \neq 1$ para algum $g \in G$. De fato, pois $[y, x^2y] = x^4$.

Corolário 2.0.3 : *Se G é um grupo finito,* $H \leq_{C-P} G$ *e H é um grupo simples, então*

$$H^G \cong \underbrace{H \times H \times H ... \times H}_{s\text{ -vezes}},$$

onde $s \leq n = [G : N_G(H)]$. *(Note que, se H é não-abeliano, então* H^G *é um subgrupo normal minimal de G).*

Demonstração:
Seja $T = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ um transversal do $N_G(H)$ em G. Pelo lema 2.0.3, temos que,

$$H^G = H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_n}$$

Afirmação: $H^{g_i} \neq H^{g_j} \; \forall i \neq j$
De fato, suponhamos que $H^{g_i} = H^{g_j}$ para algum $i \neq j$. Sendo assim, $(H^{g_i})^{g_j^{-1}} = H$. Logo $g_ig_j^{-1} \in N_G(H) = N$ e $g_iN = g_jN$ (absurdo). Pois $g_i, g_j \in T$. □

Como $H \cong H^{g_i} \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $H^{g_i} <_{C-P} G$ e H^{g_i} é grupo simples finito. Como $H^{g_i} \neq H^{g_j} \forall i \neq j$. Pelo lema 2.0.6, temos:

$$[H^{g_i}, H^{g_j}] = 1 \, \forall i \neq j.$$

Mostremos agora que $H^{g_i} \trianglelefteq H^G$.
De fato, como $[H^{g_i}, H^{g_j}] = 1\,\forall\, i \neq j$, temos então $[h^{g_i}, h^{g_j}] = 1\,\forall\, i \neq j$. Sendo assim,

$$[h^{g_i}, h^{g_j}] = (h^{g_i})^{-1}(h^{g_j})^{-1}h^{g_i}h^{g_j} = 1.$$

Logo, $(h^{g_j})^{-1}h^{g_i}h^{g_j} = h^{g_i}\ \forall i \neq j$. Portanto, $(h^{g_j})^{-1}h^{g_i}h^{g_j} \in H^{g_i}\,\forall\, i, j$. Daí segue-se, que $H^{g_i} \trianglelefteq H^G$.

Mostremos agora $H^G = H^{g_1} \times H^{g_2} \times ... \times H^{g_s}$.
De fato, seja s o maior inteiro tal que $H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_s} = H^{g_1} \times H^{g_2} \times ... \times H^{g_s}$, onde $s \leq n\, e\, s, n \in \mathbb{N}$. Sendo assim,temos:

(1) $s \geq 2$, pois $H^{g_1}H^{g_2} = H^{g_1} \times H^{g_2}$. De fato, afirmamos que $H^{g_1} \cap H^{g_2} = 1$. Pois caso contrário, como $H^{g_1} \cap H^{g_2} \trianglelefteq H^{g_1}$ e H^{g_i} é simples, temos $H^{g_1} \subseteq H^{g_2}$. Portanto, $H^{g_1} = H^{g_2}$ (absurdo). Pois $g_1, g_2 \in T$

(2) Para $s = n$, nada temos a demonstrar

(3) Se $s < i \leq n$, chamemos $H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_s} = K$. Sendo assim, KH^{g_i} não é direto. Pois s é o maior inteiro tal que $H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_s}$ é produto direto. Logo $K \cap H^{g_i} \neq 1$, como $K \cap H^{g_i} \trianglelefteq H^{g_i}$, pela simplicidade de H^{g_i}, temos $K \cap H^{g_i} = H^{g_i}$ e $H^{g_i} \subseteq K$. Logo

$$H^G = H^{g_1} \times H^{g_2} \times ... \times H^{g_s}$$

Portanto,

$$H^G \cong \underbrace{H \times H \times ... \times H}_{s\text{ -vezes}}.$$

□

Observação: No corolário, se H é um subgrupo não-abeliano, então H^G é um subgrupo normal minimal de G.
De fato, seja H um subgrupo não-abeliano simples de G como $H \cong H^{g_i}\,\forall\, i$. Segue-se que H^{g_i} é simples não-abeliano. Suponhamos que exista $1 \neq N \trianglelefteq G$ tal que $N \leq H^G$. Como $H^{g_i} \leq G$ e $N \trianglelefteq G$, $N \cap H^{g_i} \trianglelefteq H^{g_i}$ e como H^{g_i} é simples, temos que,

$$N \cap H^{g_i} = 1 \text{ ou } N \cap H^{g_i} = H^{g_i}$$

Afirmação: $N \cap H^{g_i} = H^{g_i}$, para algum i.
De fato, do contrário teríamos $N \cap H^{g_i} = 1\ \forall i$. Como $[N, H^{g_i}] \leq N \cap H^{g_i}$, temos que $[N, H^{g_i}] \leq N \cap H^{g_i} = 1$. Assim, $[N, H^{g_i}] = 1$. Portanto, como $N \trianglelefteq H^G$ e $H^{g_i} \trianglelefteq H^G$. Temos:

$$[N,H^G]=[N,H^{g_1}H^{g_2}...H^{g_s}]=[N,H^{g_1}].[N,H^{g_2}]...[N,H^{g_s}]=1$$

Logo, $[N,H^G]=1$. Sendo assim, temos $N \leq Z(H^G)$. Por outro lado, como

$$Z(H^G)=Z(H^{g_1})\times Z(H^{g_2})\times ... \times Z(H^{g_s})$$

e H^{g_i} é simples não-abeliano, temos $Z(H^{g_i})=1\,\forall i$. Logo, $N=1$(absurdo). □

Portanto, $N\cap H^{g_i}=H^{g_i}$. Logo, $H^{g_i}\leq N \therefore H^G=N$.

Observação 1: Seja G um grupo finito, H um subgrupo permutável com conjugados, então H^G não é necessariamente o produto direto de s cópias de H.

Exemplo 2.0.5 : *Seja* $G=D_8=\langle x,y\,|\,x^8=y^2=1\,e\,y^{-1}xy=x^{-1}\rangle$, $H=\{1,x^4,y,x^4y\}$. *H é subgrupo permutável com conjugado de G, mas* $H^G\ncong \underbrace{H\times H}_{s\text{ -vezes}}$ *onde* $s\leq n=|G:N_G(H)|$.

De fato, temos $|G:N_G(H)|=2$ onde os conjugados de H são: H, $H_1=\{1,x^4,x^2y,x^6y\}$. Temos pela proposição 1.1.2 que $H^G=\langle H^g\,|\,g\in G\rangle$ logo $H^G=\langle H,H_1\rangle$ como $HH_1\leq G$ segue então que:

$$H^G=HH_1$$

Mas, $HH_1\ncong H\times H_1$. Pois H, H_1 não são normais em G e $H\cap H_1\neq 1$, portanto $H^G\ncong H\times H$.

Observação 2: O fecho normal não é necessariamente o produto de n-fatores de H, onde $n=|G:N_G(H)|$.

Exemplo 2.0.6 : *Seja* $G=S_4$ *e* $H=\langle(12)(34)\rangle$, *temos que* H^G *é produto de* 2*-fatores e* $|G:N_G(H)|=3$

Com efeito, temos que $|G:N_G(H)|=3$ onde os conjugados de H são $H,H_1=\{1,(14)(23)\}$ *e* $H_2=\{1,(13)(24)\}$. Note ainda que $H_1H_2=K=HH_1=HH_2$, isto é, $H<_{C-P}G$ onde K é o grupo de Klein. Como $K\trianglelefteq G$ e $H\leq K$, $H^G=K$. Mas $H^G\neq H\times H_1\times H_2$.

Lema 2.0.7 : *Se H é um subgrupo subnormal não-abeliano simples de um grupo finito G, então* $H<_{C-P}G$.

Demonstração:

Seja g um elemento qualquer de G. Como $H\,sn\,G$, temos $H^g\,sn\,G$ e $H\cap H^g\,sn\,G$. Assim $H\cap H^g$ sn H. E ainda como H é simples temos que:

$$H\cap H^g=H \text{ ou } H\cap H^g=1.$$

Daí segue:
(i) Se $H \cap H^g = H$, logo $H \subseteq H^g$. Como H é finito, $H = H^g$
(ii) Se $H \cap H^g = 1$, pelo teorema de Wielandt, temos $[H, H^g] = 1$. Assim, $[h_1, h^g] = 1$ implicando $h_1 h^g = h^g h_1 \; \forall \, h \in H$ e $\forall \, h_1 \in H$. Logo,

$$HH^g = H^g H \, \forall \, g \in G.$$

Portanto,

$$H <_{C-P} G.$$

□

Observação: Seja H é um subgrupo subnormal simples abeliano de um grupo finito G. Então H não é necessariamente subgrupo permutável com conjugado de G.

Exemplo 2.0.7 : *Seja* $G = D_8 = \langle \, x \, , \, y \, | \quad x^8 = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ *e* $H = \langle y \rangle$.
H é subgrupo subnormal abeliano simples de G, mas H não é subgrupo permutável com conjugado de G.

2.1 Subgrupos Permutáveis com conjugados em p-Grupos

Nesta seção iremos estudar algumas propriedades de subgrupos permutáveis com conjugados em p-grupos

Teorema 2.1.1 : *Se G é um grupo contendo um subgrupo finito P tal que $P \in Syl_p(G)$ e $P <_{C-P} G$, então P é normal em G.*

Demonstração:
Seja $P \in Syl_p(G)$, onde P é finito. Assim, $|P| = p^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ temos ainda que $P^g \in Syl_p(G) \, \forall \; g \in G$ e $|P| = |P^g| = p^{\alpha}$. Sendo asssim, temos:

$$|PP^g| = \frac{|P||P^g|}{|P \cap P^g|} = p^{\beta}, onde \, \beta \in \mathbb{N}$$

Segue-se então que PP^g é um p-grupo, para todo $g \in G$. Portanto $P = PP^g \, \forall \, g \in G$ (Pela maximalidade de P). Afirmamos ainda que $P = P^g \, \forall \, g \in G$. De fato, $P^g \subseteq PP^g$ e $PP^g = P$. Logo $P^g \subseteq P$, como P é finito, temos então $P^g = P \; \forall \, g \in G$. Portanto,

$$P \trianglelefteq G.$$

□

Observação: Seja G um grupo contendo um subgrupo finito P tal que $P \in Syl_p(G)$, P não é necessariamente normal em G.

Exemplo 2.1.1 : *Seja* $G = A_4$ *e* $P \in Syl_3(G)$ *onde* $P = \langle(123)\rangle$. *Então* P *não é necessariamente normal em* G.

Teorema 2.1.2 : *Se* G *é um grupo finito e se existe* $H <_{C-P} G$ *tal que* H *é um subgrupo maximal de um* $P \in Syl_p(G)$, *então* H *ou* P *é normal em* G.

Demonstração:
Suponhamos que H não seja normal em G. Seja $P \in Syl_p(G)$, $|P| = p^{\alpha}$. Como H é um subgrupo maximal de P, $|H| = p^{\alpha^{-1}}$, assim H é um p-subgrupo. Pelo lema 2.0.3, temos que H^G é um p-grupo. Daí segue, pelo teorema de Sylow, que $H^G \leq P$, já que $H^G \trianglelefteq G$. Por outro lado, como H é maximal em P, temos que $H = H^G$ ou $P = H^G$, isto é, $H \trianglelefteq G$ ou $P \trianglelefteq G$. □

Observação: Seja G um grupo finito se $H <_{C-P} G$ tal que H é um subgrupo de $P \in Syl_p(G)$, então não é necessário que H ou P sejam normais em G.

Exemplo 2.1.2 : *Sejam* $G = S_4$, $H = \langle(12)(34)\rangle$ *e* $P \in Syl_2(G)$ *onde* $P = \{1, (12)(34), (14)(23), (13)(24), (12), (34), (1423), (1324)\}$. H *é subgrupo permutável com conjugado de* S_4, *mas* H *e* P *não são normais em* G.

Corolário 2.1.1 : *Se* G *é um grupo finito e se existe* $H <_{C-P} G$, *tal que* H *é um subgrupo maximal de um* $P \in Syl_2(G)$, *então* G *é solúvel.*

Demonstração:
Seja G um grupo finito e $P \in Syl_2(G)$ onde $|P| = 2^{\alpha}$. Assim, $|G| = 2^{\alpha}m$, onde $(2, m) = 1$ m-ímpar, pelo teorema 2.1.2 temos que H ou P normal em G. Daí temos,

(i) Suponhamos $P \trianglelefteq G$. Sendo assim, segue:

$$|G : P| = \frac{|G|}{|P|} = \frac{2^{\alpha}.m}{2^{\alpha}} = m$$

Logo $|G : P| = m$ onde m-ímpar. Portanto, como P é solúvel. Pois P 2-grupo. Agora pelo teorema (W.Feit e J.Thompson), $\dfrac{G}{P}$ é solúvel. Portanto G é solúvel.

(ii) Suponhamos agora, $H \trianglelefteq G$. Nesse caso, $H^G = H$. Como H é maximal em P, $\dfrac{|P|}{|H|} = 2$.

Sendo $|G| = |G : H||H|$, temos $|G : H| = \dfrac{2^{\alpha}m}{|H|} = \dfrac{|P|m}{|H|} = 2m$, assim $|G : H| = 2m$. Logo $\dfrac{G}{H}$ é solúvel e como H é solúvel, pois H é 2-grupo, G é solúvel. □

Lema 2.1.1 : *Se* G *é um grupo finito e para algum primo* p, *todo subgrupo cíclico de ordem uma potência de* p *é subgrupo permutável com conjugados de* G, *então todo* p*-subgrupo de Sylow de* G *é normal em* G.

Demonstração:
Seja $P \in Syl_p(G)$, $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Por definição de p-grupo, $o(x_i) = p^{\alpha_i}$ onde $i \in \{1, 2, ..., n\}$, como $o(x_i) = |\langle x_i \rangle|$, temos que $H_i = \langle x_i \rangle$ é um p-subgrupo. Sendo assim, pelo lema 2.0.3, $H_i^G = \langle x_i \rangle^G$ é um p-subgrupo normal de G. Por outro, lado

$$H = \langle x_1 \rangle^G \langle x_2 \rangle^G ... \langle x_n \rangle^G$$

é um p-subgrupo normal de G que contém P, pois $x_i \in P \ \forall \ i = 1, 2, ..., n$. Assim, $P = H$ e $P \trianglelefteq G$. □

Observação: Seja G um grupo finito e para algum primo p, se todo subgrupo de ordem uma potência de p é cíclico, então não é necessario que todo p-subgrupo de Sylow de G seja normal em G.

Exemplo 2.1.3 : *Seja $G = S_4$ e $P \in Syl_2(G)$ onde $P = \{1, (12)(34), (14)(23), (13)(24), (12), (34), (1423), (1324)\}$. Seja ainda $H \leq G$ tal que $|H| = 2$ temos que H é cíclico, mas $P \in Syl_2(G)$ não é normal em G.*

Teorema 2.1.3 : *Seja G um grupo finito e $P \in Syl_p(G)$. Se todo subgrupo cíclico de P é permutável com conjugados, então G é nilpotente.*

Demonstração: Pelo lema 2.1.1, temos que $P \trianglelefteq G \ \forall \ p$. Logo, pelo teorema 1.6.2 (caracterização dos grupos nilpotentes), temos que G é nilpotente. □

Teorema 2.1.4 : *Se G é um grupo localmente finito e para algum primo p, todo subgrupo cíclico de G de ordem uma potência de p é subgrupo permutável com conjugados, então todo p-subgrupo de Sylow de G é normal em G.*

Demonstração:
Sejam x e y p-elementos de G e $H = \langle x, y \rangle$. Temos que H é finito, pois G é localmente finito. Note ainda que H satisfaz as hipotéses do lema 2.1.1. Portanto, aplicando o lema 2.1.1 em H, $Q \in Syl_p(H)$ implica $Q \trianglelefteq H$. Se $H_1 = \langle x \rangle$ e $H_2 = \langle y \rangle$ p-subgrupos de H, pelo teorema de Sylow (teorema 1.5.1), temos $\langle x \rangle \subseteq Q^{h_1}$ e $\langle y \rangle \subseteq Q^{h_2}$, para algum h_1 e $h_2 \in H$. Como $Syl_p(H) = \{Q\}$, segue-se que $\langle x \rangle \subseteq Q$ e $\langle y \rangle \subseteq Q$. Logo $\langle x \rangle \langle y \rangle \subseteq Q$. Portanto, $\langle xy \rangle$ é p-subgrupo e xy é p-elemento.

Afirmação: $S = \{x \in G$; x é um p-elemento$\}$ é um subgrupo normal de G.

De fato, vimos acima que $\forall x, y \in S$, $xy \in S$. Suponhamos que $y \in g^{-1}Sg$, onde $g \in G$. Então $y = g^{-1}xg$, para algum $x \in S \therefore o(y) = o(g^{-1}xg) = o(x^g) = o(x) = p^{\alpha}$. Logo, $y \in S$. Portanto, $g^{-1}Sg \subseteq S \ \forall g \in G$. Assim $S \trianglelefteq G$.

Seja $P \in Syl_p(G)$. Por definição, P é um p-subgrupo maximal de G. Assim, $P \leq S$, já que todo elemento de P é um p-elemento. A maximalidade de P garante que $P = S$ e portanto $P \trianglelefteq G$. □

Lema 2.1.2 : *Se G é um p-grupo finito, p um primo ímpar, no qual todo subgrupo de ordem p de G, é subgrupo permutável com conjugados, então $T = \{x \in G | o(x) \leq p\}$ é um subgrupo normal de G.*

Demonstração:
Seja $|G| = p^n \, \forall n \geq 1$ e p-primo ímpar. Para todo $x \in T$ seja $H = \langle x \rangle$, logo $|H| = p$. Assim, H é simples e por hipótese, $H <_{C-P} G$. Sendo assim, pelo corolário 2.0.3

$$H^G \simeq \underbrace{H \times H \times ... \times H}_{s \text{ -vezes}}.$$

onde $s \leq n = |G : N_G(H)|$. Logo, H^G é um p-subgrupo abeliano elementar de G, isto é, H^G é nilpotente de classe 1, $H^G \trianglelefteq G$. Seja x e $y \in T$, pelo teorema de Fitting, temos que $\langle x \rangle^G \langle y \rangle^G$ é nilpotente de classe no máximo 2. Sendo assim:

$$(xy)^p = x^p y^p [y, x]^{\binom{p}{2}} = x^p y^p [y, x]^{\frac{p(p-1)}{2}}$$

Como $[y, x] \in \langle x \rangle^G$, $o([y, x]) = p$ ou 1. Daí segue-se, que:

$$(xy)^p = x^p y^p [y, x]^{\binom{p}{2}} = x^p y^p [y, x]^{\frac{p(p-1)}{2}} \overset{*}{=} x^p y^p = 1.$$

Sendo assim, $(xy)^p = 1 \; \forall x, y \in T$. Logo, $xy \in T$. Portanto, $T \leq G$ e $T \trianglelefteq G$. □

$(*)$ segue do fato, de p ser ímpar e $o([y, x]) = p$ ou 1.

Observação: Se G é um p-grupo finito, p um primo par, no qual todo subgrupo de ordem p de G é subgrupo permutável com conjugados, então $T = \{x \in G \mid o(x) \leq p\}$ não é necessariamente um subgrupo normal de G.

Exemplo 2.1.4 : *Seja $G = D_4 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1 \, \text{e} \, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ e seja ainda os seguintes subgrupos de ordem 2 de G, $H_0 = \langle x^2 \rangle$, $H_1 = \langle y \rangle$, $H_2 = \langle xy \rangle$, $H_3 = \langle x^2 y \rangle$, $H_4 = \langle x^3 y \rangle$. Os H_i são subgrupos permutável com conjugados de G onde $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $T = \{x \in G \mid o(x) \leq p\}$ não é subgrupo normal de G.*

Solução:
(1)- Se $H_0 = \langle x^2 \rangle$, note que $H_0 = Z(G)$ portanto $H_0 <_{C-P} G$.
(2)- Se $H_1 = \langle y \rangle$ temos que $|G : N_G(H_1)| = 2$ onde os conjugados de H_1 são: H_1 e $K_1 = \{1, x^2 y\}$. Note que $H_1 K_1 = N_1 = K_1 H_1$, onde $N_1 = N_G(H_1) = \{1, x^2, y, x^2 y\}$, portanto H_1 é subgrupo permutável com conjugado de G.
(3)- Se $H_2 = \langle xy \rangle$ temos que $|G : N_G(H_2)| = 2$ onde os conjugados de H_2 são: H_2 e $K_2 = \{1, x^3 y\}$. Note que $H_2 K_2 = N_2 = K_2 H_2$, onde $N_2 = N_G(H_2) = \{1, x^2, xy, x^3 y\}$, portanto H_2 é

subgrupo permutável com conjugado de G.
(4)- Se $H_3 = \langle x^2y \rangle$, temos que $|G : N_G(H_3)| = 2$ onde os conjugados de H_3 são: H_3 e $K_3 = \{1, y\}$. Note que $H_3K_3 = N_3 = K_3H_3$, onde $N_3 = N_G(H_3) = \{1, x^2, y, x^2y\}$, portanto H_3 é subgrupo permutável com conjugado de G.
Logo, todo so H_i são subgrupos permutável com conjugado de G. Mas $T = \{x \in G \mid o(x) \leq 2\} =$ $= \{1, x^2, y, xy, x^2y, x^3y\}$ não é subgrupo de G.

Lema 2.1.3 : *Se G é um p-grupo localmente finito, p um primo ímpar no qual todo subgrupo de G de ordem p é subgrupo permutável com conjugados, então $T = \{x \in G \mid o(x) \leq p\}$ é um subgrupo normal de G.*

Demonstração:
Seja $x, y \in T$ e $H = \langle x, y \rangle$. Como G é localmente finito, H é finito. E ainda H satisfaz as hipóteses do lema 2.1.2. Portanto $\widetilde{T} = \{x \in H \mid o(x) \leq p\} \trianglelefteq H$. Então $xy \in \widetilde{T} \leq T$. Portanto $T \leq G$ e claramente $T \trianglelefteq G$. □

Teorema 2.1.5 : *Se G é um p-grupo localmente finito, p um primo ímpar tal que qualquer subgrupo cíclico H de G é permutável com conjugados. Então $T_i = \{x \in G \mid o(x) \leq p^i\}$ é um subgrupo normal de G.*

A prova segue por indução sobre i.

Demonstração:
(1) O teorema é verdadeiro para $i = 1$. Pois $T_1 = \{x \in \ \mid o(x) \leq p\} \trianglelefteq G$, pelo lema 2.1.3.

(2) Suponhamos o teorema verdadeiro para i, isto é;

$$T_i = \{x \in G \mid o(x) \leq p^i\} \trianglelefteq G.$$

(3) Provaremos que é verdadeiro para $i + 1$, isto é;

$$T_{i+1} = \{x \in G \mid o(x) \leq p^{i+1}\} \trianglelefteq G.$$

Prova: Suponhamos que T_i seja normal em G. Seja $\widetilde{G} = \dfrac{G}{T_i}$, note ainda que $\widetilde{G}$ satisfaz as hipóteses do lema 2.1.3. Com efeito :

(a) $\widetilde{G} = \dfrac{G}{T_i}$ é localmente finito.

De fato, seja $\dfrac{G}{T_i} = \{\, gT_i \mid g \in G \,\}$ e $K \leq \widetilde{G}$ finitamente gerado, então
$K = \langle\, g_1T_i, g_2T_i, ..., g_nT_i \,\rangle$. Afirmemos ainda, que:

$$\langle g_1T_i, g_2T_i, ..., g_nT_i \rangle = \frac{\langle g_1, g_2, ..., g_n \rangle T_i}{T_i}$$

De fato, se $y \in \langle g_1T_i, ..., g_nT_i\rangle$, então $y = (g_1T_i)^{e_1}(g_2T_i)^{e_2}...(g_nT_i)^{e_n} = (g_1^{e_1}g_2^{e_2}...g_n^{e_n})T_i$ $\therefore$ $y \in \dfrac{\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle T_i}{T_i}$

Suponhamos $y \in \dfrac{\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle T_i}{T_i}$, logo $y = xT_i$, onde $x \in \langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle T_i =$ $= \{gt_i \mid g \in \langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle \ e \ t_i \in T_i\}$, portanto $x = a_1^{e_1}a_2^{e_2}.....a_n^{e_n}t_i$, onde $a_j \in \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ e $e_j = \pm 1$. Sendo assim, temos:

$y = xT_i = (a_1^{e_i}a_2^{e_2}...a_n^{e_n}t_i)T_i = (a_1^{e_1}T_i)(a_2^{e_2}T_i)...(a_n^{e_n}T_i) \in \langle g_1T_i, g_2T_i, ..., g_nT_i\rangle$. Assim $y \in \langle g_1T_i, g_2T_i, ..., g_nT_i\rangle$. Logo:

$$\frac{\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle T_i}{T_i} = \langle g_1T_i, g_2T_i, ..., g_nT_i\rangle.$$

Temos ainda, pelo segundo teorema do isomorfismo que:

$$\frac{\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle T_i}{T_i} \simeq \frac{\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle}{T_i \cap \langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle}$$

é finito. Pois G é localmente finito. Portanto, $\dfrac{\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle T_i}{T_i}$ é finito. Consequentemente K finito.

(b) $\widetilde{G} = \dfrac{G}{T_i}$ é um p-grupo e todo subgrupo de ordem p de $\widetilde{G}$ é permutável com conjugados

Prova: Seja $H \leq \widetilde{G} = \dfrac{G}{T_i}$ tal que $|H| = p$, temos que $H = \dfrac{K}{T_i}$, onde $K \leq G$. Como H é cíclico, $\dfrac{K}{T_i} = \langle xT_i\rangle = \dfrac{\langle x\rangle T_i}{T_i}$. Portanto, $\dfrac{K}{T_i} = \dfrac{\langle x\rangle T_i}{T_i}$. Logo $K = \langle x\rangle T_i$.

Afirmemos ainda que $K = \langle x\rangle T_i$ é permutável com conjugados de G. Pois $\langle x\rangle <_{C-P} G$, $T_i \trianglelefteq G$. Sendo assim, $\langle x\rangle T_i <_{C-P} G$ e $\dfrac{K}{T_i} <_{C-P} \dfrac{G}{T_i}$. Logo $H <_{C-P} \widetilde{G}$.

Portanto, pelo lema 2.1.3, $\widetilde{T} = \{\ x \in \widetilde{G} \mid o(x) \leq p\}$ é um subgrupo normal de $\widetilde{G}$. Pelo teorema da correspôndencia existe um único $T \leq G$, tal que $T \trianglelefteq G$, onde:

$$\begin{aligned} T = \{y \in G \mid yT_i \in \widetilde{T}\} = \{y \in G \mid o(yT_i) \leq p\} &= \{y \in G \mid y^p \in T_i\} = \\ &= \{y \in G \mid o(y^p) \leq p^i\} = \\ &= \{y \in G \mid o(y) \leq p^{i+1}\} = T_{i+1} \end{aligned}$$

Sendo assim, $T = T_{i+1}$. Portanto, concluímos que $T_{i+1} \trianglelefteq G$ e por indução,

$$T_i = \{x \in G \mid o(x) \leq p^i\} \trianglelefteq G \quad \forall i \geq 1.$$

□

Teorema 2.1.6 : *Se G é um p-grupo localmente finito, p um primo ímpar no qual todo subgrupo de G de ordem p é subgrupo permutável com conjugados, então dados x e $y \in G$ de ordem p, $\langle x, y\rangle$ é um grupo de ordem $\leq p^3$.*

Demonstração:
Dados x e $y \in G$ de ordem p, seja $H = \langle x, y\rangle$. Como G é localmente finito, segue-se que H finito. Daí temos:

(1) Suponhamos $[x, y] = 1$. Nesse caso, $xy = yx$. Portanto, H abeliano e $H = \langle x\rangle\langle y\rangle$. Sendo assim, temos:

$$|H| = \frac{|\langle x\rangle||\langle y\rangle|}{|\langle x\rangle \cap \langle y\rangle|} = \frac{p^2}{p^\alpha}$$

onde $\alpha \leq 1$. Portanto, $|H| \leq p^2 \leq p^3$.

(2) Suponhamos agora, $[x, y] \neq 1$. Temos que $[x, y] \in \langle x\rangle^H \cap \langle y\rangle^H$. Pelo corolário 2.0.3 $\langle x\rangle^H$ e $\langle y\rangle^H$ são p-grupos abelianos elementares. Portanto, $[x, y]$ comuta com x e com y e $o([x, y]) = p$. Seja agora $N = \langle [x, y]\rangle$. Como $o([x, y]) = p$, temos $|N| = p$. Como $[x, y]$ comuta com x e y, temos $N \leq Z(H)$, logo $N \trianglelefteq H$. Agora, $[x, y] \in N$ implica,

$$(xN)(yN) = (yN)(xN).$$

Logo, segue-se que:

$$\frac{H}{N} = \frac{\langle x, y\rangle}{N} = \langle xN, yN\rangle = \langle xN\rangle\langle yN\rangle$$

Portanto:

$$\left|\frac{H}{N}\right| = \frac{|\langle xN\rangle||\langle yN\rangle|}{|\langle xN\rangle \cap \langle yN\rangle|} = \frac{p^2}{p^\alpha}$$

onde $\alpha \leq 1$. Logo $\left|\dfrac{H}{N}\right| \leq p^2$. Como $|N| = p$ temos então $|H| \leq p^3$. □

Referências Bibliográficas

[1] D.J.S.Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlang, New York, 1982.

[2] Feit W e Thompson, *Solvability of groups de odd order*, Pacific J. Math. 13(1963),775 -1029

[3] J.J.Rotman, *The Theory of Groups,An Introdution*, 3rd ed, Allyn and Bacon, Boston, 1984.

[4] John C. Lennox, Stewart.E.Stonehewer, *Subnormal Subgroips of Groups*, Clarendon Press Oxford, (1987), 215.

[5] O.Ore, *On the application of structure theory to groups, Bull. Amer. Math. Soc.* 44 1984

[6] O.H.Kegel, *Produkte nilpotenter gruppen, Arch. Math.* 12 (1961), 90-93.

[7] P.Wang, *Some sufficient conditions of a nilpotent groups,J. Algebra* 148 (1992), 289-295

[8] T.Foguel, *On seminormal subgroups, J. Algebra* 165(3) (1994), 633-636.

[9] Turval Foguel, *Conjugate-Permutable Subgroups*, Journal of Algebra 191, 235-239(1997).

[10] X.Su, Seminormal subgroups of finite groups, **J. Math (Wuhan) 8**(1) (1988), 5-10.